

Εύρεση παραμέτρων

1720. Αφού η C_f έχει σημείο καμπής το $A(1,5)$ τότε θα είναι $f(1)=5$ και $f''(1)=0$.

Η $f(x) = 2x^2 + \alpha \ln x + \beta$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 4x + \frac{\alpha}{x}$ και $f''(x) = 4 - \frac{\alpha}{x^2}$. Οπότε :

$$f''(1)=0 \Leftrightarrow 4 - \frac{\alpha}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=4} \text{ και}$$

$$f(1)=5 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot \ln 1 + \beta = 5 \Leftrightarrow \boxed{\beta=3}.$$

1721. Αφού η C_f παρουσιάζει καμπή στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 3$ τότε θα είναι $f''(-1)=0$

και $f''(3)=0$. Η $f(x) = x^4 - (\alpha-1)x^3 - (4\beta+2)x^2 + 3$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 4x^3 - 3(\alpha-1)x^2 - 2(4\beta+2)x \text{ και } f''(x) = 12x^2 - 6(\alpha-1)x - 2(4\beta+2).$$

$$\text{Οπότε : } f''(-1)=0 \Leftrightarrow 12+6\alpha-6-8\beta-4=0 \Leftrightarrow 6\alpha-8\beta=-2 \Leftrightarrow \underline{\underline{3\alpha-4\beta=-1}}$$

$$\text{Και } f''(3)=0 \Leftrightarrow 108-18\alpha+18-8\beta-4=0 \Leftrightarrow 18\alpha+8\beta=122 \Leftrightarrow \underline{\underline{9\alpha+4\beta=61}}.$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$12\alpha = 60 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=5} \text{ οπότε θα είναι και } 15-4\beta=-1 \Leftrightarrow -4\beta=-16 \Leftrightarrow \boxed{\beta=4}.$$

1722. Αφού η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = -2$ και σημείο καμπής στο $x_2 = 1$ τότε θα

είναι $f'(-2)=0$ και $f''(1)=0$. Η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta \text{ και } f''(x) = 6x + 2\alpha. \text{ Οπότε :}$$

$$f''(1)=0 \Leftrightarrow 6+2\alpha=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-3} \text{ και}$$

$$f'(-2)=0 \Leftrightarrow 12+12+\beta=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-24}.$$

1723. i. Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = 2$ και σημείο καμπής στο $x_2 = 1$ τότε θα είναι $f'(2)=0$ και $f''(1)=0$.

Η $f(x) = \alpha x^5 + \beta x^3 - 120x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 5\alpha x^4 + 3\beta x^2 - 120$ και $f''(x) = 20\alpha x^3 + 6\beta x$.

$$\text{Οπότε : } f''(1)=0 \Leftrightarrow 20\alpha+6\beta=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3\beta=-10\alpha}} \text{ και}$$

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow 80\alpha+12\beta-120=0 \Leftrightarrow 80\alpha+12\beta=120 \Leftrightarrow \underline{\underline{20\alpha+3\beta=30}} \Leftrightarrow$$

$$20\alpha-10\alpha=30 \Leftrightarrow 10\alpha=30 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3} \text{ οπότε θα είναι και } 3\beta=-30 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-10}$$

ii. Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 10x^3 - 120x + 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 15x^4 - 30x^2 - 120 \text{ και } f''(x) = 60x^3 - 60x = 60x(x^2 - 1).$$

Έτσι έχουμε :

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 60x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 60x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$ ή $\underline{x=1}$ ή $\underline{x=-1}$,
 οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$60x$	-	-	0	+	+
x^2-1	+	0	-	-	0
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\cap_{\Sigma.K.}$		$\cup_{\Sigma.K.}$		$\cap_{\Sigma.K.}$

ο Σημεία καμπής είναι τα $A(-1,128)$,

$B(0,1)$ και $\Gamma(1,-126)$.

Έτσι έχουμε :

$$\lambda_{AB} = \frac{-127}{1} = -127 \text{ και}$$

$$\lambda_{BF} = \frac{-127}{1} = -127. \text{ Αφού είναι } \lambda_{AB} = \lambda_{BF} \text{ και αφού το B είναι κοινό σημείο,}$$

συμπεραίνουμε ότι τα σημεία καμπής της C_f , A, B, Γ είναι **συνευθειακά**.

iii. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^5 - 10x^3 - 120x + 1) = 1 > 0$ άρα κοντά στο 0 είναι

$f(x) > 0$, οπότε θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 - 10x^3 - 120x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (3x^4 - 10x^2 - 120) = -120. \end{aligned}$$

1724. Έστω ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 . Τότε θα είναι $f''(x_0) = 0$.

Επιπλέον γνωρίζουμε πως η f στο σημείο καμπής δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, δηλαδή θα είναι και $f'(x_0) = 0$.

Η $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 12\lambda$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x$ και $f''(x) = 6x + 2\lambda$.

$$\text{Οπότε : } f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = -\frac{\lambda}{3}}} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 &\Leftrightarrow 3x_0^2 + 2\lambda x_0 = 0 \Leftrightarrow \overset{x_0 = -\frac{\lambda}{3}}{3\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^2 + 2\lambda\left(-\frac{\lambda}{3}\right) = 0} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{3} - \frac{2\lambda^2}{3} = 0 \Leftrightarrow \\ &-\frac{\lambda^2}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0}. \end{aligned}$$

1725. Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ διαπερνά τη C_f , τότε το A είναι σημείο καμπής της f και θα είναι $f''(1) = 0$.

Η $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{a^2 x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 3x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = \frac{x^3}{3} - a^2 x^2 + ax - 3$ και $f''(x) = x^2 - 2a^2 x + a$

$$\text{Οπότε : } f''(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^2 + a = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = 0.$$

$$\text{Είναι } \Delta = 9 \text{ οπότε } a_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 1}} \text{ ή } \underline{\underline{a_2 = -\frac{1}{2}}}.$$

Επειδή έχουμε περισσότερες από μία τιμές πρέπει να ελέγξουμε για ποιες από αυτές η f αλλάζει τα κοίλα εκατέρωθεν του $x_0 = 1$.

- Για $\alpha = 1$ είναι $f''(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$, οπότε η f'' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1. Συνεπώς η τιμή $\alpha = 1$ απορρίπτεται.
- Για $\alpha = -\frac{1}{2}$ είναι $f''(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$.

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ή } \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\oplus$	-	$\oplus$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$

άρα η τιμή $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$ είναι δεκτή.

1726. Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ διαπερνά τη C_f , τότε το A είναι

σημείο καμπής της f και θα είναι $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Αφού επιπλέον η f παρουσιάζει

ακρότατο στο $x_0 = -1$ τότε είναι και $f'(-1) = 0$.

Η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 6x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + 6$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$.

$$\text{Οπότε : } f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = -\frac{3}{2}\alpha}} \text{ και}$$

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta + 6 = 0 \Leftrightarrow \overset{\beta = -\frac{3}{2}\alpha}{3\alpha + 3\alpha + 6 = 0} \Leftrightarrow 6\alpha = -6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}, \text{ άρα}$$

$$\text{και } \boxed{\beta = \frac{3}{2}}.$$

1727. Αν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 το $A(x_0, f(x_0))$, τότε θα είναι

$f''(x_0) = 0$. Αφού είναι $f'(x) \neq 0$ τότε έχουμε :

$$g(x)f'(x) = 2f(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{2f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(f'(x))^2 - 2f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \xrightarrow{x=x_0}$$

$$g'(x_0) = \frac{2(f'(x_0))^2 - 2f(x_0)\cancel{f''(x_0)^0}}{(f'(x_0))^2} = \frac{2\cancel{(f'(x_0))^2}}{\cancel{(f'(x_0))^2}} = 2 \Leftrightarrow g'(x_0) = 2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y - 2x + 5 = 0$ είναι $\lambda = 2$. Παρατηρούμε πως $g'(x_0) = 2 = \lambda$ συνεπώς η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι **παράλληλη** στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

Η f δεν έχει σημεία καμψής

1728. Έστω ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } (f(x))^2 = 3f(x) - e^x - x^4 \Rightarrow 2f(x)f'(x) = 3f'(x) - e^x - 4x^3 \Rightarrow$$

$$2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) = 3f''(x) - e^x - 12x^2 \xrightarrow{x=x_0} \Rightarrow$$

$$2(f'(x_0))^2 + 2f(x_0)f''(x_0) = 3f''(x_0) - e^{x_0} - 12x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x_0))^2 = -e^{x_0} - 12x_0^2 = -(e^{x_0} + 12x_0^2) < 0. \text{ Άτοπο αφού } 2(f'(x_0))^2 \geq 0.$$

Συνεπώς η f δεν **παρουσιάζει σημεία καμψής**.

