

Μονοτονία συνάρτησης

115. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(1,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow{\ln x \text{ γν.αύξ.}} \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1)$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Leftrightarrow e^{2-x_1} > e^{2-x_2} \Leftrightarrow -e^{2-x_1} < -e^{2-x_2}$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln(x_1 - 1) - e^{2-x_1} < \ln(x_2 - 1) - e^{2-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\ln(x-1) - e^{2-x})' = \frac{1}{x-1} + e^{2-x} > 0, \text{ αφού } x > 1$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=[2,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1 - 2} > -\sqrt{x_2 - 2}$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{1}{x_1} - \sqrt{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2} - \sqrt{x_2 - 2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x-2} \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} < 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

116. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \xrightarrow{x>0} x_1^2 < x_2^2$ και
- $x_1 < x_2 \xrightarrow{y=\eta\mu x \text{ γν.αύξ. στο } \left[0, \frac{\pi}{2} \right]} \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^2 + \eta\mu x_1 < x_2^2 + \eta\mu x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (x^2 + \eta \mu x)' = 2x + \sigma \nu \eta x > 0, \text{ αφού } x > 0 \text{ και } \sigma \nu \eta x > 0 \text{ όταν } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .**ii.** Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x_1^2 < x_2^2 \text{ και}$$

$$y = \epsilon \phi x \text{ γν.αύξ. στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \epsilon \phi x_1 < \epsilon \phi x_2$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη και αφού είναι θετικές ποσότητες παίρνουμε :

$$x_1^2 \epsilon \phi x_1 < x_2^2 \epsilon \phi x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .**Εναλλακτικός τρόπος**

Έχουμε :

$$f'(x) = (x^2 \epsilon \phi x)' = 2x \epsilon \phi x + \frac{x^2}{\sigma \nu \eta^2 x} > 0, \text{ αφού } x > 0 \text{ και } \epsilon \phi x > 0 \text{ όταν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .**117. i.** Αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι έχουμε :

$$1940 > 1821 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(1940) > f(1821)$$

Άτοπο, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.**ii.** Είναι $5 - x \in \mathbb{R}$ και $x^2 + x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} f(5 - 3x) < f(x^2 + x) &\stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} 5 - 3x > x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow \\ &(x + 5)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 1 \end{aligned}$$

αφού η $x^2 + 4x - 5 = 0$ έχει ρίζες τις $x = -5, 1$, οπότε :

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
x^2+4x-5	+	○	- ○	+

Άρα $x \in (-5, 1)$.**118. i.** Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2},$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5,$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1} + x_1^5 + x_1^3 + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2^5 + x_2^3 + x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Η g έχει πεδίο ορισμού το $B=(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2-x_1 > 2-x_2$,
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3$ και
- $x_1 < x_2 \xrightarrow{\ln x \text{ γν.αύξ.}} \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2-x_1-x_1^3-\ln x_1 > 2-x_2-x_2^3-\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο B .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x + x^5 + x^3 + x - 1)' = e^x + 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

και

$$g'(x) = (2-x-x^3-\ln x)' = -1-3x^2-\frac{1}{x} < 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A και η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο B .

ii. Παρατηρούμε πως $f(0)=0$ και $g(1)=0$, οπότε έχουμε :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} \boxed{x > 0}$$

και

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(1) \xrightarrow{g \text{ γν.φθ.}} \xrightarrow{x > 0} \boxed{x \in (0,1)}$$

119. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1-2 < 2x_2-2$ και
- $x_1 < x_2 \xrightarrow{\ln x \text{ γν.αύξ.}} \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2x_1-2+\ln x_1 < 2x_2-2+\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (2x-2+\ln x)' = 2+\frac{1}{x} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Παρατηρούμε πως $f(1)=0$ οπότε έχουμε :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} \xrightarrow{x > 0} \boxed{x > 1}$$

120. Έχουμε :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x^2 - 2x) &\geq (f \circ g)(x+4) \Leftrightarrow f(g(x^2 - 2x)) \geq f(g(x+4)) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \\ g(x^2 - 2x) &\geq g(x+4) \stackrel{g \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x \leq x+4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ (x+1)(x-4) &\leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 4] \end{aligned}$$

αφού η $x^2 - 3x - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $x = -1, 4$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
x^2-3x-4	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα $x \in [-1, 4]$.

121. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{\alpha^x \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$ και
όταν $0 < \alpha < 1$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\alpha^{x_1} - x_1 > \alpha^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A.

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\alpha^x - x)' = \alpha^x \ln \alpha - 1 < 0, \text{ αφού } \alpha^x > 0 \text{ και } (\alpha < 1 \Leftrightarrow \ln \alpha < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \alpha < 0)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &> (f \circ h)(x) \Leftrightarrow f(g(x)) > f(h(x)) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < h(x) \Leftrightarrow \\ 1 - x^2 &< x^2 + x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x + x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ x(x+1) &+ (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

αφού η $2x^2 + x - 1 = 0$ έχει ρίζες τις $x = -1, \frac{1}{2}$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2+x-1$	+	$\ominus$	-	$\ominus$	+

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

122. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1)$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 - 2 + \ln(x_1 - 1) < x_2 - 2 + \ln(x_2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (x - 2 + \ln(x - 1))' = 1 + \frac{1}{x-1} > 0, \text{ αφού } x-1 > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Παρατηρούμε ότι $f(2)=0$.

Έτσι έχουμε :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x > 2$$

και

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 2$$

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ για $x \in (2, +\infty)$ και κάτω από τον $x'x$ για $x \in (1, 2)$.

123. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1, x > 0$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \text{ και}$
- $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 - 1 < \ln x_2 - 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1-1} + \ln x_1 - 1 < e^{x_2-1} + \ln x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^{x-1} + \ln x - 1)' = e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$.

Έτσι έχουμε :

$$e^{x-1} + \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Άρα $x \in (0, 1)$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 1 + \ln x_1 < 1 + \ln x_2 \text{ και}$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$1 + \ln x_1 - \frac{1}{x_1} < 1 + \ln x_2 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = \left(1 + \ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$.

Έτσι έχουμε :

$$1 + \ln x < \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \ln x - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Άρα $x \in (0, 1)$.

124. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \text{ και} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1) \Leftrightarrow \\ &\ln(x_1 + 1) - 1 < \ln(x_2 + 1) - 1 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1} + \ln(x_1 + 1) - 1 < e^{x_2} + \ln(x_2 + 1) - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x + \ln(x+1) - 1)' = e^x + \frac{1}{x+1} > 0, \text{ αφού } x > -1$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1 &\Leftrightarrow e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x^2) > 0 \Leftrightarrow \\ f(x^2) > f(0) &\stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα $x \in \mathbb{R}^*$.

iii. Πρέπει :

$$\frac{x+3}{x^2+1} > 0 \stackrel{x^2+1 \neq 0}{\Leftrightarrow} x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1} &\Leftrightarrow e^{x^2} - e^{x+2} > \ln(x+3) - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow \\
e^{x^2} + \ln(x^2+1) > e^{x+2} + \ln(x+3) &\Leftrightarrow e^{x^2} + \ln(x^2+1) - 1 > e^{x+2} + \ln(x+3) - 1 \Leftrightarrow \\
f(x^2) > f(x+2) &\stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2 > x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow \\
&x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)
\end{aligned}$$

αφού η $x^2 - x - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $x=2, -1$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
x^2-x-2	+	○	-	○	+

Άρα $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

125. i. Πρέπει :

$$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 0$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad x_1 < x_2 &\stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Leftrightarrow 1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2} \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \\
&\ln(1 - e^{x_1}) > \ln(1 - e^{x_2}) \Leftrightarrow -\ln(1 - e^{x_1}) < -\ln(1 - e^{x_2}) \text{ και} \\
\bullet \quad x_1 < x_2
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 - \ln(1 - e^{x_1}) < x_2 - \ln(1 - e^{x_2}) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (x - \ln(1 - e^x))' = 1 - \frac{1}{1 - e^x} \cdot (-e^x) = 1 + \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{1}{1 - e^x} > 0, \text{ αφού } 1 - e^x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Πρέπει :

$$\begin{aligned}
1 - e^{x^2-2} > 0 &\Leftrightarrow e^{x^2-2} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2-2} < e^0 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow \\
&|x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\
&\text{και}
\end{aligned}$$

$$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 0$$

Δηλαδή $x \in (-\sqrt{2}, 0)$.

