

## Συναρτήσεις 1 – 1

**185. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3+4x_1}} = \sqrt{2+\sqrt{3+4x_2}} \Leftrightarrow \\ 2+\sqrt{3+4x_1} &= 2+\sqrt{3+4x_2} \Leftrightarrow \sqrt{3+4x_1} = \sqrt{3+4x_2} \Leftrightarrow 3+4x_1 = 3+4x_2 \Leftrightarrow \\ 4x_1 &= 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα  **$f$  είναι 1 – 1.**

**ii.** Πρέπει :

$$x \neq -1 \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} > 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \\ x > 1 \text{ ή } x < -1 \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \ln \frac{x_1-1}{x_1+1} = \ln \frac{x_2-1}{x_2+1} \stackrel{\ln x-1}{\Leftrightarrow} \frac{x_1-1}{x_1+1} = \frac{x_2-1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ (x_1-1)(x_2+1) &= (x_1+1)(x_2-1) \Leftrightarrow \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 - 1 = \cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - 1 \Leftrightarrow \\ 2x_1 &= 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα  **$f$  είναι 1 – 1.**

**iii.** Πρέπει :

$$1 - e^x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και}$$

$$\frac{e^x}{1-e^x} > 0 \Leftrightarrow e^x (1-e^x) > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} 1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = (-\infty, 0)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \ln \frac{e^{x_1}}{1-e^{x_1}} = \ln \frac{e^{x_2}}{1-e^{x_2}} \stackrel{\ln x-1}{\Leftrightarrow} \frac{e^{x_1}}{1-e^{x_1}} = \frac{e^{x_2}}{1-e^{x_2}} \Leftrightarrow \\ e^{x_1} (1-e^{x_2}) &= e^{x_2} (1-e^{x_1}) \Leftrightarrow e^{x_1} - \cancel{e^{x_1} e^{x_2}} = e^{x_2} - \cancel{e^{x_1} e^{x_2}} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \stackrel{e^x-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα  **$f$  είναι 1 – 1.**

**iv.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = (-\infty, 1)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 1 + e^{1+\sqrt{1-x_1}} = 1 + e^{1+\sqrt{1-x_2}} \Leftrightarrow e^{1+\sqrt{1-x_1}} = e^{1+\sqrt{1-x_2}} \stackrel{e^x-1}{\Leftrightarrow} \\ 1 + \sqrt{1-x_1} &= 1 + \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα  **$f$  είναι 1 – 1.**

**v.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2-x_1 > 2-x_2 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2-x_1-e^{x_1} > 2-x_2-e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

### Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (2-x-e^x)' = -1-e^x < 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**vi.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1-1 < 2x_2-1 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2x_1+e^{x_1}-1 < 2x_2+e^{x_2}-1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

### Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (2x+e^x-1)' = 2+e^x > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**vii.** Το πεδίο ορισμού της  $f(x) = \frac{xe^{-x}+3}{x} = e^{-x} + \frac{3}{x}$  είναι το  $A=(0,+\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{-x_1} + \frac{3}{x_1} > e^{-x_2} + \frac{3}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

### Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = \left( e^{-x} + \frac{3}{x} \right)' = -e^{-x} - \frac{3}{x^2} < 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**viii.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=(-2,+\infty)$ .

Παρατηρούμε ότι  $f(-1)=0$  και  $f(0)=0$ .

Είναι  $-1 \neq 0$  αλλά  $f(-1)=f(0)$ , άρα **η  $f$  δεν είναι 1-1**.

**ix.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ .

Παρατηρούμε ότι  $f(0)=1$  και  $f(1)=1$ .

Είναι  $0 \neq 1$  αλλά  $f(0)=f(1)$ , άρα **η  $f$  δεν είναι 1-1**.

**186.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=(0,+\infty)$ .

Είναι :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 3\ln x = (\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 3\ln x - 1 + 1 = (\ln x - 1)^3 + 1$$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (\ln x_1 - 1)^3 + 1 = (\ln x_2 - 1)^3 + 1 \Leftrightarrow (\ln x_1 - 1)^3 = (\ln x_2 - 1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln x_1 - 1 = \ln x_2 - 1 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \stackrel{\ln x \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα **η  $f$  είναι 1-1**.

**187.** Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Για κάθε  $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα **η  $f$  είναι** γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x)' = e^x > 0$$

Άρα **η  $f$  είναι** γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$ , άρα και **1-1**.

- Για κάθε  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα **η  $f$  είναι** γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (-\ln x)' = -\frac{1}{x} < 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

Άρα **η  $f$  είναι** γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ , άρα και **1-1**.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι **η  $f$  είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της αλλά όχι γνησίως μονότονη**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έστω  $A_1 = (-\infty, 1]$  και  $A_2 = (1, +\infty)$ . Για να δείξω ότι η  $f$  είναι 1-1, αρκεί να δείξω ότι  $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ .

Έτσι έχουμε :

– Για το  $A_1 = (-\infty, 1]$  :

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad (y > 0)$$

Πρέπει  $x \leq 1$  άρα :

$$\ln y \leq 1 \Leftrightarrow \ln y \leq \ln e \Leftrightarrow y \leq e$$

Συνεπώς  $f(A_1) = (0, e]$ .

– Για το  $A_2 = (1, +\infty)$  :

$$f(x) = y \Leftrightarrow -\ln x = y \Leftrightarrow \ln x = -y \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-y} \Leftrightarrow x = e^{-y}$$

Πρέπει  $x > 1$  άρα :

$$e^{-y} > 1 \Leftrightarrow e^{-y} > e^0 \Leftrightarrow -y > 0 \Leftrightarrow y < 0$$

Συνεπώς  $f(A_2) = (-\infty, 0)$ .