1729. Έστω ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Έχουμε λοιπόν :

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow 2f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) + f'(x) + f'(x) + xf''(x) + 2 = 0 \xrightarrow{x=x_0} \Rightarrow$$

$$2(f'(x_0))^2 + 2f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0) + x_0f''(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x_0))^2 + 2f'(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f'(x_0))^2 + f'(x_0) + 1 = 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα οπότε είναι πάντα $x^2 + x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $(f'(x_0))^2 + f'(x_0) + 1 \neq 0$.

Συνεπώς η f δεν **παρουσιάζει σημεία καμψής**.

1730. Η $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 4\frac{x^3}{3} + 2\alpha x^2 + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x + \alpha^3 + 7 \text{ και}$$

$$f''(x) = 4x^2 + 4\alpha x + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 4x^2 + 4\alpha x + \alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4 + 1 = \\ = (2x + \alpha)^2 + (\alpha - 2)^2 + 1 > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η f δεν **παρουσιάζει σημεία καμψής**.

1731. Έστω ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } (f'(x))^3 + 2f'(x) = e^x + x^3 + x^2 + x + 2 \Rightarrow$$

$$3(f'(x))^2 \cdot f''(x) + 2f''(x) = e^x + 3x^2 + 2x + 1 \xrightarrow{x=x_0} \Rightarrow$$

$$3(f'(x_0))^2 \cdot f''(x_0) + 2f''(x_0) = e^{x_0} + 3x_0^2 + 2x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{x_0} + 3x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0.$$

Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα οπότε είναι πάντα $3x^2 + 2x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $3x_0^2 + 2x_0 + 1 > 0$.

Και αφού είναι και $e^{x_0} > 0$ τότε θα είναι $e^{x_0} + 3x_0^2 + 2x_0 + 1 > 0$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η f δεν **παρουσιάζει σημεία καμπής**.

1732. Έχουμε :

$$x[f''(x) + 2] = f''(x) + e^{x-1} + 1 \Leftrightarrow xf''(x) + 2x = f''(x) + e^{x-1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)f''(x) = e^{x-1} - 2x + 1 \Leftrightarrow f''(x) = \frac{e^{x-1} - 2x + 1}{x-1}.$$

Αφού η f' είναι συνεχής τότε $f''(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f''(x)$, οπότε είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 2x + 1}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 2}{1} = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{f''(1) = -1 \neq 0}}, \text{ άρα το σημείο}$$

$M(1, f(1))$ **δεν είναι σημείο καμπής** της C_f .

1733. Η $f(x) = \ln \frac{\alpha^x + \beta^x}{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{1}{\alpha^x + \beta^x} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta) = \frac{\alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta}{\alpha^x + \beta^x} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{(\alpha^x \ln^2 \alpha + \beta^x \ln^2 \beta)(\alpha^x + \beta^x) - (\alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta)^2}{(\alpha^x + \beta^x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{\alpha^{2x} \ln^2 \alpha} + \alpha^x \beta^x (\ln^2 \beta + \ln^2 \alpha) + \cancel{\beta^{2x} \ln^2 \beta} - \cancel{\alpha^{2x} \ln^2 \alpha} - 2\alpha^x \beta^x \ln \alpha \ln \beta - \cancel{\beta^{2x} \ln^2 \beta}}{(\alpha^x + \beta^x)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^x \beta^x (\ln^2 \beta + \ln^2 \alpha - 2 \ln \alpha \ln \beta)}{(\alpha^x + \beta^x)^2} = \frac{\alpha^x \beta^x (\ln \alpha - \ln \beta)^2}{(\alpha^x + \beta^x)^2} > 0, \text{ αφού } \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \ln \alpha \neq \ln \beta$$

, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς η f δεν **παρουσιάζει σημεία καμπής**.

1734. Η $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + \gamma x + \delta$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 48x + \gamma \text{ και } f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 48 = 12(x^2 + \alpha x + 4).$$

Για το τριώνυμο $x^2 + \alpha x + 4$ είναι $\Delta = \alpha^2 - 16$.

- Αν $\Delta > 0$ τότε η f'' θα έχει δύο ρίζες όπου θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, αφού είναι τριώνυμο, άρα η f θα έχει σημεία καμπής. Συνεπώς η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$ ή $\alpha = -4$, τότε :

$$\text{για } \underline{\underline{\alpha = 4}} \Rightarrow f''(x) = 12(x+2)^2 \quad \text{για } \underline{\underline{\alpha = -4}} \Rightarrow f''(x) = 12(x-2)^2$$

$$\text{με } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	ϕ	+
f(x)	$\cup$		$\cup$

ή

$$\text{με } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	ϕ	+
f(x)	$\cup$		$\cup$

Και στις δύο περιπτώσεις η f είναι κυρτή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε δεν έχει σημεία καμπής.

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 16 \Leftrightarrow |\alpha| < 4 \Leftrightarrow -4 < \alpha < 4$, τότε θα είναι $f''(x) > 0$, δηλαδή η f θα είναι κυρτή οπότε δεν έχει σημεία καμπής.

Συνεπώς $\alpha \in [-4, 4]$.

- 1735.** Η $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x \text{ και } f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12 = 12(x^2 - \alpha x + 1).$$

Για το τριώνυμο $x^2 - \alpha x + 1$ είναι $\Delta = \alpha^2 - 4$.

- Αν $\Delta > 0$ τότε η f'' θα έχει δύο ρίζες όπου θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους αφού είναι τριώνυμο, άρα η f δεν θα είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$, συνεπώς απορρίπτεται.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$ ή $\alpha = -2$, τότε :

$$\text{για } \underline{\alpha = 2} \Rightarrow f''(x) = 12(x-1)^2, \text{ για } \underline{\alpha = -2} \Rightarrow f''(x) = 12(x+1)^2$$

$$\text{με } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{με } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	ϕ	+
f(x)	$\cup$		$\cup$

ή

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	ϕ	+
f(x)	$\cup$		$\cup$

Και στις δύο περιπτώσεις η f είναι κυρτή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 4 \Leftrightarrow |\alpha| < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2$, τότε θα είναι $f''(x) > 0$, δηλαδή η f θα είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς $\alpha \in [-2, 2]$.

- 1736.** Η $f(x) = (\alpha - 2)x^4 + 8x^3 + 6(\alpha + 1)x^2 + 2\alpha + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 4(\alpha - 2)x^3 + 24x^2 + 12(\alpha + 1)x \text{ και}$$

$$f''(x) = 12(\alpha - 2)x^2 + 48x + 12(\alpha + 1) = 12[(\alpha - 2)x^2 + 4x + (\alpha + 1)].$$

Για το τριώνυμο $(\alpha - 2)x^2 + 4x + (\alpha + 1)$ είναι $\Delta = 16 - 4(\alpha^2 - \alpha - 2) = 16 - 4\alpha^2 + 4\alpha + 8 = -4\alpha^2 + 4\alpha + 24 = -4(\alpha^2 - \alpha - 6) = -4(\alpha + 2)(\alpha - 3)$.

