

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

1. ■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_1(x) = \frac{x^2+1}{x^2-6x+5} + \frac{e^x}{5-x+x^2}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^2-6x+5 \neq 0 \\ 5-x+x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-1) \neq 0 \\ x^2-x+5 \neq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ αφού } \Delta = -19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ και } x \neq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_1 είναι :

$$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{1, 5\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_2(x) = \frac{1-x^3}{x^3-x^2-14x+24} - \frac{\eta\mu x}{x^2+16}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^3-x^2-14x+24 \neq 0 \\ x^2+16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2)(x^2+x-12) \neq 0 \\ x^2 \neq -16, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Σχήμα Horner

1	-1	-14	24	2
	2	2	-24	
1	1	-12	0	

$$(x-2)(x-3)(x+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq 3 \text{ και } x \neq -4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_2 είναι :

$$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-4, 2, 3\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_3(x) = \frac{\sin x}{x^3+x^2-x-1} + \frac{2^x}{x^3+27}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^3+x^2-x-1 \neq 0 \\ x^3+27 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+1)-(x+1) \neq 0 \\ x^3 \neq -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(x+1) \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_3 είναι :

$$D_{f_3} = \mathbb{R} - \{-3, -1, 1\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_4(x) = \frac{|x-1|}{x^3-9x} + \frac{|x|-1}{x-x^4}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^3-9x \neq 0 \\ x-x^4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-9) \neq 0 \\ x(1-x^3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ 1-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \neq 9 \\ x^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_4 είναι :

$$D_{f_4} = \mathbb{R} - \{-3, 0, 1, 3\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_5(x) = \frac{x^3}{|x-3|-2} + \frac{|e^x-2|-1}{2+|x|}$ πρέπει :

$$\begin{cases} |x-3|-2 \neq 0 \\ 2+|x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| \neq 2 \\ |x| \neq -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \neq 2 \\ x-3 \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_5 είναι :

$$D_{f_5} = \mathbb{R} - \{1, 5\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_6(x) = \frac{|\eta\mu x|}{|7-2x|-1} - \frac{x^4}{|x^2-2x|+1}$ πρέπει :

$$\begin{cases} |7-2x|-1 \neq 0 \\ |x^2-2x|+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |7-2x| \neq 1 \\ |x^2-2x| \neq -1, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-2x \neq 1 \\ 7-2x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 6 \\ 2x \neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_6 είναι :

$$D_{f_6} = \mathbb{R} - \{3, 4\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_7(x) = \frac{1-\sin x}{e^x-2} + \frac{e^x+\eta\mu x}{1-e^x} - \frac{x}{e^x+2}$ πρέπει :

$$\begin{cases} e^x-2 \neq 0 \\ 1-e^x \neq 0 \\ e^x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \neq 2 \\ e^x \neq 1 \\ e^x \neq -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln e^x \neq \ln 2 \\ \ln e^x \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \ln 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_7 είναι :

$$D_{f_7} = \mathbb{R} - \{0, \ln 2\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_8(x) = \frac{e^{x+\eta\mu x}}{2^x-1} - \frac{2x}{1-2e^x} + \frac{x^5}{e^x+2^x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 2^x-1 \neq 0 \\ 1-2e^x \neq 0 \\ e^x+2^x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \neq 1 \\ e^x \neq \frac{1}{2} \\ e^x+2^x \neq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \neq 2^0 \\ \ln e^x \neq \ln 2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -\ln 2 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_8 είναι :

$$D_{f_8} = \mathbb{R} - \{-\ln 2, 0\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_9(x) = \frac{2x+\varepsilon\phi x}{2\sin 3x-1} + \frac{3}{\sin x-3}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 2\sin 3x-1 \neq 0 \\ \sin x-3 \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \text{ (λόγω της } \varepsilon\phi x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \neq \frac{1}{2} \\ \sin x \neq 3, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 3x \neq \sin \frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_9 είναι :

$$D_{f_9} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{10}(x) = \frac{e^x}{\eta\mu x \sin x} + \frac{5\sigma\phi x}{2 + \eta\mu x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \eta\mu x \sin x \neq 0 \\ 2 + \eta\mu x \neq 0 \\ \eta\mu x \neq 0 \text{ (λόγω της } \sigma\phi x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \eta\mu x \neq -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_{10} είναι :

$$D_{f_{10}} = \mathbb{R} - \left\{ k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{11}(x) = \frac{x+5}{\epsilon\phi x} + \frac{1}{2\eta\mu x + 1}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \epsilon\phi x \neq 0 \\ 2\eta\mu x + 1 \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \text{ (λόγω της } \epsilon\phi x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi x \neq \epsilon\phi 0 \\ \eta\mu x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \eta\mu x \neq -\eta\mu \frac{\pi}{6} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \eta\mu x \neq \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_{11} είναι :

$$D_{f_{11}} = \mathbb{R} - \left\{ k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. ■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_1(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{12-x-x^2}$ πρέπει :

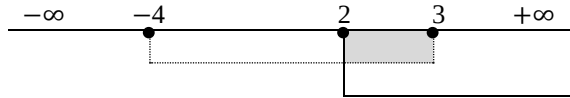
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 12-x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2+x-12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-3)(x+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -4 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

αφού :

η $x^2+x-12=0$ έχει ρίζες τις $x=-4, 3$, οπότε :

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
x^2+x-12	+	Φ	-	Φ	+

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_1 είναι :

$$D_{f_1} = [2, 3]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_2(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{16+x^2}}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^2-2x+2 \geq 0 \\ 16+x^2 \geq 0 \\ 3x^2-2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ 16+x^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > \frac{2}{3}$$

αφού :

η $x^2-2x+2=0$ έχει $\Delta=-4<0$, οπότε ισχύει $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

η $3x^2-2x-1=0$ έχει $\Delta=16$ με ρίζες $x=-\frac{1}{3}, 1$, οπότε :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$3x^2-2x-1$	+	Φ	-	Φ	+

Άρα το πεδίο ορισμού της f_2 είναι :

$$D_{f_2} = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_3(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-|x|}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 1-|x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ |x| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_3 είναι :

$$D_{f_3} = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_4(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3+x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x^3+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 9 \\ x(x^2+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 3 \\ x \neq 0 \\ x^2+1 \neq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_4 είναι :

$$D_{f_4} = [-3, 0) \cup (0, 3]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_5(x) = \frac{\ln(2x-x^2)}{\ln(x^2-1)}$ πρέπει :

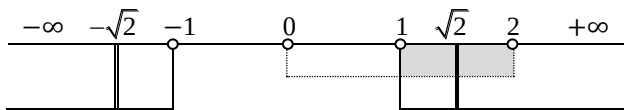
$$\begin{cases} 2x-x^2 > 0 \\ x^2-1 > 0 \\ \ln(x^2-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x) > 0 \\ x^2 > 1 \\ \ln(x^2-1) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ |x| > 1 \\ x^2-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x > 1 \text{ ή } x < -1 \\ x^2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x > 1 \text{ ή } x < -1 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

αφού :

η $2x-x^2=0$ έχει ρίζες τις $x=0, 2$, οπότε :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$2x-x^2$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_5 είναι :

$$D_{f_5} = (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_6(x) = \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-1} + \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{\ln(x-2)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x-2 > 0 \\ \ln(x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6 \leq 0 \\ x^2-3x-4 \leq 0 \\ x \neq 1 \\ x > 2 \\ \ln(x-2) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) \leq 0 \\ (x-4)(x+1) \leq 0 \\ x \neq 1 \\ x > 2 \\ x-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 4 \\ x \neq 1 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

αφού :

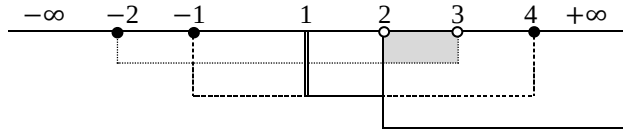
η $x^2-x-6=0$ έχει ρίζες τις $x=-2, 3$, οπότε :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	$\emptyset$	-	+

η $x^2 - 3x - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $x = -1, 4$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	+	$\emptyset$	-	+

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_6 είναι :

$$D_{f_6} = (2, 3)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_7(x) = \frac{\ln x^2}{\ln(x^3 + 1)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^3 + 1 > 0 \\ \ln(x^3 + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \text{ αφού είναι } x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x^3 > -1 \\ \ln(x^3 + 1) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x^3 + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_7 είναι :

$$D_{f_7} = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_8(x) = \frac{\ln(x^3 - 7x - 6)}{\ln(\sin x + 3)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^3 - 7x - 6 > 0 \\ \sin x + 3 > 0 \\ \ln(\sin x + 3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \text{ ή } x > 3 \\ \sin x > -3, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \ln(\sin x + 3) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2 < x < -1 \text{ ή } x > 3 \\ \sin x + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \text{ ή } x > 3 \\ \sin x + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2 < x < -1 \text{ ή } x > 3 \\ \sin x \neq -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < -1 \text{ ή } x > 3$$

αφού :

η $x^3 - 7x - 6 = 0$ γράφεται και :

$$(x+1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 3$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

Σχήμα Horner

1	0	-7	-6	-1
	-1	1	6	
1	-1	-6	0	

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$		
x+1	-	-	$\bigcirc$	+	+		
x^2-x-6	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+	
γινόμενο	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

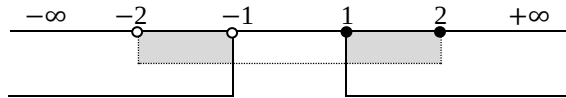
Άρα το πεδίο ορισμού της f_8 είναι :

$$D_{f_8} = (-2, -1) \cup (3, +\infty)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_9(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{2-x}{2+x} \geq 0 \\ x \neq -2 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)(2+x) \geq 0 \\ x \neq -2 \\ (x-1)(x+1) \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq -2 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \neq -2 \\ x^2 \geq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \neq -2 \\ |x| \geq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -2 \\ x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq 2 \\ x \geq 1 \text{ ή } x < -1 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_9 είναι :

$$D_{f_9} = (-2, -1) \cup [1, 2]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{10}(x) = \ln(x^2+x) + \ln \frac{x+3}{x-2}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^2+x > 0 \\ \frac{x+3}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0 \\ (x+3)(x-2) > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ ή } x > 0 \\ x < -3 \text{ ή } x > 2 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

αφού :

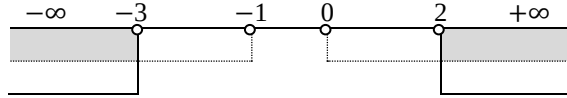
η $x^2+x=0$ έχει ρίζες τις $x=-1, 0$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$x^2 + x$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

η $(x+3)(x-2)=0$ έχει ρίζες τις $x=-3, 2$, οπότε :

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$(x+3)(x-2)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Επομένως είναι :



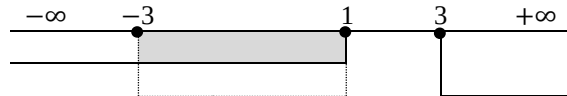
Άρα το πεδίο ορισμού της f_{10} είναι :

$$D_{f_{10}} = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{11}(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\sqrt{2-|x+1|}-\sqrt{|x|+3}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} |x-2|-1 \geq 0 \\ 2-|x+1| \geq 0 \\ |x|+3 \geq 0 \\ \sqrt{2-|x+1|}-\sqrt{|x|+3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \geq 1 \\ |x+1| \leq 2 \\ |x| \geq -3, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{2-|x+1|} \neq \sqrt{|x|+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 1 \text{ ή } x-2 \leq -1 \\ -2 \leq x+1 \leq 2 \\ 2-|x+1| \neq |x|+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \text{ ή } x \leq 1 \\ -3 \leq x \leq 1 \\ |x|+|x+1| \neq -1, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \text{ ή } x \leq 1 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



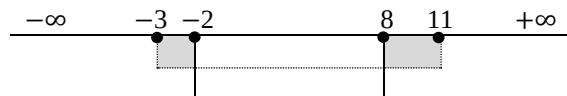
Άρα το πεδίο ορισμού της f_{11} είναι :

$$D_{f_{11}} = [-3, 1]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{12}(x) = \sqrt{|x-3|-5} + \sqrt{7-|x-4|} - \sqrt{4+|3x+2|}$ πρέπει :

$$\begin{cases} |x-3|-5 \geq 0 \\ 7-|x-4| \geq 0 \\ 4+|3x+2| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| \geq 5 \\ |x-4| \leq 7 \\ |3x+2| \geq -4, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 5 \text{ ή } x-3 \leq -5 \\ -7 \leq x-4 \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \text{ ή } x \leq -2 \\ -3 \leq x \leq 11 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{12} είναι :

$$D_{f_{12}} = [-3, -2] \cup [8, 11]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{13}(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{\sqrt{e^{2x} + 1}} + \sqrt{2 - e^x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} e^x - 1 > 0 \\ e^{2x} + 1 > 0 \\ 2 - e^x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 1 \\ e^{2x} > -1, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ e^x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > e^0 \\ \ln e^x \leq \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \ln 2 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_{13} είναι :

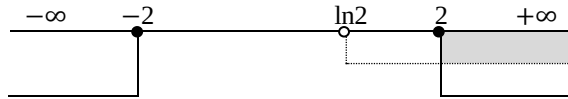
$$D_{f_{13}} = (0, \ln 2]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{14}(x) = \sqrt{e^{x^2-4} - 1} - \frac{\ln(e^x - 2)}{\sqrt{2 + e^{x^3}}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} e^{x^2-4} - 1 \geq 0 \\ e^x - 2 > 0 \\ 2 + e^{x^3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2-4} \geq 1 \\ e^x > 2 \\ e^{x^3} > -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2-4} \geq e^0 \\ \ln e^x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 2 \\ x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \text{ ή } x \leq -2 \\ x > \ln 2 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



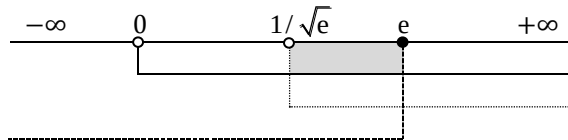
Άρα το πεδίο ορισμού της f_{14} είναι :

$$D_{f_{14}} = [2, +\infty)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{15}(x) = \sqrt{1 - \ln x} + \ln(1 + 2 \ln x)$ πρέπει :

$$\begin{cases} 1 - \ln x \geq 0 \\ 1 + 2 \ln x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq 1 \\ \ln x > -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq \ln e \\ \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq e \\ x > \frac{1}{\sqrt{e}} \\ x > 0 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{15} είναι :

$$D_{f_{15}} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, e \right]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{16}(x) = \sqrt{\ln \frac{3+x}{3-x} + \ln(\ln(2-x))}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{3+x}{3-x} > 0 \\ 3-x \neq 0 \\ \ln(2-x) > 0 \\ 2-x > 0 \\ \ln \frac{3+x}{3-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+x)(3-x) > 0 \\ x \neq 3 \\ \ln(2-x) > \ln 1 \\ x < 2 \\ \ln \frac{3+x}{3-x} \geq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x \neq 3 \\ 2-x > 1 \\ x < 2 \\ \frac{3+x}{3-x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 9 \\ x \neq 3 \\ 2-x > 1 \\ x < 2 \\ \frac{3+x}{3-x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

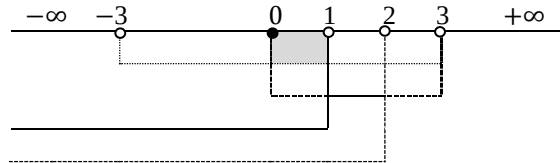
$$\begin{cases} |x| < 3 \\ x \neq 3 \\ x < 1 \\ x < 2 \\ \frac{3+x-x}{3-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x \neq 3 \\ x < 1 \\ x < 2 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

αφού :

η $2x(3-x)=0$ έχει ρίζες τις $x=0, 3$, οπότε :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$2x(3-x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{16} είναι :

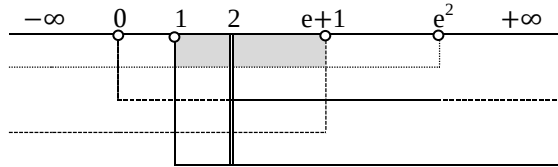
$$D_{f_{16}} = [0, 1]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{17}(x) = \frac{\ln(2-\ln x)}{\ln(1-\ln(x-1))}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 2-\ln x > 0 \\ x > 0 \\ 1-\ln(x-1) > 0 \\ x-1 > 0 \\ \ln(1-\ln(x-1)) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x < 2 \\ x > 0 \\ \ln(x-1) < 1 \\ x > 1 \\ \ln(1-\ln(x-1)) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x < \ln e^2 \\ x > 0 \\ \ln(x-1) < \ln e \\ x > 1 \\ 1-\ln(x-1) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < e^2 \\ x > 0 \\ x-1 < e \\ x > 1 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < e^2 \\ x > 0 \\ x < e+1 \\ x > 1 \\ \ln(x-1) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < e^2 \\ x > 0 \\ x < e+1 \\ x > 1 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < e^2 \\ x > 0 \\ x < e+1 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{17} είναι :

$$D_{f_{17}} = (1, 2) \cup (2, e+1)$$

■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{18}(x) = \sqrt{3e^{2x} - 5e^x - 2} + \frac{1}{\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 3e^{2x} - 5e^x - 2 \geq 0 \\ \ln^2 x - 2 \ln x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\omega^2 - 5\omega - 2 \geq 0 \\ y^2 - 2y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \leq -\frac{1}{3} \text{ ή } \omega \geq 2 \\ y < 0 \text{ ή } y > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = e^x \\ y = \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x \leq -\frac{1}{3} \text{ ή } e^x \geq 2 \\ \ln x < 0 \text{ ή } \ln x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln e^x \geq \ln 2 \\ \ln x < \ln 1 \text{ ή } \ln x > \ln e^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \ln 2 \\ x < 1 \text{ ή } x > e^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

αφού :

η $3\omega^2 - 5\omega - 2 = 0$ έχει $\Delta = 49$ με ρίζες $\omega = -\frac{1}{3}, 2$, οπότε :

ω	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$	
$3\omega^2-5\omega-2$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

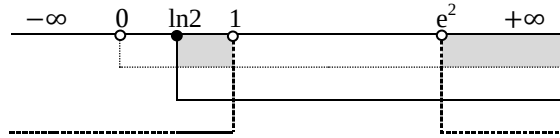
η $y^2 - 2y = 0$ έχει ρίζες τις $y = 0, 2$, οπότε :

y	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y^2 - 2y$	+	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+

Είναι :

$$2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \ln 2 < 1$$

Επομένως :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{18} είναι :

$$D_{f_{18}} = [\ln 2, 1) \cup (e^2, +\infty)$$

■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{19}(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right) \geq 0 \\ \frac{5x-x^2}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right) \geq \ln 1 \\ 5x-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-x^2 \geq 4 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \leq 0 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) \leq 0 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 < x < 5 \end{cases}$$

αφού :

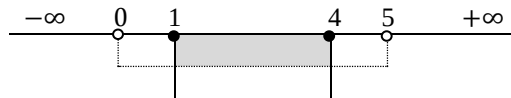
η $x^2-5x+4=0$ έχει ρίζες τις $x=1, 4$, οπότε :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
x^2-5x+4	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

η $5x-x^2=0$ έχει ρίζες τις $x=0, 5$, οπότε :

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$	
$5x-x^2$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{19} είναι :

$$D_{f_{19}} = [1, 4]$$

■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_{20}(x) = \frac{x^4}{2 + \ln\left(\frac{1}{x}-1\right)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} 2 + \ln\left(\frac{1}{x}-1\right) \neq 0 \\ x \neq 0 \\ \frac{1}{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x}-1\right) \neq -2 \\ x \neq 0 \\ \frac{1-x}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x}-1\right) \neq \ln e^{-2} \\ x \neq 0 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

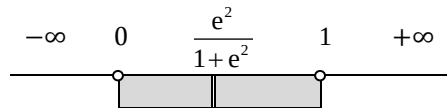
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - 1 \neq \frac{1}{e^2} \\ x \neq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \neq \frac{1+e^2}{e^2} \\ x \neq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{e^2}{1+e^2} \\ x \neq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

αφού :

η $x(1-x)=0$ έχει ρίζες τις $x=0, 1$, οπότε :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x(1-x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_{20} είναι :

$$D_{f_{20}} = \left(0, \frac{e^2}{1+e^2}\right) \cup \left(\frac{e^2}{1+e^2}, 1\right)$$

3. ■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_1(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(e^x - 1) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$$

αφού είναι :

$$x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } (e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}})$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων και έχουμε :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	$\bigcirc$	+
$e^x - 1$	-	$\bigcirc$	+
$x(e^x - 1)$	+	$\bigcirc$	+

Είναι :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_1 είναι :

$$D_{f_1} = \mathbb{R}^*$$

■ Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_2(x) = \sqrt{\frac{2-x}{\ln x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{2-x}{\ln x} \geq 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (2-x)\ln x \geq 0 \\ \ln x \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

αφού είναι :

$$(2-x)\ln x = 0 \Leftrightarrow (2-x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}) \text{ ή } (\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}})$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων και έχουμε :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$2-x$	+	+	0	-
$\ln x$	-	0	+	+
$(2-x)\ln x$	-	0	+	-

Είναι :

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f_2 είναι :

$$D_{f_2} = (1, 2]$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_3(x) = \ln\left(\frac{x-1}{\ln x - 1}\right)$ πρέπει :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x-1}{\ln x - 1} > 0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(\ln x - 1) > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \text{ ή } x > e \\ \ln x \neq \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \text{ ή } x > e \\ x \neq e \end{cases}$$

αφού είναι :

$$(x-1)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } (\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow \underline{\underline{x=e}})$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων και έχουμε :

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$(x-1)(\ln x - 1)$	+	0	-	+

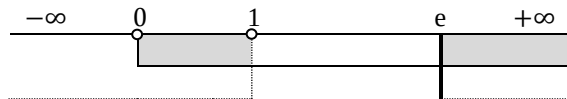
Είναι :

$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$$

και

$$\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$$

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f_3 είναι :

$$D_{f_3} = (0, 1) \cup (e, +\infty)$$

- Για να ορίζεται η συνάρτηση $f_4(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{\ln(1-\sin x)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-x > 0 \\ 1-\sin x > 0 \\ \ln(1-\sin x) \neq 0 \\ x^2+1 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} > x, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \sin x < 1 \\ \ln(1-\sin x) \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ 1 - \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \sin 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

αφού :

Για την επίλυση του $\sqrt{x^2+1} > x$, παίρνουμε περιπτώσεις :

αν $x < 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

αν $x > 0$ τότε έχουμε :

$$\sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

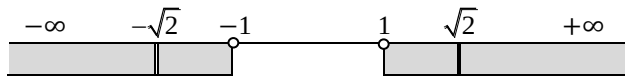
Άρα το πεδίο ορισμού της f_4 είναι :

$$D_{f_4} = \mathbb{R} - \left\{ 2k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 4. i.** Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-1)}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \ln(x^2-1) \neq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2-1) \neq \ln 1 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \neq 1 \\ |x| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 2 \\ x > 1 \text{ ή } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{2} \\ x > 1 \text{ ή } x < -1 \end{cases}$$

Επομένως είναι :



Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι :

$$D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

- ii.** Για να ανήκει ο αριθμός 1 στο σύνολο τιμών της f πρέπει η εξίσωση $f(x)=1$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της f . Έτσι έχουμε :

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x^2-1)}=1 \Leftrightarrow \ln(x^2-1)=1 \Leftrightarrow \ln(x^2-1)=\ln e \Leftrightarrow$$

$$x^2-1=e \Leftrightarrow x^2=e+1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e+1} \in D_f$$

Αφού $\pm\sqrt{e+1} \in D_f$ τότε ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

- 5. i.** Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-5x+6}$ πρέπει :

$$x^2-5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι :

$$D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

- ii.** Για να ανήκει ο αριθμός 1 στο σύνολο τιμών της f πρέπει η εξίσωση $f(x)=1$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της f . Έτσι έχουμε :

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+3=\cancel{x^2}-5x+6 \Leftrightarrow 5x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5} \in D_f$$

Αφού $\frac{3}{5} \in D_f$ τότε ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

iii. Για να ανήκει ο αριθμός -1 στο σύνολο τιμών της f πρέπει η εξίσωση $f(x)=-1$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της f . Έτσι έχουμε :

$$f(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow x^2+3=-x^2+5x-6 \Leftrightarrow 2x^2-5x+9=0$$

Είναι $\Delta=25-72=-47<0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Συνεπώς δεν υπάρχει $x \in D_f$ τέτοιο ώστε να δίνει $f(x)=-1$.

