

Υποθέσεις και συμπεράσματα του θεωρήματος Rolle

1023. Έχουμε :

- Για κάθε $x \in [-1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.
- Για κάθε $x \in (0, 1]$ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με $f'(x) = 3x^2$.

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle** στο διάστημα $[-1, 1]$, άρα :

- η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, άρα και στο $x_0=0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + \gamma) = \gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, άρα και στο $x_0=0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 0}$$

- $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \alpha - \beta = 1 + \gamma \stackrel{\beta=\gamma=0}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha = 1}$

1024. i. Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$f'(x) = \mu(x - \alpha)^{\mu-1} (x - \beta)^{\nu} + \nu(x - \alpha)^{\mu} (x - \beta)^{\nu-1}$$

- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

Επομένως **ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ii. Είναι :

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \mu(\xi - \alpha)^{\mu-1} (\xi - \beta)^{\nu} + \nu(\xi - \alpha)^{\mu} (\xi - \beta)^{\nu-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\xi - \alpha)^{\mu-1} (\xi - \beta)^{\nu-1} [\mu(\xi - \beta) + \nu(\xi - \alpha)] = 0 \stackrel{\xi \neq \alpha, \beta}{\Leftrightarrow} \mu(\xi - \beta) + \nu(\xi - \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\nu(\xi - \alpha) = -\mu(\xi - \beta) \Leftrightarrow \nu(\xi - \alpha) = \mu(\beta - \xi) \Leftrightarrow \frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \frac{\mu}{\nu}$$

Άρα το ξ χωρίζει το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$.

Ύπαρξη ρίζας της $f'(x)$ με **Θ.Rolle** σε γνωστή $f(x)$

1025. Για να δείξουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο $M(\xi, f(\xi))$ η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\xi) = 0$. Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$,
- $f(0) = -2$ και $f(1) = 1 + \alpha - 1 + \beta - \alpha - \beta - 2 = -2$, δηλαδή $f(0) = f(1)$

Επομένως **ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι **υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον $x'x$.**

1026. Για να δείξουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x_0)=0$. Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$,
- $f(-1) = -\alpha^2 + \beta + \beta^2 - \alpha - \alpha + \beta = \alpha - \beta + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta = \beta - \alpha + \beta^2$ και
 $f(1) = \alpha^2 - \beta + \beta^2 - \alpha + \alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2 = \beta - \alpha + \beta^2$, δηλαδή $f(-1)=f(1)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι **υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.**

1027. Είναι :

$$3f^2(\alpha) + 2f^2(\beta) = 6f(\alpha) + 4f(\beta) - 5 \Leftrightarrow$$

$$3f^2(\alpha) - 6f(\alpha) + 3 + 2f^2(\beta) - 4f(\beta) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(f^2(\alpha) - 2f(\alpha) + 1) + 2(f^2(\beta) - 2f(\beta) + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(f(\alpha) - 1)^2 + 2(f(\beta) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 1 \text{ και } f(\beta) = 1$$

Για να δείξουμε ότι η C_f έχει παράλληλη εφαπτομένη στον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη x_0 τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, (ως παραγωγίσιμη),
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ,
- $f(\alpha)=f(\beta)=1$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι **η C_f έχει παράλληλη εφαπτομένη στον $x'x$.**

Υπαρξη ρίζας εξίσωσης με Θ.Rolle σε γνωστή βοηθητική συνάρτηση

1028. i. Έχουμε :

- η F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta)g(\alpha) = f(\alpha)g(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \Leftrightarrow$

$$F(\beta) = F(\alpha).$$

Επομένως για την **F** εφαρμόζεται το **Θ.Rolle** στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(x_0) = 0$.

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}$$

1029. i. Έστω ότι είναι $g(a) = g(\beta)$. Τότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ (ως παραγωγίσιμη),
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) ,
- $g(a) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\kappa) = 0$.

Όμως είναι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα **$g(a) \neq g(\beta)$** .

ii. Έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} g'(x)$$

$$\begin{aligned} - \quad h(a) &= f(a) - \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} g(a) = \\ &= \frac{f(a)g(\beta) - \cancel{f(a)g(a)} - f(\beta)g(a) + \cancel{f(a)g(a)}}{g(\beta) - g(a)} = \\ &= \frac{f(a)g(\beta) - f(\beta)g(a)}{g(\beta) - g(a)} \quad \text{και} \\ h(\beta) &= f(\beta) - \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} g(\beta) = \\ &= \frac{\cancel{f(\beta)g(\beta)} - f(\beta)g(a) - \cancel{f(\beta)g(\beta)} + f(a)g(\beta)}{g(\beta) - g(a)} = \\ &= \frac{f(a)g(\beta) - f(\beta)g(a)}{g(\beta) - g(a)} \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή } h(a) = h(\beta).$$

Επομένως για την **h** εφαρμόζεται το **Θ.Rolle** στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0$.

iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} g'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)}}$$

1030. i. Έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$h'(x) = 2f(x)f'(x)e^{g(x)} + f^2(x)e^{g(x)}g'(x)$$

- $h(0) = f^2(0)e^{g(0)} = 0$ και $h(1) = f^2(1)e^{g(1)} = 0$, άρα $h(0) = h(1)$.

Επομένως **ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle για την h στο $[0, 1]$** , οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi)e^{g(\xi)} + f^2(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi)e^{g(\xi)}(2f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi)) = 0 \stackrel{\substack{f(x) \neq 0 \\ \text{για κάθε } x \in (0, 1)}}{\Leftrightarrow} 2f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f'(\xi) = -f(\xi)g'(\xi) \Leftrightarrow \boxed{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}}$$

1031. i. Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
 - η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο :
- $$g'(x) = f'(x)\sin x - f(x)\eta\mu x$$
- $g(0) = f(0)\sin 0 = f(0)$ και $g(\pi) = f(\pi)\sin \pi = -f(\pi) = f(0)$, αφού $f(0) + f(\pi) = 0$, άρα $g(0) = g(\pi)$.

Επομένως **ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle για την g στο $[0, \pi]$** , οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sin \xi - f(\xi)\eta\mu \xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sin \xi = f(\xi)\eta\mu \xi \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)\frac{\sin \xi}{\eta\mu \xi} = f(\xi) \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = f'(\xi)\sigma\phi \xi}$$

1032. i. Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0, 2014]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2014)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \eta\mu x + (x - 2014)\sigma\eta\mu x$$

- $f(0) = f(2014) = 0$.

Επομένως **ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle για την f στο $[0, 2014]$** , οπότε υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2014)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2014)$.

ii. Είναι :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + (x - 2014) \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = -(x - 2014) \sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} = -x + 2014 \Leftrightarrow x + \epsilon \phi x = 2014$$

Δηλαδή η εξίσωση $x + \epsilon \phi x = 2014$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2014)$.

1033. i. Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot (x - a - \beta) - f(x)}{(x - a - \beta)^2}$$

$$- \quad g(a) = \frac{f(a)}{-\beta} = -\frac{\beta}{\beta} = -1 \quad \text{και} \quad g(\beta) = \frac{f(\beta)}{-a} = -\frac{a}{a} = -1, \quad \text{άρα} \quad g(a) = g(\beta).$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle** για την g στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

ii. Είναι :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot (\xi - a - \beta) - f(\xi)}{(\xi - a - \beta)^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot (\xi - a - \beta) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) \cdot (\xi - a - \beta) = f(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - a - \beta}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι η εξής :

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - a - \beta}(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{f(\xi)}{\xi - a - \beta}x + f(\xi) - \frac{\xi}{\xi - a - \beta}f(\xi) \Leftrightarrow y = \frac{f(\xi)}{\xi - a - \beta}x + \frac{\cancel{\xi} - a - \beta - \cancel{\xi}}{\xi - a - \beta}f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{f(\xi)}{\xi - a - \beta}x - \frac{a + \beta}{\xi - a - \beta}f(\xi)$$

Για $x = a + \beta$ και $y = 0$ έχουμε :

$$0 = \frac{f(\xi)}{\xi - a - \beta}(a + \beta) - \frac{a + \beta}{\xi - a - \beta}f(\xi) \Leftrightarrow 0 = \frac{(a + \beta)f(\xi) - (a + \beta)f(\xi)}{\xi - a - \beta} \Leftrightarrow 0 = 0$$

Πράγμα που ισχύει, άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$, διέρχεται από το σημείο $A(a + \beta, 0)$.

1034. i. Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle** στο διάστημα $[0, a]$, άρα :

- η g είναι συνεχής στο $[0, a]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, a)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \alpha$$

$$- \quad g(0) = g(\alpha) \Leftrightarrow \ln f(0) = \ln f(\alpha) - \alpha^2 \Leftrightarrow \ln f(0) = \ln(e f(0)) - \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\ln f(0)} = \ln e + \cancel{\ln f(0)} - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \xrightarrow{\alpha > 0} \boxed{\alpha = 1}$$

ii. Αφού ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle** για την $g(x) = \ln f(x) - x$ στο $[0, 1]$, τότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.**

Οπότε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\xi)$$

1035. i. Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{2\pi}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

όπου

$$\left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow \left| x \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x| \text{ με}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0 \quad (\text{μηδενική επί φραγμένη})$$

Άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα και στο $\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$.

Συνεπώς :

$$- \quad \eta \ f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{1}{2\pi}\right],$$

$$- \quad \eta \ f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \left(0, \frac{1}{2\pi}\right) \text{ με παράγωγο :}$$

$$f'(x) = \eta \mu \frac{1}{x} + x \sigma \nu \nu \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \eta \mu \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sigma \nu \nu \frac{1}{x}$$

$$- \quad f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \eta \mu 2\pi = 0 \text{ και } f(0) = 0, \text{ άρα } f(0) = f\left(\frac{1}{2\pi}\right).$$

Επομένως η f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του **Θ.Rolle** στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$

, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\theta) = 0$.

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\theta} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{\theta}}{\eta\mu \frac{1}{\theta}} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi \frac{1}{\theta} = \theta}$$

1036. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0$$

όπου

$$\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x^2| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \Leftrightarrow \left| x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \Leftrightarrow -|x^2| \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x^2| \text{ με}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x^2|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ (μηδενική επί φραγμένη)}$$

Συεπώς **η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$** με $f'(0) = 0$, άρα και συνεχής στο $x_0=0$.

ii. Έχουμε :

$$- \text{ η f είναι συνεχής στο } \left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right],$$

$$- \text{ η f είναι παραγωγίσιμη στο } \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right) \text{ με παράγωγο :}$$

$$f'(x) = 3x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 3x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$$

$$- \text{ } f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \eta\mu 2\pi = 0 \text{ και } f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \eta\mu \pi = 0, \text{ άρα } f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = f\left(\frac{1}{\pi}\right).$$

Επομένως **η f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα**

$$\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right], \text{ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = 0.$$

iii. Είναι :

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 \eta\mu \frac{1}{\xi} - \xi \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 \eta\mu \frac{1}{\xi} = \xi \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow 3\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi}}{\eta\mu \frac{1}{\xi}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\phi \frac{1}{\xi} = 3\xi$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως **η εξίσωση $\sigma\phi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μία λύση στο**

διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

1037. i. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Θ.Rolle** στο διάστημα $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, άρα :

– η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, άρα και στο $x_0=0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{2}{x} = \alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

όπου

$$\left| \eta\mu \frac{2}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x^2| \left| \eta\mu \frac{2}{x} \right| \leq |x^2| \Leftrightarrow \left| x^2 \eta\mu \frac{2}{x} \right| \leq |x^2| \Leftrightarrow -|x^2| \leq x^2 \eta\mu \frac{2}{x} \leq |x^2| \text{ με}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x^2|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{2}{x} \right) = 0 \text{ (μηδενική επί φραγμένη)}$$

Εναλλακτικός τρόπος

Για να ισχύει το **Θ.Rolle** σε αυτό το διάστημα, θα πρέπει $f(0) = f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Άρα :

$$f(0) = f\left(\frac{2}{\pi}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{\pi^2} \eta\mu \pi \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

ii. Αφού η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Θ.Rolle** στο διάστημα $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, τότε

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Έχουμε :

$$f'(x) = 2x \eta\mu \frac{2}{x} + x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 2x \eta\mu \frac{2}{x} - 2 \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x}$$

Οπότε :

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 \eta\mu \frac{2}{x_0} - 2 \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x_0} = 0 \Leftrightarrow 2x_0 \eta\mu \frac{2}{x_0} = 2 \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x_0} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu \frac{2}{x_0}}{\sigma\upsilon\nu \frac{2}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{\eta\mu \frac{2}{x_0}}{\sigma\upsilon\nu \frac{2}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi \frac{2}{x_0} = \frac{1}{x_0}}$$

1038. i. Έχουμε :

– η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,

- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$$

- $\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha)) = \beta - \alpha \Leftrightarrow \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln e^{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{e^{-\alpha}}{e^{-\beta}} \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot e^{-\alpha} = f(\beta) \cdot e^{-\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta).$$

Επομένως η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

- ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot e^{-x_0} - f(x_0) \cdot e^{-x_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x_0} (f'(x_0) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = f(x_0)}$$

1039. i. Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) \cdot \sin x$$
- $g(0) = g(\pi) = f(0) = 0$.

