

Υπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας σε ανοιχτό διάστημα

593. Έχουμε $\frac{\varepsilon\phi x}{4x-\pi} + \frac{\sigma\phi x}{3x-\pi} = 0 \Leftrightarrow (3x-\pi) \cdot \varepsilon\phi x + (4x-\pi) \cdot \sigma\phi x = 0$.

Έστω $f(x) = (3x-\pi) \cdot \varepsilon\phi x + (4x-\pi) \cdot \sigma\phi x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ ως

αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(3\frac{\pi}{4} - \pi\right) \cdot \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} < 0 \text{ και } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(4\frac{\pi}{3} - \pi\right) \cdot \sigma\phi \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} > 0,$$

δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει

$$\text{τουλάχιστον ένα } x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\phi x_0}{4x_0-\pi} + \frac{\sigma\phi x_0}{3x_0-\pi} = 0.$$

594. Έχουμε $\frac{x^{10}+1}{x-1} + \frac{x^8+3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^{10}+1) + (x-1)(x^8+3) = 0$.

Έστω $f(x) = (x-2)(x^{10}+1) + (x-1)(x^8+3)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως

πολυωνυμική με $f(1) = (-1) \cdot 2 = -2 < 0$ και $f(2) = 2^8 + 3 > 0$, δηλαδή

$f(1) \cdot f(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^{10}+1}{x_0-1} + \frac{x_0^8+3}{x_0-2} = 0.$$

595. Έχουμε $e^x - 1 = \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow xe^x - x - \sin x = 0$.

Έστω $f(x) = xe^x - x - \sin x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = e - 1 - \sin 1 > 0$,

$$\left(\text{αφού } -1 \leq \sin 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin 1 \geq -1 \xrightarrow{+e-1} e \geq e-1-\sin 1 \geq e-2 \right)$$

δηλαδή $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - 1 = \frac{\sin x_0}{x_0}.$$

596. Έστω $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) = \alpha > 0$ αφού $0 < \alpha < 1$ και $g(1) = f(1) - 1 = \beta - 1 < 0$, αφού $0 < \beta < 1$. Δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

597. i. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + \kappa \frac{\eta \mu x}{x}}{1 - x} = \frac{2 + \kappa \cdot 1}{1} = \kappa + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x) = 4$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \kappa + 2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 2}$$

$$\kappa\alpha\iota f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 4}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 2\eta \mu x}{x - x^2} & , x < 0 \\ 4 & , x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x & , x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{8 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - 3x \right)_{x>0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{8 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{8 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - 3 \right) = \\ &= (+\infty) \cdot (\sqrt{8} - 3)^{<0} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2\eta \mu x}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \eta \mu x}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{0 + 0}{0 - 1} = 0$$

$$\alpha\phi\omicron\upsilon \left| \eta \mu x \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2}{x^2} \right| \left| \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{2}{x^2} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{2}{x^2} \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{2}{x^2} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{2}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2} \eta \mu x \leq \left| \frac{2}{x^2} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{2}{x^2} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{2}{x^2} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} \eta \mu x = 0 \text{ (μηδενική επί φραγμένη)}$$

$$\text{iv. Έστω } g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1) \text{ η οποία είναι συνεχής στο } [0,1] \subseteq \mathbb{R} \text{ ως}$$

$$\alpha\pi\omicron\tau\epsilon\lambda\epsilon\sigma\mu\alpha \text{ πρ}\acute{\alpha}\xi\epsilon\omega\nu \text{ συνεχών συναρτήσεων με } g(0) = f(0) = 4 > 0 \text{ και}$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = \sqrt{8+1+16} - 3 - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2(1 - \ln 9) = 2(\ln e - \ln 9) < 0,$$

$$\alpha\phi\omicron\upsilon e < 9 \Leftrightarrow \ln e < \ln 9. \Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta g(0) \cdot g(1) < 0, \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα}$$

$$\text{Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = 2\ln(8x_0 + 1).$$

$$\text{598. Έχουμε } \frac{f(x)}{x - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow (\beta - \alpha)f(x) - (x - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta)) = 0.$$

Έστω $g(x) = (\beta - \alpha)f(x) - (x - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta))$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(\alpha) = (\beta - \alpha)f(\alpha)$ και $g(\beta) = (\beta - \alpha)f(\beta) - (\beta - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta)) = (\beta - \alpha)(\cancel{f(\beta)} - f(\alpha) - \cancel{f(\beta)}) = -(\beta - \alpha)f(\alpha)$. Δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -(\beta - \alpha)^2 f^2(\alpha) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$.

599. Έχουμε $\frac{f(x)}{x} = \frac{\kappa}{\kappa - x} + \frac{\lambda}{\lambda - x} \Leftrightarrow (\kappa - x)(\lambda - x)f(x) - \kappa x(\lambda - x) - \lambda x(\kappa - x) = 0$.

Έστω $g(x) = (\kappa - x)(\lambda - x)f(x) - \kappa x(\lambda - x) - \lambda x(\kappa - x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(\kappa) = -\kappa^2(\lambda - \kappa)$ και $g(\lambda) = -\lambda^2(\kappa - \lambda) = \lambda^2(\lambda - \kappa)$, δηλαδή $g(\kappa) \cdot g(\lambda) = -\kappa^2 \lambda^2 (\lambda - \kappa)^2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa - \xi} + \frac{\lambda}{\lambda - \xi}$.

600. Έστω $g(x) = f(x) - (e^2 + 1)\ln x + x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(1) = f(1) + 1$ και $g(e) = f(e) - e^2 - 1 + e$. Στη σχέση $2\ln x - x < f(x) < \ln^2 x + x$,

για $x=1$ έχουμε $-1 < f(1) < 1 \Leftrightarrow -1 < f(1) \Leftrightarrow f(1) + 1 > 0 \Leftrightarrow g(1) > 0$ και

για $x=e$ έχουμε $2 - e < f(e) < 1 + e \Leftrightarrow f(e) < 1 + e \Leftrightarrow f(e) - 1 - e < 0$.

Είναι $g(e) = (f(e) - 1 - e) - e^2 + 2e = \cancel{(f(e) - 1 - e)}^{<0} + \cancel{e(2 - e)}^{<0} < 0$, δηλαδή $g(1) \cdot g(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = (e^2 + 1)\ln x_0 - x_0$.

601. i. Στη σχέση $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$

για $x=0$ έχουμε $1 \leq 4f(0) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και

για $x=1$ έχουμε $2 \leq 4f(1) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$

ii. Στη δοθείσα σχέση βλέποντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\frac{1}{x^4} + 1 \leq 4f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^4} + 2 \stackrel{x^4 > 0}{\Leftrightarrow} 1 + x^4 \leq 4x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 + 2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + x^4}{4} \leq x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1 + 2x^4}{4}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^4}{4} = \frac{1}{4}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x^4}{4} = \frac{1}{4}$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα

είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{4}$.

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) + 12\frac{\eta\mu 3x}{3x}}{2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + 12}{3} = \frac{49}{12},$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \stackrel{u=3x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

iv. Έστω $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) > 0$ αφού $f(0) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ και $g(1) = f(1) - 1 < 0$ αφού

$f(1) \leq \frac{3}{4} < 1$. Δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0$.

602. Έστω $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f^2(0) + f(0) = f(0)(f(0) + 1)$ και

$$g(1) = f^2(1) + f(1) + 1 = \left(f(1) + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(f(1) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Στη σχέση $-1 < f(x) < 0$ για $x=0$ έχουμε

$$-1 < f(0) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(0) > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(0) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(0)(f(0) + 1) < 0 \Leftrightarrow g(0) < 0$$

δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) + f(x_0) + x_0 = 0$.