Άρα ο αριθμός -1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

6. i. Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\ln \frac{1-x}{1+x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1+x) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι :

$$D_f = (-1, 1)$$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right) &= \ln \frac{1-\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}} = \ln \frac{\frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2}}{\frac{1+x_1x_2+x_1+x_2}{1+x_1x_2}} = \ln \frac{1-x_1-x_2(1-x_1)}{1+x_1+x_2(1+x_1)} = \\ &= \ln \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} = \ln \frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} = \ln \frac{1-x_1}{1+x_1} + \ln \frac{1-x_2}{1+x_2} = \\ &= f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right) = f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

7. Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{2\sin^2x-1}{x^2+(2\lambda+1)x+3\lambda}$ είναι το $\mathbb{R}$, τότε

πρέπει να είναι $x^2+(2\lambda+1)x+3\lambda \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό ισχύει μόνο όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική.

Είναι :

$$\Delta = (2\lambda+1)^2 - 12\lambda = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 12\lambda = 4\lambda^2 - 8\lambda + 1$$

Για την επίλυση της ανίσωσης $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda + 1 < 0$ βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $4\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = 48$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Οπότε είναι $\lambda \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8. Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x}{\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda}$ είναι το $\mathbb{R}$, τότε

πρέπει να είναι $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό ισχύει μόνο όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική.

Είναι :

$$\Delta = (\lambda - 3)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda^2 = -3\lambda^2 - 6\lambda + 9$$

Για την επίλυση της ανίσωσης $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 6\lambda + 9 < 0$ βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $-3\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$:

$$-3\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 1$$

οπότε :

λ	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$-3\lambda^2-6\lambda+9$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

Συνεπώς είναι $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

9. Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4\lambda x^2 + 4(\lambda + 2)x + 2\lambda + 1}$ είναι το $\mathbb{R}$, τότε πρέπει να είναι $4\lambda x^2 + 4(\lambda + 2)x + 2\lambda + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό ισχύει μόνο όταν $\Delta \leq 0$ και $4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$.

Είναι :

$$\Delta = 16(\lambda + 2)^2 - 16\lambda(2\lambda + 1) = 16(\lambda^2 + 4\lambda + 4 - 2\lambda^2 - \lambda) = 16(-\lambda^2 + 3\lambda + 4)$$

Για την επίλυση της ανίσωσης $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 16(-\lambda^2 + 3\lambda + 4) \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 3\lambda + 4 \leq 0$

βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $-\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$:

$$-\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -1$$

οπότε :

λ	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$-\lambda^2+3\lambda+4$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

Η λύση της ανίσωσης είναι $\lambda \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$.

Συνεπώς είναι $\lambda \in [4, +\infty)$.

10. Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(kx^2 + (k - 3)x + 1)$ είναι το $\mathbb{R}$, τότε πρέπει να είναι $kx^2 + (k - 3)x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό ισχύει μόνο όταν $\Delta < 0$ και $k > 0$.

Είναι :

$$\Delta = (\kappa - 3)^2 - 4\kappa = \kappa^2 - 6\kappa + 9 - 4\kappa = \kappa^2 - 10\kappa + 9$$

Για την επίλυση της ανίσωσης $\Delta < 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 10\kappa + 9 < 0$ βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $\kappa^2 - 10\kappa + 9 = 0$:

$$\kappa^2 - 10\kappa + 9 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 9)(\kappa - 1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 9 \text{ ή } \kappa = 1$$

οπότε :

κ	$-\infty$	1	9	$+\infty$	
$\kappa^2-10\kappa+9$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Η λύση της ανίσωσης είναι $\kappa \in (1, 9)$.

Συνεπώς είναι $\boxed{\kappa \in (1, 9)}$.

11. i. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{e^x + 1} - 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ αφού $e^x + 1 > 0$.

Για $y = f(x)$ έχουμε :

$$y = \sqrt{e^x + 1} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{e^x + 1} = y + 3, \text{ απ' όπου πρέπει } y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{y \geq -3}}$$

και $e^x + 1 = (y + 3)^2 \Leftrightarrow e^x + 1 = y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow e^x = y^2 + 6y + 8$, απ' όπου πρέπει $y^2 + 6y + 8 > 0$.

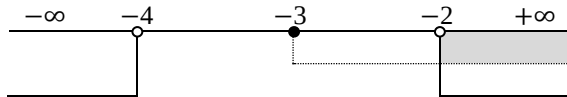
Η $y^2 + 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow (y + 2)(y + 4) = 0$ έχει ρίζες τις $x = -4, -2$, οπότε :

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$	
y^2+6y+8	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Είναι $\underline{\underline{y \in (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)}}$.

Άρα : $e^x = y^2 + 6y + 8 \Leftrightarrow x = \ln(y^2 + 6y + 8)$ με $x \in \mathbb{R}$

Συναληθεύοντας παίρνουμε :



Τελικά είναι $y > -2$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι :

$$\boxed{f(A) = (-2, +\infty)}$$

ii. Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-2, +\infty)$ και το $1 \in (-2, +\infty)$, είναι $1 \in f(A)$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει **τουλάχιστον μία λύση**.

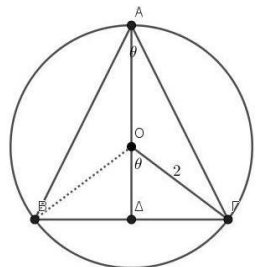
iii. Είναι $\kappa^2 \geq 0 > -2$, δηλαδή $\kappa^2 \in f(A)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa^2$ έχει **τουλάχιστον μία λύση**.

12. i. Το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο :

$$E = \frac{1}{2} (B\Gamma) \cdot (A\Delta)$$

Η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, συνεπώς η αντίστοιχη επίκεντρη, που είναι η $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$, είναι ίση με το διπλάσιο της $\widehat{B\Delta\Gamma}$, δηλαδή :

$$\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 2\theta$$



Το τρίγωνο ΒΟΓ όμως είναι ισοσκελές με ΒΟ=ΓΟ=2, οπότε η γωνία $\hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Gamma}$ είναι το μισό της $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$, δηλαδή :

$$\hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Gamma} = \theta$$

Έτσι στο τρίγωνο ΔΟΓ έχουμε :

$$\eta\mu\theta = \frac{(\Delta\Gamma)}{(\text{ΟΓ})} = \frac{(\Delta\Gamma)}{2} \Rightarrow (\Delta\Gamma) = 2\eta\mu\theta \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(\text{ΟΔ})}{(\text{ΟΓ})} = \frac{(\text{ΟΔ})}{2} \Rightarrow (\text{ΟΔ}) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

Έτσι :

$$(\text{ΒΓ}) = 2(\Delta\Gamma) = 4\eta\mu\theta \quad \text{και} \quad (\text{ΑΔ}) = (\text{ΑΟ}) + (\text{ΟΔ}) = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

Οπότε :

$$E = \frac{1}{2}(\text{ΒΓ}) \cdot (\text{ΑΔ}) = \frac{1}{2} 4\eta\mu\theta \cdot (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow$$

$$E = 4(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ii. Αφού είναι $\theta = f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}$, $0 < t < 2\pi$ τότε :

$$E(t) = 4 \left[1 + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{4} \right) \right] \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{4} \right) = 4 \left(1 + \eta\mu \frac{t}{4} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{t}{4}$$

Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$, έτσι από τη σχέση $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}$ για $\theta = \frac{\pi}{3}$

παίρνουμε :

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4} \Leftrightarrow \frac{t}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{t}{4} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{2\pi}{3}}$$

Το εμβαδόν τη χρονική στιγμή $t = \frac{2\pi}{3}$ είναι :

$$E\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \left(1 + \eta\mu \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} = 4 \left(1 + \eta\mu \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = 4 \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Ι σ ό τ η τ α σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν

- 13. i.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ πρέπει :

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$$

Οπότε $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$ πρέπει :

$$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

Οπότε $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα και $f \neq g$.

Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι $f(x) = g(x)$:

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{x-3}{x+2} = g(x)$$

Οπότε είναι **$f(x) = g(x)$** για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

- ii.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|}$ πρέπει :

$$x^2 + 2|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x| + 2) \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 0 \text{ και } |x| + 2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0 \text{ και } (|x| \neq -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \neq 0$$

Οπότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = 1 - \frac{2}{|x|}$ πρέπει :

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Οπότε $D_g = \mathbb{R}^*$.

Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|} = \frac{|x|^2 - 4}{|x|^2 + 2|x|} = \frac{(|x| - 2)\cancel{(|x| + 2)}}{|x|(\cancel{|x| + 2})} = \frac{|x| - 2}{|x|} = 1 - \frac{2}{|x|} = g(x)$$

Επομένως είναι **$f = g$** για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

- iii.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 1}$ πρέπει :

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Οπότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$ πρέπει :

$$|x| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Οπότε $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 1} = \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 - 1} = \frac{|x| \cancel{(|x|+1)}}{(|x|-1) \cancel{(|x|+1)}} = \frac{|x|}{|x|-1} = g(x)$$

Επομένως είναι $f=g$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

iv. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ πρέπει :

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε $D_f = \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $g(x) = |x-1|$ είναι το $D_g = \mathbb{R}$.

Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = g(x)$$

Επομένως είναι $f=g$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \ln x^2$ πρέπει :

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Οπότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = 2 \ln x$ πρέπει $x > 0$.

Οπότε $D_g = (0, +\infty)$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα και $f \neq g$.

Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι $f(x) = g(x)$:

$$D_f \cap D_g = (0, +\infty)$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \ln x^2 = 2 \ln x = g(x)$$

Οπότε είναι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

vi. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \ln \frac{(x+3)^2}{2-x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{2-x} > 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2(2-x) > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 2)$$

αφού :

$\eta (x+3)^2(2-x) = 0$ έχει ρίζες τις $x = -3, 2$, οπότε :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$(x+3)^2$	+	$\emptyset$	+	+
$2-x$	+	+	$\emptyset$	-
γινόμενο	+	$\emptyset$	+	-

Οπότε $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 2)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = 2 \ln(x+3) - \ln(2-x)$ πρέπει :

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2$$

Οπότε $D_g = (-3, 2)$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα και $f \neq g$.

Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι $f(x)=g(x)$:

$$D_f \cap D_g = (-3, 2)$$

Για κάθε $x \in (-3, 2)$ έχουμε :

$$f(x) = \ln \frac{(x+3)^2}{2-x} = \ln(x+3)^2 - \ln(2-x) = 2\ln(x+3) - \ln(2-x) = g(x)$$

Οπότε είναι **$f(x)=g(x)$** για κάθε $x \in (-3, 2)$.

vii. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Οπότε $D_f = [1, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x \geq 1$$

αφού :

η $x(x-1)=0$ (δηλαδή η $x^2-x=0$) έχει ρίζες τις $x=0, 1$, οπότε :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x(x-1)$	+	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+

Οπότε $D_g = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα και $f \neq g$.

Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι $f(x)=g(x)$:

$$D_f \cap D_g = [1, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [1, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x-1}{x}} = g(x)$$

Οπότε είναι **$f(x)=g(x)$** για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

viii. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2-x) \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$

αφού :

η $(x-1)(2-x)=0$ (δηλαδή η $-x^2+3x-2=0$) έχει ρίζες τις $x=1, 2$, οπότε :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$(x-1)(2-x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Οπότε $D_f = [1, 2)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$

Οπότε $D_g = [1, 2)$.

Είναι $D_f = D_g = [1, 2)$.

Για κάθε $x \in [1, 2)$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} = g(x)$$

Επομένως είναι $f=g$ για κάθε $x \in [1, 2)$.

ix. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x(x-2)}$ πρέπει $x(x-2) \geq 0$.

Η $x(x-2)=0$ (δηλαδή η $x^2-2x=0$) έχει ρίζες τις $x=0, 2$, οπότε :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x(x-2)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Οπότε $D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Οπότε $D_g = [2, +\infty)$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα και $f \neq g$.

Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι $f(x)=g(x)$:

$$D_f \cap D_g = [2, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [2, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \sqrt{x(x-2)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2} = g(x)$$

Οπότε είναι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

x. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x} - 2$ πρέπει $x \geq 0$.

Οπότε $D_f = [0, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq -2, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Οπότε $D_g = [0, +\infty)$.

Είναι $D_f = D_g = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2} = g(x)$$

Επομένως είναι $f=g$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

xi. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \neq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Οπότε $D_f = [0, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Οπότε $D_g = [0, +\infty)$.

Είναι $D_f = D_g = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = g(x)$$

Επομένως είναι $f=g$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

xii. Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2}$ πρέπει :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \text{ και } (\sqrt{x} + 1 \neq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &x \in [0, 4) \cup (4, +\infty) \end{aligned}$$

Οπότε $D_f = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{x} - 1$ πρέπει $x \geq 0$.

Οπότε $D_g = [0, +\infty)$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα και $f \neq g$.

Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι $f(x) = g(x)$:

$$D_f \cap D_g = [0, 4) \cup (4, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [0, 4) \cup (4, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x}(x-1) - 2(x-1)}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 2} = \frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(x-1)}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x}-1 = g(x)$$

Οπότε είναι $\mathbf{f(x)=g(x)}$ για κάθε $x \in [0,4) \cup (4,+\infty)$.

14. i. Η $f(x)=x+1$ έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$.

■ Για το πεδίο ορισμού της $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, συνεπώς είναι

$$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Είναι $D_{f_1} \neq D_f$, άρα $f_1 \neq f$.

■ Για το πεδίο ορισμού της $f_2(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ πρέπει $x^2-x+1 \neq 0$, το οποίο ισχύει αφού είναι $\Delta = -3 < 0$, συνεπώς είναι $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

Είναι $D_{f_2} = D_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f_2(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \frac{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}{\cancel{x^2-x+1}} = x+1 = f(x)$$

Επομένως είναι $\mathbf{f_2=f}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

■ Για το πεδίο ορισμού της $f_3(x) = (\sqrt{x+1})^2$ πρέπει $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, συνεπώς είναι $D_{f_3} = [-1, +\infty)$.

Είναι $D_{f_3} \neq D_f$, άρα $f_3 \neq f$.

■ Για το πεδίο ορισμού της $f_4(x) = x\left(\frac{1}{x}+1\right)$ πρέπει $x \neq 0$, συνεπώς είναι $D_{f_4} = \mathbb{R}^*$.

Είναι $D_{f_4} \neq D_f$, άρα $f_4 \neq f$.

■ Για το πεδίο ορισμού της $f_5(x) = \ln e^{x+1}$ πρέπει $e^{x+1} > 0$, το οποίο ισχύει, συνεπώς είναι $D_{f_5} = \mathbb{R}$.

Είναι $D_{f_5} = D_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f_5(x) = \ln e^{x+1} = (x+1)\ln e = x+1 = f(x)$$

Επομένως είναι $\mathbf{f_5=f}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

■ Για το πεδίο ορισμού της $f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$ πρέπει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, συνεπώς είναι $D_{f_6} = (-1, +\infty)$.

Είναι $D_{f_6} \neq D_f$, άρα $f_6 \neq f$.

ii. Ψάχνουμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες :

$$D_f \cap D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} \cap D_{f_4} \cap D_{f_5} \cap D_{f_6} = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ έχουμε :

$$f_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 = f(x)$$

$$f_2(x) = f(x)$$

$$f_3(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1 = f(x)$$

$$f_4(x) = x\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1+x = f(x)$$

$$f_5(x) = f(x)$$

$$f_6(x) = e^{\ln(x+1)} = x+1 = f(x)$$

Οπότε είναι :

$$f(x)=f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)=f_4(x)=f_5(x)=f_6(x) \text{ για κάθε } x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$$

- 15.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{(\lambda+1)x-1}{x+\lambda^2-1}$ πρέπει $x+\lambda^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1-\lambda^2$,
 συνεπώς είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1-\lambda^2\}$.

$$\text{Για το πεδίο ορισμού της } g(x) = \frac{(1-2\lambda)x+\lambda-1}{\lambda-x-5} \text{ πρέπει } \lambda-x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \lambda-5,$$

συνεπώς είναι $D_g = \mathbb{R} - \{\lambda-5\}$.

Είναι $f=g$ άρα πρέπει $D_f = D_g$ και $f(x)=g(x)$. Έτσι έχουμε :

$$D_f = D_g \Leftrightarrow 1-\lambda^2 = \lambda-5 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -3$$

■ Για $\lambda=2$ είναι :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+3} \text{ και } g(x) = \frac{-3x+1}{-x-3} = \frac{3x-1}{x+3}, \text{ οπότε } f(x)=g(x)$$

■ Για $\lambda=-3$ είναι :

$$f(x) = \frac{-2x-1}{x+8} \text{ και } g(x) = \frac{7x-4}{-x-8}, \text{ οπότε } f(x) \neq g(x)$$

Άρα $\lambda=2$.

- 16.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{(\lambda+1)x+3}{x+\lambda-2}$ πρέπει $x+\lambda-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2-\lambda$,
 συνεπώς είναι $D_f = \mathbb{R} - \{2-\lambda\}$.

$$\text{Για το πεδίο ορισμού της } g(x) = \frac{(\lambda^2-\kappa)x+\mu-2}{x-\lambda+6} \text{ πρέπει } x-\lambda+6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \lambda-6,$$

συνεπώς είναι $D_g = \mathbb{R} - \{\lambda-6\}$.

Είναι $f=g$ άρα πρέπει $D_f = D_g$ και $f(x)=g(x)$. Έτσι έχουμε :

$$D_f = D_g \Leftrightarrow 2-\lambda = \lambda-6 \Leftrightarrow 2\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Οπότε :

$$f(x) = \frac{5x+3}{x+2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(16-\kappa)x+\mu-2}{x+2}$$

Είναι :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{5x+3}{x+2} = \frac{(16-\kappa)x+\mu-2}{x+2} \Leftrightarrow 5x+3 = (16-\kappa)x+\mu-2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 = 16 - \kappa \\ 3 = \mu - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 11 \\ \mu = 5 \end{cases}$$

- 17.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{\alpha^2 x - \beta + 1}{x + \alpha - 1}$ πρέπει $x + \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 - \alpha$,
 συνεπώς είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1 - \alpha\}$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{(2\alpha+3)x-3}{x+2}$ πρέπει $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$,
 συνεπώς είναι $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Είναι $f=g$ άρα πρέπει $D_f = D_g$ και $f(x)=g(x)$. Έτσι έχουμε :

$$D_f = D_g \Leftrightarrow 1 - \alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Οπότε :

$$f(x) = \frac{9x - \beta + 1}{x + 2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{9x - 3}{x + 2}$$

Είναι :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{9x - \beta + 1}{x + 2} = \frac{9x - 3}{x + 2} \Leftrightarrow 9x - \beta + 1 = 9x - 3 \Leftrightarrow -\beta + 1 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 4$$

- 18.** Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^2 - (\alpha + \beta)x + 1}{x - \alpha + 1}$ πρέπει $x - \alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \alpha - 1$,
 συνεπώς είναι $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha - 1\}$.

Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{x^2 - (\alpha + 2)x + \beta - 1}{x + \beta - 4}$ πρέπει $x + \beta - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4 - \beta$,
 συνεπώς είναι $D_g = \mathbb{R} - \{4 - \beta\}$.

Είναι $f=g$ άρα πρέπει $D_f = D_g$ και $f(x)=g(x)$. Έτσι έχουμε :

$$D_f = D_g \Leftrightarrow \alpha - 1 = 4 - \beta \Leftrightarrow \alpha = 5 - \beta$$

Οπότε :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + \beta - 4} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 - (7 - \beta)x + \beta - 1}{x + \beta - 4}$$

Είναι :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 1}{x + \beta - 4} = \frac{x^2 - (7 - \beta)x + \beta - 1}{x + \beta - 4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 1 = x^2 - (7 - \beta)x + \beta - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -(7 - \beta) \\ 1 = \beta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -7 + \beta \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = 2$$

Έτσι θα είναι και :

$$\alpha = 3$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

19. i. Η $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Έχουμε :

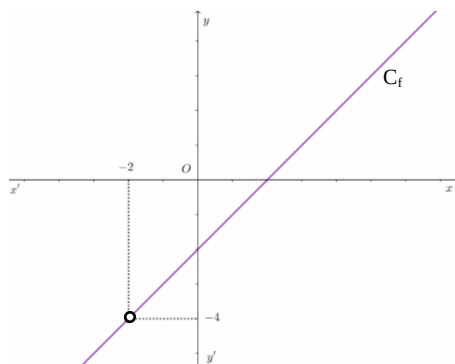
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(\cancel{x + 2})}{\cancel{x + 2}} = x - 2$$

Έτσι παίρνουμε :

Πίνακας τιμών

x	-2	2
y = x - 2	-4	0

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



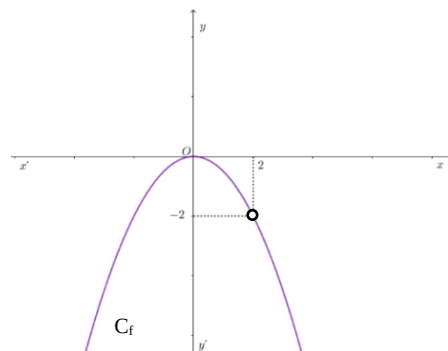
- ii. Η $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{4 - 2x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{4 - 2x} = \frac{x^2(\cancel{x - 2})}{-2(\cancel{x - 2})} = -\frac{x^2}{2}$$

Για $x=2$ είναι $f(2)=-2$, συνεπώς το σημείο $(2, -2)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



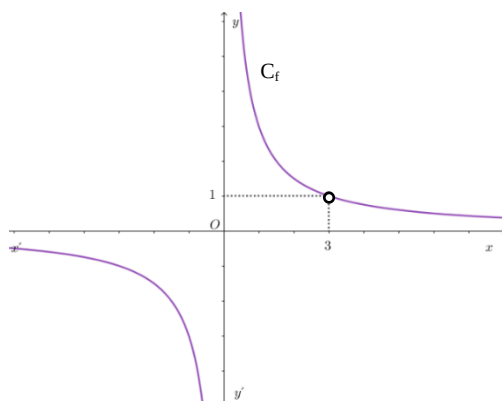
- iii. Η $f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 3x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 3x} = \frac{3(\cancel{x - 3})}{x(\cancel{x - 3})} = \frac{3}{x}$$

Για $x=3$ είναι $f(3)=1$, συνεπώς το σημείο $(3, 1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



iv. Η $f(x) = \frac{x^5 - x^3}{x^2 - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

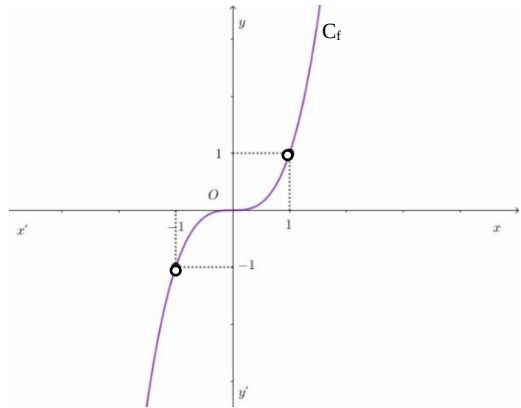
Έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^5 - x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 \cancel{(x^2 - 1)}}{\cancel{x^2 - 1}} = x^3$$

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = -1$, συνεπώς το σημείο $(-1, -1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$, συνεπώς το σημείο $(1, 1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



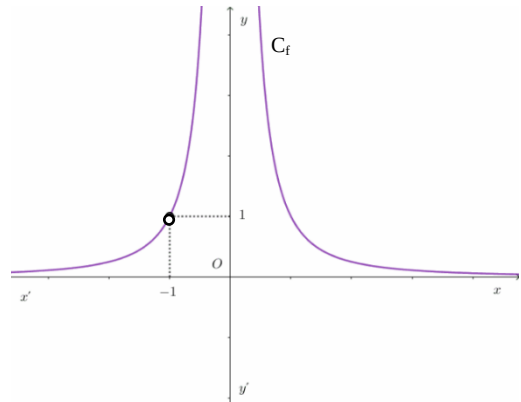
v. Η $f(x) = \frac{x+1}{x^3 + x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 + x^2} = \frac{\cancel{x+1}}{x^2 \cancel{(x+1)}} = \frac{1}{x^2}$$

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$, συνεπώς το σημείο $(-1, 1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



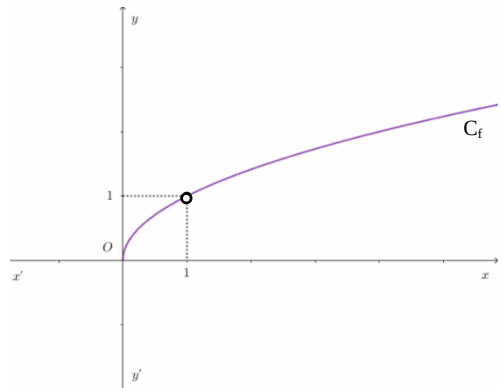
vi. Η $f(x) = \frac{x^3 \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^3 - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^3 \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^3 - 1} = \frac{\sqrt{x} \cancel{(x^3 - 1)}}{\cancel{x^3 - 1}} = \sqrt{x}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$, συνεπώς το σημείο $(1, 1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



viii. Η $f(x) = \frac{x^2 e^x - x e^x}{x^2 - x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

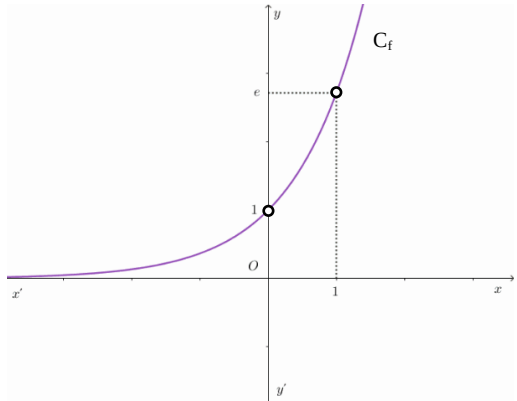
Έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^2 e^x - x e^x}{x^2 - x} = \frac{e^x (\cancel{x^2} - \cancel{x})}{\cancel{x^2} - \cancel{x}} = e^x$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=1$, συνεπώς το σημείο $(0,1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Για $x=1$ είναι $f(1)=e$, συνεπώς το σημείο $(1,e)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



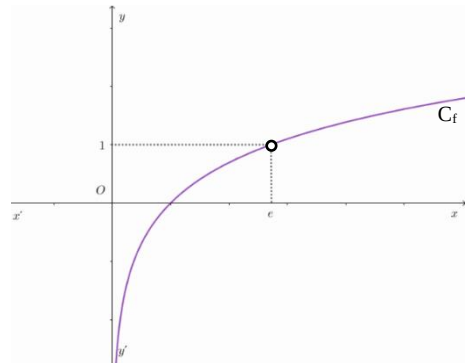
viii. Η $f(x) = \frac{x \ln x - e \ln x}{x - e}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{e\}$.

