

$$\text{Η συνάρτηση } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

1973. i. Έχουμε :

$$f'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' e^{-x} + f(x)(e^{-x})' = xe^{-x} \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = -(x+1)e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-x} = -(x+1)e^{-x} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = -1 + c \Leftrightarrow 1 = -1 + c \Leftrightarrow \underline{c=2}$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{-x} = -(x+1)e^{-x} + 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Έχουμε :

$$2f'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow f'(x)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}f(x)e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' e^{-\frac{x}{2}} + f(x)\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \left(f(x)e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-(x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-\frac{x}{2}} = -(x+2)e^{-\frac{x}{2}} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = -2 + c \Leftrightarrow \underline{c=2}.$$

$$f(t)e^{-\frac{t}{2}} = -te^{-\frac{t}{2}} - \left[2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^t \Leftrightarrow f(t)e^{-\frac{t}{2}} = -te^{-\frac{t}{2}} - 2e^{-\frac{t}{2}} + 2 \Leftrightarrow f(t) = -t - 2 + 2e^{\frac{t}{2}}.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{-\frac{x}{2}} = -(x+2)e^{-\frac{x}{2}} + 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2, x \in \mathbb{R}}.$$

1974. i. Έχουμε :

$$f'(x) = \frac{\ln x + f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x)x = \ln x + f(x) \Leftrightarrow f'(x)x - f(x) = \ln x \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(-\frac{\ln x + 1}{x}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\frac{\ln x + 1}{x} + c \xrightarrow{x=1}$$

$$f(1) = -1 + c \Leftrightarrow e - 1 = -1 + c \Leftrightarrow \underline{c=e}.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{x} = -\frac{\ln x + 1}{x} + e \Leftrightarrow \boxed{f(x) = ex - \ln x - 1, x > 0}.$$

ii. Έχουμε :

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{x} + xe^x \Leftrightarrow xf''(x) = f'(x) + x^2e^x \Leftrightarrow xf''(x) - f'(x) = x^2e^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{f''(x)x - f'(x)x'}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x} = e^x + c_1 \xrightarrow{x=1}$$

$$f'(1) = e + c_1 \Leftrightarrow e = e + c_1 \Leftrightarrow \underline{c_1=0}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\frac{f'(x)}{x} = e^x \Leftrightarrow f'(x) = xe^x \Leftrightarrow (f(x))' = ((x-1)e^x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x-1)e^x + c_2 \xrightarrow{x=1} f(1) = c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = xe^x - e^x, x > 0}.$$

1975. i. Έχουμε : $f'(x) = \ln x \Leftrightarrow (f(x))' = (x \ln x - x)' \Leftrightarrow f(x) = x \ln x - x + c \xrightarrow{x=1} f(1) = -1 + c \Leftrightarrow -1 = -1 + c \Leftrightarrow c = 0.$ Άρα $\boxed{f(x) = x \ln x - x, x > 0}.$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x \ln x, x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο :

$$g'(x) = f'(x) + 1 - \ln x - 1 = f'(x) - \ln x > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $g(1) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της g . Έτσι :

$$- \text{ Για } x > 1 \xrightarrow{g \text{ γν. αύξ.}} \Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) + x > x \ln x}.$$

1976. i. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) = G(x) - G(-x)$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x) + G'(-x) = g(x) + g(-x) = x^{2017} \ln(e^x + 1) + (-x)^{2017} \ln(e^{-x} + 1) = \\ &= x^{2017} \ln(e^x + 1) - x^{2017} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \\ &= \cancel{x^{2017} \ln(e^x + 1)} - \cancel{x^{2017} \ln(1 + e^x)} + x^{2017} \ln e^x = x^{2018}. \text{ Έχουμε λοιπόν :} \end{aligned}$$

$$f'(x) = x^{2018} \Leftrightarrow (f(x))' = \left(\frac{x^{2019}}{2019} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^{2019}}{2019} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c.$$

Στη σχέση $f(x) = G(x) - G(-x)$ για $x=0$ έχουμε $f(0) = \cancel{G(0)} - \cancel{G(0)} = 0$, άρα

$$c = f(0) = 0, \text{ δηλαδή } \boxed{f(x) = \frac{x^{2019}}{2019}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Είναι :

$$I = \int_{-3}^3 x^{2017} \ln(e^x + 1) dx = \int_{-3}^3 g(x) dx = \int_{-3}^3 G'(x) dx = G(3) - G(-3) = f(3) = \frac{3^{2019}}{2019}.$$

1977. i. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) = G(x) - G(-x)$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x) + G'(-x) = g(x) + g(-x) = \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} + \frac{-x \eta \mu(-x)}{e^{-x} + 1} = \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} + \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} = \\ &= \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} + e^x \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} = \cancel{(1 + e^x)} \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} = x \eta \mu x. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν :

$$f'(x) = x \eta \mu x \Leftrightarrow (f(x))' = (-x \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x)' \Leftrightarrow f(x) = -x \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x + c \xrightarrow{x=0}$$

$f(0) = c$. Στη σχέση $f(x) = G(x) - G(-x)$ για $x=0$ έχουμε

$$f(0) = \cancel{G(0)} - \cancel{G(0)} = 0, \text{ άρα } c = f(0) = 0, \text{ δηλαδή } \boxed{f(x) = \eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Είναι : } I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu x}{e^x + 1} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G'(x) dx = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \eta\mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

1978. i. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) = G(\sigma\phi x) - G(\epsilon\phi x)$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(\sigma\phi x) \cdot \left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right) - G'(\epsilon\phi x) \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} g(\sigma\phi x) - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} g(\epsilon\phi x) = \\ &= -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \sigma\phi^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \\ &= -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot \cancel{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu^2 x} = -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } f'(x) = -2 \Leftrightarrow f(x) = -2x + c \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + c.$$

$$\text{Στη σχέση } f(x) = G(\sigma\phi x) - G(\epsilon\phi x) \text{ για } x = \frac{\pi}{4} \text{ έχουμε } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{G(1)} - \cancel{G(1)} = 0,$$

$$\text{άρα } c = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ δηλαδή } \boxed{f(x) = -2x + \frac{\pi}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(t) dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} G'(t) dt = G(\sqrt{3}) - G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = G\left(\sigma\phi \frac{\pi}{6}\right) - G\left(\epsilon\phi \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

1979. Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f'(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\left((f(x) + x)^2\right)' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + c \xrightarrow{x=0} f^2(0) = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}.$$

Άρα $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$. Έστω $K(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$. Η $K(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$K^2(x) = (f(x) + x)^2 = x^2 + 1 > 0$, συνεπώς $K(x) \neq 0$, άρα η K διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι $K(0) = f(0) = 1 > 0$, συμπεραίνουμε πως $K(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα: $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}}$.

Γ2. Βρίσκουμε την παράγωγο της $f: f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς και $1-1$. Έχουμε: $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$, άρα αρκεί να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Η $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$. Έτσι έχουμε:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$ ή $\underline{\underline{x=-1}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$g(x)$		$\nearrow$ T.M.	$\searrow$ T.E.	$\nearrow$	

Συνεπώς:

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και $A_2 = [0, +\infty)$.

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [-1, 0]$.

Έχουμε $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. Άρα:

$$g(A_1) = g((-\infty, -1]) \stackrel{g \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] = \left[-\infty, -\frac{1}{2} \right],$$

$$g(A_2) = g([0, +\infty)) \stackrel{g \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$g(A_3) = g([-1, 0]) \stackrel{g \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{=} [g(0), g(-1)] = \left[-1, -\frac{1}{2} \right].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $g(x) = 0$:

- Το $0 \notin g(A_1)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
- Το $0 \in g(A_2)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Το $0 \notin g(A_3)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$, άρα και η $f(g(x)) = 1$, έχει **ακριβώς μία ρίζα**.

Γ3. (εκτός ύλης). Έστω $F(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, άρα ολοκληρώσιμη, οπότε η συνάρτηση $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Άρα και η F είναι συνεχής στο

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ με } F(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt \text{ και } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\cancel{0}}^{\cancel{0}} f(t)dt - f(0) = -1 < 0.$$

Είναι $\sqrt{t^2+1} > \sqrt{t^2} = |t| \geq t \Rightarrow \sqrt{t^2+1} - t > 0 \Leftrightarrow f(t) > 0$, άρα και $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$,

δηλαδή $F(0) > 0$, οπότε $F(0) \cdot F\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**

υπάρχει **τουλάχιστον ένα** $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε :

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp x_0 = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp x_0$$

1980. Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς θα είναι :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{f(x)}{x} = 0 \cdot (1 + f(0)) = 0.$$

Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, οπότε :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + \cancel{f(0)} = 1.$$

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$, είναι :

$$y = f'(0)(x-0) + \cancel{f(0)} \Leftrightarrow \boxed{y=x}.$$

Δ2. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[0,1]$.

— Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0).$$

Είναι $f'(0) < f(1) - f(0)$, άρα $f'(0) < f'(\xi)$.

Επειδή η f'' είναι συνεχής, αφού είναι παραγωγίσιμη, και ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε αυτή θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.

Η f' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Είναι $0 < \xi$ και $f'(0) < f'(\xi)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε: $f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής.

Είναι $g(x) = f(x) - x \xrightarrow{x=0} g(0) = f(0) = 0$, έτσι η ανίσωση $g(x) \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(0)$, συνεπώς η g παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=0$, το $g(0) = 0$.

Δ4. Είναι $g(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx > 0 &\Leftrightarrow \int_0^2 (f(x) - x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 x dx > 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^2 f(x) dx > \int_0^2 x dx &\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^2 f(x) dx > 2}. \end{aligned}$$

Δ5. (εκτός ύλης). Είναι $g(x) \geq 0$, άρα:

$$\begin{aligned} E(\Omega) = e - \frac{5}{2} &\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x) dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx &= e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} &= e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 f(x) dx = e - 2}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \int_0^x f(t) dt - 2$

Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ με $h(1) = \int_0^1 f(t) dt - 2 = e - 2 - 2 = e - 4 < 0$ και

$h(2) = \int_0^2 f(t) dt - 2 > 0$, από ερώτημα **Δ4**, δηλαδή $h(1) \cdot h(2) < 0$, οπότε σύμφωνα

με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi} f(t) dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\xi} f(t) dt = 2}.$$

1981. i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^{-x} + \alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) \Rightarrow 0 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 0}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0.$$

ii. Για $\alpha=0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , x \leq 0 \\ x^2 \ln x & , x > 0 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής άρα και ολοκληρώσιμη. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 xe^{-x} dx + \int_0^1 x^2 \ln x dx = \\ &= -\int_{-1}^0 x(e^{-x})' dx + \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = -\left(\left[xe^{-x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^{-x} dx\right) + \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} x^2 dx = \\ &= -\left(e + \left[e^{-x}\right]_{-1}^0\right) + 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\left(\cancel{e} + 1 - \cancel{e}\right) - \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x - \frac{1}{9} = \\ &= -1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{9} = -\frac{10}{9}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^3}{3}\right) = 0. \end{aligned}$$

1982. i. Θέτοντας στη σχέση $F(x)f(-x) = -1$ όπου x το $-x$ παίρνουμε $F(-x)f(x) = -1$

Παραγοντοποιούμε τη $g(x) = F(x)F(-x)$ και παίρνουμε :

$$g'(x) = F'(x)F(-x) - F(x)F'(-x) = f(x)F(-x) - F(x)f(-x) = -1 - (-1) = 0.$$

Αποδείξαμε πως $g'(x) = 0$, άρα η g είναι σταθερή.

ii. Στη σχέση $F(x)f(-x) = -1$ για $x=0$ παίρνουμε $F(0)f(0) = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{F(0) = -1}}$.

Είναι : $g(x) = F(x)F(-x) \stackrel{x=0}{\Rightarrow} g(0) = F(0)F(0) = (-1)(-1) = 1$ και

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} g(0) = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}, \text{ άρα :}$$

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow F(x)F(-x) = 1 \Leftrightarrow F(-x) = \frac{1}{F(x)}. \text{ Επιπλέον ισχύει :}$$

$$F(-x)f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{F(x)}f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = -1 \Leftrightarrow F'(x) = -F(x) \Leftrightarrow$$

$$F'(x) + F(x) = 0 \Leftrightarrow F'(x)e^x + F(x)e^x = 0 \Leftrightarrow (F(x)e^x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$F(x)e^x = c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} F(0) = c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = -1}}.$$

$$\text{Άρα : } F(x)e^x = -1 \Leftrightarrow F(x) = -e^{-x} \text{ και } F'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}}.$$

1983. i. Θέτοντας στη σχέση $F(x)f(2-x) = -1$ όπου x το $2-x$ παίρνουμε

$F(2-x)f(x) = -1$. Παραγοντοποιούμε τη $g(x) = F(x)F(2-x)$ και παίρνουμε :

$$g'(x) = F'(x)F(2-x) - F(x)F'(2-x) = f(x)F(2-x) - F(x)f(2-x) = -1 + 1 = 0.$$

Αποδείξαμε πως $g'(x) = 0$, άρα η g είναι σταθερή.

ii. Στη σχέση $F(x)f(2-x)=-1$ για $x=1$ παίρνουμε $F(1)f(1)=-1 \Leftrightarrow \underline{\underline{F(1)=-1}}$.

Είναι : $g(x)=F(x)F(2-x) \xrightarrow{x=1} g(1)=F(1)F(1)=(-1)(-1)=1$ και

$g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c \xrightarrow{x=1} g(1)=c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}$, άρα :

$g(x)=1 \Leftrightarrow F(x)F(2-x)=1 \Leftrightarrow F(2-x)=\frac{1}{F(x)}$. Επιπλέον ισχύει :

$F(2-x)f(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{F(x)}f(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)}=-1 \Leftrightarrow F'(x)=-F(x) \Leftrightarrow$

$F'(x)+F(x)=0 \Leftrightarrow F'(x)e^x+F(x)e^x=0 \Leftrightarrow (F(x)e^x)'=0 \Leftrightarrow$

$F(x)e^x=c_1 \xrightarrow{x=1} F(1)e=c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1=-e}}$.

Άρα : $F(x)e^x=-e \Leftrightarrow F(x)=-e^{1-x}$ και $F'(x)=e^{1-x} \Leftrightarrow \boxed{f(x)=e^{1-x}, x \in \mathbb{R}}$.

1984. i. Θέτοντας στη σχέση $F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$ όπου x το 1 παίρνουμε :

$F(1)f(1)=2 \Leftrightarrow F(1)2=2 \Leftrightarrow F(1)=1$. Είναι $F'(x)=f(x)$, οπότε για $x=1$

είναι $F'(1)=f(1)=2$. Άρα η εφαπτομένη της C_F στο σημείο $M(1, F(1))$, είναι :

$y=F'(1)(x-1)+F(1) \Leftrightarrow y=2(x-1)+1 \Leftrightarrow \boxed{y=2x-1}$.

ii. Θέτοντας στη σχέση $F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$ όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε $F\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=\frac{2}{x}$.

Παραγοντοποιούμε τη $g(x)=F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)$ και παίρνουμε :

$g'(x)=F'(x)F\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}F(x)F'\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)F\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}2x=0$.

Αποδείξαμε πως $g'(x)=0$, άρα η g είναι σταθερή.

iii. Είναι : $g(x)=F(x)F\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x=1} g(1)=F(1)F(1)=1 \cdot 1=1$ και

$g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c \xrightarrow{x=1} g(1)=c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}$, άρα :

$g(x)=1 \Leftrightarrow F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=1 \Leftrightarrow F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{F(x)}$. Επιπλέον ισχύει :

$F\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{F(x)}f(x)=\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow (\ln F(x))'=(2 \ln x)' \Leftrightarrow$

$\ln F(x)=2 \ln x + c_1 \xrightarrow{x=1} \ln F(1)=c_1 \Leftrightarrow c_1=\ln 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1=0}}$.

Άρα : $\ln F(x)=2 \ln x \Leftrightarrow \ln F(x)=\ln x^2 \Leftrightarrow F(x)=x^2 \Rightarrow F'(x)=2x \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = 2x, x > 0}.$$

1985. i. Έχουμε :

$$F(x) + 2f(x) + (1 + e^{-x})f'(x) = 0 \Rightarrow F(x) + 2F'(x) + (1 + e^{-x})F''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F(x) + F'(x) + F'(x) + F''(x) + e^{-x}F''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x F(x) + e^x F'(x) + e^x F'(x) + e^x F''(x) + F''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)' F(x) + e^x (F(x))' + e^x F'(x) + (e^x + 1)F''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x F(x))' + (e^x + 1)' F'(x) + (e^x + 1)(F'(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x F(x))' + ((e^x + 1)F'(x))' = 0 \Leftrightarrow (e^x F(x) + (e^x + 1)F'(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x F(x) + (e^x + 1)f(x) = c_1 \xrightarrow{x=0} \cancel{F(0)}^0 + 2f(0) = c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = 1}}. \text{ Άρα :}$$

$$e^x F(x) + (e^x + 1)f(x) = 1 \Leftrightarrow e^x F(x) + (e^x + 1)F'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^x + 1)' F(x) + (e^x + 1)(F(x))' = 1 \Leftrightarrow ((e^x + 1)F(x))' = x' \Leftrightarrow$$

$$(e^x + 1)F(x) = x + c_2 \xrightarrow{x=0} \cancel{2F(0)}^0 = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

$$\text{Οπότε : } (e^x + 1)F(x) = x \Leftrightarrow \boxed{F(x) = \frac{x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Είναι : $F'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}$. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = e^x + 1 - xe^x$ η οποία

έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με

παράγωγο : $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$. Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονotonίας-ακροτάτων της } g$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	$\oplus$	-
$g(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$.

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$. Η g παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = 0$ το $g(0) = 2$.

Έχουμε $g(0) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1 - xe^x) = 0 + 1 - 0 = 1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1 - xe^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x(1 - x)) = 1 + (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty. \text{ Άρα :}$$

$$g(A_1) = g((-\infty, 0]) \stackrel{\substack{g \text{ συνεχής} \\ g \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(0) \right] = (1, 2],$$

$$g(A_2) = g([0, +\infty)) \stackrel{\substack{\text{g συνεχής} \\ \text{g γν. φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) \right] = (-\infty, 2].$$

Οπότε $g(A) = g(A_1) \cup g(A_2) = (-\infty, 2]$ το σύνολο τιμών της g .

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $g(x) = 0$:

- Το $0 \notin g(A_1)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
- Το $0 \in g(A_2)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$, άρα και η $F'(x) = 0$, αφού $F'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$, έχει

ακριβώς μία ρίζα, δηλαδή η F έχει ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο.

1986. Έχουμε:

$$F(e^x + 1) + F(x + 1) = F(e^x) + F(x + 2) \Leftrightarrow F(e^x + 1) - F(e^x) = F(x + 2) - F(x + 1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = F(x + 1) - F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$g'(x) = F'(x + 1) - F'(x) = f(x + 1) - f(x). \text{ Είναι:}$$

$x < x + 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x + 1) \Leftrightarrow f(x + 1) - f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Έτσι έχουμε:

$$F(e^x + 1) - F(e^x) = F(x + 2) - F(x + 1) \Leftrightarrow g(e^x) = g(x + 1) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} e^x = x + 1.$$

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ παίρνουμε:

$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Rightarrow e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα η εξίσωση

$$F(e^x + 1) + F(x + 1) = F(e^x) + F(x + 2) \text{ έχει μοναδική λύση την } \boxed{x = 0}.$$

1987. Παραγωγίζοντας τη σχέση $F(x^2 + 1) + F(4x - 3) = x^4 + 20x^2 - 24x + 10$ παίρνουμε:

$$2xf'(x^2 + 1) + 4f'(4x - 3) = 4x^3 + 40x - 24 \Leftrightarrow$$

$2xf'(x^2 + 1) + 4f(4x - 3) = 4x^3 + 40x - 24$. Αναζητούμε την τιμή ή τις τιμές που παίρνει το x έτσι ώστε να είναι $x^2 + 1 = 4x - 3$ και έχουμε:

$$x^2 + 1 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Έτσι αν στη σχέση $2xf'(x^2 + 1) + 4f(4x - 3) = 4x^3 + 40x - 24$ θέσουμε:

$$- \text{ όπου } x \text{ το } 2, \text{ παίρνουμε: } 4f(5) + 4f(5) = 88 \Leftrightarrow 8f(5) = 88 \Leftrightarrow f(5) = 11.$$

$$- \text{ όπου } x \text{ το } 0, \text{ παίρνουμε: } 4f(-3) = -24 \Leftrightarrow f(-3) = -6.$$

Η f είναι συνεχής στο $[-3, 5]$ με $f(-3) = -6 < 0$ και $f(5) = 11 > 0$, δηλαδή

$f(-3) \cdot f(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (-3, 5)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Αποδείξαμε πως η f έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** x_0 στο $(-3, 5)$.

1988. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$. Η σχέση $f(x) + x^2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) + x^2 - 2 \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(1) = 0$.

Η $g(x) = f(x) + x^2 - 2$ έχει παράγωγο $g'(x) = f'(x) + 2x$, οπότε :

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = -2.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε αυτή θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της. Επιπλέον είναι $f'(1) = -2 < 0$, δηλαδή είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι : } F(x^3 + 9) + F(-2) > F(x^3 + 6) \Leftrightarrow F(x^3 + 9) - F(x^3 + 6) > F(1) - F(-2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x+3) - F(x)$ με παράγωγο :

$$G'(x) = F'(x+3) - F'(x) = f(x+3) - f(x) < 0, \text{ αφού είναι :}$$

$$x < x+3 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x+3) \Leftrightarrow f(x+3) - f(x) < 0.$$

Είναι $G'(x) < 0$, άρα η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι η ανίσωση $F(x^3 + 9) - F(x^3 + 6) > F(1) - F(-2)$ γίνεται :

$$F(x^3 + 6 + 3) - F(x^3 + 6) > F(-2 + 3) - F(-2) \Leftrightarrow G(x^3 + 6) > G(-2) \stackrel{G \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^3 + 6 < -2 \Leftrightarrow x^3 + 8 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) < 0.$$

Είναι $x^2 - 2x + 4 > 0$, αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta < 0$, συνεπώς από την παραπάνω ανίσωση παίρνουμε $x + 2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < -2}$.

$$\text{ii. Είναι : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)(e^{x-1} - 1)}{(x-1)^4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1} \frac{F'(x)(e^{x-1} - 1) + F(x)e^{x-1}}{4(x-1)^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(e^{x-1} - 1) + F(x)e^{x-1}}{4(x-1)^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)(e^{x-1} - 1) + f(x)e^{x-1} + F'(x)e^{x-1} + F(x)e^{x-1}}{12(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{12(x-1)^2} (f'(x)(e^{x-1} - 1) + 2f(x)e^{x-1} + F(x)e^{x-1}) \right] =$$

$$= (+\infty)(-2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (+\infty)(+2) = +\infty.$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C , x' & $x=a$, $x=b$

1989. i. Η $f(x) = x^2 - 6x + 8$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα και στο $[1, 5]$, ως πολυωνυμική. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=2} \text{ ή } \underline{x=4}, \text{ οπότε}$$

μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	1	2	4	5	$+\infty$
f(x)	+	+	○	-	○	+

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^5 |f(x)| dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx = \\ &= \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx - \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx + \int_4^5 (x^2 - 6x + 8) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_2^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_4^5 = \\ &= \left(\frac{7}{3} - 1 \right) - \left(\frac{56}{3} - 20 \right) + \left(\frac{61}{3} - 19 \right) = \mathbf{4\tau.μ.} \end{aligned}$$

ii. Η $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα και στο $\left[\frac{1}{2}, e\right]$, ως λογαριθμική. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$,
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$e+\infty$
f(x)		-	- 0 +	+

$$\text{Είναι } (x \ln x - x)' = \ln x.$$

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{1}{2}}^e |f(x)| dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = \\ &= -[x \ln x - x]_{\frac{1}{2}}^1 + [x \ln x - x]_1^e = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2\right) + 1 = \frac{3 - \ln 2}{2} \mathbf{\tau.μ.} \end{aligned}$$

iii. Η $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2\}$ και είναι συνεχής σε αυτό,

άρα και στο $[3, 5]$, ως ρητή. Για κάθε $3 \leq x \leq 5$ είναι :

$$3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 25 \Leftrightarrow 6 \leq x^2 - 3 \leq 22 \Rightarrow x^2 - 3 > 0 \text{ και}$$

$$3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow x-2 > 0, \text{ οπότε είναι και } f(x) = \frac{x^2-3}{x-2} > 0.$$

$$\text{Έχουμε : } \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} + \frac{1}{x-2} = x+2 + \frac{1}{x-2} = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-2| \right)'.$$

Επομένως :

$$E = \int_3^5 |f(x)| dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 \frac{x^2-3}{x-2} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-2| \right]_3^5 = (12 + \ln 3) \text{ τ.μ. .}$$

iv. Η $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα

και στο $[1, 2]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \geq 1$ είναι $\ln x \geq 0$ και αφού επιπλέον ισχύει $\sqrt{x} > 0$ τότε θα είναι και

$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left(x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right)' \cdot \ln x dx = \\ &= \left[2\sqrt{x} \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 2x^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)' dx = 2\sqrt{2} \cdot \ln 2 - \int_1^2 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \ln 2 - \int_1^2 2x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2} \cdot \ln 2 - \left[2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = (2\sqrt{2} \cdot \ln 2 - 4\sqrt{2} + 4) \text{ τ.μ. .} \end{aligned}$$

v. Η $f(x) = x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό,

άρα και στο $\left[\frac{1}{e}, e \right]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Αναζητούμε το πρόσημο της f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow \overset{x \neq 0}{\ln x = 0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$.