603. i. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0, τότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Στη σχέση $\eta\mu x - x \leq xf(x) \leq x^2(1 - \sin x)$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$- \text{ για } x > 0 \text{ έχουμε } \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \leq f(x) \leq x(1 - \sin x)$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \sin x) = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο}$$

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

– για $x < 0$ έχουμε $\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \geq f(x) \geq x(1 - \sigma\upsilon\nu x)$

όπου $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} x(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

ii. Έστω $g(x) = f(x) - x - \frac{\pi}{2} + 2\sigma\upsilon\nu x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$ ως

αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) - \frac{\pi}{2} + 2 = \frac{4 - \pi}{2} > 0$ και

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi.$$

Στη σχέση $xf(x) \leq x^2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$ για $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi \leq \frac{\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi \leq -\frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ δηλαδή $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 + \frac{\pi}{2} - 2\sigma\upsilon\nu x_0$.

604. Είναι $f^2(0) + f^2(1) + 1 = 2f(0) \Leftrightarrow f^2(0) - 2f(0) + 1 + f^2(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(f(0) - 1)^2 + f^2(1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1 \text{ και } f(1) = 0.$$

Έστω $g(x) = f(x) - x^{2017}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων με $g(0) = f(0) = 1 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$, δηλαδή

$g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^{2017}$.

605. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$. Αρκεί να βρούμε τα $f(0)$ και

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Στη σχέση $x(f(x) - 2x + 2) = \eta\mu x$ για $x = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε

$$\frac{\pi}{2} \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi + 2 \right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi + 2 = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 + \frac{2}{\pi} > 0.$$

Στη δοθείσα σχέση για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f(x) - 2x + 2 = \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + 2x - 2$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 θα είναι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + 2x - 2 \right) = -1 < 0.$$

Δηλαδή $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

606. Για να δείξουμε ότι τα διαγράμματα, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 5)$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 5)$.

Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 5]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $h(-1) = f(-1) - g(-1) < 0$, αφού $f(-1) < g(-1)$ και $h(5) = f(5) - g(5) > 0$, αφού $g(5) < f(5)$. Δηλαδή $h(-1) \cdot h(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 5)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$. Άρα τα διαγράμματα των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 5)$.

607. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$ άρα $f(0) = 4$.

Η C_f τέμνει την $y = x + 1$ όταν $f(x) = x + 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = f(x) - x - 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με

$$g(0) = f(0) - 1 = 3 > 0 \text{ και } g(1) = f(1) - 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1 οπότε $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\text{Έστω } h(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \Leftrightarrow (x - 1)h(x) = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) = (x - 1)h(x) + 1.$$

$$\text{Θα είναι } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 6 \text{ και } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1)h(x) + 1) = 1 > 0.$$

Έχουμε λοιπόν $g(1) = f(1) - 2 = -1 < 0$ δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 + 1$. Άρα η C_f τέμνει την ευθεία $y = x + 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

608. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2] \subseteq \mathbb{R}$. Έχουμε :

$$f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x) = x^4 + x - 3 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) - 2f(x) + 2) = x^4 + x - 3$$

Το τριώνυμο $f^2(x) - 2f(x) + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -8 < 0$ άρα είναι πάντοτε διάφορο του μηδενός και συγκεκριμένα $f^2(x) - 2f(x) + 2 > 0$.

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{x^4 + x - 3}{f^2(x) - 2f(x) + 2}.$$

$$f(0) = \frac{-3}{f^2(0) - 2f(0) + 2} < 0 \text{ αφού } f^2(0) - 2f(0) + 2 > 0 \text{ και}$$

$$f(2) = \frac{15}{f^2(2) - 2f(2) + 2} > 0 \text{ αφού } f^2(2) - 2f(2) + 2 > 0$$

Έχουμε λοιπόν $f(0) \cdot f(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον x' σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

609. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Έχουμε :

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x)(f^2(x) + \beta f(x) + \gamma) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

Το τριώνυμο $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

Έχουμε $3\gamma > \beta^2 \geq 0$ που σημαίνει ότι $\gamma > 0$. Άρα $\beta^2 < 3\gamma < 4\gamma \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$ άρα το τριώνυμο είναι πάντοτε διάφορο του μηδενός και συγκεκριμένα $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma > 0$.

$$\text{Οπότε } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{f^2(x) + \beta f(x) + \gamma}.$$

$$f(0) = \frac{-1}{f^2(0) + \beta f(0) + \gamma} < 0 \text{ αφού } f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0 \text{ και}$$

$$f(1) = \frac{4}{f^2(1) + \beta f(1) + \gamma} > 0 \text{ αφού } f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$$

Έχουμε λοιπόν $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

610. Έστω $h(x) = (2x - 9)f(x + 6) - (7x - 32)f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[4, 5] \subseteq \mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $h(4) = -f(10) + 4f(4)$ και $h(5) = f(11) - 3f(5)$.

Από την $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, έχουμε :

$$- \quad f(10) = 8g(10) \text{ και } f(4) = 2g(4) \text{ οπότε } h(4) = -8g(10) + 8g(4)$$

$$\text{με } 4 < 10 \stackrel{g \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} g(4) < g(10) \Leftrightarrow 8g(4) < 8g(10) \Leftrightarrow h(4) < 0$$

$$- \quad f(11) = 9g(11) \text{ και } f(5) = 3g(5) \text{ οπότε } h(5) = 9g(11) - 9g(5)$$

$$\text{με } 5 < 11 \stackrel{g \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} g(5) < g(11) \Leftrightarrow 9g(5) < 9g(11) \Leftrightarrow h(5) > 0$$

δηλαδή $h(4) \cdot h(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (4, 5)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(2x_0 - 9)f(x_0 + 6) = (7x_0 - 32)f(x_0).$$

- 611.** Έστω $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ τα σημεία που τέμνει τον $x'x$ η C_f . Αφού αυτά βρίσκονται εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, τότε θα είναι $x_1 x_2 < 0$ και $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$. Για να δείξουμε ότι η C_g τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των A και B αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

Η $g(x) = 1 - x - e^{f(x)}$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων

συνεχών συναρτήσεων με $g(x_1) = 1 - x_1 - e^{f(x_1)} = -x_1$ και

$g(x_2) = 1 - x_2 - e^{f(x_2)} = -x_2$, δηλαδή $g(x_1)g(x_2) = x_1 \cdot x_2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Δηλαδή η C_g τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των A και B .

- 612.** i. Έστω $g(x) = \frac{x+1}{f(x+1)}$. Τότε $f(x+1) = (x+1)g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 1$.

$f(x+1) = (x+1)g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)g(x)] \Leftrightarrow f(0) = 0$ αφού η f είναι συνεχής. Άρα η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

όπου $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u)}{u} = 1$

iii. Έστω $g(x) = f(x) - x + 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) + 1 = 1 > 0$ και $g(1) = f(1) < 0$,

αφού $1 > 0 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1) < f(0) \Leftrightarrow f(1) < 0$. Έχουμε λοιπόν $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 - 1$, δηλαδή η C_f τέμνει την ευθεία $y = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

— $x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$

— $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) - x_1 + 1 > f(x_2) - x_2 + 1 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A , άρα και $\langle\langle 1, -1 \rangle\rangle$ συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (0, 1)$ είναι μοναδική.