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{x \ln x - e \ln x}{x - e} = \frac{\ln x \cdot (\cancel{x} - \cancel{e})}{\cancel{x} - \cancel{e}} = \ln x$$

Για $x=e$ είναι $f(e)=1$, συνεπώς το σημείο $(e,1)$ δεν ανήκει στη C_f .

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



20. i. Είναι $D_f = [-1, 4]$. Έχουμε :

Πίνακας τιμών

x	-1	(2)
y = x²	1	(4)

και

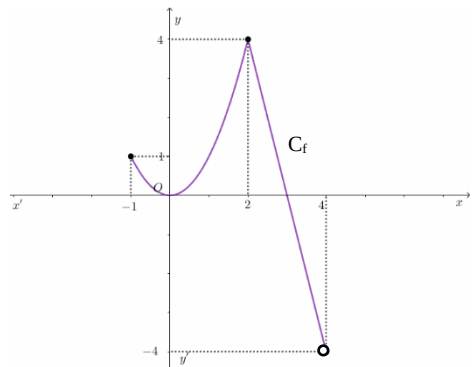
Πίνακας τιμών

x	2	(4)
y = -4x+12	4	(-4)

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-4, 4]$$



ii.

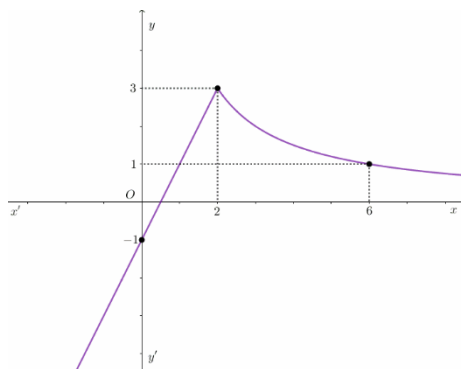
Είναι

Πίνακας τιμών

x	0	2
y = 2x-1	-1	3

Πίνακας τιμών

x	2	6
y = $\frac{6}{x}$	3	1

 $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε : C_f

και

Πίνακας τιμών

x	-1	2
y = $-\frac{2}{x}$	2	-1

Η

Από

Πίνακας τιμών

x	2	4
y = $\sqrt{x}$	$\sqrt{2}$	2

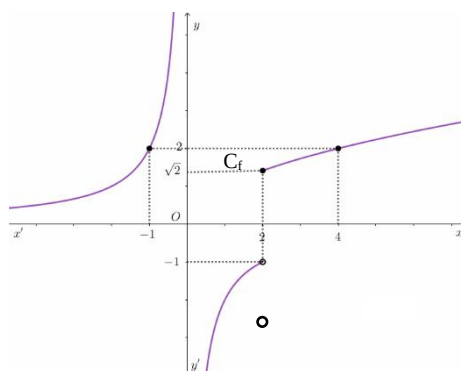
γραφική παράσταση της f είναι η εξής :
 τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
 διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-\infty, 3]$$

iii. Είναι $D_f = \mathbb{R}^*$. Έχουμε :**Πίνακας τιμών**

x	-1	1
----------	----	---

και

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

iv.

$y = \frac{1}{x^2}$	1	1
Πίνακας τιμών		
x	-2	-1
$y=2+x$	0	1

Πίνακας τιμών

και

x	-1	1
$y=x^2$	1	1

Πίνακας τιμών

Η

x	1	2
$y=2-x$	1	0

διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (0, +\infty)$$

v. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

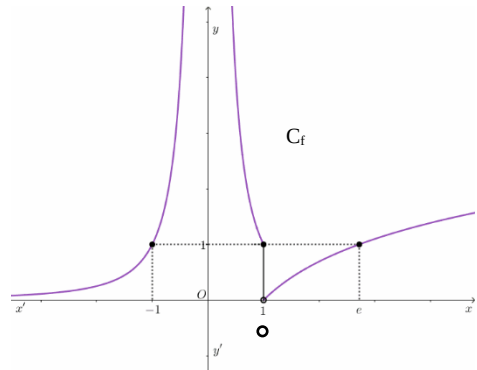
Πίνακας τιμών

x	-1	0
$y=x^3$	-1	0

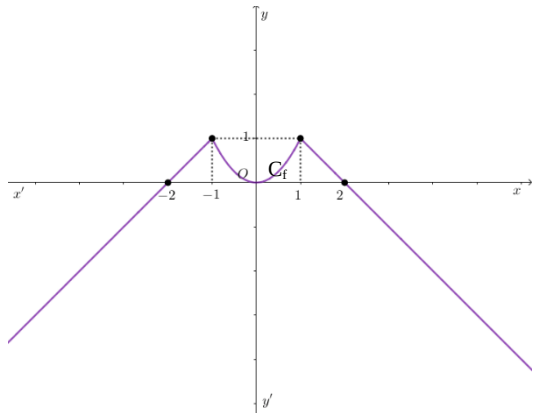
Πίνακας τιμών

και

x	0	1
$y=e^x$	1	e

Είναι $D_f = \mathbb{R}^*$. Έχουμε :

Γραφική παράσταση της f είναι η εξής :
Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

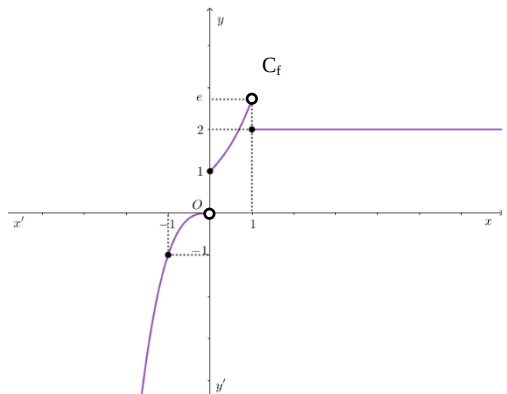
$$f(D_f) = (-\infty, 1]$$

v. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

Πίνακας τιμών

x	1	e
$y=\ln x$	0	1

και





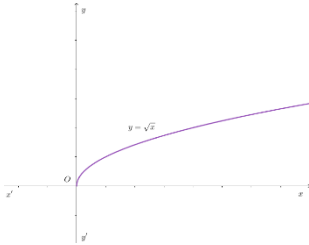
Η $y=2$ είναι ευθεία παράλληλη στον
 $x'x$ με το σημείο $(1,2)$ να ανήκει στη
 γραφική της παράσταση.

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :

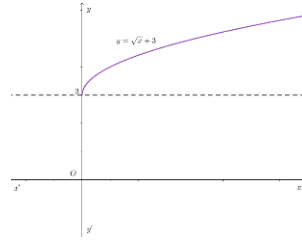
Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-\infty, 0) \cup [1, e]$$

- 21. i.** Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x} + 3$ έχουμε :

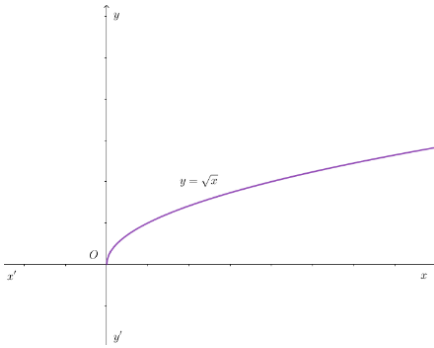


αρχική συνάρτηση

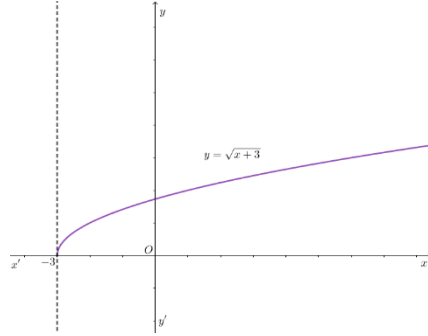


μετατόπιση 3 μονάδες πάνω

- ii.** Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x+3}$ έχουμε :

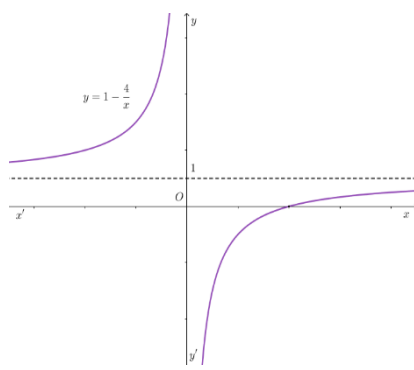
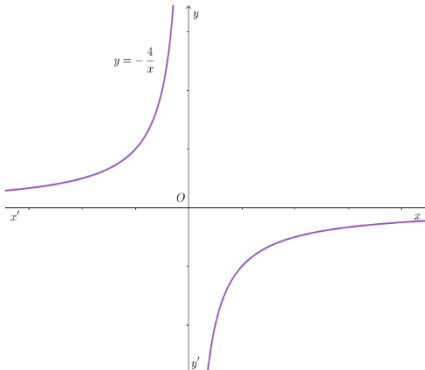


αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 3 μονάδες αριστερά

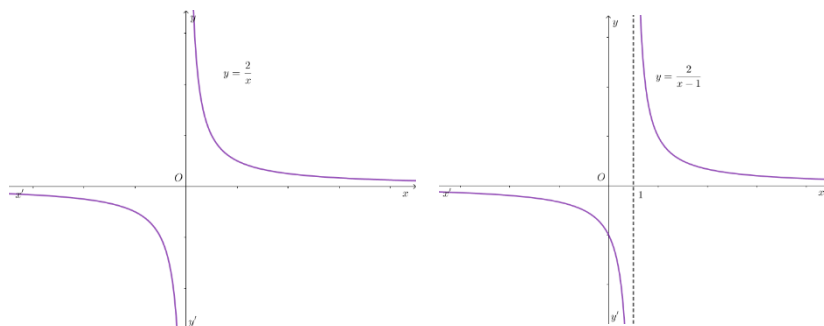
- iii.** Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - \frac{4}{x}$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

μετατόπιση 1 μονάδα πάνω

iv. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{2}{x-1}$ έχουμε :



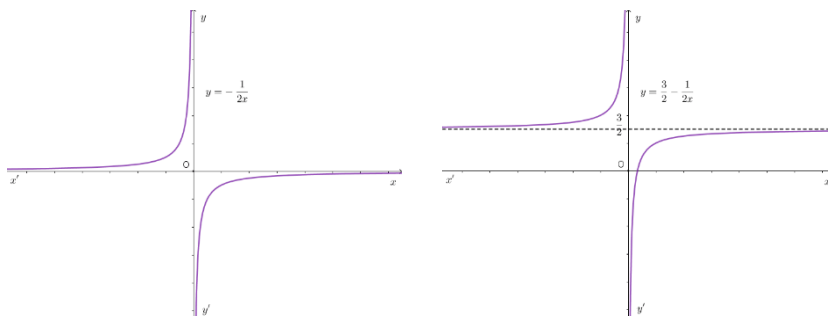
αρχική συνάρτηση

μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά

v. Είναι :

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$$

Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$ έχουμε :



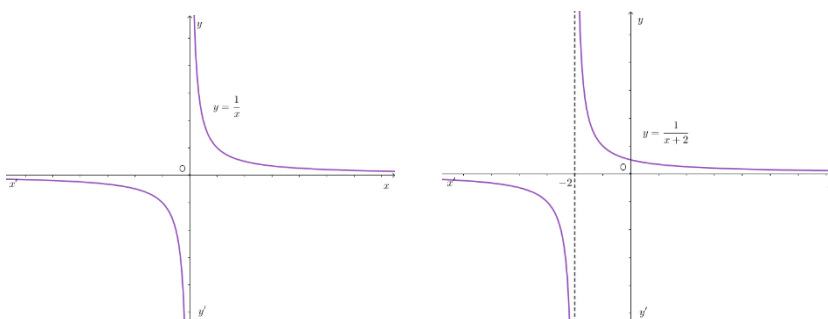
αρχική συνάρτηση

μετατόπιση $\frac{3}{2}$ μονάδες πάνω

vi. Είναι :

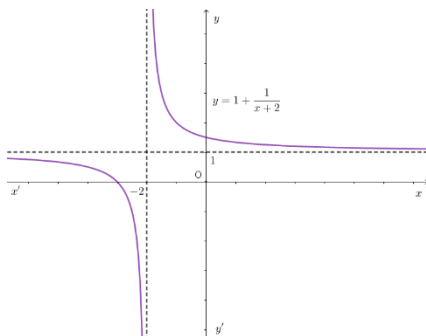
$$f(x) = \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$ έχουμε :



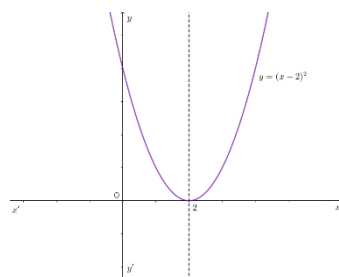
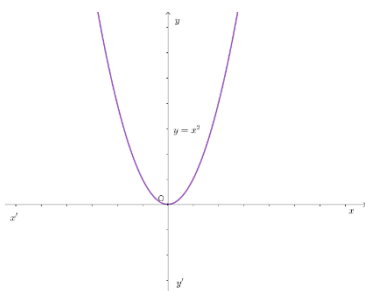
αρχική συνάρτηση

μετατόπιση 2 μονάδες αριστερά



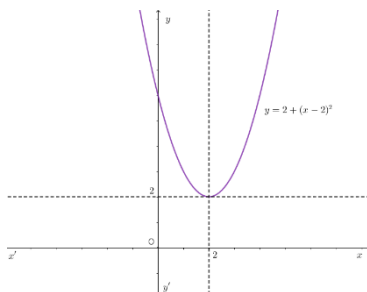
μετατόπιση 1 μονάδα πάνω

vii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ έχουμε :



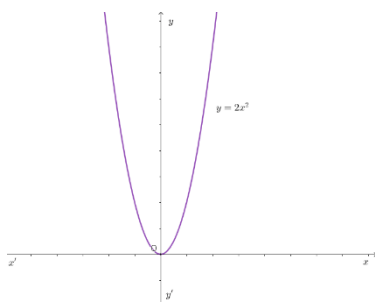
αρχική συνάρτηση

μετατόπιση 2 μονάδες δεξιά

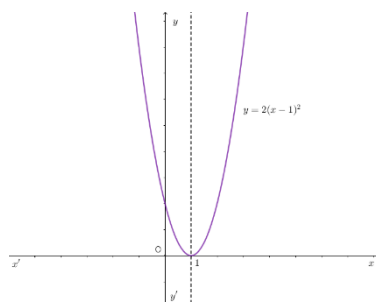


μετατόπιση 2 μονάδες πάνω

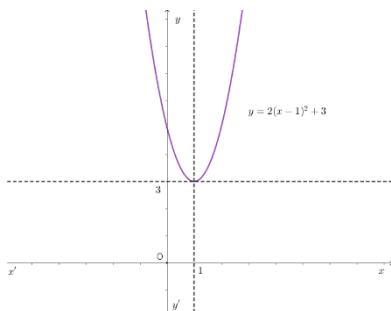
viii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

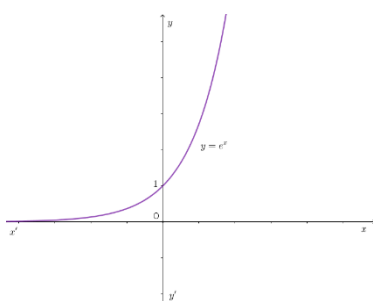


μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά

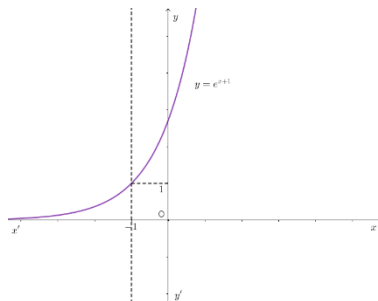


μετατόπιση 3 μονάδες πάνω

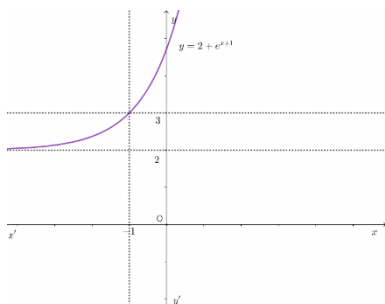
ix. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 + e^{x+1}$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

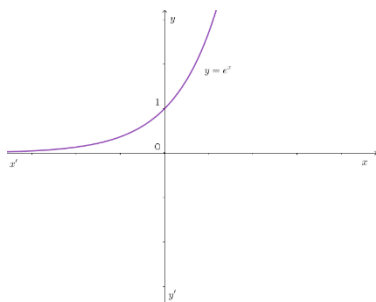


μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά

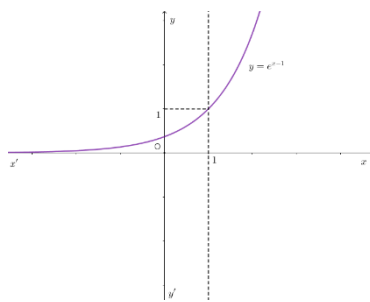


μετατόπιση 2 μονάδες πάνω

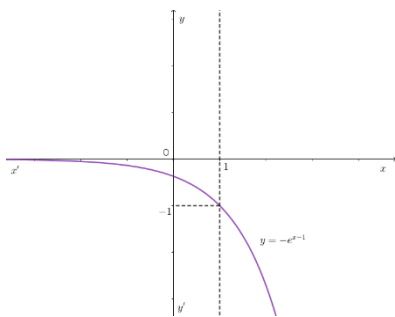
x. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - e^{x-1}$ έχουμε :



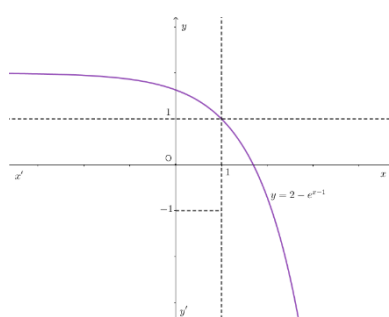
αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά

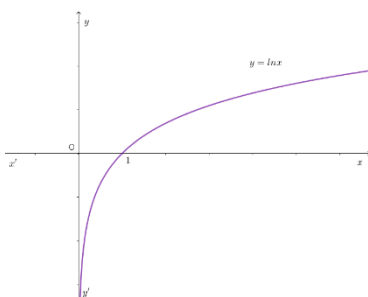


επίδραση της αντίθεσης

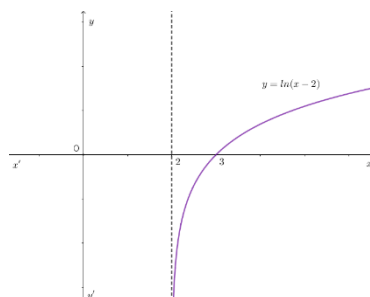


μετατόπιση 2 μονάδες πάνω

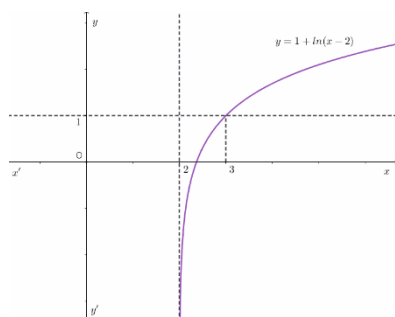
xi. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

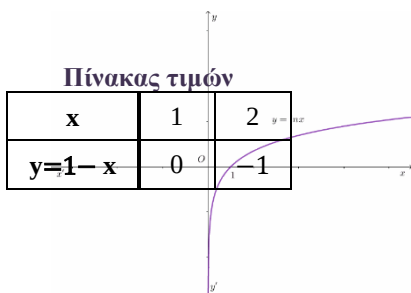


μετατόπιση 2 μονάδες δεξιά

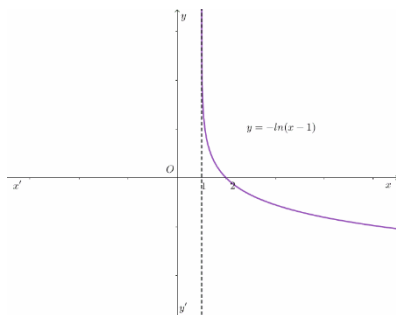


μετατόπιση 1 μονάδα πάνω

xi. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 3 - \ln(x - 1)$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

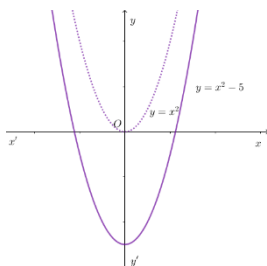


επίδραση της αντίθεσης

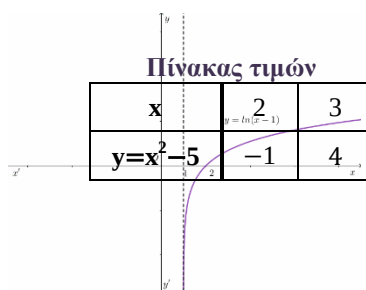
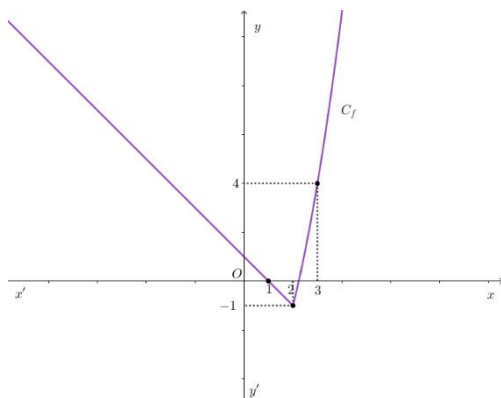
22. i. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

και

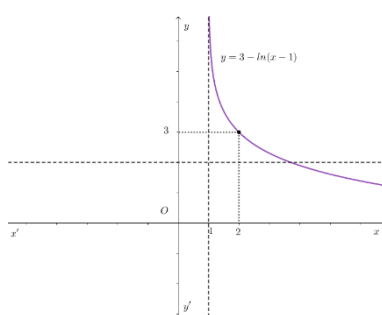
Γνωρίζουμε ότι :



άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά



μετατόπιση 3 μονάδες πάνω

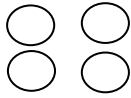


Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

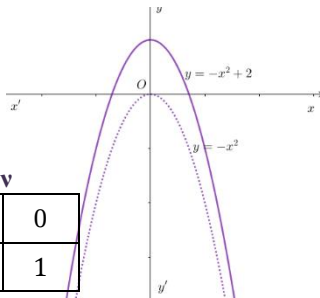
$$f(D_f) = [-1, +\infty)$$

ii. Είναι $D_f = (-1, \sqrt{2})$. Έχουμε :

και



Γνωρίζουμε ότι :



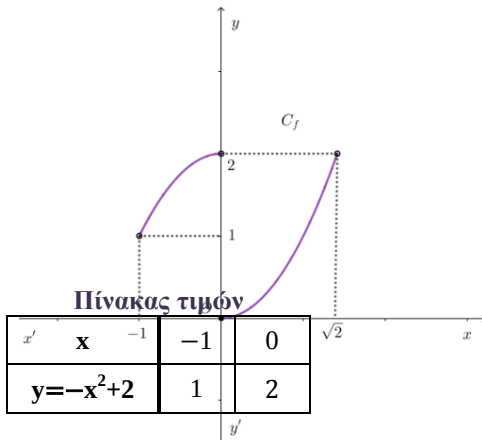
Πίνακας τιμών

x	-1	0
$y=e^x$	1/e	1

Πίνακας τιμών

x	1	e
$y=1+\ln x$	1	2

άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



Πίνακας τιμών

x	-1	0
$y=-x^2+2$	1	2

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = [0, 2]$$

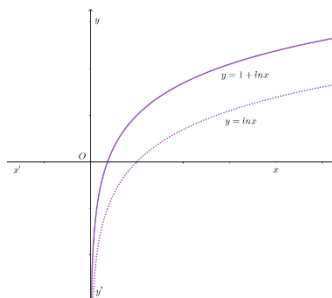
Πίνακας τιμών

x	0	$\sqrt{2}$
$y=x^2$	0	2

iii. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

και

Γνωρίζουμε ότι :



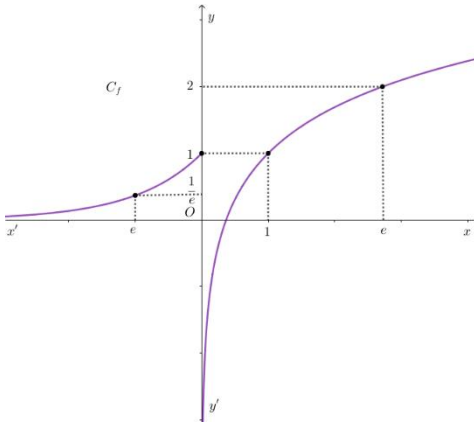
Πίνακας τιμών

x	-1	0
$y=2-e^x$	$2-1/e$	1

Πίνακας τιμών

x	0	π
$y=\sin x$	1	-1

άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

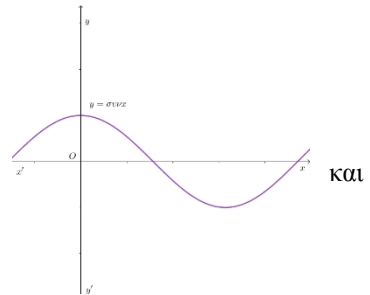
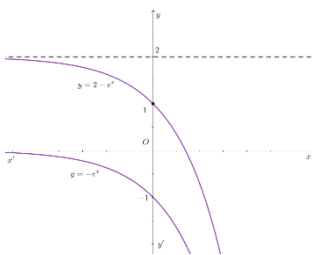
$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

iv. Είναι $D_f = (-\infty, \pi]$. Έχουμε :

και

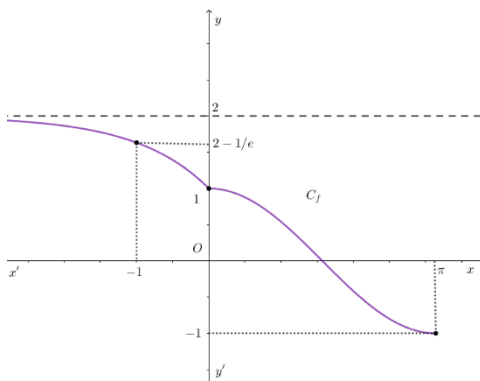


Γνωρίζουμε ότι :



και

η

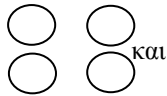


άρα η γραφική παράσταση της f είναι εξής :

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = [-1, 2)$$

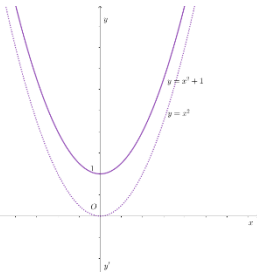
v. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η $y=2$ είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$ με το σημείο $(-1, 2)$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση. Έχουμε :



και

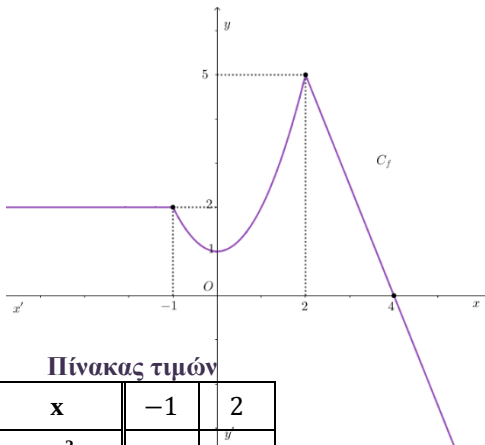
Γνωρίζουμε ότι :

Πίνακας τιμών		
x	-1	0
$y = x^3 - 2$	-3	-2



Πίνακας τιμών		
x	1	e
$y = -\ln x$	0	-1

Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-\infty, 5]$$

Πίνακας τιμών		
x	-1	2
$y = x^2 + 1$	2	5

Πίνακας τιμών		
x	2	4
$y = 10 - \frac{5}{2}x$	5	0

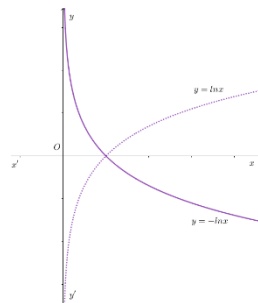
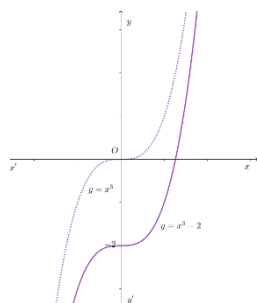
vi. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η $y=-1$ είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$ με το σημείο $(0, -1)$ να μην ανήκει στη γραφική της παράσταση, ενώ το $(1, -1)$ ανήκει. Έχουμε :

και

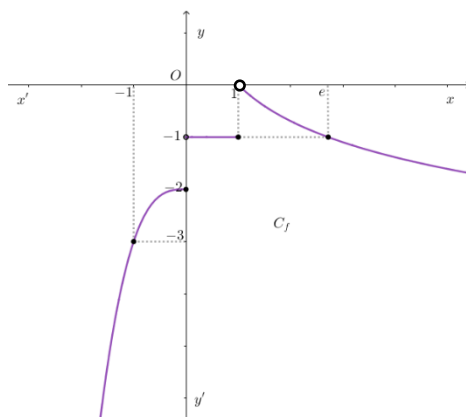


Γνωρίζουμε ότι :

και



Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



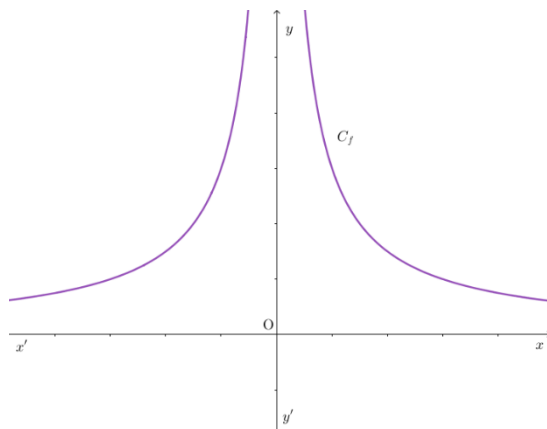
Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-\infty, 0)$$

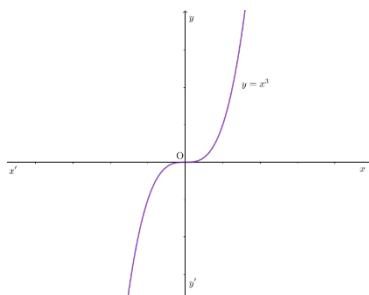
23. i. Η συνάρτηση $f(x)$ γίνεται :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, & x > 0 \\ -\frac{3}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

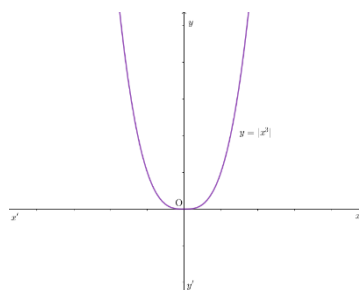
Η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



ii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x^3|$ έχουμε :

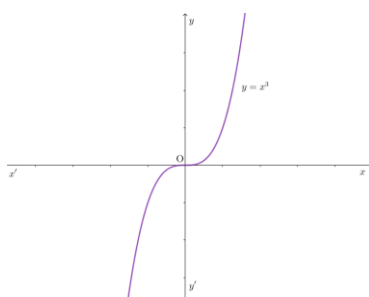


αρχική συνάρτηση

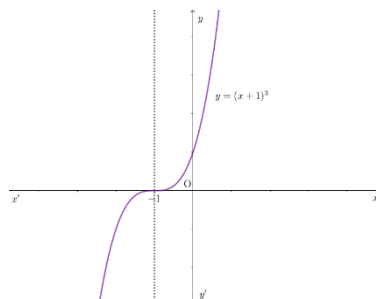


επίδραση της απόλυτης τιμής

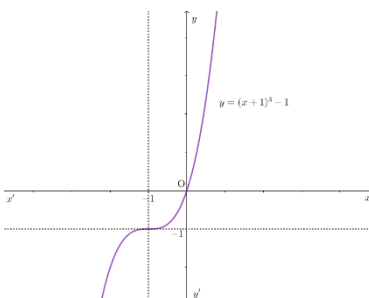
iii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |(x+1)^3 - 1|$ έχουμε :



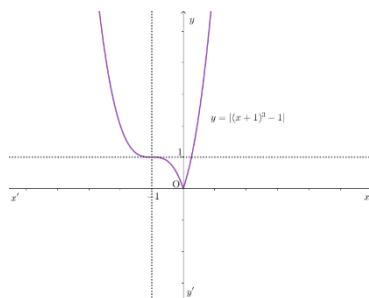
αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά

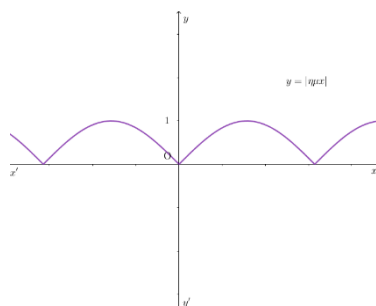
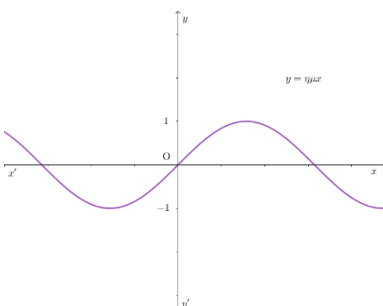


μετατόπιση 1 μονάδας κάτω



επίδραση της απόλυτης τιμής

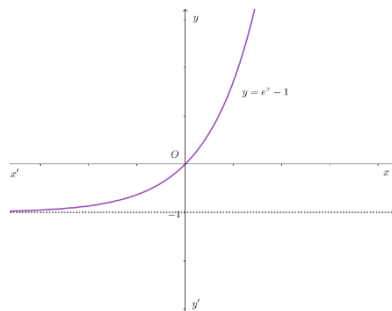
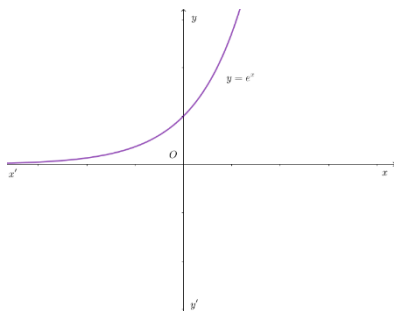
iv. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |\eta\mu x|$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

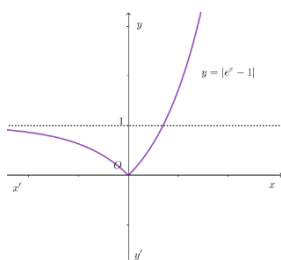
επίδραση της απόλυτης τιμής

v. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |e^x - 1|$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση

μετατόπιση 1 μονάδα κάτω

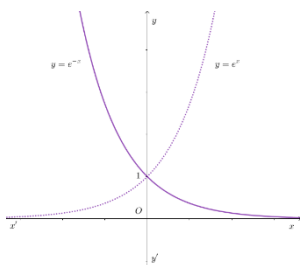


επίδραση της απόλυτης τιμής

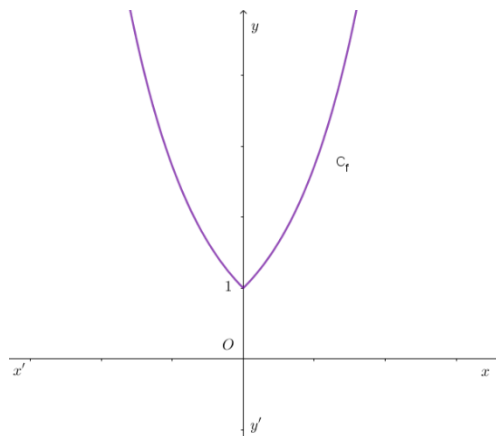
vi. Η συνάρτηση $f(x)$ γίνεται :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , x \geq 0 \\ e^{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

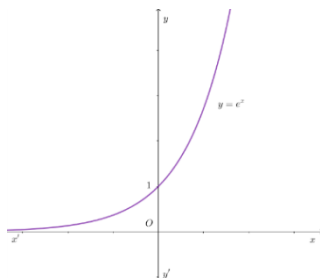
Γνωρίζουμε ότι :



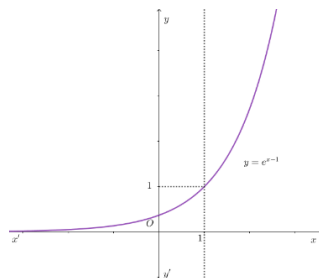
άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



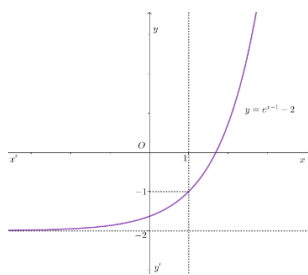
vii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |e^{x-1} - 2|$ έχουμε :



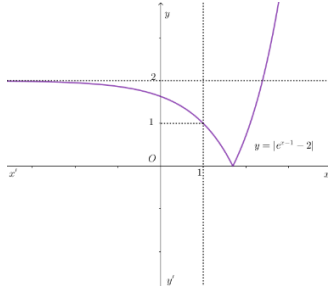
αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά

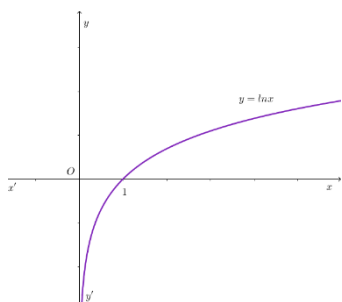


μετατόπιση 2 μονάδες κάτω

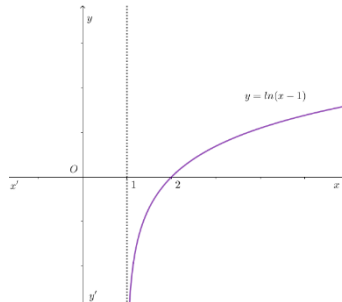


επίδραση της απόλυτης τιμής

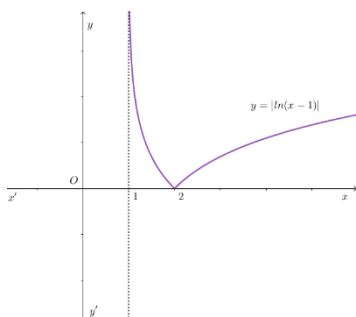
viii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |\ln(x-1)|$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά

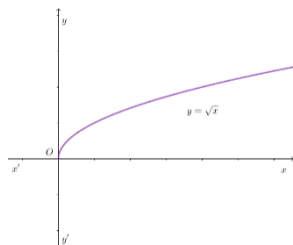


επίδραση της απόλυτης τιμής

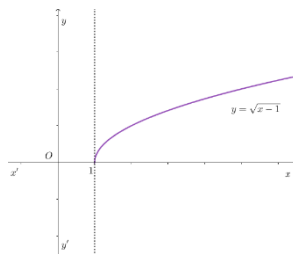
ix. Η συνάρτηση $f(x)$ γίνεται :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & , x \geq 1 \\ \sqrt{-(x-1)} & , x < 1 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι :

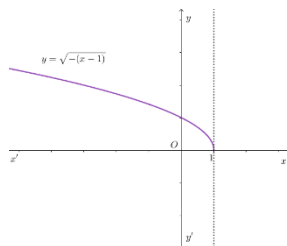


αρχική συνάρτηση

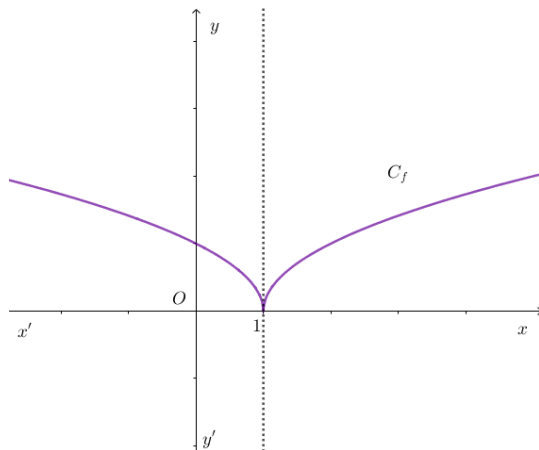


μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά

επίδραση της αντίθεσης



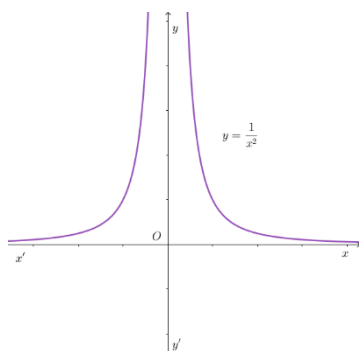
άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



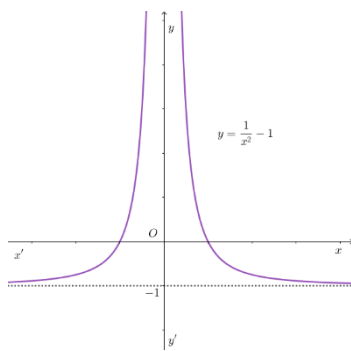
x. Είναι :

$$f(x) = \frac{|1-x^2|}{x^2} = \frac{|1-x^2|}{|x^2|} = \left| \frac{1-x^2}{x^2} \right| = \left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|$$

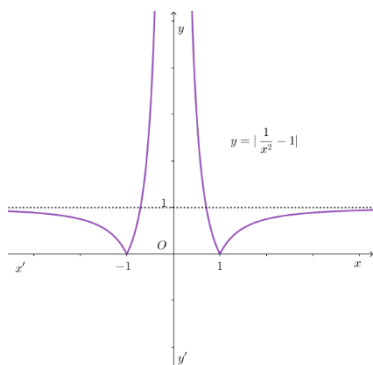
οπότε :



αρχική συνάρτηση

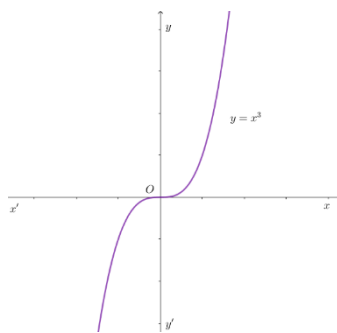


μετατόπιση 1 μονάδα κάτω



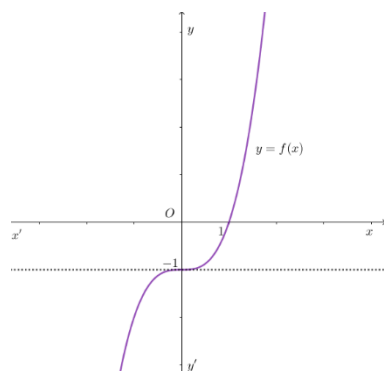
επίδραση της απόλυτης τιμής

24. Η γραφική παράσταση της $f(x)=x^3$ είναι :

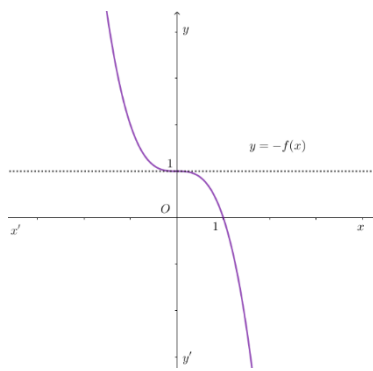


οπότε έχουμε :

i.

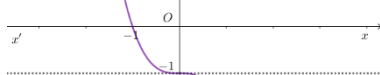


ii.



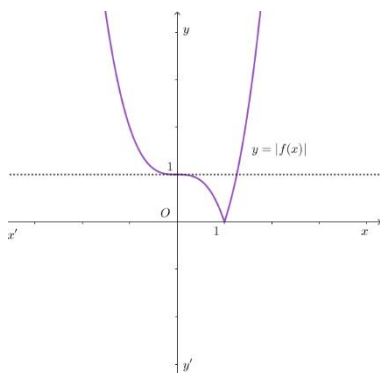
Πίνακας τιμών

x	1	2
$y = -2x+5$	3	$y = \frac{1}{-x}$



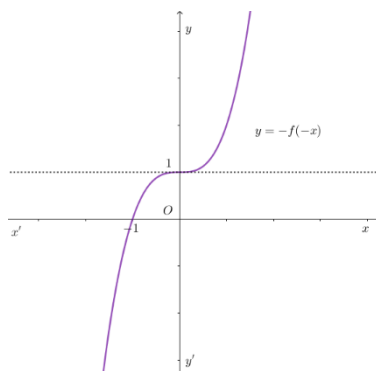
Πίνακας τιμών

x	0	1
$y = 2x+1$	1	3



iii.

iv.



v.

25. i. Για $x \geq 1$ ($x-1 \geq 0$) έχουμε :

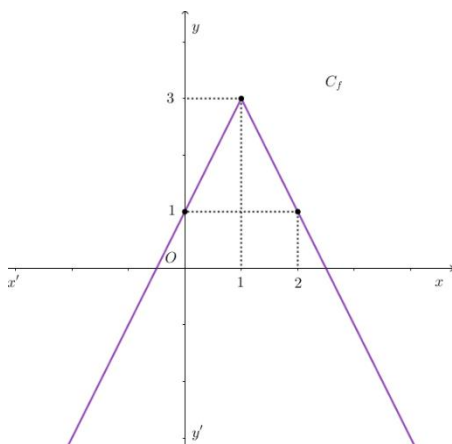
$$f(x) = -2(x-1) + 3 = -2x + 5$$

με

Για $x < 1$ ($x-1 < 0$) έχουμε :

$$f(x) = -2(1-x) + 3 = 2x + 1$$

με



Συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & , x \geq 1 \\ 2x + 1 & , x < 1 \end{cases} \text{ με } D_f = \mathbb{R} \text{ έχει}$$

γραφική παράσταση :

Πίνακας τιμών

x	-3	-2
$y = -2x - 1$	5	3

Από τη γραφική
παράσταση της

συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = (-\infty, 3]$$

Πίνακας τιμών

x	1	2
$y = 2x + 1$	3	5

ii. Είναι :

Έτσι έχουμε :

- Αν $x < -2$ τότε : $f(x) = -x - 2 - x + 1 = -2x - 1$
- Αν $-2 \leq x < 1$ τότε : $f(x) = x + 2 - x + 1 = 3$
- Αν $x \geq 1$ τότε : $f(x) = x + 2 + x - 1 = 2x + 1$

Άρα :

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & , x < -2 \\ 3 & , -2 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Η $y = 3$ είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$.