Είναι  $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ , άρα η  $f$  είναι 1-1.

**188.** Το πεδίο ορισμού της  $f$ , άρα και της  $f \circ f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

Άρα η  $f \circ f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και 1-1.

Έχουμε :

$$(f \circ f)(x^2 + 4x) = (f \circ f)(x + 4) \stackrel{f \circ f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ή } x = -4}$$

**Εναλλακτικός τρόπος**

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα και 1-1.

Έτσι έχουμε :

$$(f \circ f)(x^2 + 4x) = (f \circ f)(x + 4) \Leftrightarrow f(f(x^2 + 4x)) = f(f(x + 4)) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x^2 + 4x) = f(x + 4) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ή } x = -4}$$

**189. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \text{ και} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_1 - 1 > -x_2 - 1 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{-x_1} - x_1 - 1 > e^{-x_2} - x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και 1-1.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^{-x} - x - 1)' = -e^{-x} - 1 < 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και 1-1.

**ii.** Παρατηρούμε ότι  $f(0) = 0$ .

Έχουμε :

$$e^{-x} = x+1 \Leftrightarrow e^{-x} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=0}$$

iii. Έχουμε :

$$e^{-\lambda} - e^{-\mu} = \lambda - \mu \Leftrightarrow e^{-\lambda} - \lambda = e^{-\mu} - \mu \Leftrightarrow e^{-\lambda} - \lambda - 1 = e^{-\mu} - \mu - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(\lambda) = f(\mu) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{\lambda = \mu}$$

iv. Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$e^{-2x+1} - e^{-x} = x-1 \Leftrightarrow e^{-2x+1} - x = e^{-x} - 1 \Leftrightarrow e^{-(2x-1)} - 2x = e^{-x} - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-(2x-1)} - (2x-1) - 1 = e^{-x} - x - 1 \Leftrightarrow f(2x-1) = f(x) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} 2x-1 = x \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

**190. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = (0, +\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2-x_1 > 2-x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2-x_1 - \ln x_1 > 2-x_2 - \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (2-x-\ln x)' = -1 - \frac{1}{x} < 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

ii. Παρατηρούμε ότι  $f(1)=1$ .

Για  $x > 0$  έχουμε :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}$$

iii. Για  $x > 0$  έχουμε :

$$x + \ln x > 1 \Leftrightarrow -x - \ln x < -1 \Leftrightarrow 2-x-\ln x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} x > 1$$

Άρα  $x \in (1, +\infty)$ .

**191. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1-1} + x_1 + 2 < e^{x_2-1} + x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^{x-1} + x + 2)' = e^{x-1} + 1 > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**ii.** Παρατηρούμε ότι  $f(1)=4$ .

Έχουμε :

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}$$

**iii.** Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$e^{x-1} + x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + x + 2 > 4 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x > 1$$

Άρα  $x \in (1, +\infty)$ .

**192. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1-2} < e^{x_2-2} \text{ και} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1-2} + x_1 - 3 < e^{x_2-2} + x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^{x-2} + x - 3)' = e^{x-2} + 1 > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**ii.** Παρατηρούμε ότι  $f(2)=0$ .

**a.** Έχουμε :

$$x + e^{x-2} = 3 \Leftrightarrow e^{x-2} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=2}$$

**β.** Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$e^{x^2-2} + x^2 = 3 \Leftrightarrow e^{x^2-2} + x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = f(2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x^2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

**γ.** Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{3x-2} - e^{x^2} &= x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow e^{3x-2} + 3x - 2 = e^{x^2} + x^2 \Leftrightarrow \\ e^{3x-2} + (3x-2) - 3 &= e^{x^2} + x^2 - 3 \Leftrightarrow f(3x-2) = f(x^2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} 3x-2 = x^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ή } x=2} \end{aligned}$$

**193. α.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = (0, +\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} + 1 < -\frac{1}{x_2} + 1 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 - \frac{1}{x_1} + 1 < \ln x_2 - \frac{1}{x_2} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = \left( \ln x - \frac{1}{x} + 1 \right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**β.** Παρατηρούμε ότι  $f(1)=0$ .

**i.** Έχουμε :

$$\ln x^x + x = 1 \Leftrightarrow x \ln x + x = 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x + 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}$$

**ii.** Η ανίσωση ορίζεται για  $\begin{cases} (x^2+2)(2x^2+1) \neq 0 \\ \frac{2x^2+1}{x^2+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Έχουμε :

$$\ln \frac{2x^2+1}{x^2+2} = \frac{1-x^2}{(2x^2+1)(x^2+2)} \Leftrightarrow \ln(2x^2+1) - \ln(x^2+2) = \frac{(x^2+2) - (2x^2+1)}{(2x^2+1)(x^2+2)} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x^2+1) - \ln(x^2+2) = \frac{1}{2x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x^2+1) - \frac{1}{2x^2+1} = \ln(x^2+2) - \frac{1}{x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x^2+1) - \frac{1}{2x^2+1} + 1 = \ln(x^2+2) - \frac{1}{x^2+2} + 1 \Leftrightarrow f(2x^2+1) = f(x^2+2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$2x^2+1 = x^2+2 \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

**194. α. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1} = \frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1} \Leftrightarrow (2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1) = (2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2^{x_1} 2^{x_2}} + 2^{x_1} - 2^{x_2} - \cancel{1} = \cancel{2^{x_1} 2^{x_2}} + 2^{x_2} - 2^{x_1} - \cancel{1} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{x_1} = 2 \cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow$$

$$2^{x_1} = 2^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι **1-1**.