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1,$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1,$ οπότε κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$e + \infty$
$\ln x$		-	- $\bigcirc$ +	+
x		+	+	+
f(x)		-	- $\bigcirc$ +	+

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\frac{1}{e}}^e |f(x)| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x dx + \int_1^e x \ln x dx = \\
 &= -\int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx + \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \\
 &= -\left[\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] + \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\
 &= -\left[\frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x}{2} dx \right] + \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx = -\frac{1}{2e^2} + \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \\
 &= -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{2} \right) \text{τ.μ.}
 \end{aligned}$$

1990. i. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$, συνεπώς έχουμε :

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$. Οπότε :

- Το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f ,
- Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$ και
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 0$, με παράγωγο $f'(x) = 2^x \ln 2 + m^x \ln m - 4^x \ln 4 - 5^x \ln 5$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + \ln m - \ln 4 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{2m}{20} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{m}{10} = 1 \Leftrightarrow \boxed{m=10}$$

ii. Για $m=10$ έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + 10^x - 4^x - 5^x$. Από το ερώτημα **i.**

γνωρίζουμε πως για $m=10$ είναι $f(x) \geq 0$. Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2^x + 10^x - 4^x - 5^x) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{5^x}{\ln 5} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{2}{\ln 2} + \frac{10}{\ln 10} - \frac{4}{\ln 4} - \frac{5}{\ln 5} - \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 10} - \frac{3}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 5} \right) \text{τ.μ.}
 \end{aligned}$$

1991. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολωνυμική.

Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 2) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x - 2) = -2 \quad \text{και} \quad f(0) = -2.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και άρα σε όλο το $\mathbb{R}$. Η f λοιπόν είναι και ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

- για $x \leq 0$ έχουμε: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, η οποία απορρίπτεται,
- για $x > 0$ έχουμε: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$ ή $x = -2$, η οποία απορρίπτεται, οπότε μπορούμε να

κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty - 2$	-1	0	1	$2 + \infty$
$2x - 2$	-	-	-	$\oplus$	
$x^2 + x - 2$		$\oplus$		- $\oplus$ +	+

$$\begin{aligned} \text{Επομένως έχουμε: } E &= \int_{-1}^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \\ &= -\int_{-1}^0 (2x-2) dx - \int_0^1 (x^2+x-2) dx + \int_1^2 (x^2+x-2) dx = \\ &= -\left[x^2 - 2x\right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = 3 - \left(\frac{5}{6} - 2\right) + \frac{11}{6} = \mathbf{6\tau.μ.} \end{aligned}$$

1992. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x - e) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 0.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και άρα σε όλο το $\mathbb{R}$. Η f λοιπόν είναι και ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

- για $x < 1$ έχουμε: $f(x) = 0 \Rightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow x = 1$, η οποία απορρίπτεται,
- για $x \geq 1$ έχουμε: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$.

Επιπλέον είναι και $x < 1 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow e^x - e < 0$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$e^x - e$	-	-			
$\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$			$\oplus$ +		+

$$\text{Είναι } \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)' = \left[\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} \right]'. \text{ Επομένως έχουμε:}$$

$$E = \int_0^e |f(x)| dx = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = -\int_0^1 (e^x - e) dx + \int_1^e \left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx =$$

$$= -\left[e^x - ex\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{ τ.μ. .}$$

1993. i. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$ και θα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3). \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 = 9a = f(3) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} = -1,$$

$$\text{οπότε είναι } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow 9a = -1 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{1}{9}}.$$

ii. Για $x > 3$ είναι :

$$f'(x) = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2} = \frac{-xe^{x-3} + 3e^{x-3} - 1 + e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{-xe^{x-3} + 4e^{x-3} - 1}{(x-3)^2} \stackrel{x=4}{\Rightarrow}$$

$$f'(4) = -1 \text{ και } f(4) = 1 - e.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$ είναι :

$$\varepsilon : y = f'(4)(x-4) + f(4) \Leftrightarrow y = -(x-4) + 1 - e \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 5 - e}.$$

iii. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$, οπότε έχουμε :

$$E = \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_1^2 f(x) dx = -\int_1^2 \left(-\frac{1}{9}x^2\right) dx = \frac{1}{9} \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{27} \text{ τ.μ. .}$$

1994. i. Η $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x - x \ln x}{4x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2 - \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x - 2 + \ln x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Συνεπώς η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$A = (0, +\infty)$, άρα και $1-1$. Είναι $g(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι $1-1$. Οπότε :

$$- \text{ Για } \boxed{0 < x < 1} \text{ έχουμε : } x < 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 1} \text{ έχουμε : } x > 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x-2+\ln x}{4x\sqrt{x}}=0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2x-2+\ln x=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$.

ii. Πρέπει να βρούμε το πρόσημο της f . Έχουμε $f(1) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x \right) = 0 - (+\infty)(-\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x} \ln x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{2x} \right) = \\ &= (+\infty)(1-0) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0. \text{ Άρα :} \end{aligned}$$

$$f(A_1) = f((0, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=}} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=}} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty)}$ το **σύνολο τιμών** της f .

Παρατηρούμε ότι $f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \geq 1 > 0$. Συνεπώς :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^4 |f(x)| dx = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x dx = \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - \int_1^4 (\sqrt{x})' \ln x dx = \frac{14}{3} - [\sqrt{x} \ln x]_1^4 + \int_1^4 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{14}{3} - 2 \ln 4 + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{14}{3} - 4 \ln 2 + \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \frac{14}{3} - 4 \ln 2 + 2 = \left(\frac{20}{3} - 4 \ln 2 \right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

1995. i. Η $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό,

άρα και στο $[\lambda, \lambda+1]$, όπου $\lambda > 0$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(x) = 2x + \frac{4}{x} > 0$, για κάθε $x \in [\lambda, \lambda+1]$, οπότε έχουμε :

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} |f(x)| dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \left(2x + \frac{4}{x} \right) dx = \left[x^2 + 4 \ln |x| \right]_{\lambda}^{\lambda+1} =$$

$$= (\lambda+1)^2 + 4 \ln(\lambda+1) - \lambda^2 - 4 \ln \lambda = 2\lambda + 1 + 4 \ln \frac{\lambda+1}{\lambda} = 2\lambda + 1 + 4 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \text{ τ.μ. .}$$

ii. Η συνάρτηση $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$E'(\lambda) = 2 + 4 \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) = 2 - 4 \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 2 - \frac{4}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda - 4}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2(\lambda^2 + \lambda - 2)}{\lambda^2 + \lambda}.$$

Έτσι έχουμε :

$$E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\lambda^2 + \lambda - 2)}{\lambda^2 + \lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda = 1$ ή $\lambda = -2$, το οποίο απορρίπτεται αφού $\lambda > 0$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της E :

λ	0	1	$+\infty$
$\lambda^2 + \lambda - 2$		-	Φ +
$E'(\lambda)$		-	+
$E(\lambda)$		$\searrow$ T.E. $\nearrow$	

Συνεπώς η $E(\lambda)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\lambda = 1$, δηλαδή το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο για $\boxed{\lambda = 1}$.

1996. i. Η $f(x) = 9x^2 \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα και στο $[1, \lambda]$, όπου $\lambda > 1$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x > 1$ είναι και $\ln x > 0$ οπότε $f(x) = 9x^2 \ln x > 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$, έτσι :

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \int_1^\lambda |f(x)| dx = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda (9x^2 \ln x) dx = \int_1^\lambda (3x^3)' \ln x dx = \\ &= \left[3x^3 \ln x \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda 3x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = 3\lambda^3 \ln \lambda - \int_1^\lambda 3x^2 dx = 3\lambda^3 \ln \lambda - \left[x^3 \right]_1^\lambda = \\ &= (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1) \text{ τ.μ. .} \end{aligned}$$

ii. Για την $E(\lambda) = 3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1$ έχουμε $E(1) = 0$ και $E(e) = 2e^3 + 1$. Οπότε $0 < 17 < 2e^3 + 1 \Leftrightarrow E(1) < 17 < E(e)$.

Η E είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον ισχύει $E(1) < 17 < E(e)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $E(\lambda) = 17$.

Είναι : $E'(\lambda) = 9\lambda^2 \ln \lambda + 3\lambda^2 - 3\lambda^2 = 9\lambda^2 \ln \lambda > 0$ για κάθε $\lambda \in (1, e)$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Άρα υπάρχει **μοναδικό** $\lambda \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $E(\lambda) = 17$.

1997. Η ευθεία $x = a$ διχοτομεί την επιφάνεια που ορίζεται από τη C_F , τον άξονα $x'x$ και τις

ευθείες $x=1$ και $x=2$ όταν $E_1 = E_2$, όπου $E_1 = \int_1^a |f(x)| dx$ και $E_2 = \int_a^2 |f(x)| dx$.

Η $f(x) = \frac{4}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα και στο

$[1, 2]$. Είναι $f(x) = \frac{4}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, οπότε έχουμε :

$$E_1 = \int_1^a |f(x)| dx = \int_1^a f(x) dx = \int_1^a \frac{4}{x^2} dx = \left[-\frac{4}{x} \right]_1^a = -\frac{4}{a} + 4 \text{ και}$$

$$E_2 = \int_a^2 |f(x)| dx = \int_a^2 f(x) dx = \int_a^2 \frac{4}{x^2} dx = \left[-\frac{4}{x} \right]_a^2 = -2 + \frac{4}{a}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow -\frac{4}{a} + 4 = -2 + \frac{4}{a} \Leftrightarrow \frac{8}{a} = 6 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Άρα η ζητούμενη κατακόρυφη είναι η $\boxed{x = \frac{4}{3}}$.

1998. Η ευθεία $x=a$ χωρίζει το χωρίο A σε δύο ισεμβαδικά χωρία όταν $E_1 = E_2$, όπου

$$E_1 = \int_0^a |f(x)| dx \text{ και } E_2 = \int_a^1 |f(x)| dx.$$

Η $f(x) = e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα και στο $[0, 1]$. Είναι $f(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε :

$$E_1 = \int_0^a |f(x)| dx = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a e^x dx = \left[e^x \right]_0^a = e^a - 1 \text{ και}$$

$$E_2 = \int_a^1 |f(x)| dx = \int_a^1 f(x) dx = \int_a^1 e^x dx = \left[e^x \right]_a^1 = e - e^a. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow e^a - 1 = e - e^a \Leftrightarrow 2e^a = e + 1 \Leftrightarrow e^a = \frac{e+1}{2} \Leftrightarrow \ln e^a = \ln \frac{e+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a = \ln \frac{e+1}{2}}.$$

1999. i. Είναι

$$f(x) = x^2 f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \left[\ln f(x) \right]' = \left(-\frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow \ln f(x) = -\frac{1}{x} + c \Rightarrow$$

$$\ln f(1) = -1 + c \Leftrightarrow \ln \frac{2017}{e} = -1 + c \Leftrightarrow \ln 2017 - \ln e = -1 + c \Leftrightarrow$$

$$\ln 2017 - 1 = -1 + c \Leftrightarrow c = \ln 2017. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\ln f(x) = -\frac{1}{x} + \ln 2017 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^{-\frac{1}{x}} + \ln 2017 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln 2017 e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = 2017 e^{-\frac{1}{x}}, x > 0}.$$

ii. Η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα και στο $[1, 2]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, έτσι :

$$E = \int_1^2 |g(x)| dx = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{2017e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \right) dx = \int_1^2 2017e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx =$$

$$\begin{aligned} u = -\frac{1}{x} &\Leftrightarrow du = \frac{1}{x^2} dx \\ x=1 &\Leftrightarrow u=-1 \\ x=2 &\Leftrightarrow u=-\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 2017e^u du = \left[2017e^u \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = 2017 \left[e^u \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = 2017 \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} \right) =$$

$$= 2017 \frac{\sqrt{e}-1}{e} \text{ τ.μ. .}$$

2000. i. Είναι : $f(x) + f(1-x) = \frac{x^4}{x^4 + (1-x)^4} + \frac{(1-x)^4}{(1-x)^4 + x^4} = \frac{x^4 + (1-x)^4}{x^4 + (1-x)^4} = 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x) + f(1-x) = 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι : $\int_0^1 f(1-x) dx \stackrel{u=1-x \Leftrightarrow du=-dx}{\underset{x=0 \Leftrightarrow u=1}{x=1 \Leftrightarrow u=0}} = \int_1^0 (-f(u)) du = -\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(u) du$. Έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) = 1 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 1 dx \quad \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(x) dx \\ \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx &= [x]_0^1 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}} \end{aligned}$$

2001. α. Η $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = -\frac{e}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-e}{x^2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-e}{x^2} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x-e=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=e}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘ T.E.	↗

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, e]$.
– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[e, +\infty)$ και

ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=e$ το $f(e) = 3$.

β. Έχουμε :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e + x \ln x + x}{x} \stackrel{\left(\frac{e}{0}\right)}{=} +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0, (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma y'y)}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e}{x} + \ln x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e + x \ln x + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e + x \ln x + x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda=0}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) = 0 + (+\infty) + 1 = +\infty.$$

Άρα η C_f **δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3^{x-1}$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής στο $[1, 4]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με

$$g(1) = f(1) - 1 = e + 1 - 1 = e > 0 \text{ και } g(4) = f(4) - 3^3 = \frac{e}{4} + \ln 4 + 1 - 27 < 0. \text{ Έτσι}$$

έχουμε $g(1) \cdot g(4) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3^{\xi-1}$.

δ. Είναι για $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$ οπότε και $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1 > 0$ για κάθε $x > 1$.

Είναι $(x \ln x)' = \ln x + 1$ επομένως έχουμε :

$$E = \int_1^{e^2} |f(x)| dx = \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) dx = [e \ln x + x \ln x]_1^{e^2} = (2e + 2e^2) \text{ τ.μ.}$$

2002. α. Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Οπότε θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ έχουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow \boxed{e^x \geq x + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β. Στη σχέση $e^x \geq x + 1$ αν βάλουμε όπου x το $x - 1$, έχουμε :

$$e^{x-1} \geq x - 1 + 1 \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Οπότε έχουμε :}$$

$$E(\lambda) = \int_0^\lambda |f(x)| dx = \int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^\lambda (e^{x-1} - x) dx = \left[e^{x-1} - \frac{x^2}{2} \right]_0^\lambda = \left(e^{\lambda-1} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{e} \right) \text{ τ.μ.}$$

γ. Είναι :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(e^{\lambda-1} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{e} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(e^{\lambda-1} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{e} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \left(\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2 e} \right) =$$

$$= (+\infty) \cdot \left(+\infty - \frac{1}{2} - 0 \right) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda-1}}{\lambda^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda-1}}{2\lambda} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda-1}}{2} = +\infty \text{ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^2 e} = 0.$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C, και x'x

2003. i. Η $f(x) = x^2 - 4$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{x=2} \text{ ή } \underline{x=-2}, \text{ οπότε μπορούμε να}$$

κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f(x)	+	⊖	-	⊖	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = - \int_{-2}^2 f(x) dx = - \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 = - \left(\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 \right) =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ τ.μ. .}$$

ii. Η $f(x) = x^3 - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } \underline{x=-1}) \text{ ή}$$

$\underline{x=0}$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x^2-1	+	⊖	-	-	⊖	+	
x	-	-	⊖	+	+	+	
f(x)	-	⊖	+	⊖	-	⊖	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ. .}$$

iii. Η $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

1	-4	1	6	$\rho=2$
	2	-4	-6	
1	-2	-3	0	

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$x=2$ ή $x=3$ ή $x=-1$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
x^2-2x-3	+	○	-	-	○	+	
$x-2$	-	-	○	+	+		
f(x)	-	○	+	○	-	○	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-1}^3 |f(x)| dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = \int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx - \int_2^3 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^2 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^3 = \\ &= \left(24 - \frac{153}{12} \right) - \left(\frac{425}{12} - 36 \right) = \frac{71}{6} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

iv. Η $f(x) = xe^x - ex$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow xe^x - ex = 0 \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } (e^x = e \Leftrightarrow \underline{x=1}).$$

Επιπλέον είναι :

- $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1,$
- $e^x - e < 0 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow x < 1,$ οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$e^x - e$	-	-	$\circ$	+	
x	-	$\circ$	+	+	
f(x)	+	$\circ$	-	$\circ$	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx = - \int_0^1 f(x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 (xe^x - ex) dx = - \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 ex dx = - \int_0^1 x(e^x)' dx + \left[\frac{ex^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= - \left[xe^x \right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx + \frac{e}{2} = -e + \left[e^x \right]_0^1 + \frac{e}{2} = -e + e - 1 + \frac{e}{2} = \left(\frac{e}{2} - 1 \right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , $x'x$ & $x=a$

2004. i. Η $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό ως λογαριθμική. Αναζητούμε το πρόσημο της f : $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}.$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1,$

- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσημίων :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
f(x)		-	-	+

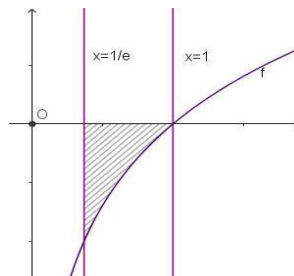
Είναι $(x \ln x - x)' = \ln x$.

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{\frac{1}{e}}^1 |f(x)| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx =$$

$$= -[x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^1 = -\left(-1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) \text{ τ.μ. .}$$

- Θα μπορούσαμε επίσης να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και από εκεί να βρούμε το πρόσημο της f και το ζητούμενο εμβαδό.



- ii. Η $f(x) = x^3 + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική.

Ο άξονας y'y είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=0$. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow \underline{x = -1}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

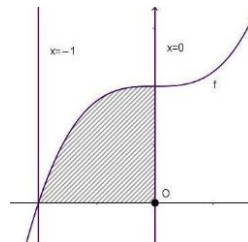
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x > -1$,
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 < 0 \Leftrightarrow x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσημίων :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f(x)	-	-	+	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^0 = \frac{3}{4} \text{ τ.μ. .}$$

- Θα μπορούσαμε επίσης να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και από εκεί να βρούμε το πρόσημο της f και το ζητούμενο εμβαδό.



- 2005. i.** Η $f(x) = (x+1)e^x + \ln(x+1) - 1$ έχει πεδίο ορισμού

το $A = (-1, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι :

$$f'(x) = e^x + (x+1)e^x + \frac{1}{x+1} > 0, \text{ για κάθε } x > -1 \text{ αφού } x+1 > 0 \text{ και } e^x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $1-1$. Είναι $f(0)=0$, άρα **το $x=0$ είναι ρίζα** της $f(x)=0$, η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι $1-1$.

ii. Αναζητούμε το πρόσημο της f : Αφού το $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της f , είναι :

– Για $-1 < x < 0$ έχουμε : $x < 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}$.

– Για $x > 0$ έχουμε : $x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	Φ	$+$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως έχουμε : } E &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (xe^x + e^x + \ln(x+1) - 1) dx = \\ &= \int_0^1 (xe^x + e^x) dx + \int_0^1 \ln(x+1) dx - \int_0^1 1 dx = [xe^x]_0^1 + \int_0^1 (x)' \ln(x+1) dx - [x]_0^1 = \\ &= e + [x \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx - 1 = e + \ln 2 - 1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \\ &= e + \ln 2 - 1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = e + \ln 2 - 1 - [x - \ln(x+1)]_0^1 = e + \ln 2 - 1 - 1 + \ln 2 = \\ &= (e - 2 + 2\ln 2) \text{ τ.μ..} \end{aligned}$$

2006. i. Η $f(x) = x^2 \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) σε αυτό με παράγωγο : $f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(\ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{x = e^{-\frac{1}{2}}} \right) \text{ ή } x = 0, \text{ το οποίο}$$

απορρίπτεται αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Συνεπώς **υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.**

ii. Επιπλέον είναι :

- $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}},$
- $2 \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}},$ οπότε μπορούμε να

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$2 \ln x + 1$		$-$	Φ
x		$+$	$+$
$f'(x)$		$-$	Φ
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

ο f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο

$$x_0 = e^{-\frac{1}{2}} \text{ το } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

Αναζητούμε το πρόσημο της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } (\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}).$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1,$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1,$ οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα

προσήμων :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	1	$+\infty$
f(x)		-	-	+

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 |f(x)| dx = - \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 f(x) dx = - \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 (x^2 \ln x) dx = - \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 + \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 \frac{x^2}{3} dx = - \frac{1}{6} e^{-\frac{3}{2}} + \left[\frac{x^3}{9} \right]_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 = - \frac{1}{6} e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} e^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{2-5e^{-\frac{3}{2}}}{18} \text{ τ.μ..} \end{aligned}$$

2007. i. Η $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

$$\text{παραγωγίσιμη με παραγώγους : } h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0 \text{ και}$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Συνεπώς η h είναι κοίλη στο } \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε :

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \begin{matrix} h'(x) > 0 \\ \Leftrightarrow \\ h \text{ γν. αύξ.} \end{matrix} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \begin{matrix} h''(x) < 0 \\ \Leftrightarrow \\ h' \text{ γν. φθ.} \end{matrix} \boxed{x > 0}.$$

iii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_h :

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \ln(e^x + 1) \right) = 1 - 0 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{u=e^x+1}{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 1}} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) \stackrel{u=e^x+1}{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 1}} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} (-\ln u) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_h στο $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \stackrel{u = \frac{e^x}{e^x + 1}}{=} \\ &\stackrel{u \rightarrow 1}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} 1.\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_h στο $+\infty$.

iv. Η $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_\varphi = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Αναζητούμε το πρόσημο της φ :

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (h(x) + \ln 2) = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x=0}}$$

Επιπλέον είναι :

- $h(x) + \ln 2 > 0 \Leftrightarrow h(x) > -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x > 0,$
- $h(x) + \ln 2 < 0 \Leftrightarrow h(x) < -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 0,$ οπότε

μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\varphi(x)$	-	$\emptyset$	+	+

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}E &= \int_0^1 |\varphi(x)| dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 e^x (h(x) + \ln 2) dx = \int_0^1 (e^x)' (h(x) + \ln 2) dx = \\ &= \left[e^x (h(x) + \ln 2) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x) dx = \\ &= e(h(1) + \ln 2) - (h(0) + \ln 2) - \int_0^1 e^x \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \\ &= e(1 - \ln(e+1) + \ln 2) - (-\ln 2 + \ln 2) - \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 = \\ &= e \left(1 + \ln \frac{2}{e+1} \right) - \ln(e+1) + \ln 2 = e + e \ln \frac{2}{e+1} + \ln \frac{2}{e+1} = \left[e + (e+1) \ln \frac{2}{e+1} \right] \text{τ.μ.}\end{aligned}$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g , & $x=\alpha$, $x=\beta$

2008. Οι $f(x) = -3x^2$ και $g(x) = 3x^2 - 6x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$

και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά, άρα και στο $[-1, 3]$, ως πολωνυμικές.

$$\text{Είναι } f(x) - g(x) = -3x^2 - 3x^2 + 6x = -6x^2 + 6x = -6x(x-1).$$

Αναζητούμε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$:

$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$ ή $\underline{x=1}$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-1	0	1	$3+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	-	ϕ	ϕ	-

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^3 |f(x) - g(x)| dx = \\ &= -\int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx - \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx = \\ &= -\int_{-1}^0 (-6x^2 + 6x) dx + \int_0^1 (-6x^2 + 6x) dx - \int_1^3 (-6x^2 + 6x) dx = \\ &= -\left[-2x^3 + 3x^2\right]_{-1}^0 + \left[-2x^3 + 3x^2\right]_0^1 - \left[-2x^3 + 3x^2\right]_1^3 = 5 + 1 + 28 = \mathbf{34\tau.μ.} \end{aligned}$$

2009. i. Οι $f(x) = x + e^{-x}$ και $g(x) = x - e^{-x}$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά, άρα και στο $[0, 2]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι $f(x) - g(x) = \cancel{x} + e^{-x} - \cancel{x} + e^{-x} = 2e^{-x} > 0$.