Για τις άλλες δύο ευθείες έχουμε :

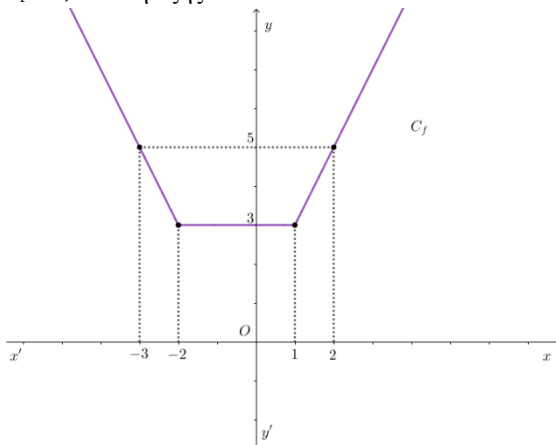
και

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-	⊖	+	+
$x-1$	-	-	⊖	+

Η γραφική

$D_f = \mathbb{R}$, είναι η εξής :

παράσταση της f , με



Από τη γραφική παράσταση της
συνάρτησης διαπιστώνουμε πως :

$$f(D_f) = [3, +\infty)$$

- 26.** Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$ και $B(4,3)$ τότε έχουμε αντίστοιχα $f(-1)=1$ και $f(4)=3$, οπότε :

$$f(-1)=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha=1}} \quad \text{και} \quad f(4)=3 \Leftrightarrow 2\beta-1=3 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta=2}}$$

Έτσι η συνάρτηση γίνεται :

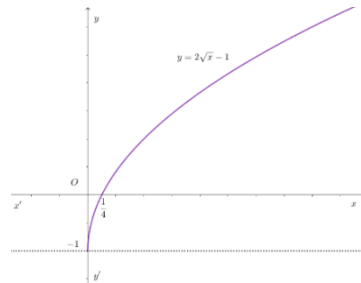
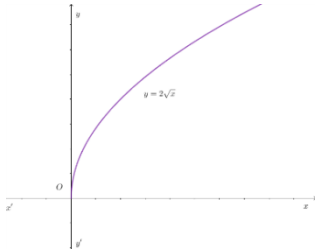
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2\sqrt{x}-1 & , x > 1 \end{cases}$$

Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

και



Γνωρίζουμε ότι :



Πίνακας τιμών

x	-1	1
y=x ²	1	1

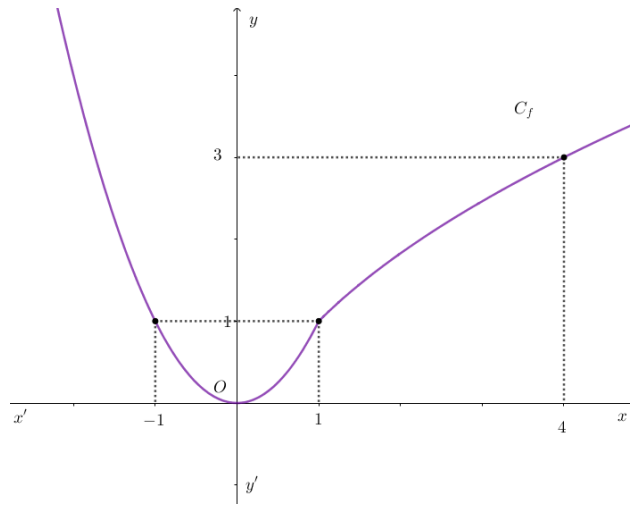
αρχική
συνάρτηση
μετατόπιση 1
μονάδα κάτω
άρα η γραφική

Πίνακας τιμών

x	1	4
y = 2\sqrt{x} - 1	1	3

παράσταση
εξής :

της f είναι η



27. i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-1, +\infty)$.

Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $f(x)=0$, οπότε :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2-\ln(1+x)=0 \Leftrightarrow \ln(1+x)=2 \Leftrightarrow \ln(1+x)=\ln e^2 \Leftrightarrow 1+x=e^2 \Leftrightarrow x=e^2-1$$

Είναι $e^2-1 \in A$. Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(e^2-1, 0)$.

Η C_f τέμνει τον $y'y$ για $x=0$, και αφού $0 \in A$, τότε έχουμε :

$$f(0)=2-\ln 1=2$$

Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, 2)$.

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν :

$$f(x)>0 \Leftrightarrow 2-\ln(1+x)>0 \Leftrightarrow \ln(1+x)<2 \Leftrightarrow \ln(1+x)<\ln e^2 \Leftrightarrow 1+x<e^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x<e^2-1}}$$

Η C_f λοιπόν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-1, e^2-1)$.

28. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-2, +\infty)$.

Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν :

$$f(x)<0 \Leftrightarrow \ln(x+2)-1<0 \Leftrightarrow \ln(x+2)<1 \Leftrightarrow \ln(x+2)<\ln e \Leftrightarrow x+2<e \Leftrightarrow \underline{\underline{x<e-2}}$$

Η C_f λοιπόν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-2, e-2)$.

29. Τα πεδία ορισμού των f και g είναι αντίστοιχα τα $A=\mathbb{R}$ και $B=\mathbb{R}$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g όταν :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \\ f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^3-9x+20>x^2+5x-4 \Leftrightarrow x^3-x^2-14x+24>0$$

Είναι :

Σχήμα Horner				
1	-1	-14	24	2
	2	2	-24	
1	1	-12	0	

οπότε η ανίσωση γίνεται :

$$(x-2)(x^2+x-12)>0$$

Έχουμε :

$$(x-2)(x^2+x-12)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } (x+4)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-4 \text{ ή } x=3$$

οπότε :

x	$-\infty$	-4	2	3	$+\infty$
---	-----------	----	---	---	-----------

$x-2$	-	-	$\oplus$	+	+
x^2+x-12	+	$\oplus$	-	-	$\oplus$
γινόμενο	-	$\oplus$	+	$\oplus$	+

απ' όπου παίρνουμε $x \in (-4, 2) \cup (3, +\infty)$.

Η C_f λοιπόν βρίσκεται πάνω από την C_g για $\boxed{x \in (-4, 2) \cup (3, +\infty)}$.

30. Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, -6)$, άρα $f(1) = -6$, οπότε :

$$f(1) = -6 \Leftrightarrow 1 + (2 - \alpha) - (\alpha + 3) + \alpha^2 - 5 = -6 \Leftrightarrow 1 + 2 - \alpha - \alpha - 3 + \alpha^2 - 5 = -6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

Έτσι η συνάρτηση γίνεται :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $f(x) = 0$, οπότε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 4)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ ή } x = -1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -1$$

Είναι $-2, -1, 2 \in D_f = \mathbb{R}$ άρα τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα :

$$\boxed{A(-2, 0), B(-1, 0) \text{ και } \Gamma(2, 0)}$$

31. Έστω ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$. Τότε θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Στη δοθείσα σχέση για $x = x_0$ παίρνουμε :

$$\cancel{f^2(x_0)}^0 - \cancel{f(x_0)}^0 - 1 = x_0(x_0 - 1) \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = 0$$

Είναι $\Delta = -3 < 0$ συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

32. Τα πεδία ορισμού των f και g είναι αντίστοιχα τα $A = \mathbb{R}$ και $B = \mathbb{R}$.

Για τα κοινά σημεία της C_f και της C_g πρέπει :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^{\cancel{x}} + x = x^{\cancel{x}} + 8x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$$

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)[x(x + 1) - 6] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -3 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Βρίσκουμε :

$$g(-3) = -27 + 9 - 3 = -21, \text{ οπότε } A(-3, -21),$$

$$g(1) = 1 + 1 + 1 = 3, \text{ οπότε } B(1, 3) \text{ και}$$

$$g(2) = 8 + 4 + 2 = 14, \text{ οπότε } \Gamma(2, 14).$$

Για να σχηματίζουν τρίγωνο τα A, B, Γ πρέπει αυτά να μην είναι συνευθειακά.

Αυτό συμβαίνει όταν $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) \neq 0$.

Οπότε :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-21), 1 - (-3)) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (24, 4) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{BG} = (14 - 3, 2 - 1) \Rightarrow \overrightarrow{BG} = (11, 1), \text{ έτσι :}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}) = \begin{vmatrix} 24 & 4 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 44 = -20 \neq 0$$

Άρα τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά, συνεπώς σχηματίζουν τρίγωνο.

Εναλλακτικός τρόπος

Τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά όταν οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών που ορίζουν δεν είναι ίσοι μεταξύ τους.

Οπότε :

$$\lambda_{AB} = \frac{3 - (-21)}{1 - (-3)} = \frac{24}{4} = 6 \quad \text{και} \quad \lambda_{BG} = \frac{14 - 3}{2 - 1} = \frac{11}{1} = 11$$

Είναι $\lambda_{AB} \neq \lambda_{BG}$, άρα τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά, δηλαδή σχηματίζουν τρίγωνο.

Έπειτα υπολογίζουμε και τα διανύσματα και την ορίζουσά τους για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου.

Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ δίνεται από τον τύπο :

$$E = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}) \right| = \frac{1}{2} |-20| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ τ.μ.}$$

33. i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$.

Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $f(x)=0$, οπότε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Είναι $\pm\sqrt{2} \in A$. Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(\sqrt{2}, 0)$ και $B(-\sqrt{2}, 0)$.

Η C_f τέμνει τον $y'y$ για $x=0$, και αφού $0 \in A$, τότε έχουμε :

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -2)$.

ii. Αφού οι C_f και C_g τέμνονται στην ευθεία $\varepsilon: x = 1$, τότε θα είναι :

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow \underline{\underline{-1 = \alpha + \beta}}$$

Η C_g διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$, άρα $g(-1) = 3$, οπότε :

$$g(-1) = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{-\alpha + \beta = 3}}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

34. Τα πεδία ορισμού των f και g είναι αντίστοιχα τα $A = (0, +\infty)$ και $B = (0, +\infty)$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g όταν :

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in (0, +\infty) \quad \text{και} \\ f(x) > g(x) &\Leftrightarrow 2\ln x + 3 > \ln^2 x + \ln x + 1 \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(\ln x - 2)(\ln x + 1) < 0$$

Έχουμε :

$$(\ln x - 2)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 = 0 \text{ ή } \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \text{ ή } \ln x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = \ln e^2 \text{ ή } \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^2}} \text{ ή } \underline{\underline{x = \frac{1}{e}}}$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x > e^2$ και
- $\ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^2 \Leftrightarrow x < e^2$
- $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$ και
- $\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow x < e^{-1}$

οπότε :

x	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	e^2	$+\infty$
$\ln x - 2$	-		-	+
$\ln x + 1$	-	+		+
γινόμενο	+	+	-	+

απ'όπου παίρνουμε $x \in \left(\frac{1}{e}, e^2\right)$.

Η C_f λοιπόν βρίσκεται πάνω από την C_g για $\boxed{x \in (e^{-1}, e^2)}$.

35. Έχουμε :

$$f(x) = g(x) + x^2 - 4 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x^2 - 4$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta(x) = f(x) - g(x)$, οπότε $\delta(x) = x^2 - 4$. Βρίσκουμε το πρόσημο της $\delta(x)$:

$$\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \pm 2}}$$

οπότε :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	+	-	+

Άρα :

- Για $x < -2$ και $x > 2$ είναι :

$$\delta(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

- Για $x \in (-2, 2)$ είναι :

$$\delta(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

δηλαδή η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g .

36. Έχουμε :

$$6x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 6x - 4$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta(x) = f(x) - y$, οπότε :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= f(x) - y = x^3 - x + 2 - (6x - 4) = x^3 - x + 2 - 6x + 4 = x^3 - 7x + 6 = \\ &= x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = \end{aligned}$$

$$=(x-1)(x^2+x-6)$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της $\delta(x)$:

$$\begin{aligned}\delta(x)=0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \\ &x=1 \text{ ή } (x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-3}} \text{ ή } \underline{\underline{x=2}}\end{aligned}$$

οπότε :

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
x-1	-	-	$\bigcirc$	+	+		
x^2+x-6	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+	
γινόμενο	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα :

- Για $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$ είναι :

$$\delta(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - y > 0 \Leftrightarrow f(x) > y$$

δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε .

- Για $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$ είναι :

$$\delta(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - y < 0 \Leftrightarrow f(x) < y$$

δηλαδή η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε .

37. i. Αφού η C_f είναι μία παραβολή τότε είναι της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.
Είναι :

$$A(-1, 6) \in C_f \Leftrightarrow f(-1) = 6 \Leftrightarrow a - b + \gamma = 6,$$

$$B(1, 0) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + \gamma = 0 \text{ και}$$

$$\Gamma(2, 0) \in C_f \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + \gamma = 0$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} a - b + \gamma = 6 \\ a + b + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \oplus \\ 2a + 2\gamma = 6 \end{matrix} \Leftrightarrow a + \gamma = 3 \text{ και}$$

$$\begin{cases} a + b + \gamma = 0 \\ 4a + 2b + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \oplus \\ \begin{cases} -2a - 2b - 2\gamma = 0 \\ 4a + 2b + \gamma = 0 \end{cases} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \oplus \\ 2a - \gamma = 0 \end{matrix}$$

Έτσι :

$$\begin{cases} a + \gamma = 3 \\ 2a - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \oplus \\ 3a = 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

Συνεπώς για $a=1$ είναι :

$$1 + \gamma = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{\gamma=2}} \text{ και } 1 - b + 2 = 6 \Leftrightarrow \underline{\underline{b=-3}}$$

Άρα η f είναι η εξής :

$$\boxed{f(x) = x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}}$$

ii. Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $f(x)=0$, οπότε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1$$

Είναι $1, 2 \in \mathbb{R}$. Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $\boxed{A(2, 0)}$ και $\boxed{B(1, 0)}$.

iii. Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

Έτσι έχουμε :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	$\ominus$	-	$\ominus$	+

απ'όπου παίρνουμε $x \in (1, 2)$.

Η C_f λοιπόν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $\boxed{x \in (1, 2)}$.

38. i. Έχουμε :

$$f^2(-2) - f(-2) - 6 = 0 \Leftrightarrow (f(-2) - 3)(f(-2) + 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{f(-2) = 3} \text{ ή } \underline{f(-2) = -2}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-\infty, 1)$ οπότε δεχόμαστε μόνο το $f(-2) = -2$, αφού $-2 \in (-\infty, 1)$ αλλά $3 \notin (-\infty, 1)$.

Για να έχει η C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$, τότε θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

Όμως είναι $f(-2) = -2$, οπότε **η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$.**

ii. Έστω ότι είναι $f=h$. Τότε θα είναι :

$$f(-5) = h(-5) \Leftrightarrow f(-5) = 2$$

Όμως $2 \notin (-\infty, 1)$, οπότε καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα **$f \neq h$.**

39. i. Πρέπει :

$$(x^2 + 1 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει}) \quad \text{και} \quad (x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x)$$

Ισχύει :

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Εναλλακτικός τρόπος

- Αν $x < 0$ τότε $-x > 0$, οπότε :

$$\sqrt{x^2 + 1}^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Αν $x > 0$ τότε $-x < 0$, οπότε η σχέση $\sqrt{x^2 + 1} > -x$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το **$A = \mathbb{R}$.**

ii. Ισχύει :

• Για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$ είναι και $-x \in A = \mathbb{R}$.

• Είναι :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \ln\frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(-x - \sqrt{x^2 + 1})}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \ln\frac{(-x)^2 - \sqrt{x^2 + 1}^2}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left(-\frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \end{aligned}$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{-1} = -\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = -f(x)$$

Άρα η f είναι **περιττή**.

iii. Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $f(x)=0$, οπότε :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = 0 \Leftrightarrow \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \ln 1 \Leftrightarrow \\ x + \sqrt{x^2 + 1} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 - x \quad \begin{array}{l} \text{πρέπει } 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{array} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = (1-x)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + 1 &= 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ δεκτή} \end{aligned}$$

Άρα η C_f **έχει με τον $x'x$ μόνο ένα κοινό σημείο**, το $(0,0)$.

40. Το τριώνυμο $-x^2+x-3$ έχει $\Delta = -11 < 0$, άρα είναι $-x^2+x-3 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι θα είναι και $f^3(x) + \alpha f^2(x) + \beta^2 f(x) < 0$. Οπότε έχουμε :

$$f^3(x) + \alpha f^2(x) + \beta^2 f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) \left(f^2(x) + \alpha f(x) + \beta^2 \right) < 0$$

Για το τριώνυμο $f^2(x) + \alpha f(x) + \beta^2$ είναι $\Delta = \alpha^2 - 4\beta^2 = (\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta)$.

Τα α, β είναι θετικά, οπότε $\alpha + 2\beta > 0$ και επιπλέον ισχύει $\alpha < \beta < 2\beta$, οπότε $\alpha - 2\beta < 0$.

Συνεπώς $\Delta = (\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) < 0$, άρα είναι $f^2(x) + \alpha f(x) + \beta^2 > 0$.

Είναι :

$$f(x) \left(f^2(x) + \alpha f(x) + \beta^2 \right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < 0$$

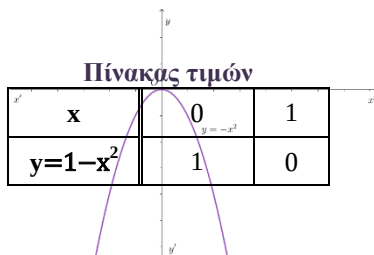
Συνεπώς η C_f **βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$** .

41. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

και

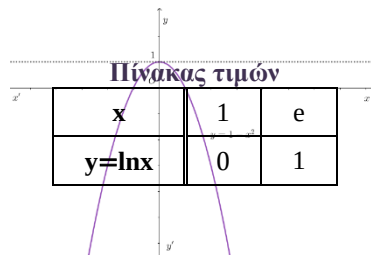


Γνωρίζουμε ότι :

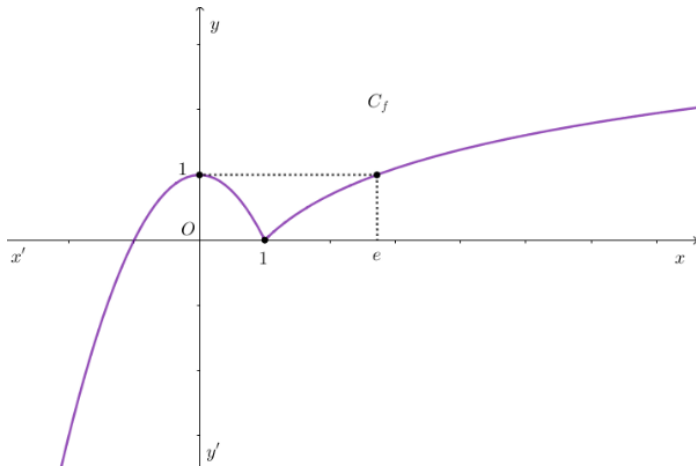


αρχική συνάρτηση

άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



μετατόπιση 1 μονάδα πάνω



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι :

- Η C_f θα έχει τρία κοινά σημεία με την $f(x)=κ$ για $κ \in (0,1)$.
- Η C_f θα έχει δύο κοινά σημεία με την $f(x)=κ$ για $κ=0$ και $κ=1$.
- Η C_f θα έχει ένα κοινό σημείο με την $f(x)=κ$ για $κ \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=κ$ έχει ακριβώς μία ρίζα για $κ \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, δύο ακριβώς ρίζες για $κ=0$ και $κ=1$ και τέλος έχει τρεις ακριβώς ρίζες για $κ \in (0,1)$.

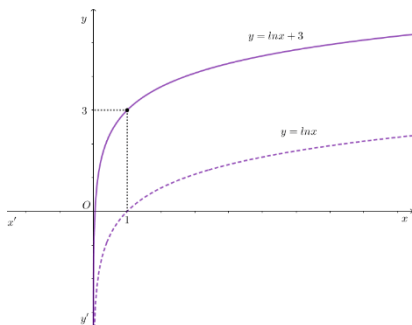
42. i. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε :

$$f(1)=3 \Leftrightarrow \boxed{\beta=3} \quad \text{και} \quad f(0)=-2 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-2 \Leftrightarrow \alpha-\beta=3 \Leftrightarrow \alpha=1$$

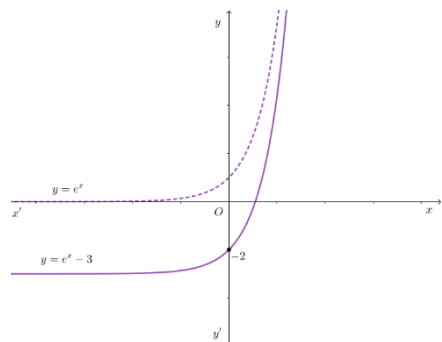
ii. Η f είναι πλέον η :

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + 3 & , x > 0 \\ e^x - 3 & , x \leq 0 \end{cases}$$

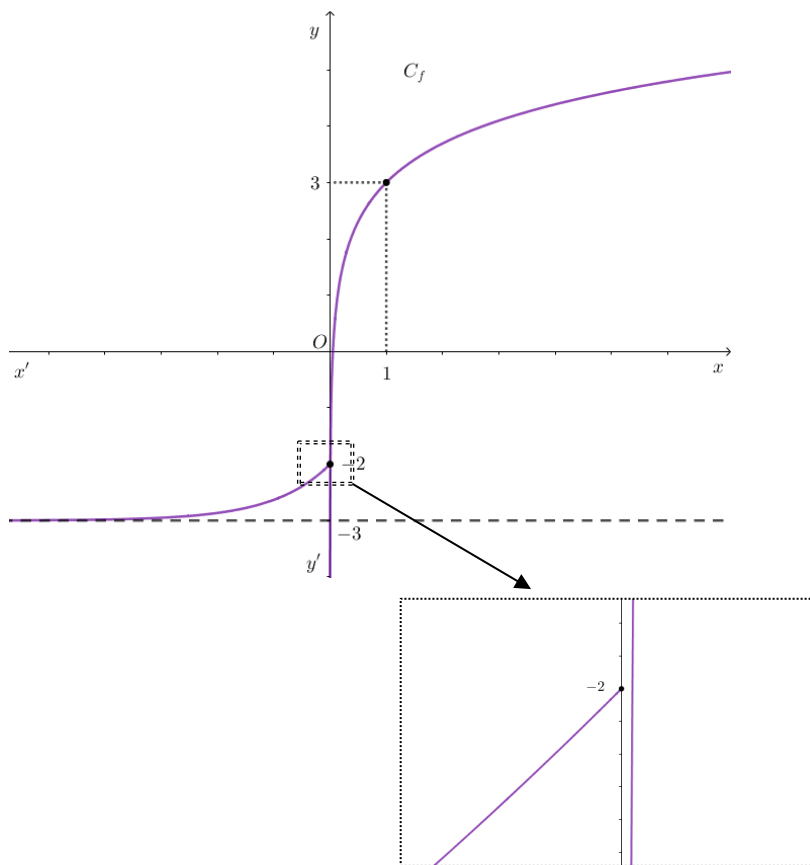
Γνωρίζουμε ότι :



και



άρα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής :



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι :

- Η C_f θα έχει δύο κοινά σημεία με την $f(x)=\lambda$ για $\lambda \in (-3, -2]$.
- Η C_f θα έχει ένα κοινό σημείο με την $f(x)=\lambda$ για $\lambda \in (-\infty, -3] \cup (-2, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα για $\lambda \in (-\infty, -3] \cup (-2, +\infty)$ και ακριβώς δύο ρίζες για $\lambda \in (-3, -2]$.

Πράξεις με συναρτήσεις

- 43.** Είναι $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 1]$ αφού πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$.
Αρα $D_f \cap D_g = (0, 1]$.

- για την $f+g$ έχουμε :

$$D_{f+g} = (0, 1]$$

και

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln x + \sqrt{1-x}$$

Αρα :

$$(f+g)(x) = \ln x + \sqrt{1-x}, x \in (0, 1]$$

- για την $f-g$ έχουμε :

$$D_{f-g} = (0, 1]$$

και

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$$

Αρα :

$$(f-g)(x) = \ln x - \sqrt{1-x}, x \in (0, 1]$$

- για την $f \cdot g$ έχουμε :

$$D_{f \cdot g} = (0, 1]$$

και

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \ln x \cdot \sqrt{1-x}$$

Αρα :

$$(f \cdot g)(x) = \ln x \cdot \sqrt{1-x}, x \in (0, 1]$$

- για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \neq 0 \Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Έτσι είναι $D_{\frac{f}{g}} = (0, 1)$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$$

Αρα :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}, x \in (0, 1)$$

- για την $\frac{g}{f}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \ln 1 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Έτσι είναι $D_{\frac{g}{f}} = (0,1)$ και

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$$

Άρα :

$$\boxed{\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}, x \in (0,1)}$$

44. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ αφού πρέπει $4 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4$.
Άρα $D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-2, -1, 2\}$.