Έτσι έχουμε :

$$x^2 - 2 - \ln(1 - e^{x^2-2}) < x - \ln(1 - e^x) \Leftrightarrow f(x^2 - 2) < f(x) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 - 2 < x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$$

αφού η $x^2 - x - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $x=2, -1$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
x^2-x-2	+	0	-	0	+

Άρα $x \in (-1, 0)$.

126. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + e^{x_1} < \ln x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\ln x + e^x)' = \frac{1}{x} + e^x > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Έχουμε :

$$\ln(2x^2 + 2) - e^{x^2+3} > \ln(x^2 + 3) - e^{2x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x^2 + 2) + e^{2x^2+2} > \ln(x^2 + 3) + e^{x^2+3} \Leftrightarrow f(2x^2 + 2) > f(x^2 + 3) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$2x^2 + 2 > x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \boxed{x < -1 \text{ ή } x > 1}$$

127. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\ln x + x - 1)' = \frac{1}{x} + 1 > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Πρέπει :

$$\frac{3x}{x^2 + 2} > 0 \stackrel{x^2 + 2 \neq 0}{\Leftrightarrow} 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Έχουμε :

$$\ln \frac{3x}{x^2 + 2} < x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \ln(3x) - \ln(x^2 + 2) < x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3x) + 3x < \ln(x^2 + 2) + x^2 + 2 \Leftrightarrow \ln(3x) + 3x - 1 < \ln(x^2 + 2) + x^2 + 2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(3x) < f(x^2 + 2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} 3x < x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

αφού η $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχει ρίζες τις $x=1, 2$, οπότε :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$.

128. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$ και
- $x_1 < x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x + x)' = e^x + 1 > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Έχουμε :

$$e^{x^2+x+5} - e^{x^2+5} + x > 0 \Leftrightarrow e^{x^2+x+5} + x > e^{x^2+5} \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2+x+5} + x^2 + x + 5 > e^{x^2+5} + x^2 + 5 \Leftrightarrow f(x^2+x+5) > f(x^2+5) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{x^2} + x + \cancel{5} > \cancel{x^2} + \cancel{5} \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα $x > 0$.

129. i. Παρατηρούμε ότι :

$$(10x+5)^9 - e^{3x-1} < -e^{10x+5} + (3x-1)^9 \Leftrightarrow e^{10x+5} + (10x+5)^9 < e^{3x-1} + (3x-1)^9$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x^9$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^9 < x_2^9$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{x_1} + x_1^9 < e^{x_2} + x_2^9 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x + x^9)' = e^x + x^8 > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Έτσι λοιπόν έχουμε :

$$e^{10x+5} + (10x+5)^9 < e^{3x-1} + (3x-1)^9 \Leftrightarrow f(10x+5) < f(3x-1) \quad \text{f γν.αύξ.} \Leftrightarrow$$

$$10x+5 < 3x-1 \Leftrightarrow 7x < -6 \Leftrightarrow x < -\frac{6}{7}$$

$$\text{Άρα } x \in \left(-\infty, -\frac{6}{7}\right).$$

ii. Παρατηρούμε ότι :

$$\ln(x^2 + x) + x^2 > \ln(x+3) + 3 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x) + x^2 + x > \ln(x+3) + x + 3$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \quad \text{ln x γν.αύξ.} \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και}$
- $x_1 < x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\ln x + x)' = \frac{1}{x} + x > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Έτσι λοιπόν έχουμε :

$$\ln(x^2 + x) + x^2 + x > \ln(x+3) + x + 3 \Leftrightarrow f(x^2 + x) > f(x+3) \quad \text{f γν.αύξ.} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x > x + 3 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{3} \Leftrightarrow x > \sqrt{3} \text{ ή } x < -\sqrt{3}$$

Επιπλέον πρέπει να ισχύει :

$$x^2 + x > 0 \text{ και } x + 3 > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \text{ και } x > -3 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \text{ και } x \in (-3, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$\text{Άρα } x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

130. Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$, δηλαδή θα είναι $g(1) = -2$.

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \quad \text{ln x γν.αύξ.} \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και}$

- $x_1 < x_2 \quad \text{g γν.φθ.} \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2)$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 - g(x_1) < \ln x_2 - g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Είναι :

$$f(x) = \ln x - g(x) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = \ln 1 - g(1) \Leftrightarrow f(1) = 2$$

Έχουμε :

$$2 \ln x < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2 < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2 - g(x^2) < 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Άρα $x \in (0, 1)$.

131. i. Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{g(x_2)} \Leftrightarrow \frac{1}{g(x_1)} - 2 > \frac{1}{g(x_2)} - 2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)} - 2 > \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(x_2)} - 2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

Άρα η h είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

ii. Είναι :

$$h(1) = \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{g(1)} - 2 \Leftrightarrow h(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - 2 \Leftrightarrow h(1) = 0$$

Έχουμε :

$$f(x) + g(x) \leq 2f(x)g(x) \Leftrightarrow f(x) + g(x) - 2f(x)g(x) \leq 0 \stackrel{f(x)g(x) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq h(1) \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} x \geq 1$$

Άρα $x \geq 1$.

132. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\alpha^x \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\alpha^x \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} - 1 > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} - 1$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} - 1 > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

ii. Παρατηρούμε πως :

$$f(2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} - 1 = 0$$

Έχουμε :

$$3^x + 4^x > 5^x \Leftrightarrow 3^x + 4^x - 5^x > 0 \Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) > f(2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} x < 2$$

Άρα $x < 2$.

133. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\alpha^x \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \text{ και} \\ \text{όταν } 0 < \alpha < 1$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\alpha^{x_1} - x_1 > \alpha^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\alpha^x - x)' = \alpha^x \ln \alpha - 1 < 0, \text{ αφού } \alpha^x > 0 \text{ και } \ln \alpha < 0 \text{ για } 0 < \alpha < 1$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

ii. Έχουμε :

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} > \lambda^2 - \lambda - 2 \Leftrightarrow \alpha^{\lambda^2-4} - \lambda^2 > \alpha^{\lambda-2} - \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \lambda^2 + 4 > \alpha^{\lambda-2} - \lambda - 2 + 4 \Leftrightarrow \alpha^{\lambda^2-4} - \lambda^2 + 4 > \alpha^{\lambda-2} - \lambda + 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{\lambda^2-4} - (\lambda^2 - 4) > \alpha^{\lambda-2} - (\lambda - 2) \Leftrightarrow f(\lambda^2 - 4) > f(\lambda - 2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 4 < \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 2)$$

Άρα $\lambda \in (-1, 2)$.

134. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + x_1 + 2 < x_2^3 + x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (x^3 + x + 2)' = 3x^2 + 1 > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} f(f(x)) \geq 12 &\stackrel{f(2)=12}{\Leftrightarrow} f(f(x)) \geq f(2) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq 2 \stackrel{f(0)=2}{\Leftrightarrow} \\ &f(x) \geq f(0) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα $x \in [0, +\infty)$.

iii. Αφού είναι $x > 0$, τότε :

$$2x < 3x \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(3x)$$

Επιπλέον είναι :

$$x > 0 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(e^x) > f(1) \Leftrightarrow f(1) < f(e^x)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(2x) + f(1) < f(3x) + f(e^x), \text{ για κάθε } x > 0$$

135. Έχουμε :

$$x < 0 \stackrel{\alpha^x \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{6^x} > 1 \Leftrightarrow 5^x > 6^x \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(5^x) < f(6^x)$$

Όμοια έχουμε :

$$x < 0 \stackrel{\alpha^x \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{7}{8}\right)^x > \left(\frac{7}{8}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{7^x}{8^x} > 1 \Leftrightarrow 7^x > 8^x \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(7^x) < f(8^x)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x), \text{ για κάθε } x < 0$$

136. Για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$, έτσι έχουμε :

$$1 < 2 \stackrel{\ln x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x < 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x < \ln x^2 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\ln x) < f(\ln x^2)$$

Όμοια έχουμε :

$$7 < 13 \stackrel{\ln x > 0}{\Leftrightarrow} 7 \ln x < 13 \ln x \Leftrightarrow \ln x^7 < \ln x^{13} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\ln x^7) < f(\ln x^{13})$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(\ln x) + f(\ln x^7) < f(\ln x^2) + f(\ln x^{13}), \text{ για κάθε } x > 1$$

137. i. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} > \sqrt{x_2^2 + 1} \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + 1}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} < \sqrt{x_2^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + 1}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

ii. Παίρνουμε και πάλι περιπτώσεις :

- Για $x=0$ η ισότητα ισχύει.