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 2e^{-x} dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^2 = (-2e^{-2} + 2) \mathbf{\tau.μ.}$$

ii. Είναι $f(x) - y = \cancel{x} + e^{-x} - \cancel{x} = e^{-x} > 0$. Επομένως έχουμε :

$$E = \int_0^2 |f(x) - y| dx = \int_0^2 (f(x) - y) dx = \int_0^2 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^2 = (-e^{-2} + 1) \mathbf{\tau.μ.}$$

2010. Οι $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά, άρα και στο $[0, \pi]$, ως τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων :

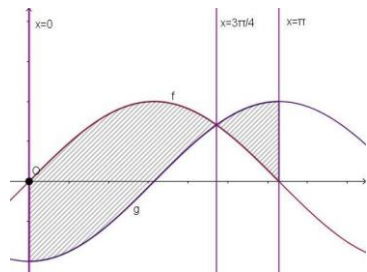
Βρίσκουμε το σημείο τομής των C_f και C_g :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{3\pi}{4}}}$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} |f(x) - g(x)| dx = \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (f(x) - g(x)) dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - g(x)) dx = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\eta \mu x + \sigma \nu x) dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\eta \mu x + \sigma \nu x) dx = [-\sigma \nu x + \eta \mu x]_0^{\frac{3\pi}{4}} - [-\sigma \nu x + \eta \mu x]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \tau. \mu.
\end{aligned}$$

2011. i. Βρίσκουμε την ασύμπτωτη ε της f στο $+\infty$:

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} + 1}{\cancel{x^3}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cancel{x} + \frac{1}{x^2} - \cancel{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$. Συνεπώς $\varepsilon : y = x$.

ii. Είναι $f(x) - y = \cancel{x} + \frac{1}{x^2} - \cancel{x} = \frac{1}{x^2} > 0$. Επομένως έχουμε :

$$E = \int_1^2 |f(x) - y| dx = \int_1^2 (f(x) - y) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \tau. \mu.}}.$$

2012. i. Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Οπότε θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ έχουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow \boxed{e^x \geq x + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Οι $f(x) = e^x (x^2 + 2)$ και $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ έχουν πεδία ορισμού

αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά, άρα και στο $[0, 1]$, ως

αποτελέσματα πράξεων συνεχών συναρτήσεων η f και ως πολυωνυμική η g .

Είναι :

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= e^x (x^2 + 2) - (x^3 + x^2 + 2x + 2) = e^x (x^2 + 2) - [x^2 (x + 1) + 2(x + 1)] = \\
&= e^x (x^2 + 2) - (x + 1)(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(e^x - x - 1) \geq 0, \text{ αφού } x^2 + 2 > 0
\end{aligned}$$

$$\text{και } e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0.$$

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^2 e^x + 2e^x - x^3 - x^2 - 2x - 2) dx = \\
&= \int_0^1 x^2 e^x dx + \int_0^1 (2e^x - x^3 - x^2 - 2x - 2) dx = \\
&= \int_0^1 x^2 (e^x)' dx + \left[2e^x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x \right]_0^1 = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx + 2e - \frac{67}{12} = \\
&= e - \int_0^1 2x(e^x)' dx + 2e - \frac{67}{12} = e - \left[2xe^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx + 2e - \frac{67}{12} =
\end{aligned}$$

$$= 3e - \frac{67}{12} - 2e + \left[2e^x \right]_0^1 = e - \frac{67}{12} + 2e - 2 = \left(3e - \frac{91}{12} \right) \tau. \mu. .$$

2013. α. i. Η $f(x) = (x-1)e^x + 1 - \frac{x^2}{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x - x = xe^x - x = x(e^x - 1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } (e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}). \text{ Επιπλέον είναι :}$$

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0,$
- $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0,$ οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	$\emptyset$	+
$e^x - 1$	-	$\emptyset$	+
$f'(x)$	+	$\emptyset$	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

Είναι $f(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της

$f(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι $1-1$.

ii. Αναζητούμε το πρόσημο της f :

Αφού το $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της f , είναι :

$$- \text{ Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

β. Οι $g(x) = xe^x + 1$ και $h(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2e^x)$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα

$D_g = \mathbb{R}$ και $D_h = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά, άρα και στο $[-1, 1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι :

$$g(x) - h(x) = xe^x + 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 2e^x) = xe^x + 1 - \frac{x^2}{2} - e^x = (x-1)e^x + 1 - \frac{x^2}{2} = f(x).$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων της f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-	-	$\emptyset$	+	+

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |g(x) - h(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \\ &= - \int_{-1}^0 \left(xe^x - e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(xe^x - e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \\ &= - \int_{-1}^0 xe^x dx - \int_{-1}^0 \left(-e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 \left(-e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{-1}^0 x(e^x)' dx - \left[-e^x + x - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^0 + \int_0^1 x(e^x)' dx + \left[-e^x + x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \\
&= -[xe^x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x dx - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{6} \right) + [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + \frac{11}{6} - e = \\
&= -\frac{1}{e} + [e^x]_{-1}^0 - \frac{1}{e} + \frac{1}{6} + \cancel{e} - [e^x]_0^1 + \frac{11}{6} - \cancel{e} = 2 - \frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{e} - e + 1 = \left(4 - e - \frac{3}{e} \right) \text{τ.μ..}
\end{aligned}$$

2014. Οι $f(x) = -\ln x + x + 2$ και $g(x) = -e^x + x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα

$D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά, άρα και στο $[1, e]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(x) - g(x) = -\ln x + \cancel{x} + 2 + e^x - \cancel{x} = 2 - \ln x + e^x$. Για κάθε $x < e$ έχουμε :

$x < e \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$ άρα :

$f(x) - g(x) = 2 - \ln x + e^x = (1 - \ln x) + 1 + e^x > 0$, αφού $1 - \ln x > 0$ και $1 + e^x > 0$.

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}
E &= \int_1^e |f(x) - g(x)| dx = \int_1^e (f(x) - g(x)) dx = \int_1^e (2 - \ln x + e^x) dx = \\
&= -\int_1^e \ln x dx + \int_1^e (2 + e^x) dx = -\int_1^e (x)' \ln x dx + [2x + e^x]_1^e = \\
&= -[x \ln x]_1^e + \int_1^e dx + (e - 2 + e^e) = -\cancel{e} + [x]_1^e + \cancel{e} - 2 + e^e = e - 1 - 2 + e^e = \\
&= (e^e + e - 3) \text{τ.μ..}
\end{aligned}$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και C_g

2015. i. Οι $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά ως πολυωνυμικές.

Είναι $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Αναζητούμε το πρόσημο της

$f(x) - g(x) : f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$ ή $\underline{\underline{x = 1}}$, οπότε

μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	$\oplus$	+	+
$x - 1$	-	-	$\oplus$	+
$f(x) - g(x)$	-	$\oplus$	-	$\oplus$

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx =$$

$$= -\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \text{ τ.μ. .}$$

ii. Οι $f(x) = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$ και $g(x) = -x(x-4) = -x^2 + 4x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτά ως πολυωνυμικές.

$$\text{Είναι } f(x) - g(x) = x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x = 2x^2 - 12x + 16 = 2(x^2 - 6x + 8) = 2(x-2)(x-4), x \in \mathbb{R} . \text{ Αναζητούμε το πρόσημο της } f(x) - g(x) :$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}} \text{ ή } \underline{\underline{x=4}}, \text{ οπότε μπορούμε να}$$

κάνουμε τον πίνακα προσημών :

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	+	⊖	⊖	+

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_2^4 |f(x) - g(x)| dx = -\int_2^4 (f(x) - g(x)) dx = -\int_2^4 (2x^2 - 12x + 16) dx = \\ &= -2 \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = -2 \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_2^4 = -2 \left[\left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} + 4 \right) \right] = \frac{8}{3} \text{ τ.μ. .} \end{aligned}$$

2016. i. Η $f(x) = x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική. Είναι $f(x) - y = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Αναζητούμε το πρόσημο της $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε μπορούμε να κάνουμε}$$

τον πίνακα προσημών :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	⊖	⊖	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-1}^1 |f(x) - y| dx = -\int_{-1}^1 (f(x) - y) dx = -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \text{ τ.μ. .}$$

ii. Η $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική. Επιπλέον έχουμε και την ευθεία $\varepsilon : 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

$$\text{Είναι } f(x) - y = -x^2 + 2x + 3 - 2x + 1 = 4 - x^2 = (2-x)(2+x).$$

Αναζητούμε το πρόσημο της $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-2}}, \text{ οπότε μπορούμε να}$$

κάνουμε τον πίνακα προσημών :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	⊖	⊖	-

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-2}^2 |f(x) - y| dx = \int_{-2}^2 (f(x) - y) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \text{ τ.μ. .}$$

iii. Η $f(x) = \frac{2}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό ως ρητή.

$$\text{Είναι } f(x) - y = \frac{2}{x} + x - 3 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x}.$$

Αναζητούμε το πρόσημο της $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=2}}, \text{ οπότε}$$

μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+		+	-	+
x	-		+	+	+
$f(x) - y$	-		+	-	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_1^2 |f(x) - y| dx =$$

$$= -\int_1^2 (f(x) - y) dx = -\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + x - 3 \right) dx = -\left[2 \ln x + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^2 = \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right) \text{ τ.μ. .}$$

2017. Η $f(x) = \sqrt{x+a}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = [-a, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $f(x) - y = \sqrt{x+a} - (x+a)$. Είναι :

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+a} - (x+a) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+a} = x+a \Leftrightarrow$$

$$x+a = x^2 + 2ax + a^2 \Leftrightarrow x^2 + (2a-1)x + a^2 - a = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + [a+(a-1)]x + a(a-1) = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-1+a) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-a}} \text{ ή } \underline{\underline{x=1-a}}.$$

Είναι :

$$-a < x < -a+1 \Leftrightarrow 0 < x+a < 1, \text{ άρα } \sqrt{x+a} > x+a \Leftrightarrow f(x) - y > 0.$$

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-a}^{-a+1} |f(x) - y| dx = \int_{-a}^{-a+1} (f(x) - y) dx = \int_{-a}^{-a+1} (\sqrt{x+a} - (x+a)) dx = \\ &= \int_{-a}^{-a+1} \left((x+a)^{\frac{1}{2}} - (x+a) \right) dx = \left[\frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{(x+a)^2}{2} \right]_{-a}^{-a+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ τ.μ. ,} \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο εμβαδόν είναι ανεξάρτητο του a .

2018. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f''(x) - g''(x) = 4 \Leftrightarrow [f'(x) - g'(x)]' = (4x)' \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 4x + c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f'(1) - g'(1) = 4 + c_1 \stackrel{f'(1)=g'(1)}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{c_1 = -4}}. \text{ Άρα είναι :}$$

$$f'(x) - g'(x) = 4x - 4 \Leftrightarrow [f(x) - g(x)]' = (2x^2 - 4x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x + c_2 \xrightarrow{x=2} f(2) - g(2) = c_2 \stackrel{f(2)=g(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0.$$

Επομένως : $G(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x, x \in \mathbb{R}.$

ii. Η $G(x) = 2x^2 - 4x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική. Αναζητούμε το πρόσημο της G :

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=2}, \text{ οπότε μπορούμε}$$

να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
G(x)	+	○	-	○	+

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_0^2 |G(x)| dx = -\int_0^2 G(x) dx = -\int_0^2 (2x^2 - 4x) dx = -\left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

2019. α. Είναι : $f''(x) = 4e^{2x} \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x} + c_1 \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} + c_1x + c_2.$

Επιπλέον είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + c_1x + c_2) = 2 \Leftrightarrow 1 + c_2 = 2 \Leftrightarrow \underline{c_2 = 1} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + c_1x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x} + c_1 + \frac{1}{x} \right) = 0 + c_1 + 0 = c_1, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{2x} \cdot \frac{1}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0. \text{ Άρα αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \text{ τότε είναι και } \underline{c_1 = -2}$$

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = e^{2x} - 2x + 1, x \in \mathbb{R}}.$$

β. Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.
Οπότε θέτοντας όπου x το $e^{2x} > 0$ έχουμε :

$$\ln e^{2x} \leq e^{2x} - 1 \Leftrightarrow 2x \leq e^{2x} - 1 \Leftrightarrow \boxed{e^{2x} - 2x - 1 \geq 0}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^{2x} - 2x - 2x^2 - 1$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) σε αυτό με παράγωγο :

$$h'(x) = 2e^{2x} - 2 - 4x = 2(e^{2x} - 2x - 1) \geq 0.$$

Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

Είναι $h(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $h(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2x = 2x^2 + 1$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι $1-1$.

$$\delta. \text{ Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = -2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Είναι :

$$f(x) - y = f(x) - (-2x + 1) = e^{2x} - \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{1} = e^{2x} > 0.$$

Επομένως έχουμε :

$$E = \int_{-1}^0 |f(x) - y| dx = \int_{-1}^0 (f(x) - y) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{e^2 - 1}{2e^2} \text{ τ.μ.}$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g & $x=\alpha$

2020. Οι $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [0, +\infty)$ και είναι συνεχείς σε αυτά. Είναι $f(x) - g(x) = 2x - 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Αναζητούμε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 1 = 0.$$

Θέτουμε $\sqrt{x} = \omega$, οπότε έχουμε $2\omega^2 - \omega - 1 = 0$ με $\Delta = 9$ και $\omega_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$, άρα

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}, \text{ η οποία απορρίπτεται και } \omega_2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι :

$$f(x) - g(x) = 2x - 1 - \sqrt{x} = 2(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 1 = 2(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \text{ αφού}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0.$$

Δηλαδή στο διάστημα $[0, 1]$ είναι $f(x) - g(x) \leq 0$. Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = -\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^1 (2x - 1 - \sqrt{x}) dx = \\ &= -\int_0^1 \left(2x - 1 - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = -\left[x^2 - x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2021. Οι $f(x) = 2 - 2x$ και $g(x) = \ln x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (0, +\infty)$ και είναι συνεχείς σε αυτά ως πολυωνυμική και ως λογαριθμική αντίστοιχα. Είναι $f(x) - g(x) = 2 - 2x - \ln x$, $x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = 2 - 2x - \ln x$, $x > 0$.

Είναι $h'(x) = -2 - \frac{1}{x} < 0$, για κάθε $x > 0$, συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1 - 1$.

Είναι $h(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι $1 - 1$. Θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της h στο διάστημα $(1, 2)$, άρα αφού το

$x=1$ είναι μοναδική ρίζα της h , είναι : $x > 1 \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(1) \Leftrightarrow h(x) < 0$.

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^2 |h(x)| dx = -\int_1^2 h(x) dx = -\int_1^2 (2 - 2x - \ln x) dx = \\ &= -\int_1^2 (2 - 2x) dx + \int_1^2 \ln x dx = -\left[2x - x^2\right]_1^2 + \int_1^2 (x)' \ln x dx = 1 + [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = \end{aligned}$$

$$= 1 + 2 \ln 2 - [x]_1^2 = 1 + 2 \ln 2 - 1 = 2 \ln 2 \text{ τ.μ. }.$$

2022. Οι $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = [1, +\infty)$ και $D_g = (0, +\infty)$ και είναι συνεχείς σε αυτά ως άρρητη και ως λογαριθμική αντίστοιχα. Είναι $f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \ln x, x \geq 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \ln x, x \geq 1$.

$$\text{Είναι } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{x} = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}, x > 1. \text{ Έχουμε :}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}} = 0 \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} x-2\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Έστω $h'(x) \geq 0$. Τότε :

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}} \geq 0 \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{x-1} \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Άρα είναι $h'(x) \geq 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα για $x > 1$, άρα και $1-1$.

Είναι $h(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι $1-1$.

Θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της h στο διάστημα $(1, 2)$, άρα αφού το $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της h , είναι :

$$x > 1 \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0.$$

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^2 |h(x)| dx = \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 (\sqrt{x-1} - \ln x) dx = \\ &= \int_1^2 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx - \int_1^2 \ln x dx = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 - \int_1^2 (x)' \ln x dx = \frac{2}{3} - [x \ln x]_1^2 + \int_1^2 dx = \\ &= \frac{2}{3} - 2 \ln 2 + [x]_1^2 = \frac{2}{3} - 2 \ln 2 + 1 = \left(\frac{5}{3} - 2 \ln 2 \right) \text{ τ.μ. } \end{aligned}$$

2023. Αφού οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι παράλληλες, τότε θα ισχύει $f'(1) = g'(1)$ και βέβαια αφού το σημείο είναι κοινό θα είναι και $f(1) = g(1)$. Είναι :

$$f''(x) = g''(x) - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow [f'(x)]' = \left[g'(x) + \frac{1}{x} \right]' \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x} + c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$\cancel{f'(1)} = \cancel{g'(1)} + 1 + c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = -1}}. \text{ Οπότε είναι :}$$

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow [f(x)]' = [g(x) + \ln x - x]' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x) + \ln x - x + c_2 \xrightarrow{x=1} \cancel{f(1)} = \cancel{g(1)} - 1 + c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 1.}}$$

$$\text{Συνεπώς: } f(x) = g(x) + \ln x - x + 1 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \ln x - x + 1.$$

Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Οπότε είναι :

$$\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0.$$

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e |f(x) - g(x)| dx = - \int_1^e (f(x) - g(x)) dx = - \int_1^e (\ln x - x + 1) dx = \\ &= - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e (x - 1) dx = - \int_1^e (x)' \ln x dx + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e = \\ &= - [x \ln x]_1^e + \int_1^e dx + \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} = -e + [x]_1^e + \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} = -e + e - 1 + \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} \right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και εφαπτομένες της

2024. Η $f(x) = 4\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{με παραγώγους: } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ και } f''(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, 4)$,

$$\text{είναι: } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2 \cdot (x - 1) + 4 \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

Η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $f(x) \leq y \Leftrightarrow f(x) - y \leq 0$, για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής. Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^4 |f(x) - y| dx = - \int_1^4 (f(x) - y) dx = - \int_1^4 (4\sqrt{x} - 2x - 2) dx = - \int_1^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - 2x - 2 \right) dx = \\ &= - \left[\frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 - 2x \right]_1^4 = - \left[\left(\frac{64}{3} - 24 \right) - \left(\frac{8}{3} - 3 \right) \right] = \frac{7}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2025. i. Έχουμε την παραβολή $x^2 = 4y$. Η εφαπτομένη της παραβολής έχει τη μορφή

$$xx_1 = 2(y + y_1), \text{ όπου } (x_1, y_1) \text{ το σημείο επαφής. Αφού διέρχεται από το σημείο}$$

$A(2, -3)$, τότε αυτό θα την επαληθεύει, οπότε είναι :

$$2x_1 = 2(-3 + y_1) \Leftrightarrow x_1 = -3 + y_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{y_1 = x_1 + 3.}}$$

Το σημείο επαφής όμως ανήκει και στην παραβολή οπότε :

$$x_1^2 = 4y_1 \Leftrightarrow x_1^2 = 4(x_1 + 3) \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(x_1 - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underline{x_1 = -2} \text{ ή } \underline{x_1 = 6}.$$

Για $x_1 = -2$ είναι $y_1 = 1$ και η εφαπτομένη είναι η :

$$-2x = 2(y+1) \Leftrightarrow -x = y+1 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = -x-1}.$$

Για $x_1 = 6$ είναι $y_1 = 9$ και η εφαπτομένη είναι η :

$$6x = 2(y+9) \Leftrightarrow 3x = y+9 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = 3x-9}.$$

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα

κάνοντας τη γραφική παράσταση :

Τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της C_f με την C_f είναι τα $A(-2,1)$ και $B(6,9)$. Βρίσκουμε και το σημείο τομής των εφαπτομένων :

$$-x-1 = 3x-9 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα έστω $\Gamma(2,-3)$.