Επομένως ισχύει το Θ.Rolle για την g στο $[0, \pi]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

- ii. Είναι :

$$f'(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \cancel{f(x)} + x f'(x) \cdot \sin x = \cancel{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$x f'(x) \cdot \sin x = 0 \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in (0, \pi) \end{matrix} \quad f'(x) \cdot \sin x = 0$$

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot \sin x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \sin \xi = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \xi \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} f'(\xi) \cdot \sin \xi = 0$$

Δηλαδή η εξίσωση $f'(x) \cdot \sin x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$, άρα και η εξίσωση $f'(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

Υπαρξη ρίζας με εφαρμογή Θ.Rolle για μία παράγουσα (αρχική)

1040. i. Είναι :

$$4(3\alpha - \beta)x^3 + 3(3\beta - 2\alpha)x^2 = 2\alpha x + 2\beta \Leftrightarrow$$

$$4(3\alpha - \beta)x^3 + 3(3\beta - 2\alpha)x^2 - 2\alpha x - 2\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$((3\alpha - \beta)x^4 + (3\beta - 2\alpha)x^3 - \alpha x^2 - 2\beta x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (3\alpha - \beta)x^4 + (3\beta - 2\alpha)x^3 - \alpha x^2 - 2\beta x$, οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 4(3\alpha - \beta)x^3 + 3(3\beta - 2\alpha)x^2 - 2\alpha x - 2\beta$$
- $f(0)=0$ και $f(1)=3\alpha - \beta + 3\beta - 2\alpha - \alpha - 2\beta = 0$, άρα $f(0)=f(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την f στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή **η εξίσωση :**

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(3\alpha - \beta)x^3 + 3(3\beta - 2\alpha)x^2 = 2\alpha x + 2\beta$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} (2x-3)\sin x &= (x^2 - 3x + 2)\eta\mu x \Leftrightarrow \\ (2x-3)\sin x - (x^2 - 3x + 2)\eta\mu x &= 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 3x + 2)' \sin x + (x^2 - 3x + 2) \cdot (\sin x)' &= 0 \Leftrightarrow \\ ((x^2 - 3x + 2)\sin x)' &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\sin x$, οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = (2x-3)\sin x - (x^2 - 3x + 2)\eta\mu x$$
- $f(1)=f(2)=0$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την f στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή **η εξίσωση :**

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-3)\sin x = (x^2 - 3x + 2)\eta\mu x$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

1041. Είναι :

$$4x^3 = 2\alpha x + \beta \Leftrightarrow 4x^3 - 2\alpha x - \beta = 0 \Leftrightarrow (x^4 - \alpha x^2 - \beta x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - \alpha x^2 - \beta x$, οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 4x^3 - 2\alpha x - \beta$$
- $f(0)=0$ και $f(1)=1 - \alpha - \beta = 0$, άρα $f(0)=f(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την f στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή **η εξίσωση :**

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 2\alpha x + \beta$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

1042. Είναι :

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{v+1} \alpha_v x^{v+1} + \frac{1}{v} \alpha_{v-1} x^v + \dots + \frac{1}{2} \alpha_1 x^2 + \alpha_0 x \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{v+1} \alpha_v x^{v+1} + \frac{1}{v} \alpha_{v-1} x^v + \dots + \frac{1}{2} \alpha_1 x^2 + \alpha_0 x$, οπότε

έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

- $f(0)=0$ και $f(1) = \frac{\alpha_v}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1}}{v} + \dots + \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_0 = 0$, άρα $f(0)=f(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την f στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή η εξίσωση :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

1043. Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y=2\lambda x-1$ και η καμπύλη $y=-4x^3+\lambda$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $\xi \in (0,1)$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση :

$$2\lambda x - 1 = -4x^3 + \lambda$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Είναι :

$$2\lambda x - 1 = -4x^3 + \lambda \Leftrightarrow 4x^3 + 2\lambda x - 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow (x^4 + \lambda x^2 - x - \lambda x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + \lambda x^2 - x - \lambda x$, οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 4x^3 + 2\lambda x - 1 - \lambda$$

- $f(0)=0$ και $f(1)=0$, άρα $f(0)=f(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την f στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή η ευθεία $y=2\lambda x-1$ και η καμπύλη $y=-4x^3+\lambda$ έχουν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $\xi \in (0,1)$.

1044. Είναι :

$$(x^2 - 4) \sin x + 2x \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 4)(\eta \mu x)' + (x^2 - 4)' \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(x^2 - 4) \eta \mu x \right]' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x^2-4)\eta\mu x$, οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = (x^2 - 4)\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x$$
- $f(-2)=f(0)=f(2)=0$, άρα $f(-2)=f(0)$ και $f(0)=f(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$, οπότε υπάρχει αντίστοιχα τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-2,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$. Δηλαδή η εξίσωση :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x = 0$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-2,2)$.

1045. Είναι :

$$f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow (f(x) - x^2)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 2x$$
- $g(0)=f(0)=1$ και $g(1)=f(1)-1=\alpha+1-\alpha+1-1=1$, άρα $g(0)=g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\rho \in (0,1)$ τέτοιος ώστε :

$$g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) = 2\rho$$

1046. Είναι :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow (f(x) - x^3 - 3x^2)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3-3x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2 - 6x$$
- $g(1)=f(1)-4$ και $g(2)=f(2)-20=f(1)+16-20=f(1)-4$, άρα $g(1)=g(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi$$

1047. Οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του **Θ.Rolle** στο $[a,\beta]$ οπότε είναι f, g συνεχείς στο $[a,\beta]$, f, g παραγωγίσιμες στο (a,β) και $f(a)=f(\beta)$ και $g(a)=g(\beta)$.

Επιπλέον για κάθε $x \in (a,\beta)$ έχουμε :

$$|f'(x)| + |g'(x)| \neq 0 \Leftrightarrow f'(x) \neq 0 \text{ και } g'(x) \neq 0$$

Είναι :

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Leftrightarrow f'(x) = \lambda g'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \lambda g(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$$

- $h(a) = f(a) - \lambda g(a)$ και $h(\beta) = f(\beta) - \lambda g(\beta) = f(a) - \lambda g(a)$, άρα $h(a) = h(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ. Rolle** για την h στο $[a, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda$$

1048. Είναι :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = 0 \stackrel{f(x)g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)g(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- $h(0) = f(0)g(0) = 0$ και $h(1) = f(1)g(1) = 0$, άρα $h(0) = h(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ. Rolle** για την h στο $[0, 1]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$$

1049. Είναι :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(\beta) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow$$

$$f(x)g'(x) - f(a)g'(x) = g(\beta)f'(x) - f'(x)g(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(a)g'(x) - g(\beta)f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x)g(x) - f(a)g(x) - g(\beta)f(x)]' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x) - f(a)g(x) - g(\beta)f(x)$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(a)g'(x) - g(\beta)f'(x)$$

- $h(a) = \cancel{f(a)g(a)} - \cancel{f(a)g(a)} - g(\beta)f(a) = -g(\beta)f(a)$ και

$$h(\beta) = \cancel{f(\beta)g(\beta)} - f(\alpha)g(\beta) - \cancel{g(\beta)f(\beta)} = -f(\alpha)g(\beta), \text{ άρα } h(\alpha)=h(\beta).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την h στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) - f(\alpha)g'(\xi) - g(\beta)f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\xi) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

1050. Είναι :

$$f'(x) + \eta \mu x = 2x \Leftrightarrow f'(x) + \eta \mu x - 2x = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \sigma \nu x - x^2)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sigma \nu x - x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) + \eta \mu x - 2x$$

$$- \quad g(-\alpha) = f(-\alpha) - \sigma \nu(-\alpha) - (-\alpha)^2 = f(-\alpha) - \sigma \nu \alpha - \alpha^2 \stackrel{\substack{f(-\alpha)=f(\alpha) \\ f \text{ άρτια}}}{=} \\ = f(\alpha) - \sigma \nu \alpha - \alpha^2 = g(\alpha) \text{ άρα } g(-\alpha) = g(\alpha).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[-\alpha, \alpha]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + \eta \mu \xi - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + \eta \mu \xi = 2\xi$$

1051. Είναι :

$$xf'(x) = 2x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) - 2x + 3 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x^2 + 3x - \ln x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + 3x - \ln x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 2x + 3 - \frac{1}{x}$$

$$- \quad g(1) = f(1) + 2 \text{ και } g(2) = f(2) + 2 - \ln 2 = f(1) + \ln 2 + 2 - \ln 2 = f(1) + 2 = g(1), \text{ αφού } f(2) = f(1) + \ln 2, \text{ άρα } g(1) = g(2).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1, 2]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 2\xi + 3 - \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1$$

1052. Είναι :

$$f'(x) = \frac{2xf(x)}{1-x^2} \Leftrightarrow f'(x) - x^2 f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow x^2 f'(x) + 2xf(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 f(x))' - f'(x) \Leftrightarrow (x^2 f(x) - f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) - f'(x)$$

- $g(-1)=0$ και $g(1)=0$, άρα $g(-1)=g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[-1,1]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma^2 f'(\gamma) + 2\gamma f(\gamma) - f'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f'(\gamma) = \frac{2\gamma f(\gamma)}{1-\gamma^2}$$

1053. Είναι :

$$f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow 2x - \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{f(x)} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + \frac{1}{f(x)}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = 2x - \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

- $g(0) = \frac{1}{f(0)}$ και $g(1) = 1 + \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{f(0)} = g(0)$, αφού $\frac{1}{f(0)} = 1 + \frac{1}{f(1)}$, άρα $g(0)=g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0,1]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - \frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2x_0 f^2(x_0)$$

1054. Είναι :

$$f'(x) = 2\eta\mu x \sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \eta\mu x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{f(x)} + \sin x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{f(x)} + \sin x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} - \eta\mu x$$

- $g(0) = \sqrt{f(0)} + 1$ και $g(2\pi) = \sqrt{f(2\pi)} + 1 = \sqrt{f(0)} + 1 = g(0)$, αφού $f(0) = f(2\pi)$,
άρα $g(0) = g(2\pi)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, 2\pi]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} - \eta\mu x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2\eta\mu x_0 \sqrt{f(x_0)}$$

1055. Είναι :

$$3f'(x) = \frac{4}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow 3f'(x) + 3f^2(x)f'(x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow (f^3(x) + 3f(x) - 4x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + 3f(x) - 4x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = 3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) - 4$$

- $g(0) = f^3(0) + 3f(0) - 4 \cdot 0 = 0$ και $g(1) = f^3(1) + 3f(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$, άρα
 $g(0) = g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, 1]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3f^2(\xi)f'(\xi) + 3f'(\xi) - 4 = 0 \Leftrightarrow 3f'(\xi) = \frac{4}{1+f^2(\xi)}$$

1056. Είναι :

$$\frac{f'(x)}{\eta\mu x} - \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = 0 \Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x$$

- $g(0) = f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 0$ και $g(1) = f(1) \cdot \sigma\upsilon\nu 1 = 0$, άρα $g(0) = g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, 1]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$:**

Δηλαδή **η εξίσωση :**

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\sin x - f(x)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\eta\mu x} - \frac{f(x)}{\sin x} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

1057. Αφού η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Είναι :

$$\begin{aligned} f(x)\sin x = f'(x)\eta\mu x &\Leftrightarrow \sin x \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ (\eta\mu x)' \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot (f(x))' &\stackrel{f(x) \neq 0}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{(\eta\mu x)' \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot (f(x))'}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\eta\mu x}{f(x)} \right)' &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{f(x)}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{\sin x \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

- $g(0)=0$ και $g(\pi)=0$, άρα $g(0)=g(\pi)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, \pi]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \gamma \cdot f(\gamma) - \eta\mu \gamma \cdot f'(\gamma)}{f^2(\gamma)} = 0 \Leftrightarrow f(\gamma)\sin \gamma = f'(\gamma)\eta\mu \gamma$$

1058. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot (e^{-x} - e^x) = f(x) \cdot (e^{-x} + e^x) \Leftrightarrow \\ f'(x) \cdot (e^{-x} - e^x) - f(x) \cdot (e^{-x} + e^x) &= 0 \Leftrightarrow \\ f'(x) \cdot (e^{-x} - e^x) + f(x) \cdot (-e^{-x} - e^x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(x))' \cdot (e^{-x} - e^x) + f(x) \cdot (e^{-x} - e^x)' &= 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot (e^{-x} - e^x))' = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot (e^{-x} - e^x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) \cdot (e^{-x} - e^x) - f(x) \cdot (e^{-x} + e^x)$$

- $g(0)=0$ και $g(1)=f(1) \cdot (e^{-1} - e) = 0$, άρα $g(0)=g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, 1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$:

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot (e^{-x} - e^x) - f(x) \cdot (e^{-x} + e^x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} f(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

1059. Είναι :

$$f'(x) + f(x) \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + \sin x = 0 \Leftrightarrow (\ln f(x) + \eta \mu x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x) + \eta \mu x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + \sin x$$

- $g(0) = \ln f(0)$ και $g(\pi) = \ln f(\pi) = \ln f(0) = g(0)$, άρα $g(0) = g(\pi)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, \pi]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} + \sin \theta = 0 \Leftrightarrow f'(\theta) + f(\theta) \sin \theta = 0$$

1060. i. Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, συνεπώς θα ισχύει $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$g(x) = \frac{(x-2)f(x) + \eta \mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-2)f(x) + \eta \mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} \Leftrightarrow \\ (\sqrt{x-1}-1)g(x) &= (x-2)f(x) + \eta \mu(x^2-4) \Leftrightarrow \\ (x-2)f(x) &= (\sqrt{x-1}-1)g(x) - \eta \mu(x^2-4) \stackrel{x \neq 2}{\Leftrightarrow} \\ f(x) &= \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}g(x) - \frac{\eta \mu(x^2-4)}{x-2} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}g(x) - \frac{\eta \mu(x^2-4)}{x-2} \right) \Leftrightarrow \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}g(x) - (x+2)\frac{\eta \mu(x^2-4)}{(x-2)(x+2)} \right) \Leftrightarrow \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}g(x) - (x+2)\frac{\eta \mu(x^2-4)}{x^2-4} \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} g(x) - (x+2) \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} \right) \Leftrightarrow$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 4 \Leftrightarrow \boxed{f(2) = -5}$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} \stackrel{u=x^2-4}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

Στη σχέση $f^2(x) + f(x^2) = 2x^2$ για $x=1$ παίρνουμε :

$$f^2(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^2(1) + f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow (f(1)-1)(f(1)+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 1 \quad \text{ή} \quad f(1) = -2$$

Η f είναι συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού έχουμε $f(2) = -5 < 0$, τότε θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(1) = -2$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η εξής :

$$y - f'(1) = f(1)(x-1)$$

Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$f^2(x) + f(x^2) = 2x^2 \Rightarrow 2f(x)f'(x) + 2xf'(x^2) = 4x \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$2f(1)f'(1) + 2f'(1) = 4 \stackrel{f(1)=-2}{\Leftrightarrow} -4f'(1) + 2f'(1) = 4 \Leftrightarrow -2f'(1) = 4 \Leftrightarrow f'(1) = -2$$