- Για $x < 0$ έχουμε :

$$\begin{cases} 2x > 3x & \overset{f \text{ γν.αύξ. στο } (-\infty, 0]}{\Leftrightarrow} f(2x) > f(3x) \\ 4x > 5x & \overset{f \text{ γν.αύξ. στο } (-\infty, 0]}{\Leftrightarrow} f(4x) > f(5x) \end{cases} \Leftrightarrow f(2x) + f(4x) > f(3x) + f(5x)$$

- Για $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{cases} 2x < 3x & \overset{f \text{ γν.φθ. στο } [0, +\infty)}{\Leftrightarrow} f(2x) > f(3x) \\ 4x < 5x & \overset{f \text{ γν.φθ. στο } [0, +\infty)}{\Leftrightarrow} f(4x) > f(5x) \end{cases} \Leftrightarrow f(2x) + f(4x) > f(3x) + f(5x)$$

Άρα η εξίσωση $f(2x) + f(4x) = f(3x) + f(5x)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

138. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Για $x=1$ η ισότητα ισχύει.

- Για $0 < x < 1$ έχουμε :

$$\begin{cases} x > x^2 & \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^2) \\ x^3 > x^8 & \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x^3) < f(x^8) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^8)$$

- Για $x > 1$ έχουμε :

$$\begin{cases} x < x^2 & \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x^2) \\ x^3 < x^8 & \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x^3) > f(x^8) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^8)$$

Άρα η εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

139. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Για $x=0$ η ισότητα ισχύει.

- Για $x < 0$ έχουμε :

$$\begin{cases} x > 3x & \overset{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^x > e^{3x} & \overset{f \text{ γν.φθ. στο } (-\infty, 0]}{\Leftrightarrow} f(e^x) < f(e^{3x}) \\ 5x > 7x & \overset{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{5x} > e^{7x} & \overset{f \text{ γν.φθ. στο } (-\infty, 0]}{\Leftrightarrow} f(e^{5x}) < f(e^{7x}) \end{cases} \Leftrightarrow f(e^x) + f(e^{5x}) < f(e^{3x}) + f(e^{7x})$$

- Για $x > 0$ έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 3x \xrightarrow{e^x \text{ γν.αύξ.}} e^x < e^{3x} \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ. στο } [0, +\infty)} f(e^x) < f(e^{3x}) \\ 5x < 7x \xrightarrow{e^x \text{ γν.αύξ.}} e^{5x} < e^{7x} \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ. στο } [0, +\infty)} f(e^{5x}) < f(e^{7x}) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) + f(e^{5x}) < f(e^{3x}) + f(e^{7x})$$

Άρα η εξίσωση $f(e^x) + f(e^{5x}) = f(e^{3x}) + f(e^{7x})$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

140. α. Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $f+g$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ γν.αύξ.}} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Leftrightarrow$$

$$(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$$

Άρα η $f \circ g$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} f(x_1) < f(x_2)$ και
- $x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ γν.αύξ.}} g(x_1) < g(x_2)$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$$

Άρα η $f+g$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

β. i. Η h έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} f(2x_1 - 1) < f(2x_2 - 1)$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2 \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} f(3x_1 - 2) < f(3x_2 - 2)$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(2x_1 - 1) + f(3x_1 - 2) < f(2x_2 - 1) + f(3x_2 - 2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0=1$, άρα $f(1)=0$. Οπότε :

$$h(1) = f(2 \cdot 1 - 1) + f(3 \cdot 1 - 2) \Leftrightarrow h(1) = f(1) + f(1) \xrightarrow{f(1)=0} h(1) = 0$$

Έτσι έχουμε :

$$f(2x - 1) < -f(3x - 2) \Leftrightarrow f(2x - 1) + f(3x - 2) < 0 \Leftrightarrow h(x) < 0 \xrightarrow{h(1)=0} \Leftrightarrow$$

$$h(x) < h(0) \xrightarrow{h \text{ γν.αύξ.}} \boxed{x < 0}$$

141. i. Η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι :

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow$$

$$(f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

Άρα η $f \circ f$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

- Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

Άρα η $f \circ f$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως όταν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τότε η $f \circ f$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Πρέπει :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln(\ln x_1) < \ln(\ln x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\ln(\ln x))' = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x} > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

- 142.** Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(5,-2)$, άρα είναι $f(1)=5$ και $f(5)=-2$.

i. Αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι έχουμε :

$$1 < 5 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(1) < f(5) \Leftrightarrow 5 < -2$$

Άτοπο, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

Άρα η $f \circ f$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

iii. Έχουμε :

$$f(f(e^x)) < -2 \Leftrightarrow f(f(e^x)) < f(5) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(e^x) > 5 \Leftrightarrow f(e^x) > f(1) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα $x \in (-\infty, 0)$.

iv. Η g έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2$ και
- $x_1 < x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο B .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο B .

Επίσης παρατηρούμε ότι $g(1) = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$f(g(x)) > 5 \Leftrightarrow f(g(x)) > f(1) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Άρα $x \in (0, 1)$.

143. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι :

$$g(x) = x^3 + x^2 + x = \frac{3x^3 + 3x^2 + 3x}{3} = \frac{2x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1}{3} = \frac{2x^3 + (x+1)^3 - 1}{3}$$

Έτσι έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1 + 1)^3 < (x_2 + 1)^3 \Leftrightarrow (x_1 + 1)^3 - 1 < (x_2 + 1)^3 - 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2x_1^3 + (x_1 + 1)^3 - 1 < 2x_2^3 + (x_2 + 1)^3 - 1 \Leftrightarrow \frac{2x_1^3 + (x_1 + 1)^3 - 1}{3} < \frac{2x_2^3 + (x_2 + 1)^3 - 1}{3} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + x^2 + x)' = 3x^2 + 2x + 1 > 0, \text{ αφού } \Delta = -8 < 0$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Είναι :

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 1 - x \Leftrightarrow g(f(x)) = 1 - x$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

144. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - 2x$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \text{ και} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{-x_1} - 2x_1 > e^{-x_2} - 2x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (e^{-x} - 2x)' = -e^{-x} - 2 < 0$$

Άρα η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

Είναι :

$$e^{-f(x)} - 2f(x) = 3x + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = 3x + 1$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Στη σχέση $g(f(x)) = 3x + 1$ για $x=0$ έχουμε :

$$g(f(0)) = 1 \stackrel{g(0)=1}{\Leftrightarrow} g(f(0)) = g(0) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{f(0) = 0}$$

iii. Για $x < 0$ έχουμε :

$$x < 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \mathbf{f(x) > 0}$$

Για $x > 0$ έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \mathbf{f(x) < 0}$$

145. i. Είναι :

$$f(x) = \frac{e^x}{2^{f(x)}} \Leftrightarrow 2^{f(x)} f(x) = e^x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2^x \cdot x, x > 0$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{a^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} 2^{x_1} < 2^{x_2} \text{ και}$
- $x_1 < x_2$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη, αφού έχουμε θετικές ποσότητες, παίρνουμε :

$$2^{x_1} \cdot x_1 < 2^{x_2} \cdot x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (2^x \cdot x)' = 2^x \ln 2 \cdot x + 2^x > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Είναι :

$$2^{f(x)} f(x) = e^x \Leftrightarrow g(f(x)) = e^x$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) > f(x_2)$. Έτσι έχουμε :

- $f(x_1) > f(x_2) \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{f(x_1)} > e^{f(x_2)} \text{ και}$
- $f(x_1) > f(x_2)$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη, αφού έχουμε θετικές ποσότητες, παίρνουμε :

$$e^{f(x_1)} f(x_1) > e^{f(x_2)} f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} > e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, αφού $x_1 < x_2$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$.

ii. Έχουμε :

$$e^{x^2-x} > 2^{f(x^2)-f(x)} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} > \frac{2^{f(x^2)}}{2^{f(x)}} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{2^{f(x^2)}} > \frac{e^x}{2^{f(x)}} \Leftrightarrow f(x^2) > f(x) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα $x > 1$.

146. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(5, 2)$, άρα είναι $f(2) = -1$ και $f(5) = 2$.

i. Αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι έχουμε :

$$2 < 5 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(2) > f(5) \Leftrightarrow -1 > 2$$

Άτοπο, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$f^2(x) \leq f(x) + 2 \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) - 2 \leq 0$$

Θέτουμε όπου $f(x)$ το ω και έχουμε :

$$\omega^2 - \omega - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (\omega + 1)(\omega - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \omega \leq 2$$

αφού :

η $\omega^2 - \omega - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $\omega = -1, 2$, οπότε :

ω	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$\omega^2 - \omega - 2$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$

Άρα :

$$-1 \leq \omega \leq 2 \stackrel{f(2)=-1, f(5)=2}{\Leftrightarrow \omega=f(x)} f(2) \leq f(x) \leq f(5) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{2 \leq x \leq 5}$$

147. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,3)$, δηλαδή θα είναι $f(-1)=2$ και $f(1)=3$.

Αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι έχουμε :

$$-1 < 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(-1) < f(1) \Leftrightarrow 2 < 3$$

Ισχύει, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

– Η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $g(x) > 0$. Έτσι έχουμε :

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 5f(x) + 6 > 0 \Leftrightarrow (f(x) - 3)(f(x) - 2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) < 2 \text{ και } f(x) > 3 \stackrel{f(-1)=2, f(1)=3}{\Leftrightarrow \omega=f(x)} f(x) < f(-1) \text{ και } f(x) > f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < -1 \text{ και } x > 1$$

– Η C_g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $g(x) < 0$. Έτσι έχουμε :

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 5f(x) + 6 < 0 \Leftrightarrow (f(x) - 3)(f(x) - 2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$2 < f(x) < 3 \stackrel{f(-1)=2, f(1)=3}{\Leftrightarrow \omega=f(x)} f(-1) < f(x) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} -1 < x < 1$$

Άρα η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για $x < -1$ και $x > 1$ και η C_g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $-1 < x < 1$.

148. i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 + \ln x_1 - 1 < x_2 + \ln x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $1-1$.

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (x + \ln x - 1)' = 1 + \frac{1}{x} > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $1-1$.

Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$.

Οπότε έχουμε :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x > 1$$

και

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Δηλαδή είναι $f(x) > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 1)$.

ii. Έχουμε :

$$1 < \alpha < e \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln 1 < \ln \alpha < \ln e \Leftrightarrow 0 < \ln \alpha < 1 \Rightarrow \ln \alpha < 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\ln \alpha) < f(1) \Leftrightarrow f(\ln \alpha) < 0$$

και

$$\beta > e \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln \beta > \ln e \Leftrightarrow \ln \beta > 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\ln \beta) > f(1) \Leftrightarrow f(\ln \beta) > 0$$

Συνεπώς θα είναι $f(\ln \alpha) \cdot f(\ln \beta) < 0$.

149. i. Είναι :

$$g(x) = 3f(x) - (f \circ f)(x) \Leftrightarrow g(x) = 3f(x) - f(f(x))$$

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow 3f(x_1) > 3f(x_2) \text{ και}$
- $x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow$
 $-f(f(x_1)) > -f(f(x_2))$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$3f(x_1) - f(f(x_1)) > 3f(x_2) - f(f(x_2)) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

ii. Η C_f περνάει από το σημείο $A(2, 2)$, δηλαδή $f(2)=2$. Οπότε :

$$g(2) = 3f(2) - f(f(2)) \Leftrightarrow g(2) = 3 \cdot 2 - f(2) \Leftrightarrow g(2) = 6 - 2 \Leftrightarrow g(2) = 4$$

Έχουμε :

$$3[f(|x|) - 1] > (f \circ f)(|x|) + 1 \Leftrightarrow 3f(|x|) - 3 > (f \circ f)(|x|) + 1 \Leftrightarrow$$

$$3f(|x|) - (f \circ f)(|x|) > 4 \Leftrightarrow g(|x|) > 4 \Leftrightarrow g(|x|) > g(2) \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} |x| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{-2 < x < 2}$$

150. i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad \overset{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad e^{x_1} < e^{x_2} \quad \text{και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad \overset{y=\varphi x \text{ γν.αύξ. στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \quad \varphi x_1 < \varphi x_2$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη και αφού είναι θετικές ποσότητες παίρνουμε :

$$e^{x_1} \varphi x_1 < e^{x_2} \varphi x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (e^x \varphi x)' = e^x \varphi x + \frac{e^x}{\sin^2 x} > 0, \text{ αφού } \varphi x > 0 \text{ όταν } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \quad \overset{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) < f\left(\frac{\pi}{3}\right) &\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi \frac{\pi}{4} < e^{\frac{\pi}{3}} \cdot \varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}} < e^{\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{3}}} < \sqrt{3} &\Leftrightarrow \boxed{e^{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}}} < \sqrt{3} \end{aligned}$$

iii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{x-1} < \frac{\varphi 1}{\varphi x} &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e} < \frac{\varphi 1}{\varphi x} \quad \overset{\varphi x > 0}{\Leftrightarrow} \quad e^x \cdot \varphi x < e \cdot \varphi 1 \Leftrightarrow f(e^x) < f(e) \quad \overset{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \\ &\quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ e^x < e &\Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Άρα $x \in (0, 1)$.

151. i. Είναι :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1 + 1} < -\frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow \\ 1 - \frac{1}{x_1 + 1} &< 1 - \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

ii. Είναι :

$$2016 < 2017 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(2016) < f(2017) \Leftrightarrow \frac{2016}{2017} < \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow 2016 \cdot 2018 < 2017^2 \Leftrightarrow \boxed{2017^2 > 2016 \cdot 2018}$$

152. i. Είναι :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x_1 + 1} > 1 + \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A .

ii. Είναι :

$$f(e) = \frac{e+2}{e+1} \text{ και } f(\pi) = \frac{\pi+2}{\pi+1}$$

οπότε :

$$e < \pi \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \boxed{\frac{e+2}{e+1} > \frac{\pi+2}{\pi+1}}$$

Επίσης είναι :

$$f(2014) = \frac{2016}{2015} \text{ και } f(2015) = \frac{2017}{2016}$$

οπότε :

$$2014 < 2015 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(2014) > f(2015) \Leftrightarrow \frac{2016}{2015} > \frac{2017}{2016} \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln \frac{2016}{2015} > \ln \frac{2017}{2016} \Leftrightarrow \boxed{a > \beta}$$

153. Είναι :

$$f(f(x)) + x = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -x$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow -x_1 < -x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, αφού $x_1 < x_2$.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow -x_1 < -x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, αφού $x_1 < x_2$.

Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

154. i. Έστω x_1, x_2 δύο ρίζες της f με $x_1 < x_2$. Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 0 < 0$$

Άτοπο.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow 0 > 0$$

Άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν μπορεί να έχει παραπάνω από μία ρίζα. Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

ii. Παρατηρούμε πως η f έχει δύο ρίζες αφού $f(0) = f(1) = 0$, οπότε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα συμπεραίνουμε πως η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

iii. Παρατηρούμε πως η f έχει δύο ρίζες αφού $f(e) = f(4) = 0$, οπότε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα συμπεραίνουμε πως η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $(0, +\infty)$.

155. Είναι :

$$f^5(x) + x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow f^5(x) = 1 - x^5$$

i. Η C_f τέμνει τον $x'x$ όταν $f(x) = 0$, οπότε :

$$0^5 + x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^5$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^5)' = 5x^4 > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Είναι :

$$f^5(x) = 1 - x^5 \Leftrightarrow g(f(x)) = 1 - x^5$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5 \Leftrightarrow -x_1^5 > -x_2^5 \Leftrightarrow 1 - x_1^5 > 1 - x_2^5 \Leftrightarrow$$

$$g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο **A**.

iii. Στη δοθείσα σχέση βάζουμε όπου x το $f(x)$ και έχουμε :

$$f^5(f(x)) + f^5(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^5(f(x)) + 1 - x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow f^5(f(x)) = x^5 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(f(x)) = x, x \in \mathbb{R}}$$

156. i. Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) < f^3(x_2) \Leftrightarrow 27f^3(x_1) < 27f^3(x_2) \text{ και}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow g^3(x_1) > g^3(x_2) \Leftrightarrow -8g^3(x_1) < -8g^3(x_2)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$27f^3(x_1) - 8g^3(x_1) < 27f^3(x_2) - 8g^3(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η **h** είναι γνησίως αύξουσα στο **A**.

ii. Είναι :

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow f(0) = \frac{2}{3}g(0)$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} h(0) &= 27f^3(0) - 8g^3(0) = 27\left(\frac{2}{3}g(0)\right)^3 - 8g^3(0) = \cancel{27} \cdot \frac{8}{\cancel{27}}g^3(0) - 8g^3(0) = \\ &= 8g^3(0) - 8g^3(0) = 0 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$27f^3(x) > 8g^3(x) \Leftrightarrow 27f^3(x) - 8g^3(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$h(x) > h(0) \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{x > 0}$$

157. Για $x > 0$ έχουμε :

$$\bullet \quad x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \stackrel{\ln x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln(x+1) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0$$

Συνεπώς είναι :

$$g(x) = \frac{f(x)}{\ln(x+1)} > 0$$

Άρα **g(x) > 0 για κάθε x > 0**.