- για την $f \cdot g$ έχουμε :

$$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 2\}$$

και

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{4-x^2} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{(2-x)(2+x)} = \\ &= -\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = -\frac{x-1}{x-2} = \frac{1-x}{x-2} \end{aligned}$$

Άρα :

$$\boxed{(f \cdot g)(x) = \frac{1-x}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 2\}}$$

- για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{4-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Έτσι είναι $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$ και

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-2}{x+1}}{\frac{x^2-1}{4-x^2}} = \frac{\frac{x-2}{x+1}}{\frac{(x-1)(x+1)}{(2-x)(2+x)}} = \frac{(x-2)(2-x)(2+x)}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= -\frac{(x-2)(x-2)(2+x)}{(x+1)^2(x-1)} = -\frac{(x-2)^2(2+x)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x+1)^2(1-x)} \end{aligned}$$

Άρα :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x+1)^2(1-x)}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}}$$

45. Για να ορίζεται η $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ πρέπει :

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1$$

Άρα $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ πρέπει :

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2]$$

αφού :

η $x^2 - x - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $x=2, -1$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
x^2-x-2	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα $D_g = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

Έτσι έχουμε $D_f \cap D_g = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

- για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq -1$$

Έτσι είναι $D_{\frac{f}{g}} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}} = \sqrt{\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cancel{(x+1)}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

Άρα :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

46. Είναι $D_f = [2, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 1)$ αφού πρέπει $1-x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$.

Παρατηρούμε πως $D_f \cap D_g = \emptyset$, άρα **δεν ορίζεται καμία από τις ζητούμενες συναρτήσεις.**

47. Είναι $D_f = [1, +\infty)$ και $D_g = (a, +\infty)$.

i. Το ευρύτερο δυνατό κοινό πεδίο ορισμού το έχουν όταν **$a=1$** .

ii. Άρα $D_{f-g} = (1, +\infty)$.

- για την $f-g$ έχουμε :

$$D_{f-g} = (1, +\infty)$$

και

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \ln(x-1)$$

Άρα :

$$(f-g)(x) = \sqrt{x-1} - \ln(x-1), x \in (1, +\infty)$$

- για την $f \cdot g$ έχουμε :

$$D_{f \cdot g} = (1, +\infty)$$

και

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \ln(x-1)$$

Άρα :

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x-1} \cdot \ln(x-1), x \in (1, +\infty)$$

- για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) \neq \ln 1 \Leftrightarrow x-1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Έτσι είναι $D_{\frac{f}{g}} = (1, 2) \cup (2, +\infty)$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(x-1)}$$

Άρα :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(x-1)}, x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

- 48.** Για να ορίζεται η $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ πρέπει :

$$e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow e^x \neq e^0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Άρα $D_f = \mathbb{R}^*$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \sqrt{1-e^x}$ πρέπει :

$$1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq e^0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Άρα $D_g = (-\infty, 0]$.

Έτσι έχουμε $D_f \cap D_g = (-\infty, 0)$.

- i.** Για την $f - g$ έχουμε :

$$D_{f-g} = (-\infty, 0)$$

και

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - \sqrt{1 - e^x}$$

Άρα :

$$(f - g)(x) = \frac{x}{e^x - 1} - \sqrt{1 - e^x}, x \in (-\infty, 0)$$

- ii.** Για την $f \cdot g$ έχουμε :

$$D_{f \cdot g} = (-\infty, 0)$$

και

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = \frac{x}{e^x - 1} \cdot \sqrt{1 - e^x} = -\frac{x\sqrt{1 - e^x} \cdot \sqrt{1 - e^x}}{(1 - e^x)\sqrt{1 - e^x}} = \\
 &= -\frac{\cancel{x(1 - e^x)}}{(1 - e^x)\sqrt{1 - e^x}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - e^x}}
 \end{aligned}$$

Άρα :

$$(f \cdot g)(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - e^x}}, x \in (-\infty, 0)$$

iii. Για την $g^2 - \frac{1}{f}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Έτσι είναι $D_{\frac{1}{f}} = (-\infty, 0)$ και

$$\begin{aligned}
 \left(g^2 - \frac{1}{f}\right)(x) &= g^2(x) - \frac{1}{f(x)} = \sqrt{1 - e^x}^2 - \frac{1}{\frac{x}{e^x - 1}} = 1 - e^x - \frac{e^x - 1}{x} = \\
 &= \frac{x(1 - e^x)}{x} + \frac{1 - e^x}{x} = \frac{x(1 - e^x) + (1 - e^x)}{x} = \frac{(x + 1)(1 - e^x)}{x}
 \end{aligned}$$

Άρα :

$$\left(g^2 - \frac{1}{f}\right)(x) = \frac{(x + 1)(1 - e^x)}{x}, x \in (-\infty, 0)$$

49. i. Για να ορίζεται η $f(x) = \ln(e^x - 1)$ πρέπει :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα $D_f = (0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \ln(e - e^x)$ πρέπει :

$$e - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow x < 1$$

Άρα $D_g = (-\infty, 1)$.

ii. Έχουμε $D_f \cap D_g = (0, 1)$.

- για την $f - g$ έχουμε :

$$D_{f-g} = (0, 1)$$

και

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(e - e^x) = \ln \frac{e^x - 1}{e - e^x}$$

Άρα :

$$(f-g)(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e - e^x}, x \in (0, 1)$$

- για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(e - e^x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(e - e^x) \neq \ln 1 \Leftrightarrow e - e^x \neq 1 \Leftrightarrow e^x \neq e - 1 \Leftrightarrow x \neq \ln(e - 1)$$

Είναι :

$$e > 2 \Leftrightarrow e - 1 > 1 \Leftrightarrow \ln(e - 1) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(e - 1) > 0 \text{ και}$$

$$e - 1 < e \Leftrightarrow \ln(e - 1) < \ln e \Leftrightarrow \ln(e - 1) < 1$$

Έτσι είναι $D_{\frac{f}{g}} = (0, \ln(e - 1)) \cup (\ln(e - 1), 1)$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln(e - e^x)}$$

Άρα :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln(e - e^x)}, x \in (0, \ln(e - 1)) \cup (\ln(e - 1), 1)$$

- 50.** Για να ορίζεται η $f(x) = \ln \frac{2x}{x+1}$ πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

αφού :

η $2x(x+1)=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x=0$ έχει ρίζες τις $x=0, -1$, οπότε :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$2x^2+2x$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Επίσης είναι $D_g = (-1, +\infty)$.

Έτσι έχουμε $D_f \cap D_g = (0, +\infty)$.

- i.** Για την $f+g$ έχουμε :

$$D_{f+g} = (0, +\infty)$$

και

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln \frac{2x}{x+1} + \ln(x+1) = \ln \left[\frac{2x}{\cancel{x+1}} (\cancel{x+1}) \right] = \ln 2x$$

Άρα :

$$(f+g)(x) = \ln 2x, x \in (0, +\infty)$$

ii. Για την $f-g$ έχουμε :

$$D_{f-g} = (0, +\infty)$$

και

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \ln \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1) = \ln \frac{2x}{x+1} - \ln \frac{x+1}{x+1} = \ln \frac{2x}{(x+1)^2}$$

Άρα :

$$(f-g)(x) = \ln \frac{2x}{(x+1)^2}, x \in (0, +\infty)$$

iii. Για την $f \cdot g$ έχουμε :

$$D_{f \cdot g} = (0, +\infty)$$

και

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \ln \frac{2x}{x+1} \cdot \ln(x+1)$$

Άρα :

$$(f \cdot g)(x) = \ln \frac{2x}{x+1} \cdot \ln(x+1), x \in (0, +\infty)$$

iv. Για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει επιπλέον :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \neq \ln 1 \Leftrightarrow x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Έτσι είναι $D_{\frac{f}{g}} = (0, +\infty)$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln \frac{2x}{x+1}}{\ln(x+1)} = \frac{\ln 2x - \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{\ln 2x}{\ln(x+1)} - 1$$

Άρα :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln 2x}{\ln(x+1)} - 1, x \in (0, +\infty)$$

51. Για κάθε $x \in A$ έχουμε :

$$(f+g)(x)[(f+g)(x)+4] = 2[(f \cdot g)(x)-4] \Leftrightarrow$$

$$(f+g)^2(x) + 4(f+g)(x) = 2(f \cdot g)(x) - 8 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)+g(x))^2 + 4(f(x)+g(x)) = 2f(x)g(x) - 8 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + \cancel{2f(x)g(x)} + g^2(x) + 4f(x) + 4g(x) = \cancel{2f(x)g(x)} - 8 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 4f(x) + 4 + g^2(x) + 4g(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)+2)^2 + (g(x)+2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)+2=0 \text{ και } g(x)+2=0 \Leftrightarrow \\ f(x)=-2 \text{ και } g(x)=-2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

Είναι $D_f=D_g=A$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x)=g(x)$, άρα $\mathbf{f=g}$.

52. Για κάθε $x \in A$ έχουμε :

$$(f+g)(x)[(f+g)(x)-10] \leq 2[(f \cdot g)(x)-25] \Leftrightarrow \\ (f+g)^2(x) - 10(f+g)(x) \leq 2(f \cdot g)(x) - 50 \Leftrightarrow \\ (f(x)+g(x))^2 - 10(f(x)+g(x)) \leq 2f(x)g(x) - 50 \Leftrightarrow \\ f^2(x) + \cancel{2f(x)g(x)} + g^2(x) - 10f(x) - 10g(x) \leq \cancel{2f(x)g(x)} - 50 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 10f(x) + 25 + g^2(x) - 10g(x) + 25 \leq 0 \Leftrightarrow \\ (f(x)-5)^2 + (g(x)-5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x)-5=0 \text{ και } g(x)-5=0 \Leftrightarrow \\ f(x)=5 \text{ και } g(x)=5 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

Είναι $D_f=D_g=A$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x)=g(x)$, άρα $\mathbf{f=g}$.

53. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$[(f+g)(x)]^2 - 4(f-g)(x) = 2[(f \cdot g)(x) - 4] \Leftrightarrow \\ (f(x)+g(x))^2 - 4(f(x)-g(x)) = 2(f \cdot g)(x) - 8 \Leftrightarrow \\ f^2(x) + \cancel{2f(x)g(x)} + g^2(x) - 4f(x) + 4g(x) = \cancel{2f(x)g(x)} - 8 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 4f(x) + 4 + g^2(x) + 4g(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x)-2)^2 + (g(x)+2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)-2=0 \text{ και } g(x)+2=0 \Leftrightarrow \\ f(x)=2 \text{ και } g(x)=-2$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x)=2$ και $g(x)=-2$, άρα **οι f και g είναι σταθερές συναρτήσεις.**

54. Για κάθε $x \in A$ έχουμε :

$$[(f-g)(x)]^2 = 2[(f-g)(x) - (f \cdot g)(x) - 1] \Leftrightarrow \\ (f(x)-g(x))^2 = 2(f-g)(x) - 2(f \cdot g)(x) - 2 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - \cancel{2f(x)g(x)} + g^2(x) = 2(f(x)-g(x)) - \cancel{2f(x)g(x)} - 2 \Leftrightarrow \\ f^2(x) + g^2(x) = 2f(x) - 2g(x) - 2 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 2f(x) + 1 + g^2(x) + 2g(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x)-1)^2 + (g(x)+1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \text{ και } g(x)+1=0 \Leftrightarrow \\ f(x)=1 \text{ και } g(x)=-1 \Leftrightarrow g(x)=-f(x)$$

Είναι $D_f=D_g=A$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε $g(x)=-f(x)$, άρα $\mathbf{g=-f}$.

55. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} (f-g)^2(x) + 4(f \cdot g)(x) &\leq 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))^2 + 4f(x)g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) + 4f(x)g(x) &\leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x) \leq 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) + g(x))^2 &\leq 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = -f(x) \end{aligned}$$

Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) = -f(x)$, άρα $g = -f$. Δηλαδή **οι C_f και C_g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.**

56. Παρατηρούμε πως $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (0, +\infty)$, οπότε είναι $D_f \cap D_g = (0, +\infty)$. Έχουμε :

x	0	2	3	$+\infty$
f(x)		$2x+1$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$
g(x)		$\ln x$	$\ln x$	$-2x+3$
(f+g)(x)		$2x+1+\ln x$	$\sqrt{x} + \ln x$	$\sqrt{x} - 2x+3$
(f·g)(x)		$(2x+1)\ln x$	$\sqrt{x} \cdot \ln x$	$\sqrt{x}(3-2x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$		$\frac{2x+1}{\ln x}$	$\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$	$\frac{\sqrt{x}}{3-2x}$

Οπότε :

i.
$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1+\ln x, & 0 < x \leq 2 \\ \ln x + \sqrt{x}, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x} - 2x+3, & x \geq 3 \end{cases}$$

ii.
$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} (2x+1)\ln x, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x} \ln x, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x}(3-2x), & x \geq 3 \end{cases}$$

iii. Για την $\frac{f}{g}$ επιπλέον πρέπει :

- για $0 < x < 3$: $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \ln 1 \Leftrightarrow x \neq 1$
- για $x \geq 3$: $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow -2x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

Έτσι παίρνουμε :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{\ln x}, & 0 < x < 1 \text{ ή } 1 < x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x}}{\ln x}, & 2 < x < 3 \\ \frac{\sqrt{x}}{3-2x}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Σύνθεση συναρτήσεων

- 57. i.** Είναι $D_f = [-1, +\infty)$ και $D_g = [1, +\infty)$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = [0, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{\sqrt{x+1}-1}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}-1}, \quad x \geq 0$$

- ii.** Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{9\}$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 + 5 \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 2$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 5) = \frac{1}{x^2 + 5 - 9} = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad x \neq \pm 2$$

- iii.** Είναι $D_f = [0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ πρέπει :

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Άρα $D_g = [-1, 1]$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x}-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = [0, 4]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{x}-1) = \sqrt{1-(\sqrt{x}-1)^2} = \sqrt{1-(x-2\sqrt{x}+1)} = \\ &= \sqrt{1-x+2\sqrt{x}-1} = \sqrt{2\sqrt{x}-x} \end{aligned}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{2\sqrt{x}-x}, \quad x \in [0, 4]$$

iv. Είναι $D_f = [3, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R} - \{4\}$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{x-3} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-3 \neq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3, 19) \cup (19, +\infty)$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = [3, 19) \cup (19, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-3}) = \frac{5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}-4}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = \frac{5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}-4}, \quad x \in [3, 19) \cup (19, +\infty)$$

58. Είναι $D_f = \mathbb{R}$, αφού $e^x + 1 > 0$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)(1-x) > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Άρα $D_g = (-1, 1)$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -1 < \frac{e^x-1}{e^x+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < \frac{e^x-1}{e^x+1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \frac{e^x-1}{e^x+1} \\ \frac{e^x-1}{e^x+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} -e^x - 1 < e^x - 1 \\ e^x - 1 < e^x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x > 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ -1 < 1, \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{e^x-1}{e^x+1}}{1-\frac{e^x-1}{e^x+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^x+1+e^x-1}{e^x+1}}{\frac{e^x+1-e^x+1}{e^x+1}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{2e^x}{2}\right) = \ln e^x = x \end{aligned}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

59. Είναι $D_f = (1, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \sqrt{-x}$ πρέπει :

$$-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Άρα $D_g = (-\infty, 0]$.

i. Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) \leq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2 \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = (1, 2]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(x-1)) = \sqrt{-\ln(x-1)}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{-\ln(x-1)}, \quad x \in (1, 2]$$

ii. Για την $f \circ f$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) > \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 > e \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x > 1 \\ x > e+1 \end{cases} \Leftrightarrow x > e+1 \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ f} = (e+1, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\ln(x-1)) = \ln(\ln(x-1)-1)$$

Άρα :

$$(f \circ f)(x) = \ln(\ln(x-1)-1), \quad x > e+1$$

60. Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$.

i. Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3x}{x-2} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{2\}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x}{x-2}\right) = e^{\frac{3x}{x-2}} - \frac{3x}{x-2}$$

Άρα :

$$(f \circ g)(x) = e^{\frac{3x}{x-2}} - \frac{3x}{x-2}, \quad x \neq 2$$

ii. Για την $g \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3x}{x-2} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 3x \neq 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -4, 2$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ g} = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{3x}{x-2}\right) = \frac{3 \frac{3x}{x-2}}{\frac{3x}{x-2} - 2} = \frac{\cancel{3} \frac{3x}{\cancel{x-2}}}{\frac{3x}{\cancel{x-2}} - 2} = \frac{9x}{3x - 2x + 4} = \frac{9x}{x+4}$$

Άρα :

$$(g \circ g)(x) = \frac{9x}{x+4}, \quad x \neq -4, 2$$

61. Είναι $D_f = [1, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{x-3}{2x-1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{x-3}{2x-1} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{x-3-2x+1}{2x-1} \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{-x-2}{2x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{x+2}{2x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ (x+2)(2x-1) \leq 0 \text{ με } 2x-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

αφού :

η $(x+2)(2x-1)=0$ έχει ρίζες τις $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$, οπότε :

x	$-\infty$	-2	1/2	$+\infty$	
$(x+2)(2x-1)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = \left[-2, \frac{1}{2}\right)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-3}{2x-1}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2x-1} - 1} = \sqrt{\frac{x-3-2x+1}{2x-1}} = \sqrt{\frac{-x-2}{2x-1}} = \sqrt{\frac{x+2}{1-2x}}$$

Άρα :

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{1-2x}}, \quad x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right)$$

Για την $g \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{x-3}{2x-1} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ 2x-1 \neq 2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ -1 \neq -6, \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ g} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x-3}{2x-1}\right) = \frac{\frac{x-3}{2x-1} - 3}{2 \frac{x-3}{2x-1} - 1} = \frac{\frac{x-3-6x+3}{2x-1}}{\frac{2x-6-2x+1}{2x-1}} = \frac{\frac{-5x}{2x-1}}{\frac{-5}{2x-1}} = x$$

Άρα :

$$(g \circ g)(x) = x, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

62. Είναι $D_\varphi = [-1, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ πρέπει :

$$4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Άρα $D_h = [-2, 2]$.

i. Για την $h \circ \varphi$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in D_\varphi \\ \varphi(x) \in D_h \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -2 \leq \sqrt{x+1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \geq -2 \text{ και } \sqrt{x+1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ (\sqrt{x+1} \geq -2, \text{ ισχύει}) \text{ και } x+1 \leq 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{h \circ \varphi} = [-1, 3]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(h \circ \varphi)(x) = h(\varphi(x)) = h(\sqrt{x+1}) = \sqrt{4 - \sqrt{x+1}^2} = \sqrt{4-x-1} = \sqrt{3-x}$$

Άρα :

$$(h \circ \varphi)(x) = \sqrt{3-x}, \quad x \in [-1, 3]$$

ii. Για την $\varphi \circ h$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} \geq -1, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Συνεπώς είναι $D_{\varphi \circ h} = [-2, 2]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(\varphi \circ h)(x) = \varphi(h(x)) = \varphi(\sqrt{4-x^2}) = \sqrt{\sqrt{4-x^2} + 1}$$

Άρα :

$$\boxed{(\varphi \circ h)(x) = \sqrt{\sqrt{4-x^2} + 1}, \quad x \in [-2, 2]}$$

63. Είναι $D_f = [0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}^*$ και $D_h = (0, +\infty)$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = (0, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Άρα :

$$\underline{\underline{(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0}}$$

Για την $h \circ (g \circ f)$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_{g \circ f} \\ (g \circ f)(x) \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \text{ ισχύει για κάθε } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Συνεπώς είναι $D_{h \circ (g \circ f)} = (0, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{x}} = \ln x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln x$$

Άρα :

$$\boxed{[h \circ (g \circ f)](x) = -\frac{1}{2} \ln x, \quad x > 0}$$

64. Είναι $D_h = [4, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ πρέπει :

$$25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow |x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$$

Άρα $D_f = [-5, 5]$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ πρέπει :

$$9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Άρα $D_g = [-3, 3]$.

i. Για την $f \circ f$ πρέπει :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq \sqrt{25-x^2} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{25-x^2} \geq -5 \text{ και } \sqrt{25-x^2} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ \left(\sqrt{25-x^2} \geq -5, \text{ ισχύει} \right) \text{ και } 25-x^2 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5
\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ f} = [-5, 5]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f\left(\sqrt{25-x^2}\right) = \sqrt{25-\sqrt{25-x^2}^2} = \sqrt{25-(25-x^2)} = \\
&= \sqrt{25-25+x^2} = \sqrt{x^2} = |x|
\end{aligned}$$

Αρα :

$$\boxed{(f \circ f)(x) = |x|, \quad x \in [-5, 5]}$$

ii. Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -5 \leq \sqrt{9-x^2} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{9-x^2} \geq -5 \text{ και } \sqrt{9-x^2} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ \left(\sqrt{9-x^2} \geq -5, \text{ ισχύει} \right) \text{ και } 9-x^2 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x^2 \geq -16, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& -3 \leq x \leq 3
\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = [-3, 3]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\sqrt{9-x^2}\right) = \sqrt{25-\sqrt{9-x^2}^2} = \sqrt{25-(9-x^2)} = \\
&= \sqrt{25-9+x^2} = \sqrt{16+x^2}
\end{aligned}$$

Αρα :

$$\underline{\underline{(f \circ g)(x) = \sqrt{16+x^2}, \quad x \in [-3, 3]}}$$

Για την $(f \circ g) \circ h$ πρέπει :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_{f \circ g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -3 \leq \sqrt{x-4} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x-4} \geq -3 \text{ και } \sqrt{x-4} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} x \geq 4 \\ \left(\sqrt{x-4} \geq -3, \text{ ισχύει} \right) \text{ και } x-4 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 13
\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{(f \circ g) \circ h} = [4, 13]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(\sqrt{x-4}) = \sqrt{16+\sqrt{x-4}^2} = \sqrt{16+x-4} =$$

$$= \sqrt{12+x}$$

Άρα :

$$\boxed{[(f \circ g) \circ h](x) = \sqrt{12+x}, \quad x \in [4, 13]}$$

65. i. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$ και $D_g = \mathbb{R}$.

Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 - x + 2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq -1 \text{ και } x \neq 2$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - x + 2) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x + 2 - 4} = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$$

Άρα :

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}, \quad x \neq -1, 2}$$

ii. Είναι $D_g = \mathbb{R}$.

Για να ορίζεται η $f(x) = \sqrt{8+2x-x^2}$ πρέπει :

$$8+2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

αφού :

η $(x-4)(x+2)=0$ έχει ρίζες τις $x=4$, $x=-2$, οπότε :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$(x-4)(x+2)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα $D_f = [-2, 4]$.

Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -2 \leq x^2 + x - 2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq -2 \\ x^2 + x - 2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+1) \geq 0 \\ (x-2)(x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ ή } x \geq 0 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3, -1] \cup [0, 2]$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = [-3, -1] \cup [0, 2]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + x - 2) = \sqrt{8+2(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)^2} = \\ &= \sqrt{8+2x^2+2x-4 - (x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x)} = \\ &= \sqrt{2x^2+2x+4 - (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2x^2 + 2x + 4 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4} = \sqrt{-x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x}$$

Άρα :

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{-x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x}, \quad x \in [-3, -1] \cup [0, 2]$$

- 66. i.** Για την $f(x^2)$ πρέπει $x^2 \in [0, 1]$. Έτσι έχουμε :

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f(x^2)$ είναι το $D=[-1, 1]$.

- ii.** Για την $f(x-4)$ πρέπει $x-4 \in [0, 1]$. Έτσι έχουμε :

$$0 \leq x-4 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f(x-4)$ είναι το $D=[4, 5]$.

- iii.** Για την $f(\ln x)$ πρέπει $\ln x \in [0, 1]$ και $x > 0$ (από το $\ln x$). Έτσι έχουμε :

$$(0 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow \underline{1 \leq x \leq e}) \text{ και } \underline{x > 0} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f(\ln x)$ είναι το $D=[1, e]$.

- iv.** Για την $f(e^{x-1})$ πρέπει $e^{x-1} \in [0, 1]$. Έτσι έχουμε :

$$0 \leq e^{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ e^{x-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow e^{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \ln e^{x-1} \leq \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f(e^{x-1})$ είναι το $D=(-\infty, 1]$.