- 613.** i. Έστω $h(x) = g(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων με $h(1)=g(1)-1<0$ και $h(2)=g(2)-2>0$, σύμφωνα με τα δεδομένα, δηλαδή $h(1) \cdot h(2)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)-x_0=0$.

ii. Από τη σχέση $f(x)=[g(x)-x]^2+4$ για $x=x_0$ παίρνουμε :

$$f(x_0)=[\cancel{g(x_0)-x_0}]^2+4 \Leftrightarrow f(x_0)=4$$

Κατασκευάζουμε την f :

$$[g(x)-x]^2 \geq 0 \Leftrightarrow [g(x)-x]^2+4 \geq 4 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

Έτσι λοιπόν αποδείξαμε πως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$.

614. i. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $f^2(x)-4f(x)+5$ είναι $\Delta=-4<0$ οπότε το τριώνυμο δεν μηδενίζεται ποτέ και συγκεκριμένα είναι πάντα θετικό. Οπότε $g(x)>0$ δηλαδή η C_g βρίσκεται πάνω από τον x' .

ii. $f^2(0)+f^2(1)+10=2(f(0)+3f(1)) \Leftrightarrow$

$$f^2(0)-2f(0)+1+f^2(1)-6f(1)+9=0 \Leftrightarrow (f(0)-1)^2+(f(1)-3)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$f(0)=1 \text{ και } f(1)=3.$$

iii. Έχουμε $g(x)=f^2(x)-4f(x)+5=(f^2(x)-4f(x)+4)-4+5=(f(x)-2)^2+1$.

Κατασκευάζουμε την g :

$$(f(x)-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (f(x)-2)^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 1$$

Για την $f(x)$ έχουμε $f(0)=1$ και $f(1)=3$. Οπότε $1<2<3 \Leftrightarrow f(0)<2<f(1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και επιπλέον ισχύει $f(0)<2<f(1)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2$.

$$\text{Τότε } g(x_0)=\left(\cancel{f(x_0)}-2\right)^2+1=1$$

Δηλαδή καταλήξαμε στο $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq g(x_0)$, συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$.

615. i. Είναι $f^3(x)+xf(x)+x^3=0 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+x)+x^3=0 \Leftrightarrow$

$$f(x)=-\frac{x^3}{f^2(x)+x}<0 \Leftrightarrow f(x)<0 \text{ αφού } x>0 \text{ και } f^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x)+x \geq x>0$$

Επιπλέον από την ίδια σχέση $f^3(x)+xf(x)+x^3=0 \Leftrightarrow$

$$f^3(x)+x(f(x)+x^2)=0 \Leftrightarrow f(x)+x^2=-\frac{f^3(x)}{x}>0 \Leftrightarrow f(x)>-x^2 \text{ αφού}$$

$$f(x)<0 \text{ και } x>0.$$

Από τις δύο σχέσεις που αποδείξαμε έχουμε $-x^2<f(x)<0$.

ii. Έστω $g(x) = 6 - xf(x) - x^2 - 5x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2] \subseteq (0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(1) = -f(1) > 0$, αφού $f(x) < 0$ και $g(2) = -2f(2) - 8 = -2(f(2) + 4) < 0$, αφού $-4 < f(2) \Leftrightarrow f(2) + 4 > 0$. Δηλαδή $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6 - x_0 f(x_0) = x_0^2 + 5x_0$.

iii. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ αφού στη σχέση $f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (f^3(x) + xf(x) + x^3) = 0 \Leftrightarrow f^3(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{αφού } \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \stackrel{|f(x)| > 0}{\Leftrightarrow} \left| f(x) \right| \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow \left| f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow$$

$$-|f(x)| \leq f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \leq |f(x)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-|f(x)|) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ (μηδενική επί φραγμένη)}$$

iv. Από την $-x^2 < f(x) < 0$ αφού $x > 0$ παίρνουμε $-x < \frac{f(x)}{x} < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$$f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 + \frac{f(x)}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = - \left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(- \left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 - 1 \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = -1.$$

616. Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Έστω $g(x) = f(x) + x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq [0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων με $g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha = \ln \alpha \cancel{>} \cancel{<} = \ln \alpha < 0$ αφού $\alpha \in (0, 1)$ και $g(\beta) = f(\beta) + \beta = \beta^2 \cancel{>} \cancel{<} = \beta^2 - 1 > 0$ αφού $\beta > 1 \Leftrightarrow \beta^2 > 1$.

Δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -x_0$.

Υπαρξη ρίζας χωρίς να δίνεται το διάστημα

- 617.** Έστω $f(x) = x^6 - 6 - 4x$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.
Έχουμε $f(1) = -9 < 0$ και $f(2) = 64 - 6 - 8 = 50 > 0$.
Η f λοιπόν είναι συνεχής στο $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) \cdot f(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^6 - 6 = 4x_0$.
- 618.** Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
Έχουμε $f(1) = -2015 < 0$ και $f(e) = e > 0$.
Η f λοιπόν είναι συνεχής στο $[1, e] \subseteq (0, +\infty)$ και ισχύει $f(1) \cdot f(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
- 619.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
Έχουμε $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$ και $f(0) = 1 > 0$.
Η f λοιπόν είναι συνεχής στο $[-1, 0] \subseteq \mathbb{R}$ και ισχύει $f(-1) \cdot f(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 0) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- 620.** Για να δείξουμε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^4 + 3x - 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.
Έστω $g(x) = x^4 + 3x - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.
Έχουμε $g(0) = -2 < 0$ και $g(1) = 2 > 0$.
Η g λοιπόν είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ και ισχύει $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^4 + 3x_0 = 2 \Leftrightarrow f(x_0) = 2$.
Δηλαδή η C_f τέμνει την ευθεία $y=2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- 621.** Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = 3\ln x - 2 + x$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
Έχουμε $h(1) = -1 < 0$ και $h(e) = 1 + e > 0$.
Η h λοιπόν είναι συνεχής στο $[1, e] \subseteq (0, +\infty)$ και ισχύει $h(1) \cdot h(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$, δηλαδή οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.
- 622.** Έστω $g(x) = f(2x) - f(x) - x + 1$. Για να ορίζεται η g πρέπει $0 \leq x \leq 2$ και $0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$. Άρα $D_g = [0, 1]$.

Η g λοιπόν είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0)=1>0$ και $g(1)=f(2)-f(1)<0$ αφού $1<2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1)>f(2)$. Έχουμε λοιπόν $g(0) \cdot g(1)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(2x_0)=f(x_0)+x_0-1$.

623. Έστω $g(x)=f(x)-f(x+1)$. Για να ορίζεται η g πρέπει $0 \leq x \leq 2$ και $0 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Άρα $D_g = [0,1]$.

Η g λοιπόν είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0)=f(0)-f(1)$ και $g(1)=f(1)-f(2)=f(1)-f(0)=-(f(0)-f(1))$. Δηλαδή $g(0) \cdot g(1)=-(f(0)-f(1))^2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=f(\xi+1)$.

