

Ρυθμός μεταβολής

999. Τη χρονική στιγμή t_1 ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$,

$$\text{δηλαδή } f'(t_1) = \frac{1}{16} f'(0).$$

Στη σχέση $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$ θέτουμε όπου $\sqrt{t}$ το t και έχουμε :

$$f(t) = 1 - 2^{-\frac{t}{499}}$$

Έτσι παίρνουμε :

$$f'(t) = -2^{-\frac{t}{499}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{t}{499}\right)' = \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{t}{499}}$$

$$\text{και } f'(0) = \frac{\ln 2}{499}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι :

$$\begin{aligned} f'(t_1) = \frac{1}{16} f'(0) &\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{t_1}{499}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\ln 2}{499} \Leftrightarrow 2^{-\frac{t_1}{499}} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{-\frac{t_1}{499}} = 2^{-4} \Leftrightarrow \\ &-\frac{t_1}{499} = -4 \Leftrightarrow \boxed{t_1 = 1996} \end{aligned}$$

1000. i. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση $f(e^x \eta \mu x) = 2e^x$ και παίρνουμε :

$$\begin{aligned} f'(e^x \eta \mu x) \cdot (e^x \eta \mu x)' &= 2e^x \Leftrightarrow f'(e^x \eta \mu x) \cdot (e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x) = 2e^x \Leftrightarrow \\ f'(e^x \eta \mu x) \cdot e^x \cdot (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) &= 2e^x \Leftrightarrow f'(e^x \eta \mu x) \cdot (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) = 2 \end{aligned}$$

Για $x=0$ έχουμε :

$$f'(e^0 \eta \mu 0) \cdot (\eta \mu 0 + \sigma \upsilon \nu 0) = 2 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = 2}$$

ii. Στη δοθείσα σχέση $f(e^x \eta \mu x) = 2e^x$ για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(e^0 \eta \mu 0) = 2e^0 \Leftrightarrow f(0) = 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = 2x \Leftrightarrow y = 2x + 2$$

iii. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται πάνω στην εφαπτομένη της C_f . Η τετμημένη του σημείου αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec , δηλαδή $x'(t) = 2$. Το σημείο M ανήκει στην εφαπτομένη της C_f , άρα $y(t) = 2x(t) + 2$.

Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση έχουμε :

$$y'(t) = 2x'(t) \Leftrightarrow \boxed{y'(t) = 4 \text{ cm/sec}}$$

1001. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι :

$$E = \frac{1}{2}(\text{OA}) \cdot (\text{OB}) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^x = xe^x$$

Το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec, δηλαδή $x'(t)=2$,
 άρα και τη χρονική στιγμή $t=t_0$ θα είναι $x'(t_0)=2$.

Επιπλέον είναι και $x(t_0)=1$.

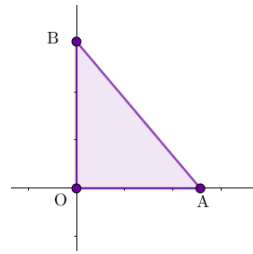
Παραγωγίζουμε τη σχέση $E(t) = x(t)e^{x(t)}$ και έχουμε :

$$E'(t) = x'(t)e^{x(t)} + x(t)x'(t)e^{x(t)} = x'(t)e^{x(t)}(1+x(t))$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = x'(t_0)e^{x(t_0)}(1+x(t_0)) \quad \begin{matrix} x'(t_0)=2 \\ x(t_0)=1 \end{matrix} \Leftrightarrow E'(t_0) = 2e(1+1) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E'(t_0) = 4e \text{ cm}^2 / \text{sec}}$$



1002. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι :

$$E = \frac{1}{2}(\text{OA}) \cdot (\text{AB}) = \frac{1}{2}xe^x$$

Το x μεταβάλλεται με ρυθμό 1cm/sec, δηλαδή
 $x'(t)=1$, άρα και τη χρονική στιγμή $t=t_0$ θα είναι
 $x'(t_0)=1$. Επιπλέον είναι και $x(t_0)=4$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση $E(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}$ και

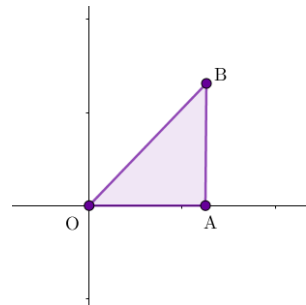
έχουμε :

$$E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)e^{x(t)} + \frac{1}{2}x(t)x'(t)e^{x(t)} = \frac{1}{2}x'(t)e^{x(t)}(1+x(t))$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)e^{x(t_0)}(1+x(t_0)) \quad \begin{matrix} x'(t_0)=1 \\ x(t_0)=4 \end{matrix} \Leftrightarrow E'(t_0) = \frac{1}{2}e^4(1+4) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E'(t_0) = \frac{5e^4}{2} \text{ cm}^2 / \text{sec}}$$



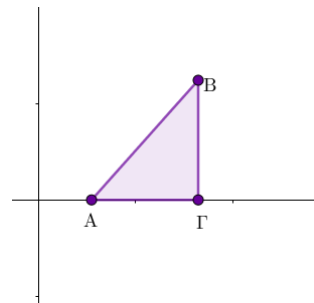
1003. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι :

$$E = \frac{1}{2}(\text{AΓ}) \cdot (\text{BΓ}) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$$

Το x μεταβάλλεται με ρυθμό 0,5cm/sec, δηλαδή
 $x'(t)=0,5$, άρα και τη χρονική στιγμή $t=t_0$ θα είναι
 $x'(t_0)=0,5$. Επιπλέον είναι και $x(t_0)=2$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση $E(t) = \frac{1}{2}(x(t)-1) \cdot \ln x(t)$