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων της διακρίνουσας Δ :

α	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$\Delta = -4\alpha^2 + 4\alpha + 24$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

- Αν $\Delta > 0$ τότε η f'' θα έχει δύο ρίζες. Αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους αφού είναι τριώνυμο, άρα η f δεν είναι κοίλη σε όλο το $\mathbb{R}$, έτσι απορρίπτεται.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ ή $\alpha = 3$, τότε :

για $\underline{\alpha = -2} \Rightarrow f''(x) = -12(2x-1)^2$, για $\alpha = 3 \Rightarrow f''(x) = 12(x+2)^2$

με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$			

ή

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$			

Στην πρώτη περίπτωση η f είναι κοίλη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε δεχόμαστε το $\alpha = -2$ αλλά στη δεύτερη είναι κυρτή κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε απορρίπτουμε το $\alpha = 3$.

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha < -2$ ή $\alpha > 3$, τότε :
 - για $\underline{\alpha < -2} \Rightarrow \alpha - 2 < -4 < 0$ είναι $f''(x) < 0$, αφού ο συντελεστής του x^2 του τριωνύμου είναι αρνητικός, δηλαδή η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Δεκτό.
 - για $\alpha > 3 \Rightarrow \alpha - 2 > 1 > 0$ είναι $f''(x) > 0$, αφού ο συντελεστής του x^2 του τριωνύμου είναι θετικός, δηλαδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Απορρίπτεται.

Συνεπώς $\boxed{\alpha \in (-\infty, -2]}$.

1737. i. Έστω ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Έχουμε λοιπόν :

$$(f'(x))^2 + (f''(x))^3 = e^{2x} + e^{3x} \Rightarrow 2f'(x)f''(x) + 3(f''(x))^2 f^{(3)}(x) = 2e^{2x} + 3e^{3x} \xrightarrow{x=x_0}$$

$$2f'(x_0)\cancel{f''(x_0)} + 3(\cancel{f''(x_0)})^2 f^{(3)}(x_0) = 2e^{2x_0} + 3e^{3x_0} \Leftrightarrow 2e^{2x_0} + 3e^{3x_0} = 0$$

Άτοπο αφού $2e^{2x_0} + 3e^{3x_0} > 0$. Συνεπώς η f δεν **παρουσιάζει σημεία καμπής**.

ii. Είναι $(f'(x))^2 + (f''(x))^3 = e^{2x} + e^{3x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού είναι και

$(f'(x))^2 \geq 0$ τότε θα πρέπει $f''(x) \neq 0$. Επιπλέον η f'' είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Στη σχέση $(f'(x))^2 + (f''(x))^3 = e^{2x} + e^{3x}$ για $x=0$ είναι :

$$(f'(0))^2 + (f''(0))^3 = 2 \Leftrightarrow 1 + (f''(0))^3 = 2 \Leftrightarrow (f''(0))^3 = 1 \Leftrightarrow f''(0) = 1 > 0,$$

άρα θα είναι και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(a + \beta - x)$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - f'(a + \beta - x)$.

Είναι $f''(x) > 0$ δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a+b-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(a+b-x) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$x = a+b-x \Leftrightarrow 2x = a+b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\bullet \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a+b-x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(a+b-x) \stackrel{f \text{ γν.αύξ}}{\Leftrightarrow}$$

$$x > a+b-x \Leftrightarrow 2x > a+b \Leftrightarrow x > \frac{a+b}{2} \text{ και}$$

$$\bullet \quad g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a+b-x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(a+b-x) \stackrel{f \text{ γν.αύξ}}{\Leftrightarrow}$$

$$x < a+b-x \Leftrightarrow 2x < a+b \Leftrightarrow x < \frac{a+b}{2}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας - ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	$\frac{a+b}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο

$$x = \frac{a+b}{2} \text{ το } g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Έτσι λοιπόν έχουμε :

$$g(x) \geq g\left(\frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + f(a+b-x) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1738. i. Έστω ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι θέση σημείου καμπής. Τότε η f' θα αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του ξ :

• Είτε από αύξουσα σε φθίνουσα, οπότε έχουμε :

$$\text{για } x < \xi \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) \text{ και για } x > \xi \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi).$$

• Είτε από φθίνουσα σε αύξουσα, οπότε έχουμε :

$$\text{για } x < \xi \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) \text{ και για } x > \xi \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi).$$

Και στις δύο περιπτώσεις διαπιστώνουμε πως το ξ δεν μπορεί να είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Έστω τώρα ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Τότε θα είναι $f'(\xi) = 0$, αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ξ .

Δηλαδή η f' θα διατηρεί το πρόσημό της εκατέρωθεν του ξ , οπότε το ξ δεν μπορεί να είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Αποδείξαμε λοιπόν πως **δεν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, στο οποίο η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.**

ii. Η $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 2016$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = e^x - x - 1 \text{ και } f''(x) = e^x - 1.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{x=0}.$$

Επιπλέον είναι :

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$, οπότε κάνουμε

τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	ϕ	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	Σ.Κ.	$\curvearrowleft$

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=0$.

Αφού λοιπόν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=0$, τότε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα δε μπορεί να παρουσιάζει ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο και τοπικό ακρότατο. Συνεπώς η f **δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=0$** .

Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια κυρτότητας & εφαπτομένης

- 1739.** i. Η $f(x) = \ln(\ln x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$ αφού πρέπει $x > 0$ και $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$\text{παραγώγους: } f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ και}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x \ln x)^2} \cdot (\ln x + 1) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 1, \text{ αφού}$$

$$\ln x > 0 \Rightarrow \ln x + 1 > 1 > 0. \text{ Συνεπώς η f είναι κοίλη στο } A = (1, +\infty).$$

- ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = e$ είναι :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{e}x - 1}.$$

- iii. Η f είναι κοίλη στο $A = (1, +\infty)$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$$f(x) \leq \frac{1}{e}x - 1 \Leftrightarrow \ln(\ln x) \leq \frac{1}{e}x - 1 \Leftrightarrow e \ln(\ln x) \leq x - e \Leftrightarrow \boxed{x - e \ln(\ln x) \geq e},$$

με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

- 1740.** i. Η $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = (2x - 4)e^{x-1} + (x^2 - 4x + 6)e^{x-1} = (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} \text{ και}$$

$$f''(x) = (2x - 2)e^{x-1} + (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} = x^2 e^{x-1} \geq 0, \text{ όπου η } f'' \text{ μηδενίζεται σε}$$

πεπερασμένο πλήθος σημείων. Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

- ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x - 1) + 3 \Leftrightarrow \boxed{y = x + 2}.$$

iii. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$$f(x) \geq x+2 \Leftrightarrow (x^2-4x+6)e^{x-1} \geq x+2 \Leftrightarrow \boxed{e^{x-1} \geq \frac{x+2}{x^2-4x+6}}, \text{ αφού το}$$

τριώνυμο x^2-4x+6 έχει αρνητική διακρίνουσα οπότε θα είναι πάντα θετικό, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

1741. i. Η $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους:

$$f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1) \text{ και } f''(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} e^{x \ln x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $(0, +\infty)$.

Η $g(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{με παραγώγους: } g'(x) = \frac{1}{x} \text{ και } g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς η g είναι **κοίλη** στο $(0, +\infty)$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x-1) + 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x}.$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$ είναι :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = x-1}.$$

iii. Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow \underline{\underline{x^x \geq x}}, \text{ με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.}$$

Η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η C_g θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη

$$\text{της, οπότε: } g(x) \leq x-1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\ln x \leq x-1}}, \text{ με την ισότητα να ισχύει στο σημείο}$$

$$\text{επαφής. Έτσι έχουμε } x^x \geq x > x-1 \geq \ln x, \text{ δηλαδή } \boxed{x^x > \ln x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

1742. i. Η $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

$$\text{παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο } f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1).$$

Η $g(x) = \beta + \alpha \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, άρα

$$\text{και συνεχής, με παράγωγο } g'(x) = \frac{\alpha}{x}.$$

Αφού οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$, τότε είναι

$$f'(1) = g'(1) \Leftrightarrow \boxed{1 = \alpha} \text{ και } f(1) = g(1) \Leftrightarrow \boxed{1 = \beta}.$$

ii. Η $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους:

$$f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1) \text{ και } f''(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} e^{x \ln x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $(0, +\infty)$.