158. Για $x < 0$ έχουμε :

- $x < 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και
- $x < 0 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$

Συνεπώς είναι :

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1} < 0$$

Για $x > 0$ έχουμε :

- $x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και
- $x > 0 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$

Συνεπώς είναι :

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1} < 0$$

Άρα $g(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.

159. Στη δοθείσα σχέση για $x=0$ έχουμε :

$$f(e^0 - 0) + f(1 - 0) = e^0 - 1 \Leftrightarrow f(1) + f(1) = 1 - 1 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Έτσι έχουμε :

$$f(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 1) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow$$

$$|x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}$$

160. Στη δοθείσα σχέση για $x=e$ έχουμε :

$$f(e - \ln e) + f(e - 1) = \ln e + 3 \Leftrightarrow f(e - 1) + f(e - 1) = 1 + 3 \Leftrightarrow 2f(e - 1) = 4 \Leftrightarrow f(e - 1) = 2$$

Έτσι έχουμε :

$$f(e^x - 1) < 2 \Leftrightarrow f(e^x - 1) < f(e - 1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^x - 1 < e - 1 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow \boxed{x < 1}$$

161. Στη δοθείσα σχέση για $x=1$ έχουμε :

$$f(4 - 1) + f(2 + 1) = 0 \Leftrightarrow f(3) + f(3) = 0 \Leftrightarrow 2f(3) = 0 \Leftrightarrow f(3) = 0$$

Η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα. Είναι :

$$1 < 2 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(1) < f(2)$$

Άτοπο, αφού $f(1) > f(2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι έχουμε :

$$f(x^2 - 6) > 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 6) > f(3) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} x^2 - 6 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow$$

$$|x| < 3 \Leftrightarrow \boxed{-3 < x < 3}$$

162. Τα σύνολα τιμών των f και g είναι $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, δηλαδή $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

Είναι :

$$f(x^3)g(2x) - f(2x)g(x^3) < 0 \Leftrightarrow f(x^3)g(2x) < f(2x)g(x^3) \quad \begin{array}{l} f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \\ g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\frac{f(x^3)}{g(x^3)} < \frac{f(2x)}{g(2x)} \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x^3) < \left(\frac{f}{g}\right)(2x)$$

Η $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ γν.φθ.}} f(x_1) > f(x_2)$ και
- $x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ γν.αύξ.}} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}} \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{g(x_2)}$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη, αφού έχουμε θετικές ποσότητες, παίρνουμε :

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} > \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_1) > \left(\frac{f}{g}\right)(x_2)$$

Άρα η $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

Έτσι έχουμε :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x^3) < \left(\frac{f}{g}\right)(2x) \xrightarrow{\frac{f}{g} \text{ γν.φθ.}} x^3 > 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

αφού :

η $x^3 - 2x = 0$ έχει ρίζες τις $x = 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$, οπότε :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$x^2 - 2$	$+$	$\emptyset$	$-$	$-$	$\emptyset$
$x^3 - 2x$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$+$

163. Είναι :

$$f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x \Leftrightarrow f^3(x) + e^{f(x)} = x - 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + e^x$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$ και
- $x_1 < x_2 \xrightarrow{e^x \text{ γν.αύξ.}} e^{x_1} < e^{x_2}$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + e^{x_1} < x_2^3 + e^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + e^x)' = 3x^2 + e^x > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Είναι :

$$f^3(x) + e^{f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = x - 1$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.**164. α.** Οι συναρτήσεις f, g και $g \circ f$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι :

$$x_1 < x_2 \stackrel{g \circ f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.**β. i.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - x^3 + 2$.Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \stackrel{e^x \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \text{ και} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 + 2 > -x_2^3 + 2 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$e^{-x_1} - x_1^3 + 2 > e^{-x_2} - x_2^3 + 2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (e^{-x} - x^3 + 2)' = -e^{-x} - 3x^2 < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

Είναι :

$$h(x) = e^{-f(x)} - f^3(x) + 2 \Leftrightarrow h(x) = g(f(x))$$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η $g \circ f$, δηλαδή η h, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x^2-x)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4-x)} > 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x^2-x)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4-x)} \stackrel{\alpha^x \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \text{όταν } 0 < \alpha < 1 \\ f(x^2-x) < f(4-x) &\stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} x^2 - x > 4 - x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow \\ &\boxed{x > 2 \text{ ή } x < -2} \end{aligned}$$

165. i. Οι συναρτήσεις f, g και $f \circ g$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \circ g \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} (f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Είναι :

$$g^5(x) + e^{g(x)} - 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow g^5(x) + e^{g(x)} = 1 + e^{-x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 + e^x$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5$ και
- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^5 + e^{x_1} < x_2^5 + e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (x^5 + e^x)' = 5x^4 + e^x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Είναι :

$$g^5(x) + e^{g(x)} = 1 + e^{-x} \Leftrightarrow f(g(x)) = 1 + e^{-x}$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow 1 + e^{-x_1} > 1 + e^{-x_2} \Leftrightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

166. i. Στη δοθείσα σχέση για $x=0$ έχουμε :

$$f(0) = \frac{2e^0}{1+f^2(0)} \Leftrightarrow f(0) \cdot (1+f^2(0)) = 2 \Leftrightarrow f^3(0) + f(0) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(0)-1)(f^2(0)+f(0)+2) = 0 \stackrel{f^2(0)+f(0)+2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f(0)=1}$$

αφού $\Delta = -7 < 0$

αφού :

1	0	1	-2	$\rho=1$
	1	1	2	
1	1	2	0	

ii. Είναι :

$$f(x) = \frac{2e^x}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 2e^x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$ και
- $x_1 < x_2$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1 > 0$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Είναι :

$$f^3(x) + f(x) = 2e^x \Leftrightarrow g(f(x)) = 2e^x$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

iii. Είναι :

$$\ln f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln f(x) > \ln 1 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{x > 0}$$

iv. Έχουμε :

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &> \frac{\beta f(\alpha) + \alpha f(\beta)}{\alpha + \beta} \stackrel{\alpha, \beta > 0}{\Leftrightarrow} (\alpha + \beta)f(\alpha + \beta) > \beta f(\alpha) + \alpha f(\beta) \Leftrightarrow \\ &\alpha f(\alpha + \beta) + \beta f(\alpha + \beta) - \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) > 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha[f(\alpha + \beta) - f(\beta)] + \beta[f(\alpha + \beta) - f(\alpha)] > 0 \end{aligned}$$

Είναι :

$$\alpha < \alpha + \beta \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\alpha + \beta) \Leftrightarrow f(\alpha + \beta) - f(\alpha) > 0$$

και

$$\beta < \alpha + \beta \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\beta) < f(\alpha + \beta) \Leftrightarrow f(\alpha + \beta) - f(\beta) > 0$$

Επιπλέον είναι και $\alpha, \beta > 0$, άρα η ανίσωση :

$$\alpha[f(\alpha + \beta) - f(\beta)] + \beta[f(\alpha + \beta) - f(\alpha)] > 0$$

δηλαδή η ανίσωση :

$$f(\alpha + \beta) > \frac{\beta f(\alpha) + \alpha f(\beta)}{\alpha + \beta}$$

ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.