και έχουμε :



$$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \cdot \ln x(t) + \frac{1}{2} (x(t) - 1) \cdot \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{2} x'(t) \left(\ln x(t) + \frac{x(t) - 1}{x(t)} \right)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0) \left(\ln x(t_0) + \frac{x(t_0) - 1}{x(t_0)} \right) \stackrel{x'(t_0)=0,5}{\Leftrightarrow x(t_0)=2} E'(t_0) = \frac{1}{2} 0,5 \left(\ln 2 + \frac{2-1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{4} \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \boxed{E'(t_0) = \frac{2 \ln 2 + 1}{8} \text{ cm}^2 / \text{sec}}$$

1004. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται πάνω στην καμπύλη C . Η κλίση της καμπύλης C σε ένα σημείο της $A(x_0, e^{x_0})$ είναι 1, δηλαδή $f'(x_0)=1$.

Είναι :

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} f'(x_0) = e^{x_0} \Leftrightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Καθώς το M περνάει από το σημείο A , έστω την χρονική στιγμή t_0 , η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο, δηλαδή $x'(t_0)=3$. Αφού λοιπόν $A(0,1)$, τότε τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $x(t_0)=0$.

Υπολογίζουμε την απόσταση $\ell=(OM)=d(t)$:

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + (e^{x(t)})^2} = \sqrt{x^2(t) + e^{2x(t)}}$$

Παραγωγίζουμε και έχουμε :

$$d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + e^{2x(t)}}} \cdot (x^2(t) + e^{2x(t)})' \Leftrightarrow d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2x'(t)e^{2x(t)}}{2\sqrt{x^2(t) + e^{2x(t)}}} \Leftrightarrow$$

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + x'(t)e^{2x(t)}}{\sqrt{x^2(t) + e^{2x(t)}}}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)e^{2x(t_0)}}{\sqrt{x^2(t_0) + e^{2x(t_0)}}} \stackrel{x'(t_0)=3}{\Leftrightarrow x(t_0)=0} d'(t_0) = \frac{3e^0}{\sqrt{e^0}} \Leftrightarrow \boxed{d'(t_0) = 3 \mu / \text{sec}}$$

1005. Έστω $M(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του κινητού ενώ κινείται κατά μήκος της παραβολής.

i. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το σημείο $A(1, -3)$. Τη χρονική εκείνη στιγμή η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο, άρα $x'(t_0)=2$. Επιπλέον θα είναι και $x(t_0)=1$.

Το M ανήκει στην παραβολή άρα $y(t) = x^2(t) - 4x(t)$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε $y'(t) = 2x(t)x'(t) - 4x'(t)$, οπότε για $t=t_0$ έχουμε :

$$y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 4x'(t_0) \stackrel{x'(t_0)=2}{\Leftrightarrow x(t_0)=1} y'(t_0) = 4 - 8 \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = -4 \mu / \text{sec}}$$

ii. Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης, όταν δηλαδή θα ισχύει $y'(t_1) = 2x'(t_1)$.

Έτσι στη σχέση $y'(t) = 2x(t)x'(t) - 4x'(t)$ για $t=t_1$ παίρνουμε :

$$y'(t_1) = 2x(t_1)x'(t_1) - 4x'(t_1) \Leftrightarrow \cancel{2x'(t_1)} = \cancel{2x'(t_1)}(x(t_1) - 2) \Leftrightarrow x(t_1) - 2 = 1 \Leftrightarrow x(t_1) = 3$$

Επιπλέον βρίσκουμε :

$$y(t_1) = x^2(t_1) - 4x(t_1) \xrightarrow{x(t_1)=3} y(t_1) = 3^2 - 4 \cdot 3 \Leftrightarrow y(t_1) = 9 - 12 \Leftrightarrow y(t_1) = -3$$

Το ζητούμενο λοιπόν **σημείο** είναι το **$M(3, -3)$** .

1006. i. Είναι :

$$(OB) = S(t) = vt = 2t$$

Επιπλέον έχουμε :

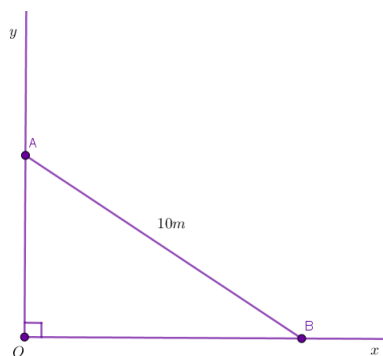
$$(OA)^2 = (AB)^2 - (OB)^2 = 10^2 - (2t)^2 = 100 - 4t^2 = 4(25 - t^2) \Leftrightarrow$$

$$(OA) = 2\sqrt{25 - t^2}$$

Οπότε :

$$E(t) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - t^2} \cdot 2t \Leftrightarrow$$

$$E(t) = 2t\sqrt{25 - t^2}, t \in [0, 5]$$



ii. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6 m. Είναι :

$$(OA) = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{25 - t_0^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{25 - t_0^2} = 3 \Leftrightarrow 25 - t_0^2 = 9 \Leftrightarrow t_0^2 = 16 \Leftrightarrow t_0 = 4 \text{ sec}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $E(t) = 2t\sqrt{25 - t^2}$ και παίρνουμε :

$$E'(t) = 2\sqrt{25 - t^2} + 2t \cdot \frac{1}{\sqrt{25 - t^2}} \cdot (25 - t^2)' = 2\sqrt{25 - t^2} - \frac{2t^2}{\sqrt{25 - t^2}}$$

Οπότε :

$$E'(4) = 2\sqrt{25 - 4^2} - \frac{2 \cdot 4^2}{\sqrt{25 - 4^2}} = 2\sqrt{9} - \frac{32}{\sqrt{9}} = 6 - \frac{32}{3} = -\frac{14}{3} \text{ m}^2 / \text{sec}$$

1007. i. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται πάνω στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Η τετμημένη του M μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, δηλαδή $x'(t) = 4$, άρα και τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $x'(t_0) = 4$. Επιπλέον έχουμε $x(t_0) = 4$.