Η $g(x) = 1 + \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $g'(x) = \frac{1}{x}$ και $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η g είναι **κοίλη** στο $(0, +\infty)$.

iii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x-1) + 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x}, \text{ η οποία είναι και}$$

εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$.

Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $f(x) \geq x \Leftrightarrow \underline{\underline{x \geq x}}$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

Η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η C_g θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $g(x) \leq x \Leftrightarrow \underline{\underline{\ln x + 1 \leq x}}$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

Έτσι έχουμε $x^x \geq x \geq \ln x + 1$, δηλαδή $\boxed{x^x \geq \ln x + 1}$ για κάθε $x > 0$.

1743. i. Η $f(x) = x^5 + x^3 + 3\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3\sigma\upsilon\nu x \text{ και } f''(x) = 20x^3 + 6x - 3\eta\mu x.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 20x^3 + 6x - 3\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Μένει να βρούμε το πρόσημό της. Είναι : $g'(x) = 60x^2 + 6 - 3\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Είναι $g(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι 1-1. Οπότε :

$$- \text{ Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\curvearrowright$	Σ.Κ.	$\curvearrowleft$

Συνεπώς :

ο **Σημείο καμπής** είναι το $A(0,0)$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι : $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow \boxed{y = 3x}$.

iii. Η f είναι κυρτή για κάθε $x \geq 0$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε $f(x) \geq 3x$, για κάθε $x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

1744. i. Η $f(x) = x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $(0, +\infty)$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = x-1}.$$

iii. Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$$f(x) \geq x-1 \Leftrightarrow x \ln x \geq x-1 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ με την ισότητα να}$$

ισχύει στο σημείο επαφής.

iv. Αφού είναι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε θετικό αριθμό, τότε για τους θετικούς αριθμούς α, β και γ έχουμε :

$\ln \alpha \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$, $\ln \beta \geq 1 - \frac{1}{\beta}$ και $\ln \gamma \geq 1 - \frac{1}{\gamma}$, οπότε προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma \geq 1 - \frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\beta} + 1 - \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) \geq 3 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3}.$$

1745. i. Η $f(x) = \ln x - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	$\ominus$
x		+	+
$f'(x)$		+	$\ominus$
$f(x)$		$\nearrow$ T.M. $\searrow$	

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

και

ο f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x=1$ το $f(1) = -1$.

ii. Η $g(x) = \ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3$ έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$ και είναι δύο

φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους : $g'(x) = \frac{2}{x} \ln x + 2 \ln x + 2 + 2x$ και

$$g''(x) = -\frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + 2 = \frac{2}{x^2} (-\ln x + 1 + x + x^2).$$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $f(1) = -1$, οπότε θα είναι :

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1 \Leftrightarrow -\ln x + x \geq 1 \Rightarrow -\ln x + x + 1 \geq 2 > 0.$$

Έτσι τελικά θα είναι $g''(x) > 0$, για κάθε $x > 0$. Συνεπώς η g είναι **κυρτή** στο $(0, +\infty)$

iii. Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$ είναι :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) - 2 \Leftrightarrow \boxed{y = 4x - 6}.$$

iv. Η g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η C_g θα βρίσκεται πάνω από κάθε

εφαπτομένη της, οπότε : $g(x) \geq 4x - 6 \Leftrightarrow \ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3 \geq 4x - 6 \Leftrightarrow$

$$\ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3 \geq 4x - 6 \Leftrightarrow (\ln x + x)^2 \geq 4x - 3, \text{ με την ισότητα να ισχύει}$$

στο σημείο επαφής. Για $x > 1$ είναι : $x > 1 \Leftrightarrow 4x > 4 \Leftrightarrow 4x - 3 > 1 > 0$.

$$\text{Οπότε : } (\ln x + x)^2 > 4x - 3 \Leftrightarrow \boxed{\ln x + x > \sqrt{4x - 3}}.$$

1746. i. Η $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{με παραγώγους : } g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{2x} - 2e^{2x} \cdot f(x)}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(f''(x) - 2f'(x))e^{2x} - 2e^{2x}(f'(x) - 2f(x))}{e^{4x}} = \\ &= \frac{f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} = \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} < 0, \text{ για κάθε} \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ αφού } f''(x) < -4f'(x) + 4f(x) \Leftrightarrow f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) < 0.$$

Συνεπώς η g είναι **κοίλη** στο $\mathbb{R}$.

ii. Αφού η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ τότε η ευθεία $y=0$ θα είναι εφαπτομένη της C_g . Επιπλέον η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ άρα θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}} \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) \leq 0}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με την ισότητα να ισχύει}$$

στο σημείο επαφής.

1747. i. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει τη μορφή :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + f(1).$$

Αφού δίνεται πως η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η $y = x + 1$, τότε πρέπει :

$$\boxed{f'(1) = 1} \text{ και } -f'(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow -1 + f(1) = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 2}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 3$ έχει τη μορφή :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = f'(3)x - 3f'(3) + f(3).$$

Αφού δίνεται πως η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 3$ είναι η $y = -x + 5$, τότε πρέπει :

$$\boxed{f'(3) = -1} \text{ και } -3f'(3) + f(3) = 5 \Leftrightarrow 3 + f(3) = 5 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 2}.$$

ii. Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς θα είναι και $1 - 1$.

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[1, 3]$, ως παραγωγίσιμη, με $f'(1) = 1 > 0$ και $f'(3) = -1 < 0$, δηλαδή $f'(1) \cdot f'(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, το οποίο όμως είναι **μοναδικό** αφού η f' είναι $1 - 1$. Οπότε :

$$\text{— Για } \boxed{x < x_0} \text{ έχουμε : } x < x_0 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > x_0} \text{ έχουμε : } x > x_0 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}.$$

x	$-\infty$	1	x_0	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	ϕ	-	
$f(x)$		$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	

Κάνοντας τον πίνακα βλέπουμε ότι πρόκειται για **ολικό μέγιστο**.

iii. Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$f(x) \leq x + 1$ και $f(x) \leq -x + 5$, με τις ισότητες να ισχύουν μόνο στα σημεία επαφής (για $x=1$ στην πρώτη και $x=3$ στη δεύτερη).

Έτσι για $x = -1$ και $x = 5$ αντίστοιχα παίρνουμε $f(-1) < 0$ και $f(5) < 0$.

Οπότε εφαρμόζουμε **θεώρημα Bolzano** για την f στα διαστήματα $[-1, 1]$ και $[3, 5]$.

— Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ με $f(-1) < 0$ και $f(1) = 2 > 0$, δηλαδή $f(-1) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

— Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3, 5]$ με $f(3) = 2 > 0$ και $f(5) < 0$, δηλαδή $f(3) \cdot f(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (3, 5)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, άρα και $1 - 1$, οπότε το $x_1 \in (-1, 1)$ είναι μοναδικό. Όμοια η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, 5]$, άρα και $1 - 1$, οπότε το $x_2 \in (3, 5)$ είναι μοναδικό.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες** $x_1 \in (-1, 1)$ και $x_2 \in (3, 5)$.