**ii.** Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού το  $B = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in B$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \xLeftrightarrow[\text{όταν } 0 < \alpha < 1]{\alpha^x \text{ γν.φθ.}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} - x_1 > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $B$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$g'(x) = \left( \left(\frac{1}{2}\right)^x - x \right)' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{2} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot (-\ln 2) - 1 = -\ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 < 0$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $B$ , άρα και **1-1**.

**β.** Έχουμε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} - x^2 \Leftrightarrow_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} - x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - (x-1) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} - (x^2-1) \Leftrightarrow g(x-1) = g(x^2-1) \Leftrightarrow_{g^{1-1}} x-1 = x^2-1 \Leftrightarrow \\ x^2 - x &= 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0 \text{ ή } x=1} \end{aligned}$$

**195. i.** Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \xLeftrightarrow[f \text{ γν.φθ.}] f(x_1) > f(x_2)$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**ii.** Έχουμε :

$$\begin{aligned} f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \Leftrightarrow f(\lambda^2 - 3\lambda) - \lambda^2 + 3\lambda = f(2\lambda - 6) - 2\lambda + 6 \Leftrightarrow \\ f(\lambda^2 - 3\lambda) - (\lambda^2 - 3\lambda) &= f(2\lambda - 6) - (2\lambda - 6) \Leftrightarrow g(\lambda^2 - 3\lambda) = g(2\lambda - 6) \Leftrightarrow_{g^{1-1}} \\ \lambda^2 - 3\lambda &= 2\lambda - 6 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3} \end{aligned}$$

**196.** Παρατηρούμε ότι :

- Για  $x=0$  είναι  $f(0) = \cancel{g(0)} - \cancel{g(0)} + 20 = 20$  και
- Για  $x=3$  είναι  $f(3) = \cancel{g(3)} - \cancel{g(3)} + 20 = 20$

Είναι  $0 \neq 3$  αλλά  $f(0)=f(3)$ , άρα η  $f$  δεν είναι **1-1**.

**197.** Έχουμε :

$$\begin{aligned}
f^2(1) + f^2(2) + 1 &= f(1) + f(2) + f(1)f(2) \Leftrightarrow \\
f^2(1) + f^2(2) + 1 - f(1) - f(2) - f(1)f(2) &= 0 \Leftrightarrow \\
2f^2(1) + 2f^2(2) + 2 - 2f(1) - 2f(2) - 2f(1)f(2) &= 0 \Leftrightarrow \\
f^2(1) + f^2(1) + f^2(2) + f^2(2) + 2 - 2f(1) - 2f(2) - 2f(1)f(2) &= 0 \Leftrightarrow \\
f^2(1) - 2f(1)f(2) + f^2(2) + f^2(1) - 2f(1) + 1 + f^2(2) - 2f(2) + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
(f(1) - f(2))^2 + (f(1) - 1)^2 + (f(2) - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
f(1) - f(2) = 0 \text{ και } f(1) - 1 = 0 \text{ και } f(2) - 1 = 0 &\Leftrightarrow \\
f(1) = f(2) \text{ και } f(1) = 1 \text{ και } f(2) = 1 &\Leftrightarrow f(1) = f(2) = 1
\end{aligned}$$

Είναι  $1 \neq 2$  αλλά  $f(1)=f(2)$ , άρα **η f δεν είναι 1-1**.

**198.** Για  $x=0$  έχουμε :

$$f(0)f(2017) \geq f^2(0)$$

Για  $x=2017$  έχουμε :

$$f(2017)f(0) \geq f^2(2017)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$\begin{aligned}
2f(2017)f(0) &\geq f^2(0) + f^2(2017) \Leftrightarrow f^2(2017) - 2f(2017)f(0) + f^2(0) \leq 0 \Leftrightarrow \\
(f(2017) - f(0))^2 &\leq 0 \Leftrightarrow f(2017) - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(2017) = f(0)
\end{aligned}$$

Είναι  $0 \neq 2017$  αλλά  $f(0)=f(2017)$ , άρα **η f δεν είναι 1-1**.

**199.** Για  $x=0$  έχουμε :

$$\begin{aligned}
f(0) - f^2(0) &\geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow f^2(0) - f(0) + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\
f(0) - \frac{1}{2} &= 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Για  $x=1$  έχουμε :

$$\begin{aligned}
f(1) - f^2(1) &\geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow f^2(1) - f(1) + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\
f(1) - \frac{1}{2} &= 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Είναι  $0 \neq 1$  αλλά  $f(0)=f(1)$ , άρα **η f δεν είναι 1-1**.

**200.** Έχουμε :

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2x + 1 = x(x^2 + ax - 2) + 1$$

Για το τριώνυμο  $x^2 + ax - 2$  παρατηρούμε πως  $\Delta = a^2 + 8 > 0$ , δηλαδή το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες, έστω  $x_1, x_2$ .

Οπότε έχουμε :

$$\text{Για } x=x_1 \text{ είναι } f(x_1) = x_1 \left( \cancel{x_1^2 + ax_1 - 2} \right)^0 + 1 = 1.$$

$$\text{Για } x=x_2 \text{ είναι } f(x_2) = x_2 \left( \cancel{x_2^2 + ax_2 - 2} \right)^0 + 1 = 1.$$

Είναι  $x_1 \neq x_2$  αλλά  $f(x_1)=f(x_2)$ , άρα **η f δεν είναι 1-1**.