- 67.** Αφού μέσα στη g υπάρχουν οι συναρτήσεις $f(x-1)$ και $f(\ln x)$, τότε πρέπει να ισχύει αντίστοιχα $x-1 \in [0, 1]$ και $\ln x \in [0, 1]$ και επιπλέον λόγω του $\ln x$ πρέπει να είναι και $x > 0$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{cases} 0 \leq x-1 \leq 1 \\ 0 \leq \ln x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq e \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g=[1, 2]$.

- 68.** Αφού μέσα στη g υπάρχουν οι συναρτήσεις $f(x-1)$ και $f(x^2-4x+2)$, τότε πρέπει να ισχύει αντίστοιχα $x-1 \in [2, +\infty]$ και $x^2-4x+2 \in [2, +\infty]$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{cases} x-1 \geq 2 \\ x^2-4x+2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$$

αφού :

η $x(x-4)=0$ έχει ρίζες τις $x=0$, $x=4$, οπότε :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x(x-4)$	$+$	$\oplus$	$-$	$\oplus$

Επιπλέον πρέπει να ισχύει $(\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1)$ και $x > 0$. Άρα :

$$x \geq 4 \text{ και } x \neq 1 \text{ και } x > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x \geq 4}}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g = [4, +\infty]$.

69. Είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \ln(x^3 - 1)$ πρέπει :

$$x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα $D_g = (1, +\infty)$.

i. Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x^3 - 1) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = (1, +\infty)$.

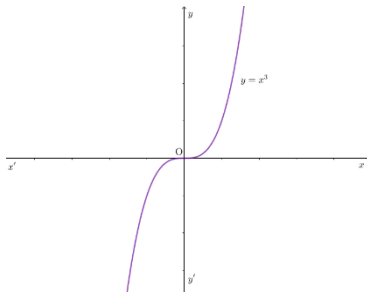
Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x^3 - 1)) = e^{\ln(x^3 - 1)} = x^3 - 1$$

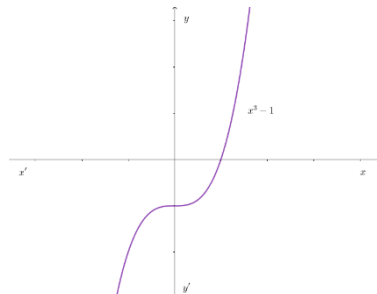
Άρα :

$$(f \circ g)(x) = x^3 - 1, \quad x > 1$$

ii. Για τη γραφική παράσταση της $(f \circ g)(x) = x^3 - 1$ έχουμε :

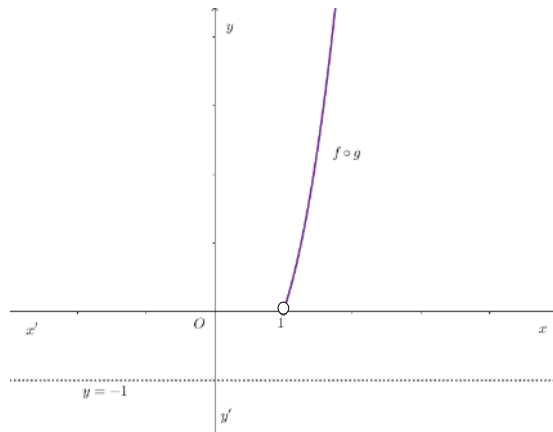


αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 1 μονάδας κάτω

Άρα η γραφική παράσταση της $(f \circ g)(x) = x^3 - 1, x > 1$ είναι η εξής :



ii. Από τη
παράσταση βρίσκουμε εύκολα το σύνολο τιμών της $f \circ g$:

γραφική

$$(f \circ g)(D_{f \circ g}) = (0, +\infty)$$

70. Είναι $D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = \mathbb{R}$.

i. Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x-10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 10$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{10\}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-10) = \frac{e^{x-10} - 1}{x}$$

Άρα :

$$(f \circ g)(x) = \frac{e^{x-10} - 1}{x-10}, \quad x \neq 10$$

ii. Αναζητούμε τα πρόσημα της $f \circ g$:

$$(e^{x-10} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-10} = 1 \Leftrightarrow x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 10) \text{ και } (x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 10)$$

Επιπλέον έχουμε :

- $e^{x-10} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-10} > 1 \Leftrightarrow x-10 > 0 \Leftrightarrow x > 10$ και
- $e^{x-10} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-10} < 1 \Leftrightarrow x-10 < 0 \Leftrightarrow x < 10$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$e^{x-10} - 1$	-	$\bigcirc$	+
$x-10$	-	$\bigcirc$	+
$f \circ g$	+	$\bigcirc$	+

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως είναι $(f \circ g)(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{10\}$, δηλαδή η γραφική παράσταση της $f \circ g$ βρίσκεται **πάνω από τον άξονα $x'x$** .

71. Είναι $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.

i. Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{1-x}{1+x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (1-x)(1+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = (-1, 1)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

Άρα :

$$(f \circ g)(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in (-1, 1)$$

ii. Παρατηρούμε ότι :

- για κάθε $x \in D_{f \circ g}$ είναι και $-x \in D_{f \circ g}$
- $(f \circ g)(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -(f \circ g)(x)$

Άρα η $f \circ g$ είναι **περιττή** συνάρτηση.

72. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

- Για $g(x) = x+2, x \leq 1$ έχουμε :

Είναι $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 1]$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = (0, 1]$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + \ln x) = 1 + \ln x + 2 = \ln x + 3$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = \ln x + 3, \quad x \in (0, 1]$$

- Για $g(x) = 1-x^2, x > 1$ έχουμε :

Είναι $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = (1, +\infty)$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = (1, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(1 + \ln x) = 1 - (1 + \ln x)^2 = 1 - 1 - 2 \ln x - \ln^2 x = \\ &= -2 \ln x - \ln^2 x \end{aligned}$$

Άρα :

$$(g \circ f)(x) = -2 \ln x - \ln^2 x, \quad x \in (1, +\infty)$$

Οπότε είναι :

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \ln x + 3 & , \quad 0 < x \leq 1 \\ -2 \ln x - \ln^2 x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Εύρεση παραμέτρων

- 73.** Αφού ισχύει $f \circ g = g \circ f$ τότε θα είναι $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$ και $f(g(x)) = g(f(x))$.
Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$, άρα και $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - \lambda^2) = 3x - \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2\lambda + 1) = 3(x + 2\lambda + 1) - \lambda^2 = 3x + 6\lambda + 3 - \lambda^2$$

Οπότε :

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow \cancel{3x} - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda + 1 = \cancel{3x} + 6\lambda + 3 - \cancel{\lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$4\lambda = -2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}}$$

- 74.** Είναι $D_f = \mathbb{R}$ άρα και $D_{f \circ f \circ f} = \mathbb{R}$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(\alpha x + \beta)) = f(\alpha(\alpha x + \beta) + \beta) = f(\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta) = \\ &= \alpha(\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta) + \beta = \alpha^3 x + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta \end{aligned}$$

Οπότε :

$$(f \circ f \circ f)(x) = 64x + 21 \Leftrightarrow \alpha^3 x + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta = 64x + 21 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 64 \\ \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ 16\beta + 4\beta + \beta = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ 21\beta = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

- 75.** Αφού ισχύει $f \circ g = g \circ f$ τότε θα είναι $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$ και $f(g(x)) = g(f(x))$.
Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$, άρα και $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2\alpha^2 x + \alpha) = 2(2\alpha^2 x + \alpha) + 1 = 4\alpha^2 x + 2\alpha + 1$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 2\alpha^2(2x + 1) + \alpha = 4\alpha^2 x + 2\alpha^2 + \alpha$$

Οπότε :

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow \cancel{4\alpha^2 x} + 2\alpha + 1 = \cancel{4\alpha^2 x} + 2\alpha^2 + \alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

Είναι $\Delta = 9$, άρα :

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \alpha_1 = 1, \text{ ή} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Για $\alpha = 1$ είναι $g(x) = 2x + 1 = f(x)$, το οποίο απορρίπτεται αφού $f \neq g$.

Για $\alpha = -\frac{1}{2}$ είναι $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, το οποίο είναι δεκτό. Άρα $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$.

- 76.** Αφού ισχύει $f \circ g = g \circ f$ τότε θα είναι $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$ και $f(g(x)) = g(f(x))$.
Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$, άρα και $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\beta x + 2) = 3(\beta x + 2) + \alpha = 3\beta x + 6 + \alpha$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + \alpha) = \beta(3x + \alpha) + 2 = 3\beta x + \alpha\beta + 2$$

Οπότε :

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow \cancel{3\beta x} + 6 + \alpha = \cancel{3\beta x} + \alpha\beta + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha\beta - \alpha - 4 = 0}}$$

Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$, άρα $f(1)=g(1)$:

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow 3 + \alpha = \beta + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = \alpha + 1}}$$

Οπότε :

$$\alpha(\alpha + 1) - \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$$

Για $\alpha=2$ είναι $\beta=3$ και για $\alpha=-2$ είναι $\beta=-1$.

- 77.** Αφού ισχύει $f \circ g = g \circ f$ τότε θα είναι $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$ και $f(g(x)) = g(f(x))$.
Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$, άρα και $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + \alpha x + \beta) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2 - (x^2 + \alpha x + \beta) =$$

$$= x^4 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 + 2\alpha x^3 + 2\alpha\beta x + 2\beta x^2 - x^2 - \alpha x - \beta =$$

$$= x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 1)x^2 + (2\alpha\beta - \alpha)x + \beta^2 - \beta$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 + \alpha(x^2 - x) + \beta =$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 + \alpha x^2 - \alpha x + \beta = x^4 - 2x^3 + (\alpha + 1)x^2 - \alpha x + \beta$$

Οπότε :

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^4} + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 1)x^2 + (2\alpha\beta - \alpha)x + \beta^2 - \beta = \cancel{x^4} - 2x^3 + (\alpha + 1)x^2 - \alpha x + \beta \Leftrightarrow$$

Πρέπει :

$$2\alpha = -2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}} \text{ και } \alpha^2 + 2\beta - 1 = \alpha + 1 \stackrel{\alpha=-1}{\Leftrightarrow} 1 + 2\beta - 1 = -1 + 1 \Leftrightarrow 2\beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}$$

$$\text{και } 2\alpha\beta - \alpha = -\alpha \stackrel{\alpha=-1}{\Leftrightarrow} 1 = 1, \text{ ισχύει και } \beta^2 - \beta = \beta \stackrel{\beta=0}{\Leftrightarrow} 0 = 0, \text{ ισχύει}$$

Άρα $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

- 78.** Αφού ισχύει $f \circ g = g \circ f$ τότε θα είναι $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$ και $f(g(x)) = g(f(x))$.
Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$, άρα και $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Στη συνάρτηση $g(x)=x^2+\alpha x+\beta$ θέτουμε όπου x το $f(x)$ και έχουμε :

$$g(f(x)) = f^2(x) + \alpha f(x) + \beta \Leftrightarrow f(g(x)) = f^2(x) + \alpha f(x) + \beta \Leftrightarrow$$

$$f(g(x)) = f^2(x) + \alpha f(x) + \beta$$

Έστω $x=\xi$ όπου $\xi \in \mathbb{R}$ μοναδικό τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$. Άρα :

$$f(g(\xi)) = f^2(\xi) + \alpha f(\xi) + \beta \stackrel{f(\xi)=\xi}{\Leftrightarrow} f(\xi^2 + \alpha\xi + \beta) = \xi^2 + \alpha\xi + \beta$$

Υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$, άρα :

$$\xi^2 + \alpha\xi + \beta = \xi \Leftrightarrow \xi^2 + (\alpha-1)\xi + \beta = 0$$

Πρέπει $\Delta=0$, άρα :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{(\alpha-1)^2 = 4\beta}$$

Εύρεση συνάρτησης από γνωστή σύνθεση

79. Έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow f(g(x)) = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow f(-e^x) = \sqrt{1+e^x}$$

Θέτουμε όπου $-e^x$ το y και έχουμε :

$$-e^x = y \Leftrightarrow e^x = -y \text{ με } -y > 0 \Leftrightarrow y < 0$$

Οπότε :

$$f(y) = \sqrt{1-y}, y < 0 \quad (1-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1)$$

Άρα :

$$\boxed{f(x) = \sqrt{1-x}, x < 0}$$

80. Έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = e^x - x + 1 \stackrel{g(x)=3x-2}{\Leftrightarrow} 3f(x) - 2 = e^x - x + 1 \Leftrightarrow$$

$$3f(x) = e^x - x + 3 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}x + 1, x \in \mathbb{R}}$$

81. Έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = 18x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = 18x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(3x-2) = 2 \cdot 9x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow f(3x-2) = 2 \cdot (3x)^2 + 3x - 2$$

Θέτουμε όπου $3x-2$ το y και έχουμε :

$$3x-2 = y \Leftrightarrow 3x = y+2$$

Οπότε :

$$f(y) = 2(y+2)^2 + y + 2 - 2 = 2(y^2 + 4y + 4) + y = 2y^2 + 8y + 8 + y = 2y^2 + 9y + 8$$

Άρα :

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 9x + 8, x \in \mathbb{R}}$$

82. Έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 1 - x^2 \Leftrightarrow g(1+x) = 1 - x^2$$

Θέτουμε όπου $1+x$ το y και έχουμε :

$$1+x = y \Leftrightarrow x = y-1$$

Οπότε :

$$g(y) = 1 - (y-1)^2 = 1 - y^2 + 2y - 1 = -y^2 + 2y$$

Άρα :

$$\boxed{g(x) = -x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}}$$

Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$ άρα και $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2 + 2x) = -x^2 + 2x + 1$$

Άρα :

$$\boxed{(f \circ g)(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}}$$

83. i. Είναι $D_f = \mathbb{R}^*$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ πρέπει :

$$1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ και}$$

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow \overset{x \neq -1}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Άρα $D_g = (-1, 1)$.

Για την $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \ln \frac{1-x}{1+x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \ln \frac{1-x}{1+x} \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1-x}{1+x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1-x \neq 1+x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $D_{f \circ g} = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

ii. Έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow f(g(x)) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow f\left(\ln \frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{x}$$

Θέτουμε όπου $\ln \frac{1-x}{1+x}$ το y και έχουμε :

$$\ln \frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln e^y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow 1-x = e^y(1+x) \Leftrightarrow$$

$$1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = 1 - e^y \Leftrightarrow (1+e^y)x = 1 - e^y \Leftrightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$$

Πρέπει :

$$x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1-e^y}{1+e^y} \neq 0 \Leftrightarrow 1-e^y \neq 0 \Leftrightarrow e^y \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 0$$

και

$$\frac{1-e^y}{1+e^y} > -1 \Leftrightarrow 1 - \cancel{e^y} > -1 - \cancel{e^y} \Leftrightarrow 1 > -1, \text{ ισχύει}$$

$$\frac{1-e^y}{1+e^y} < 1 \Leftrightarrow 1-e^y < 1+e^y \Leftrightarrow 2e^y > 0 \Leftrightarrow e^y > 0, \text{ ισχύει}$$

Οπότε :

$$f(y) = -\frac{1}{\frac{1-e^y}{1+e^y}} = -\frac{1+e^y}{1-e^y} = \frac{e^y+1}{e^y-1}, y \neq 0$$

Άρα :

$$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}, x \neq 0$$

iii. Η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων εάν η f είναι περιττή.

Έτσι έχουμε :

- για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}^*$ είναι και $-x \in D_f = \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \frac{e^x(e^{-x}+1)}{e^x(e^{-x}-1)} = \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\frac{e^x+1}{e^x-1} = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση, συνεπώς η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

84. Έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = x^2 + x + 1 \stackrel{g(x)=3x+1}{\Leftrightarrow} 3f(x) + 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x, x \in \mathbb{R}$$

85. Έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = 3x + 2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 3x + 2 \stackrel{g(x)=\frac{x+1}{x-1}}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 3x + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x)+1 = (3x+2)(f(x)-1) \Leftrightarrow f(x)+1 = 3xf(x) - 3x + 2f(x) - 2 \Leftrightarrow$$

$$3xf(x) + f(x) = 3x + 3 \Leftrightarrow (3x+1)f(x) = 3x + 3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3x+3}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$$

86. Έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow g(f(x)) = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow g(\ln x) = \frac{1+x}{1-x}$$

Θέτουμε όπου $\ln x$ το y και έχουμε :

$$\ln x = y \Leftrightarrow \ln x = \ln e^y \Leftrightarrow x = e^y$$

Οπότε :

$$g(y) = \frac{1+e^y}{1-e^y} \text{ με } 1-e^y \neq 0 \Leftrightarrow e^y \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 0$$

Άρα :

$$g(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}, x \in \mathbb{R}^*$$

« Αποσύνθεση » συναρτήσεων

87. i. Για την $f(x) = \eta\mu(3x^2 - 2x)$ με $D_f = \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) = \eta\mu(3x^2 - 2x) \begin{cases} g(x) = \eta\mu x \\ h(x) = 3x^2 - 2x \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$g(h(x)) = g(3x^2 - 2x) = \eta\mu(3x^2 - 2x) = f(x)$$

Άρα $f = g \circ h$ όπου :

$$g(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = 3x^2 - 2x, x \in \mathbb{R}$$

ii. Για την $f(x) = \sqrt{e^{\frac{x}{2}} + 1}$ με $D_f = \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) = \sqrt{e^{\frac{x}{2}} + 1} \begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \\ h(x) = e^{\frac{x}{2}} + 1 \end{cases} \begin{cases} s(x) = e^x + 1 \\ t(x) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$g(s(t(x))) = g\left(s\left(\frac{x}{2}\right)\right) = g\left(e^{\frac{x}{2}} + 1\right) = \sqrt{e^{\frac{x}{2}} + 1} = f(x)$$

Άρα $f = g \circ s \circ t$ όπου :

$$g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0, \quad s(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad t(x) = \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$$

iii. Για την $f(x) = 3\eta\mu^2\sqrt{2x-1} + 2$ με $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty]$ έχουμε :

$$f(x) = 3\eta\mu^2\sqrt{2x-1} + 2 \begin{cases} g(x) = 3x^2 + 2 \\ h(x) = \eta\mu\sqrt{2x-1} \end{cases} \begin{cases} w(x) = \eta\mu x \\ z(x) = \sqrt{2x-1} \end{cases} \begin{cases} t(x) = \sqrt{x} \\ s(x) = 2x-1 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned} g(w(t(s(x)))) &= g(w(t(2x-1))) = g(w(\sqrt{2x-1})) = g(\eta\mu(\sqrt{2x-1})) = \\ &= 3\eta\mu^2\sqrt{2x-1} + 2 = f(x) \end{aligned}$$

Άρα $f = g \circ w \circ t \circ s$ όπου :

$$g(x) = 3x^2 + 2, x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R},$$

$$t(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \quad \text{και} \quad s(x) = 2x-1, x \in \mathbb{R}$$

iv. Για την $f(x) = \eta\mu(\ln(x^2 + 1))$ με $D_f = \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) = \eta\mu(\ln(x^2 + 1)) \begin{cases} g(x) = \eta\mu x \\ h(x) = \ln(x^2 + 1) \end{cases} \begin{cases} s(x) = \ln x \\ t(x) = x^2 + 1 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$g(s(t(x))) = g(s(x^2 + 1)) = g(\ln(x^2 + 1)) = \eta\mu(\ln(x^2 + 1)) = f(x)$$

Άρα $f = g \circ s \circ t$ όπου :

$$g(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}, \quad s(x) = \ln x, x > 0 \quad \text{και} \quad t(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$

v. Για την $f(x) = \ln\left(\eta\mu \frac{1}{x}\right)$ έχουμε :

$$f(x) = \ln\left(\eta\mu \frac{1}{x}\right) \begin{cases} g(x) = \ln x \\ h(x) = \eta\mu \frac{1}{x} \end{cases} \begin{cases} s(x) = \eta\mu x \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Οπότε :

$$g(s(t(x))) = g\left(s\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\eta\mu \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\eta\mu \frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Άρα $f = g \circ s \circ t$ όπου :

$$g(x) = \ln x, x > 0, \quad s(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad t(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$$

vi. Για την $f(x) = \sqrt{\eta\mu^2(x+3)+5}$ έχουμε :

$$f(x) = \sqrt{\eta\mu^2(x+3)+5} \begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \\ h(x) = \eta\mu^2(x+3)+5 \end{cases} \begin{cases} w(x) = x^2 + 5 \\ z(x) = \eta\mu(x+3) \end{cases} \begin{cases} t(x) = \eta\mu x \\ s(x) = x+3 \end{cases}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} g(w(t(s(x)))) &= g(w(t(x+3))) = g(w(\eta\mu(x+3))) = g(\eta\mu^2(x+3)+5) = \\ &= \sqrt{\eta\mu^2(x+3)+5} = f(x) \end{aligned}$$

Άρα $f = g \circ w \circ t \circ s$ όπου :

$$g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0, \quad w(x) = x^2 + 5, x \in \mathbb{R},$$

$$t(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad s(x) = x+3, x \in \mathbb{R}$$

vii. Για την $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ έχουμε :

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \begin{cases} g(x) = \ln x \\ h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{cases} \begin{cases} s(x) = \frac{x-1}{x+1} \\ t(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Οπότε :

$$g(s(t(x))) = g(s(\sqrt{x})) = g\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = f(x)$$

Άρα $f = \text{gosot}$ όπου :

$$g(x) = \ln x, x > 0, \quad s(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1 \quad \text{και} \quad t(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

viii. Για την $f(x) = \ln^5\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ με $D_f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

$$f(x) = \ln^5\left(\frac{1}{\sin x}\right) \begin{cases} g(x) = x^5 \\ h(x) = \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) \end{cases} \begin{cases} s(x) = \ln x \\ t(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι :

$$g(s(t(x))) = g\left(s\left(\frac{1}{\sin x}\right)\right) = g\left(\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)\right) = \ln^5\left(\frac{1}{\sin x}\right) = f(x)$$

Άρα $f = \text{gosot}$ όπου :

$$g(x) = x^5, x \in \mathbf{R}, \quad s(x) = \ln x, x > 0 \quad \text{και} \quad t(x) = \frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

ix. Για την $f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$ έχουμε :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} \begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \\ h(x) = \frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x} \end{cases} \begin{cases} s(x) = \frac{1-x}{1+x} \\ t(x) = \eta\mu x \end{cases}$$

Οπότε :

$$g(s(t(x))) = g(s(\eta\mu x)) = g\left(\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}\right) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = f(x)$$

Άρα $f = \text{gosot}$ όπου :

$$g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0, \quad s(x) = \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1 \quad \text{και} \quad t(x) = \eta\mu x, x \in \mathbf{R}$$

x. Για την $f(x) = \eta\mu^3(x + \sqrt{x}) + \eta\mu(x + \sqrt{x})$ έχουμε :

$$f(x) = \eta\mu^3(x + \sqrt{x}) + \eta\mu(x + \sqrt{x}) \begin{cases} g(x) = x^3 + x \\ h(x) = \eta\mu(x + \sqrt{x}) \end{cases} \begin{cases} s(x) = \eta\mu x \\ t(x) = x + \sqrt{x} \end{cases}$$

Οπότε :

$$g(s(t(x))) = g(s(x + \sqrt{x})) = g(\eta\mu(x + \sqrt{x})) = \eta\mu^3(x + \sqrt{x}) + \eta\mu(x + \sqrt{x}) = f(x)$$

Άρα $f = g \circ s \circ t$ όπου :

$$g(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}, \quad s(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad t(x) = x + \sqrt{x}, x \geq 0$$

xi. Για την $f(x) = \ln(\varepsilon\varphi^2\sqrt{x} + 1)$ έχουμε :

$$f(x) = \ln(\varepsilon\varphi^2\sqrt{x} + 1) \begin{cases} g(x) = \ln x \\ h(x) = \varepsilon\varphi^2\sqrt{x} + 1 \end{cases} \begin{cases} w(x) = x^2 + 1 \\ z(x) = \varepsilon\varphi\sqrt{x} \end{cases} \begin{cases} t(x) = \varepsilon\varphi x \\ s(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} g(w(t(s(x)))) &= g(w(t(\sqrt{x}))) = g(w(\varepsilon\varphi\sqrt{x})) = g(\varepsilon\varphi^2\sqrt{x} + 1) = \\ &= \ln(\varepsilon\varphi^2\sqrt{x} + 1) = f(x) \end{aligned}$$