Το M ανήκει στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$, άρα $y(t) = \sqrt{x(t)}$. Παραγωγίζοντας αυτή τη

σχέση παίρνουμε $y'(t) = \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}}$, οπότε για $t=t_0$ έχουμε :

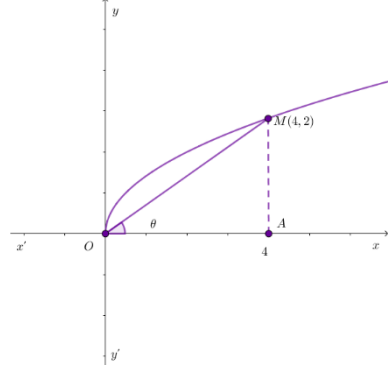
$$y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)}} \stackrel{x'(t_0)=4}{\underset{x(t_0)=4}{\Leftrightarrow}} y'(t_0) = \frac{4}{2\sqrt{4}} \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = 1 \text{ cm/sec}}$$

ii. Τη χρονική στιγμή t_0 οι συντεταγμένες του σημείου M θα είναι $x(t_0)=4$ και

$$y(t_0) = \sqrt{x(t_0)} = \sqrt{4} = 2, \text{ δηλαδή } M(4,2).$$

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε :

$$\begin{aligned} (OM)^2 &= (AM)^2 + (OA)^2 \Leftrightarrow \\ (OM)^2 &= 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow (OM)^2 = 20 \Rightarrow \\ (OM) &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$



Έτσι βρίσκουμε :

$$\sin\theta(t_0) = \frac{(OA)}{(OM)} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Είναι $\varepsilon\phi\theta = \frac{y}{x}$, άρα $\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$. Παραγωγίζουμε τη σχέση και παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) &= \frac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \stackrel{x(t_0)=4, y(t_0)=2}{\underset{x'(t_0)=4, y'(t_0)=1}{\Leftrightarrow}} \\ \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 \cdot \theta'(t_0) &= \frac{4 - 2 \cdot 4}{4^2} \Leftrightarrow \frac{1}{20} \cdot \theta'(t_0) = \frac{-4}{16} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$5\theta'(t_0) = -1 \Leftrightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\frac{1}{5} \text{ rad/sec}}$$

1008. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται επί της καμπύλης $y=x^2+1$.

Η προβολή του M στον ημιάξονα Ox απομακρύνεται από το O με ταχύτητα 2m/sec, δηλαδή $x'(t)=2$, άρα και τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $x'(t_0)=2$. Επιπλέον έχουμε $x(t_0)=1$, αφού τη χρονική στιγμή t_0 είναι $(OA)=1\text{m}$.

Το M ανήκει στην καμπύλη $y=x^2+1$, άρα $y(t) = x^2(t) + 1$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε $y'(t) = 2x(t) \cdot x'(t)$, οπότε για $t=t_0$ έχουμε :

$$y'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) \stackrel{x'(t_0)=2}{\underset{x(t_0)=1}{\Leftrightarrow}} y'(t_0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = 4 \text{ m/sec}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 οι συντεταγμένες του σημείου M θα είναι $x(t_0)=1$ και $y(t_0) = x^2(t_0) + 1 = 1^2 + 1 = 2$, δηλαδή $M(1,2)$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ δίνεται από τον τύπο :

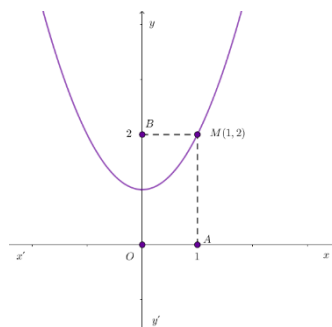
$$E(t) = x(t) \cdot y(t)$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή και παίρνουμε :

$$E'(t) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = x'(t_0) \cdot y(t_0) + x(t_0) \cdot y'(t_0) \quad \begin{matrix} x(t_0)=1, y(t_0)=2 \\ x'(t_0)=2, y'(t_0)=4 \end{matrix} \Leftrightarrow E'(t_0) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \Leftrightarrow \boxed{E'(t_0) = 8 \text{ m}^2 / \text{sec}}$$



1009. i. Είναι $f(x) = \ln x$ και $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$ είναι η :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a}$$

ii. Η εφαπτομένη ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0,0)$ την επαληθεύει :

$$0 = \frac{1}{a} \cdot 0 - 1 + \ln a \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = e}$$

iii. Το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec , δηλαδή $a'(t) = 2$, άρα και $a'(t_0) = 2$.

Τη χρονική στιγμή t_0 , όταν δηλαδή η εφαπτομένη ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, το a έχει την τιμή e , δηλαδή $a(t_0) = e$.

Είναι $M \in C_f$, άρα η τεταγμένη του M είναι :

$$y(t) = \ln a(t)$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $y(t) = \ln a(t)$ και έχουμε :

$$y'(t) = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$y'(t_0) = \frac{a'(t_0)}{a(t_0)} \quad \begin{matrix} a'(t_0)=2 \\ a(t_0)=e \end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = \frac{2}{e} \text{ m/sec}}$$

1010. i. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται πάνω στην παραβολή $y = x^2 - 5$.