Συνεπώς η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η :

$$y - (-2) = -2(x-1) \Leftrightarrow y + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow \boxed{y = -2x}$$

iii. Είναι :

$$(x-3)f'(x) + f(x) = 1 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) + (x-3)'f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$((x-3)f(x))' - x' = 0 \Leftrightarrow ((x-3)f(x) - x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-3)f(x) - x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f(x) + (x-3)f'(x) - 1$$
- $g(1) = -2 \cdot f(1) - 1 = 3$ και $g(2) = -f(2) - 2 = 3$, άρα $g(1) = g(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ. Rolle** για την g στο $[1, 2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + (x-3)f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) + f(x) = 1$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

1061. i. Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, συνεπώς θα ισχύει $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x+3} - 2} \quad \mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 12$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x^2 - 1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x+3} - 2} \Leftrightarrow \\ (\sqrt{x+3} - 2)g(x) &= (x^2 - 1)f(x) + \eta\mu(x-1) \Leftrightarrow \\ (x^2 - 1)f(x) &= (\sqrt{x+3} - 2)g(x) - \eta\mu(x-1) \Leftrightarrow \\ (x-1)(x+1)f(x) &= (\sqrt{x+3} - 2)g(x) - \eta\mu(x-1) \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow} \\ (x+1)f(x) &= \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}g(x) - \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1} [(x+1)f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}g(x) - \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right) \Leftrightarrow \\ 2f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}g(x) - \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right) \Leftrightarrow \\ 2f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}g(x) - \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right) \Leftrightarrow \\ 2f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}g(x) - \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right) \Leftrightarrow \\ 2f(1) &= \frac{1}{4} \cdot 12 - 1 \Leftrightarrow 2f(1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 1} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

ii. Είναι :

$$f(x) \ln f(x) + x f'(x) = 0 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x' \cdot \ln f(x) + x (\ln f(x))' = 0 \Leftrightarrow (x \ln f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \ln f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- $g(0) = 0$ και $g(1) = \ln f(1) = \ln 1 = 0$, άρα $g(0) = g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0,1]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ln f(\xi) + \xi \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \ln f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

1062. i. Είναι :

$$f'(x)(x-3) = -f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-3) + f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(x-3) + f(x)(x-3)' = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot (x-3))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot (x-3)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x)(x-3) + f(x)$$
- $g(1) = -2f(1) = -2$ και $g(2) = -f(2) = -2$, άρα $g(1) = g(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1,2]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1)(\xi_1-3) + f(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1)(\xi_1-3) = -f(\xi_1)$$

ii. Είναι :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

- $g(1) = f(1) = 1$ και $g(2) = \frac{f(2)}{2} = 1$, άρα $g(1) = g(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1,2]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi_2 f'(\xi_2) - f(\xi_2)}{\xi_2^2} = 0 \Leftrightarrow \xi_2 f'(\xi_2) - f(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_2)}{\xi_2}$$

iii. Είναι :

$$f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow f'(x)f(x) - x = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) - x^2)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = 2f'(x)f(x) - 2x$$

- $g(1) = f^2(1) - 1 = 0$ και $g(2) = f^2(2) - 4 = 0$, άρα $g(1) = g(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1,2]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_3 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi_3) = 0 \Leftrightarrow 2f'(\xi_3)f(\xi_3) - 2\xi_3 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_3)f(\xi_3) = \xi_3$$

1063. Είναι :

$$(f(x) - \sin x) \cdot (f'(x) + \eta \mu x) = x \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - \sin x) \cdot (f'(x) + \eta \mu x) - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - \sin x) \cdot (f(x) - \sin x)' - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(f(x) - \sin x) \cdot (f(x) - \sin x)' - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left((f(x) - \sin x)^2 - x^2 \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (f(x) - \sin x)^2 - x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = 2(f(x) - \sin x) \cdot (f'(x) + \eta \mu x) - 2x$$

- $g(-\pi) = (f(-\pi) - \sin(-\pi))^2 - (-\pi)^2 \stackrel{f \text{ άρτια}}{=} (f(\pi) - \sin \pi)^2 - \pi^2 = (f(\pi) + 1)^2 - \pi^2$

$$\text{και } g(\pi) = (f(\pi) + 1)^2 - \pi^2, \text{ άρα } g(-\pi) = g(\pi).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[-\pi, \pi]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2(f(\xi) - \sin \xi) \cdot (f'(\xi) + \eta \mu \xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(\xi) - \sin \xi) \cdot (f'(\xi) + \eta \mu \xi) = \xi$$

1064. i. Έστω $\varepsilon : y = ax$ η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Τα σημεία A και B ανήκουν στην ευθεία ε οπότε θα είναι $f(x_1) = ax_1$ και $f(x_2) = ax_2$.

Συνεπώς :

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = a \text{ και } \frac{f(x_2)}{x_2} = a, \text{ άρα είναι } \boxed{\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}}$$

ii. Είναι :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$$

- $g(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1}$ και $g(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2}$, άρα $g(x_1) = g(x_2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή η **εξίσωση** :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1065. Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ είναι η $\varepsilon : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$.

Αφού θέλουμε η ε να διέρχεται από το $A(1, 0)$, τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $-f(\xi) = f'(\xi)(1 - \xi)$.

Είναι :

$$-f(x) = f'(x)(1 - x) \Leftrightarrow f'(x)(1 - x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)(x - 1) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(x - 1) - f(x)(x - 1)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)(x - 1) - f(x)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x - 1} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - 1) - f(x)}{(x - 1)^2}$$

- $g(2) = f(2)$ και $g(3) = \frac{f(3)}{2} = f(2)$, άρα $g(2) = g(3)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[2, 3]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)(\xi - 1) - f(\xi)}{(\xi - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -f(\xi) = f'(\xi)(1 - \xi)$$

Αποδείξαμε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το $A(1, 0)$.

1066. Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ είναι η $\varepsilon : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$.
Αφού θέλουμε η ε να διέρχεται από το $\Gamma(\gamma, 0)$, τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $-f(\xi) = f'(\xi)(\gamma - \xi)$, όπου $\gamma \notin (\alpha, \beta)$.

Είναι :

$$\begin{aligned} -f(x) = f'(x)(\gamma - x) &\Leftrightarrow f'(x)(\gamma - x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)(x - \gamma) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ f'(x)(x - \gamma) - f(x)(x - \gamma)' &= 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)(x - \gamma) - f(x)(x - \gamma)'}{(x - \gamma)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x - \gamma} \right)' = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - \gamma}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - \gamma) - f(x)}{(x - \gamma)^2}$$

- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha - \gamma} = 0$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)(\xi - \gamma) - f(\xi)}{(\xi - \gamma)^2} = 0 \Leftrightarrow -f(\xi) = f'(\xi)(\gamma - \xi)$$

Αποδείξαμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(\gamma, 0)$.

1067. Είναι :

$$f'(x) \cdot f'(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x)) - 1 = 0 \Leftrightarrow (f(f(x)) - x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x)) - x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) - 1$$

- $g(1) = f(f(1)) - 1 = f(2) - 1 = 1 - 1 = 0$ και

$$g(2) = f(f(2)) - 2 = f(1) - 2 = 2 - 2 = 0, \text{ άρα } g(1) = g(2).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1, 2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot f'(f(\xi)) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot f'(f(\xi)) = 1$$

1068. Είναι :

$$xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \overset{x>0}{x^2 f'(x) + 2xf(x)} = 0 \Leftrightarrow x^2 (f(x))' + (x^2)' f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x)$$

- $g(\alpha) = \alpha^2 f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = \beta^2 f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f'(x) + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + 2f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α, β) .

1069. Είναι :

$$\alpha \ln^2 x = \beta \ln x + \gamma \Leftrightarrow \alpha \ln^2 x - \beta \ln x - \gamma = 0 \quad x \neq 0$$

$$\alpha \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} - \beta \ln x \cdot \frac{1}{x} - \gamma \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ln^2 x \cdot (\ln x)' - \beta \ln x \cdot (\ln x)' - \gamma \cdot (\ln x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \ln^2 x \cdot (\ln x)' - \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)' - \gamma \cdot (\ln x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot (\ln^3 x)' - \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot (\ln^2 x)' - \gamma \cdot (\ln x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{3} \ln^3 x - \frac{\beta}{2} \ln^2 x - \gamma \ln x \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\alpha}{3} \ln^3 x - \frac{\beta}{2} \ln^2 x - \gamma \ln x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1, e^2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e^2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \ln^2 x - \beta \cdot \frac{1}{x} \ln x - \frac{\gamma}{x}$$

- $g(1) = 0$ και

$$\begin{aligned} g(e^2) &= \frac{\alpha}{3} (\ln e^2)^3 - \frac{\beta}{2} (\ln e^2)^2 - \gamma \ln e^2 = \frac{8\alpha}{3} - \frac{4\beta}{2} - 2\gamma = \frac{2 \cdot 3(\beta + \gamma)}{3} - 2\beta - 2\gamma = \\ &= 2\beta + 2\gamma - 2\beta - 2\gamma = 0, \text{ άρα } g(1) = g(e^2). \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[1, e^2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e^2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{x} \ln^2 x - \beta \cdot \frac{1}{x} \ln x - \frac{\gamma}{x} = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln^2 x = \beta \ln x + \gamma$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, e^2)$.

1070. Είναι :

$$f(x) \cdot f'(x) = x \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) - x^2)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2x$$

- $g(\alpha) = f^2(\alpha) - \alpha^2$ και $g(\beta) = f^2(\beta) - \beta^2$. Είναι :

$$f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow f^2(\alpha) - \alpha^2 = f^2(\beta) - \beta^2 \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi) \cdot f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \cdot f'(\xi) = \xi$$

1071. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία OM , αρκεί να δείξουμε ότι :

$$f'(x_0) \cdot \lambda_{OM} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - 0} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \frac{f(x_0)}{x_0} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot f(x_0) = -x_0$$

Είναι :

$$f(x) \cdot f'(x) = -x \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) + x = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) + x^2)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + x^2$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2x$$

- $g(\alpha) = f^2(\alpha) + \alpha^2$ και $g(\beta) = f^2(\beta) + \beta^2$. Είναι :

$$(OA) = (OB) \Leftrightarrow \sqrt{f^2(\alpha) + \alpha^2} = \sqrt{f^2(\beta) + \beta^2} \Leftrightarrow f^2(\alpha) + \alpha^2 = f^2(\beta) + \beta^2 \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) \cdot f'(x_0) + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot f(x_0) = -x_0$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι **υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία OM .**

1072. Είναι :

$$f'(x) \cdot \ln x^x = f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot x \ln x - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot (\ln x)' = 0 \Leftrightarrow_{\substack{\ln x \neq 0 \\ \text{αφού } 1 \notin (e, e^2)}} \frac{f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\ln x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (e, e^2) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$- \quad g(e) = \frac{f(e)}{\ln e} = f(e) \text{ και } g(e^2) = \frac{f(e^2)}{\ln e^2} = \frac{f(e^2)}{2} = \frac{2f(e)}{2} = f(e). \text{ Άρα}$$

$$g(e) = g(e^2).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[e, e^2]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot \ln \xi - f(\xi) \cdot \frac{1}{\xi}}{\ln^2 \xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \ln \xi = f(\xi)$$

1073. Είναι :

$$xf'(x) \cdot \ln x + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot \ln x + f(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' \ln x + f(x) \cdot (\ln x)' = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot \ln x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) \cdot \ln x + f(x) \cdot \frac{1}{x}$$

- $g(\alpha) = f(\alpha) \cdot \ln \alpha$ και $g(\beta) = f(\beta) \cdot \ln \beta$. Είναι :

$$\alpha^{f(\alpha)} = \beta^{f(\beta)} \Leftrightarrow \ln \alpha^{f(\alpha)} = \ln \beta^{f(\beta)} \Leftrightarrow f(\alpha) \ln \alpha = f(\beta) \ln \beta \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \ln x_0 + f(x_0) \cdot \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) \cdot \ln x_0 + f(x_0) = 0$$

1074. Είναι :

$$f(x) = xf'(x) \cdot \ln x \Leftrightarrow xf'(x) \cdot \ln x - f(x) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot (\ln x)' = 0 \stackrel{\substack{\ln x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{αφού } 1 \notin (\alpha, \beta), \alpha, \beta > 1}}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\ln x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\ln \alpha}$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\ln \beta}$. Είναι :

$$\alpha^{f(\beta)} = \beta^{f(\alpha)} \Leftrightarrow \ln \alpha^{f(\beta)} = \ln \beta^{f(\alpha)} \Leftrightarrow f(\beta) \ln \alpha = f(\alpha) \ln \beta \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta)}{\ln \beta} = \frac{f(\alpha)}{\ln \alpha} \Leftrightarrow g(\beta) = g(\alpha)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot \ln \xi - f(\xi) \cdot \frac{1}{\xi}}{\ln^2 \xi} = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi f'(\xi) \cdot \ln \xi$$

1075. Είναι :

$$f(x) \cdot \ln f(x) = xf'(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \ln f(x) - x \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x' \ln f(x) - x (\ln f(x))' = 0 \Leftrightarrow (\ln f(x))' \cdot x - \ln f(x) \cdot x' = 0 \stackrel{\substack{x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{αφού } x \in [\alpha, \beta], \alpha, \beta > 0}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{(\ln f(x))' \cdot x - \ln f(x) \cdot x'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\ln f(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln f(x)}{x}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x - \ln f(x)}{x^2}$$

$$- \quad g(\alpha) = \frac{\ln f(\alpha)}{\alpha} \quad \text{και} \quad g(\beta) = \frac{\ln f(\beta)}{\beta}. \quad \text{Είναι :}$$

$$(f(\alpha))^\beta = (f(\beta))^\alpha \Leftrightarrow \ln(f(\alpha))^\beta = \ln(f(\beta))^\alpha \Leftrightarrow \beta \ln f(\alpha) = \alpha \ln f(\beta) \Leftrightarrow \frac{\ln f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\ln f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \cdot \xi - \ln f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \cdot \ln f(\xi) = \xi f'(\xi)$$

1076. i. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2) \subseteq [\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $[x_1, x_2]$, άρα σύμφωνα με το **Θ.Rolle** θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, άτοπο από δεδομένα. Συνεπώς $f(x_1) \neq f(x_2)$, δηλαδή η f είναι 1-1 και άρα **είναι και αντιστρέψιμη στο $[\alpha, \beta]$.**

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f''(x) &= (f'(x))^2 \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) - f'(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot (f'(x))' - f'(x) \cdot (f(x))' &= 0 \Leftrightarrow (f(x))' \cdot f'(x) - f(x) \cdot (f'(x))' = 0 \quad \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ \frac{(f(x))' \cdot f'(x) - f(x) \cdot (f'(x))'}{(f'(x))^2} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)' = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$- \quad g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{και} \quad g(\beta) = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}. \quad \text{Είναι :}$$

$$f(\alpha) \cdot f'(\beta) = f(\beta) \cdot f'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{(f'(x_0))^2 - f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot f''(x_0) = (f'(x_0))^2$$

1077. Από τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$f(\alpha) \cdot f'(\beta) = f(\beta) \cdot f'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$. Είναι :

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{(f'(\xi))^2 - f(\xi) \cdot f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi))^2 - f(\xi) \cdot f''(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2 \geq 0$$

Όμως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα $f'(\xi) \neq 0$. Συνεπώς είναι $f(\xi) \cdot f''(\xi) > 0$.