624. i. Έστω $g(x)=\frac{f(x+2)-5}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)g(x)=f(x+2)-5 \Leftrightarrow f(x+2)=(x-1)g(x)+5$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)=6$. Οπότε :

$$f(x+2)=(x-1)g(x)+5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x+2)=\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x)+5] \Leftrightarrow f(3)=5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-5}{x-3} \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ u \rightarrow 1}} \frac{f(u+2)-5}{u-1} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)} \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ u \rightarrow 1}} \frac{u+4-f(u+2)}{\eta\mu(u-1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\frac{u-1+5-f(u+2)}{u-1}}{\eta\mu(u-1)} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{f(u+2)-5}{u-1}}{\eta\mu(u-1)} = \frac{1-6}{1} = -5$$

$$\text{όπου } \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(u-1)}{u-1} \stackrel{w=u-1}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ w \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu w}{w} = 1$$

ii. Η $h(x)=xf(x)-3x-7\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $h(0)=-7<0$ και

$$h(3)=3f(3)-9-7\sigma\upsilon\nu 3=6-7\sigma\upsilon\nu 3>0, \text{ αφού}$$

$$\frac{\pi}{2} < 3 < \pi \stackrel{\substack{\text{Η συνάρτηση } \sigma\upsilon\nu x \\ \text{γν.φθ. στο } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]}}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} > \sigma\upsilon\nu 3 > \sigma\upsilon\nu \pi \Leftrightarrow 0 > \sigma\upsilon\nu 3 > -1 \Leftrightarrow$$

$$0 < -7\sigma\upsilon\nu 3 < 7 \Leftrightarrow 6 < 6-7\sigma\upsilon\nu 3 < 13.$$

Η h λοιπόν είναι συνεχής στο $[0,3] \subseteq \mathbb{R}$ και ισχύει $h(0) \cdot h(3)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,3) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$, δηλαδή η C_h τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

625. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$- \quad x_1 < x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$x_1^5 + x_1^3 + x_1 < x_2^5 + x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$ συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη.

$$\begin{aligned} \text{Έστω } f^{-1}(0) = x &\Leftrightarrow f(f^{-1}(0)) = f(x) \Leftrightarrow 0 = f(x) \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = 0 \Leftrightarrow \\ &x(x^4 + x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^4 + x^2 + 1 = 0 \text{ Αδύνατη} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(0) = 1$$

$$\text{Έστω } f^{-1}(3) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(3)) = f(x) \Leftrightarrow 3 = f(x) \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x - 3 = 0$$

Θεωρούμε $h(x) = x^5 + x^3 + x - 3 = f(x) - 3$ η οποία είναι συνεχής στο A ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0) = -3 < 0$ και $h(2) = 39 > 0$ άρα ισχύει

$h(0) \cdot h(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Επιπλέον :

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - 3 < f(x_2) - 3 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$ συνεπώς η $h(x) = 0$ έχει μοναδική λύση. Παρατηρούμε ότι $h(1) = 0$, άρα $x=1$ η μοναδική της λύση, δηλαδή $f^{-1}(3) = 1$.

ii. Για να δείξω ότι η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την ευθεία $y = -x + 2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = -x + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Έστω $g(x) = f^{-1}(x) + x - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Έχουμε } g(0) = f^{-1}(0) + 0 - 2 = -1 < 0 \text{ και } g(3) = f^{-1}(3) + 3 - 2 = 2 > 0.$$

Η g λοιπόν είναι συνεχής στο $[0, 3] \subseteq \mathbb{R}$ και ισχύει $g(0) \cdot g(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 3) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0) = -x_0 + 2$, δηλαδή η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την $y = -x + 2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Υπαρξη περισσότερων από μιας ριζών

626. Έστω $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων

συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-1}{2} > 0$ και $f(\pi) = -\frac{1}{2} < 0$.

– Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq [0, \pi]$ και ισχύει $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \subseteq [0, \pi]$ και ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(\pi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \text{ ημ} = \frac{1}{2}$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, \pi)$.

627. Έστω $f(x) = x^6 - \alpha x^2 + \beta$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Έχουμε $f(-1) = 1 - \alpha + \beta < 0$ (δεδομένο), $f(0) = \beta > 0$ (δεδομένο) και $f(1) = 1 - \alpha + \beta < 0$.

– Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0] \subseteq [-1, 1]$ και ισχύει $f(-1) \cdot f(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq [-1, 1]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 1) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - \alpha x^2 + \beta = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

628. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Από τα δεδομένα παίρνουμε $\alpha - \beta < 0$, $\beta - \gamma < 0$ και $\alpha - \gamma < 0$

Έχουμε $f(\alpha) = 3(\alpha - \beta)^{<0} (\alpha - \gamma)^{<0} > 0$, $f(\beta) = 5(\beta - \alpha)^{>0} (\beta - \gamma)^{<0} < 0$ και

$f(\gamma) = 2(\gamma - \alpha)^{>0} (\gamma - \beta)^{>0} > 0$.

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq [\alpha, \gamma]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, \beta) \subseteq (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\beta, \gamma] \subseteq [\alpha, \gamma]$ και ισχύει $f(\beta) \cdot f(\gamma) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\beta, \gamma) \subseteq (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(\alpha, \gamma) \subseteq \mathbb{R}$, και επειδή η f είναι δευτεροβάθμια θα έχει το πολύ δύο ρίζες, συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες της f στο $\mathbb{R}$, οι οποίες είναι άνισες αφού ανήκουν σε διαφορετικά μεταξύ τους διαστήματα.

629. Έστω $h(x) = f(x)g(x) - (\beta - x)(\alpha - x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Όμοια έχουμε τη g συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Έστω λοιπόν ότι το $x_0 \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < x_0 < \beta$ θα είναι ρίζα της f ή της g .

Έχουμε $h(x_0) = \cancel{f(x_0)}^0 \cdot \cancel{g(x_0)}^0 - (\beta - x_0)(\alpha - x_0) = -(\beta - x_0)^{>0} (\alpha - x_0)^{<0} > 0$ και

βρίσκουμε και $h(\alpha) = \cancel{f(\alpha)}^{<0} \cdot \cancel{g(\alpha)}^{>0} < 0$ και $h(\beta) = \cancel{f(\beta)}^{>0} \cdot \cancel{g(\beta)}^{<0} < 0$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0] \subseteq [\alpha, \beta]$ και ισχύει $h(\alpha) \cdot h(x_0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, x_0) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.
- Η h είναι συνεχής στο $[x_0, \beta] \subseteq [\alpha, \beta]$ και ισχύει $h(x_0) \cdot h(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) = (\beta - x)(\alpha - x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α, β) .

630. i. Έχουμε $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\kappa^2 + x(x-1)\lambda^2 + x(x+1)\mu^2 = 0$.

Έστω $f(x) = (x-1)(x+1)\kappa^2 + x(x-1)\lambda^2 + x(x+1)\mu^2$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Έχουμε $f(-1) = 2\lambda^2 > 0$, $f(0) = -\kappa^2 < 0$ και $f(1) = 2\mu^2 > 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0] \subseteq [-1, 1]$ και ισχύει $f(-1) \cdot f(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1] \subseteq [-1,1]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0,1) \subseteq (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$, και επειδή η f είναι δευτεροβάθμια θα έχει το πολύ δύο ρίζες, συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες της f στο $(-1,1)$, οι οποίες είναι άνισες αφού ανήκουν σε διαφορετικά μεταξύ τους διαστήματα.

ii. Έχουμε $f(x) = x^2\kappa^2 - \kappa^2 + x^2\lambda^2 - x\lambda^2 + x^2\mu^2 + x\mu^2 = (\kappa^2 + \lambda^2)x^2 + (\mu^2 - \lambda^2)x - \kappa^2$ και αφού ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της, τότε από τους τύπους Vieta έχουμε

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2 + \lambda^2} \text{ και } \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}.$$

$$\text{Έτσι } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{-\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2 + \lambda^2}}{\frac{-\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}.$$

631. α. Είναι $f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4} \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = -\frac{x}{4}.$

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ γν.φθ.}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{f \text{ γν.φθ.}} f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

$$- \quad x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ γν.φθ.}} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(f(x_1)) - f(x_1) < f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow -\frac{x_1}{4} < -\frac{x_2}{4} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Ατοπο, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

β. i. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \stackrel{u=f(x)}{=} \lambda \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = \lambda^2$

ii. Έχουμε ακόμη και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{x}{4}}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{4} \right) = \lambda - \frac{1}{4}.$

$$\text{Άρα } \lambda^2 = \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

γ. Έστω $g(x) = f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1)$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Έχουμε $g(-1) = -2f(3)$, $g(0) = -f(2)$ και $g(1) = 2f(4)$.