Όταν τη χρονική στιγμή t_0 το κινητό περνά από το σημείο $A(3, 4)$ της παραβολής, δηλαδή όταν είναι $x(t_0) = 3$, η τεταγμένη του κινητού αυξάνεται με ρυθμό 30 μονάδες το δευτερόλεπτο, δηλαδή $y'(t_0) = 30$.

Το Μ ανήκει στην παραβολή $y=x^2-5$, άρα $y(t)=x^2(t)-5$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε $y'(t)=2x(t) \cdot x'(t)$, οπότε για $t=t_0$ έχουμε :

$$y'(t_0)=2x(t_0) \cdot x'(t_0) \quad \begin{matrix} y'(t_0)=30 \\ \Leftrightarrow \\ x(t_0)=3 \end{matrix} \quad 30=2 \cdot 3 \cdot x'(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x'(t_0)=5 \text{ μονάδες / sec}}$$

ii. Υπολογίζουμε την απόσταση (OM)=d(t) :

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + (x^2(t) - 5)^2} = \sqrt{x^2(t) + x^4(t) - 10x^2(t) + 25} = \\ &= \sqrt{x^4(t) - 9x^2(t) + 25} \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε και έχουμε :

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{x^4(t) - 9x^2(t) + 25}} \cdot (x^4(t) - 9x^2(t) + 25)' \quad \Leftrightarrow \\ d'(t) &= \frac{4x^3(t)x'(t) - 18x(t)x'(t)}{2\sqrt{x^4(t) - 9x^2(t) + 25}} \end{aligned}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} d'(t_0) &= \frac{4x^3(t_0)x'(t_0) - 18x(t_0)x'(t_0)}{2\sqrt{x^4(t_0) - 9x^2(t_0) + 25}} \quad \begin{matrix} x'(t_0)=5 \\ \Leftrightarrow \\ x(t_0)=3 \end{matrix} \quad d'(t_0) = \frac{4 \cdot 27 \cdot 5 - 18 \cdot 3 \cdot 5}{2\sqrt{81 - 9 \cdot 9 + 25}} \quad \Leftrightarrow \\ d'(t_0) &= \frac{540 - 270}{2\sqrt{25}} \quad \Leftrightarrow \quad d'(t_0) = \frac{270}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d'(t_0) = 27 \text{ μονάδες / sec}} \end{aligned}$$

1011. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό περνά από το σημείο $A\left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$,

δηλαδή όταν είναι $x(t_0)=1$ και $y(t_0)=\sqrt{\frac{3}{2}}$, η τετμημένη του κινητού ελαττώνεται με ρυθμό 2 cm/sec, δηλαδή $x'(t_0)=-2$.

Το Μ ανήκει στην εξίσωση $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$, άρα $\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{3} = 1$. Παραγωγίζοντας

αυτή τη σχέση παίρνουμε $x(t)x'(t) + \frac{2}{3}y(t)y'(t) = 0$, οπότε για $t=t_0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} x(t_0)x'(t_0) + \frac{2}{3}y(t_0)y'(t_0) &= 0 \quad \begin{matrix} x'(t_0)=-2 \\ \Leftrightarrow \\ x(t_0)=1, y(t_0)=\sqrt{\frac{3}{2}} \end{matrix} \quad 1 \cdot (-2) + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot y'(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot y'(t_0) &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot y'(t_0) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad y'(t_0) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{y'(t_0) = \sqrt{6} \text{ cm / sec}}$$

1012. i. Είναι $f(x) = \ln x$ και $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι η :

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη e , δηλαδή $\alpha(t_0) = e$. Επιπλέον θα είναι και $\alpha'(t_0) = 2\alpha(t_0) = 2e$.

Το M είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με τον άξονα $x'x$, έτσι για $y=0$ έχουμε :

$$0 = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}x = 1 - \ln \alpha \Leftrightarrow x = \alpha - \alpha \ln \alpha$$

Η τετμημένη του σημείου M είναι :

$$x(t) = \alpha(t) - \alpha(t) \ln \alpha(t)$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $x(t) = \alpha(t) - \alpha(t) \ln \alpha(t)$ και έχουμε :

$$x'(t) = \alpha'(t) - \alpha'(t) \cdot \ln \alpha(t) - \cancel{\alpha(t)} \cdot \frac{1}{\cancel{\alpha(t)}} \cdot \alpha'(t) \Leftrightarrow$$

$$x'(t) = \cancel{\alpha'(t)} - \alpha'(t) \cdot \ln \alpha(t) - \cancel{\alpha'(t)} \Leftrightarrow x'(t) = -\alpha'(t) \cdot \ln \alpha(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$x'(t_0) = -\alpha'(t_0) \cdot \ln \alpha(t_0) \quad \begin{matrix} \alpha'(t_0)=2e \\ \alpha(t_0)=e \end{matrix} \Leftrightarrow x'(t_0) = -2e \cdot \ln e \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x'(t_0) = -2e \text{ μονάδες μήκους / μονάδα χρόνου}}$$

ii. Τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο A θα έχει τετμημένη e και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(e) = \frac{1}{e}$ δηλαδή $\varepsilon\theta(t_0) = \frac{1}{e}$.