167. i. Στη δοθείσα σχέση βάζουμε όπου y το x και αντίστροφα και έχουμε :

$$f(y) - f(x) \geq \ln \frac{y}{x} + y - x \Leftrightarrow f(y) - f(x) \geq \ln \left(\frac{x}{y} \right)^{-1} + y - x \Leftrightarrow$$

$$f(y) - f(x) \geq -\ln \frac{x}{y} + y - x \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leq \ln \frac{x}{y} + x - y$$

Από τις σχέσεις $f(x) - f(y) \geq \ln \frac{x}{y} + x - y$ και $f(x) - f(y) \leq \ln \frac{x}{y} + x - y$ προκύπτει ότι :

$$f(x) - f(y) = \ln \frac{x}{y} + x - y$$

Στην τελευταία σχέση για $y=1$ έχουμε :

$$f(x) - f(1) = \ln \frac{x}{1} + x - 1 \Leftrightarrow f(x) - f' = \ln x + x - f' \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x + x, x > 0}$$

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \text{ και} \\ & \bullet \quad x_1 < x_2 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$f'(x) = (\ln x + x)' = \frac{1}{x} + 1 > 0, \text{ αφού } x > 0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

168. α. i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Στη δοθείσα σχέση για $x = x_0$ και $y = 2018 - x_0$ έχουμε :

$$f\left(\cancel{x_0} + 2018 - \cancel{x_0}\right) = f(x_0)f(2018 - x_0) \Leftrightarrow f(2018) = f(x_0)f(2018 - x_0) \stackrel{f(x_0)=0}{\Leftrightarrow} f(2018) = 0$$

Ατοπο, αφού $f(2018) \neq 0$.

Άρα είναι **$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$** .

ii. Στη δοθείσα σχέση για $y = x$ έχουμε :

$$f(x + x) = f(x)f(x) \Rightarrow f(2x) = f^2(x) > 0$$

Άρα **$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$** .

iii. Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f(x-y)f(y) = f(x)$$

Είναι $f(x)f(y) = f(x+y)$ οπότε :

$$f(x-y)f(y) = f(x - \cancel{y} + \cancel{y}) \Leftrightarrow f(x-y)f(y) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

iv. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Για $n=1$ η σχέση ισχύει αφού :

$$f(1 \cdot x) = [f(x)]^1 \Leftrightarrow f(x) = f(x)$$

Έστω ότι ισχύει για $n=k$. Δηλαδή :

$$f(k \cdot x) = [f(x)]^k$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$:

$$f((k+1) \cdot x) = f(kx + x) = f(kx)f(x) = [f(x)]^k f(x) = [f(x)]^{k+1} \Rightarrow$$

$$f((k+1) \cdot x) = [f(x)]^{k+1}$$

Δείξαμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, συνεπώς :

$$f(nx) = [f(x)]^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

iv. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Για $n=2$ είναι $f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt[2]{f(x)}$. Στην αρχική σχέση αν βάλουμε όπου x και y το $\frac{x}{2}$ παίρνουμε :

$$f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow f^2\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt[2]{f(x)}$$

δηλαδή η σχέση ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$. Δηλαδή :

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = \sqrt[k]{f(x)}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$:

$$f^{k+1}\left(\frac{x}{k+1}\right) = f\left(\frac{x}{k+1}\right) \cdot \underbrace{f\left(\frac{x}{k+1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{k+1}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x}{k+1}\right)}_{k+1 \text{ φορές}}$$

Τη δοθείσα σχέση $f(x)f(y) = f(x+y)$ μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε όταν έχουμε άρτιο πλήθος παραγόντων, συνεπώς διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν ο k είναι περιττός, τότε ο $k+1$ είναι άρτιος, οπότε :

$$f^{k+1}\left(\frac{x}{k+1}\right) = f\left(\frac{x}{k+1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{k+1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{k+1}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x}{k+1}\right) = f\left(\frac{(k+1)x}{k+1}\right) = f(x)$$

- Αν ο κ είναι άρτιος, τότε ο $\kappa+1$ είναι περιττός, οπότε :

$$f^{\kappa+1}\left(\frac{x}{\kappa+1}\right) = f\left(\frac{x}{\kappa+1}\right) \cdot \underbrace{f\left(\frac{x}{\kappa+1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{\kappa+1}\right) \cdots f\left(\frac{x}{\kappa+1}\right)}_{\kappa \text{ φορές}} \cdot f\left(\frac{x}{\kappa+1}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\kappa x}{\kappa+1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{\kappa+1}\right) = f\left(\frac{\kappa x}{\kappa+1} + \frac{x}{\kappa+1}\right) = f\left(\frac{(\kappa+1)x}{\kappa+1}\right) = f(x)$$

Δείξαμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$, συνεπώς :

$$f\left(\frac{x}{\nu}\right) = \sqrt[\nu]{f(x)}, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*, \nu \geq 2$$

β. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0 \begin{matrix} \text{για κάθε } x > 0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{είναι } f(x) < 1 \end{matrix} f(x_2 - x_1) < 1 \begin{matrix} f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \\ \Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \end{matrix} \frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1 \begin{matrix} f(x) > 0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Είναι :

$$f^7(x) = f^3(x) \cdot f^3(x) \cdot f(x) = [f(x) \cdot f(x)]^3 \cdot f(x) \stackrel{\text{αρχική σχέση}}{=} [f(x+x)]^3 \cdot f(x) =$$

$$= [f(2x)]^3 \cdot f(x) = [f(2x) \cdot f(2x)] \cdot [f(2x) \cdot f(x)] \stackrel{\text{αρχική σχέση}}{=} =$$

$$= f(2x+2x) \cdot f(2x+x) = f(4x) \cdot f(3x) \stackrel{\text{αρχική σχέση}}{=} f(4x+3x) = f(7x)$$

και

$$f^6(1) = f^3(1) \cdot f^3(1) = [f(1) \cdot f(1)]^3 \stackrel{\text{αρχική σχέση}}{=} [f(2)]^3 = [f(2) \cdot f(2)] \cdot f(2) \stackrel{\text{αρχική σχέση}}{=} =$$

$$= f(4) \cdot f(2) \stackrel{\text{αρχική σχέση}}{=} f(6)$$

άρα :

$$f(x^3) > \frac{[f(x)]^7}{[f(1)]^6} \Leftrightarrow f(x^3) > \frac{f^7(x)}{f^6(1)} \Leftrightarrow f(x^3) > \frac{f(7x)}{f(6)} \stackrel{\frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)}{\Leftrightarrow \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}}$$

$$f(x^3) > f(7x-6) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} x^3 < 7x-6 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x - 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 6(x-1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)(x+1) - 6(x-1) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)}$$

αφού η $x^2+x-6=0$ έχει ρίζες τις $x=-3, 2$,

και :

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
$x-1$	-	-	$\emptyset$	+	+		
x^2+x-6	+	$\emptyset$	-	-	$\emptyset$	+	
$(x-1)(x^2+x-6)$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

169. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 1]$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1, +\infty)$.

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το πεδίο ορισμού της.

170. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $x_1 < x_2$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{f(x_2) - x_2 - (f(x_1) - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - x_2 - f(x_1) + x_1}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - 1 \leq \frac{\kappa |x_2 - x_1|}{x_2 - x_1} - 1 \stackrel{x_2 - x_1 > 0}{\Leftrightarrow} -1 \\ &= \frac{\kappa(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} - 1 = \kappa - 1 < 0, \text{ αφού } \kappa \in (0, 1) \end{aligned}$$

Άρα :

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \stackrel{x_2 - x_1 > 0}{\Leftrightarrow} g(x_2) - g(x_1) < 0 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Συνεπώς η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[a, \beta]$.

Ακρότατα συνάρτησης

171. i. Έχουμε :

$$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow -2|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow -2|x-1| + 3 \leq 3 \Leftrightarrow f(x) \leq 3$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3$. Οπότε :

$$\begin{aligned} f(x_0) = 3 &\Leftrightarrow -2|x_0-1| + 3 = 3 \Leftrightarrow -2|x_0-1| = 0 \Leftrightarrow |x_0-1| = 0 \Leftrightarrow \\ &x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Είναι λοιπόν $f(x) \leq f(1)$, άρα η f **παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 3$** .