Στην αρχική σχέση $f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}$ για $x=0$ έχουμε $f(f(0)) = f(0)$ $\overset{\substack{f \text{ γν. αυξ.} \\ \Leftrightarrow \\ \text{άρα και } \ll -1 \gg}}{\Leftrightarrow}$

$f(0) = 0$. Επιπλέον για τα πρόσημα των $f(2)$, $f(3)$ και $f(4)$ εργαζόμαστε ως εξής :

$$2 > 0 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(2) > f(0) \Leftrightarrow \underline{f(2) > 0}, \quad 3 > 0 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(3) > f(0) \Leftrightarrow \underline{f(3) > 0},$$

$$\text{και } 4 > 0 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(4) > f(0) \Leftrightarrow \underline{f(4) > 0}.$$

– Η g είναι συνεχής στο $[-1, 0] \subseteq [-1, 1]$ και ισχύει $g(-1) \cdot g(0) = -2f(2) \cdot f(3) < 0$,
οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\rho_1 \in (-1, 0) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho_1) = 0$.

– Η g είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq [-1, 1]$ και ισχύει $g(0) \cdot g(1) = -2f(2) \cdot f(4) < 0$,
οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\rho_2 \in (0, 1) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$, και επειδή η g είναι δευτεροβάθμια θα έχει το πολύ δύο ρίζες, συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες της g στο $(-1, 1)$, οι οποίες είναι άνισες αφού ανήκουν σε διαφορετικά μεταξύ τους διαστήματα.

Έχουμε $f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 f(2) - f(2) + x^2 f(3) - x f(3) + x^2 f(4) + x f(4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(2) + f(3) + f(4))x^2 + (f(4) - f(3))x - f(2) = 0$$

και αφού ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της, τότε από τους τύπους Vieta έχουμε

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f(4) - f(3)}{f(2) + f(3) + f(4)} \quad \text{και} \quad \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-f(2)}{f(2) + f(3) + f(4)}.$$

$$\text{Έτσι } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{-\frac{f(4) - f(3)}{f(2) + f(3) + f(4)}}{-\frac{f(2)}{f(2) + f(3) + f(4)}} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}.$$

Υπαρξη ακριβώς μιας ρίζας

632. Έστω $f(x) = x + e^x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων με $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} = \frac{1-e}{e} < 0$ και $f(0) = 1 > 0$, δηλαδή

$f(-1) \cdot f(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (-1, 0) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 + e^{x_0} = 0.$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$- \quad x_1 < x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$ είναι μοναδική.

633. Έστω $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = e - 2 + \ln 2 > 0$, δηλαδή $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$e^{x_1} + \ln(x_1 + 1) - 2 < e^{x_2} + \ln(x_2 + 1) - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$ συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (0, 1)$ είναι μοναδική.

634. Για να δείξουμε ότι οι C_f και C_g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = \eta \mu x - \frac{\pi}{2} - \sigma \nu \eta x + x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως

αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $h(0) = -\frac{\pi}{2} - 1 < 0$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$,

δηλαδή $h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

Θα εξετάσουμε τη μονοτονία της h στο σύνολο $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο η συνάρτηση

$\eta \mu x$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ η συνάρτηση $\sigma \nu \eta x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \eta \mu x_1 < \eta \mu x_2$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sigma \nu \eta x_1 > \sigma \nu \eta x_2 \Leftrightarrow -\sigma \nu \eta x_1 < -\sigma \nu \eta x_2$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \frac{\pi}{2} < x_2 - \frac{\pi}{2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\eta\mu x_1 - \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu x_1 + x_1 < \eta\mu x_2 - \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu x_2 + x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα

$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι μοναδική. Αποδείξαμε λοιπόν πως οι C_f και C_g τέμνονται ακριβώς

σε ένα σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

635. Έστω $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων με $f(0) = 1 > 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} < 0$, δηλαδή $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0 = x_0^2.$$

Θα εξετάσουμε τη μονοτονία της f στο σύνολο $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο η συνάρτηση

$\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x_1 - x_1^2 > \sigma\upsilon\nu x_2 - x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα

$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι μοναδική.

636. Έστω $g(x) = f(x) - x + 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων

συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = \overset{f \text{ γν. φθ.}}{f(0)} + 1 = 1 > 0$ και $g(1) = f(1) < 0$, αφού

$$1 > 0 \overset{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1) < f(0) \Leftrightarrow f(1) < 0. \text{ Δηλαδή } g(0) \cdot g(1) < 0, \text{ οπότε σύμφωνα με}$$

το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(x_0) = x_0 - 1.$$

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, 1]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \overset{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) - x_1 + 1 > f(x_2) - x_2 + 1 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (0,1)$ είναι μοναδική.

637. Έστω $f(x) = 2\ln x + ex$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων

συνεχών συναρτήσεων με $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln \frac{1}{e} + 1 = -2\ln e + 1 = -1 < 0$ και $f(1) = e > 0$.

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right] \subseteq (0, +\infty)$ και ισχύει $f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f(1) < 0$, οπότε

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \subseteq (0, +\infty)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_0 + ex_0 = 0$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow ex_1 < ex_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$2\ln x_1 + ex_1 < 2\ln x_2 + ex_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \subseteq (0, +\infty)$ είναι μοναδική.

638. i. Έχουμε $1 < 4 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1) > f(4) \Leftrightarrow f(1) > 0$ και

$$5 > 4 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(5) < f(4) \Leftrightarrow f(5) < 0$$

ii. Έστω $g(x) = f(2x+3) - x$. Πρέπει $1 \leq 2x+3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $A = [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο A

ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(-1) = f(1) - 1 > 0$ και

$g(1) = f(5) - 1 < 0$, δηλαδή $g(-1) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(2x_0+3) = x_0.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1+3 < 2x_2+3 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(2x_1+3) > f(2x_2+3)$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(2x_1+3) - x_1 > f(2x_2+3) - x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (-1,1)$ είναι μοναδική.

- 639. i.** Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξω για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\text{Η δοθείσα σχέση για } y = x_0 \text{ μας δίνει } |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} + f(x_0) \leq f(x) \leq \frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} + f(x_0), \text{ έτσι έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} + f(x_0) \right) = f(x_0) \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{x - x_0}{2016 + |x + x_0|} + f(x_0) \right) = f(x_0)$$

οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- ii.** Έστω $g(x) = f(x) - 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $A = [1,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(1) = f(1) - 2 = 1 > 0$ και $g(2) = f(2) - 4 < 0$, αφού

$$2 > 1 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(2) < f(1) \Leftrightarrow f(2) < 3 \Leftrightarrow f(2) - 4 < -1 < 0. \text{ Δηλαδή η } g \text{ είναι}$$

συνεχής στο $[1,2]$ και ισχύει $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (1,2)$ είναι μοναδική.

- 640. i.** Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) > f^3(x_2)$$

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow 3f(x_1) > 3f(x_2)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f^3(x_1) + 3f(x_1) > f^3(x_2) + 3f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 5 > x_2 + 5 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

- ii.** Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $\ll 1-1 \gg$, οπότε η f είναι και αντιστρέψιμη.