1748. i. Έχουμε :

$$f''(x)e^{-x} - (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f''(x)e^{-x} = (f'(x))^2 \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = e^x \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{f'(x)}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)} = e^x + c_1 \xrightarrow{x=0} -\frac{1}{f'(0)} = 1 + c_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 + c_1 \Leftrightarrow$$

$c_1 = 1$. Οπότε :

$$-\frac{1}{f'(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x + 1} = f'(x) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^x + 1} = 1 + f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = 1 + f'(x) \Leftrightarrow [\ln(e^x + 1)]' = [x + f(x)]' \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + f(x) + c_2 \xrightarrow{x=0}$$

$$\ln 2 = f(0) + c_2 \Leftrightarrow \ln 2 = \ln 2 + c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}. \text{ Άρα}$$

$$\ln(e^x + 1) = x + f(x) \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x + 1) - x = \ln(e^x + 1) - \ln e^x = \ln \frac{e^x + 1}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \ln(1 + e^{-x}), x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Η $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = -\frac{1}{e^x + 1} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε και $\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = e^x \Leftrightarrow f''(x) = e^x (f'(x))^2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f

είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

iii. Αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της. Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$:

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2. \text{ Συνεπώς είναι :}$$

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) \geq -x + 2\ln 2 \Leftrightarrow \boxed{2f(x) + x \geq \ln 4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.

iv. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{-x}) \stackrel{u=1+e^{-x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{-x}) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (1 + e^u) = 1 + (+\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) \stackrel{u=1+e^{-x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 1}} \ln u = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} (1 + e^u) = 1 + 0 = 1.$$

Οπότε $\boxed{f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)}$ το σύνολο

τιμών της f .

v. Έστω $f(x) = y$ όπου $y \in f(\mathbb{R})$. Έτσι έχουμε :

$$y = \ln(1 + e^{-x}) \Leftrightarrow \ln e^y = \ln(1 + e^{-x}) \Leftrightarrow e^y = 1 + e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = e^y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{-x} = \ln(e^y - 1) \Leftrightarrow -x = \ln(e^y - 1) \Leftrightarrow x = -\ln(e^y - 1).$$

Οπότε : $\boxed{f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1), x > 0}$.

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\ln(e^x - 1)] \stackrel{u=e^x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} (-\ln u) = -(-\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\ln(e^x - 1)] \stackrel{u=e^x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (-\ln u) = -(+\infty) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty - 1 = +\infty.$$

1749. α. Η $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (2, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = \frac{(x-2)f'(x) - f(x)}{(x-2)^2}$.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[2, x]$.

Η f είναι συνεχής στο $[2, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, x)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - \cancel{f(2)}}{x-2} = \frac{f(x)}{x-2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$2 < \underset{f' \text{ γν.αύξ.}}{\xi} < \underset{f \text{ κυρτή}}{x} \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2} < f'(x) \stackrel{x-2>0}{\Leftrightarrow} f(x) < (x-2)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)f'(x) - f(x)}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0, \text{ για κάθε } x > 2,$$

άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(2, +\infty)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (2x-9)f(x+6) - (7x-32)f(x)$ με πεδίο ορισμού το $B = [2, +\infty)$ (πρέπει $x+6 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq -4$ και $x \geq 2$).

Η h είναι συνεχής στο $[4, 5] \subseteq [2, +\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών

συναρτήσεων, και $h(4) = -f(10) + 4f(4) = -8g(10) + 8g(4) = -8(g(10) - g(4))$ και

$h(5) = f(11) - 3f(5) = 9g(11) - 9g(5) = 9(g(11) - g(5))$, αφού

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = (x-2)g(x).$$

Είναι :

$$4 < 10 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(4) < g(10) \Leftrightarrow g(10) - g(4) > 0 \Leftrightarrow -8(g(10) - g(4)) < 0 \Leftrightarrow h(4) < 0 \text{ και}$$

$$5 < 11 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(5) < g(11) \Leftrightarrow g(11) - g(5) > 0 \Leftrightarrow 9(g(11) - g(5)) > 0 \Leftrightarrow h(5) > 0.$$

Έτσι έχουμε $h(4) \cdot h(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (4, 5) \in (2, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 9)f(x + 6) = (7x - 32)f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(4, 5)$.

γ. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3}$ με $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \frac{1}{6}$. Οπότε :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} \Leftrightarrow f(x) + \sqrt{x+6} = (x-3)\varphi(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x-3)\varphi(x) - \sqrt{x+6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [(x-3)\varphi(x) - \sqrt{x+6}] = 0 \cdot \frac{1}{6} - 3 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -3 \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\Leftrightarrow} \boxed{f(3) = -3}.$$

Επιπλέον είναι :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)\varphi(x) - \sqrt{x+6} + 3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\varphi(x) - \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f'(3) = 0}.$$

ii. Η f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Οπότε :

– Για $\boxed{2 < x < 3}$ έχουμε : $x < 3 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(3) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $A_1 = [2, 3]$.

– Για $\boxed{x > 3}$ έχουμε : $x > 3 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(3) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A_2 = [3, +\infty)$.

x	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		–	+
$f(x)$	T.M.		T.E.

Κάνοντας τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = 2$, το $f(2) = 0$ και **ολικό ελάχιστο** στο

$x = 3$, το $f(3) = -3$.

iii. Έχουμε $f(2) = 0$, $f(3) = -3$ και μένει να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 4$ είναι η $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.

Η f είναι κυρτή για κάθε $x > 2$ συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε $f(x) \geq f'(4)(x-4) + f(4)$, για κάθε $x > 2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=4$. Έπεται: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(4)(x-4) + f(4))$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(4)(x-4) + f(4)) = +\infty$, αφού είναι $f'(4) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-4) = +\infty$.

Έτσι θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα: $f(A_1) = f([2, 3]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} [f(3), f(2)] = [-3, 0]$,

$f(A_2) = f([3, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-3, +\infty)$.

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-3, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

1750. i. Είναι $g(0) = \frac{1}{1-0} f(0) = f(0) = -3$, άρα το σημείο $(0, -3)$ είναι κοινό σημείο

των C_f και C_g .

Η g είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2} f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} f(x) + \frac{1}{1-x^2} f'(x) \stackrel{x=0}{\Rightarrow} g'(0) = f'(0).$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $(0, -3)$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - \beta x + 3$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = (-1, 1)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο $\varphi'(x) = g'(x) - \beta$. Είναι:

$g(x) \leq \beta x - 3 \Leftrightarrow g(x) - \beta x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(0)$, δηλαδή η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$. Έτσι έχουμε:

– Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, 1)$,

– Η φ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$ και

– Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, άρα και στο $x_0 = 0$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι:

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow g'(0) - \beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{g'(0) = \beta}.$$

Η κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στο σημείο $(0, -3)$ είναι:

$$y = g'(0)x + g(0) \Leftrightarrow \boxed{y = \beta x - 3}.$$

iii. Η εξίσωση $f'(x) - \beta = 0$ έχει λύση όταν η συνάρτηση $w(x) = f'(x) - \beta$,

$x \in (-1, 1)$, έχει ρίζα. Είναι:

$w(0) = f'(0) - \beta = \beta - \beta = 0$, άρα το $x_0 = 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $w(x) = 0$.

Η w έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (-1, 1)$ και είναι συνεχής στο Δ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) - \beta < f'(x_2) - \beta \Leftrightarrow w(x_1) < w(x_2).$$

Άρα η w είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , δηλαδή είναι και 1-1, οπότε το $x_0 = 0$ είναι **μοναδική ρίζα** της εξίσωσης $w(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \beta$.

iv. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, 1)$, συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε :

$$\boxed{f(x) \geq \beta x - 3}, \text{ για κάθε } x \in (-1, 1), \text{ με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής.}$$

1751. i. Είναι : $xf(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow xf(x) = e^x - 1 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

Επιπλέον αφού η f είναι συνεχής έχουμε :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1. \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

ii. Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$.

Για $x=0$ είναι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xe^x - e^x + 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \cancel{x}^{\cancel{e^x}} + xe^x - \cancel{e^x} = xe^x. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \underline{x = 0}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας -}$$

ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

ο Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $g(0) = 0$.