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \geq -x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1 \Leftrightarrow \\ 1 \leq e^{1-x} &\leq e \Leftrightarrow 2 \leq 2e^{1-x} \leq 2e \Leftrightarrow -1 \leq 2e^{1-x} - 3 \leq 2e - 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 2e - 3 \end{aligned}$$

Αρκεί να βρούμε $x_1 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = -1$ και $x_2 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$f(x_2)=2e-3$. Οπότε :

$$f(x_1) = -1 \Leftrightarrow 2e^{1-x_1} - 3 = -1 \Leftrightarrow 2e^{1-x_1} = 2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} = 1 \Leftrightarrow e^{1-x_1} = e^0 \Leftrightarrow$$

$$1-x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

και

$$f(x_2) = 2e-3 \Leftrightarrow 2e^{1-x_2} - \cancel{3} = 2e - \cancel{3} \Leftrightarrow 2e^{1-x_2} = 2e \Leftrightarrow e^{1-x_2} = e \Leftrightarrow$$

$$1-x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Είναι λοιπόν $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$, άρα **η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=1$ το $f(1)=-1$ και μέγιστο στο $x_2=0$ το $f(0)=2e-3$.**

iii. Έχουμε :

$$2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln(x-1) \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq \ln(x-1) \leq \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$0 \geq -2\ln(x-1) \geq -2\ln 2 \Leftrightarrow -2\ln 2 \leq -2\ln(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$1-2\ln 2 \leq 1-2\ln(x-1) \leq 1 \Leftrightarrow 1-2\ln 2 \leq f(x) \leq 1$$

Αρκεί να βρούμε $x_1 \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=1-2\ln 2$ και $x_2 \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=1$. Οπότε :

$$f(x_1) = 1-2\ln 2 \Leftrightarrow \cancel{1} - 2\ln(x_1-1) = \cancel{1} - 2\ln 2 \Leftrightarrow -2\ln(x_1-1) = -2\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x_1-1) = \ln 2 \Leftrightarrow x_1-1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

και

$$f(x_2) = 1 \Leftrightarrow \cancel{1} - 2\ln(x_2-1) = \cancel{1} \Leftrightarrow -2\ln(x_2-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x_2-1) = \ln 1 \Leftrightarrow x_2-1 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 2$$

Είναι λοιπόν $f(3) \leq f(x) \leq f(2)$, άρα **η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=3$ το $f(3)=1-2\ln 2$ και μέγιστο στο $x_2=2$ το $f(2)=1$.**

iv. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει :

$$\begin{cases} 1-x^3 \geq 0 \\ 1-\sqrt{1-x^3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 1 \\ \sqrt{1-x^3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1-x^3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[0,1]$.

Έχουμε :

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^3 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -x^3 \geq -1 \Leftrightarrow 1 \geq 1-x^3 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x^3 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \sqrt{1-x^3} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\sqrt{1-x^3} \geq -1 \Leftrightarrow 1 \geq 1-\sqrt{1-x^3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 1-\sqrt{1-x^3} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-\sqrt{1-x^3}} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

Αρκεί να βρούμε $x_1 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και $x_2 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=1$.

Οπότε :

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{1-x_1^3}} = 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x_1^3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1^3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1-x_1^3 = 1 \Leftrightarrow x_1^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

και

$$f(x_2) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{1-x_2^3}} = 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x_2^3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_2^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1-x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_2^3 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

Είναι λοιπόν $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, άρα **η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=0$ το $f(0)=0$ και μέγιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=1$.**

172. i. Είναι :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 = -x^2 + 4x - 4 - 1 = -(x^2 - 4x + 4) - 1 = -(x-2)^2 - 1$$

Έτσι έχουμε :

$$(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 - 1 \leq -1 \Leftrightarrow f(x) \leq -1$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = -1$. Οπότε :

$$f(x_0) = -1 \Leftrightarrow -(x_0 - 2)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Είναι λοιπόν $f(x) \leq f(2)$, άρα **η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=-1$.**

ii. Για να δείξουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=2$, αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \geq g(2)$. Οπότε :

$$g(x) \geq g(2) \Leftrightarrow -\frac{4x}{x^2+4} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+4 \neq 0}{4x \leq x^2+4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Είναι λοιπόν $g(x) \geq g(2)$, άρα **η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=2$ το $g(2)=-1$.**

iii. Παρατηρούμε ότι **το σημείο $A(2, -1)$** είναι ταυτόχρονα το ολικό μέγιστο της f και το ολικό ελάχιστο της g , συνεπώς **είναι το μόνο κοινό σημείο των C_f και C_g .**

173. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 2, άρα :

$$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) \leq 3$$

Συνεπώς θα είναι :

$$\begin{cases} f(\alpha) \leq 3 \\ f(\beta) \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) - 3 \leq 0 \\ f(\beta) - 3 \leq 0 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε :

$$f(\alpha) + 2f(\beta) = 9 \Leftrightarrow f(\alpha) - 3 + 2f(\beta) - 6 = 0 \Leftrightarrow (f(\alpha) - 3) + 2(f(\beta) - 3) = 0$$

Επειδή όμως είναι $f(\alpha) - 3 \leq 0$ και $f(\beta) - 3 \leq 0$, παίρνουμε :

$$f(\alpha) - 3 = 0 \text{ και } f(\beta) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 3 \text{ και } f(\beta) = 3$$

Η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο 2 το 3, άρα θα είναι **$\alpha = \beta = 3$.**

174. Η C_f τέμνει την ευθεία $y=1$ στο σημείο A με τετμημένη 2, άρα $f(2)=1$.

Για να δείξουμε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή 4, αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \geq 4$.

Οπότε :

$$g(x) \geq 4 \Leftrightarrow 2^{f(x)} + 2^{2-f(x)} \geq 4 \Leftrightarrow 2^{f(x)} + \frac{2^2}{2^{f(x)}} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2^{f(x)} \neq 0}{2^{2f(x)} + 4 \geq 4 \cdot 2^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$(2^{f(x)})^2 - 4 \cdot 2^{f(x)} + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (2^{f(x)} - 2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

Επιπλέον είναι :

$$g(2) = 2^{f(2)} + 2^{2-f(2)} \Leftrightarrow g(2) = 2^1 + 2^{2-1} \Leftrightarrow g(2) = 2 + 2 \Leftrightarrow g(2) = 4$$

Δηλαδή :

$$g(x) \geq g(2)$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=2$ το $g(2)=4$.

175. Έχουμε :

$$|g(x) - e^x| \geq 0 \Leftrightarrow -|g(x) - e^x| \leq 0 \Leftrightarrow 1 - |g(x) - e^x| \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1$. Οπότε :

$$f(x_0)=1 \Leftrightarrow 1 - |g(x_0) - e^{x_0}| = 1 \Leftrightarrow |g(x_0) - e^{x_0}| = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x_0) - e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = e^{x_0} \Leftrightarrow g(x_0) = h(x_0)$$

Και επειδή η C_g τέμνει τη γραφική παράσταση της $h(x)=e^x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

176. Έχουμε :

$$|g(x) - 1| \geq 0 \Leftrightarrow 3 + |g(x) - 1| \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=3$. Οπότε :

$$f(x_0)=3 \Leftrightarrow 3 + |g(x_0) - 1| = 3 \Leftrightarrow |g(x_0) - 1| = 0 \Leftrightarrow g(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x_0) = 1$$

Η g έχει σύνολο τιμών το $g(A)=(0,2)$. Παρατηρούμε πως $g(x_0) \in g(A)$, άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=1$. Συνεπώς, αφού $f(x) \geq f(x_0)$, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

177. i. Για να δείξουμε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 , αρκεί να δείξουμε ότι :

- ισχύει $g(x) \geq -2$ και υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = -2$
- ισχύει $g(x) \leq 2$ και υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 2$

Οπότε :

$$\underline{\underline{g(x) \geq -2}} \Leftrightarrow \frac{4f(x)}{1+f^2(x)} \geq -2 \stackrel{1+f^2(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 4f(x) \geq -2 - 2f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$2f^2(x) + 4f(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (f(x) + 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

και

$$\underline{\underline{g(x) \leq 2}} \Leftrightarrow \frac{4f(x)}{1+f^2(x)} \leq 2 \stackrel{1+f^2(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 4f(x) \leq 2 + 2f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$2f^2(x) - 4f(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

Είναι :

$$\underline{\underline{|g(x)| \leq 2}} \Leftrightarrow \frac{4|f(x)|}{1+f^2(x)} \leq 2 \stackrel{1+f^2(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 4|f(x)| \leq 2 + 2f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$2(|f(x)|)^2 - 4|f(x)| + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (|f(x)|)^2 - 2|f(x)| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(|f(x)| - 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

Είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = -1$. Άρα :

$$g(x_1) = \frac{4f(x_1)}{1+f^2(x_1)} \Leftrightarrow g(x_1) = \frac{4(-1)}{1+(-1)^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{g(x_1) = -2}}$$

Είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 1$. Άρα :

$$g(x_2) = \frac{4f(x_2)}{1+f^2(x_2)} \Leftrightarrow g(x_2) = \frac{4 \cdot 1}{1+1^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{g(x_2) = 2}}$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 .

ii. Είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχουν $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_3) = \alpha$ και $f(x_4) = \beta$.