Για την  $g(x)$  έχουμε :

$$\text{Για } x=x_1 \text{ είναι } g(x_1) = e^{f(x_1)} + x_1^2 + ax_1 - 2 = e^1 + 0 = e.$$

$$\text{Για } x=x_2 \text{ είναι } g(x_2) = e^{f(x_2)} + x_2^2 + ax_2 - 2 = e^1 + 0 = e.$$

Είναι  $x_1 \neq x_2$  αλλά  $g(x_1)=g(x_2)$ , άρα **η g δεν είναι 1-1**.

**201. i.** Στη σχέση

$$(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9 \Leftrightarrow f(f(x)) = x^2 - 5x + 9$$

για  $x=3$  παίρνουμε :

$$f(f(3)) = 9 - 15 + 9 \Leftrightarrow f(f(3)) = 3$$

και για  $x=f(3)$  παίρνουμε :

$$f(f(f(3))) = f^2(3) - 5f(3) + 9 \stackrel{f(f(3))=3}{\Leftrightarrow} f(3) = f^2(3) - 5f(3) + 9 \Leftrightarrow$$

$$f^2(3) - 6f(3) + 9 = 0 \Leftrightarrow (f(3) - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow f(3) - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 3}$$

**ii.** Για την  $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$  έχουμε :

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } g(0)=3.$$

Για  $x=3$  είναι :

$$g(3) = 9 - 3f(3) + 3 = 12 - 9 = 3$$

Είναι  $0 \neq 3$  αλλά  $g(0)=g(3)$ , άρα **η g δεν είναι 1-1**.

**202. i.** Στη σχέση

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

για  $x=1$  παίρνουμε :

$$f(f(1)) = 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow f(f(1)) = 1$$

και για  $x=f(1)$  παίρνουμε :

$$f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1 \stackrel{f(f(1))=1}{\Leftrightarrow} f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow$$

$$f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 1}$$

**ii.** Για την  $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$  έχουμε :

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } g(0)=1.$$

Για  $x=1$  είναι :

$$g(1) = 1 - f(1) + 1 = 2 - 1 = 1$$

Είναι  $0 \neq 1$  αλλά  $g(0)=g(1)$ , άρα **η g δεν είναι 1-1**.

**203. i.** Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , έστω  $f(x_1)=f(x_2)$ . Έτσι θα έχουμε :

$$- \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \text{ και}$$

$$- \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$$

Προσθέτοντας τις ισότητες κατά μέλη παίρνουμε :

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^{2017} - 1 = 3x_2^{2017} - 1 \Leftrightarrow$$

$$3x_1^{2017} = 3x_2^{2017} \Leftrightarrow x_1^{2017} = x_2^{2017} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

ii. Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x^3 - 2x) &= f(x - 2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x^3 - 2x = x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ x(x^2 - 1) - 2(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ (x - 1)(x + 2)(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ή } x = -2} \end{aligned}$$

**204. i.** Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , έστω  $f(x_1) = f(x_2)$ . Έτσι θα έχουμε :

$$\begin{aligned} - \quad f(x_1) &= f(x_2) \Leftrightarrow (f(x_1))^3 = (f(x_2))^3 \Leftrightarrow 2(f(x_1))^3 = 2(f(x_2))^3 \text{ και} \\ - \quad f(x_1) &= f(x_2) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ισότητες κατά μέλη παίρνουμε :

$$2(f(x_1))^3 + f(x_1) = 2(f(x_2))^3 + f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

ii. Έστω ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , είναι  $f(x_1) > f(x_2)$ . Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x_1) &> f(x_2) \Leftrightarrow (f(x_1))^3 > (f(x_2))^3 \Leftrightarrow 2(f(x_1))^3 > 2(f(x_2))^3 \text{ και} \\ \bullet \quad f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2(f(x_1))^3 + f(x_1) > 2(f(x_2))^3 + f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 > 3x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, αφού  $x_1 < x_2$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### **Εναλλακτικός τρόπος**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = 2x^3 + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $g'(x) = 6x^2 + 1 > 0$ , άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Είναι :

$$2(f(x))^3 + f(x) = 3x \Leftrightarrow g(f(x)) = 3x$$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

iii. Στη σχέση  $2(f(x))^3 + f(x) = 3x$  για  $x=1$  παίρνουμε :

$$\begin{aligned} 2(f(1))^3 + f(1) &= 3 \Leftrightarrow 2f^3(1) + f(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow 2f^3(1) - 2 + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ 2(f^3(1) - 1) + f(1) - 1 &= 0 \Leftrightarrow 2(f(1) - 1)(f^2(1) + f(1) + 1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(1) - 1)(2f^2(1) + 2f(1) + 2 + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(1) - 1)(2f^2(1) + 2f(1) + 3) &= 0 \stackrel{2f^2(1) + 2f(1) + 3 \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f(1) = 1} \end{aligned}$$

iv. Έχουμε :

$$f(x^2+x-1) < 1 \Leftrightarrow_{x \in \mathbb{R}} f(x^2+x-1) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αὐξ.}}{\Leftrightarrow} x^2+x-1 < 1 \Leftrightarrow x^2+x-2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

αφού :

η  $x^2+x-2=0$  έχει ρίζες τις  $x=-2, 1$ , οπότε :

|           |           |            |   |            |   |
|-----------|-----------|------------|---|------------|---|
| x         | $-\infty$ | -2         | 1 | $+\infty$  |   |
| $x^2+x-2$ | +         | $\bigcirc$ | - | $\bigcirc$ | + |

Άρα  $x \in (-2, 1)$ .