1078. Είναι :

$$f'(x) = 3x^2 f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln f(x) - x^3)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x) - x^3$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - 3x^2$$

- $g(\alpha) = \ln f(\alpha) - \alpha^3$ και $g(\beta) = \ln f(\beta) - \beta^3$. Είναι :

$$\ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \Leftrightarrow \ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = \alpha^3 - \beta^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(\alpha) - \alpha^3 = \ln f(\beta) - \beta^3 \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\xi^2 f(\xi)$$

1079. Είναι :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha - x} + \frac{1}{\beta - x} \quad \begin{matrix} f(x) \neq 0 \\ x \neq \alpha, \beta \end{matrix} \Leftrightarrow f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) = f(x)(\beta - x) + f(x)(\alpha - x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) - f(x)(\beta - x) - f(x)(\alpha - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) + f(x)(\alpha - x)'(\beta - x) + f(x)(\alpha - x)(\beta - x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x)(\alpha - x)(\beta - x)]' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)(\alpha - x)(\beta - x)$, οπότε έχουμε :

– η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,

– η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) - f(x)(\beta - x) - f(x)(\alpha - x)$$

– $g(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = 0$. Άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\alpha - \xi)(\beta - \xi) - f(\xi)(\beta - \xi) - f(\xi)(\alpha - \xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$$

1080. Είναι :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} f(x)g(x) \neq 0 \\ x \neq 0 \text{ αφού } x \in (\alpha, \beta) \text{ με } \alpha > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow xf'(x)g(x) + xf(x)g'(x) = f(x)g(x) \Leftrightarrow$$

$$x(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) - f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow x(f(x)g(x))' - x'f(x)g(x) = 0 \quad x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(f(x)g(x))' - x'f(x)g(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)g(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{x}$, οπότε έχουμε :

– η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,

– η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = \frac{xf'(x)g(x) + xf(x)g'(x) - f(x)g(x)}{x^2}$$

$$- \quad h(\alpha) = \frac{f(\alpha)g(\alpha)}{\alpha} = 0 \quad \text{και} \quad h(\beta) = \frac{f(\beta)g(\beta)}{\beta} = 0. \quad \text{Άρα } h(\alpha) = h(\beta).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την h στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)g(\xi) + \xi f(\xi)g'(\xi) - f(\xi)g(\xi)}{\xi^2} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi}$$

Το τέχνασμα πολλαπλασιασμού με $e^{g(x)}$

1081. Είναι :

$$f(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow x f'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x' \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x)' \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$$
- $g(\alpha) = e^\alpha f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^\beta f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α, β) .

1082. Είναι :

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (-x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) + e^{-x} (-x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) + (e^{-x})' f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x)$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x)$$
- $h(\alpha) = e^{-\alpha} f(\alpha)$ και $h(\beta) = e^{-\beta} f(\beta)$.

Η C_f τέμνει τη C_g στα σημεία $A(\alpha, e^\alpha)$ και $B(\beta, e^\beta)$, άρα $f(\alpha) = g(\alpha) = e^\alpha$ και $f(\beta) = g(\beta) = e^\beta$, οπότε :

$$h(\alpha) = e^{-\alpha} f(\alpha) = e^{-\alpha} \cdot e^\alpha = 1 \quad \text{και} \quad h(\beta) = e^{-\beta} f(\beta) = e^{-\beta} \cdot e^\beta = 1, \quad \text{άρα } h(\alpha) = h(\beta).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την h στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi} f'(\xi) - e^{-\xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\xi)$$

1083. Είναι :

$$f'(x) + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (3x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x} f'(x) + e^{3x} (3x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x} f'(x) + (e^{3x})' f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{3x} f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{3x} f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{3x} f'(x) + 3e^{3x} f(x)$$

- $g(\alpha) = e^{3\alpha} f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{3\beta} f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{3\xi} f'(\xi) + 3e^{3\xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$$

1084. Είναι :

$$f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (-2x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) + e^{-2x} (-2x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) + (e^{-2x})' f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-2x} f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-2x} f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x)$$

- $g(0) = f(0) = 0$ και $g(2) = e^{-4} f(2) = 0$, άρα $g(0) = g(2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, 2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

1085. Είναι :

$$f'(x) = \lambda f(x) \Leftrightarrow f'(x) - \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (-\lambda x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} f'(x) + e^{-\lambda x} (-\lambda x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} f'(x) + (e^{-\lambda x})' f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-\lambda x} f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x)$$

- $g(\alpha) = e^{-\lambda \alpha} f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{-\lambda \beta} f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda \xi} f'(\xi) - \lambda e^{-\lambda \xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$$

1086. Είναι :

$$\begin{aligned} \kappa f'(x) + \lambda f(x) = 0 &\Leftrightarrow \stackrel{\kappa \neq 0}{f'(x) + \frac{\lambda}{\kappa} f(x) = 0} \Leftrightarrow f'(x) + \left(\frac{\lambda}{\kappa} x\right)' f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f'(x) + e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} \left(\frac{\lambda}{\kappa} x\right)' f(x) &= 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f'(x) + \left(e^{\frac{\lambda}{\kappa} x}\right)' f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x)\right)' = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f'(x) + \frac{\lambda}{\kappa} e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x)$$

- $g(\alpha) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} \alpha} f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} \beta} f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\lambda}{\kappa} \xi} f'(\xi) + \frac{\lambda}{\kappa} e^{\frac{\lambda}{\kappa} \xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \kappa f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$$

1087. i. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x)f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{g(x)} f'(x) + e^{g(x)} g'(x) f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ e^{g(x)} f'(x) + \left(e^{g(x)}\right)' f(x) &= 0 \Leftrightarrow \left(e^{g(x)} f(x)\right)' = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{g(x)} f(x)$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = e^{g(x)} f'(x) + e^{g(x)} g'(x) f(x)$$

- $h(\alpha) = e^{g(\alpha)} f(\alpha) = 0$ και $h(\beta) = e^{g(\beta)} f(\beta) = 0$, άρα $h(\alpha) = h(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την h στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{g(\xi)} f'(\xi) + e^{g(\xi)} g'(\xi) f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0$$

ii. Είναι :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \stackrel{f(x)g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x) \Leftrightarrow$$

$$(f(x)g(x))' - f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)g(x))' + (-x)' f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}(f(x)g(x))' + e^{-x}(-x)'f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}(f(x)g(x))' + (e^{-x})'f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x)g(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x)g(x)$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = e^{-x}f'(x)g(x) + e^{-x}f(x)g'(x) - e^{-x}f(x)g(x)$$

- $h(\alpha) = e^{-\alpha}f(\alpha)g(\alpha) = 0$ και $h(\beta) = e^{-\beta}f(\beta)g(\beta) = 0$, άρα $h(\alpha) = h(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την h στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi}f'(\xi)g(\xi) + e^{-\xi}f(\xi)g'(\xi) - e^{-\xi}f(\xi)g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 1$$

1088. Είναι :

$$f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (f'(x))' + x f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (f'(x))' + e^x \cdot x' \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x \cdot (f'(x))' + (e^x)' \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x f'(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x f'(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^x f''(x) + e^x f'(x)$$

- $g(\alpha) = e^{\alpha} f'(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{\beta} f'(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} f''(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + f'(\xi) = 0$$

1089. Είναι :

$$f''(x) + (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' + (f(x))' \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot (f'(x))' + e^{f(x)} \cdot (f(x))' \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot (f'(x))' + (e^{f(x)})' \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{f(x)} f'(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} f'(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f''(x) + e^{f(x)} \cdot (f'(x))^2$$

- $g(\alpha) = e^{f(\alpha)} f'(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{f(\beta)} f'(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x_0)} \cdot f''(x_0) + e^{f(x_0)} \cdot (f'(x_0))^2 = 0 \Leftrightarrow f''(x_0) + (f'(x_0))^2 = 0$$

1090. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \eta \mu x \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) - \eta \mu x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (\sigma \nu \nu x)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ e^{\sigma \nu \nu x} \cdot f'(x) + e^{\sigma \nu \nu x} \cdot (\sigma \nu \nu x)' \cdot f(x) &= 0 \Leftrightarrow e^{\sigma \nu \nu x} \cdot f'(x) + (e^{\sigma \nu \nu x})' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ (e^{\sigma \nu \nu x} \cdot f(x))' &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{\sigma \nu \nu x} \cdot f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{\sigma \nu \nu x} f'(x) - e^{\sigma \nu \nu x} \cdot \eta \mu x \cdot f(x)$$
- $g(\alpha) = e^{\sigma \nu \nu \alpha} f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{\sigma \nu \nu \beta} f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\sigma \nu \nu \xi} f'(\xi) - e^{\sigma \nu \nu \xi} \cdot \eta \mu \xi \cdot f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \eta \mu \xi f(\xi)$$

1091. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) + (1 + \sigma \nu \nu x) \cdot f(x) &= 0 \Leftrightarrow f'(x) + (x + \eta \mu x)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ e^{x + \eta \mu x} \cdot f'(x) + e^{x + \eta \mu x} \cdot (x + \eta \mu x)' \cdot f(x) &= 0 \Leftrightarrow e^{x + \eta \mu x} \cdot f'(x) + (e^{x + \eta \mu x})' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ (e^{x + \eta \mu x} \cdot f(x))' &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{x + \eta \mu x} \cdot f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{x + \eta \mu x} \cdot f'(x) + e^{x + \eta \mu x} \cdot (1 + \sigma \nu \nu x) \cdot f(x)$$
- $g(\alpha) = e^{\alpha + \eta \mu \alpha} f(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = e^{\beta + \eta \mu \beta} f(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= 0 \Leftrightarrow e^{\xi + \eta \mu \xi} \cdot f'(\xi) + e^{\xi + \eta \mu \xi} \cdot (1 + \sigma \nu \nu \xi) \cdot f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \\ f'(\xi) + (1 + \sigma \nu \nu \xi) f(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

1092. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(f(x) - 1) \Leftrightarrow f'(x) - 2x(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - 1)' + (-x^2)' (f(x) - 1) &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$e^{-x^2} \cdot (f(x)-1)' + e^{-x^2} \cdot (-x^2)' \cdot (f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x^2} \cdot (f(x)-1)' + (e^{-x^2})' \cdot (f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow [e^{-x^2} (f(x)-1)]' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x^2} (f(x)-1)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{-x^2} f'(x) - 2xe^{-x^2} (f(x)-1)$$

- $g(0) = f(0)-1 = 2-1=1$ και $g(1) = e^{-1} (f(1)-1) = e^{-1} (1+e-1) = 1$, άρα $g(0)=g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} f'(x) - 2xe^{-x^2} (f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x(f(x)-1)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

1093. Είναι :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \sigma \phi x = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\sigma \nu x}{\eta \mu x} - 1 = 0 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x) \eta \mu x + f(x) \sigma \nu x - f(x) \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow (f(x) \eta \mu x)' - f(x) \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) \eta \mu x)' + (-x)' f(x) \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} (f(x) \eta \mu x)' + e^{-x} (-x)' f(x) \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} (f(x) \eta \mu x)' + (e^{-x})' f(x) \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow (e^{-x} f(x) \eta \mu x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x) \eta \mu x$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) \eta \mu x + e^{-x} f(x) \sigma \nu x - e^{-x} f(x) \eta \mu x$$

- $g(0) = f(0) \eta \mu 0 = 0$ και $g(\pi) = e^{-\pi} f(\pi) \eta \mu \pi = 0$, άρα $g(0)=g(\pi)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0,\pi]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi} f'(\xi) \eta \mu \xi + e^{-\xi} f(\xi) \sigma \nu \xi - e^{-\xi} f(\xi) \eta \mu \xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sigma \phi \xi = 1$$

1094. Είναι :

$$f'(x) = \frac{1}{\alpha-x} + \frac{1}{\beta-x} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{\alpha-x} - \frac{1}{\beta-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \cdot (x-\alpha)(x-\beta) + (x-\beta) + (x-\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot (x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)'(x-\beta) + (x-\alpha)(x-\beta)' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot (x-\alpha)(x-\beta) + [(x-\alpha)(x-\beta)]' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} f'(x) \cdot (x-\alpha)(x-\beta) + e^{f(x)} [(x-\alpha)(x-\beta)]' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})' \cdot (x-\alpha)(x-\beta) + e^{f(x)} [(x-\alpha)(x-\beta)]' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ((x-\alpha)(x-\beta)e^{f(x)})' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)e^{f(x)}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = (x-\beta)e^{f(x)} + (x-\alpha)e^{f(x)} + (x-\alpha)(x-\beta)e^{f(x)} \cdot f'(x)$$
- $g(\alpha) = 0$ και $g(\beta) = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\xi-\beta)e^{f(\xi)} + (\xi-\alpha)e^{f(\xi)} + (\xi-\alpha)(\xi-\beta)e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{1}{\alpha-\xi} + \frac{1}{\beta-\xi}$$

Συνδυασμός θεωρημάτων Rolle, Bolzano & Θ.Ε.Τ.