Έτσι θα είναι και :

$$\sin^2 \theta(t_0) = \frac{1}{1 + \varepsilon\theta^2(t_0)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2 + 1}$$

Είναι :

$$\varepsilon\theta = \lambda_e \Leftrightarrow \varepsilon\theta = f'(\alpha) \Leftrightarrow \varepsilon\theta = \frac{1}{\alpha}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\varepsilon\theta(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ και παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) &= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) = -\frac{2\alpha(t)}{\alpha^2(t)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) &= -\frac{2}{\alpha(t)} \end{aligned}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{2}{\alpha(t_0)} \stackrel{\alpha(t_0)=e}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\frac{e^2}{e^2+1}} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{2}{e} \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0) = -\frac{2}{e} \cdot \frac{e^2}{e^2+1} \Leftrightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\frac{2e}{e^2+1} \text{ rad / μονάδα χρόνου}}$$

1013. α. Είναι $f(x) = \frac{x^2}{4}$ με $f'(x) = \frac{x}{2}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο

σημείο της $A(6, f(6))$ είναι η :

$$y - f(6) = f'(6)(x - 6) \Leftrightarrow y - 9 = 3(x - 6) \Leftrightarrow y = 3x - 18 + 9 \Leftrightarrow \mathbf{y = 3x - 9}$$

β. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται πάνω στην C_f . Καθώς το M περνάει από το σημείο A , έστω την χρονική στιγμή t_0 , η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 μονάδες/sec, δηλαδή $x'(t_0) = 4$. Αφού λοιπόν $A(6, 9)$, τότε τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $x(t_0) = 6$.

i. Είναι $M \in C_f$, άρα $y(t) = \frac{x^2(t)}{4}$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση έχουμε

$$y'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{2}, \text{ οπότε για } t=t_0 \text{ έχουμε :}$$

$$y'(t_0) = \frac{x(t)x'(t_0)}{2} \stackrel{\substack{x'(t_0)=4 \\ x(t_0)=6}}{\Leftrightarrow} y'(t_0) = \frac{24}{2} \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = 12 \text{ μ / sec}}$$

Εναλλακτικός τρόπος

Καθώς το M περνάει από το σημείο A θα ανήκει στην εφαπτομένη της C_f στο A , δηλαδή :

$$y(t) = 3x(t) - 9$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε $y'(t) = 3x'(t)$, έτσι για $t=t_0$ έχουμε :

$$y'(t_0) = 3x'(t_0) \stackrel{x'(t_0)=4}{\Leftrightarrow} \boxed{y'(t_0) = 12 \text{ μ / sec}}$$

ii. Τη χρονική στιγμή t_0 το σώμα βρίσκεται στο σημείο A το οποίο έχει τετμημένη 6. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(6) = 3$ δηλαδή $\epsilon\phi\theta(t_0) = 3$.

Έτσι θα είναι και :

$$\sin^2 \theta(t_0) = \frac{1}{1 + \epsilon\phi'^2 \theta(t_0)} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10}$$

Είναι :

$$\epsilon\phi\theta = \lambda_e \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta = f'(x) \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{x}{2}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\epsilon\phi\theta(t) = \frac{x(t)}{2}$ και παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{x'(t)}{2}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sigma v^2 \theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2} \stackrel{x'(t_0)=4}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\frac{1}{10}} \cdot \theta'(t_0) = 2 \Leftrightarrow \boxed{\theta'(t_0) = \frac{1}{5} \mu / \text{sec}}$$

1014. i. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} & \stackrel{x=x+h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) - g(x)}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) - g(x)}{2h} \stackrel{\substack{u=2h \\ h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}}{=} \\ & = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x+u) - g(x)}{u} = 2g'(x) \end{aligned}$$

Άρα :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} & = \ln x^2 - 2x \Leftrightarrow 2g'(x) = 2 \ln x - 2x \Leftrightarrow \\ 2f(x) & = 2 \ln x - 2x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x - x, x > 0} \end{aligned}$$

ii. Είναι $f(x) = \ln x - x$ με $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Α έχει τετμημένη $\frac{1}{2}$, δηλαδή

$\alpha(t_0) = \frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο Α θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ δηλαδή } \varepsilon_{\theta}(t_0) = 1.$$

Έτσι θα είναι και :

$$\sigma v^2 \theta(t_0) = \frac{1}{1 + \varepsilon_{\theta}^2(t_0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Είναι :

$$\varepsilon_{\theta} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon_{\theta} = f'(a) \Leftrightarrow \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{a} - 1$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\varepsilon_{\theta}(t) = \frac{1}{\alpha(t)} - 1$ και παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) & = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) & = \frac{1}{\alpha(t)} \end{aligned}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) = \frac{1}{\alpha(t_0)} \stackrel{\alpha(t_0)=4}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \theta'(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\theta'(t_0) = \frac{1}{8} \mu / \text{sec}}$$

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι η :

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - (\ln \alpha - \alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - 1 + \cancel{\alpha} + \ln \alpha - \cancel{\alpha} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x + \ln \alpha - 1$$

Το M είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με τον άξονα $y'y$, έτσι για $x=0$ έχουμε :

$$y = \ln \alpha - 1$$

Άρα **οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0, \ln \alpha - 1)$.**

iv. Η τεταγμένη του σημείου M είναι :

$$y(t) = \ln \alpha(t) - 1$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $y(t) = \ln \alpha(t) - 1$ και έχουμε :

$$y'(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \Leftrightarrow y'(t) = \frac{-\alpha(t)}{\alpha(t)} \Leftrightarrow y'(t) = -1$$

Δηλαδή **ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι σταθερός.**

1015. Το μήκος L ενός κύκλου δίνεται από τον τύπο $L=2\pi r$, και το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου από τον τύπο $E=\pi r^2$.