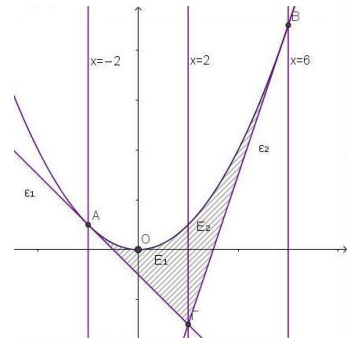
Έτσι έχουμε :

$$E = E_1 + E_2 = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - (-x-1) \right) dx +$$

$$+ \int_2^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - (3x-9) \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1 \right) dx + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 + \left[\frac{x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 9x \right]_2^6 = \left(\frac{4}{3} + 4 \right) + \left[18 - \left(\frac{2}{3} + 12 \right) \right] = \frac{32}{3} \text{ τ.μ. }$$



2026. Η $f(x) = e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σε σημείο της με τετμημένη x_0 , είναι : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε θα είναι :

$$0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow -x_0 f'(x_0) + f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -x_0 e^{x_0} + e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-x_0 + 1)e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} e^{x_0} \neq 0 \\ x_0 = 1. \end{matrix}$$

Συνεπώς η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = e(x-1) + e \Leftrightarrow y = ex.$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x=1$. Επομένως έχουμε :

$$E = \int_0^1 |f(x) - y| dx = \int_0^1 (f(x) - y) dx = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e-2}{2} \text{ τ.μ. }$$

2027. Η $f(x) = 2\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με

παράγωγο $f'(x) = \frac{2}{x}$, $x > 0$. Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της με τετμημένη x_0 ,

είναι : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε θα είναι :

$$0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow -x_0 f'(x_0) + f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\cancel{x_0} \frac{2}{\cancel{x_0}} + 2\ln x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e.$$

Συνεπώς η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = \frac{2}{e}(x - e) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{e}x.$$

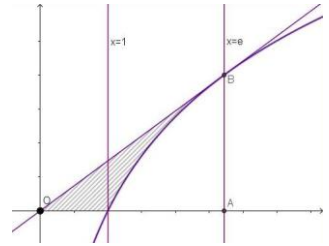
Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση :

Για τον υπολογισμό του εμβαδού πρέπει από το εμβαδόν του τριγώνου ABO, όπου $A(e, 0)$ και $B(e, 2)$, να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Είναι $(x \ln x - x)' = \ln x$.

$$\text{Έτσι έχουμε : } E = (ABO) - \int_1^e 2 \ln x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (AB) - \left[2(x \ln x - x) \right]_1^e = \frac{1}{2} \cdot e \cdot 2 - 2 = (e - 2) \text{ τ.μ.}$$



2028. Η $f(x) = e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x) = e^x$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, e)$, είναι :

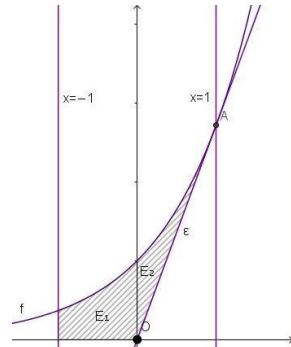
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = e(x - 1) + e \Leftrightarrow y = ex - e + e \Leftrightarrow y = ex.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση :

Έτσι έχουμε :

$$E = E_1 + E_2 = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 (f(x) - y) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{e} + e - \frac{e}{2} - 1 = \frac{e^2 - 2}{2e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$



2029. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό

με παράγωγο $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $x > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,0)$, είναι: $y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = x-1$.

$$\text{Είναι } \delta(x) = f(x) - y = \frac{\ln x}{x} - (x-1) = \frac{\ln x - x^2 + x}{x}.$$

Παρατηρούμε πως $\delta(1) = 0$, άρα **η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της $\delta(x) = 0$** , αφού η $y = x-1$ είναι εφαπτομένη της C_f .

$$\text{Είναι } \delta'(x) = \frac{\ln x}{x} - (x-1) = \frac{1-\ln x}{x^2} - 1 = \frac{1-\ln x - x^2}{x^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 1 - \ln x - x^2$, $x > 0$, οπότε $h'(x) = -\frac{1}{x} - 2x < 0$,

δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x > 0$, άρα και $1-1$.

Είναι $h(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι $1-1$.

- Αφού το $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της h , τότε :

– Για $\boxed{0 < x < 1}$ έχουμε: $x < 1 \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(1) \Leftrightarrow \boxed{h(x) > 0}$, άρα και $\delta'(x) > 0$, δηλαδή η δ είναι γνησίως αύξουσα.

– Για $\boxed{x > 1}$ έχουμε: $x > 1 \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(1) \Leftrightarrow \boxed{h(x) < 0}$, άρα και $\delta'(x) < 0$, δηλαδή η δ είναι γνησίως φθίνουσα.

- Αφού το $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της δ , είναι :

– Για $\boxed{0 < x < 1}$ έχουμε: $x < 1 \stackrel{\delta \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \delta(x) < \delta(1) \Leftrightarrow \boxed{\delta(x) < 0}$.

– Για $\boxed{x > 1}$ έχουμε: $x > 1 \stackrel{\delta \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \delta(x) < \delta(1) \Leftrightarrow \boxed{\delta(x) < 0}$.

Οπότε έχουμε $\delta(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως :

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{1}{e}}^e |\delta(x)| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^e (\delta(x)) dx = - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{\ln x}{x} - x + 1 \right) dx = - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx + \int_{\frac{1}{e}}^e (x-1) dx = \\ &= 0 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{\frac{1}{e}}^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 2e^3 + 2e - 1}{2e^2} \text{ τ.μ. , όπου} \end{aligned}$$

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^e (\ln x)' \ln x dx = [\ln x \cdot \ln x]_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx = 1 - (\ln e^{-1})^2 - I = 1 - 1 - I \Leftrightarrow$$

$$2I = 0 \Leftrightarrow I = 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx = 0.$$

2030. Η $f(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε

αυτό με παράγωγο $f'(x) = x - \ln x - 1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(e, f(e))$, είναι :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = (e - 2)(x - e) + \frac{e^2}{2} - e \Leftrightarrow y = (e - 2)x - \frac{e^2}{2} + e.$$

$$\text{Είναι } f(x) - y = \frac{x^2}{2} - x \ln x - (e - 2)x + \frac{e^2}{2} - e.$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } h(x) = f(x) - y = \frac{x^2}{2} - x \ln x - (e - 2)x + \frac{e^2}{2} - e.$$

Είναι $h(e) = 0$, άρα **η $x=e$ είναι μοναδική ρίζα της $h(x) = 0$** , αφού η

$y = (e - 2)x - \frac{e^2}{2} + e$ είναι εφαπτομένη της C_f . Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$E = \int_1^e |h(x)| dx. \text{ Είναι } h'(x) = x - \ln x - 1 - e + 2 = x - \ln x + 1 - e.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - \ln x + 1 - e, x > 0$.

Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ και $g''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, δηλαδή η g' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$, άρα και $1 - 1$.

- Είναι $g'(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $g'(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g' είναι $1 - 1$. Τότε :

– Για $\boxed{x > 1}$ έχουμε : $x > 1 \stackrel{g' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(1) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) > 0}$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα για $x > 1$.

- Είναι $g(e) = 0$, άρα το $x=e$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g για $x > 1$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1 - 1$. Τότε :

– Για $\boxed{1 < x < e}$ έχουμε : $x < e \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(e) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}$.

Οπότε για $x \in (1, e)$ θα είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα.

– Για $\boxed{1 < x < e}$ έχουμε : $x < e \stackrel{h \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(e) \Leftrightarrow \boxed{h(x) > 0}$.

Επομένως :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e |h(x)| dx = \int_1^e h(x) dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \ln x - (e - 2)x + \frac{e^2}{2} - e \right) dx = \\ &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - (e - 2)x + \frac{e^2}{2} - e \right) dx - \int_1^e x \ln x dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - (e - 2) \frac{x^2}{2} + \frac{e^2}{2} x - ex \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^3}{6} - \left(\frac{1}{6} + \frac{e^2 - 3e + 2}{2} \right) - \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e + \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^3 - 3e^2 + 9e - 7}{6} - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \\
&= \frac{e^3 - 6e^2 + 9e - 7}{6} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2e^3 - 9e^2 + 18e - 17}{12} \text{ τ.μ. }
\end{aligned}$$

- 2031.** Η $f(x) = x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους: $f'(x) = 2x$ και $f''(x) = 2 > 0$, για κάθε $x \geq 0$. Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, είναι:
- $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2.$$
- Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ άρα η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε: $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{x_0} |f(x) - y| dx = \int_0^{x_0} (f(x) - y) dx = \int_0^{x_0} (x^2 - 2x_0x + x_0^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x_0x^2 + x_0^2x \right]_0^{x_0} = \\
&= \frac{x_0^3}{3} - x_0^3 + x_0^3 = \frac{x_0^3}{3}.
\end{aligned}$$

Δίνεται ότι $E = \frac{2}{3}$ τ.μ., άρα θα είναι $\frac{x_0^3}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{2}$.

Έτσι $f(x_0) = x_0^2 = (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}$, οπότε $M(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

- 2032. i.** Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία άρα πρέπει $\Delta > 0$, όπου

$$\Delta = 49 - 4\alpha. \text{ Άρα: } \Delta > 0 \Leftrightarrow 49 - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{49}{4}.$$

Η C_f τέμνει τον $x'x$ όταν $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + \alpha = 0$. Βρίσκουμε τα σημεία M και N

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\alpha}}{2}, \text{ άρα } x_1 = \frac{7 + \sqrt{49 - 4\alpha}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{7 - \sqrt{49 - 4\alpha}}{2} \text{ οι τετμημένες}$$

των σημείων M και N αντίστοιχα.

Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία M και N τέμνονται κάθετα, άρα θα ισχύει:

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1 \stackrel{f'(x)=2x-7}{\Leftrightarrow} (2x_1 - 7)(2x_2 - 7) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\left(2 \cdot \frac{7 + \sqrt{49 - 4\alpha}}{2} - 7 \right) \cdot \left(2 \cdot \frac{7 - \sqrt{49 - 4\alpha}}{2} - 7 \right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{49 - 4\alpha} \cdot (-\sqrt{49 - 4\alpha}) = -1 \Leftrightarrow -(49 - 4\alpha) = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 12}, \text{ δεκτή.}$$

- ii. Έτσι είναι $f(x) = x^2 - 7x + 12$.

Η $f(x) = x^2 - 7x + 12$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους: $f'(x) = 2x - 7$ και $f''(x) = 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\Delta = 1$ οπότε $x_1 = 4$, άρα $M(4, 0)$ και $x_2 = 3$, άρα $N(3, 0)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(4,0)$, είναι :

$$y = f'(4)(x-4) + f(4) \Leftrightarrow y = x - 4.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $N(3,0)$, είναι :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = -x + 3.$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στα δύο σημεία επαφής. Πριν υπολογίσουμε το εμβαδόν πρέπει να βρούμε την τετμημένη του σημείου τομής των δύο εφαπτομένων :

$$x - 4 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}. \text{ Επομένως έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_3^{\frac{7}{2}} |f(x) - y| dx + \int_{\frac{7}{2}}^4 |f(x) - y| dx = \int_3^{\frac{7}{2}} (f(x) - y) dx + \int_{\frac{7}{2}}^4 (f(x) - y) dx = \\ &= \int_3^{\frac{7}{2}} [f(x) - (-x + 3)] dx + \int_{\frac{7}{2}}^4 [f(x) - (x - 4)] dx = \\ &= \int_3^{\frac{7}{2}} (x^2 - 7x + 12 + x - 3) dx + \int_{\frac{7}{2}}^4 (x^2 - 7x + 12 - x + 4) dx = \\ &= \int_3^{\frac{7}{2}} (x^2 - 6x + 9) dx + \int_{\frac{7}{2}}^4 (x^2 - 8x + 16) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_3^{\frac{7}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_{\frac{7}{2}}^4 = \\ &= \frac{1}{10} \tau. \mu. . \end{aligned}$$

2033. α. Είναι $\int_1^e f(x) dx \in \mathbb{R}$, έτσι έστω $\int_1^e f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε θα έχουμε :

$$xf(x) = 1 + \frac{x}{e} \int_1^e f(x) dx \Leftrightarrow xf(x) = 1 + \frac{x}{e} \cdot \lambda \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\lambda}{e}, x > 0. \text{ Είναι :}$$

$$\int_1^e f(x) dx = \lambda \Leftrightarrow \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\lambda}{e} \right) dx = \lambda \Leftrightarrow \left[\ln x + \frac{\lambda}{e} x \right]_1^e = \lambda \Leftrightarrow 1 + \cancel{\lambda} - \frac{\lambda}{e} = \cancel{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda}{e} = 1 \Leftrightarrow \lambda = e. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = \frac{1}{x} + 1, x > 0}.$$

β. Είναι $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + 1.$

ι. Η $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με

παράγωγο $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{\alpha}, \alpha + 1\right)$, είναι :

$$y = f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow y = -\alpha^2\left(x - \frac{1}{\alpha}\right) + \alpha + 1 \Leftrightarrow y = -\alpha^2 x + \alpha + \alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon : y = -\alpha^2 x + 2\alpha + 1}.$$

ii. Έχουμε $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, για κάθε $x > 0$, συνεπώς η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα

η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$, για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής. Επομένως έχουμε :

$$E(\alpha) = \int_1^2 |f(x) - y| dx = \int_1^2 (f(x) - y) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \alpha^2 x - 2\alpha - \alpha^2\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \alpha^2 x - 2\alpha\right) dx = \left[\ln x + \alpha^2 \frac{x^2}{2} - 2\alpha x\right]_1^2 = \ln 2 + 2\alpha^2 - 4\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha =$$

$$= \frac{3\alpha^2}{2} - 2\alpha + \ln 2. \text{ Η συνάρτηση } E(\alpha) = \frac{3\alpha^2}{2} - 2\alpha + \ln 2 \text{ έχει πεδίο ορισμού το}$$

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $E'(\alpha) = 3\alpha - 2$.

Έτσι έχουμε : $E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της E :

α	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$E'(\alpha)$		-	+
$E(\alpha)$		↘ T.E.	↗

Συνεπώς η $E(\alpha)$ παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο στο $\alpha = \frac{2}{3}$, δηλαδή το εμβαδόν

$E(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο για $\alpha = \frac{2}{3}$.

Το ελάχιστο αυτό εμβαδόν είναι:

$$E\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} - \frac{4}{3} + \ln 2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \ln 2 \Leftrightarrow E\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \frac{2}{3}$$

2034. Δ1. Είναι :

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x \Rightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x)(f^2(x) - 2f(x) + 3) + e^{f(x)}(2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}(f'(x)f^2(x) - \cancel{2f(x)f'(x)} + 3f'(x) + \cancel{2f(x)f'(x)} - 2f'(x)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}(f'(x)f^2(x) + f'(x)) = 1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x) + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}(f^2(x) + 1)} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ οπότε και}$$

1-1, συνεπώς η f αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφή της θέτουμε όπου $f(x) = y$ και έχουμε :

$e^y (y^2 - 2y + 3) = x$, άρα $f^{-1}(y) = e^y (y^2 - 2y + 3)$, $y \in \mathbb{R}$. Οπότε βρήκαμε :

$$\boxed{f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}}.$$

Δ2. Η $f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$(f^{-1})'(x) = e^x (x^2 - 2x + 3) + e^x (2x - 2) = e^x (x^2 + 1) \text{ και}$$

$(f^{-1})''(x) = e^x (x^2 + 1) + e^x 2x = e^x (x^2 + 2x + 1) = e^x (x + 1)^2 \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$. Συνεπώς η f^{-1} είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

Η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x=0$: $f^{-1}(0) = e^0 (0^2 - 2 \cdot 0 + 3) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 3$.

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $(0,3)$, είναι :

$$y = (f^{-1})'(0)x + f^{-1}(0) \Leftrightarrow y = x + 3.$$

Η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η $C_{f^{-1}}$ θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $f^{-1}(x) \geq y \Leftrightarrow f^{-1}(x) - y \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f^{-1}(x) - y| dx = \int_0^1 (f^{-1}(x) - y) dx = \int_0^1 (x^2 e^x - 2x e^x + 3e^x - x - 3) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 e^x dx - \int_0^1 2x e^x dx + \int_0^1 (3e^x - x - 3) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 (e^x)' dx - \int_0^1 2x (e^x)' dx + \left[3e^x - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^1 = \\ &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx - \left[2x e^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx + 3e - \frac{1}{2} - 3 - 3 = \\ &= e - \int_0^1 2x (e^x)' dx - 2e + \left[2e^x \right]_0^1 + 3e - \frac{13}{2} = -\left[2x e^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx + 2e - 2 + 2e - \frac{13}{2} = \\ &= -2e + \left[2e^x \right]_0^1 + 4e - \frac{17}{2} = 2e - 2 + 2e - \frac{17}{2} = \left(4e - \frac{21}{2} \right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Δ3. α. Έστω λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο A :

$$\lambda_1 = (f^{-1})'(x) = e^x (x^2 + 1).$$

Έστω λ_2 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο B :

$$\lambda_2 = f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{e^{f(f^{-1}(x))} \left((f(f^{-1}(x)))^2 + 1 \right)} = \frac{1}{e^x (x^2 + 1)}.$$

$$\text{Οπότε : } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = e^x (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{e^x (x^2 + 1)} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1}.$$

$$\beta. \text{ Είναι : } (AB) = \sqrt{(f^{-1}(x) - x)^2 + (x - f^{-1}(x))^2} = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2}.$$

Έχουμε αποδείξει ότι $f^{-1}(x) - y \geq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) - (x+3) \geq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) - x \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x=0$.

Οπότε : $(AB) = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2} \geq \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$. Άρα η απόσταση AB γίνεται

ελάχιστη για $x=0$ και η τιμή της τότε θα είναι $(AB) = 3\sqrt{2}$.

2035. α. Η $f(x) = e^x - \alpha x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = e^x - \alpha$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,0)$, είναι :

$$\varepsilon : y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = (1 - \alpha)x}.$$

$\beta.$ Έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = \alpha \Leftrightarrow \underline{x = \ln \alpha}$. Επιπλέον είναι :

- $e^x - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > \alpha \Leftrightarrow x > \ln \alpha$,
- $e^x - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^x < \alpha \Leftrightarrow x < \ln \alpha$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της f :

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$ T.E. $\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = \ln \alpha$, το

$$f(\ln \alpha) = e^{\ln \alpha} - \alpha \ln \alpha - 1 = \alpha - \alpha \ln \alpha - 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha) = \alpha - \alpha \ln \alpha - 1$, $\alpha > 1$.

Η συνάρτηση $g(\alpha) = \alpha - \alpha \ln \alpha - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(\alpha) = 1 - \ln \alpha - 1 = -\ln \alpha < 0$, αφού $\alpha > 1 \Leftrightarrow \ln \alpha > 0 \Leftrightarrow -\ln \alpha < 0$. Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Οπότε για κάθε $\alpha > 1$ είναι $g(\alpha) < g(1) \Leftrightarrow g(\alpha) < 0$, δηλαδή $\boxed{f(\ln \alpha) < 0}$.

γ. i. Η $f(x) = e^x - \alpha x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους $f'(x) = e^x - \alpha$ και $f''(x) = e^x > 0$, συνεπώς η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής. Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_0^a |f(x) - y| dx = \int_0^a (f(x) - y) dx = \int_0^a (e^x - \alpha x - 1 - (1 - \alpha)x) dx = \\ &= \int_0^a (e^x - \cancel{\alpha x} - 1 - x + \cancel{\alpha x}) dx = \int_0^a (e^x - 1 - x) dx = \left[e^x - x - \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \\ &= \left(e^a - a - \frac{a^2}{2} - 1 \right) \text{ τ.μ. } \Leftrightarrow \boxed{E(\alpha) = e^a - a - \frac{a^2}{2} - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Είναι : } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(e^\alpha - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^2 \left(\frac{e^\alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) = \\ &= (+\infty) \left(+\infty - 0 - \frac{1}{2} - 0 \right) = +\infty, \text{ όπου } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{\alpha^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{2\alpha} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

2036. Γ1. Είναι :

$$x'(t) = 16 \Leftrightarrow [x(t)]' = (16t)' \Leftrightarrow x(t) = 16t + c \stackrel{t=0}{\Rightarrow} x(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{x(t) = 16t, t \geq 0}.$$

Γ2. Ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό μέχρι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όπου A είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f , που άγεται από το σημείο Π , με την C_f . (στην εκφώνηση έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό A).

Η $f(x) = \sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με

παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι :

$$\varepsilon : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x - \frac{x_0}{2\sqrt{x_0}} + \sqrt{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x - \frac{\sqrt{x_0}}{2} + \sqrt{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } \Pi \in \varepsilon \Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x_0} = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = 4}}.$$

Για $x_0 = 4$ είναι $y_0 = \sqrt{4} = 2$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A(4, 2)$.

Υπολογίζουμε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή :

$$x(t) = 4 \Leftrightarrow 16t = 4 \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{1}{4} \text{ min ή } 15 \text{ sec}}.$$

Γ3. Η εφαπτομένη για $x_0 = 4$ είναι η $\varepsilon : y = \frac{1}{4}x + 1$. Έτσι έχουμε :

$$E = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x} \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^2 + x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = 2 + 4 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.}$$

Γ4. Είναι $M(x, \sqrt{x})$ ή $M(16t, 4\sqrt{t})$, έτσι η απόσταση του παρατηρητή από το κινητό

$$\text{είναι : } d = (\Pi M) = \sqrt{256t^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t) = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{512t + 16 - \frac{4}{\sqrt{t}}}{2\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}} = \frac{256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = 256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2$, $t > 0$.

Η $h(t) = 256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ με $h(0) = -2 < 0$ και

$h\left(\frac{1}{4}\right) = 34 > 0$, δηλαδή $h(0) \cdot h\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**

υπάρχει τουλάχιστον ένα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $h(t_0) = 0$.

Είναι $h'(t) = 256\sqrt{t} + 128t \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$, άρα και 1-1, οπότε η παραπάνω ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ είναι μοναδική.

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}} = 0 \Leftrightarrow 256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = t_0}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

- $t > t_0 \xrightarrow{\text{h γν. αυξ.}} h(t) > h(t_0) \Leftrightarrow h(t) > 0 \Leftrightarrow g'(t) > 0$,
- $t < t_0 \xrightarrow{\text{h γν. αυξ.}} h(t) < h(t_0) \Leftrightarrow h(t) < 0 \Leftrightarrow g'(t) < 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

t	0	t_0	$+\infty$
$g'(t)$		- Φ +	
$g(t)$		$\searrow$ T.E. $\nearrow$	

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, κατά την οποία η απόσταση d γίνεται ελάχιστη.

Εμβαδόν από γραφικές παραστάσεις τριών τουλάχιστον συναρτήσεων

2037. i. Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής της C_f με τις ευθείες ε_1 και ε_2 :

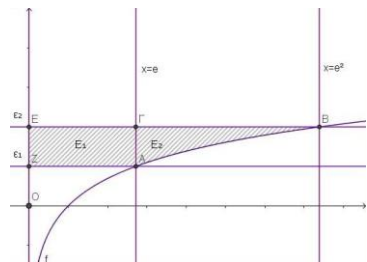
- $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, άρα έστω $A(e, 1)$ το σημείο τομής της C_f με την ε_1 .
- $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2$, άρα έστω $B(e^2, 2)$ το σημείο τομής της C_f με την ε_2 .

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση :

Έτσι έχουμε :

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= (ΑΓΕΖ) + \int_e^{e^2} (2 - f(x)) dx =$$



$$\begin{aligned}
&= e \cdot 1 + \int_e^{e^2} (2 - \ln x) dx = e + \int_e^{e^2} 2 dx - \int_e^{e^2} \ln x dx = \\
&= e + [2x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx = e + 2e^2 - 2e - [x \ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = \\
&= 2e^2 - e - 2e^2 + e + [x]_e^{e^2} = (e^2 - e) \text{ τ.μ. }
\end{aligned}$$

ii. Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής της C_f και της C_g με την ευθεία ε :

- $\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, άρα έστω $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ το σημείο τομής της C_f με την ε .

- $x = 2$, άρα έστω $B(2, 2)$ το σημείο τομής της C_g με την ε .

Έπειτα βρίσκουμε και τα σημεία τομής των C_f και C_g :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1, \text{ άρα έστω } \Gamma(1, 1) \text{ το σημείο τομής}$$

των C_f και C_g στο πρώτο τεταρτημόριο.