Άρα για $x \neq 0$ έχουμε :

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow xe^x - e^x + 1 > 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε}$$

$$x \neq 0, \text{ και αφού } f'(0) = \frac{1}{2} \text{ τότε είναι } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε **ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτηση** f^{-1} .

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της f . Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{-1}{-\infty}\right)}{=} 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

$$\text{Οπότε } D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty) \text{ το πεδίο}$$

ορισμού της f^{-1} .

iii. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει τη μορφή :

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της,

οπότε : $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2f(x) \geq x + 2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x=0$.

iv. Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))] = 0 \cdot 0 = 0$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) \stackrel{\substack{u=f(x) \\ x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

1752. α. Είναι :

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x \Rightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot (f^2(x) - 2f(x) + 3) + e^{f(x)}(2f(x)f'(x) - 2f'(x)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}(f'(x)f^2(x) - \cancel{2f'(x)f(x)} + 3f'(x) + \cancel{2f(x)f'(x)} - 2f'(x)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}(f'(x)f^2(x) + f'(x)) = 1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x) + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}(f^2(x) + 1)} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ δηλαδή}$$

και 1-1, συνεπώς η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x) = y$ όπου $y \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε $e^y(y^2 - 2y + 3) = x$. Οπότε :

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}.$$

β. Η $f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$(f^{-1})'(x) = e^x(x^2 - 2x + 3) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - \cancel{2x} + 3 + \cancel{2x} - 2) = e^x(x^2 + 1) \text{ και}$$

$$(f^{-1})''(x) = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x + 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου η $(f^{-1})''$ μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Συνεπώς η f^{-1} είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

γ. i. Για την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο A έχουμε :

$\lambda_1 = (f^{-1})'(x) = e^x (x^2 + 1)$. Για την εφαπτομένη της C_f στο σημείο B έχουμε :

$$\lambda_2 = f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{e^{f(f^{-1}(x))} \left[(f(f^{-1}(x)))^2 + 1 \right]} = \frac{1}{e^x (x^2 + 1)}.$$

$$\text{Άρα : } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \cancel{e^x (x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{\cancel{e^x (x^2 + 1)}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1}.$$

$$\text{ii. Είναι : } (AB) = \sqrt{(f^{-1}(x) - x)^2 + (x - f^{-1}(x))^2} = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2}.$$

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 0$ έχει τη μορφή :

$$y = (f^{-1})'(0)x + f^{-1}(0) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 3}.$$

Η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η $C_{f^{-1}}$ θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, οπότε : $f^{-1}(x) \geq x + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) - x \geq 3$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για

$$x=0. \text{ Οπότε είναι : } (AB) = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2} \cdot (f^{-1}(x) - x) \geq 3\sqrt{2}.$$

Επομένως η απόσταση AB γίνεται **ελάχιστη για $x=0$** και τότε είναι $\boxed{(AB) = 3\sqrt{2}}$.

Ανισότητες Jensen

1753. i. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$.

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 \quad & \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} < 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \\ & f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (e^x + 2)^v$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = ve^x (e^x + 2)^{v-1} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= ve^x (e^x + 2)^{v-1} + v(v-1)e^{2x} (e^x + 2)^{v-2} = ve^x (e^x + 2)^{v-2} (e^x + 2 + (v-1)e^x) = \\ &= ve^x (e^x + 2)^{v-2} (e^x + 2 + ve^x - e^x) = ve^x (e^x + 2)^{v-2} \cdot (2 + ve^x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$. Λόγω του ερωτήματος **i.** θα είναι :

$$f(\alpha) + f(-\alpha) > 2f\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) + f(-\alpha) > 2f(0) \Leftrightarrow \boxed{(e^\alpha + 2)^v + (e^{-\alpha} + 2)^v > 2 \cdot 3^v}.$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους : $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ και

$$g''(x) = f''(x)e^{f(x)} + [f'(x)]^2 e^{f(x)} = [f''(x) + [f'(x)]^2] e^{f(x)} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η g είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$. Λόγω του ερωτήματος **i.** θα είναι :

$$g(\alpha) + g(\beta) > 2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)} > 2e^{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)}}{2} > e^{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}.$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \ln x + 1 \text{ και } f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$. Λόγω του ερωτήματος **i.** θα είναι :

$$f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta > \cancel{2} \frac{\alpha+\beta}{\cancel{2}} \ln \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta > \ln \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \ln \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta > \ln \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \boxed{\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}}.$$

1754. i. Αν $\alpha = \beta$ τότε η ισότητα ισχύει.

Αν $\alpha \neq \beta$ τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $\alpha < \beta$.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$.

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ , άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , άρα και στο $[\alpha, \beta]$. Οπότε έχουμε :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} > 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \stackrel{\beta-\alpha > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) < 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Άρα είναι $\boxed{f(\alpha) + f(\beta) \leq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

ii. Η $f(x) = \ln(\ln x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$, αφού πρέπει $x > 0$ και $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ και } f''(x) = -\frac{1}{(x \ln x)^2} (\ln x + 1) < 0, \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

Συνεπώς η f είναι **κοίλη** στο $(1, +\infty)$. Λόγω του ερωτήματος **i**, θα είναι :

$$f(\alpha) + f(\beta) \leq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \ln(\ln \alpha) + \ln(\ln \beta) \leq 2 \ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln(\ln \alpha \ln \beta) \leq \ln \left(\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \ln \alpha \ln \beta \leq \left(\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \boxed{\left(\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \geq \ln \alpha \ln \beta}.$$

1755. α. Αν $\alpha = \beta$ τότε η ισότητα ισχύει.

Αν $\alpha \neq \beta$ τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $\alpha < \beta$.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$ και

$$\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right].$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}.$$

Η f είναι κυρτή στο Δ , άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , άρα και στο $[\alpha, \beta]$.

Οπότε έχουμε :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow 2 \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \alpha} \stackrel{\beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Άρα είναι $\boxed{f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

β. i. Η $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{-2x(x+1) - (2-x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 2 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)^2 - 2(x+1)(-x^2-2x-2)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(-2x-2)(x+1) - 2(-x^2-2x-2)}{(x+1)^3} = \frac{-2x^2 - 2x - 2x - 2 + 2x^2 + 4x + 4}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3} > 0, \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $(-1, +\infty)$.

Είναι :

$$\alpha > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \alpha > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \alpha > -1, \text{ συνεπώς το } \ln \alpha \text{ ανήκει στο } \Delta.$$

$$\beta > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \beta > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \beta > -1, \text{ συνεπώς και το } \ln \beta \text{ ανήκει στο } \Delta.$$

Λόγω του ερωτήματος **α**, θα είναι :

$$f(\ln \alpha) + f(\ln \beta) \geq 2f\left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \frac{2 - \left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \frac{2 - \left(\frac{\ln(\alpha\beta)}{2}\right)^2}{\frac{\ln(\alpha\beta)}{2} + 1} \Leftrightarrow \frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \frac{2 - (\ln \sqrt{\alpha\beta})^2}{\ln \sqrt{\alpha\beta} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \frac{2 - \ln^2 \sqrt{\alpha\beta}}{\ln \sqrt{\alpha\beta} + 1}}.$$

1756. i. Έστω ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$.

Έχουμε :

$$f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy} \xrightarrow{x=\alpha, y=1} f(\alpha)^0 = f(\alpha)^0 f(1) - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = 0, \text{ άτοπο, άρα δεν υπάρχει } \alpha > 0 \text{ τέτοιο ώστε } f(\alpha) = 0.$$

Συνεπώς είναι $\boxed{f(x) \neq 0}$ για κάθε $x > 0$.