Το μήκος του κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό -2cm/sec , δηλαδή $L'(t)=-2$, άρα και τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $L'(t_0)=-2$. Επιπλέον είναι και $E(t_0)=4\pi$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση $L(t) = 2\pi r(t)$ και έχουμε :

$$L'(t) = 2\pi r'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$L'(t_0) = 2\pi r'(t_0) \stackrel{L'(t_0)=-2}{\Leftrightarrow} -2 = 2\pi r'(t_0) \Leftrightarrow \boxed{r'(t_0) = -\frac{1}{\pi} \text{ cm/sec}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $E(t_0)=4\pi$, οπότε :

$$E(t_0) = \pi r^2(t_0) \Leftrightarrow 4\pi = \pi r^2(t_0) \Leftrightarrow r^2(t_0) = 4 \Leftrightarrow r(t_0) = 2$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $E(t) = \pi r^2(t)$ και έχουμε :

$$E'(t) = 2\pi r(t)r'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = 2\pi r(t_0)r'(t_0) \stackrel{\substack{r(t_0)=2 \\ r'(t_0)=-\frac{1}{\pi}}}{\Leftrightarrow} E'(t_0) = 2\pi \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \Leftrightarrow \boxed{E'(t_0) = -4 \text{ cm}^2 / \text{sec}}$$

1016. Έστω x και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Η διάσταση x αυξάνεται με ρυθμό 24 cm/sec , δηλαδή $x'(t)=24$, άρα και $x'(t_0)=24$. Η διάσταση y ελαττώνεται με ρυθμό 12 cm/sec , δηλαδή $y'(t)=-12$, άρα και $y'(t_0)=-12$.

Τη χρονική στιγμή t_0 το ορθογώνιο είναι τετράγωνο με εμβαδόν αριθμητικά ίσο με την περίμετρό του, δηλαδή θα είναι :

$$E(t_0) = \Pi(t_0) \Leftrightarrow x(t_0)y(t_0) = 2x(t_0) + 2y(t_0) \quad \text{ABΓΔ τετράγωνο} \Leftrightarrow$$

$$x^2(t_0) = 4x(t_0) \Rightarrow x(t_0) = 4 = y(t_0)$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $E(t) = x(t)y(t)$ και έχουμε :

$$E'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) \quad \begin{matrix} x(t_0)=y(t_0)=4 \\ x'(t_0)=24, y'(t_0)=-12 \end{matrix} \Leftrightarrow E'(t_0) = 24 \cdot 4 + 4 \cdot (-12) \Leftrightarrow$$

$$E'(t_0) = 96 - 48 \Leftrightarrow \boxed{E'(t_0) = 48 \text{ cm}^2/\text{sec}}$$

1017. Έστω ότι το ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση $\beta=12$, το αντίστοιχο ύψος του είναι u και οι δύο ίσες πλευρές του είναι x .

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση έχει μήκος 8cm, δηλαδή $u(t_0)=8$. Το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec, δηλαδή $x'(t)=1$, άρα και $x'(t_0)=1$.

i. Η περίμετρος του ισοσκελούς τριγώνου δίνεται από τον τύπο $\Pi=\beta+2x=12+2x$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\Pi(t) = 12 + 2x(t)$ και έχουμε :

$$\Pi'(t) = 2x'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\Pi'(t_0) = 2x'(t_0) \quad \begin{matrix} x'(t_0)=1 \end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{\Pi'(t_0) = 2 \text{ cm/sec}}$$

Το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\beta u = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot u = 6u$.

Το ύψος μεταβάλλεται όσο μεταβάλλονται οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα,

αφού το ΑΔ είναι το ύψος, και παίρνουμε :

$$x^2(t) = u^2(t) + 6^2 \Leftrightarrow x^2(t) = u^2(t) + 36 \Leftrightarrow$$

$$u^2(t) = x^2(t) - 36 \Leftrightarrow u(t) = \sqrt{x^2(t) - 36}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $u=8$. Άρα :

$$x^2(t_0) = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow x^2(t_0) = 64 + 36 \Leftrightarrow$$

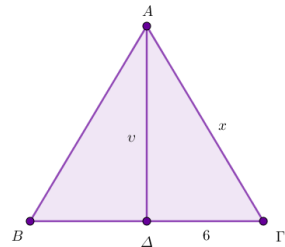
$$x^2(t_0) = 100 \Leftrightarrow x(t_0) = 10$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση :

$$E(t) = 6u(t) \Leftrightarrow E(t) = 6\sqrt{x^2(t) - 36}$$

και έχουμε :

$$E'(t) = 6 \frac{1}{\sqrt{x^2(t) - 36}} \cancel{x} x'(t) \Leftrightarrow E'(t) = \frac{6x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t) - 36}}$$



Για $t=t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = \frac{6x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)-36}} \stackrel{x(t_0)=10}{\Leftrightarrow} E'(t_0) = \frac{6 \cdot 10 \cdot 1}{\sqrt{10^2-36}} \Leftrightarrow E'(t_0) = \frac{60}{\sqrt{100-36}} \Leftrightarrow$$

$$E'(t_0) = \frac{60}{\sqrt{64}} \Leftrightarrow E'(t_0) = \frac{60}{8} \Leftrightarrow \boxed{E'(t_0) = \frac{15}{2} \text{ cm}^2 / \text{sec}}$$

ii. Έστω θ η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$. Στο τρίγωνο $\Lambda\Delta\Gamma$ τη χρονική στιγμή x_0 θα έχουμε :

$$\sin \frac{\theta(t_0)}{2} = \frac{\Lambda\Delta}{\Lambda\Gamma} \Leftrightarrow \sin \frac{\theta(t_0)}{2} = \frac{v(t_0)}{x(t_0)} \Leftrightarrow \sin \frac{\theta(t_0)}{2} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \sin \frac{\theta(t_0)}{2} = \frac{4}{5}$$