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση :

Έτσι έχουμε :

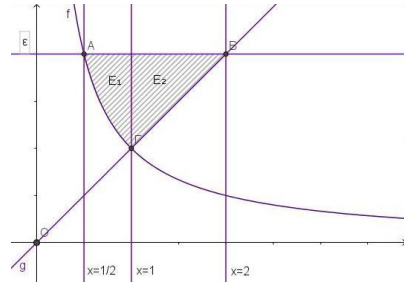
$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (2 - f(x)) dx + \int_1^2 (2 - g(x)) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^2 (2 - x) dx =$$

$$= [2x - \ln x]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= 2 - 1 + \ln \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} - \ln 2\right) \text{ τ.μ. }$$



iii. Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής της C_f και της C_g με την ευθεία ε :

- $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$, άρα έστω $A(\ln 2, 2)$ το σημείο τομής της C_f με την ε .

- $\frac{e}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$, άρα έστω $B\left(\frac{e}{2}, 2\right)$ το σημείο τομής της C_g με την ε .

Έπειτα βρίσκουμε και τα σημεία τομής των C_f και C_g :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x = \frac{e}{x} \Leftrightarrow e^x - \frac{e}{x} = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x - \frac{e}{x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε αυτό με παράγωγο :

$$h'(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1.

Παρατηρούμε πως $h(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι $1-1$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο $\Gamma(1, e)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση : Έτσι έχουμε :

$$E = E_1 + E_2 =$$

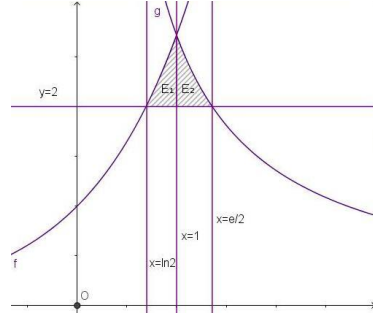
$$= \int_{\ln 2}^1 (f(x) - 2) dx + \int_1^{\frac{e}{2}} (g(x) - 2) dx =$$

$$= \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx + \int_1^{\frac{e}{2}} \left(\frac{e}{x} - 2 \right) dx =$$

$$= \left[e^x - 2x \right]_{\ln 2}^1 + \left[e \ln x - 2x \right]_1^{\frac{e}{2}} =$$

$$= e - 2 - e^{\ln 2} + 2 \ln 2 + e \ln \frac{e}{2} - e + 2 =$$

$$= -2 + 2 \ln 2 + e(1 - \ln 2) = -2(1 - \ln 2) + e(1 - \ln 2) = (1 - \ln 2)(e - 2) \text{ τ.μ. .}$$



iv. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των C_f , C_g και C_h ανά δύο :

• $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, άρα έστω $A(e, 1)$ το σημείο τομής της C_f με την C_h .

• $-\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$, άρα έστω $B(\frac{1}{e}, 1)$ το σημείο τομής της C_g με την C_h .

• $\ln x = -\ln x \Leftrightarrow 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, άρα έστω $\Gamma(1, 0)$ το σημείο τομής της C_f με την C_g .

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση :

$$\text{Είναι } (x \ln x - x)' = \ln x.$$

Έτσι έχουμε :

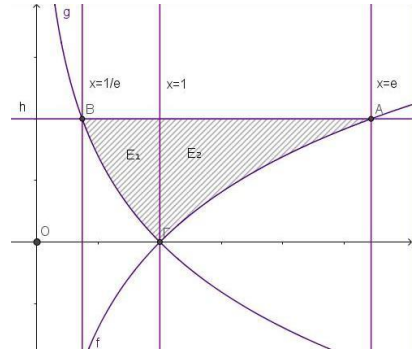
$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - g(x)) dx + \int_1^e (1 - f(x)) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx =$$

$$= \left[x + x \ln x - x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[x - x \ln x + x \right]_1^e =$$

$$= \left[x \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[2x - x \ln x \right]_1^e = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + 2e - e - 2 = \frac{1}{e} + e - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \text{ τ.μ. .}$$



2038. i. Η $f(x) = \eta \mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με

παράγωγο $f'(x) = \sin x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ είναι :
 $\varepsilon : y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = \sin 0 \cdot x + \eta\mu 0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = x}$.

ii. Επειδή η f είναι περιοδική θα τη μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής της C_f με τις ευθείες $y=x$ και $y=1$ αντίστοιχα :

- $\eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$, αφού ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα έστω $O(0,0)$ το σημείο τομής της C_f με την $y=x$.

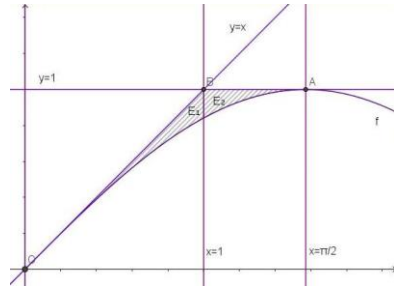
- $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, άρα έστω $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ το σημείο τομής της C_f με την $y=1$.

Τέλος το σημείο τομής των $y=x$ και $y=1$ είναι το $B(1,1)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα κάνοντας τη γραφική παράσταση :
 Έτσι έχουμε :

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (x - f(x)) dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} (1 - f(x)) dx = \\ &= \int_0^1 (x - \eta\mu x) dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu x) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \sin x \right]_0^1 + \left[x + \sin x \right]_1^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} + \cancel{\sin 1} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 - \cancel{\sin 1} = \frac{\pi - 3}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$



iii. Έστω $h(x) = \eta\mu x - x + \frac{3}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$h'(x) = \sin x - 1 + 3x$ και $h''(x) = -\eta\mu x + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

– Είναι $h'(0) = 0$ άρα το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της h' .

Άρα :

$x > 0 \xrightarrow{h' \text{ γν. αύξ.}} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα για $x > 0$, άρα και $1-1$.

– Είναι $h(0) = 0$ άρα το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της h .

Άρα : $x > 0 \xrightarrow{h \text{ γν. αύξ.}} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Αποδείξαμε πως :

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{3}{2}x^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2} \text{ για κάθε } x > 0.$$

2039. Βρίσκουμε το σημείο τομής της C_f με την $y = x^3$:

$x^3 = \alpha^3 \Leftrightarrow x = \alpha$, άρα έστω $A(\alpha, \alpha^3)$ το σημείο τομής της C_f με την $y = \alpha^3$.

Βρίσκουμε το σημείο τομής της C_f με την $y = 8$:

$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$, άρα έστω $B(2, 8)$ το σημείο τομής της C_f με την $y = 8$.

Κατανοούμε καλύτερα την άσκηση κάνοντας τη γραφική παράσταση :

Η ευθεία $y = \alpha^3$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία E_1, E_2 , άρα $E_1 = E_2$.

Είναι :

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_0^2 (8 - f(x)) dx - E_2 = E_2 \Leftrightarrow$$

$$2E_2 = \int_0^2 (8 - f(x)) dx \Leftrightarrow$$

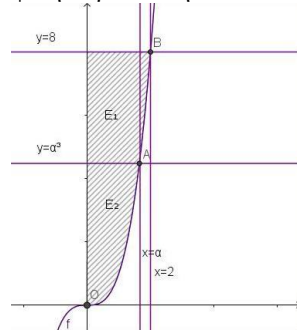
$$2 \int_0^{\alpha} (\alpha^3 - f(x)) dx = \int_0^2 (8 - f(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^{\alpha} (\alpha^3 - x^3) dx = \int_0^2 (8 - x^3) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \left[\alpha^3 x - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\alpha} = \left[8x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$2 \left(\alpha^4 - \frac{\alpha^4}{4} \right) = 12 \Leftrightarrow \alpha^4 - \frac{\alpha^4}{4} = 6 \Leftrightarrow 3\alpha^4 = 24 \Leftrightarrow \alpha^4 = 8 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \sqrt[4]{8}}, \text{ αφού}$$

$$\alpha \in (0, 2).$$



Εμβαδόν από γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης

2040. α. Η συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [2, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 2(x-2) \geq 0$, αφού $x \geq 2$ (η f' μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της). Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, άρα και 1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 τότε είναι και αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε την αντίστροφή της θέτουμε όπου $f(x) = y$ και έχουμε :

$$y = 2 + (x-2)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 = y-2 \Leftrightarrow x-2 = \pm \sqrt{y-2} \text{ και αφού είναι}$$

$$x \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \text{ τότε θα έχουμε } x-2 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y-2}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-2}. \text{ Οπότε βρήκαμε : } \boxed{f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}, x \geq 2}.$$

β. i. Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$:

$$2 + (x-2)^2 = x \Leftrightarrow 2 + x^2 - 4x + 4 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3$, άρα έστω $A(2,2)$ και $B(3,3)$ τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$.

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$:

$$2+\sqrt{x-2}=x \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=x-2 \Leftrightarrow x-2=(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x-2=x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3,$$

άρα τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$ είναι τα κοινά σημεία και της $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$.

ii. Αναζητούμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-f^{-1}(x)$. Από το προηγούμενο ερώτημα παρατηρούμε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στα $A(2,2)$ και $B(3,3)$, συνεπώς η διαφορά έχει μοναδικές ρίζες τις 2 και 3.

Στο διάστημα $(2,3)$ η διαφορά $f(x)-f^{-1}(x)$ είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\text{Έστω } \Delta(x)=f(x)-f^{-1}(x)=x-(x-2)^2-\sqrt{x-2}=(x-2)^2-\sqrt{x-2}.$$

$$\text{Είναι } \Delta\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}-2\right)^2-\sqrt{\frac{5}{2}-2}=\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-2\sqrt{2}}{4}<0.$$

Άρα $\Delta(x)\leq 0$ στο $[2,3]$.

$$\begin{aligned} E &= \int_2^3 |\Delta(x)| dx = -\int_2^3 \Delta(x) dx = -\int_2^3 [(x-2)^2 - \sqrt{x-2}] dx = \\ &= -\int_2^3 [(x-2)^2 - (x-2)^{\frac{1}{2}}] dx = -\left[\frac{(x-2)^3}{3} - \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = -\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2041. i. Η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,2\pi]$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x \geq 0$, αφού $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

(η f' μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της). Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2\pi]$, άρα και 1-1.

Αφού η f είναι 1-1 τότε **αντιστρέφεται**.

ii. Θα βρούμε τα σημεία που τέμνει η C_f την ευθεία $y=x$:

$$f(x)=x \Leftrightarrow x+\eta\mu x=x \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\pi \text{ ή } x=2\pi.$$

Άρα η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$ στα σημεία $O(0,0)$, $K(\pi,\pi)$ και $\Lambda(2\pi,2\pi)$.

Επίσης είναι $f(x)-x=x+\eta\mu x-x=\eta\mu x$.

- Για $x \in [0, \pi]$ είναι $f(x)-x=\eta\mu x \geq 0$, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$.
- Για $x \in [\pi, 2\pi]$ είναι $f(x)-x=\eta\mu x \leq 0$, δηλαδή η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$.

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Οπότε η $y=x$ διχοτομεί το ζητούμενο εμβαδόν. Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και την $y=x$, και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$ και την $y=x$. Είναι :

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = 2E_1 = 2 \int_0^{2\pi} |f(x) - x| dx = 2 \int_0^{\pi} (f(x) - x) dx - 2 \int_{\pi}^{2\pi} (f(x) - x) dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \eta \mu x dx - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \eta \mu x dx = 2[-\sigma \nu \chi]_0^{\pi} - 2[-\sigma \nu \chi]_{\pi}^{2\pi} = 2(1+1) - 2(-1-1) = 8\tau.μ. \end{aligned}$$

2042. i. Η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Αφού η f είναι 1-1 τότε **αντιστρέφεται**.

ii. Αν $f^{-1}(x) = 0$, τότε :

$$f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0) \Leftrightarrow x = f(0) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1 + \ln x) = 0 - 1 - \infty = -\infty. \text{ Όμως } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Οπότε είναι $f^{-1}(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$. Επιπλέον η f^{-1} είναι και συνεχής, έτσι θα είναι $f^{-1}(x) < 0$ ή $f^{-1}(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Αν $f^{-1}(x) < 0$ τότε θα είναι :

$$f^{-1}(x) < 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x)) < f(0) \Leftrightarrow x < f(0), \text{ που είναι αδύνατο για } x > 0, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Έτσι } E = \int_0^e f^{-1}(x) dx.$$

$$\text{Θέτουμε } f^{-1}(x) = t \text{ οπότε } x = f(t) \text{ και } dx = f'(t) dt = \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} t = 1 \text{ και}$$

$$\text{για } x=e \text{ είναι } f(t) = e \Leftrightarrow f(t) = f(e) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} t = e.$$

Έτσι έχουμε :

$$E = \int_0^e f^{-1}(x) dx = \int_1^e t \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^e (t+1) dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2} = \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \tau.μ.$$

2043. i. Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Αφού η f είναι 1-1 τότε **αντιστρέφεται**.

ii. Θα βρούμε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα $x'x$. Εφόσον το $O(0,0)$ ανήκει στην C_f και είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$, $y = x$, τότε είναι και σημείο της $C_{f^{-1}}$. Δηλαδή η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον $x'x$ στο $O(0,0)$. Δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο της $C_{f^{-1}}$ με τον $x'x$ αφού η f^{-1} είναι 1-1.

$$\text{Άρα } E = \int_0^e |f^{-1}(x)| dx.$$

Για κάθε $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ είναι :

$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, δηλαδή και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0, \text{ δηλαδή } E = \int_0^e f^{-1}(x) dx.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = t$ οπότε $x = f(t)$ και $dx = f'(t)dt = (e^t + 1)dt$.

Για $x=0$ είναι $f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} t = 0$ και

για $x=e$ είναι $f(t) = e \Leftrightarrow f(t) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} t = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^e f^{-1}(x) dx = \int_0^1 t(e^t + 1) dt = \int_0^1 (te^t + t) dt = \int_0^1 te^t dt + \int_0^1 t dt = \int_0^1 t(e^t)' dt + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt + \frac{1}{2} = e - [e^t]_0^1 + \frac{1}{2} = e - e + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2044. i. Η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f''(x) = 20x^3 + 6x = x(20x^2 + 6).$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(20x^2 + 6) = 0 \stackrel{20x^2 + 6 \neq 0}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x = 0}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	ϕ	+
$f(x)$		Σ.Κ.	

Συνεπώς η f **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** στο $(-\infty, 0]$ και **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** στο $[0, +\infty)$.

Είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1. Αφού η f είναι 1-1 τότε **αντιστρέφεται**.

ii. Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$. Οπότε θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ έχουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα : } e^x \geq 1 + x \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{f(e^x) \geq f(1+x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $O(0,0)$, είναι :

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = x, \text{ δηλαδή ο άξονας συμμετρίας των } C_f \text{ και } C_{f^{-1}}.$$

iv. Θα βρούμε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα $x'x$. Εφόσον το $O(0,0)$ ανήκει στην C_f και είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας $y = x$, τότε είναι σημείο και της

$C_{f^{-1}}$. Δηλαδή η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον $x'x$ στο $O(0,0)$. Δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο της $C_{f^{-1}}$ με τον $x'x$ αφού η f^{-1} είναι 1-1.

$$\text{Άρα } E = \int_0^3 |f^{-1}(x)| dx.$$

Για κάθε $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ είναι :

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2), \text{ δηλαδή και η } f^{-1} \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Έτσι έχουμε :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0, \text{ δηλαδή } E = \int_0^3 f^{-1}(x) dx.$$

$$\text{Θέτουμε } f^{-1}(x) = t \text{ οπότε } x = f(t) \text{ και } dx = f'(t)dt = (5t^4 + 3t^2 + 1)dt.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(t)=0 \Leftrightarrow f(t)=f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} t=0 \text{ και}$$

$$\text{για } x=3 \text{ είναι } f(t)=3 \Leftrightarrow f(t)=f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} t=1.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^3 f^{-1}(x) dx = \int_0^1 t(5t^4 + 3t^2 + 1) dt = \int_0^1 (5t^5 + 3t^3 + t) dt = \left[5 \frac{t^6}{6} + 3 \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2045. Αναζητούμε το πρόσημο της $f^{-1}(x) - x$:

$$f^{-1}(x) - x = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(x) \Leftrightarrow x = f(x).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(x) < 0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Είναι $g(1) = f(1) - 1 = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι 1-1.

Έτσι έχουμε :

$$x = f(x) \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(1) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 1, \text{ δηλαδή η } f^{-1}(x) - x = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα το } x=1.$$

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδόν λοιπόν θα είναι το } E = \int_0^1 |f^{-1}(x) - x| dx.$$

Για την μονοτονία της f^{-1} έχουμε :

Για κάθε $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ είναι :

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2), \text{ δηλαδή και η } f^{-1} \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Για $x < 1$ είναι :

$$x < 1 \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x \stackrel{f^{-1} \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x) \Leftrightarrow x < f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) - x > 0.$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 (f^{-1}(x) - x) dx.$$

Θέτουμε $x = f(t)$ οπότε $dx = f'(t) dt$.

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = f(2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} t = 2 \text{ και}$$

$$\text{για } x=1 \text{ είναι } f(t) = 1 \Leftrightarrow f(t) = f(1) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} t = 1.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (f^{-1}(x) - x) dx = \int_0^1 f^{-1}(x) dx - \int_0^1 x dx = \int_2^1 f^{-1}(f(t)) f'(t) dt - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \int_2^1 t f'(t) dt - \frac{1}{2} = \left[t f(t) \right]_2^1 - \int_2^1 f(t) dt - \frac{1}{2} = f(1) - 2f(2) + \int_1^2 f(t) dt - \frac{1}{2} = \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2046. α. Είναι :

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 2 \Leftrightarrow (3f^2(x) + 1)f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{3f^2(x) + 1} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και } 1-1.$$

β. Για $x=0$ στη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \stackrel{f^2(0)+1 \neq 0}{\Leftrightarrow} f(0) = 0, \text{ δηλαδή το } x=0 \text{ είναι ρίζα της } f(x) = 0, \text{ η οποία είναι μοναδική αφού η } f \text{ είναι } 1-1.$$

Έχουμε :

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{f^2(x) + 1}, \text{ άρα η } f \text{ είναι}$$

$$\text{θετική για } x > 0. \text{ Έτσι έχουμε } E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Για $x=1$ στη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$\begin{aligned} f^3(1) + f(1) &= 2 \Leftrightarrow f^3(1) - 1 + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(1) - 1)(f^2(1) + f(1) + 1) + f(1) - 1 &= 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)(f^2(1) + f(1) + 2) = 0. \end{aligned}$$

Για το τριώνυμο $f^2(1) + f(1) + 2 = 0$ η διακρίνουσα είναι αρνητική οπότε είναι πάντα θετικό. Άρα $f(1) = 1$. Είναι :

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f^3(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2x \cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^3(x) \cdot f'(x) dx + \int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^1 2x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{f^4(x)}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_0^1 = \left[2xf(x) \right]_0^1 - \int_0^1 2f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{f^4(1)}{4} - \cancel{\frac{f^4(0)}{4}} + \frac{f^2(1)}{2} - \cancel{\frac{f^2(0)}{2}} = 2f(1) - 2 \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2 - 2E \Leftrightarrow 2E = \frac{5}{4} \Leftrightarrow E = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{8} \text{ τ.μ.}$$

γ. Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε όπου $f(x) = y$ και έχουμε :

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow y^3 + y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^3 + y}{2}, \text{ δηλαδή } f^{-1}(y) = \frac{y^3 + y}{2}.$$

$$\text{Οπότε } f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$:

$$\frac{x^3 + x}{2} = x \Leftrightarrow x^3 + x = 2x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή}$$

$$(x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1), \text{ άρα τα } O(0,0), A(1,1) \text{ και } B(-1,-1) \text{ είναι τα}$$

κοινά σημεία της και της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$, αλλά και της C_f με την $y = x$ λόγω συμμετρίας.

$$\text{Είναι } f^{-1}(x) - x = \frac{x^3 + x}{2} - x = \frac{x^3 - x}{2} = \frac{x(x^2 - 1)}{2}, \text{ με ρίζες της εξίσωσης}$$

$$f^{-1}(x) - x = 0 \text{ τα } x = 0, x = -1 \text{ και } x = 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα προσήμων της}$$

$$f^{-1}(x) - x :$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x	-	-	0	+	+		
x^2-1	+	0	-	-	0	+	
$f^{-1}(x)-x$	-	0	+	0	-	0	+

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Οπότε η $y=x$ διχοτομεί το ζητούμενο εμβαδόν.

Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και την $y=x$, και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$ και την $y=x$. Είναι :

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = 2E_2 = 2 \int_{-1}^1 |f^{-1}(x) - x| dx = 2 \int_{-1}^0 (f^{-1}(x) - x) dx - 2 \int_0^1 (f^{-1}(x) - x) dx = \\ &= 2 \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} \right) dx - 2 \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = 2 \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \right]_{-1}^0 - 2 \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση ανισοτήτων

2047. Α. α. Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι :

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx}.$$

β. Είναι :

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx \Leftrightarrow m[x]_{\alpha}^{\beta} \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M[x]_{\alpha}^{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)}.$$

Β. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin 0 \geq \sin x \geq \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \geq \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$e^0 \leq e^{\sin x} \leq e^1 \Leftrightarrow 1 \leq e^{\sin x} \leq e \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{[x]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx \leq [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx \leq \frac{\pi e}{2}}.$$

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο : $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2xe^{1-x^2} = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } (e^{x^2} - e^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}} \text{ ή } \underline{\underline{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}}).$$

Επιπλέον είναι :

- $e^{x^2} - e^{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 > 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
 $x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και}$
- $e^{x^2} - e^{1-x^2} < 0 \Leftrightarrow e^{x^2} < e^{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 < 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 + \infty$
2x	-	-	0	+	+
$e^{x^2} - e^{1-x^2}$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

– Για $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα, έτσι έχουμε :

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 2\sqrt{e} \leq f(x) \leq 1+e.$$

– Για $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, η f είναι γνησίως αύξουσα, έτσι έχουμε :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{e} \leq f(x) \leq 1+e.$$

Έτσι για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $2\sqrt{e} \leq f(x) \leq 1+e$, οπότε παίρνουμε :

$$\int_0^1 2\sqrt{e} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (1+e) dx \Leftrightarrow 2\sqrt{e}[x]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq (1+e)[x]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{e} \leq \int_0^1 (e^{x^2} + e^{1-x^2}) dx \leq (1+e).$$

Δ. Για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα, επομένως :

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\pi}{4} \leq \eta\mu x \leq \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \eta\mu x \leq 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{2x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} [\ln x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq [\ln x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\ln \frac{\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{4} \right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \left(\ln \frac{\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \ln 2.$$

2048. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\eta\mu x}}{3 + \eta\mu x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη,

άρα και συνεχής, με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (3 + \eta\mu x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}}{(3 + \eta\mu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} (2 + \eta\mu x)}{(3 + \eta\mu x)^2}.$$

Είναι $2 + \eta\mu x > 0$, $e^{\eta\mu x} > 0$, $(3 + \eta\mu x)^2 > 0$ και για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$,

οπότε $f'(x) \geq 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (η f' μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).

Είναι $f(0) = \frac{e^{\eta\mu 0}}{3 + \eta\mu 0} = \frac{1}{3}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\eta\mu \frac{\pi}{2}}}{3 + \eta\mu \frac{\pi}{2}} = \frac{e}{4}$. Έτσι έχουμε :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{e}{4} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e}{4} dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{e}{4} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\eta\mu x}}{3 + \eta\mu x} dx \leq \frac{\pi e}{8}}.$$

2049. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, η οποία είναι

παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{x = e}.$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$ και
- $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x - 1$		-	- ϕ +	
$f'(x)$		-	- ϕ +	
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$ O.E. $\nearrow$	

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = e$ το $f(e) = e$, οπότε για κάθε

$x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ είναι :

$$f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} \geq e \Rightarrow$$

$$\int_2^5 \frac{x}{\ln x} dx \leq \int_2^5 e dx \Leftrightarrow \int_2^5 \frac{x}{\ln x} dx \leq e [x]_2^5 \Leftrightarrow \boxed{\int_2^5 \frac{x}{\ln x} dx \leq 3e}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, η οποία είναι

παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο : $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln^2 x} = \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln^2 x}$.