Άρα $f = g \circ w \circ t \circ s$ όπου :

$$g(x) = \ln x, x > 0, \quad w(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R},$$

$$t(x) = \varepsilon\varphi x, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad s(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

xii. Είναι :

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

Έτσι για την $f(x) = e^{x \ln x}$ με $D_f = (0, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = e^{x \ln x} \begin{cases} g(x) = e^x \\ h(x) = x \ln x \end{cases}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$g(h(x)) = g(x \ln x) = e^{x \ln x} = f(x)$$

Άρα $f = g \circ h$ όπου :

$$g(x) = e^x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = x \ln x, x > 0$$

Συναρτησιακές σχέσεις

- 88.** Θέτουμε στη σχέση $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$ όπου x το $x+1$ και παίρνουμε :

$$f(x+1-1) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2 - 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2x^2 + x, x \in \mathbb{R}}$$

Στην σχέση $f(x) = 2x^2 + x$ θέτουμε όπου x το $x+1$ και παίρνουμε :

$$f(x+1) = 2(x+1)^2 + x + 1 \Leftrightarrow f(x+1) = 2(x^2 + 2x + 1) + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) = 2x^2 + 4x + 2 + x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3, x \in \mathbb{R}}$$

Έχουμε :

$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 2x^2 + 5x + 3 - 2(2x^2 + x) + 2x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = \cancel{4x^2} + \cancel{2x} + 4 - \cancel{4x^2} - \cancel{2x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 4}$$

- 89.** Θέτουμε στη σχέση $f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1$ όπου x το $3-x$ και παίρνουμε :

$$f(3-x) + 2f(x) = 2(3-x) - 1 \Leftrightarrow f(3-x) + 2f(x) = 6 - 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(3-x) + 2f(x) = 5 - 2x$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1 \\ f(3-x) + 2f(x) = 5 - 2x \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1 \\ -2f(3-x) - 4f(x) = -10 + 4x \end{cases} \xRightarrow{\oplus}$$

$$-3f(x) = 6x - 11 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -2x + \frac{11}{3}, x \in \mathbb{R}}$$

- 90. i.** Θέτουμε στη σχέση $f(x-1) - 2f(3-x) = x^2 + 1$ όπου x το $x+1$ και παίρνουμε :

$$f(x+1-1) - 2f(3-(x+1)) = (x+1)^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) - 2f(3-x-1) = x^2 + 2x + 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2}$$

- ii.** Θέτουμε στη σχέση $f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2$ όπου x το $2-x$ και παίρνουμε :

$$f(2-x) - 2f(2-(2-x)) = (2-x)^2 + 2(2-x) + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(2-x) - 2f(x) = 4 - 4x + x^2 + 4 - 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(2-x) - 2f(x) = x^2 - 6x + 10$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2 \\ f(2-x) - 2f(x) = x^2 - 6x + 10 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2 \\ 2f(2-x) - 4f(x) = 2x^2 - 12x + 20 \end{cases} \xRightarrow{\oplus}$$

$$-3f(x) = 3x^2 - 10x + 22 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{22}{3}, x \in \mathbb{R}}$$

- 91.** Θέτουμε στη σχέση $f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x$ όπου x το $1-x$ και παίρνουμε :

$$f(1-x-3) - 2f(1-(1-x)) = (1-x)^2 - 2(1-x) \Leftrightarrow$$

$$f(-2-x) - 2f(x) = 1 - 2x + x^2 - 2 + 2x \Leftrightarrow f(-2-x) - 2f(x) = x^2 - 1$$

Θέτουμε στη σχέση $f(-2-x) - 2f(x) = x^2 - 1$ όπου x το $-2-x$ και παίρνουμε :

$$f(-2-(-2-x)) - 2f(-2-x) = (-2-x)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 2f(-2-x) = 4 + 4x + x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) - 2f(-2-x) = x^2 + 4x + 3$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{cases} f(-2-x) - 2f(x) = x^2 - 1 \\ f(x) - 2f(-2-x) = x^2 + 4x + 3 \end{cases} \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(-2-x) - 4f(x) = 2x^2 - 2 \\ f(x) - 2f(-2-x) = x^2 + 4x + 3 \end{cases} \quad \oplus \Rightarrow$$

$$-3f(x) = 3x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}}$$

- 92.** Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του x μηδενίζουν τα τριώνυμα $x^2 - x + \frac{1}{4}$ και

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

και

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ με } \Delta=9, \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

Τα τριώνυμα μηδενίζουν όταν το x παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Έτσι για $x = \frac{1}{2}$ στη σχέση

$$f^2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 2f\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) + 1 = 0 \text{ παίρνουμε :}$$

$$f^2(0) - 2f(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(0)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(0)-1=0 \Leftrightarrow \boxed{f(0)=1}$$

- 93.** Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του x μηδενίζει η f . Έτσι έχουμε :

$$x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Έτσι για $x=1$ στη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$f(3) + f(3) = 0 \Leftrightarrow 2f(3) = 0 \Leftrightarrow f(3) = 0$$

Για $x=2$ στη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$f(6) + f(6) = 0 \Leftrightarrow 2f(6) = 0 \Leftrightarrow f(6) = 0$$

Βρήκαμε λοιπόν δύο τιμές που μηδενίζουν την f , δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία.

- 94. i.** Για $x=1$ στη σχέση $f(x) + f(3-2x) = 2g(x)$ παίρνουμε :

$$f(1) + f(1) = 2g(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 2g(1) \Leftrightarrow f(1) = g(1)$$

Αποδείξαμε έτσι ότι οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ii. Θέτουμε στη σχέση $f(x) + 2f(1-x) = x^2 - x$ όπου x το $1-x$ και παίρνουμε :

$$f(1-x) + 2f(1-(1-x)) = (1-x)^2 - (1-x) \Leftrightarrow$$

$$f(1-x) + 2f(x) = 1 - 2x + x^2 - 1 + x \Leftrightarrow f(1-x) + 2f(x) = x^2 - x$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = x^2 - x \\ f(1-x) + 2f(x) = x^2 - x \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = x^2 - x \\ -2f(1-x) - 4f(x) = -2x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3f(x) = -x^2 + x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x, x \in \mathbb{R}}$$

Βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} f(3-2x) &= \frac{1}{3}(3-2x)^2 - \frac{1}{3}(3-2x) = \frac{1}{3}(9-12x+4x^2) - \frac{1}{3}(3-2x) = \\ &= \frac{1}{3}(9-12x+4x^2-3+2x) = \frac{1}{3}(4x^2-10x+6) \end{aligned}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} 2g(x) &= f(x) + f(3-2x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(4x^2-10x+6) = \frac{1}{3}(x^2-x+4x^2-10x+6) = \\ &= \frac{1}{3}(5x^2-11x+6) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$2g(x) = \frac{1}{3}(5x^2-11x+6) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{6}(5x^2-11x+6) \Leftrightarrow \boxed{g(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 1}$$

Για να βρούμε σε ποια σημεία τέμνονται οι C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 5x^2 - 11x + 6 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 9x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1$$

Είναι :

$$g(1) = f(1) = 0 \quad \text{και} \quad g(2) = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

Έχουμε λοιπόν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

95. Θέτουμε στη σχέση $2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = x^2$ όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε :

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - 6f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2 \\ 6f\left(\frac{1}{x}\right) - 9f(x) = 3\frac{1}{x^2} \end{cases} \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} \\ -5f(x) = 3\frac{1}{x^2} + 2x^2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{5}\left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right), x \neq 0}$$

96. Θέτουμε στη σχέση $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{2}{x}$ όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε :

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{2}{x} \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} + 2x \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = -2x - \frac{4}{x} \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} + 2x \end{cases} \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} \\ -3f(x) = -\frac{3}{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0}$$

97. i. Έχουμε :

$$\ln(e^{f(x)} + 1) = f(x) + x^2 + 1 \Leftrightarrow \ln(e^{f(x)} + 1) = \ln e^{f(x) + x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} + 1 = e^{f(x) + x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} + 1 = e^{f(x) + x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} + 1 = e^{f(x)} \cdot e^{x^2 + 1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{e^{f(x)}} = e^{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{f(x)}} = e^{x^2 + 1} - 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{1}{e^{x^2 + 1} - 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^{x^2 + 1} - 1)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = -\ln(e^{x^2 + 1} - 1), x \in \mathbb{R}}$$

ii. Έχουμε :

$$f(x)[f(x) - x] \leq x[f(x) - x] \Leftrightarrow f(x)[f(x) - x] - x[f(x) - x] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x) - x][f(x) - x] \leq 0 \Leftrightarrow [f(x) - x]^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x, x \in \mathbb{R}}$$

iii. Θέτουμε στη σχέση $f(1-x) + 2f(x) = 2-x$ όπου x το $1-x$ και παίρνουμε :

$$f(1-(1-x)) + 2f(1-x) = 2-(1-x) \Leftrightarrow f(x) + 2f(1-x) = 1+x$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} f(1-x) + 2f(x) = 2-x \\ f(x) + 2f(1-x) = 1+x \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2f(1-x) - 4f(x) = -4+2x \\ f(x) + 2f(1-x) = 1+x \end{cases} \stackrel{\oplus}{\Rightarrow}$$

$$-3f(x) = 3x - 3 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -x + 1, x \in \mathbb{R}}$$

iv. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
\ln(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) &= \ln(e^x + 2) + f(x) \Leftrightarrow \ln(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = \ln(e^x + 2) + \ln e^{f(x)} \Leftrightarrow \\
\ln(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) &= \ln e^{f(x)} (e^x + 2) \Leftrightarrow e^{f(x)} + e^{-f(x)} = e^{f(x)} (e^x + 2) \Leftrightarrow \\
e^{-f(x)} &= e^{f(x)} (e^x + 1) \Leftrightarrow 1 = e^{2f(x)} (e^x + 1) \Leftrightarrow e^{2f(x)} = \frac{1}{e^x + 1} \Leftrightarrow \\
2f(x) &= \ln \frac{1}{e^x + 1} \Leftrightarrow 2f(x) = \ln(e^x + 1)^{-1} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{2} \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

98. i. Θέτουμε στη σχέση $2f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x^3$ όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε :

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \ln \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \ln x^{-3} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -3 \ln x$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \ln x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -3 \ln x \end{cases} &\cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6 \ln x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -3 \ln x \end{cases} \oplus \Rightarrow \\
3f(x) &= 3 \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x, x > 0}
\end{aligned}$$

ii. Είναι $D_f = (0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η $g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ πρέπει :

$$e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Άρα $D_g = \mathbb{R}^*$.

Για την $g \circ f$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Συνεπώς είναι $D_{g \circ f} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Επιπλέον έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 2}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 2}{x - 1}$$

Άρα :

$$\boxed{(g \circ f)(x) = \frac{x + 2}{x - 1}, x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)}$$

ii. Είναι :

$$(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2, \text{ απορρίπτεται}$$

αφού $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Άρα η εξίσωση $(g \circ f)(x) = 0$ είναι **αδύνατη**.

- 99. i.** Στη δοθείσα σχέση $f(xy) = f(x^2) + f(y^2) - \ln(xy)$ για $x=y=1$ παίρνουμε :

$$\cancel{f(1)} = \cancel{f(1)} + f(1) - \ln 1^0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=0}$$

- ii.** Στη δοθείσα σχέση $f(xy) = f(x^2) + f(y^2) - \ln(xy)$ για $y=x$ παίρνουμε :

$$\cancel{f(x^2)} = \cancel{f(x^2)} + f(x^2) - \ln x^2 \Leftrightarrow f(x^2) = \ln x^2$$

Θέτουμε όπου x^2 το z και έχουμε :

$$f(z) = \ln z \text{ με } z > 0$$

Άρα :

$$\boxed{f(x) = \ln x, x > 0}$$

- 100. i.** Στη δοθείσα σχέση $f(2x) + f^2(x) = 2^{2x+1}$ για $x=1$ παίρνουμε :

$$f(2) + f^2(1) = 2^3 \stackrel{f(1)=2}{\Leftrightarrow} f(2) + 4 = 8 \Leftrightarrow \boxed{f(2)=4}$$

- ii.** Στη δοθείσα σχέση $f(2x) + f^2(x) = 2^{2x+1}$ για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(0) + f^2(0) = 2 \Leftrightarrow f^2(0) + f(0) - 2 = 0 \Leftrightarrow (f(0) + 2)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(0) = -2, \text{ απορρίπτεται αφού } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \text{ ή } \boxed{f(0)=1}$$

- iii.** Έχουμε :

$$f(2x) + f^2(x) = 8 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

- iii.** Αφού ισχύει $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ τότε έχουμε :

$$f(2x) + f^2(x) = 2^{2x+1} \Leftrightarrow f(2x) + f(x) \cdot f(x) = 2^{2x+1} \Leftrightarrow f(2x) + f(x+x) = 2^{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$f(2x) + f(2x) = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 2f(2x) = 2 \cdot 2^{2x} \Leftrightarrow f(2x) = 2^{2x}$$

Θέτουμε όπου $2x$ το y και έχουμε :

$$f(y) = 2^y$$

Άρα :

$$\boxed{f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}}$$

- 101.** Στη δοθείσα σχέση $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ για $x=y=0$ παίρνουμε :

$$f(0) + f(0) = 2f(0)f(0) \Leftrightarrow \cancel{2f(0)} = \cancel{2f(0)} \Leftrightarrow f(0) - f^2(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(0)(1-f(0)) = 0 \stackrel{\substack{f(x) \neq 0 \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}}}{\Leftrightarrow} f(0) = 1$$

Παρατηρούμε ότι :

- για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ είναι και $-x \in D_f = \mathbb{R}$
- Στη δοθείσα σχέση $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} f(y) + f(-y) = 2f(y) \Leftrightarrow f(-y) = f(y) \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$$

Άρα η f είναι **άρτια** συνάρτηση.

102. Στη δοθείσα σχέση $2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y$ για $y=x$ έχουμε :

$$\begin{aligned} 2f(x) + f(1-x) + \cancel{g(x)} - \cancel{g(x)} &= 3(x+1)^2 - 6x \Leftrightarrow \\ 2f(x) + f(1-x) &= 3(x^2 + 2x + 1) - 6x \Leftrightarrow 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 + \cancel{6x} + 3 - \cancel{6x} \Leftrightarrow \\ 2f(x) + f(1-x) &= 3x^2 + 3 \end{aligned}$$

Θέτουμε στη σχέση $2f(x) + f(1-x) = 3x^2 + 3$ όπου x το $1-x$ και παίρνουμε :

$$\begin{aligned} 2f(1-x) + f(1-(1-x)) &= 3(1-x)^2 + 3 \Leftrightarrow 2f(1-x) + f(x) = 3(1-2x+x^2) + 3 \Leftrightarrow \\ 2f(1-x) + f(x) &= 3 - 6x + 3x^2 + 3 \Leftrightarrow 2f(1-x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 6 \end{aligned}$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 + 3 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 6 \end{cases} \cdot (-2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x) - 2f(1-x) = -6x^2 - 6 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 6 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \\ -3f(x) &= -3x^2 - 6x \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) = x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}}} \end{aligned}$$

Στη δοθείσα σχέση $2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y$ για $y=0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} 2f(x) + f(1) + g(x) - \cancel{g(0)} &= 3(x+1)^2 \Leftrightarrow \\ 2(x^2 + 2x) + (1^2 + 2 \cdot 1) + g(x) &= 3(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow \\ 2x^2 + 4x + \cancel{3} + g(x) &= 3x^2 + 6x + \cancel{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{g(x) = x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}}} \end{aligned}$$

Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) = g(x) = x^2 + 2x$$

Επομένως είναι $f=g$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

103. i. Από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \quad \text{και} \quad (\ln x \leq f(x) - 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \geq \ln x + 1}})$$

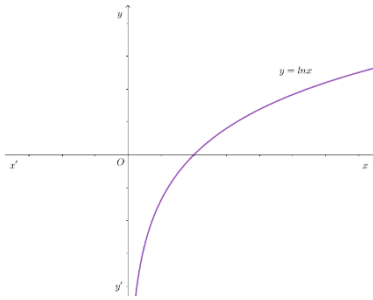
Στη σχέση $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x$ θέτουμε όπου x το ex και παίρνουμε :

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \Leftrightarrow f\left(\frac{ex}{e}\right) \leq \ln(ex) \Leftrightarrow f(x) \leq \ln e + \ln x \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \leq 1 + \ln x}}$$

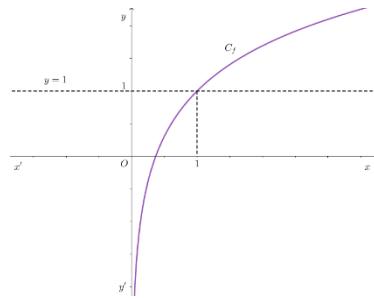
Είναι :

$$\begin{cases} f(x) \geq \ln x + 1 \\ f(x) \leq \ln x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x + 1, x > 0}$$

ii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x + 1$ έχουμε :



αρχική συνάρτηση



μετατόπιση 1 μονάδα πάνω

104. Έχουμε :

$$f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x) \Leftrightarrow f^2(x) = 4e^x f(x) - 4e^{2x} \Leftrightarrow f^2(x) - 4e^x f(x) + 4e^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 4e^x f(x) + 4(e^x)^2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 2e^x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}}$$

105. Έχουμε :

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2[f(x)\eta\mu x - g(x)\sigma\upsilon\nu x] \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2f(x)\eta\mu x - 2g(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + g^2(x) + 2g(x)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x + g^2(x) + 2g(x)\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = -\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}}$$

106. i. Η f είναι περιττή οπότε ισχύει $f(-x) = -f(x)$ και για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

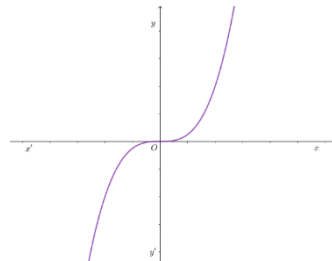
ii. Στη σχέση $f(x) \leq x^3$ θέτουμε όπου x το $-x$ και παίρνουμε :

$$f(-x) \leq (-x)^3 \Leftrightarrow -f(x) \leq -x^3 \Leftrightarrow f(x) \geq x^3$$

Είναι :

$$\begin{cases} f(x) \leq x^3 \\ f(x) \geq x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}}$$

iii. Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ είναι η εξής :



107. i. Η f είναι περιττή οπότε ισχύει $f(-x) = -f(x)$ και για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

ii. Στη σχέση $|x|f(x) \geq x + x^3 \sin x$ θέτουμε όπου x το $-x$ και παίρνουμε :

$$\begin{aligned} |-x|f(-x) &\geq -x + (-x)^3 \sin(-x) \Leftrightarrow |x|(-f(x)) \geq -x - x^3 \sin x \Leftrightarrow \\ -|x|f(x) &\geq -x - x^3 \sin x \Leftrightarrow |x|f(x) \leq x + x^3 \sin x \end{aligned}$$

Είναι :

$$\begin{cases} |x|f(x) \geq x + x^3 \sin x \\ |x|f(x) \leq x + x^3 \sin x \end{cases} \Leftrightarrow |x|f(x) = x + x^3 \sin x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x + x^3 \sin x}{|x|}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Για $x > 0$ είναι :

$$f(x) = \frac{x + x^3 \sin x}{x} = 1 + x^2 \sin x$$

- Για $x < 0$ είναι :

$$f(x) = \frac{x + x^3 \sin x}{-x} = -1 - x^2 \sin x$$

Άρα :

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x^2 \sin x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 + x^2 \sin x, & x > 0 \end{cases}$$

108. Έχουμε :

$$\left(f(x) - x \leq x^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \leq x^2 + x}} \right) \quad \text{και} \quad x^2 \leq f(x-1) + x$$

Στη σχέση $x^2 \leq f(x-1) + x$ θέτουμε όπου x το $x+1$ και παίρνουμε :

$$(x+1)^2 \leq f(x+1-1) + x+1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq f(x) + x + 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \geq x^2 + x}}$$

Είναι :

$$\begin{cases} f(x) \leq x^2 + x \\ f(x) \geq x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^2 + x, x \in \mathbb{R}}$$

109. i. Στη σχέση $f(x+y) \geq f(x) + f(y) \geq x+y$ θέτουμε όπου $x=y=0$ και έχουμε :

$$f(0) \geq f(0) + f(0) \geq 0$$

απ' όπου προκύπτει :

$$\begin{aligned} \left(\cancel{f(0)} \geq \cancel{f(0)} + f(0) \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0) \leq 0}} \right) \text{ και} \\ \left(f(0) + f(0) \geq 0 \Leftrightarrow 2f(0) \geq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0) \geq 0}} \right) \end{aligned}$$

Άρα $f(0) = 0$.

ii. Στη σχέση $f(x+y) \geq f(x) + f(y) \geq x+y$ θέτουμε όπου y το $-x$ και παίρνουμε :

$$f(x-x) \geq f(x) + f(-x) \geq x-x \Leftrightarrow \cancel{f(0)}^0 \geq f(x) + f(-x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$0 \geq f(x) + f(-x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

iii. Στη σχέση $f(x) + f(y) \geq x+y$ θέτουμε όπου y το 0 και παίρνουμε :

$$f(x) + \cancel{f(0)}^0 \geq x \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \geq x}}$$

Στη σχέση $f(x) \geq x$ θέτουμε όπου x το $-x$ και παίρνουμε :

$$f(-x) \geq -x \Leftrightarrow -f(x) \geq -x \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \leq x}}$$

Είναι :

$$\begin{cases} f(x) \geq x \\ f(x) \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x, x \in \mathbb{R}}$$

ΘΈΤΟΝΤΑΣ ΌΠΟΥ x ΤΗΝ $f(x)$

110. Στη σχέση $f(f(x)) = \frac{x}{2}$ θέτουμε όπου $x=f(x)$ και έχουμε :

$$f(f(f(x))) = \frac{f(x)}{2} \Leftrightarrow \boxed{f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}}$$

111. i. Στη σχέση $f(f(x)) = 3x+4$ θέτουμε όπου $x=f(x)$ και έχουμε :

$$f(f(f(x))) = 3f(x) + 4 \Leftrightarrow \boxed{f(3x+4) = 3f(x) + 4}$$

ii. Στη σχέση $f(3x+4) = 3f(x) + 4$ θέτουμε όπου $x=-2$ και έχουμε :

$$f(-6+4) = 3f(-2) + 4 \Leftrightarrow f(-2) = 3f(-2) + 4 \Leftrightarrow 2f(-2) = -4 \Leftrightarrow \boxed{f(-2) = -2}$$

112. Στη σχέση $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ θέτουμε όπου $x=f(x)$ και έχουμε :

$$f(f(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1 \Leftrightarrow f(x^2 - x + 1) = f^2(x) - f(x) + 1$$

Στη σχέση $f(x^2 - x + 1) = f^2(x) - f(x) + 1$ θέτουμε όπου $x=1$ και έχουμε :

$$f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 1}$$

113. Στη σχέση $(f \circ f)(x) = x^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(f(x)) = x^2 + \frac{1}{4}$ θέτουμε όπου $x=f(x)$ και παίρνουμε :

$$f(f(f(x))) = f^2(x) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = f^2(x) + \frac{1}{4}$$

Στη σχέση $f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = f^2(x) + \frac{1}{4}$ θέτουμε όπου $x = \frac{1}{2}$ και έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4} \Leftrightarrow f^2\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

114. i. Στη σχέση $(f \circ f)(x) = 4x - 9 \Leftrightarrow f(f(x)) = 4x - 9$ θέτουμε όπου $x=f(x)$ και παίρνουμε :

$$f(f(f(x))) = 4f(x) - 9 \Leftrightarrow \boxed{f(4x - 9) = 4f(x) - 9}$$

ii. Στη σχέση $f(4x - 9) = 4f(x) - 9$ θέτουμε όπου $x=3$ και έχουμε :

$$f(3) = 4f(3) - 9 \Leftrightarrow 3f(3) = 9 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 3}$$

iii. Είναι $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + \alpha \Leftrightarrow f(f(f(x))) = 8x + \alpha$ οπότε :

$$f(f(f(x))) = 4f(x) - 9 \Leftrightarrow 8x + \alpha = 4f(x) - 9 \xrightarrow{x=3} 24 + \alpha = 4f(3) - 9 \Leftrightarrow$$

$$24 + \alpha = 4 \cdot 3 - 9 \Leftrightarrow \alpha = 12 - 9 - 24 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -21}$$

iv. Είναι $8x + \alpha = 4f(x) - 9$ οπότε :

$$8x - 21 = 4f(x) - 9 \Leftrightarrow 4f(x) = 8x - 12 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2x - 3, x \in \mathbb{R}}$$