1095. i. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική. Έχουμε $f(-1) = \alpha - \beta < 0$ (δεδομένο), $f(0) = 1 > 0$ και $f(1) = 2 + \alpha + \beta < 0$ (δεδομένο). Θα εφαρμόσουμε Θ.Bolzano για την f στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ και ισχύει $f(-1) \cdot f(0) < 0$ και $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0) \subseteq (-1, 1)$ και $x_2 \in (0, 1) \subseteq (-1, 1)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι **η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.**

ii. Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$$
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Δηλαδή **η εξίσωση :**

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2\alpha x + \beta = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

1096. Από τα δεδομένα παίρνουμε $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 3 > 0$ και $f(3) = -1 < 0$.
Θα εφαρμόσουμε Θ.Bolzano για την f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$.
Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ και ισχύει $f(1) \cdot f(2) < 0$ και $f(2) \cdot f(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1,2) \subseteq (1,3)$ και $x_2 \in (2,3) \subseteq (1,3)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.
Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1097. Για να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $f'(\xi) = 0$.
Θα εφαρμόσουμε Θ.Bolzano για την f στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.
Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(\gamma) < 0$ και $f(\gamma) \cdot f(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (a, \gamma) \subseteq (a, \beta)$ και $x_2 \in (\gamma, \beta) \subseteq (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.
Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

1098. Είναι :

$$f(1) < f(3) < f(2)$$

και αφού η f είναι και συνεχής στο $[1,2]$ τότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = f(3)$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\rho, 3]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho, 3)$,
- $f(\rho) = f(3)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho, 3) \subseteq (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

1099. i. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω ότι είναι $f(1) < f(2)$.

Είναι :

$$f(1) < f(2) \stackrel{+f(2)}{\Leftrightarrow} f(1) + f(2) < 2f(2) \Leftrightarrow \frac{f(1) + f(2)}{2} < f(2)$$

και

$$f(1) < f(2) \stackrel{+f(1)}{\Leftrightarrow} 2f(1) < f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(1) < \frac{f(1) + f(2)}{2}$$

Καταλήξαμε ότι $f(1) < \frac{f(1) + f(2)}{2} < f(2)$ και αφού η f είναι και συνεχής στο $[1, 2]$

τότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε :

$$f(\xi) = \frac{f(1) + f(2)}{2} \Leftrightarrow 2f(\xi) = f(1) + f(2)$$

ii. Είναι :

$$f(\xi) = \frac{f(1) + f(2)}{2} \Leftrightarrow f(\xi) = f(3)$$

Οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\xi, 3]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi, 3)$,
- $f(\xi) = f(3)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi, 3) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1100. i. Έχουμε $f(1) = -2 < 0$, $f(3) = 1 > 0$ και $f(5) = -3 < 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ. Bolzano** για την f στα διαστήματα $[1, 3]$ και $[3, 5]$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1, 3]$ και $[3, 5]$ και ισχύει $f(1) \cdot f(3) < 0$ και $f(3) \cdot f(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1, 3) \subseteq (1, 5)$ και $x_2 \in (3, 5) \subseteq (1, 5)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.

Είναι $f(x_1) = f(x_2)$ αλλά $x_1 \neq x_2$, συνεπώς **η f δεν είναι 1-1**.

ii. Είναι :

$$2f(x) + xf'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2)'f(x) + x^2f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2f(x)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x)$$
- $g(x_1) = x_1^2f(x_1) = 0$ και $g(x_2) = x_2^2f(x_2) = 0$, άρα $g(x_1) = g(x_2)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 5)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Δηλαδή **η εξίσωση :**

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) = 0 \Leftrightarrow \stackrel{x \neq 0}{2f(x) + xf'(x)} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (1,5).

1101. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 4\alpha x^2 - 4\beta x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 - 8\alpha x - 4\beta = P(x)$$
- $f(0) = 0$ και $f(2) = 16\alpha + 8\beta - 16\alpha - 8\beta = 0$, άρα $f(0) = f(2)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow P(\xi) = 0$$

Δηλαδή το **P(x)** έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,2).

ii. Είναι :

$$P(x) = \frac{2^x - 6}{x - 3} \Leftrightarrow (x - 3)P(x) = 2^x - 6 \Leftrightarrow (x - 3)P(x) - 2^x + 6 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x - 3)P(x) - 2^x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\xi, 3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε :

$$g(\xi) = (\xi - 3)P(\xi) - 2^\xi + 6 = -2^\xi + 6 \text{ και } g(3) = -8 + 6 = -2 < 0$$

Είναι $\xi \in (0,2)$, οπότε :

$$\xi < 2 \Leftrightarrow 2^\xi < 2^2 \Leftrightarrow 2^\xi < 4 \Leftrightarrow -2^\xi > -4 \Leftrightarrow -2^\xi + 6 > 2 \Rightarrow g(\xi) > 2 > 0$$

Δηλαδή $g(\xi) \cdot g(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi, 3) \subseteq (0, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)P(x) - 2^x + 6 = 0 \Leftrightarrow P(x) = \frac{2^x - 6}{x - 3}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,3).

1102. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x^2$, $x \in (0,1)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 4x$$
- $g(0) = f(0)$ και $g(1) = f(1) - 2 = f(0)$, άρα $g(0) = g(1)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 4\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 4\xi$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) - 5x$, $x \in (0,1)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,\xi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $h(0) = f'(0) > 0$ και

$h(\xi) = f'(\xi) - 5\xi = 4\xi - 5\xi = -\xi < 0$, δηλαδή $h(0) \cdot h(\xi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\xi) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - 5x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 5x_0$$

1103. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^5}{5}$, $x \in (1, 2)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - x^4$$
- $g(1) = f(1) - \frac{1}{5}$ και $g(2) = f(2) - \frac{32}{5} = f(1) + \frac{31}{5} - \frac{32}{5} = f(1) - \frac{1}{5}$, άρα
 $g(1) = g(2)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - x_0^4 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = x_0^4$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) - 5x^3$, $x \in (1, 2)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $h(1) = f'(1) - 5 > 0$ και $h(x_0) = f'(x_0) - 5x_0^3 = x_0^4 - 5x_0^3 = x_0^3(x_0 - 5) < 0$, αφού $x_0 \in (1, 2)$.
 Δηλαδή $h(1) \cdot h(x_0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x_0) \subseteq (1, 2)$ τέτοιο ώστε :**

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 5\xi^3 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 5\xi^3$$

1104. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in (0, 1)$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - x$$
- $g(0) = f(0)$ και $g(1) = f(1) - \frac{1}{2} = f(0)$, άρα $g(0) = g(1)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f'(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f'(\alpha) = \alpha$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) - 2x$, $x \in (0, 1)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $h(0) = f'(0) > 0$ και $h(\alpha) = f'(\alpha) - 2\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha < 0$, δηλαδή $h(0) \cdot h(\alpha) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\beta \in (0, \alpha) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε :**

$$h(\beta) = 0 \Leftrightarrow f'(\beta) - 2\beta = 0 \Leftrightarrow f'(\beta) = 2\beta$$

Υπαρξη ρίζας της $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, ...

1105. i. Είναι :

$$f(-1) = -\alpha - \alpha - 2 + 1 - 2 + 2\alpha - 1 + 4 + 2017 = 2017,$$

$$f(0) = 2017 \text{ και}$$

$$f(1) = \alpha + \alpha + 2 + 1 + 2 - 2\alpha - 1 - 4 + 2017 = 2017$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και στο $[0,1]$ ως πολωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ και στο $(0,1)$,
- $f(-1)=f(0)$ και $f(0)=f(1)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (-1,0)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (0,1)$, τέτοια ώστε $f'(\rho_1) = 0$ και $f'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Άρα η C_f έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τετμημένες $\rho_1, \rho_2 \in (-1,1)$ στα οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ,
- $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

1106. i. Είναι :

$$g(0) = f(0) - 1 = -2,$$

$$g(1) = f(1) - e - 2 = -2 \text{ και}$$

$$g(2) = f(2) - e^2 - 2 = -2$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και στο $[1,2]$ ως πολωνυμική,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - e^x + 2x - 3$$

- $g(0)=g(1)$ και $g(1)=g(2)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (0,1)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (1,2)$, τέτοια ώστε $g'(\rho_1) = 0$ και $g'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Άρα η C_g έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τετμημένες $\rho_1, \rho_2 \in (0,2)$ στα οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έχουμε :

- η g' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η g' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο :

$$g''(x) = f''(x) - e^x + 2$$

$$- \quad g'(\rho_1) = g'(\rho_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) - e^\xi + 2 = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + 2 = e^\xi$$

1107. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ,
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και στο $[x_0, \beta]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (α, x_0) και στο (x_0, β) ,
- $f'(\alpha) = f'(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = f'(\beta) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, \beta)$, τέτοια ώστε $f''(x_1) = 0$ και $f''(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f'' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f'' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f'' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$.

1108. Η C_f εφάπτεται στον $x'x$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 , οπότε παίρνουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad \text{και} \quad f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $\rho_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\rho_0) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στα διαστήματα $[x_1, \rho_0]$ και $[\rho_0, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, \rho_0]$ και στο $[\rho_0, x_2]$,

- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, ρ_0) και στο (ρ_0, x_2) ,
- $f'(x_1) = f'(\rho_0) = 0$ και $f'(\rho_0) = f'(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (x_1, \rho_0)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\rho_0, x_2)$, τέτοια ώστε $f''(\rho_1) = 0$ και $f''(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f'' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f'' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η f'' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ,
- $f''(\rho_1) = f''(\rho_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$.

1109. Η C_f τέμνει τον x' στα σημεία $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ και $\Gamma(\gamma, 0)$, οπότε παίρνουμε :

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$$

i. Η $h(x) = f(x)e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη αφού οι f και e^{-x} είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h' είναι παραγωγίσιμη αφού οι f, f' και e^{-x} είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $h''(x) = f''(x)e^{-x} - 2f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

Έτσι έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και στο $[\beta, \gamma]$ ως πολυωνυμική,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και στο (β, γ) με παράγωγο :

$$h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}$$

- $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ και $h(\beta) = h(\gamma) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (\alpha, \beta)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\beta, \gamma)$, τέτοια ώστε $h'(\rho_1) = 0$ και $h'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έχουμε :

- η h' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η h' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο :

$$h''(x) = f''(x)e^{-x} - 2f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x}$$

- $h'(\rho_1) = h'(\rho_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε :

$$h''(x_0) = 0 \Leftrightarrow f''(x_0)e^{-x_0} - 2f'(x_0)e^{-x_0} + f(x_0)e^{-x_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x_0) - 2f'(x_0) + f(x_0) = 0$$

1110. Η ευθεία $y=2011$ τέμνει τη C_f στα σημεία με τετμημένες 1, 2 και 3, οπότε παίρνουμε :

$$f(1)=f(2)=f(3)=2011$$

i. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και στο $[2,3]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και στο $(2,3)$,
- $f(1)=f(2)=2011$ και $f(2)=f(3)=2011$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (1,2)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (2,3)$, τέτοια ώστε $f'(\rho_1) = 0$ και $f'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(1,3)$.

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} f''(x) = f'(x) &\Leftrightarrow f''(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow (f'(x))' + (-x)' f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ e^{-x} \cdot (f'(x))' + e^{-x} \cdot (-x)' \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot (f'(x))' + (e^{-x})' \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ (e^{-x} f'(x))' &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο :

$$g'(x) = e^{-x} f''(x) - e^{-x} f'(x)$$

- $g(\rho_1) = e^{-\rho_1} f'(\rho_1) = 0$ και $g(\rho_2) = e^{-\rho_2} f'(\rho_2) = 0$, άρα $g(\rho_1) = g(\rho_2)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1,3)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi} f''(\xi) - e^{-\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = f'(\xi)$$

1111. i. Είναι :

$$f(-1)=0,$$

$$f(1)=0 \text{ και}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[-1,1]$ και $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και στο $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και στο $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, με παράγωγο :

$$f'(x) = -2x \sin x - (1-x^2) \eta \mu x$$

$$- f(-1)=f(1) \text{ και } f(1)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1,1)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοια ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$ αντίστοιχα.

Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , με παράγωγο :

$$f''(x) = -2\sigma\upsilon\nu x + 2\chi\eta\mu x + 2\chi\eta\mu x - (1-x^2)\sigma\upsilon\nu x =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu x + 4\chi\eta\mu x - (1-x^2)\sigma\upsilon\nu x = 4\chi\eta\mu x - (3-x^2)\sigma\upsilon\nu x$$
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Άρα η εξίσωση :

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4\chi\eta\mu x - (3-x^2)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow (x^2-3)\sigma\upsilon\nu x = -4\chi\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-4x}{x^2-3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{-4x}{x^2-3}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$.

1112. Είναι :

$$f''(x)=4-6x \Leftrightarrow f''(x)+6x-4=0 \Leftrightarrow (f'(x)+3x^2-4x)'=0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)+x^3-2x^2)''$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^3-2x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι :

$$g(0)=f(0)=2,$$

$$g(1)=f(1)-1=3-1=2 \text{ και}$$

$$g(2)=f(2)=2$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και στο $[1,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και στο $(1,2)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 4x$$

$$- \quad g(0)=g(1) \text{ και } g(1)=g(2)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (0,1)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (1,2)$, τέτοια ώστε $g'(\rho_1) = 0$ και $g'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έχουμε :

$$- \quad \text{η } g' \text{ είναι συνεχής στο } [\rho_1, \rho_2],$$

$$- \quad \text{η } g' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (\rho_1, \rho_2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$g''(x) = f''(x) + 6x - 4$$

$$- \quad g'(\rho_1) = g'(\rho_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0,2)$ τέτοιο ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + 6\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 4 - 6\xi$$

1113. Είναι :

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow f''(x) - \frac{1}{x^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x) + \frac{1}{x} - 2x \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x) + \ln x - x^2 \right)''$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \ln x - x^2$, $x > 0$.