**205. i.** Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η  $g \circ f$  είναι 1-1.

**ii.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x^3 + 2x - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + 2x_1 - 3 < x_2^3 + 2x_2 - 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και 1-1.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + 2x - 3)' = 3x^2 + 2 > 0$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και 1-1.

Είναι :

$$\varphi(x) = [f(x)]^3 + 2f(x) - 3 \Leftrightarrow \varphi(x) = g(f(x))$$

Η  $f$  είναι 1-1 και η  $g$  είναι 1-1, άρα και η  $g \circ f$ , δηλαδή η  $\varphi$ , είναι 1-1.

**206. i.** Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$  και
- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αὐξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -2e^{x_1} > -2e^{x_2}$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(x_1) - 2e^{x_1} > f(x_2) - 2e^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ , άρα και 1-1.

**ii.** Έχουμε :

$$f(\lambda - 1) + 2 < f(0) + 2e^{\lambda-1} \Leftrightarrow f(\lambda - 1) - 2e^{\lambda-1} < f(0) - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(\lambda-1)-2e^{\lambda-1} < f(0)-2e^0 \Leftrightarrow g(\lambda-1) < g(0) \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \lambda-1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda > 1}$$

iii. Έχουμε :

$$g(\ln \alpha) - g(\ln \beta) = 2(\beta - \alpha) \Leftrightarrow f(\ln \alpha) - 2e^{\ln \alpha} - (f(\ln \beta) - 2e^{\ln \beta}) = 2(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\ln \alpha) - 2e^{\ln \alpha} - f(\ln \beta) + 2e^{\ln \beta} = 2(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\ln \alpha) - 2\alpha - f(\ln \beta) + 2\beta = 2\beta - 2\alpha \Leftrightarrow f(\ln \alpha) = f(\ln \beta) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \text{αφού } f \text{ γν.φθ.}$$

$$\ln \alpha = \ln \beta \stackrel{\ln x \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha = \beta}$$

**207. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + x_1 + 2 < x_2^3 + x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

*Εναλλακτικός τρόπος*

Έχουμε :

$$f'(x) = (x^3 + x + 2)' = 3x^2 + 1 > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

ii. Έχουμε :

$$f(f(x)) \geq 12 \stackrel{f(2)=12}{\Leftrightarrow} f(f(x)) \geq f(2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq 2 \stackrel{f(0)=2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$f(x) \geq f(0) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{x \geq 0}$$

iii. Για  $x > 0$  έχουμε :

$$2x < 3x \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(3x)$$

Όμοια έχουμε :

$$0 < x \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^0 < e^x \Leftrightarrow 1 < e^x \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(1) < f(e^x)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\boxed{f(2x) + f(1) < f(3x) + f(e^x), \text{ για κάθε } x > 0}$$

iv. Για  $x \in \mathbb{R}$  διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Για  $x=0$  η ισότητα ισχύει, αφού  $f(0)+f(1)=f(0)+f(1)$ .
- Για  $x < 0$  έχουμε :

$$\begin{cases} 2x > 3x \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(2x) > f(3x) \\ 1 < 2017 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x > 2017x \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^x > e^{2017x} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(e^x) > f(e^{2017x}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(2x) + f(e^x) > f(3x) + f(e^{2017x})$$

Άρα η εξίσωση  $f(2x) + f(e^x) = f(3x) + f(e^{2017x})$  έχει μοναδική ρίζα την  $x=0$ .

**208. A. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \xrightarrow{e^x \text{ γν.αύξ.}} e^{x_1} < e^{x_2}$  και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x + x - 1)' = e^x + 1 > 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**ii.** Παρατηρούμε ότι  $f(0)=0$ .

Έτσι για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$e^x = 1 - x \Leftrightarrow x + e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \xrightarrow{f \text{ 1-1}} \boxed{x=0}$$

**B. i.** Είναι :

$$g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1 \Leftrightarrow g(x) + e^{g(x)} - 1 = 2x \Leftrightarrow f(g(x)) = 2x$$

Για  $x=0$  έχουμε :

$$f(g(0)) = 0 \Leftrightarrow f(g(0)) = f(0) \xrightarrow{f \text{ 1-1}} \boxed{g(0)=0}$$

**ii.** Έστω ότι η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , είναι  $g(x_1) > g(x_2)$ . Έτσι έχουμε :

- $g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{e^x \text{ γν.αύξ.}} e^{g(x_1)} > e^{g(x_2)}$  και
- $g(x_1) > g(x_2)$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$g(x_1) + e^{g(x_1)} > g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 > 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 > 2x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, αφού  $x_1 < x_2$ , άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**ii.** Έχουμε :

$$(g \circ f)(x) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \xrightarrow{g \text{ γν.αύξ.}} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} \boxed{x > 0}$$

**209. i.** Το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το  $A=\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$  και

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad \overset{a^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad 2^{x_1} < 2^{x_2} \quad \text{όταν } a > 1$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + 2^{x_1} < x_2^3 + 2^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι **γνησίως αύξουσα** στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + 2^x)' = 3x^2 + 2^x \ln 2 > 0$$

Άρα η  $g$  είναι **γνησίως αύξουσα** στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**ii.** Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $M(1,4)$  και  $N(5,3)$ , δηλαδή θα είναι  $f(1)=4$  και  $f(5)=3$ .

Αφού η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Έτσι έχουμε :

$$1 < 5 \quad \overset{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad f(1) < f(5) \Leftrightarrow 4 < 3$$

Άτοπο, άρα η  $f$  είναι **γνησίως φθίνουσα** στο  $\mathbb{R}$ , άρα και **1-1**.