Για $f(x)=y$ έχουμε $y^3 + 3y = x + 5 \Leftrightarrow x = y^3 + 3y - 5, y \in \mathbb{R}$. Άρα έχουμε $f^{-1}(x) = x^3 + 3x - 5, x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να δείξουμε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$. Για να το χρησιμοποιήσω όμως πρέπει πρώτα να το αποδείξω :

- Έστω ρ η ρίζα της $f^{-1}(x) = f(x)$, δηλαδή $f^{-1}(\rho) = f(\rho)$.

Αν $f(\rho) \neq \rho$ τότε θα είναι είτε $f(\rho) > \rho$ είτε $f(\rho) < \rho$.

$$- \quad f(\rho) > \rho \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(f(\rho)) > f(\rho) \Leftrightarrow f(f^{-1}(\rho)) > f(\rho) \Leftrightarrow \rho > f(\rho) \text{ Άτοπο}$$

$$- \quad f(\rho) < \rho \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(f(\rho)) < f(\rho) \Leftrightarrow f(f^{-1}(\rho)) < f(\rho) \Leftrightarrow \rho < f(\rho) \text{ Άτοπο}$$

Άρα $f(\rho) = \rho$, δηλαδή το ρ είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$.

- Και αντίστροφα, έστω ρ η ρίζα της $f(x) = x$, δηλαδή $f(\rho) = \rho$.

$$f(\rho) = \rho \Leftrightarrow f^{-1}(f(\rho)) = f^{-1}(\rho) \Leftrightarrow \rho = f^{-1}(\rho) \Leftrightarrow f(\rho) = f^{-1}(\rho)$$

δηλαδή το ρ είναι και ρίζα της $f^{-1}(x) = f(x)$.

Η εξίσωση λοιπόν $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$, άρα και με την $f^{-1}(x) = x$.

Έστω $g(x) = f^{-1}(x) - x = x^3 + 3x - 5 - x = x^3 + 2x - 5$ η οποία είναι συνεχής στο

$A = [1, 2]$ ως πολυωνυμική με $g(1) = -2 < 0$ και $g(2) = 8 > 0$, δηλαδή είναι

$g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0) = f(x_0)$. Δηλαδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$x_1^3 + 2x_1 - 5 < x_2^3 + 2x_2 - 5 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$, συνεπώς η παραπάνω ρίζα

$x_0 \in (1, 2)$ είναι μοναδική. Οπότε οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta_{\mu\chi}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x - 5) \cdot \eta_{\mu\chi}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 5}{x^3} \cdot \frac{\eta_{\mu\chi}}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0$$

$$\alpha\text{φού } |\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0 \text{ (μηδενική επί φραγμένη).}$$

- 641.** i. Στη δοθείσα σχέση για $y=x$ παίρνουμε $2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3$. Σε αυτή τη σχέση αν βάλουμε όπου x το $1-x$ έχουμε $2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3$ οπότε λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x) - 2f(1-x) = -6e^x - 6 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases}$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε } -3f(x) = 3e^{1-x} - 6e^x - 3 \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1.$$

Στη δοθείσα σχέση βάζοντας όπου y το 0 παίρνουμε

$$2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) = 2e^x + 4 \Leftrightarrow 2f(x) + 2e + g(x) - 2e = 2e^x + 4 \Leftrightarrow$$

$$2(2e^x - e^{1-x} + 1) + g(x) = 2e^x + 4 \Leftrightarrow 4e^x - 2e^{1-x} + 2 + g(x) = 2e^x + 4 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2.$$

- ii. -- Για την $f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2}$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Leftrightarrow -e^{1-x_1} < -e^{1-x_2} \Leftrightarrow -e^{1-x_1} + 1 < -e^{1-x_2} + 1$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$2e^{x_1} - e^{1-x_1} + 1 < 2e^{x_2} - e^{1-x_2} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

-- Για την $g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -2e^{x_1} > -2e^{x_2}$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Leftrightarrow 2e^{1-x_1} > 2e^{1-x_2} \Leftrightarrow 2e^{1-x_1} + 2 > 2e^{1-x_2} + 2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$-2e^{x_1} + 2e^{1-x_1} + 2 > -2e^{x_2} + 2e^{1-x_2} + 2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

-- Για την $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) - g(x_1) < f(x_2) - g(x_2) \Leftrightarrow (f - g)(x_1) < (f - g)(x_2)$$

Άρα η $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Για να δείξουμε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, αρκεί να

δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα. Έστω

$$h(x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 + 2e^x - 2e^{1-x} - 2 = 4e^x - 3e^{1-x} - 1$$

η οποία είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με

$$h(0) = 3 - 3e = 3(1 - e) < 0 \quad \text{και} \quad h(1) = 4e - 4 = 4(e - 1) > 0. \quad \text{Δηλαδή η } h \text{ είναι}$$

συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ και $h(0) \cdot h(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

Αποδείξαμε και ότι η $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $\ll -1 \gg$, άρα η ρίζα είναι μοναδική, δηλαδή οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

iv. Έχουμε :

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow 4e^{x^2-2x} - 3e^{1-(x^2-2x)} < 4e^{x-2} - 3e^{1-(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{1-(x^2-2x)} + 1 < 4e^{x-2} - 3e^{1-(x-2)} + 1 \Leftrightarrow h(x^2-2x) < h(x-2) \stackrel{h \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ έχει ρίζες είναι τα 1 και 2 οπότε έχουμε :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι το $x \in (1, 2)$.

Υπαρξη ρίζας σε διάστημα με κλειστό άκρο

642. Η εξίσωση $g(x) = f(x) - cx$ είναι συνεχής στο $[r_1, r_2] \subseteq \Delta$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων με $g(r_1) = f(\cancel{r_1})^0 - cr_1 = -cr_1$ και $g(r_2) = f(\cancel{r_2})^0 - cr_2 = -cr_2$,

αφού οι r_1, r_2 είναι ρίζες της f . Δηλαδή $g(r_1) \cdot g(r_2) = c^2 r_1 r_2 \leq 0$, αφού οι r_1, r_2 είναι ετερόσημες, οπότε θα είναι $r_1 \cdot r_2 < 0$ και $c^2 \geq 0$.

- Αν $g(r_1) \cdot g(r_2) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (r_1, r_2) \subseteq [r_1, r_2]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

- Αν $g(r_1) \cdot g(r_2) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(r_1) = 0$ δηλαδή το $x = r_1$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(r_2) = 0$ δηλαδή το $x = r_2$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[r_1, r_2]$.

- 643.** Έστω $h(x) = g(x) - f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $h(a) = g(a) - f(a) = f(\beta) - f(a) = -(f(a) - f(\beta))$ και $h(\beta) = g(\beta) - f(\beta) = f(a) - f(\beta)$, δηλαδή $h(a) \cdot h(\beta) = -(f(a) - f(\beta))^2 \leq 0$.
- Αν $h(a) \cdot h(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta) \subseteq [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.
 - Αν $h(a) \cdot h(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(a) = 0$ δηλαδή το $x = a$ θα είναι ρίζα της h , είτε θα είναι $h(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της h .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

- 644.** Έστω $h(x) = g(x) - f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $h(a) = g(a) - f(a) \geq 0$ και $h(\beta) = g(\beta) - f(\beta) \leq 0$, δηλαδή $h(a) \cdot h(\beta) \leq 0$.
- Αν $h(a) \cdot h(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta) \subseteq [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.
 - Αν $h(a) \cdot h(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(a) = 0$ δηλαδή το $x = a$ θα είναι ρίζα της h , είτε θα είναι $h(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της h .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

- 645.** Έστω $g(x) = f(x) - e^x + xe^x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) - 1 \leq 0$, αφού $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, και $g(1) = f(1) \geq 0$, αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, δηλαδή $g(0) \cdot g(1) \leq 0$.
- Αν $g(0) \cdot g(1) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_0} - xe^{x_0}$.
 - Αν $g(0) \cdot g(1) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(0) = 0$ δηλαδή το $x = 0$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(1) = 0$ δηλαδή το $x = 1$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_0} - xe^{x_0}$.