Είναι :

$$g(1) = f(1) - 1 = 0,$$

$$g(2) = f(2) + \ln 2 - 4 = 4 - \ln 2 + \ln 2 - 4 = 0 \text{ και}$$

$$g(e) = f(e) + 1 - e^2 = e^2 - 1 + 1 - e^2 = 0$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,e]$.

Έτσι έχουμε :

$$- \quad \text{η } g \text{ είναι συνεχής στο } [1,2] \text{ και στο } [2,e] \text{ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,}$$

$$- \quad \text{η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (1,2) \text{ και στο } (2,e) \text{ με παράγωγο :}$$

$$g'(x) = f'(x) + \frac{1}{x} - 2x$$

$$- \quad g(1)=g(2) \text{ και } g(2)=g(e)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (1,2)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (2,e)$, τέτοια ώστε $g'(\rho_1) = 0$ και $g'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έχουμε :

$$- \quad \text{η } g' \text{ είναι συνεχής στο } [\rho_1, \rho_2],$$

$$- \quad \text{η } g' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (\rho_1, \rho_2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{x^2} - 2$$

$$- \quad g'(\rho_1) = g'(\rho_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα**
 $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, e)$ **τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) - \frac{1}{\xi^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$$

1114. i. Είναι :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$.

Είναι :

$$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\frac{1}{\beta\gamma}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma},$$

$$g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{\frac{1}{\alpha\gamma}}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \text{ και}$$

$$g(\gamma) = \frac{f(\gamma)}{\gamma} = \frac{\frac{1}{\alpha\beta}}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και στο $[\gamma, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, γ) και στο (γ, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$- \quad g(\alpha) = g(\gamma) \text{ και } g(\gamma) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (\alpha, \gamma)$
 και τουλάχιστον ένα $\lambda \in (\gamma, \beta)$, τέτοια ώστε $g'(\kappa) = 0$ και $g'(\lambda) = 0$ αντίστοιχα.

Άρα **υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa < \lambda$ τέτοια ώστε :**

$$g'(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa f'(\kappa) - f(\kappa)}{\kappa^2} = 0 \Leftrightarrow \kappa f'(\kappa) - f(\kappa) = 0 \Leftrightarrow f'(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{\kappa}$$

και

$$g'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda f'(\lambda) - f(\lambda)}{\lambda^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda f'(\lambda) - f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow f'(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$$

ii. Έστω (η) η ευθεία που διέρχεται από τα $A(\kappa, f(\kappa))$ και $B(\lambda, f(\lambda))$. Τότε :

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\lambda) - f(\kappa)}{\lambda - \kappa}$$

Η ευθεία (η) έχει εξίσωση :

$$y - f(\kappa) = \frac{f(\lambda) - f(\kappa)}{\lambda - \kappa} (x - \kappa)$$

και αφού $O(0,0) \in (\eta)$ έχουμε :

$$-f(\kappa) = \frac{f(\lambda) - f(\kappa)}{\lambda - \kappa} (-\kappa) \Leftrightarrow (\lambda - \kappa)f(\kappa) = \kappa(f(\lambda) - f(\kappa)) \Leftrightarrow$$

$$\lambda f(\kappa) - \kappa f(\kappa) = \kappa f(\lambda) - \kappa f(\kappa) \Leftrightarrow \lambda f(\kappa) - \cancel{\kappa f(\kappa)} = \kappa f(\lambda) - \cancel{\kappa f(\kappa)} \Leftrightarrow$$

$$\lambda f(\kappa) = \kappa f(\lambda) \Leftrightarrow \lambda \kappa f'(\kappa) = \kappa \lambda f'(\lambda) \stackrel{\kappa, \lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(\kappa) = f'(\lambda)$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$.

Έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (κ, λ) ,
- $f'(\kappa) = f'(\lambda)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\kappa, \lambda) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.**

1115. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \eta \mu x \cdot g(x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h στα διαστήματα $[0, \pi]$ και $[\pi, 2\pi]$.

Έτσι έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και στο $[\pi, 2\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και στο $(\pi, 2\pi)$, με παράγωγο :

$$h'(x) = \sigma \nu x \cdot g(x) + \eta \mu x \cdot g'(x)$$

- $h(0) = h(\pi) = 0$ και $h(\pi) = h(2\pi) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (0, \pi)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\pi, 2\pi)$, τέτοια ώστε $h'(\rho_1) = 0$ και $h'(\rho_2) = 0$ αντίστοιχα.

Δηλαδή η εξίσωση :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \sigma \nu x + g'(x) \eta \mu x = 0$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έχουμε :

- η h' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η h' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο :

$$h''(x) = -\eta \mu x \cdot g(x) + 2 \sigma \nu x \cdot g'(x) + \eta \mu x \cdot g''(x)$$

- $h'(\rho_1) = h'(\rho_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε :**

$$h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi \cdot g(\xi) + 2\sigma\upsilon\nu\xi \cdot g'(\xi) + \eta\mu\xi \cdot g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow \\ g''(\xi)\eta\mu\xi + 2g'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = g(\xi)\eta\mu\xi$$

1116. Θα εφαρμόσουμε Θ.Rolle για την g στο διάστημα $[a, \beta]$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$- \frac{f(a)}{f(\beta)} = \frac{f'(a)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow \frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow g(a) = g(\beta)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{(f'(\xi_1))^2 - f(\xi_1)f''(\xi_1)}{(f'(\xi_1))^2} = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi_1))^2 - f(\xi_1)f''(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \\ (f'(\xi_1))^2 = f(\xi_1)f''(\xi_1)$$

Θα εφαρμόσουμε Θ.Rolle για την φ στο διάστημα $[a, \beta]$.

Έχουμε :

- η φ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η φ είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο :

$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$$

$$- \frac{f(a)}{f(\beta)} = \frac{f'(a)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow \frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(\beta)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε :**

$$\varphi'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(\xi_2)f(\xi_2) - (f'(\xi_2))^2}{f^2(\xi_2)} = 0 \Leftrightarrow f''(\xi_2)f(\xi_2) - (f'(\xi_2))^2 = 0 \Leftrightarrow \\ (f'(\xi_2))^2 = f''(\xi_2)f(\xi_2)$$

- Αν $\xi_1 = \xi_2$, τότε προσθέτοντας τις σχέσεις $(f'(\xi_1))^2 = f(\xi_1)f''(\xi_1)$ και

$$(f'(\xi_2))^2 = f''(\xi_2)f(\xi_2) \text{ κατά μέλη έχουμε :}$$

$$f(\xi_1)f''(\xi_1) + f''(\xi_2)f(\xi_2) = (f'(\xi_1))^2 + (f'(\xi_2))^2 \stackrel{\xi_1 = \xi_2}{=} 2(f'(\xi_1))^2 > 0$$

αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

- Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $\xi_1 < \xi_2$. Τότε προσθέτοντας τις σχέσεις

$$(f'(\xi_1))^2 = f(\xi_1)f''(\xi_1) \text{ και } (f'(\xi_2))^2 = f''(\xi_2)f(\xi_2) \text{ κατά μέλη έχουμε :}$$

$$f(\xi_1)f''(\xi_1) + f''(\xi_2)f(\xi_2) = (f'(\xi_1))^2 + (f'(\xi_2))^2 > 0$$

αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f(\xi_1)f''(\xi_1) + f''(\xi_2)f(\xi_2) > 0$.

1117. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) + f(3)(x^2 - 6x + 8)$.

Είναι :

$$h(2) = f(2) = 0,$$

$$h(3) = f(3) - f(3) = 0 \text{ και}$$

$$h(4) = f(4) = 0$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h στα διαστήματα $[2, 3]$ και $[3, 4]$.

Έτσι έχουμε :

– η h είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και στο $[3, 4]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

– η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και στο $(3, 4)$ με παράγωγο :

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \text{ ή } h'(x) = f'(x) + f(3)(2x - 6)$$

– $h(2) = h(3)$ και $h(3) = h(4)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (2, 3)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (3, 4)$, τέτοια ώστε $h'(x_1) = 0$ και $h'(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $x_1, x_2 \in (2, 4)$ τέτοια ώστε :

$$h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) - g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) = g'(x_1)$$

και

$$h'(x_2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) - g'(x_2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) = g'(x_2)$$

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έχουμε :

– η h' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,

– η h' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$h''(x) = f''(x) + 2f(3)$$

– $h'(x_1) = h'(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (2, 4)$ τέτοιο ώστε :

$$h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + 2f(3) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = -2f(3)$$

1118. i. Είναι $f'(\alpha) > 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)}{x - \alpha} > 0$.

Όμως $x \rightarrow \alpha^+ \Rightarrow x > \alpha \Leftrightarrow x - \alpha > 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} (x - \alpha) > 0$. Συνεπώς θα είναι

$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) > 0$. Άρα υπάρχει αριθμός κ δεξιά του α τέτοιος ώστε $f(\kappa) > 0$.

Είναι $f'(\beta) > 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)}{x - \beta} > 0$.

Όμως $x \rightarrow \beta^- \Rightarrow x < \beta \Leftrightarrow x - \beta < 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \beta^-} (x - \beta) < 0$. Συνεπώς θα είναι

$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) < 0$. Άρα υπάρχει αριθμός λ αριστερά του β τέτοιος ώστε $f(\lambda) < 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ με $f(\kappa) \cdot f(\lambda) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\kappa, \lambda) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.**

ii. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και στο $[x_0, \beta]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, x_0) και στο (x_0, β) ,
- $f(\alpha) = f(x_0) = 0$ και $f(x_0) = f(\beta) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, \beta)$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.**

Ανάμεσα σε κάθε δύο ρίζες της f περιέχεται μία τουλάχιστον ρίζα της f''

1119. Είναι $P(0) = P(1) = P(-2) = P(3) = P(-1) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την $P(x)$ στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και $[1, 3]$.

Έτσι έχουμε :

- η P είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και $[1, 3]$ ως πολωνυμική,
- η P είναι παραγωγίσιμη στα $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 3)$,
- $P(-2) = P(-1) = 0$, $P(-1) = P(0) = 0$, $P(0) = P(1) = 0$ και $P(1) = P(3) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (-2, -1)$, $\rho_2 \in (-1, 0)$, $\rho_3 \in (0, 1)$ και $\rho_4 \in (1, 3)$, τέτοια ώστε $P'(\rho_1) = 0$, $P'(\rho_2) = 0$, $P'(\rho_3) = 0$ και $P'(\rho_4) = 0$ αντίστοιχα.

Άρα η παράγωγος της $P(x)$ έχει τέσσερις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$.

1120. Έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 και ρ_4 οι τέσσερις διαφορετικές ρίζες της f στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = f(\rho_4) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$ και $[p_3, p_4]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$ και $[p_3, p_4]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στα (p_1, p_2) , (p_2, p_3) και (p_3, p_4) με παράγωγο :

$$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$$

- $f(p_1)=f(p_2)=0$, $f(p_2)=f(p_3)=0$ και $f(p_3)=f(p_4)=0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi_1 \in (p_1, p_2)$, $\xi_2 \in (p_2, p_3)$ και $\xi_3 \in (p_3, p_4)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$ και $f'(\xi_3) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$ ως πολυωνυμική,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στα (ξ_1, ξ_2) και (ξ_2, ξ_3) με παράγωγο :

$$f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$$

- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ και $f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $x_2 \in (\xi_2, \xi_3)$, τέτοια ώστε $f''(x_1) = 0$ και $f''(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και σαν δευτεροβάθμια έχει το πολύ δύο ρίζες, συνεπώς έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Μία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο διαφορετικές ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι θετική, έτσι έχουμε :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (6\beta)^2 - 4 \cdot 12\alpha \cdot 2\gamma > 0 \Leftrightarrow 36\beta^2 - 96\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow 36\beta^2 > 96\alpha\gamma \Leftrightarrow 3\beta^2 > 8\alpha\gamma$$

1121. Έστω η εξίσωση $f(x) = \eta \mu x - e^{-x} = \frac{\eta \mu x \cdot e^x - 1}{e^x}$.

Αφού η εξίσωση $e^x \cdot \eta \mu x = 1$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f'(x) = \sigma \nu x + e^{-x}$$

- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άρα η εξίσωση :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma \nu x + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x \sigma \nu x + 1 = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

Το πολύ ν ρίζες

1122. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + 3x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η g έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 2x + 3$$

– $g(x_1) = g(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 2\xi + 3 = 0$$

Άτοπο από δεδομένα, άρα **η εξίσωση :**

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 3x - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 3x + \alpha$$

έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

1123. Έστω ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε τουλάχιστον δύο σημεία με τετμημένες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έτσι θα είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση $f^2(x) - e^{f(x)} - f(x) = x^3 + e^x$ και έχουμε :

$$2f(x) \cdot f'(x) - e^{f(x)} \cdot f'(x) - f'(x) = 3x^2 + e^x \quad \xrightarrow{x=\xi}$$

$$2f(\xi) \cdot f'(\xi) - e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) - f'(\xi) = 3\xi^2 + e^\xi \quad \xrightarrow{f'(\xi)=0} \quad 3\xi^2 + e^\xi = 0$$

Άτοπο αφού $3\xi^2 + e^\xi > 0$

Άρα **η C_f τέμνει τον $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.**

1124. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - \alpha x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και στο $[x_2, x_3]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και στο (x_2, x_3) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x + 2x - \alpha$$

$$- f(x_1) = f(x_2) = 0 \text{ και } f(x_2) = f(x_3) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Έτσι έχουμε :

$$- \text{η } f' \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [\xi_1, \xi_2],$$

$$- \text{η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (\xi_1, \xi_2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$f''(x) = e^x + 2$$

$$- f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε :

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi + 2 = 0$$

Άτοπο αφού $e^\xi + 2 > 0$.

Άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + x^2 - \alpha x - \beta = 0 \Leftrightarrow e^x + x^2 = \alpha x + \beta$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1125. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Έχουμε :

$$- \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } [x_1, x_2] \text{ και στο } [x_2, x_3] \text{ ως πολυωνυμική,}$$

$$- \text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (x_1, x_2) \text{ και στο } (x_2, x_3) \text{ με παράγωγο :}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 12\alpha^2 x + \beta$$

$$- f(x_1) = f(x_2) = 0 \text{ και } f(x_2) = f(x_3) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Έτσι έχουμε :

$$- \text{η } f' \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [\xi_1, \xi_2] \text{ ως πολυωνυμική,}$$

$$- \text{η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (\xi_1, \xi_2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 12\alpha^2 = 12(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

$$- f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε :

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 12(\xi^2 + \alpha\xi + \alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \xi^2 + \alpha\xi + \alpha^2 = 0$$

Είναι $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2 < 0$, άρα $\xi^2 + \alpha\xi + \alpha^2 > 0$.

Καταλήξαμε σε άτοπο άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1126. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - x - 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και στο $[x_2, x_3]$ ως πολωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και στο (x_2, x_3) με παράγωγο :

$$f'(x) = 4x^3 - 3\alpha x^2 + 2\beta x - 1$$

- $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και $f(x_2) = f(x_3) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολωνυμική,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο :

$$f''(x) = 12x^2 - 6\alpha x + 2\beta$$

- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε :

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 12\xi^2 - 6\alpha\xi + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 6\xi^2 - 3\alpha\xi + \beta = 0$$

Είναι $\Delta = (-3\alpha)^2 - 24\beta = 9\alpha^2 - 24\beta = 3(3\alpha^2 - 8\beta) < 0$, άρα $6\xi^2 - 3\alpha\xi + \beta > 0$.

Καταλήξαμε σε άτοπο άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 = x + 1$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1127. Αφού η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 3x + 1$, τότε θα ισχύει $f''(x) \neq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{3x^2}{2} - 7x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η g έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τέτοια ώστε $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και στο $[x_2, x_3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,

- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και στο (x_2, x_3) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 3x - 7$$

- $g(x_1) = g(x_2) = 0$ και $g(x_2) = g(x_3) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η g' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$,
- η g' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο :

$$g''(x) = f''(x) - 3$$

- $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 3$$

Άτοπο αφού $f''(x) \neq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η **εξίσωση** :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{3x^2}{2} - 7x + \lambda = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 7x - \lambda$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1128. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x}{e^x}$.

Έστω ότι η g έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τέτοια ώστε $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και στο $[x_2, x_3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και στο (x_2, x_3) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = f'(x) - \frac{1-x}{e^x}$$

- $g(x_1) = g(x_2) = 0$ και $g(x_2) = g(x_3) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η g' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$,
- η g' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο :

$$g''(x) = f''(x) - \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = f''(x) + \frac{2-x}{e^x}$$

$$- \quad g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + \frac{2-\xi}{e^\xi} = 0 \Leftrightarrow f''(\xi)e^\xi + 2 - \xi = 0 \Leftrightarrow e^\xi f''(\xi) = \xi - 2$$

Άτοπο αφού $e^x f''(x) \neq x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x}$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1129. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x^2 - \alpha x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει τουλάχιστον τέσσερις ρίζες $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ και $[x_3, x_4]$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, στο $[x_2, x_3]$ και στο $[x_3, x_4]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , στο (x_2, x_3) και στο (x_3, x_4) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x - 2x - \alpha$$
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $f(x_2) = f(x_3) = 0$ και $f(x_3) = f(x_4) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ και $\xi_3 \in (x_3, x_4)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$ και $f'(\xi_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και στο $[\xi_2, \xi_3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και στο (ξ_2, ξ_3) με παράγωγο :

$$f''(x) = e^x - 2$$
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ και $f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\xi_2, \xi_3)$, τέτοιο ώστε $f''(\rho_1) = 0$ και $f''(\rho_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f'' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f'' είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$,
- η f'' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο :

$$f'''(x) = e^x$$

$$- f''(\rho_1) = f''(\rho_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε :

$$f'''(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi = 0$$

Ατοπο αφού $e^\xi > 0$, συνεπώς η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x^2 - \alpha x - \beta = 0 \Leftrightarrow e^x - x^2 = \alpha x + \beta$$

έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

1130. Έστω ότι η C_f της $f(x) = (\alpha^2 + 1)x^4 + 2(\alpha + \beta)x^3 + 3(\beta^2 + 1)x^2 + \alpha\beta x - 1$ έχει τρεις εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους σε σημεία της με τετμημένες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$. Έτσι θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την $f'(x) = 4(\alpha^2 + 1)x^3 + 6(\alpha + \beta)x^2 + 6(\beta^2 + 1)x + \alpha\beta$ στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και στο $[x_2, x_3]$ ως πολυωνυμική,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και στο (x_2, x_3) με παράγωγο :

$$f''(x) = 12(\alpha^2 + 1)x^2 + 12(\alpha + \beta)x + 6(\beta^2 + 1)$$

- $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ και $f'(x_2) = f'(x_3) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και σαν δευτεροβάθμια έχει το πολύ δύο ρίζες, συνεπώς έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Μία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο διαφορετικές ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι θετική, έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow (12(\alpha + \beta))^2 - 4 \cdot 12(\alpha^2 + 1) \cdot 6(\beta^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow \\ &12^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - 24 \cdot 12(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow \\ &12(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - 24(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \\ &2\alpha\beta - 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow \\ &(\alpha - \beta)^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 2 < 0 \end{aligned}$$

Ατοπο αφού $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ και $2\alpha^2\beta^2 + 2 > 0$.

Άρα η C_f δεν μπορεί να έχει τρεις εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους.

1131. i. Έστω ότι η f δεν είναι 1-1, άρα θα υπάρχει $x_1 \neq x_2$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,
- $f(x_1) = f(x_2)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Αποπο αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα **η f είναι 1-1**.

ii. Στη δοθείσα σχέση $f(x) + f(4-x) = 0$, θέτοντας όπου x το 2 παίρνουμε :

$$f(2) + f(2) = 0 \Leftrightarrow 2f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$$

Έτσι έχουμε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 2$$

1132. Είναι :

$$g(\alpha) = -f(\alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 0,$$

$$g(\gamma) = f(\gamma)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) - f(\gamma)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 0 \text{ και}$$

$$g(\beta) = -f(\beta)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 0$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και στο $[\gamma, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, γ) και στο (γ, β) ,
- $g(\alpha) = g(\gamma)$ και $g(\gamma) = g(\beta)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα**

$\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και **τουλάχιστον ένα** $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Έχουμε :

- η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$,
- η g' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) ,
- $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$.

ii. Έστω ότι υπάρχει $\delta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\delta) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[\alpha, \delta]$ και $[\delta, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \delta]$ και στο $[\delta, \beta]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, δ) και στο (δ, β) ,

$$- f(\alpha)=f(\delta)=0 \text{ και } f(\delta)=f(\beta)=0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (\alpha, \delta)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\delta, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\rho_1) = 0$ και $f'(\rho_2) = 0$. Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ,
- $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Άτοπο αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, άρα **$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$** .

Ακριβώς ν ρίζες

1133. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha^2 + 1)x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 1 - \alpha + \alpha^2 + 1 - 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 > 0$, αφού $\Delta = -3 < 0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_2 με $x_1 < x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας).

Έτσι θα είναι $f(x_2) = 0$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 1$$
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Όμως είναι $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 1 > 0$, αφού :

$$\Delta = (-2\alpha)^2 - 12(\alpha^2 + 1) = 4\alpha^2 - 12\alpha^2 - 12 = -8\alpha^2 - 12 < 0$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα **η εξίσωση :**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \alpha x^2 + (\alpha^2 + 1)x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - \alpha x^2 + (\alpha^2 + 1)x = 1$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - \eta \mu^2 x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με $f(0) = -1 < 0$ και $f(\pi) = \pi^2 + \pi - 1 > 0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(\pi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_2 με $x_1 < x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας).

Έτσι θα είναι $f(x_2) = 0$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f'(x) = 2x + 1 - \eta\mu 2x = 2x + 1 - \eta\mu 2x$$

- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Όμως είναι $f'(x) = 2x + 1 - \eta\mu 2x > 0$, αφού :

$$(\eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu 2x \geq 0) \text{ και } (x > 0 \Leftrightarrow 2x > 0)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα η **εξίσωση** :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - \eta\mu^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = \eta\mu^2 x + 1$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2\sin x - 2 + x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$. Η f λοιπόν έχει μία ρίζα στο $[0, \pi]$, την $x_1 = 0$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_2 με $x_2 > 0$. Έτσι θα είναι $f(x_2) = 0$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0, x_2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x_2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = -2\eta\mu x + 2x$$

- $f(0) = f(x_2) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x_2) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu \xi + 2\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \xi = \xi$$

Άτοπο αφού $\xi \in (0, \pi)$. (η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$)

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα η **εξίσωση** :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 2 - x^2$$

έχει μοναδική ρίζα στο $[0, \pi]$.

1134. Έχουμε $f(0) = \beta > 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + ax + \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$, άρα υπάρχει αριθμός κ κοντά στο $-\infty$ τέτοιος ώστε $f(\kappa) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa, 0]$ και ισχύει $f(\kappa) \cdot f(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\kappa, 0) \subseteq (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_2 με $x_1 < x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας).

Έτσι θα είναι $f(x_2) = 0$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 + \alpha$$

$$- f(x_1) = f(x_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Όμως είναι $f'(x) = 3x^2 + \alpha > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, αφού $\alpha > 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα είναι αρνητική αφού $x_1 \in (-\infty, 0)$.

1135. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^v + \alpha^v - (x + \alpha)^v$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$. Η f λοιπόν έχει μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x_1 = 0$. Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_2 με $x_2 > 0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $f(x_2) = 0$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0, x_2]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x_2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = vx^{v-1} - v(x + \alpha)^{v-1}$$

$$- f(0) = f(x_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow v\xi^{v-1} - v(\xi + \alpha)^{v-1} = 0 \Leftrightarrow \xi^{v-1} - (\xi + \alpha)^{v-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi^{v-1} = (\xi + \alpha)^{v-1} \begin{matrix} \text{v άρτιος} \\ \Leftrightarrow \\ \text{v-1 περιττός} \end{matrix} \xi = \xi + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Άτοπο αφού $\alpha \neq 0$, άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^v + \alpha^v - (x + \alpha)^v = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

1136. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 2016)^{2016} - x^{2016} - 2016^{2016}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$. Η f λοιπόν έχει μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x_1 = 0$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_2 με $x_2 > 0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $f(x_2) = 0$.

Έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0, x_2]$ ως πολυωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x_2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 2016(x - 2016)^{2015} - 2016x^{2015}$$

$$- f(0) = f(x_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2016(\xi - 2016)^{2015} - 2016 \cdot \xi^{2015} = 0 \Leftrightarrow (\xi - 2016)^{2015} - \xi^{2015} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\xi - 2016)^{2015} = \xi^{2015} \Leftrightarrow \xi - 2016 = \xi \Leftrightarrow 2016 = 0$$

Άτοπο, άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2016)^{2016} - x^{2016} - 2016^{2016} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2016)^{2016} = x^{2016} + 2016^{2016}$$

έχει μία μόνο λύση στο $\mathbb{R}$.

1137. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x+5)^{2015} - x^{2015} - 2^{2015} - 3^{2015}$ η οποία είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική. Παρατηρούμε πως :

$$f(-3) = 2^{2015} - (-3)^{2015} - 2^{2015} - 3^{2015} = 3^{2015} - 3^{2015} = 0 \text{ και}$$

$$f(-2) = 3^{2015} - (-2)^{2015} - 2^{2015} - 3^{2015} = 2^{2015} - 2^{2015} = 0$$

Η f λοιπόν έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_0 με $x_0 \in (-3, -2)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $f(x_0) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[-3, x_0]$ και $[x_0, -2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[-3, x_0]$ και στο $[x_0, -2]$ ως πολωνυμική,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3, x_0)$ και στο $(x_0, -2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 2015(x+5)^{2014} - 2015x^{2014}$$

- $f(-3) = f(x_0)$ και $f(x_0) = f(-2)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_1 \in (-3, x_0) \subseteq (-3, -2)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, -2) \subseteq (-3, -2)$, τέτοια ώστε

$f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολωνυμική,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f''(x) = 2015 \cdot 2014(x+5)^{2013} - 2015 \cdot 2014x^{2013}$$

- $f'(x_1) = f'(x_2)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-3, -2)$, τέτοιο ώστε :

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2015 \cdot 2014(\xi+5)^{2013} - 2015 \cdot 2014\xi^{2013} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\xi+5)^{2013} - \xi^{2013} = 0 \Leftrightarrow (\xi+5)^{2013} = \xi^{2013} \Leftrightarrow \xi+5 = \xi \Leftrightarrow 5 = 0$$

Άτοπο, άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+5)^{2015} - x^{2015} - 2^{2015} - 3^{2015} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+5)^{2015} = x^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015}$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

1138. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 5^x - 4x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε

πώς $f(0)=0$ και $f(1)=0$.

Η f λοιπόν έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_0 με $x_0 \in (0,1)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $f(x_0)=0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

Έτσι έχουμε :

- η f είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ και στο $[x_0, 1]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$ και στο $(x_0, 1)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 5^x \ln 5 - 4$$

- $f(0)=f(x_0)$ και $f(x_0)=f(1)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, x_0) \subseteq (0, 1)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, 1) \subseteq (0, 1)$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο :

$$f''(x) = 5^x \ln^2 5$$

- $f'(x_1)=f'(x_2)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Όμως $f''(x) = 5^x \ln^2 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f''(\xi) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα η εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 4x + 1$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

1139. Οι C_f και C_g τέμνονται όταν :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3^x = -x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 3^x + x^2 - 3x - 1 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 3^x + x^2 - 3x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε πως $h(0)=0$ και $h(1)=0$.

Η h λοιπόν έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η h έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_0 με $x_0 \in (0, 1)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $h(x_0)=0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

Έτσι έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ και στο $[x_0, 1]$,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$ και στο $(x_0, 1)$ με παράγωγο :

$$h'(x) = 3^x \ln 3 + 2x - 3$$

$$- h(0)=h(x_0) \text{ και } h(x_0)=h(1)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, x_0) \subseteq (0, 1)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, 1) \subseteq (0, 1)$, τέτοια ώστε $h'(x_1) = 0$ και $h'(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

$$- \text{η } h' \text{ είναι συνεχής στο } [x_1, x_2],$$

$$- \text{η } h' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (x_1, x_2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$h''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2$$

$$- h'(x_1) = h'(x_2)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$, τέτοιο ώστε $h''(\xi) = 0$.