Έχουμε :

$$f(1 + f(x+7)) > 3 \quad \overset{f(5)=3}{\underset{x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow}} \quad f(1 + f(x+7)) > f(5) \quad \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \quad 1 + f(x+7) < 5 \Leftrightarrow$$

$$f(x+7) < 4 \quad \overset{f(1)=4}{\Leftrightarrow} \quad f(x+7) < f(1) \quad \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \quad x+7 > 1 \Leftrightarrow \boxed{x > -6}$$

**ii.** Έχουμε :

$$f(x^6 + 2^{x^2} - 2) = 4 \quad \overset{x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \quad f(x^6 + 2^{x^2} - 2) = f(1) \quad \overset{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \quad x^6 + 2^{x^2} - 2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x^6 + 2^{x^2} = 3 \Leftrightarrow (x^2)^3 + 2^{x^2} = 3 \Leftrightarrow g(x^2) = 3 \quad \overset{g(1)=3}{\Leftrightarrow} \quad g(x^2) = g(1) \quad \overset{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

**210. i.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x + e^x$ .

Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad \overset{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad e^{x_1} < e^{x_2} \quad \text{και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι **γνησίως αύξουσα** στο  $A$ .

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$g'(x) = (x + e^x)' = 1 + e^x > 0$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ .

Είναι :

$$f(x) + e^{f(x)} = x \Leftrightarrow g(f(x)) = x$$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και 1-1.

**ii.** Η  $C_f$  τέμνει τον  $x'x$  στο  $x_0 = \rho$ , οπότε είναι  $f(\rho) = 0$ .

Στη σχέση  $f(x) + e^{f(x)} = x$ , για  $x = \rho$  έχουμε :

$$f(\rho) + e^{f(\rho)} = \rho \stackrel{f(\rho)=0}{\Leftrightarrow} \boxed{\rho = 1}$$

**iii.** Έστω ότι υπάρχει  $x_1 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) \geq x_1$ . Έτσι έχουμε :

$$f(x_1) \geq x_1 \stackrel{x=f(x)+e^{f(x)}}{\Leftrightarrow} \cancel{f(x_1)} \geq \cancel{f(x_1)} + e^{f(x_1)} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} \leq 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα ισχύει  $f(x) < x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**iv.** Έχουμε :

$$\begin{aligned} f(2\alpha^2 - 1) + e^{f(\alpha)} &= \alpha \stackrel{x=f(x)+e^{f(x)}}{\Leftrightarrow} f(2\alpha^2 - 1) + \cancel{e^{f(\alpha)}} = f(\alpha) + \cancel{e^{f(\alpha)}} \Leftrightarrow \\ f(2\alpha^2 - 1) &= f(\alpha) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} 2\alpha^2 - 1 = \alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ &\quad \text{αφού είναι γν.αύξ.} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \Delta = 9, \text{ οπότε } \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}, \text{ δηλαδή } \boxed{\alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -\frac{1}{2}}.$$

**211. i.** Το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $g$  είναι 1-1.

**ii.** Έχουμε :

$$\begin{aligned} g(x^2 - 5x + 4) &= g(1 - x) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x^2 - 5x + 4 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ (x-1)(x-3) &= 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ή } x = 3} \end{aligned}$$

**212. i.** Είναι :

$$(f \circ f)(x) + 3f(x) - x^{2017} = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) + 3f(x) = x^{2017}$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3f(x_1) = 3f(x_2)$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(f(x_1)) + 3f(x_1) = f(f(x_2)) + 3f(x_2) \Leftrightarrow x_1^{2017} = x_2^{2017} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

ii. Έχουμε :

$$f(x + \eta\mu x) = f(1 - e^x) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} x + \eta\mu x = 1 - e^x \Leftrightarrow x + \eta\mu x - 1 + e^x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x + \eta\mu x - 1 + e^x$ .

Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού το  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2$ ,
- $x_1 < x_2 \stackrel{\eta\mu x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}_{\text{στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \Leftrightarrow \eta\mu x_1 - 1 < \eta\mu x_2 - 1 \text{ και}$
- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 + \eta\mu x_1 - 1 + e^{x_1} < x_2 + \eta\mu x_2 - 1 + e^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , άρα και 1-1.

### **Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$g'(x) = (x + \eta\mu x - 1 + e^x)' = 1 + \sigma\upsilon\nu x + e^x > 0, \text{ αφού } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Παρατηρούμε ότι  $g(0)=0$ , οπότε έχουμε :

$$x + \eta\mu x - 1 + e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(0) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=0}$$

**213. i.** Είναι :

$$f(f(x)) = f(x) + e^x - 1 \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = e^x - 1$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 = e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

ii. Έχουμε :

$$f(x^3 - 5x) = f(2x - 6) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}_{x \in \mathbb{R}} x^3 - 5x = 2x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ή } x=-3 \text{ ή } x=2}$$

αφού :

|   |   |    |          |          |
|---|---|----|----------|----------|
| 1 | 0 | -7 | 6        | $\rho=1$ |
|   | 1 | 1  | -6       |          |
| 1 | 1 | -6 | <b>0</b> |          |

**214. i.** Είναι :

$$(f \circ f)(x) = f(x) + ax \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = ax$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=\mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα  **$f$  είναι 1-1**.