Δηλαδή :

$$g(x_3) = \frac{4f(x_3)}{1+f^2(x_3)} \Leftrightarrow g(x_3) = \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} \text{ και } g(x_4) = \frac{4f(x_4)}{1+f^2(x_4)} \Leftrightarrow g(x_4) = \frac{4\beta}{1+\beta^2}$$

Αφού η g παρουσιάζει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 έχουμε :

$$-2 \leq g(x) \leq 2$$

Έτσι θα είναι :

$$\begin{aligned} -2 \leq g(x_3) \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} \leq 2 \\ &\text{και} \\ -2 \leq g(x_4) \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \frac{4\beta}{1+\beta^2} \leq 2 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$-4 \leq \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{4\beta}{1+\beta^2} \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\beta}{1+\beta^2} \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{\left| \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\beta}{1+\beta^2} \right| \leq 1}$$

178. Έχουμε :

$$\begin{aligned} x^4 \geq 0 &\Leftrightarrow x^4 + 1821 \geq 1821 \Leftrightarrow \frac{1}{x^4 + 1821} \leq \frac{1}{1821} \Leftrightarrow \frac{1821}{x^4 + 1821} \leq 1 \Leftrightarrow \\ &f(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$. Οπότε :

$$f(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1821}{x_0^4 + 1821} = 1 \Leftrightarrow x_0^4 + 1821 = 1821 \Leftrightarrow x_0^4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Είναι λοιπόν $f(x) \leq f(0)$, άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.

179. i. Είναι :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 9} = \sqrt{(x-1)^2 + 9}$$

Έτσι έχουμε :

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 9 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 9} \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3$. Οπότε :

$$\begin{aligned} f(x_0) = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_0-1)^2 + 9} = 3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 + 9 = 9 \Leftrightarrow \\ &(x_0-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Είναι λοιπόν $f(x) \geq f(1)$, άρα **η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=3$.**

ii. Είναι $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, για τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{cases} f(\alpha) \geq f(1) \\ f(\beta) \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 3 \\ f(\beta) \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) - 3 \geq 0 \\ f(\beta) - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε :

$$\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 10} + \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 10} = 6 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = 6 \Leftrightarrow (f(\alpha) - 3) + (f(\beta) - 3) = 0$$

Επειδή όμως είναι $f(\alpha) - 3 \geq 0$ και $f(\beta) - 3 \geq 0$, παίρνουμε :

$$\begin{cases} f(\alpha) - 3 = 0 \\ f(\beta) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 3 \\ f(\beta) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 10} = 3 \\ \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 10} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 10 = 9 \\ \beta^2 - 2\beta + 10 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - 1)^2 = 0 \\ (\beta - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

180. i. Είναι :

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}}$$

Έτσι έχουμε :

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 2$$

Αρκεί να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$. Οπότε :

$$f(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{(x_0-1)^2 + 4}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(x_0-1)^2 + 4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x_0-1)^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 - 1)^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Είναι λοιπόν $f(x) \leq f(1)$, άρα **η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=2$.**

ii. Είναι $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, για τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{cases} f(\alpha) \leq f(1) \\ f(\beta) \leq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 2 \\ f(\beta) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) - 2 \leq 0 \\ f(\beta) - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε :

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5}} + \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 5}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5}} + \frac{4}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 5}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + f(\beta) = 4 \Leftrightarrow (f(\alpha) - 2) + (f(\beta) - 2) = 0$$

Επειδή όμως είναι $f(\alpha) - 2 \leq 0$ και $f(\beta) - 2 \leq 0$, παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f(\alpha) - 2 = 0 \\ f(\beta) - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 2 \\ f(\beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5}} = 2 \\ \frac{4}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 5}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5}} = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 5}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
\begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5} = 2 \\ \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 5} = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 5 = 4 \\ \beta^2 - 2\beta + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - 1)^2 = 0 \\ (\beta - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

181. Οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon : x=1$, άρα $f(1)=g(1)$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned}
h(x) = 2f(x)g(x) &\Leftrightarrow -h(x) = -2f(x)g(x) \Leftrightarrow 1-h(x) = 1-2f(x)g(x) \Leftrightarrow \\
1-h(x) &= f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x) \Rightarrow \\
1-h(x) &= (f(x) - g(x))^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Είναι :

$$\begin{aligned}
f^2(1) + g^2(1) = 1 &\Leftrightarrow (f(1) - g(1))^2 + 2f(1)g(1) = 1 \stackrel{f(1)=g(1)}{\Leftrightarrow} 2f(1)g(1) = 1 \Leftrightarrow \\
h(1) &= 1
\end{aligned}$$

Άρα :

$$1 - h(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 1 \Leftrightarrow h(x) \leq h(1)$$

Άρα η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $h(1)=1$.

182. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
h(x) &= 2f(x)f(1-x) + 2g(x)g(1-x) \Leftrightarrow \\
-h(x) &= -2f(x)f(1-x) - 2g(x)g(1-x) \Leftrightarrow \\
2-h(x) &= 1-2f(x)f(1-x) + 1-2g(x)g(1-x) \Leftrightarrow \\
2-h(x) &= f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)f(1-x) + f^2(1-x) + g^2(1-x) - 2g(x)g(1-x) \Leftrightarrow \\
2-h(x) &= f^2(x) - 2f(x)f(1-x) + f^2(1-x) + g^2(x) - 2g(x)g(1-x) + g^2(1-x) \Rightarrow \\
2-h(x) &= (f(x) - f(1-x))^2 + (g(x) - g(1-x))^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Στη σχέση $h(x) = 2f(x)f(1-x) + 2g(x)g(1-x)$ για $x = \frac{1}{2}$ είναι :

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{2}\right) &= 2f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) = 2f^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2g^2\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\
h\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right) + g^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) = 2
\end{aligned}$$

Άρα :

$$2 - h(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 2 \Leftrightarrow h(x) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)$$

Άρα η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ το $h\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

183. i. Η $g \circ f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 , άρα $g(f(x)) \leq g(f(x_0))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
οπότε :

$$g(f(x)) \leq g(f(x_0)) \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Δηλαδή και η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 , το $f(x_0)$.

ii. Είναι :

$$f^5(x) + f(x) + 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow f^5(x) + f(x) + 1 = -x^2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^5 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5$ και
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^5 + x_1 + 1 < x_2^5 + x_2 + 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^5 + x)' = 5x^4 + 1 > 0$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Είναι :

$$f^5(x) + f(x) + 1 = -x^2 \Leftrightarrow g(f(x)) = -x^2$$

Η συνάρτηση $-x^2$, δηλαδή η $g \circ f$, έχει μέγιστο στο $x_0 = 0$ το 0.

Έτσι, σύμφωνα με το ερώτημα **i)**, η f **παρουσιάζει** και εκείνη **μέγιστο**.

184. Είναι :

$$f^3(x) + e^{f(x)} + 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x^2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + e^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$ και
- $x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1^3 + e^{x_1} + 1 < x_2^3 + e^{x_2} + 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

Εναλλακτικός τρόπος

Έχουμε :

$$g'(x) = (x^3 + e^x + 1)' = 3x^2 + e^x > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Είναι :

$$f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x^2 \Rightarrow g(f(x)) = x^2 \geq 0$$

Η συνάρτηση x^2 , δηλαδή η $g \circ f$, έχει ελάχιστο στο $x_0=0$ το 0.

Η $g \circ f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$, άρα $g(f(x)) \geq g(f(0))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
οπότε :

$$g(f(x)) \geq g(f(0)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0)$$

Δηλαδή και η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)$.