Όμως $h''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $h''(\xi) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή οι C_f και C_g τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία.

1140. Οι C_f και C_g τέμνονται όταν :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x + \ln 2 = 2^{x-1} \ln 2 \Leftrightarrow \ln x + \ln 2 - 2^{x-1} \ln 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x + \ln 2 - 2^{x-1} \ln 2$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Για να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως $h(1) = 0$ και $h(2) = 0$.

Η h λοιπόν έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η h έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_0 με $x_0 \in (1, 2)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $h(x_0) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, 2]$.

Έτσι έχουμε :

$$- \text{η } h \text{ είναι συνεχής στο } [1, x_0] \text{ και στο } [x_0, 2],$$

$$- \text{η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (1, x_0) \text{ και στο } (x_0, 2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2^{x-1} \ln^2 2$$

$$- h(1) = h(x_0) \text{ και } h(x_0) = h(2)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1, x_0) \subseteq (1, 2)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, 2) \subseteq (1, 2)$, τέτοια ώστε $h'(x_1) = 0$ και $h'(x_2) = 0$ αντίστοιχα.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Έτσι έχουμε :

$$- \text{η } h' \text{ είναι συνεχής στο } [x_1, x_2],$$

$$- \text{η } h' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (x_1, x_2) \text{ με παράγωγο :}$$

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2^{x-1} \ln^3 2$$

$$- h'(x_1) = h'(x_2)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 2)$, τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

Όμως $h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2^{x-1} \ln^3 2 < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα $h'(\xi) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0, +\infty)$.

Δηλαδή οι C_f και C_g τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία.

1141. Οι C_f και C_g τέμνονται όταν :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x \eta \mu x + \sigma \nu \nu x \Leftrightarrow x^2 - x \eta \mu x - \sigma \nu \nu x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^2 - x \eta \mu x - \sigma \nu \nu x$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Είναι :

$$h(-\pi) = (-\pi)^2 - (-\pi) \eta \mu(-\pi) - \sigma \nu \nu(-\pi) = \pi^2 + \pi \cdot (-\eta \mu \pi)^0 - \sigma \nu \nu \pi = \pi^2 + 1 > 0$$

$$h(0) = -1 < 0$$

$$h(\pi) = \pi^2 - \pi \cdot \eta \mu \pi^0 - \sigma \nu \nu \pi = \pi^2 + 1 > 0$$

Θα εφαρμόσουμε Θ. Bolzano για την h στα διαστήματα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$.

Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$ και ισχύει $h(-\pi) \cdot h(0) < 0$ και

$h(0) \cdot h(\pi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_1 \in (-\pi, 0) \subseteq (-\pi, \pi)$ και $x_2 \in (0, \pi) \subseteq (-\pi, \pi)$ τέτοια ώστε $h(x_1) = 0$ και $h(x_2) = 0$.

Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$h'(x) = 2x - \eta \mu x - x \sigma \nu \nu x + \eta \mu x = 2x - x \sigma \nu \nu x = x(2 - \sigma \nu \nu x)$$

Έτσι έχουμε :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - \sigma \nu \nu x) = 0 \begin{matrix} 2 - \sigma \nu \nu x \neq 0 \\ 2 - \sigma \nu \nu x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \underline{x = 0}$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\pi$	0	π
x	-	$\bigcirc$	+
$2 - \sigma \nu \nu x$	+		+
h'	-	$\bigcirc$	+
h	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(-\pi, 0)$, άρα και 1-1, δηλαδή η

$x_1 \in (-\pi, 0)$ είναι μοναδική.

- Η h είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, \pi)$, άρα και 1-1, δηλαδή η

$x_2 \in (0, \pi)$ είναι μοναδική.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Άρα οι C_f και C_g έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία που έχουν τετμημένες $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.

- 1142.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x \ln x - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, e]$. Είναι $g(1) = f(1) - 1 < 0$ και $g(e) = f(e) > 0$, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$. Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(1) \cdot g(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_1 με $x_1 \in (1, x_0)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g(x_1) = 0$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_0) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) + \ln x$$
- $g(x_1) = g(x_0) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_0) \subseteq (1, e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Είναι :

$$f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e] \quad \text{και} \quad \ln x > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα :

$$f'(x) + \ln x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e]$$

Δηλαδή $g'(\xi) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε :

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \ln x_0 - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$$

- 1143.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Είναι $g(0) = f(0) > 0$, αφού $f(x) \in (0, 1)$ και $g(1) = f(1) - 1 < 0$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_1 με $x_1 \in (\xi, 1)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g(x_1) = 0$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\xi, x_1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ξ, x_1) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 1$$
- $g(\xi) = g(x_1) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_0 \in (\xi, x_1) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_0) = 0$.

Είναι :

$$|f'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < f'(x) < 1 \Rightarrow f'(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Δηλαδή $g'(\xi_0) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα **υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$$

1144. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Είναι $g(0) = f(0) \geq 0$ και $g(2) = f(2) - 4 \leq 0$, αφού $f(x) \in [0,4]$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(0) \cdot g(2) \leq 0$.

– Αν $g(0) \cdot g(2) < 0$ τότε σύμφωνα με το **Θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

– Αν $g(0) \cdot g(2) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(0) = 0$, δηλαδή το $\xi = 0$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(2) = 0$ δηλαδή το $\xi = 2$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_1 με $x_1 \in [0, \xi]$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g(x_1) = 0$.

Έχουμε :

– η g είναι συνεχής στο $[x_1, \xi]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

– η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, ξ) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

– $g(x_1) = g(\xi) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (x_1, \xi) \subseteq [0,2]$ τέτοιο ώστε $g'(\rho) = 0$.

Είναι :

$$f'(x) \neq 2 \Leftrightarrow f'(x) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow g'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,2]$$

Δηλαδή $g'(\rho) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα **υπάρχει μοναδικό $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε :**

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2\xi$$

1145. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x + \ln x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, e]$.

Είναι :

$g(1) = f(1) - 1 > 0$, αφού $2 < 2f(x) \Leftrightarrow 1 < f(x) \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$

και

$g(e) = f(e) - e + 1 < 0$, αφού :

$$2f(x) < 3 \Leftrightarrow f(x) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x) - e + 1 < \frac{3}{2} - e + 1 \Rightarrow$$

$$f(x) - e + 1 < \frac{5 - 2e}{2} < 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e]$$

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(1) \cdot g(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_1 με $x_1 \in (x_0, e)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g(x_1) = 0$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_0, x_1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, x_1) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 1 + \frac{1}{x}$$

- $g(x_0) = g(x_1) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, x_1) \subseteq (1, e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Είναι :

$$xf'(x) - x \neq -1 \Leftrightarrow_{\substack{x \neq 0 \\ x > 0}} f'(x) - 1 \neq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) - 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow g'(x) \neq 0$$

για κάθε $x \in (1, e)$

Δηλαδή $g'(\xi) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα **υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε :**

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 + \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 - \ln x_0$$

1146. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$.

Είναι $g(1) = f(1) - 1 > 0$ και $g(2) = f(2) - 2 < 0$, αφού $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_1 με $x_1 \in (x_0, 2)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g(x_1) = 0$.

Έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[x_0, x_1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, x_1) με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

- $g(x_0) = g(x_1) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, x_1) \subseteq (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Είναι :

$$f'(x) \neq 1 \Leftrightarrow f'(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow g'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 2)$$

Δηλαδή $g'(\xi) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα **υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε :**

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} xf'(x) + f(x) &= f'(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow xf'(x) - f'(x) + f(x) - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (x-1)f'(x) + (x-1)f(x) - 2x + 1 &= 0 \Leftrightarrow ((x-1)f(x))' - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ ((x-1)f(x) - x^2 + x)' &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x-1)f(x) - x^2 + x, x \in (1, 2)$.

Είναι :

$h(1) = 0$ και

$$h(x_0) = (x_0 - 1)f(x_0) - x_0^2 + x_0 = (x_0 - 1)x_0 - x_0^2 + x_0 = \cancel{x_0^2} - \cancel{x_0} - \cancel{x_0^2} + \cancel{x_0} = 0$$

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την h στο διάστημα $[1, x_0]$.

Έτσι έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, x_0)$ με παράγωγο :

$$h'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - 2x + 1$$

- $h(1) = h(x_0)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (1, x_0) \subseteq (1, 2)$, τέτοιο ώστε $h'(\rho) = 0$.

Άρα η **εξίσωση** :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + (x-1)f'(x) - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = f'(x) + 2x - 1$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

1147. Είναι :

$$f'(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - e^x - x)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x - x, x \in (0, 1)$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στο διάστημα $[0, 1]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) - e^x - 1$$

- $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1) - e - 1 = f(0) + e - e - 1 = f(0) - 1$, άρα $g(0) = g(1)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Έστω ότι η g' έχει και άλλη ρίζα, εστω την ρ με $\rho \in (0, \xi)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g'(\rho) = 0$.

Έχουμε :

- η g' είναι συνεχής στο $[\rho, \xi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η g' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ, ξ) με παράγωγο :

$$g''(x) = f''(x) - e^x$$

$$- \quad g'(\rho) = g'(\xi) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\rho, \xi) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

Είναι :

$$f''(x) \neq e^x \Leftrightarrow f''(x) - e^x \neq 0 \Leftrightarrow g''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή $g''(x_0) \neq 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, άρα **υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - e^\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = e^\xi + 1$$

1148. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - e^x$, $x \in (0, 1)$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στο διάστημα $[0, 1]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f''(x) - e^x$$

- $g(0) = f'(0) - 1 = 2 - 1 = 1$ και $g(1) = f'(1) - e = e + 1 - e = 1$, άρα $g(0) = g(1)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

Εστω ότι η g' έχει και άλλη ρίζα, εστω την ρ με $\rho \in (x_0, 1)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $g'(\rho) = 0$.

Έχουμε :

- η g' είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- η g' είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) με παράγωγο :

$$g''(x) = f'''(x) - e^x$$

- $g'(x_0) = g'(\rho) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, \rho) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'''(\xi) - e^\xi = 0 \Rightarrow f'''(\xi) = e^\xi > 0$$

Άτοπο, αφού $f'''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Άρα **υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :**

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f''(x_0) - e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow f''(x_0) = e^{x_0}$$

1149. i. Είναι :

$$xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (a, \beta)$.

Θα εφαρμόσουμε **Θ.Rolle** για την g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Έτσι έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = 0$, άρα $g(\alpha) = g(\beta)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

Άρα η εξίσωση :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = xf'(x) - f(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$.

Είναι $h(x_0) = 0$.

Έστω ότι η h έχει και άλλη ρίζα, εστω την x_1 με $x_1 \in (x_0, \beta)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έτσι θα είναι $h(x_1) = 0$.

Έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[x_0, x_1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, x_1) με παράγωγο :

$$h'(x) = xf''(x)$$

- $h(x_0) = h(x_1) = 0$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Rolle**, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, x_1) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 0 \quad \xi > 0$$

Άτοπο, αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Συνεπώς η ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ θα είναι μοναδική.

Υπαρξη ρίζας με άτοπο

1150. Έστω $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Είναι :

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε έχουμε :

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο :

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$- \quad h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = 0 \quad \text{και} \quad h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = 0, \quad \text{άρα } h(\alpha) = h(\beta).$$

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την h στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$$

Ατοπο αφού $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Άρα **υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.**

1151. i) Στη δοθείσα σχέση $(2x-1)f(x) \neq (x^2-x)f'(x)$ για $x=0$ έχουμε :

$$-f(0) \neq 0 \Leftrightarrow f(0) \neq 0$$

Όμοια για $x=1$ έχουμε $f(1) \neq 0$.

Άρα **$f(0)f(1) \neq 0$.**

ii) Έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Είναι :

$$(2x-1)f(x) = (x^2-x)f'(x) \Leftrightarrow (x^2-x)'f(x) - (x^2-x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-x)'f(x) - (x^2-x)f'(x)}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-x}{f(x)} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2-x}{f(x)}$, $x \in [0,1]$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{(2x-1)f(x) - (x^2-x)f'(x)}{f^2(x)}$$

- $g(0)=0$ και $g(1)=0$, άρα $g(0)=g(1)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2\xi-1)f(\xi) - (\xi^2-\xi)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow (2\xi-1)f(\xi) - (\xi^2-\xi)f'(\xi) = 0$$

Ατοπο αφού $(2x-1)f(x) \neq (x^2-x)f'(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή **η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.**

1152. i) Στη δοθείσα σχέση $f(x)\sin x \neq f'(x)\eta\mu x$ για $x=0$ έχουμε :

$$f(0)\sin 0 \neq f'(0)\eta\mu 0 \Leftrightarrow f(0) \neq 0$$

Όμοια για $x=\pi$ έχουμε :

$$f(\pi)\sin\pi \neq f'(\pi)\eta\mu\pi \Leftrightarrow -f(\pi) \neq 0 \Leftrightarrow f(\pi) \neq 0$$

Άρα **$f(0)f(\pi) \neq 0$** .

ii) Έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Είναι :

$$f(x) \cdot \sin x = f'(x) \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow (\eta\mu x)' \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\eta\mu x)' \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu x}{f(x)} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{f(x)}$, $x \in [0, \pi]$, οπότε έχουμε :

- η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{\sin x \cdot f(x) - \eta\mu x \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

- $g(0)=0$ και $g(\pi)=0$, άρα $g(0)=g(\pi)$.

Επομένως ισχύει το **Θ.Rolle** για την g στο $[0, \pi]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \xi \cdot f(\xi) - \eta\mu \xi \cdot f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow \sin \xi \cdot f(\xi) - \eta\mu \xi \cdot f'(\xi) = 0$$

Άτοπο αφού $f(x)\sin x \neq f'(x)\eta\mu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή **η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$** .