**ii.** Στη σχέση  $f(f(x)) - f(x) = ax$  για  $x=0$  παίρνουμε :

$$f(f(0)) - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(f(0)) = f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{f(0) = 0}$$

**iii.** Έχουμε :

$$f(g(e^x) - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow f(g(e^x) - 2x + 3) = f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} g(e^x) - 2x + 3 = 0$$

Για :

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln e^x = \ln y \Leftrightarrow x = \ln y$$

έχουμε :

$$g(y) - 2 \ln y + 3 = 0 \Leftrightarrow g(y) = 2 \ln y - 3$$

Άρα :

$$\boxed{g(x) = 2 \ln x - 3, x > 0}$$

**215. i.** Είναι :

$$(f \circ f)(x) = xf(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = xf(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(f(x))}{f(x)} = x$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A=(0, +\infty)$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f(x_1)} = \frac{1}{f(x_2)}$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{f(f(x_1))}{f(x_1)} = \frac{f(f(x_2))}{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα **η f είναι 1-1**.

**ii.** Στη σχέση  $f(f(x)) = xf(x)$  για  $x=1$  παίρνουμε :

$$f(f(1)) = f(1) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{f(1)=1}$$

**iii.** Έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha^2+2)}{\alpha^2+\alpha+1} &= \frac{f(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha^2+2} \Leftrightarrow (\alpha^2+2)f(\alpha^2+2) = (\alpha^2+\alpha+1)f(\alpha^2+\alpha+1) \Leftrightarrow \\ f(f(\alpha^2+2)) &= f(f(\alpha^2+\alpha+1)) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2+2) = f(\alpha^2+\alpha+1) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} \\ \cancel{\alpha^2} + 2 &= \cancel{\alpha^2} + \alpha + 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1} \end{aligned}$$

**216. i.** Είναι :

$$f(f(x)) = f(x) + \ln x \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = \ln x$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το  $A=(0,+\infty)$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα **η f είναι 1-1**.

**ii.** Στη σχέση  $f(f(x)) = f(x) + \ln x$  για  $x=1$  παίρνουμε :

$$f(f(1)) = f(1) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{f(1)=1}$$

**iii.** Έχουμε :

$$\begin{aligned} f^2(\alpha) + f^2(\beta) - 2f(\alpha) - 2f(\beta) + 2 &= 0 \Leftrightarrow f^2(\alpha) - 2f(\alpha) + 1 + f^2(\beta) - 2f(\beta) + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(\alpha)-1)^2 + (f(\beta)-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)-1=0 \\ f(\beta)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=1 \\ f(\beta)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} f(\alpha)=f(1) \\ f(\beta)=f(1) \end{cases} \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=\beta} \end{aligned}$$

**217. i.** Είναι :

$$(g \circ f)(x) = 2x^5 + e^{f(x)} + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) - e^{f(x)} = 2x^5 + 1$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το  $A=\mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Leftrightarrow -e^{f(x_1)} = -e^{f(x_2)}$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$g(f(x_1)) - e^{f(x_1)} = g(f(x_2)) - e^{f(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1^5 + 1 = 2x_2^5 + 1 \Leftrightarrow 2x_1^5 = 2x_2^5 \Leftrightarrow x_1^5 = x_2^5 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

ii. Έχουμε :

$$f(\ln x) = f(1-x^3) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}_{x>0} \ln x = 1-x^3 \Leftrightarrow x^3 + \ln x - 1 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x^3 + \ln x - 1, x > 0$ .

Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$  και
- $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 - 1 < \ln x_2 - 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + \ln x_1 - 1 < x_2^3 + \ln x_2 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , άρα και 1-1.

### Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + \ln x - 1)' = 3x^2 + \frac{1}{x} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Παρατηρούμε ότι  $g(1) = 0$ , οπότε έχουμε :

$$x^3 + \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(1) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}$$

**218. i.** Είναι :

$$f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x) \Leftrightarrow f(1+f(x)) - f(x) = 2x - 6$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 1 + f(x_1) = 1 + f(x_2) \Rightarrow f(1 + f(x_1)) = f(1 + f(x_2))$  και
- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(1+f(x_1)) - f(x_1) = f(1+f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

ii. Στη σχέση  $f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x)$  για  $x=3$  παίρνουμε :

$$f(1+f(3)) = f(3) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} 1+f(3) = 3 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 2}$$

**219. i.** Είναι :

$$f(f(x)) = x$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα  **$\eta f$  είναι 1-1**.

**ii.** Έστω ότι υπάρχει  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$ , τέτοια ώστε  $f(x_1) = f(x_2) = 2017$ . Έτσι έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2, \text{ άτοπο}$$

Άρα  **$\eta$  εξίσωση  $f(x) = 2017$  έχει μία ακριβώς λύση.**

**iii.** Βάζοντας στη σχέση  $g(x) = e^x + e^{f(x)}$  όπου  $x$  το  $f(x)$  παίρνουμε :

$$g(f(x)) = e^{f(x)} + e^{f(f(x))} \Leftrightarrow g(f(x)) = e^{f(x)} + e^x \Leftrightarrow g(f(x)) = g(x) \stackrel{g^{-1}}{\Leftrightarrow}$$

$f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

**220. A. i.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \stackrel{g \circ f^{-1}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα  **$\eta f$  είναι 1-1**.

**ii.** Αφού  $\eta f$  είναι 1-1, τότε  $\eta f$  αντιστρέφεται.

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  έχουμε :

- $x_1 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , άρα υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f(\alpha) = x_1 \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(x_1)$
- $x_2 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , άρα υπάρχει  $\beta \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f(\beta) = x_2 \Leftrightarrow \beta = f^{-1}(x_2)$

Οπότε :

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow g(f(\alpha)) = g(f(\beta)) \Leftrightarrow (g \circ f)(\alpha) = (g \circ f)(\beta) \stackrel{g \circ f^{-1}}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα  **$\eta g$  είναι 1-1**.