Επιπλέον στο τρίγωνο $\Lambda\Delta\Gamma$ ισχύει :

$$\varepsilon\phi \frac{\theta(t)}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Lambda\Delta} \Leftrightarrow \varepsilon\phi \frac{\theta(t)}{2} = \frac{6}{v(t)} \Leftrightarrow \varepsilon\phi \frac{\theta(t)}{2} = \frac{6}{\sqrt{x^2(t)-36}}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta(t)}{2}} \cdot \frac{\theta'(t)}{2} = -\frac{6}{x^2(t)-36} \cdot (\sqrt{x^2(t)-36})' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta(t)}{2}} \cdot \frac{\theta'(t)}{2} = -\frac{6}{x^2(t)-36} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)-36}} (x^2(t)-36)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta(t)}{2}} \cdot \frac{\theta'(t)}{2} = -\frac{6}{x^2(t)-36} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t)-36}} \cancel{2}x(t)x'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta(t)}{2}} \cdot \frac{\theta'(t)}{2} = -\frac{6x(t)x'(t)}{x^2(t)-36} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2(t)-36}}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta(t_0)}{2}} \cdot \frac{\theta'(t_0)}{2} = -\frac{6x(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)-36} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2(t_0)-36}} \stackrel{x(t_0)=10}{\Leftrightarrow} \stackrel{x'(t_0)=1}{\Leftrightarrow}$$

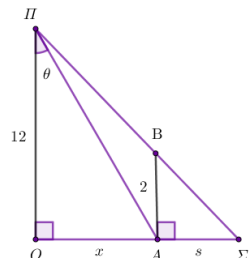
$$\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \frac{\theta'(t_0)}{2} = -\frac{6 \cdot 10 \cdot 1}{10^2-36} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^2-36}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{16}{25}} \cdot \frac{\theta'(t_0)}{2} = -\frac{60}{64} \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta'(t_0)}{2} = -\frac{16}{25} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{8} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8} \Leftrightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\frac{3}{20} \text{ rad/sec}}$$

1018. i. Ένας άνθρωπος απομακρύνεται από την κολόνα ενός προβολέα με ταχύτητα 4m/sec, δηλαδή $x'(t)=4$.

Τα τρίγωνα $\Lambda\Sigma\text{B}$ και ΟΑΠ είναι όμοια, έτσι θα ισχύει :

$$\frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΟΣ}}{\text{ΑΣ}} \Leftrightarrow \frac{12}{2} = \frac{x+s}{s} \Leftrightarrow 6 = \frac{x+s}{s} \Leftrightarrow$$



$$6s = x + s \Leftrightarrow 5s = x$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση :

$$5s(t) = x(t)$$

και έχουμε :

$$5s'(t) = x'(t) \stackrel{x'(t)=4}{\Leftrightarrow} 5s'(t) = 4 \Leftrightarrow s'(t) = \frac{4}{5} \text{ m/sec}$$

ii. Η τετμημένη του σημείου Σ, έστω α(t), είναι α(t)=x(t)+s(t), έτσι έχουμε :

$$\alpha'(t) = x'(t) + s'(t) \Leftrightarrow \alpha'(t) = 4 + \frac{4}{5} \Leftrightarrow \alpha'(t) = \frac{24}{5} \text{ m/sec}$$

iii. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο άνθρωπος απέχει 30m από την κολόνα του προβολέα, δηλαδή $x(t_0)=30$. Είναι $x'(t)=4$, άρα και $x'(t_0)=4$.

Στο τρίγωνο ΟΑΠ τη χρονική στιγμή x_0 θα έχουμε :

$$\varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{x(t_0)}{12} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{30}{12} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{5}{2}$$

Έτσι θα είναι και :

$$\sin^2\theta(t_0) = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)} = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{25}{4}} = \frac{1}{\frac{29}{4}} = \frac{4}{29}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{x(t)}{12}$ και παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{x'(t)}{12}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{12} \stackrel{x'(t_0)=4}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\frac{4}{29}} \cdot \theta'(t_0) = \frac{4}{12} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{4}{29} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0) = \frac{4}{87} \text{ rad/min}$$

1019. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 60m, δηλαδή $h(t_0)=60$. Το αερόστατο ανεβαίνει με ρυθμό 50m/min, δηλαδή $h'(t)=50$, άρα και $h'(t_0)=50$.

i. Στο τρίγωνο ΑΠΕ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα και παίρνουμε :

$$x^2(t) = h^2(t) + 80^2 \Leftrightarrow x^2(t) = h^2(t) + 6400$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$x^2(t_0) = h^2(t_0) + 6400 \Leftrightarrow x^2(t_0) = 60^2 + 6400 \Leftrightarrow x^2(t_0) = 3600 + 6400 \Leftrightarrow x^2(t_0) = 10000 \Leftrightarrow x(t_0) = 100$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση :

$$x^2(t) = h^2(t) + 6400$$

και έχουμε :

$$2x(t)x'(t) = 2h(t)h'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$2x(t_0)x'(t_0) = 2h(t_0)h'(t_0) \quad \begin{matrix} h(t_0)=60, h'(t_0)=50 \\ \Leftrightarrow \\ x(t_0)=100 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 100x'(t_0) = 2 \cdot 60 \cdot 50 \quad \Leftrightarrow$$

$$100x'(t_0) = 3000 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x'(t_0) = 30 \text{ m/min}}$$

ii. Έστω θ η γωνία ΕΠΑ. Στο τρίγωνο ΑΠΕ τη χρονική στιγμή x_0 θα έχουμε :

$$\varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{h(t_0)}{80} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{60}{80} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{3}{4}$$