Επιπλέον έχουμε :

$$f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy} \xrightarrow{x=1, y=1} f(1) = f(1)f(1) - \frac{2}{1} \Leftrightarrow f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(f(1)-2)(f(1)+1)=0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=2}$ ή $f(1)=-1 < 0$, το οποίο απορρίπτεται αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ii. Είναι :

$$f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2+y^2}{xy} \stackrel{y=1}{\Rightarrow} f(x) = f(x)f(1) - \frac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2f(x) - \frac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)}.$$

iii. Η $g(x) = (f(x))^{2016} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,1)$ και είναι δύο

φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$g'(x) = 2016 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2015} \text{ και}$$

$$g''(x) = 2016 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2015} + 2015 \cdot 2016 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2014} > 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in (0,1)$.

Συνεπώς η g είναι **κυρτή** στο $(0,1)$.

iv. Αν $x=y$ τότε η ισότητα ισχύει.

Αν $x \neq y$ τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $x < y$.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την g στα διαστήματα $\left[x, \frac{x+y}{2}\right]$ και

$$\left[\frac{x+y}{2}, y\right].$$

– Η g είναι συνεχής στο $\left[x, \frac{x+y}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x, \frac{x+y}{2}\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x, \frac{x+y}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{\frac{x+y}{2} - x} = \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{\frac{y-x}{2}} = 2 \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{y-x}$$

– Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{x+y}{2}, y\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{x+y}{2}, y\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{x+y}{2}, y\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{y - \frac{x+y}{2}} = \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}} = 2 \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{y-x}.$$

Η g είναι κυρτή στο $(0,1)$, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 \quad & \overset{g' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad g'(\xi_1) < g'(\xi_2) \Leftrightarrow 2 \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{y-x} < 2 \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{y-x} \quad \overset{y-x>0}{\Leftrightarrow} \\ & g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x) < g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow g(x) + g(y) > 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow \\ & g\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{g(x) + g(y)}{2}. \end{aligned}$$

Άρα είναι $\boxed{g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}}$ για κάθε $x, y \in (0,1)$.

v. Είναι :

$$x > 0 \quad \overset{x+y=1}{\Leftrightarrow} \quad 1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1 \text{ και}$$

$$y > 0 \quad \overset{x+y=1}{\Leftrightarrow} \quad 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1, \text{ συνεπώς το } x, y \in (0,1).$$

Λόγω του ερωτήματος **α.** θα είναι :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{g(x) + g(y)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2} + \frac{1}{x+y}\right)^{2016} \leq \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016}}{2} \Leftrightarrow \\ 2\left(\frac{1}{2} + 2\right)^{2016} &\leq \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016} \geq 2\left(\frac{5}{2}\right)^{2016} \Leftrightarrow \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016} &\geq 2 \cdot \frac{5^{2016}}{2^{2016}} \Leftrightarrow \boxed{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016} \geq \frac{5^{2016}}{2^{2015}}}. \end{aligned}$$

1757. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

$$\text{και παράγωγο } f'(x) = \frac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{(g(x))^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ αφού}$$

$$g''(x)g(x) - (g'(x))^2 > 0.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln(g(x))$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και παράγωγο :

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}, \text{ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Αν } x_1 = x_2 \text{ τότε } g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = g\left(\frac{x_1 + x_1}{2}\right) = g(x_1) \text{ και}$$

$$\sqrt{g(x_1)g(x_2)} = \sqrt{g(x_1)g(x_1)} = \sqrt{g^2(x_1)} \stackrel{g(x)>0}{=} g(x_1), \text{ δηλαδή η ισότητα ισχύει.}$$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $x_1 < x_2$.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την h στα διαστήματα $\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right]$.

– Η h είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1} = \frac{h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = 2 \frac{h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - h(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

– Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = 2 \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}.$$

Έτσι είναι :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{h' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - h(x_1)}{x_2 - x_1} < 2 \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \stackrel{x_2 - x_1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - h(x_1) < h(x_2) - h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \Leftrightarrow 2h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < h(x_1) + h(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
2 \ln \left(g \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right) &< \ln(g(x_1)) + \ln(g(x_2)) \Leftrightarrow \\
\ln \left(g \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right)^2 &< \ln(g(x_1)g(x_2)) \Leftrightarrow \left(g \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right)^2 < g(x_1)g(x_2) \stackrel{g(x) > 0}{\Leftrightarrow} \\
g \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) &< \sqrt{g(x_1)g(x_2)}.
\end{aligned}$$

Άρα είναι $\boxed{g \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

1758. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[-2, 2]$ και $[2, 5]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{-f(-2)}{4} = -\frac{f(-2)}{4}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 5)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{f(5)}{3}.$$

Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[-2, 5]$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 5]$. Οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}
\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) &\Leftrightarrow -\frac{f(-2)}{4} > \frac{f(5)}{3} \Leftrightarrow -3f(-2) > 4f(5) \Leftrightarrow \\
&\boxed{4f(5) + 3f(-2) < 0}.
\end{aligned}$$

1759. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[0, \frac{3x}{4}\right]$ και

$$\left[\frac{3x}{4}, x\right].$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3x}{4}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3x}{4}\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(0, \frac{3x}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{3x}{4}\right) - f(0)}{\frac{3x}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{f\left(\frac{3x}{4}\right)}{x}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{3x}{4}, x\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{3x}{4}, x\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{3x}{4}, x\right)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f\left(\frac{3x}{4}\right)}{x - \frac{3x}{4}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{3x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} = 4 \frac{f(x) - f\left(\frac{3x}{4}\right)}{x}.$$

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{f\left(\frac{3x}{4}\right)}{x} < 4 \frac{f(x) - f\left(\frac{3x}{4}\right)}{x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \\ f\left(\frac{3x}{4}\right) &< 3f(x) - 3f\left(\frac{3x}{4}\right) \Leftrightarrow 3f(x) > 4f\left(\frac{3x}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > \frac{4}{3}f\left(\frac{3x}{4}\right)}, \text{ για κάθε } \\ &x > 0. \end{aligned}$$

1760. i. Η $f(x) = x + 2 + 2\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty) \text{ και}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι κοίλη στο } (0, +\infty).$$

ii. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + 2\ln x) = 0 + 2 - \infty = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 + 2\ln x) = +\infty + 2 + \infty = +\infty.$$

Οπότε $f(A) = f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ το σύνολο

τιμών της f .

Αφού το $0 \in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, +\infty)$, η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και άρα 1–1.

iii. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{x \ln x}{x+2}$ έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x + 2) - x \ln x}{(x + 2)^2} = \frac{\cancel{x} \ln \cancel{x} + 2 \ln x + x + 2 - \cancel{x} \ln \cancel{x}}{(x + 2)^2} = \frac{f(x)}{(x + 2)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}}, \text{ όπου } x_0 \text{ είναι η μοναδική}$$

ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Επιπλέον είναι :

$$- \text{ Για } \boxed{0 < x < x_0} \text{ έχουμε : } x < x_0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > x_0} \text{ έχουμε : } x > x_0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	x_0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		T.E.	

Συνεπώς :

- ο Η g παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = x_0$ το $g(x_0)$ και είναι $g(x) \geq g(x_0)$ για κάθε $x > 0$.

iv. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[x - 2, x + 1]$ και $[x + 1, x + 4]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x - 2, x + 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x - 2, x + 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x - 2, x + 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x + 1) - f(x - 2)}{x + 1 - (x - 2)} = \frac{f(x + 1) - f(x - 2)}{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 2} = \frac{1}{3}(f(x + 1) - f(x - 2)).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x + 1, x + 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(x + 1, x + 4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x + 1, x + 4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x + 4) - f(x + 1)}{x + 4 - (x + 1)} = \frac{f(x + 4) - f(x + 1)}{\cancel{x} + 4 - \cancel{x} - 1} = \frac{1}{3}(f(x + 4) - f(x + 1)).$$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Οπότε έχουμε :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}(f(x + 1) - f(x - 2)) > \frac{1}{3}(f(x + 4) - f(x + 1)) \Leftrightarrow$$

$$f(x + 1) - f(x - 2) > f(x + 4) - f(x + 1) \Leftrightarrow \boxed{f(x - 2) + f(x + 4) < 2f(x + 1)}, \text{ για}$$

κάθε $x > 2$.