Για $x \in [e, 3e]$ είναι $x > e \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln^2 x > 1 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 > 0$ και $x > 0$,

άρα $f'(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln^2 x} > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, 3e]$.

Έτσι έχουμε :

$$x \geq e \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow \int_e^{3e} f(x) dx \geq \int_e^{3e} 2 dx \Leftrightarrow$$

$$\int_e^{3e} f(x) dx \geq 2[x]_e^{3e} \Leftrightarrow \boxed{\int_e^{3e} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right) dx \geq 4e}.$$

2050. i. Είναι :

$$1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 2^1 \leq 2^x \leq 2^3 \Leftrightarrow 2 \leq 2^x \leq 8 \Rightarrow \int_1^3 2 dx \leq \int_1^3 2^x dx \leq \int_1^3 8 dx \Leftrightarrow$$

$$2[x]_1^3 \leq \int_1^3 2^x dx \leq 8[x]_1^3 \Leftrightarrow \boxed{4 \leq \int_1^3 2^x dx \leq 16}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, η οποία είναι

παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (x+2) - e^{-x}}{(x+2)^2} = \frac{-e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}.$$

Για $x \in [0, 1]$ είναι $x+3 > 0$, άρα $f'(x) = -\frac{(x+3)e^{-x}}{(x+2)^2} < 0$, δηλαδή η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$. Έτσι έχουμε :

$$0 \leq x \leq 1 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(0) \geq f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq f(x) \geq \frac{1}{3e} \Leftrightarrow \frac{1}{3e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3e} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{3e}[x]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{2}[x]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{3e} \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+2} dx \leq \frac{1}{2}}.$$

$$\text{iii. Είναι : } \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^0 e^{1-x^2} dx = \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{1-x^2} dx = \int_0^1 (e^{x^2} - e^{1-x^2}) dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - e^{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα

και συνεχής, με παράγωγο : $f'(x) = 2xe^{x^2} + 2xe^{1-x^2} = 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2})$.

Για $x \in [0,1]$ είναι $x \geq 0$, άρα $f'(x) = 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2}) \geq 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. (η f' μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της). Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq 1 &\stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 1-e \leq f(x) \leq e-1 \Rightarrow \\
 \int_0^1 (1-e) dx &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (e-1) dx \Leftrightarrow (1-e)[x]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq (e-1)[x]_0^1 \Leftrightarrow \\
 1-e &\leq \int_0^1 (e^{x^2} - e^{1-x^2}) dx \leq e-1 \Leftrightarrow 1-e \leq \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{1-x^2} dx \leq e-1 \Leftrightarrow \\
 &\boxed{1-e \leq \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^0 e^{1-x^2} dx \leq e-1}.
 \end{aligned}$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, (αφού το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta < 0$ και θα είναι πάντα θετικό) η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+4x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x^3+2x^2+2x+4x^2+4x+4 - (2x^3+8x^2+2x+x^2+4x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \\
 &= \frac{\cancel{2x^3}+6x^2+\cancel{6x}+4-\cancel{2x^3}-9x^2-\cancel{6x}-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-3(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}.
 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-3x^2+3$	-	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$f'(x)$	-	$\ominus$	$\oplus$	-
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Παρατηρούμε ότι στην περιοχή $[-1,1]$ η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = -2$ και μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = 2$, οπότε για κάθε $x \in [-1,1]$ είναι

$$\begin{aligned}
 -1 \leq x \leq 1 &\stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(-1) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow \\
 \int_{-1}^1 (-2) dx &\leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq \int_{-1}^1 2 dx \Leftrightarrow -2[x]_{-1}^1 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 2[x]_{-1}^1 \Leftrightarrow \\
 &\boxed{-4 \leq \int_{-1}^1 \frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} dx \leq 4}.
 \end{aligned}$$

2051. i. Είναι :

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \text{ και}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e \Leftrightarrow 2 \leq e^x + 1 \leq e + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{e + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{e + 1} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Όλα τα μέλη των δύο ανισώσεων είναι θετικές ποσότητες, οπότε πολλαπλασιάζοντάς τες κατά μέλη έχουμε :

$$\frac{1}{e + 1} \leq \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{e + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e + 1} [x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx \leq [x]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{e + 1} \leq \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx \leq 1}.$$

ii. Είναι :

$$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 0^2 \leq \ln^2 x \leq 1^2 \Leftrightarrow 0 \leq \ln^2 x \leq 1,$$

$$\text{οπότε } \begin{cases} 0 \leq \ln^2 x \leq 1 & (+) \\ 1 \leq x \leq e \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x + \ln^2 x \leq e + 1.$$

Είναι :

$$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 1^2 \leq x^2 \leq e^2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq e^2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1.$$

Όλα τα μέλη των δύο ανισώσεων $\frac{1}{e^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$ και $1 \leq x + \ln^2 x \leq e + 1$ είναι θετικές ποσότητες, οπότε πολλαπλασιάζοντάς τες κατά μέλη έχουμε :

$$\frac{1}{e^2} \leq \frac{x + \ln^2 x}{x^2} \leq e + 1 \Rightarrow \int_1^e \frac{1}{e^2} dx \leq \int_1^e \frac{x + \ln^2 x}{x^2} dx \leq \int_1^e (e + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^2} [x]_1^e \leq \int_1^e \frac{x + \ln^2 x}{x^2} dx \leq (e + 1) [x]_1^e \Leftrightarrow \boxed{\frac{e - 1}{e^2} \leq \int_1^e \frac{x + \ln^2 x}{x^2} dx \leq e^2 - 1}.$$

2052. i. Είναι : $x^x \geq e^{x-1} \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln e^{x-1} \Leftrightarrow x \ln x \geq x - 1 \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$, $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη,

άρα και συνεχής, με παράγωγο $f'(x) = \ln x + \cancel{x} - \cancel{x} = \ln x.$

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$. Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 0$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι :

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \ln x \geq x - 1 \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln e^{x-1} \Leftrightarrow \boxed{x^x \geq e^{x-1}}.$$

ii. Βάζοντας $x^2 + 1$ όπου x στην ανίσωση $x^x \geq e^{x-1}$, παίρνουμε :

$$(x^2+1)^{x^2+1} \geq e^{x^2} \Rightarrow \boxed{\int_1^{10} (x^2+1)^{x^2+1} dx \geq \int_1^{10} e^{x^2} dx}.$$

2053. i. Είναι : $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} e \ln x \leq x \Leftrightarrow e \ln x - x \leq 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e \ln x - x, x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα

και συνεχής, με παράγωγο $f'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e-x}{x} = 0 \Leftrightarrow e-x=0 \Leftrightarrow \underline{x=e}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	e	$+\infty$
x		+	+
e-x		+	⊖
f'(x)		+	⊖
f(x)		↗ O.M. ↘	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$ το $f(e) = 0$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι :

$$f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow e \ln x - x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$e \ln x \leq x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}}.$$

ii. Έχουμε :

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow x^e \leq e^x \Rightarrow \boxed{\int_1^{17} x^e dx \leq \int_1^{17} e^x dx}.$$

2054. Αν $\int_1^2 f(x) dx = \alpha$, τότε :

$$\int_1^2 \left(\int_1^2 f(x) f(t) dx \right) dt = 12 + \int_1^2 f(u) du \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(t) \int_1^2 f(x) dx \right) dt = 12 + \int_1^2 f(u) du \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 (f(t) \cdot \alpha) dt = 12 + \alpha \Leftrightarrow \alpha \int_1^2 f(t) dt = 12 + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-4)(\alpha+3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -3.$$

Όμως ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$ οπότε θα είναι $\int_1^2 f(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 0$.

Άρα $\boxed{\alpha = -3}$.

2055. Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι :

$$f(x) \geq xf'(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 xf'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2 \int_0^1 f(x) dx \geq f(1)}.$$

2056. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(\alpha + \beta - x) - 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, η οποία είναι

παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - f'(\alpha + \beta - x)$.

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$,

άρα και 1-1. Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(\alpha + \beta - x) \stackrel{f' \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$x = \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\bullet \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(\alpha + \beta - x) \stackrel{f' \text{ γν.αύξ}}{\Leftrightarrow}$$

$$x > \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x > \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ και}$$

$$\bullet \quad g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\alpha + \beta - x) \stackrel{f' \text{ γν.αύξ}}{\Leftrightarrow}$$

$$x < \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x < \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Άρα για $x < \frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι $g'(x) < 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$

και για $x > \frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι $g'(x) > 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$.

Συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ το $g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$, οπότε για

κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι :

$$g(x) \geq g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + f(\alpha + \beta - x) - 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x)}.$$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, άρα και συνεχής, οπότε έχουμε :

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \Rightarrow \int_a^\beta 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) dx \leq \int_a^\beta (f(x) + f(\alpha + \beta - x)) dx \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)[x]_a^\beta \leq \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx \Leftrightarrow$$

$$2(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx.$$

Για το $\int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx$, θέτουμε $\alpha + \beta - x = t$ οπότε $-dx = dt \Leftrightarrow dx = -dt$. Για

$$x = \alpha \text{ είναι } t = \beta \text{ και για } x = \beta \text{ είναι } t = \alpha, \text{ άρα } \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx = -\int_\beta^\alpha f(t) dt.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } 2(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$2(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow 2(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq (\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

iii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[a, x]$ και $[x, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\rho_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (x, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\rho_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\rho_1 < \rho_2 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\rho_1) < f'(\rho_2) \Leftrightarrow \boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}} \text{ για κάθε}$$

$$x \in (a, \beta).$$

$$\text{iv. Είναι : } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \begin{matrix} x > a \Leftrightarrow x - a > 0 \\ \Leftrightarrow \\ x < \beta \Leftrightarrow \beta - x > 0 \end{matrix}$$

$$(\beta - x)(f(x) - f(a)) < (x - a)(f(\beta) - f(x)) \Leftrightarrow$$

$$\beta f(x) - \cancel{xf(x)} - \beta f(a) + xf(a) < xf(\beta) - \alpha f(\beta) - \cancel{xf(x)} + \alpha f(x) \Leftrightarrow$$

$$\beta f(x) - \alpha f(x) < (x - a)f(\beta) + (\beta - x)f(a) \Leftrightarrow$$

$$(\beta - \alpha)f(x) < (x - a)f(\beta) + (\beta - x)f(a) \stackrel{\beta > a \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow} f(x) < \frac{x - a}{\beta - \alpha}f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}f(a).$$

Στη ζητούμενη σχέση, για $x = a$ είναι $f(a) \leq f(a)$, το οποίο ισχύει και για $x = \beta$ είναι

$$f(\beta) \leq f(\beta), \text{ το οποίο ισχύει, άρα: } \boxed{f(x) \leq \frac{x - a}{\beta - \alpha}f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}f(a)} \text{ για κάθε}$$

$$x \in [a, \beta].$$

v. Έχουμε :

$$f(x) \leq \frac{x - a}{\beta - \alpha}f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}f(a) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{x - a}{\beta - \alpha}f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}f(a) \right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{xf(\beta) - \alpha f(\beta) + \beta f(a) - xf(a)}{\beta - \alpha} dx \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha} + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} x \right) dx \Leftrightarrow \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \left[\frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha} x + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \Leftrightarrow \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha} \beta + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\beta - \alpha)} \beta^2 - \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha} \alpha - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\beta - \alpha)} \alpha^2 \Leftrightarrow \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\cancel{\beta - \alpha}} (\cancel{\beta - \alpha}) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\beta - \alpha)} (\beta^2 - \alpha^2) \Leftrightarrow \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\cancel{\beta - \alpha})} (\cancel{\beta - \alpha}) (\beta + \alpha) \Leftrightarrow \\
2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq 2\beta f(\alpha) - 2\alpha f(\beta) + \beta f(\beta) - \beta f(\alpha) + \alpha f(\beta) - \alpha f(\alpha) \Leftrightarrow \\
2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) + \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) \Leftrightarrow \\
2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\leq \beta(f(\alpha) + f(\beta)) - \alpha(f(\alpha) + f(\beta)) \Leftrightarrow \boxed{2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq (\beta - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta))}
\end{aligned}$$

2057. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - f'(\beta)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[\alpha, \beta]$. Οπότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι :

$x < \beta \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\beta) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
x \geq \alpha &\stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) \leq g(\alpha) \Leftrightarrow f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha) \leq f(\alpha) - f(\alpha) - f'(\beta) \cdot 0 \Leftrightarrow \\
&\boxed{f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)}.
\end{aligned}$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
f(x) - f(\alpha) &\leq f'(\beta)(x - \alpha) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - f(\alpha)) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f'(\beta)(x - \alpha) dx \Leftrightarrow \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha) dx &\leq f'(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - f(\alpha)[x]_{\alpha}^{\beta} \leq f'(\beta) \left[\frac{x^2}{2} - \alpha x \right]_{\alpha}^{\beta} \Leftrightarrow \\
& \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - f(\alpha)(\beta - \alpha) \leq f'(\beta) \left(\frac{\beta^2}{2} - \alpha\beta - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2 \right) \Leftrightarrow \\
& \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - f(\alpha)(\beta - \alpha) \leq f'(\beta) \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{2} \Leftrightarrow \\
& \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - f(\alpha)(\beta - \alpha) \leq f'(\beta) \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \Leftrightarrow \\
& \boxed{2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)}
\end{aligned}$$

2058. Είναι :

$$1 \leq x \leq 2 \quad \overset{\text{f γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1, \text{ άρα } 0 \leq f^2(x) \leq 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε :

$$0 \leq f^2(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_1^2 f^2(x) dx \leq \int_1^2 1 dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_1^2 f^2(x) dx \leq [x]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{0 \leq \int_1^2 f^2(x) dx \leq 1}.$$

2059. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο :

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}) \text{ ή}$$

$$(e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}).$$

Επιπλέον είναι :

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας - ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	Φ	$+$
$f'(x)$	$-$	Φ	$+$
$f(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2} dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + 1) dx}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(x+1) - e^x + 1$ με πεδίο ορισμού το $A = (-1, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παραγώγους :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - e^x \text{ και}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - e^x < 0 \text{ για κάθε } x > -1, \text{ συνεπώς η } g' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}$$

στο A και άρα $1-1$.

Παρατηρούμε πως $g'(0) = 0$, δηλαδή το $x=0$, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού, θα είναι ρίζα της $g'(x) = 0$, η οποία είναι **μοναδική** αφού η g' είναι $1-1$.

Έτσι έχουμε :

- $x < 0 \stackrel{g' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0]$.
- $x > 0 \stackrel{g' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g'(x) < g'(0) \Leftrightarrow g'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Κάνοντας τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων για την g έχουμε :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	ϕ
$g(x)$		$\nearrow$ O.M. $\searrow$	

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο

$x_0 = 0$ το $g(0) = 0$, οπότε για κάθε

$x \in (-1, +\infty)$ είναι :

$$g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \ln(x+1) - e^x + 1 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (\ln(x+1) - e^x + 1) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \ln(x+1) dx - \int_0^1 (e^x - 1) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 (e^x - 1) dx}.$$

iii. Ισχύει $|\eta_{\mu x}| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει για $x=0$. Έτσι για κάθε $x \in [0, a]$ έχουμε :

$$|\eta_{\mu x}| \leq x \stackrel{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} \frac{|\eta_{\mu x}|}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \stackrel{a>0}{\Rightarrow} \boxed{\int_0^a \frac{|\eta_{\mu x}|}{x^2+1} dx \leq \int_0^a \frac{x}{x^2+1} dx}.$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{x^x}{e^{x-1}} = \frac{e^{\ln x^x}}{e^{x-1}} = e^{x \ln x - x + 1}$ με πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο :

$$\varphi'(x) = e^{x \ln x - x + 1} \cdot (\ln x + \overset{1}{x} - \overset{1}{1}) = \ln x \cdot e^{x \ln x - x + 1}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x \cdot e^{x \ln x - x + 1} = 0 \stackrel{e^{x \ln x - x + 1} \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της φ :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$\varphi(x)$	$\swarrow$	O.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $\varphi(1) = 1$ και θα είναι για κάθε $x > 0$:

$$\varphi(x) \geq \varphi(1) \Leftrightarrow \frac{x^x}{e^{x-1}} \geq 1 \stackrel{e^{x-1} > 0}{\Leftrightarrow} x^x \geq e^{x-1} \stackrel{\alpha+v>\alpha}{\Rightarrow} \boxed{\int_{\alpha}^{\alpha+v} x^x dx \geq \int_{\alpha}^{\alpha+v} e^{x-1} dx}.$$

2060. i. Η $f(x) = xe^{-vx}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = e^{-vx} - vxe^{-vx} = e^{-vx}(1 - vx) \text{ και}$$

$$f''(x) = -ve^{-vx}(1 - vx) - ve^{-vx} = -ve^{-vx}(2 - vx) = ve^{-vx}(vx - 2). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-vx}(1 - vx) = 0 \stackrel{e^{-vx} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - vx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{v}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{v}$	$+\infty$
$1 - vx$ ($v > 0$)	+	$\bigcirc$	-
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{v}\right]$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $\left[\frac{1}{v}, +\infty\right)$.

και

$$\circ \text{ Η } f \text{ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο } x = \frac{1}{v} \text{ το } f\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{ve}.$$

Επιπλέον είναι :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow ve^{-vx}(vx - 2) = 0 \stackrel{ve^{-vx} \neq 0}{\Leftrightarrow} vx - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{v}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής της f :

x	$-\infty$	$\frac{2}{v}$	$+\infty$
$vx - 2$	-	$\bigcirc$	+
$f''(x)$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2}{v}\right]$.

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $\left[\frac{2}{v}, +\infty\right)$.

και

$$\circ \text{ Σημείο καμπής είναι το σημείο } A\left(\frac{2}{v}, \frac{2}{ve^2}\right).$$

$$\text{ii. Είναι : } \frac{1}{v} \leq x \leq \frac{2}{v} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{v}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{2}{v}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{ve} \geq f(x) \geq \frac{2}{ve^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{ve^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{ve} \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{2}{ve^2} dx \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{1}{ve} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{ve^2} [x]_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \leq \frac{1}{ve} [x]_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \Leftrightarrow \frac{2}{v^2 e^2} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq \frac{1}{v^2 e} \Leftrightarrow \boxed{2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq e}.$$

2061. i. Η $f(x) = x^{-v} \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -vx^{-v-1} \ln x + x^{-v-1} = x^{-v-1} (1 - v \ln x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{-v-1} (1 - v \ln x) = 0 \stackrel{x^{-v-1} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - v \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{v} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{\frac{1}{v}}}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $1 - v \ln x > 0 \Leftrightarrow v \ln x < 1 \stackrel{v>0}{\Leftrightarrow} \ln x < \frac{1}{v} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{v}} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{v}}$ και
- $1 - v \ln x < 0 \Leftrightarrow v \ln x > 1 \stackrel{v>0}{\Leftrightarrow} \ln x > \frac{1}{v} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{v}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{v}}$, οπότε

κάνουμε τον πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	0	$e^{\frac{1}{v}}$	$+\infty$
$1 - v \ln x$		+	−
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗ O.M. ↘	

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο

διάστημα $\left(0, e^{\frac{1}{v}}\right)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο

διάστημα $\left[e^{\frac{1}{v}}, +\infty\right)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = e^{\frac{1}{v}}$ το $f\left(e^{\frac{1}{v}}\right) = \frac{1}{ve}$.

ii. Αφού το $f\left(e^{\frac{1}{v}}\right) = \frac{1}{ve}$ είναι το ολικό μέγιστο της f τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$f(x) \leq f\left(e^{\frac{1}{v}}\right) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{ve} \Rightarrow \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e \frac{1}{ve} dx \Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx \leq \frac{1}{ve} [x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e f(x) dx \leq \frac{e-1}{ve} \stackrel{v>0}{\Leftrightarrow} \boxed{ve \int_1^e f(x) dx \leq e-1}.$$

2062. i. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{\frac{1}{2}}}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$ και
- $1 - 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1 - 2 \ln x$		+	−
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗ O.M. ↘	

Συνεπώς η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο**

$$\text{στο } x = \sqrt{e} \text{ το } f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}.$$

ii. Αφού το $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ είναι το ολικό μέγιστο της f τότε για κάθε $x > 0$ είναι :

$$f(x) \leq f(\sqrt{e}) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{2e} \stackrel{k+1 > k}{\Rightarrow} \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{2e} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{1}{2e} [x]_k^{k+1} \Leftrightarrow \boxed{\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{1}{2e}}.$$

2063. i. Είναι :

$$2f'(x) = -3xf^2(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -3x \Leftrightarrow \left(-2 \frac{1}{f(x)} \right)' = \left(-3 \frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow$$

$$-2 \frac{1}{f(x)} = -3 \frac{x^2}{2} + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} -2 \frac{1}{f(0)} = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -2}}. \text{ Άρα :}$$

$$-2 \frac{1}{f(x)} = -3 \frac{x^2}{2} - 2 \Leftrightarrow \frac{2}{f(x)} = \frac{3x^2 + 4}{2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{4}{3x^2 + 4}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Για κάθε $x \in [0, 10]$ έχουμε :

$$0 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2 \leq 300 \Leftrightarrow 4 \leq 3x^2 + 4 \leq 304 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{304} \leq \frac{1}{3x^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{304} \leq \frac{4}{3x^2 + 4} \leq 1 \Rightarrow \int_0^{10} \frac{4}{3x^2 + 4} dx \leq \int_0^{10} 1 dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{10} f(x) dx \leq [x]_0^{10} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{10} f(x) dx \leq 10}.$$

2064. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$, οπότε για κάθε $x \in [a, \beta]$ έχουμε

$$a \leq x \leq \beta \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(a) \leq f(x) \leq f(\beta) \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(a)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(\beta)}{x} \Rightarrow$$

$$\int_a^\beta \frac{f(\alpha)}{x} dx \leq \int_a^\beta \frac{f(x)}{x} dx \leq \int_a^\beta \frac{f(\beta)}{x} dx \Leftrightarrow f(\alpha) \int_a^\beta \frac{1}{x} dx \leq \int_a^\beta \frac{f(x)}{x} dx \leq f(\beta) \int_a^\beta \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) [\ln x]_a^\beta \leq \int_a^\beta \frac{f(x)}{x} dx \leq f(\beta) [\ln x]_a^\beta \Leftrightarrow f(\alpha) \ln \frac{\beta}{\alpha} \leq \int_a^\beta \frac{f(x)}{x} dx \leq f(\beta) \ln \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{f(\alpha)} \leq \int_a^\beta \frac{f(x)}{x} dx \leq \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{f(\beta)}}.$$

2065. i. Έχουμε $\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9) dx = \int_1^3 (f(x) - 3)^2 dx.$

Ισχύει $(f(x) - 3)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

Είναι $f(2) = 1$ άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 3 \Leftrightarrow f(x) - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$

$(f(x) - 3)^2 \neq 0$, συνεπώς η $(f(x) - 3)^2$ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε

ολοκληρώνοντας παίρνουμε :

$$\int_1^3 (f(x) - 3)^2 dx > 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9) dx > 0}.$$

ii. Έχουμε $\int_1^3 f^2(x) dx > 4 \int_1^3 f(x) dx - 8 \Leftrightarrow \int_1^3 f^2(x) dx - \int_1^3 4f(x) dx + 8 > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_1^3 f^2(x) dx - \int_1^3 4f(x) dx + \int_1^3 4 dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 (f^2(x) - 4f(x) + 4) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^3 (f(x) - 2)^2 dx > 0. \text{ Ισχύει } (f(x) - 2)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f(2) = 1$ άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$(f(x) - 2)^2 \neq 0$, συνεπώς η $(f(x) - 2)^2$ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε

ολοκληρώνοντας παίρνουμε : $\int_1^3 (f(x) - 2)^2 dx > 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_1^3 f^2(x) dx > 4 \int_1^3 f(x) dx - 8}.$

2066. A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x).$ Έχουμε :

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0.$$

$$\text{Υπάρχει } x_0 \in [\alpha, \beta] \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) \neq g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$h(x_0) \neq 0$, δηλαδή η h δεν είναι παντού μηδέν, άρα :

$$\int_a^\beta h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx}.$$

B. i. Η $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2+5)}{(x^2+2)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 4x - \cancel{2x^3} - 10x}{(x^2+2)^2} = \frac{-6x}{(x^2+2)^2}.$$

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6x}{(x^2+2)^2} = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$, οπότε κάνουμε

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	2
6x	0	+
f'(x)	0	-
f(x)	T.M.	T.E.