Έτσι θα είναι και :

$$\sin^2\theta(t_0) = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t_0)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{1}{\frac{25}{16}} = \frac{16}{25}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{h(t)}{80}$ και παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{h'(t)}{80}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) = \frac{h'(t_0)}{80} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{16}{25}} \cdot \theta'(t_0) = \frac{50}{80} \quad \Leftrightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{16}{25} \cdot \frac{5}{8} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\theta'(t_0) = \frac{2}{5} \text{ rad/min}}$$

1020. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία η δοκός αρχίζει να γλιστράει. Τη χρονική αυτή στιγμή το κάτω άκρο της δοκού απέχει από τον τοίχο 4m, δηλαδή $x(t_0)=4$ και αρχίζει να γλιστράει στο δάπεδο με ταχύτητα 2m/sec, δηλαδή $x'(t_0)=2$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία έχουν περάσει 4sec από τη στιγμή που άρχισε να γλιστράει η δοκός. Θα είναι $x'(t_1)=2$.

Το κάτω άκρο της δοκού αρχίζει να γλιστράει στο δάπεδο με ταχύτητα 2m/sec, δηλαδή σε 1sec διανύει 2m, συνεπώς στα 4sec θα έχει διανύσει 8m. Έτσι σε 4sec θα απέχει από τον τοίχο 12m, δηλαδή $x(t_1)=12$.

Στο τρίγωνο ΑΟΒ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα και παίρνουμε :

$$x^2(t) + y^2(t) = 15^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(t) + y^2(t) = 225$$

Για $t=t_1$ έχουμε :

$$x^2(t_1) + y^2(t_1) = 225 \quad \Leftrightarrow \quad 12^2 + y^2(t_1) = 225 \quad \Leftrightarrow \quad y^2(t_1) = 225 - 144 \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2(t_1) = 81 \quad \Leftrightarrow \quad y(t_1) = 9$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση :

$$x^2(t) + y^2(t) = 25$$

και έχουμε :

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Για $t=t_1$ έχουμε :

$$2x(t_1)x'(t_1) + 2y(t_1)y'(t_1) = 0 \quad \begin{matrix} x(t_1)=12, x'(t_1)=2 \\ y(t_1)=9 \end{matrix} \Leftrightarrow 2 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 9y'(t_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$48 + 18y'(t_1) = 0 \Leftrightarrow 18y'(t_1) = -48 \Leftrightarrow y'(t_1) = -\frac{48}{18} \Leftrightarrow \boxed{y'(t_1) = -\frac{8}{3} \text{ m/sec}}$$

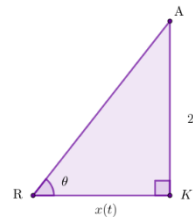
1021. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το αεροπλάνο παίρνει σήμα για να αρχίσει τη διαδικασία προσγείωσης. Έτσι θα είναι $x(t_0)=5$. Το αεροπλάνο πλησιάζει το αεροδρόμιο με ταχύτητα 300km/h, δηλαδή $x'(t_0) = -300$.

Στο τρίγωνο ARK τη χρονική στιγμή x_0 θα έχουμε :

$$\varepsilon\phi\theta(t_0) = \frac{2}{x(t_0)} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\theta(t_0) = \frac{2}{5}$$

Έτσι θα είναι και :

$$\sin^2\theta(t_0) = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\theta(t_0)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\frac{29}{25}} = \frac{25}{29}$$



Παραγωγίζουμε τη σχέση $\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{2}{x(t)}$ και παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = -\frac{2x'(t)}{x^2(t)}$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t_0)} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{2x'(t_0)}{x^2(t_0)} \quad \begin{matrix} x(t_0)=5 \\ x'(t_0)=-300 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{25}{29}} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{2 \cdot (-300)}{5^2} \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0) = -\frac{25}{29} \cdot \frac{-600}{25} \Leftrightarrow \boxed{\theta'(t_0) = \frac{600}{29} \text{ rad/sec}}$$

1022. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα είναι 2m, άρα $r(t_0)=2$. Η κωνική δεξαμενή γεμίζει με σταθερή παροχή νερού $1 \text{ m}^3/\text{min}$, δηλαδή $V'(t)=1$ άρα και $V'(t_0)=1$.

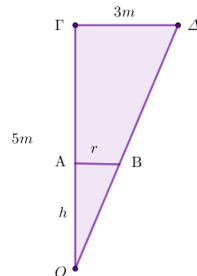
Ο όγκος ενός κώνου δίνεται από τον τύπο :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια, έτσι θα ισχύει :

$$\frac{h}{5} = \frac{r}{3} \Leftrightarrow h = \frac{5r}{3}$$

Οπότε :



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{5r}{3} \Leftrightarrow V = \frac{5}{9} \pi r^3$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση :

$$V(t) = \frac{5}{9} \pi r^3(t)$$

και έχουμε :

$$V'(t) = \frac{5}{9} \cdot 3\pi r^2(t) r'(t) \Leftrightarrow V'(t) = \frac{5}{3} \pi r^2(t) r'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε :

$$V'(t_0) = \frac{5}{3} \pi r^2(t_0) r'(t_0) \stackrel[r(t_0)=2]{V'(t_0)=1} \Leftrightarrow 1 = \frac{5}{3} \pi \cdot 4 r'(t_0) \Leftrightarrow r'(t_0) = \frac{3}{20\pi} \text{ m/min}$$