- 646.** Έστω $f(x) = \eta\mu x - \eta\mu\lambda - \frac{\pi}{2} + x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f(0) = -\eta\mu\lambda - \frac{\pi}{2} = -\left(\eta\mu\lambda + \frac{\pi}{2}\right)^{>0} < 0$, αφού

$$-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow -1 + \frac{\pi}{2} \leq \eta\mu\lambda + \frac{\pi}{2} \leq 1 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi-2}{2} \leq \eta\mu\lambda + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi+2}{2}, \text{ και}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \eta\mu\lambda \geq 0, \text{ αφού } \eta\mu\lambda \leq 1, \text{ δηλαδή } f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0.$$

– Αν $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x_0 - \eta\mu\lambda = \frac{\pi}{2} - x_0.$$

– Αν $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ($f(0) < 0$), τότε θα είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ δηλαδή το $x = \frac{\pi}{2}$ θα είναι ρίζα της f .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x_0 - \eta\mu\lambda = \frac{\pi}{2} - x_0.$$

647. Έστω $f(x) = \kappa\eta\mu x - x + \lambda$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, \kappa + \lambda]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f(0) = \lambda > 0$, και $f(\kappa + \lambda) = \kappa\eta\mu(\kappa + \lambda) - \kappa = \kappa(\eta\mu(\kappa + \lambda) - 1) \leq 0$ αφού $\eta\mu(\kappa + \lambda) \leq 1$ και $\kappa > 0$, δηλαδή $f(0) \cdot f(\kappa + \lambda) \leq 0$.

– Αν $f(0) \cdot f(\kappa + \lambda) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \kappa + \lambda) \subseteq [0, \kappa + \lambda]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \kappa\eta\mu\xi = \xi - \lambda$.

– Αν $f(0) \cdot f(\kappa + \lambda) = 0$, ($f(0) > 0$), τότε θα είναι $f(\kappa + \lambda) = 0$ δηλαδή το $x = \kappa + \lambda$ θα είναι ρίζα της f .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \kappa + \lambda]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \kappa\eta\mu\xi = \xi - \lambda.$$

648. Είναι $\alpha^2 f(\alpha) + \beta^2 f(\beta) = -f(\alpha) - f(\beta) \Leftrightarrow \alpha^2 f(\alpha) + f(\alpha) + \beta^2 f(\beta) + f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha)(\alpha^2 + 1) + f(\beta)(\beta^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)(\alpha^2 + 1) + f^2(\beta)(\beta^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) = -f^2(\beta) \frac{\beta^2 + 1}{\alpha^2 + 1} \leq 0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) \leq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

– Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

– Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $f(\alpha) = 0$ δηλαδή το $x = \alpha$ θα είναι ρίζα της f , είτε θα είναι $f(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της f .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

649. Έστω $g(x) = f(x) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = f(\alpha)(1 - \kappa) - \lambda f(\beta) = \lambda f(\alpha) - \lambda f(\beta) = \lambda(f(\alpha) - f(\beta))$$

$$\text{και } g(\beta) = f(\beta) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = (1 - \lambda)f(\beta) - \kappa f(\alpha) = \kappa f(\beta) - \kappa f(\alpha) = \\ = \kappa(f(\beta) - f(\alpha)) = -\kappa(f(\alpha) - f(\beta)), \text{ δηλαδή } g(\alpha) \cdot g(\beta) = -\kappa\lambda(f(\alpha) - f(\beta))^2 \leq 0$$

αφού κ.λ θετικοί αριθμοί.

- Αν $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)$.
- Αν $g(\alpha) \cdot g(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(\alpha) = 0$ δηλαδή το $x = \alpha$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)$.

650. Είναι $f(1) + 2f(2) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -2f(2) \Leftrightarrow f(1) \cdot f(2) = -2f^2(2) \leq 0$.

Hf είναι συνεχής στο $[1, 2]$.

- Αν $f(1) \cdot f(2) < 0$, δηλαδή για $f(1), f(2) \neq 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2) \subseteq [1, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
- Αν $f(1) \cdot f(2) = 0$ τότε, είτε θα είναι $f(1) = 0$ δηλαδή το $x = 1$ θα είναι ρίζα της f , είτε θα είναι $f(2) = 0$ δηλαδή το $x = 2$ θα είναι ρίζα της f .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

651. i. Έστω $g(x) = f(x) - x3^x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) \geq 0$, αφού για $x=0$ στη δοθείσα σχέση παίρνουμε $0 \leq f(0) < 2$, και $g(1) = f(1) - 3 < 0$, αφού για $x=1$ στη δοθείσα σχέση παίρνουμε $1 \leq f(1) < 3$. Έχουμε λοιπόν $g(0) \cdot g(1) \leq 0$.

- Αν $g(0) \cdot g(1) < 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 3^{x_0}$.
- Αν $g(0) \cdot g(1) = 0$, $g(1) < 0$, τότε, είτε θα είναι $g(0) = 0$ δηλαδή το $x = 0$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 3^{x_0}.$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta \mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \cdot x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \cdot x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Από τη δοθείσα σχέση $x^2 \leq f(x) < x^2 + 2$ αν βάλουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\frac{1}{x^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) < 1 + 2x^2.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2) = 1$, άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\text{Τέλος βρίσκουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta \mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1^2 \cdot 1 = 1.$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^3 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 5x}{x^2 + \eta \mu 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta \mu^3 x}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 5}{x + \frac{\eta \mu 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \eta \mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 5}{x + 3 \frac{\eta \mu 3x}{3x}} = \frac{1+5}{0+3} = 2$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 3x}{3x} \stackrel{u=3x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \eta \mu x. \text{ Πρέπει να υπολογίσουμε δύο όρια :}$$

$$- \text{ Έχουμε } x^2 \leq f(x) < x^2 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x^2} < 1 + \frac{2}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 1, \text{ άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1.$$

$$- \text{ Και } |\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| |\eta \mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta \mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής θα είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta \mu x = 0 \text{ (μηδενική επί φραγμένη).}$$

$$\text{Τέλος έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \eta \mu x = 1 \cdot 0 = 0.$$

652. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το $f(A) = [\alpha, \beta]$.

i. Έστω $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0$, αφού $\alpha \leq f(\alpha) \leq \beta$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0$, αφού $\alpha \leq f(\beta) \leq \beta$, δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) \leq 0$.

- Αν $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

- Αν $g(\alpha) \cdot g(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(\alpha) = 0$ δηλαδή το $x = \alpha$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

ii. Η C_f τέμνει τουλάχιστον μία φορά τη διαγώνιο AG του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ όπου $A(\alpha, \alpha)$, $B(\beta, \alpha)$, $\Gamma(\beta, \beta)$ και $\Delta(\alpha, \beta)$.

653. Η f και η g έχουν πεδίο ορισμού το $A = [0, 1]$ και σύνολο τιμών το

$$f(A) = g(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right], \text{ δηλαδή } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \text{ και } 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Έστω $h(x) = g(x) + f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0) = g(0) + f(0) \geq 0$, αφού $f(0) \geq 0$ και

$$g(0) \geq 0 \text{ και } h(1) = g(1) + f(1) - 1 \leq 0, \text{ αφού } f(1) \leq \frac{1}{2} \text{ και } g(1) \leq \frac{1}{2}, \text{ δηλαδή}$$

$$h(0) \cdot h(1) \leq 0.$$

– Αν $h(0) \cdot h(1) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + g(x_0) = x_0$.