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[0, 2]$ και

- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x=0$ το $f(0) = \frac{5}{2}$.
- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=2$ το $f(2) = \frac{3}{2}$.

ii. Έχουμε :

$$0 \leq x \leq 2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(0) \geq f(x) \geq f(2) \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{5}{2} \geq f(x) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}.$$

Στην τελευταία ανισότητα το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ από τα δεξιά ή για $x=2$ από τα αριστερά, αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = [0, 2]$. Έτσι

$$\text{έχουμε : } \int_0^2 \frac{3}{2} dx < \int_0^2 f(x) dx < \int_0^2 \frac{5}{2} dx \Leftrightarrow \frac{3}{2}[x]_0^2 < \int_0^2 f(x) dx < \frac{5}{2}[x]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$3 < \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx < 5.$$

2067. i. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,1)$ είναι η εξής :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow \boxed{y=x}.$$

ii. Η f είναι κυρτή στο $[0, 2]$, συνεπώς κάθε εφαπτομένη της θα είναι κάτω από την C_f , έτσι έχουμε :

$$y \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq f(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) - x \geq 0} \text{ για κάθε } x \in [0, 2], \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής.}$$

iii. Αφού είναι $f(x) - x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, διαπιστώνουμε πως η $f(x) - x$ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε έχουμε :

$$\int_0^2 (f(x) - x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 x dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx - 2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^2 f(x) dx > 2}.$$

2068. i. Η $f(x) = \ln \frac{1+e^x}{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι η εξής :

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x, \text{ αφού } f'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2} \text{ και } f(0) = \ln 1 = 0.$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, συνεπώς κάθε εφαπτομένη της θα είναι κάτω από την C_f ,

έτσι έχουμε : $y \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει

μόνο στο σημείο επαφής. Έτσι για κάθε $x \in [0,1]$ ολοκληρώνουμε και έχουμε :

$$\int_0^1 (f(x) - y) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{2}x dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \ln \frac{1+e^x}{2} dx > \int_0^1 \frac{1}{2}x dx \Leftrightarrow \int_0^1 (\ln(1+e^x) - \ln 2) dx > \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \ln(1+e^x) dx - \int_0^1 \ln 2 dx > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+e^x) dx - [\ln 2 \cdot x]_0^1 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \ln(1+e^x) dx - \ln 2 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 \ln(1+e^x) dx > \frac{1}{4} + \ln 2}.$$

2069. i. Η $f(x) = 2 - e^{-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [-1,1]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 2xe^{-x^2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	-1	0	+1
$f'(x)$	■	○	■
$f(x)$	T.M.	O.E.	T.M.

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[-1,0]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0,1]$.

και

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = 2 - \frac{1}{e}$ και στο $x_2 = 1$ το $f(1) = 2 - \frac{1}{e}$.

ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x_3 = 0$ το $f(0) = 1$.

ii. Αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 1$, τότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε : $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx > \int_{-1}^1 1 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx > [x]_{-1}^1 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2}) dx > 2}.$$

2070. Έστω ότι είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής, θα είναι $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$ με $f(0) = 4 > 0$,

συνεπώς θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και $\int_1^2 f(x) dx > 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Ατοπο αφού $\int_1^2 f(x) dx = -3 < 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

2071. Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε θα είναι $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$. Αν είναι $f(x) > 0$, τότε θα είναι και $\int_0^1 f(x) dx > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ατοπο αφού $\int_0^1 f(x) dx = -2 < 0$.

Έτσι αποδείξαμε πως είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2072. i. Είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$ άρα η f παρουσιάζει ακρότατο και στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 2$. Έχουμε :

– Το $x_1 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,

– η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = 0$ και

– η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_1 = 0$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$.

Επιπλέον είναι :

– Το $x_2 = 2$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,

– η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_2 = 2$ και

– η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_2 = 2$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(2) = 0$.

Έτσι αποδείξαμε πως $f'(0) = f'(2) = 0$.

ii. Έστω ότι είναι $f'(1) = 0$. Τότε θα έχουμε :

– Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και είναι και $f'(0) = f'(1)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο
ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και είναι και $f'(1) = f'(2)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοιο
ώστε $f''(\xi_2) = 0$. Αποδείξαμε λοιπόν πως $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$ και αφού η f'' είναι 1-1
τότε θα είναι και $\xi_1 = \xi_2$, πράγμα άτοπο. Άρα $\boxed{f'(1) \neq 0}$.

iii. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)f''(x)dx &= \int_0^2 f(x)(f'(x))' dx = [f(x)f'(x)]_0^2 - \int_0^2 (f'(x))^2 dx = \\ &= f(2)f'(2) - f(0)f'(0) - \int_0^2 (f'(x))^2 dx = -\int_0^2 (f'(x))^2 dx < 0. \end{aligned}$$

Είναι $(f'(x))^2 \geq 0$, Επιπλέον είναι $f'(1) \neq 0$, δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 \neq 0$, Συνεπώς η $(f'(x))^2$ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε

ολοκληρώνοντας παίρνουμε : $\int_1^2 (f'(x))^2 dx > 0 \Leftrightarrow -\int_1^2 (f'(x))^2 dx < 0$.

Έτσι αποδείξαμε πως $\boxed{\int_0^2 f(x)f''(x)dx < 0}$.

2073. i. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ με ελάχιστη τιμή -2 , οπότε είναι $f(x) \geq -2$, και
μέγιστη τιμή το 1, οπότε $f(x) \leq 1$.

Έτσι έχουμε $f(x) + 2 \geq 0$ και $f(x) - 1 \leq 0$, δηλαδή $(f(x) + 2)(f(x) - 1) \leq 0$, άρα :

$$(f(x) + 2)(f(x) - 1) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + f(x) - 2 \leq 0 \Rightarrow \int_0^2 (f^2(x) + f(x) - 2) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(x) dx + \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 2 dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x) dx - 2[x]_0^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(x) dx - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^2 f^2(x) dx \leq 4}.$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f(x) - 1 \leq 0 &\stackrel{x \in [0,2]}{\Leftrightarrow} x(f(x) - 1) \leq 0 \Leftrightarrow xf(x) - x \leq 0 \Rightarrow \int_0^2 (xf(x) - x) dx \leq 0 \Leftrightarrow \\
 \int_0^2 xf(x) dx - \int_0^2 x dx &\leq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 xf(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 xf(x) dx - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 \int_0^2 xf(x) dx &\leq 2.
 \end{aligned}$$

Ακόμη είναι :

$$\begin{aligned}
 f(x) + 2 \geq 0 &\stackrel{x \in [0,2]}{\Leftrightarrow} x(f(x) + 2) \geq 0 \Leftrightarrow xf(x) + 2x \geq 0 \Rightarrow \\
 \int_0^2 (xf(x) + 2x) dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 xf(x) dx + \int_0^2 2x dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 xf(x) dx + \left[x^2 \right]_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \int_0^2 xf(x) dx + 4 &\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 xf(x) dx \geq -4.
 \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $\boxed{-4 \leq \int_0^2 xf(x) dx \leq 2}.$

2074. i. Έχουμε :

$$\int_1^3 (f(x) - x) dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 x dx = \int_1^3 f(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \int_1^3 f(x) dx - 4.$$

$$\text{Όμως είναι } \int_1^3 f(x) dx < 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx - 4 < 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_1^3 (f(x) - x) dx < 0}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ με πεδίο ορισμού το $A = [1, 3]$, η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\int_1^3 (f(x) - x) dx < 0 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx < 0$, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0) < 0$. Έτσι έχουμε :

– Η g είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ με $g(1) = f(1) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$ και $g(x_0) < 0$,

δηλαδή $g(1) \cdot g(x_0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, x_0) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_1) = 0$.

– Η g είναι συνεχής στο $[x_0, 3]$ με $g(x_0) < 0$ και $g(3) = f(3) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$,

δηλαδή $g(x_0) \cdot g(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, 3) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(1, 3)$.

iii. Αφού η εξίσωση $f(x) = x$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(1, 3)$ και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η εξίσωση $f'(x) = 1$ θα έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 3)$. Έστω $\rho_1 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_1) = 1$. Ακόμη είναι :

Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ και $f(1) = f(3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_2) = 0$. Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχουν $\rho_1 \neq \rho_2$ τέτοια ώστε $f'(\rho_1) = 1$ και $f'(\rho_2) = 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε πως $\rho_1 < \rho_2$.

Έτσι έχουμε :

Η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και επιπλέον ισχύει $0 < \frac{2016}{2017} < 1 \Leftrightarrow$

$f(\rho_1) < \frac{2016}{2017} < f(\rho_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{2016}{2017}$.

2075. α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^2}$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2005$.

Έτσι έχουμε :

$$g(x) = \frac{f(x) - x}{x^2} \Leftrightarrow f(x) - x = x^2 g(x) \Leftrightarrow f(x) = x^2 g(x) + x \text{ και επειδή η } f$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε είναι :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 g(x) + x) = 0^2 \cdot 2005 + 0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 0}.$$

ii. Είναι :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 0 \cdot 2005 + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f'(0) = 1}.$$

β. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{x^2}}{\frac{2x^2 + (f(x))^2}{x^2}} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \lambda \cdot 1^2}{2 + 1^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda}{3} = 3 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 9 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 8}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 1.$$

γ. i. Είναι $f'(x) > f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ με $h(0) = f(0)e^0 = 0$ και

$$h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0, \text{ δηλαδή η } h \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

– Για $x < 0$ είναι :

$$x < 0 \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x)e^{-x} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ άρα είναι } xf(x) > 0.$$

– Για $x > 0$ είναι :

$$x > 0 \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ άρα είναι } xf(x) > 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως είναι $\boxed{xf(x) > 0}$ για κάθε $x \neq 0$.

ii. Είναι $f'(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα :

$$\int_0^1 (f'(x) - f(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 f(x) dx < f(1)}.$$

2076. i. Έχουμε :

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \Rightarrow f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1}}.$$

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x).$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\rho) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}. \text{ Αν στη σχέση } f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1} \text{ βάλουμε όπου } x \text{ το } 0$$

$$\text{παίρνουμε : } f'(0) = \frac{e^{f(0)}}{e^{f(0)} + 1} = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η σχέση που πρέπει να αποδείξουμε μετατρέπεται σε

$$f'(0) < f'(\rho) < f'(x). \text{ Ελέγχουμε τη μονοτονία της } f' :$$

$$f''(x) = \frac{f'(x)e^{f(x)} \cdot (e^{f(x)} + 1) - f'(x)e^{f(x)} \cdot e^{f(x)}}{(e^{f(x)} + 1)^2} = \frac{f'(x)e^{f(x)}}{(e^{f(x)} + 1)^2} > 0 \text{ αφού}$$

$$f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1} > 0, \text{ συνεπώς η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και}$$

θα έχουμε :

$$0 < \rho < x \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\rho) < f'(x) \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)}.$$

iii. Είναι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$ για κάθε $x \geq 0$ οπότε είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Έτσι λοιπόν έχουμε : $E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx$. Οπότε :

$$\frac{x}{2} < f(x) \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \int_0^1 f(x) dx \text{ και}$$

$$f(x) < xf'(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx < f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2} f(1).$$

$$\text{Έτσι αποδείξαμε πως } \frac{1}{4} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2} f(1) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)}.$$

2077. i. Έχουμε :

$$f'(x) + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (x^2)' f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{x^2} + f(x)e^{x^2}(x^2)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^{x^2} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) = c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} ef(1) = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = e}}.$$

$$\text{Άρα είναι : } e^{x^2} f(x) = e \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{1-x^2}, x > 0}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{2x^2} = \frac{e^{1-x^2}}{2x^2}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{-2xe^{1-x^2} \cdot 2x^2 - 4xe^{1-x^2}}{4x^4} = \frac{-4x^3e^{1-x^2} - 4xe^{1-x^2}}{4x^4} = \frac{-x^2e^{1-x^2} - e^{1-x^2}}{x^3} =$$

$$= -e^{1-x^2} \frac{x^2 + 1}{x^3}.$$

Παρατηρούμε πως για κάθε $x > 0$ είναι $x^3 > 0$, $x^2 + 1 > 0$ και $e^{1-x^2} > 0$, συνεπώς $g'(x) < 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Έτσι έχουμε :

$$1 < x < \alpha \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(1) > g(x) > g(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) < g(x) < g(1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha)}{2\alpha^2} < \frac{f(x)}{2x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^\alpha \frac{f(\alpha)}{2\alpha^2} dx < \int_1^\alpha \frac{f(x)}{2x^2} dx < \int_1^\alpha \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha)}{2\alpha^2} [x]_1^\alpha < \int_1^\alpha \frac{f(x)}{2x^2} dx < \frac{1}{2} [x]_1^\alpha \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha-1}{2\alpha^2} f(\alpha) < \int_1^\alpha \frac{f(x)}{2x^2} dx < \frac{\alpha-1}{2}} \text{ για κάθε } \alpha > 1.$$

iii. Από την αρχική σχέση παίρνουμε :

$f'(x) + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{f'(x)}{2x}$, οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_1^a \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) f(x) dx &= \int_1^a \left(f(x) + \frac{f(x)}{2x^2}\right) dx = \int_1^a \left(-\frac{f'(x)}{2x} + \frac{f(x)}{2x^2}\right) dx = \\ &= \int_1^a \frac{f(x) - xf'(x)}{2x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^a \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^a \frac{(f(x))' x - f(x) \cdot x'}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^a \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{x}\right]_1^a = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{f(a)}{a} - f(1)\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{1-a^2}}{a} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{e^{1-a^2}}{2a} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^a \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) f(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{e^{1-a^2}}{2a}}.$$

iv. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_1^a \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) f(x) dx &= \frac{1}{2} - \frac{e^{1-a^2}}{2a} \Leftrightarrow \int_1^a \left(f(x) + \frac{f(x)}{2x^2}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{f(a)}{2a} \Leftrightarrow \\ \int_1^a f(x) dx + \int_1^a \frac{f(x)}{2x^2} dx &= \frac{1}{2} - \frac{f(a)}{2a} \Leftrightarrow \int_1^a f(x) dx - \frac{1}{2} = -\frac{f(a)}{2a} - \int_1^a \frac{f(x)}{2x^2} dx. \end{aligned}$$

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $\frac{f(x)}{2x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ και καθώς είναι $1 < a$ τότε

θα είναι $\int_1^a \frac{f(x)}{2x^2} dx > 0$. Όμοια είναι $f(a) > 0$ και $2a > 0$, οπότε $\frac{f(a)}{2a} > 0$.

Έχουμε λοιπόν :

$$\frac{f(a)}{2a} + \int_1^a \frac{f(x)}{2x^2} dx > 0 \Leftrightarrow -\frac{f(a)}{2a} - \int_1^a \frac{f(x)}{2x^2} dx < 0 \Leftrightarrow \int_1^a f(x) dx - \frac{1}{2} < 0.$$

Οπότε :

$$\int_1^a f(t) dt - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \int_1^a e^{1-t^2} dt - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2 \int_1^a e \cdot e^{-t^2} dt < 1 \Leftrightarrow \boxed{2e \int_1^a e^{-t^2} dt < 1}, \text{ για}$$

κάθε $a > 1$.

Εύρεση άκρων ολοκλήρωσης

2078. i. Έχουμε :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - \frac{1}{3}x^3 - x + 3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 3)e^x - x^2 - 1 = (x^2 + 1)e^x - x^2 - 1 = \\ &= (x^2 + 1)e^x - (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(e^x - 1). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(e^x - 1) = 0 \stackrel{x^2 + 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ και
- $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x^2 + 1$	+		+
$e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 6$.

Έτσι έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 6 \Rightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

ii. Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$. Άρα για τον θετικό αριθμό a ισχύει $\ln a \leq a - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $a = 1$.

Αφού είναι $\int_{\ln a}^{a-1} f(x) dx = 0$ και όπως αποδείξαμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\text{πρέπει } \ln a = a - 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}.$$

2079. Δ1. Έχουμε :

$$f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow f'(x) e^{f(x)} + f'(x) e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} e^{f(0)^0} - e^{-f(0)^0} = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 0}}.$$

Συνεπώς :

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow \frac{e^{2f(x)} - 1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} - x)^2 = 1 + x^2 \neq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, και ισχύει $g(x) \neq 0$, άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και

$$g(0) = e^{f(0)^0} - 0 = 1 > 0 \text{ συμπεραίνουμε ότι } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Συνεπώς } (g(x))^2 = 1 + x^2 \stackrel{g(x) > 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), x \in \mathbb{R}}.$$

Δ2. α. Η $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ και}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

κυρτότητας – σημείων καμπής της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	ϕ	-
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Συνεπώς :

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $[0, +\infty)$.

και

ο **Σημείο καμπής** είναι το σημείο $O(0,0)$.

β. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι η εξής : $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = x$.

Η f είναι κοίλη στο $[0,1]$, συνεπώς κάθε εφαπτομένη της θα είναι πάνω από την C_f ,

έτσι έχουμε : $y \geq f(x) \Leftrightarrow x \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x) - x| dx = -\int_0^1 (f(x) - x) dx = -\int_0^1 \left(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \frac{1}{2} - \left[x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \left(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2080. i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$.

Είναι $f(x) \geq 0$ και αφού η f δεν είναι παντού μηδέν, παίρνουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$,

πράγμα άτοπο αφού ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Επομένως είναι $\boxed{f(x) = 0}$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii. Είναι $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = 0$, συνεπώς σύμφωνα με το

πρώτο ερώτημα θα είναι $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 0}$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

iii. Έχουμε :

$$\int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f^2(x) - 2xf(x) + x^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x)^2 dx = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και

ισχύει $g^2(x) = (f(x) - x)^2 \geq 0$. Επιπλέον έχουμε

$$\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 g^2(x) dx = 0, \text{ άρα σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα}$$

θα είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

iv. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)(2e^x - f(x)) dx &= \frac{e^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 2e^x f(x) dx - \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{e^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2e^x f(x) dx &= \frac{1 - e^2}{2} \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2e^x f(x) dx + \int_0^1 e^{2x} dx &= \frac{1 - e^2}{2} + \int_0^1 e^{2x} dx \Leftrightarrow \\ \int_0^1 (f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x}) dx &= \frac{1 - e^2}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 (f(x) - e^x)^2 dx &= \frac{1 - e^2}{2} + \frac{e^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - e^x)^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Είναι επιπλέον $(f(x) - e^x)^2 \geq 0$ οπότε από προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε

πως $(f(x) - e^x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x, x \in [0, 1]}$.

2081. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0.$$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$. Είναι $f(x) \geq 0$ και αφού η f δεν είναι παντού μηδέν,

παίρνουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, πράγμα άτοπο αφού ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$.

Επομένως είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

i. Έχουμε :

$$\int_0^1 f^2(x) dx + 1 \leq 2 \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 1 dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (f^2(x) - 2f(x) + 1) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - 1)^2 dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - 1)^2 dx = 0.$$

Είναι $(f(x) - 1)^2 \geq 0$ με $\int_0^1 (f(x) - 1)^2 dx = 0$, άρα :

$$(f(x) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 1, x \in [0, 1]}.$$

ii. Έχουμε :

$$\int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{3} \leq 2 \int_0^1 xf(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 x^2 dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (f^2(x) - 2xf(x) + x^2) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x)^2 dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x)^2 dx = 0.$$

Είναι $(f(x) - x)^2 \geq 0$ με $\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx = 0$, άρα :

$$(f(x) - x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x, x \in [0, 1]}.$$

iii. Έχουμε :

$$4 \int_0^3 xf(x) dx = \int_0^3 f^2(x) dx + 36 \Leftrightarrow \int_0^3 f^2(x) dx - 4 \int_0^3 xf(x) dx + \int_0^3 4x^2 dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^3 (f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 (f(x) - 2x)^2 dx = 0.$$

Είναι $(f(x) - 2x)^2 \geq 0$ με $\int_0^3 (f(x) - 2x)^2 dx = 0$, άρα :

$$(f(x) - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2x, x \in [0, 3]}.$$

2082. Αν ήταν $f(x) > \frac{1}{x} + 1$ τότε θα ίσχυε και $\int_1^e f(x) dx > \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$, δηλαδή :

$$\int_1^e f(x) dx > \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx \Leftrightarrow e > [\ln x + x]_1^e \Leftrightarrow e > 1 + e - 1 \Leftrightarrow 0 > 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα αποδείξαμε πως $\boxed{f(x) = \frac{1}{x} + 1, x \in [1, e]}.$

Κάνοντας επαλήθευση έχουμε : $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = [\ln x + x]_1^e = \cancel{1} + e - \cancel{1} = e.$

2083. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = 0.$$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$. Είναι $f(x) \geq 0$ και αφού η f δεν είναι παντού μηδέν,

παίρνουμε $\int_a^{\beta} f(x) dx > 0$, πράγμα άτοπο αφού ισχύει $\int_a^{\beta} f(x) dx = 0$ για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$. Επομένως είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Έχουμε :

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = f^2(1) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = f^2(1) - f^2(0) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = [f^2(x)]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 2f(x)f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - \int_0^1 2f(x)f'(x) dx + \int_0^1 f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 ([f'(x)]^2 - 2f(x)f'(x) + f^2(x)) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - f(x))^2 dx = 0.$$

Είναι $(f'(x) - f(x))^2 \geq 0$ με $\int_0^1 (f'(x) - f(x))^2 dx = 0$, άρα :

$$(f'(x) - f(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}f'(x) + (e^{-x})'f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = c \xrightarrow{x=0}$$

$$f(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Συνεπώς είναι : $e^{-x}f(x) = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x, x \in [0, 1]}$.