**B. i.** Είναι :

$$\varphi(\varphi(x)) = e^{-x} + \varphi^3(x) \Leftrightarrow \varphi(\varphi(x)) - \varphi^3(x) = e^{-x}$$

Το πεδίο ορισμού της  $\varphi$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

Έστω ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  είναι  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ , οπότε έχουμε :

- $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow \varphi(\varphi(x_1)) = \varphi(\varphi(x_2))$  και
- $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi^3(x_1) = \varphi^3(x_2) \Leftrightarrow \varphi^3(x_1) - \varphi^3(x_2) = 0$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\varphi(\varphi(x_1)) - \varphi^3(x_1) = \varphi(\varphi(x_2)) - \varphi^3(x_2) \Leftrightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα  **$\eta \varphi$  είναι 1-1**.

**ii.** Έχουμε :

$$\varphi(h(x) + x^2 - x) = \varphi(h(x) + 2x - 2) \stackrel{\varphi 1-1}{\Leftrightarrow} \cancel{h(x)} + x^2 - x = \cancel{h(x)} + 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ή } x=2}$$

**221. i.** Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \text{ και}$
- $x_1 < x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι **γνησίως αύξουσα** στο  $A$ , άρα και 1-1.

**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x + x)' = e^x + 1 > 0$$

Άρα η  $f$  είναι **γνησίως αύξουσα** στο  $A$ , άρα και 1-1.

**ii.** Έχουμε :

$$f(f(x)) = e^{e^x + 1} + e + 1 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e+1) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e+1 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}$$

**iii.** Παρατηρούμε ότι  $f(\ln x) = e^{\ln x} + \ln x = x + \ln x$ , οπότε έχουμε :

$$f(g(x)) = x + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) = f(\ln x) \stackrel{f 1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{g(x) = \ln x, x > 0}$$

**222. i.** Στη δοθείσα σχέση, για  $y=1$  παίρνουμε :

$$\cancel{f(x)} - f(1) = \cancel{f(x)} \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Γνωρίζουμε πως η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μοναδική ρίζα και έχουμε και  $f(1)=0$ , συνεπώς είναι  **$x=1$** .

**ii.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R}^*$ .

Έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \stackrel{f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)}{f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 0} \stackrel{\text{το 1 είναι η μοναδική ρίζα της } f}{\Leftrightarrow} \frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι **1-1**.

**iii.** Στην αρχική σχέση θέτουμε όπου  $x$  το 1 και έχουμε :

$$\cancel{f(1)}^0 - f(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Δηλαδή :

$$\boxed{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

**iv.** Η εξίσωση ορίζεται για  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x) + f(x^2 + 3) &= f(x^2 + 1) + f(x + 1) \Leftrightarrow f(x) - f(x^2 + 1) = f(x + 1) - f(x^2 + 3) \Leftrightarrow \\ f\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) &= f\left(\frac{x + 1}{x^2 + 3}\right) \stackrel{f(1)=1}{\Leftrightarrow} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x + 1}{x^2 + 3} \Leftrightarrow x^2 + 3x = x^2 + x + x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

**v.** Έχουμε :

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \stackrel{x_1 > 0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{x_2}{x_1} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} > 1 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0 \stackrel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)}{\Leftrightarrow} \\ f(x_2) - f(x_1) > 0 &\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**223. i.** Στη δοθείσα σχέση, για  $x=1$  και  $y=e$  παίρνουμε :

$$\begin{aligned} f(1) - f(e) &= \ln \frac{1}{e} + 2(1 - e) \Leftrightarrow f(1) - f(e) = \ln 1 - \ln e + 2 - 2e \Leftrightarrow \\ f(1) - f(e) &= -1 + 2 - 2e \Leftrightarrow f(1) - f(e) = 1 - 2e \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις  $f(1) - f(e) = 1 - 2e$  και  $f(1) + f(e) = 2e + 3$  κατά μέλη, έχουμε :

$$2f(1) = 4 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 2} \text{ και}$$

$$f(1) + f(e) = 2e + 3 \stackrel{f(1)=2}{\Leftrightarrow} 2 + f(e) = 2e + 3 \Leftrightarrow \boxed{f(e) = 2e + 1}$$

**ii.** Στη δοθείσα σχέση, για  $y=1$  παίρνουμε :

$$f(x) - f(1) = \ln \frac{x}{1} + 2(x - 1) \Leftrightarrow f(x) - 2 = \ln x + 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \ln x + 2x, x > 0}$$

**iii.** Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = (0, +\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και}$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + 2x_1 < \ln x_2 + 2x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , άρα και **1-1**.

**iv.** Η ανίσωση ορίζεται για  $\begin{cases} \frac{x^2+10}{3x^2+8} > 0 \\ 3x^2+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Παρατηρούμε ότι :

$$\begin{aligned} f(x^2+10) - f(3x^2+8) &= \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} + 2(x^2+10 - (3x^2+8)) = \\ &= \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} + 2(x^2+10-3x^2-8) = \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} + 2(2-2x^2) = \\ &= \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} + 4(1-x^2) \end{aligned}$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} 4(x^2-1) < \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} &\Leftrightarrow \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} - 4(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow \\ \ln \frac{x^2+10}{3x^2+8} + 4(1-x^2) > 0 &\Leftrightarrow f(x^2+10) - f(3x^2+8) > 0 \Leftrightarrow \\ f(x^2+10) > f(3x^2+8) &\stackrel{\text{f γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2+10 > 3x^2+8 \Leftrightarrow 2x^2 < 2 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \\ |x| < 1 &\Leftrightarrow \boxed{-1 < x < 1} \end{aligned}$$