– Αν $h(0) \cdot h(1) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(0) = 0$ δηλαδή το $x = 0$ θα είναι ρίζα της h , είτε θα είναι $h(1) = 0$ δηλαδή το $x = 1$ θα είναι ρίζα της h .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + g(x_0) = x_0.$$

654. i. Για να ορίζεται η $h(x) = f(x) - f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)$ πρέπει $0 \leq x \leq \alpha$ και

$$0 \leq \frac{\alpha}{2} + x \leq \alpha \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2} \leq x \leq \frac{\alpha}{2}. \text{ Άρα η } h \text{ ορίζεται στο } \left[0, \frac{\alpha}{2}\right] \text{ και είναι συνεχής σε}$$

αυτό το διάστημα ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

ii. Έχουμε $h(0) = f(0) - f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ και $h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - f(\alpha) =$

$$-\left(f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \text{ άρα } h(0) \cdot h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\left(f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \leq 0.$$

– Αν $h(0) \cdot h\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } x_0 \in \left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \subseteq \left[0, \frac{\alpha}{2}\right] \text{ τέτοιο ώστε } h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x_0\right).$$

– Αν $h(0) \cdot h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(0) = 0$ δηλαδή το $x = 0$ θα είναι ρίζα

$$\text{της } h, \text{ είτε θα είναι } h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \text{ δηλαδή το } x = \frac{\alpha}{2} \text{ θα είναι ρίζα της } h.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x_0\right).$$

655.

Η f και η g έχουν πεδίο ορισμού το $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το

$$f(A) = g(A) = [\alpha, \beta], \text{ δηλαδή } \alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ και } \alpha \leq g(x) \leq \beta \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Έστω $h(x) = g(f(x)) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(\alpha) = g(f(\alpha)) - \alpha$ και $h(\beta) = g(f(\beta)) - \beta$,

Για $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq g(x) \leq \beta$, άρα και για $f(x) \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq g(f(x)) \leq \beta$,

οπότε $\alpha \leq g(f(\alpha)) \Leftrightarrow g(f(\alpha)) - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow h(\alpha) \geq 0$, και

$$g(f(\beta)) \leq \beta \Leftrightarrow g(f(\beta)) - \beta \leq 0 \Leftrightarrow h(\beta) \leq 0, \text{ δηλαδή } h(\alpha) \cdot h(\beta) \leq 0.$$

– Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\alpha, \beta) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(\gamma) = 0 \Leftrightarrow g(f(\gamma)) = \gamma$.

– Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(\alpha) = 0$ δηλαδή το $x = \alpha$ θα είναι ρίζα της h , είτε θα είναι $h(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της h .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\gamma) = 0 \Leftrightarrow g(f(\gamma)) = \gamma \Leftrightarrow (g \circ f)(\gamma) = \gamma.$$

656.

Η f και η g έχουν πεδίο ορισμού το $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το

$$f(A) = g(A) = [\alpha, \beta], \text{ δηλαδή } \alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ και } \alpha \leq g(x) \leq \beta \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Έστω $h(x) = g(f(x)) + f(g(x)) - 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(\alpha) = g(f(\alpha)) + f(g(\alpha)) - 2\alpha$ και $h(\beta) = g(f(\beta)) + f(g(\beta)) - 2\beta$.

Για $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq g(x) \leq \beta$, άρα και για $f(x) \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq g(f(x)) \leq \beta$, οπότε $\alpha \leq g(f(\alpha)) \Leftrightarrow \underline{g(f(\alpha)) - \alpha \geq 0}$ και $g(f(\beta)) \leq \beta \Leftrightarrow \underline{g(f(\beta)) - \beta \leq 0}$.

Για $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, άρα και για $g(x) \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq f(g(x)) \leq \beta$, οπότε $\alpha \leq f(g(\alpha)) \Leftrightarrow \underline{f(g(\alpha)) - \alpha \geq 0}$ και $f(g(\beta)) \leq \beta \Leftrightarrow \underline{f(g(\beta)) - \beta \leq 0}$.

$$\begin{cases} g(f(\alpha)) - \alpha \geq 0 \\ f(g(\alpha)) - \alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(g(\alpha)) + g(f(\alpha)) - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow h(\alpha) \geq 0$$

$$\begin{cases} g(f(\beta)) - \beta \leq 0 \\ f(g(\beta)) - \beta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(f(\beta)) + f(g(\beta)) - 2\beta \leq 0 \Leftrightarrow h(\beta) \leq 0$$

δηλαδή $h(\alpha) \cdot h(\beta) \leq 0$.

- Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(f(\xi)) + f(g(\xi)) = 2\xi$.
- Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(\alpha) = 0$ δηλαδή το $x = \alpha$ θα είναι ρίζα της h , είτε θα είναι $h(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ θα είναι ρίζα της h .

Αποδειξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(f(\xi)) + f(g(\xi)) = 2\xi \Leftrightarrow (g \circ f)(\xi) + (f \circ g)(\xi) = 2\xi.$$

657. Έστω x_0 μία ρίζα της $(f \circ f)(x) = x$. Τότε $f(f(x_0)) = x_0$.

Έστω $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_0, f(x_0)]$ (ή $[f(x_0), x_0]$) ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(x_0) = f(x_0) - x_0$ και

$$g(f(x_0)) = f(f(x_0)) - f(x_0) = x_0 - f(x_0) = -(f(x_0) - x_0), \text{ δηλαδή}$$

$$g(x_0) \cdot g(f(x_0)) = -(f(x_0) - x_0)^2 \leq 0$$

- Αν $g(x_0) \cdot g(f(x_0)) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, f(x_0)) \subseteq [x_0, f(x_0)]$ (ή $\xi \in (f(x_0), x_0) \subseteq [f(x_0), x_0]$) τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$.
- Αν $g(x_0) \cdot g(f(x_0)) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(x_0) = 0$ δηλαδή το $x = x_0$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(f(x_0)) = 0$ δηλαδή το $x = f(x_0)$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι και η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

658. Έστω x_0 μία ρίζα της $(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$. Τότε $f(f(x_0)) = g(g(x_0))$.

Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[f(x_0), g(x_0)]$ (ή $[g(x_0), f(x_0)]$) ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με

$$h(f(x_0)) = f(f(x_0)) - g(f(x_0)) = g(g(x_0)) - f(g(x_0)) \text{ και}$$

$$h(g(x_0)) = f(g(x_0)) - g(g(x_0)) = -(g(g(x_0)) - f(g(x_0))), \text{ δηλαδή}$$

$$h(f(x_0)) \cdot h(g(x_0)) = -(g(g(x_0)) - f(g(x_0)))^2 \leq 0$$

- Αν $h(f(x_0)) \cdot h(g(x_0)) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (f(x_0), g(x_0)) \subseteq [f(x_0), g(x_0)]$ (ή $\xi \in (g(x_0), f(x_0)) \subseteq [g(x_0), f(x_0)]$) τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.
- Αν $h(f(x_0)) \cdot h(g(x_0)) = 0$ τότε, είτε θα είναι $h(f(x_0)) = 0$ δηλαδή το $x = f(x_0)$ θα είναι ρίζα της h , είτε θα είναι $h(g(x_0)) = 0$ δηλαδή το $x = g(x_0)$ θα είναι ρίζα της h .

Αποδείξαμε λοιπόν η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.
Άτοπο αφού είναι αδύνατη. Άρα και η εξίσωση $(f \circ f)(x)=(g \circ g)(x)$ είναι αδύνατη.