2084. A. i. Αφού $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^5 + 16(f(x))^3 - 2^{11}}{x - 2} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$, τότε πρέπει και

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(f(x))^5 + 16(f(x))^3 - 2^{11}] = 0 \text{ έτσι ώστε το παραπάνω όριο να είναι}$$

πραγματικός αριθμός. Άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(f(x))^5 + 16(f(x))^3 - 2^{11}] = 0 \Leftrightarrow (f(2))^5 + 16(f(2))^3 - 2^{11} = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x) = x^5 + 16x^3 - 2^{11}$, $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο

$$w'(x) = 5x^4 + 48x^2 \geq 0, \text{ άρα η } w \text{ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς και } 1-1.$$

$$\text{Είναι } w(4) = 4^5 + 16 \cdot 4^3 - 2^{11} = 2^{10} + 2^4 \cdot 2^6 - 2^{11} = 2^{10} + 2^{10} - 2^{11} = 2 \cdot 2^{10} - 2^{11} =$$

$$= 2^{\mathcal{A}} - 2^{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow w(4) = 0.$$

Έτσι η εξίσωση $(f(2))^5 + 16(f(2))^3 - 2^{11} = 0$ γίνεται :

$$w(f(2)) = 0 \Leftrightarrow w(f(2)) = w(4) \stackrel{w^{1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{f(2) = 4}.$$

ii. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και

$$\int_a^\beta f(x) dx = 0.$$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$. Είναι $f(x) \geq 0$ και αφού η f δεν είναι παντού μηδέν,

παίρνουμε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$, πράγμα άτοπο αφού ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ για κάθε

$x \in [a, \beta]$. Επομένως είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Έχουμε :

$$\int_0^2 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^2 f(x) dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2 dx + \int_0^2 (4x)' f(x) dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (f'(x))^2 dx + [4xf(x)]_0^2 - \int_0^2 4xf'(x) dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (f'(x))^2 dx + 8f(2) - \int_0^2 4xf'(x) dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (f'(x))^2 dx - \int_0^2 4xf'(x) dx = \frac{64}{3} - 32 \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2 dx - \int_0^2 4xf'(x) dx = -\frac{32}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (f'(x))^2 dx - \int_0^2 4xf'(x) dx + \int_0^2 4x^2 dx = -\frac{32}{3} + \int_0^2 4x^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 ((f'(x))^2 - 4xf'(x) + 4x^2) dx = -\frac{32}{3} + \left[4\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (f'(x) - 2x)^2 dx = -\frac{32}{3} + \frac{32}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0.$$

Είναι $(f'(x) - 2x)^2 \geq 0$ με $\int_0^2 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0$, άρα :

$$(f'(x) - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow (f(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x^2 + c \stackrel{x=2}{\Rightarrow} f(2) = 4 + c \Leftrightarrow \cancel{A} = \cancel{A} + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=0}}.$$

Συνεπώς είναι $\boxed{f(x) = x^2, x \in [0, 2]}$.

B. i. Έστω σημείο $M \in C_f$, άρα θα είναι $M(x, x^2)$. Έχουμε :

$$(AM) = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$, $x \in [0, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ άρα σύμφωνα με το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής** η g παρουσιάζει ελάχιστο m και μέγιστο M οπότε ισχύει

$$m \leq g(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in [0, 2].$$

Υπάρχουν δηλαδή $x_1, x_2 \in [0, 2]$, τέτοια ώστε $g(x_1) = m$ και $g(x_2) = M$ με

$$g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2).$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχουν σημεία $M_1, M_2 \in C_f$ με τετμημένες

$x_1, x_2 \in [0, 2]$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύει :

$$g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2) \Leftrightarrow (AM_1) \leq (AM) \leq (AM_2).$$

ii. Είναι :

$$g'(x) = \frac{2(x-3) + 4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} \stackrel{\text{Homer}}{=} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}.$$

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x=1 \Leftrightarrow \underline{x=1}) \text{ ή } (2x^2 + 2x + 3 = 0, \Delta = -20 < 0 \text{ άρα αδύνατη}), \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	1	2
$x-1$		-	+
$2x^2 + 2x + 3$		+	+
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	T.M.	T.E.	T.M.

Συνεπώς η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $g(1) = \sqrt{5}$.

Επιπλέον είναι $g(0) = 3$ και $g(2) = \sqrt{17}$.

Είναι λοιπόν :

$(AM_1) \leq (AM) \leq (AM_2)$ για κάθε

$M \in C_f$, με $M_1(1,1)$ για $x=1$, και $M_2(2,4)$ για $x=2$.

Ο ρ ι α ο λ ο κ λ η ρ ω μ ά τ ω ν

2085. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) dx = \int_1^\lambda \frac{x}{e^x} dx - \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^\lambda x e^{-x} dx + \int_1^\lambda \ln x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= -\int_1^\lambda x (e^{-x})' dx + \int_1^\lambda \ln x \left(\frac{1}{x} \right)' dx = -[x e^{-x}]_1^\lambda + \int_1^\lambda e^{-x} dx + \left[\ln x \cdot \frac{1}{x} \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx = \\ &= -\lambda e^{-\lambda} + e^{-1} + [-e^{-x}]_1^\lambda + \ln \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} + \left[\frac{1}{x} \right]_1^\lambda = \\ &= -\lambda e^{-\lambda} + e^{-1} - e^{-\lambda} + e^{-1} + \frac{1}{\lambda} \ln \lambda + \frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda} + \frac{2}{e} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$I(\lambda) = \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda} + \frac{2}{e}.$$

ii. Έχουμε :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda} + \frac{2}{e} \right) = 0 + 0 - 1 - 0 + \frac{2}{e} = -1 + \frac{2}{e}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \text{ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+1}{e^\lambda} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0.$$

2086. i. Έχουμε :

$$g(x) = e^x f(x) \Rightarrow g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x).$$

Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ με $g(0) = f(0) = 0$ και

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \text{ άρα } g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right), \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \stackrel{e^\xi \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = -f(\xi)}.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 g(x) dx = \int_{\alpha}^0 e^x f(x) dx = \int_{\alpha}^0 e^x (2x^2 - 3x) dx = \int_{\alpha}^0 (e^x)' (2x^2 - 3x) dx = \\ &= \left[e^x (2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3) dx = -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - \int_{\alpha}^0 (e^x)' (4x - 3) dx = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - \left[e^x (4x - 3) \right]_{\alpha}^0 + \int_{\alpha}^0 4e^x dx = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - (-3 - e^{\alpha} (4\alpha - 3)) + [4e^x]_{\alpha}^0 = \\ &= -2\alpha^2 e^{\alpha} + 3\alpha e^{\alpha} + 3 + 4\alpha e^{\alpha} - 3e^{\alpha} + 4 - 4e^{\alpha} = -2\alpha^2 e^{\alpha} + 7\alpha e^{\alpha} - 7e^{\alpha} + 7 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{I(\alpha) = -2\alpha^2 e^{\alpha} + 7\alpha e^{\alpha} - 7e^{\alpha} + 7}.$$

iii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (-2\alpha^2 e^{\alpha} + 7\alpha e^{\alpha} - 7e^{\alpha} + 7) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7) = 0 + 7 = 7, \text{ όπου} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4}{e^{-\alpha}} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (-4e^{\alpha}) = -4 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

2087. α. Η f είναι συνεχής στο $[1, 4]$, άρα :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^4 f(t) dt = \int_1^4 \frac{2t+3}{t+2} dt = \int_1^4 \frac{2t+4-1}{t+2} dt = \int_1^4 \left(\frac{2t+4}{t+2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \\
 &= \int_1^4 \left(\frac{2(t+2)}{t+2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \int_1^4 \left(2 - \frac{1}{t+2} \right) dt = \left[2t - \ln(t+2) \right]_1^4 = 8 - \ln 6 - 2 + \ln 3 = \\
 &= 6 - (\ln 6 - \ln 3) = 6 - \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{I = 6 - \ln 2}.
 \end{aligned}$$

β. i. Για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$, ισχύει :

$$1 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x^2 > 0}{x^2} \leq \frac{t}{x^2} \leq \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}}.$$

ii. Για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$ είναι $f(t) = \frac{2t+3}{t+2} > 0$ και $\frac{x+2}{x+1} > 0$.

Έτσι από τη σχέση $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} &\leq f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} \leq f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} \Rightarrow \\
 \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} dt &\leq \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt \leq \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} dt \Leftrightarrow \\
 \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} \int_1^4 f(t) dt &\leq g(x) \leq \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} \int_1^4 f(t) dt \Leftrightarrow \\
 \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} (6 - \ln 2) &\leq g(x) \leq \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} (6 - \ln 2) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Είναι :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} (6 - \ln 2) \right) = 1 \cdot 1 \cdot (6 - \ln 2) = 6 - \ln 2, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}+2}{\cancel{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

και

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} (6 - \ln 2) \right) = 1 \cdot 1 \cdot (6 - \ln 2) = 6 - \ln 2, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{4}{x^2}} = e^0 = 1,$$

οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 6 - \ln 2}.$

2088. i. Είναι :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{x^2 - x + 1}{x-1} dx = \int_2^4 \frac{x^2 - x}{x-1} dx + \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx = \\
 &= \int_2^4 \frac{x(x-1)}{\cancel{x-1}} dx + \left[\ln(x-1) \right]_2^4 = \int_2^4 x dx + \ln 3 - \cancel{\ln 1}^0 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + \ln 3 = 6 + \ln 3 \Leftrightarrow \\
 &\boxed{I = 6 + \ln 3}.
 \end{aligned}$$

ii. Είναι $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x' + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow}_{x \in [2,4]} x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \underline{\underline{x = 2}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	2	4
$x^2 - 2x$	+	0	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, 4]$. Έτσι έχουμε :

$$2 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow f(2) \leq f(t) \leq f(4) \Leftrightarrow$$

$$3 \leq f(t) \leq \frac{13}{3}.$$

Επιπλέον είναι : $2 \leq t \leq 4 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}_{\text{αφού } x \rightarrow +\infty} 2x \leq tx \leq 4x \Leftrightarrow e^{2x} \leq e^{tx} \leq e^{4x}.$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες κατά μέλη, αφού όλες οι ποσότητες είναι θετικές, παίρνουμε :

$$3e^{2x} \leq f(t)e^{tx} \leq \frac{13}{3}e^{4x} \text{ και ολοκληρώνοντας έχουμε :}$$

$$\int_2^4 3e^{2x} dt \leq \int_2^4 f(t)e^{tx} dt \leq \int_2^4 \frac{13}{3}e^{4x} dt \Leftrightarrow 3e^{2x} [t]_2^4 \leq \int_2^4 f(t)e^{tx} dt \leq \frac{13}{3}e^{4x} [t]_2^4 \Leftrightarrow$$

$$6e^{2x} \leq \int_2^4 f(t)e^{tx} dt \leq \frac{26}{3}e^{4x}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{2x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{26}{3}e^{4x} = +\infty$, οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο**

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^4 f(t)e^{tx} dt = +\infty$.

Όριο εμβαδού

2089. α. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Αναζητούμε το πρόσημο της f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}.$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1,$

- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1,$ οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσημών :

Αν $\lambda < 1$ τότε :

Αν $\lambda > 1$ τότε :

x	0	λ	$1+\infty$
f(x)		-	- $\bigcirc$ +

x	0	1	$\lambda+\infty$
f(x)		- $\bigcirc$ +	+

έτσι :

$$E = \int_{\lambda}^1 |f(x)| dx = - \int_{\lambda}^1 f(x) dx = \int_1^{\lambda} f(x) dx .$$

έτσι :

$$E = \int_1^{\lambda} |f(x)| dx = \int_1^{\lambda} f(x) dx .$$

Και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε :

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \int_1^{\lambda} f(x) dx = \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int_1^{\lambda} \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = - \int_1^{\lambda} \ln x \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' dx = \\ &= - \left[\ln x \cdot \frac{1}{x} \right]_1^{\lambda} + \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2} dx = - \ln \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\lambda} = - \ln \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1 = \\ &= \left(1 - \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \right) \text{τ.μ..} \end{aligned}$$

β. i. Είναι :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \right) = 1 - 0 = 1, \text{ όπου } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 .$$

ii. Είναι :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \right) = 1 - (-\infty) = +\infty, \text{ όπου}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} (1 + \ln \lambda) = (+\infty) \cdot (1 - \infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty .$$

2090. i. Οι $f(x) = \frac{e}{x}$ και $g(x) = \ln x$ έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα τα $D_f = \mathbb{R}^*$ και

$D_g = (0, +\infty)$ και είναι συνεχείς σε αυτά. Βρίσκουμε το σημείο τομής των C_f και C_g :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{e - x \ln x}{x} = 0 .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{e - x \ln x}{x}, x > 0$.

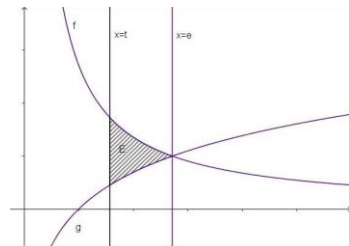
$$\text{Είναι } h'(x) = \frac{(-\ln x - 1)x - e + x \ln x}{x^2} = \frac{-x \ln x - x - e + x \ln x}{x^2} = -\frac{x + e}{x^2} < 0, \text{ για}$$

κάθε $x > 0$, συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1 - 1$.

Είναι $h(e) = 0$, άρα το $x=e$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι $1 - 1$.

Το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων :

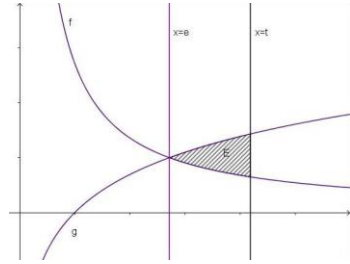
- Αν $t=e$ τότε $E=0$.
- Αν $0 < t < e$ τότε :



$$\mu\epsilon \ E(t) = \int_t^e |f(x) - g(x)| dx = \int_t^e (f(x) - g(x)) dx .$$

- Αν $t > e$ τότε :

$$\begin{aligned} \mu\epsilon \ E(t) &= \int_e^t |f(x) - g(x)| dx = \\ &= - \int_e^t (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_t^e (f(x) - g(x)) dx . \end{aligned}$$



Και στις δύο περιπτώσεις λοιπόν έχουμε :

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_t^e (f(x) - g(x)) dx = \int_t^e \left(\frac{e}{x} - \ln x \right) dx = \int_t^e \frac{e}{x} dx - \int_t^e \ln x dx = \\ &= [e \ln x]_t^e - \int_t^e (x)' \ln x dx = e - e \ln t - [x \ln x]_t^e + \int_t^e 1 dx = \\ &= e - e \ln t - e + t \ln t + [x]_t^e = (-e \ln t + t \ln t + e - t) \tau.μ. . \end{aligned}$$

- ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-e \ln t + t \ln t + e - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-e \frac{\ln t}{t^2} + \frac{\ln t}{t} + \frac{e}{t^2} - \frac{1}{t} \right) = \\ &= -e \cdot 0 + 0 + e \cdot 0 - 0 = 0 , \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t^2} = 0 \text{ και } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0 .$$

- 2091. i.** Η $f(x) = \ln x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Αναζητούμε το πρόσημο της f :
- $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}} .$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e ,$
- $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e ,$ οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

Αν $\lambda < e$ τότε :

x	0	λ	$e + \infty$
f(x)		-	- $\bigcirc$ +

έτσι :

$$E = \int_{\lambda}^e |f(x)| dx = - \int_{\lambda}^e f(x) dx = \int_{\lambda}^e f(x) dx .$$

Αν $\lambda > e$ τότε :

x	0	e	$\lambda + \infty$
f(x)		- $\bigcirc$ +	+

έτσι :

$$E = \int_e^{\lambda} |f(x)| dx = \int_e^{\lambda} f(x) dx .$$

Και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 E(\lambda) &= \int_e^\lambda f(x) dx = \int_e^\lambda (\ln x - 1) dx = \int_e^\lambda \ln x dx - \int_e^\lambda 1 dx = \int_e^\lambda (x)' \ln x dx - [x]_e^\lambda = \\
 &= [x \ln x]_e^\lambda - \int_e^\lambda 1 dx - \lambda + e = \lambda \ln \lambda - \cancel{\lambda} - [x]_e^\lambda - \lambda + \cancel{e} = \lambda \ln \lambda - \lambda + e - \lambda = \\
 &= (\lambda \ln \lambda - 2\lambda + e) \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

ii. Είναι : $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\lambda \ln \lambda - 2\lambda + e) = 0 - 0 + e = e$, όπου

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \ln \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-\lambda) = 0.$$

iii. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι η εξής :

$$y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^2}(x - e^2) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^2}x - \cancel{1} + \cancel{1} \Leftrightarrow .$$

$$\boxed{y = \frac{1}{e^2}x}.$$

iv. Η $f(x) = \ln x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

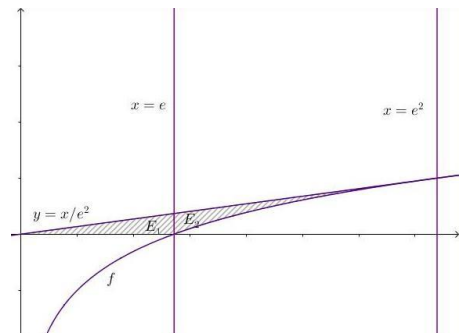
Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$, άρα η C_f θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$f(x) \leq y \Leftrightarrow f(x) - y \leq 0$, για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x = e^2$.

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει εύκολα από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων, της C_f , η οποία είναι μία μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\ln x$ κατά μία μονάδα κάτω, και της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = e^2$.

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}
 E &= E_1 + E_2 = \\
 &= \int_0^e \frac{1}{e^2} x dx + \int_e^{e^2} (y - f(x)) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{e^2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^e + \int_e^{e^2} \left(\frac{x}{e^2} - \ln x + 1 \right) dx = \\
 &\frac{1}{2} + \int_e^{e^2} \frac{x}{e^2} dx - \int_e^{e^2} \ln x dx + \int_e^{e^2} 1 dx =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{e^2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + [x]_e^{e^2} = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - [x \ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} 1 dx + e^2 - e = \\
&= \frac{e^2}{2} - 2e^2 + \cancel{e} + [x]_e^{e^2} + e^2 - \cancel{e} = \frac{e^2}{2} - \cancel{e} + \cancel{e} - e = \left(\frac{e^2}{2} - e \right) \text{τ.μ.}
\end{aligned}$$

2092. i. Έχουμε $h(x) = f(x) - g(x) = -2 + \frac{2}{x} - 3 \ln x$, $x > 0$. Είναι :

$$h'(x) = \left(-2 + \frac{2}{x} - 3 \ln x \right)' = -\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} = -\frac{2+3x}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x > 0, \text{ συνεπώς η } h \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1.

Είναι $h(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι 1-1. Οπότε :

$$- \text{Για } \boxed{0 < x < 1} \text{ έχουμε : } x < 1 \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(1) \Leftrightarrow \boxed{h(x) > 0}.$$

$$- \text{Για } \boxed{x > 1} \text{ έχουμε : } x > 1 \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(1) \Leftrightarrow \boxed{h(x) < 0}.$$

ii. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

Αν $0 < \lambda < 1$ τότε :

x	0	λ	$1 + \infty$
h(x)		+	$\oplus -$

έτσι :

$$E = \int_{\lambda}^1 |h(x)| dx = \int_{\lambda}^1 h(x) dx.$$

Αν $\lambda > 1$ τότε :

x	0	1	$\lambda + \infty$
h(x)		$\oplus -$	-

έτσι :

$$E = \int_1^{\lambda} |h(x)| dx = - \int_1^{\lambda} h(x) dx = \int_{\lambda}^1 h(x) dx.$$

Και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
E(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 h(x) dx = \int_{\lambda}^1 \left(-2 + \frac{2}{x} - 3 \ln x \right) dx = - \int_{\lambda}^1 2 dx + \int_{\lambda}^1 \frac{2}{x} dx - 3 \int_{\lambda}^1 \ln x dx = \\
&= -[2x]_{\lambda}^1 + [2 \ln x]_{\lambda}^1 - 3 \int_{\lambda}^1 (x)' \ln x dx = -2 + 2\lambda - 2 \ln \lambda - 3 \left([x \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 1 dx \right) = \\
&= -2 + 2\lambda - 2 \ln \lambda - 3 \left(-\lambda \ln \lambda - [x]_{\lambda}^1 \right) = -2 + 2\lambda - 2 \ln \lambda + 3\lambda \ln \lambda + 3(1 - \lambda) = \\
&= -2 + 2\lambda - 2 \ln \lambda + 3\lambda \ln \lambda + 3 - 3\lambda = (3\lambda \ln \lambda - 2\ln \lambda + 1 - \lambda) \text{τ.μ.}
\end{aligned}$$

iii. Είναι :

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (3\lambda \ln \lambda - 2 \ln \lambda + 1 - \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left(3 \ln \lambda - 2 \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 1 \right) = \\
&= (+\infty) \cdot (+\infty - 2 \cdot 0 + 0 - 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ όπου}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0.$$

$$\text{iv. Είναι : } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (3\lambda \ln \lambda - 2 \ln \lambda + 1 - \lambda) = 0 - 2 \cdot (-\infty) + 1 - 0 = +\infty, \text{ όπου}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 3\lambda \ln \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{3\lambda}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{3\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-3\lambda) = 0.$$

2093. i. Η $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x \cdot x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0, \text{ για κάθε } x \geq 0. \text{ (η } f'$$

μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A = [0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_f :

Από το πεδίο ορισμού της f διαπιστώνουμε πως η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

ii. Είναι $\varepsilon : y = x$.

$$\text{Οποτε } f(x) - y = \frac{x^3}{x^2+1} - x = \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} \leq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E(a) &= \int_a^{2a} |f(x) - y| dx = - \int_a^{2a} (f(x) - y) dx = - \int_a^{2a} \frac{-x}{x^2+1} dx = \int_a^{2a} \frac{x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{2a} \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_a^{2a} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_a^{2a} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(4a^2+1) - \ln(a^2+1) \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{4a^2+1}{a^2+1} \text{ τ.μ. } \end{aligned}$$

iii. Είναι : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{4\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{1}{2} \ln 2^2 = \ln 2$, όπου

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{4\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 1} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{4\alpha^2}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 4 = 4.$$

2094. i. Η $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [2, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2 \ln^4 x} (x \ln^2 x)' = -\frac{1}{x^2 \ln^4 x} \left(\ln^2 x + \cancel{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \right) = \\ &= -\frac{1}{x^2 \ln^4 x} (\ln^2 x + 2 \ln x) = -\frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x^2 \ln^4 x}. \end{aligned}$$

Είναι :

$x \geq 2 > 1 \Rightarrow x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$, οπότε για κάθε $x \geq 2$ είναι $f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $A = [2, +\infty)$.

ii. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} = 0 \cdot 0 = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ άρα και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty.$$

Συνεπώς η ευθεία $\boxed{y = 0, (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma x'x)}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

iii. Είναι $f(x) - y = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0$ για κάθε $x \geq 2$. Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_2^\alpha |f(x) - y| dx = \int_2^\alpha (f(x) - y) dx = \int_2^\alpha \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_2^\alpha \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \\ &= \int_2^\alpha (\ln x)' \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \left[\ln x \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} \right]_2^\alpha - \int_2^\alpha \ln x \cdot \left(-\frac{1}{\ln^4 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{\ln x} \right]_2^\alpha + \int_2^\alpha 2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x} dx = \frac{1}{\ln \alpha} - \frac{1}{\ln 2} + 2 \int_2^\alpha \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \\ &= \frac{1}{\ln \alpha} - \frac{1}{\ln 2} + 2E(\alpha) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$E(\alpha) = \frac{1}{\ln \alpha} - \frac{1}{\ln 2} + 2E(\alpha) \Leftrightarrow E(\alpha) = \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln \alpha} \right) \tau.μ..$$

iv. Είναι : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln \alpha} \right) = \frac{1}{\ln 2} - 0 = \frac{1}{\ln 2}$,

όπου $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \ln \alpha = +\infty$ οπότε $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \alpha} = 0$.