Εύρεση ασυμπτώτων

1761. i. Η $f(x) = \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4} \stackrel{\left(\frac{29}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \frac{6x^2 + 2x + 1}{2} \right] = (-\infty) \cdot \frac{29}{2} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 3}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6\cancel{x^2} + 2x + 1 - 6\cancel{x^2} + 12x}{2x - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{14x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{14\cancel{x}}{2\cancel{x}} = 7 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 7}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x + 7}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 7.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x + 7}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

ii. Η $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (x^2 + 1) = (-\infty) \cdot 1 = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

iii. Η $f(x) = \frac{x(2x^2+1)}{x^2+1} = \frac{2x^3+x}{x^2+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3+x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+x}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x^3}+x}{\cancel{x^3}+x} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=2}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^3+x}{x^2+1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x^3}+x-2\cancel{x^3}-2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=2x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y=2x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

iv. Η $f(x) = \frac{3x^4-x^3-2}{x^3-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0,1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4-x^3-2}{x^3-x^2} \stackrel{\left(\frac{-2}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4-x^3-2}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{3x^4-x^3-2}{x-1} = \\ &= (+\infty) \cdot 2 = +\infty. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0 \text{ (άξονας } y'y)}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4-x^3-2}{x^3-x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^3-3x^2}{3x^2-2x} = 9.$$

Άρα η ευθεία $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^4-x^3-2}{x^3-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4-x^3-2}{x^4-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=3}}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^4 - x^3 - 2}{x^3 - x^2} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{3x^4} - x^3 - 2 - \cancel{3x^4} + 3x^3}{x^3 - x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}}.\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x + 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 2$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x + 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

v. Η $f(x) = \frac{2x^5 - 1}{x^2 - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^5 - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{-3}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^5 - 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x^5 - 1}{x-1} = (-\infty) \cdot \frac{3}{2} = -\infty,$$

$$\text{αφού } x \rightarrow -1^- \Rightarrow x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = -1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^5 - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^5 - 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2x^5 - 1}{x+1} = (-\infty) \cdot \frac{1}{2} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = 1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^5 - 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty.$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Άρα η C_f **δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες**.

- Θα μπορούσαμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή της f είναι πάνω από δύο μονάδες μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή της, άρα δε θα υπάρχουν ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

vi. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$x \neq 3 \text{ και } x \neq 1. \text{ Άρα η } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } A = \mathbb{R} - \{1, 3\} \text{ και}$$

είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3}{2x - 4} = -\frac{5}{2}.$$

Άρα η ευθεία $x = 1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\left(\frac{14}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} = \\ &= (-\infty) \cdot 7 = -\infty, \text{ αφού} \end{aligned}$$

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=3}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{3}}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 1}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

- Θα μπορούσαμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή της f είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή της, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

vii. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$x \neq 2 \text{ και } x \neq 1. \text{ Άρα η } f(x) = \frac{3x-4}{x^2-3x+2} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } A = \mathbb{R} - \{1, 2\} \text{ και}$$

είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-4}{x^2-3x+2} \stackrel{\left(\frac{-1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-4}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{3x-4}{x-2} = (-\infty) \cdot 1 = -\infty,$$

$$\text{αφού } x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-4}{x^2-3x+2} \stackrel{\left(\frac{2}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-4}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{3x-4}{x-1} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty,$$

$$\text{αφού } x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Rightarrow x-2 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-4}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\lambda=0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

viii. Η $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1. \text{ Άρα η } C_f \text{ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.}$$

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \eta\mu x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=0}}, \text{ αφού είναι μηδενική}$$

επι φραγμένη με απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} |\eta\mu x| \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x^2} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x^2} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \eta\mu x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}, \text{ αφού είναι μηδενική επι}$$

φραγμένη με απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} |\eta\mu x| \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0 \text{ (άξονας } x'x)}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

ix. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x^2 + 4x + 5 \geq 0$. Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει αρνητική διακρίνουσα, συνεπώς θα είναι πάντα θετικό. Άρα η $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{1+0+0} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x \right)^{(+\infty) + (-\infty)} =$$

(Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} = +\infty$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)} = \\ &= \frac{4+0}{-(\sqrt{1+0+0}+1)} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = -2}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -x - 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}}{\cancel{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}} = \sqrt{1+0+0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x \right)^{(+\infty) - (+\infty)} =$$

(Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} = +\infty$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 \right)} = \\ &= \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

x. Η $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{\cancel{x}} = -(\sqrt{1+0}+1) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)^{(+\infty) + (-\infty)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \\
&= 0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.
\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = -2x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)}{\cancel{x}} = \sqrt{1 + 0} - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)^{(+\infty) - (+\infty)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.
\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

xi. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$. Πρέπει να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - x + 5 \binom{7}{0}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} (3x^2 - x + 5) = (-\infty) \cdot 7 = -\infty, \text{ αφού} \\
x \rightarrow 1^- &\Rightarrow x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x - 1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} \rightarrow -\infty.
\end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{x^2} - \cancel{x} + 5}{\cancel{x^2} - \cancel{x}} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 3}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 5}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{x^2} - \cancel{x} + 5 - 3\cancel{x^2} + 3\cancel{x}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x} + 5}{\cancel{x} - 1} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x + 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 5}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 5}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6\cancel{x} - 5}{2\cancel{x^2} + 3\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 5}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6\cancel{x} - 5}{2\cancel{x} + 3} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 3}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

xiii. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$. Πρέπει να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \left(x^2 - 3x + 4 \right) = (-\infty) \cdot 2 = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$. Άρα η ευθεία $\boxed{x = 2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 3\cancel{x} + 4}{\cancel{x^2} - 2\cancel{x}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 3\cancel{x} + 4 - \cancel{x^2} + 2\cancel{x}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 4}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} + 4}{\cancel{x} - 2} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = -1}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x - 1}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) \stackrel{(+\infty) - (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1} = 0 \cdot (-2) \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

1762. i. Η $f(x) = e^x - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} e^x = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - \cancel{x} + \cancel{x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = (+\infty) - 1 = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Άρα η C_f **δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$.

ii. Η $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{1}{u} e^u = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{e^u}{u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0^-}} e^u = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{1}{u} (e^u - 1) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u - 1}{u} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &\stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u}{1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=1}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x+1}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x+1}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

iii. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x > 0$ και $x(1 - \ln x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και

$$(1 - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e). \text{ Άρα η } f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \text{ έχει πεδίο ορισμού}$$

το $A = (0, e) \cup (e, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \ln x} = \frac{1}{e} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow e^- \Rightarrow x < e \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow 1 - \ln x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1 - \ln x} \rightarrow +\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=e}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x(1 - \ln x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2(1 - \ln x)} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=0}}, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = 1 - (+\infty) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (1 - \ln x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = 1 - (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 0 \text{ (άξονας } x'x)}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

iv. Η $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0, \text{ αφού είναι μηδενική επι φραγμένη με απόδειξη :}$$

$$\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x^2| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \Leftrightarrow \left| x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \Leftrightarrow -|x^2| \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x^2|,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x^2|) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} |x^2| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα η C_f **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta\mu \frac{1}{x} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{1}{u} \eta\mu u = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\eta\mu \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{1}{u^2} (\eta\mu u - u) =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\substack{\text{DLH} \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{\sigma\eta\nu u - 1}{2u} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\substack{\text{DLH} \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{-\eta\mu u}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

v. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $\frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 1) > 0$ με $x \neq 0$. Οπότε

$$\text{μηδενίζουμε το γινόμενο : } x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}.$$

$$\text{Επιπλέον είναι } e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \text{ και } e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}, \text{ έτσι κάνουμε τον}$$

πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
x	-		+	+
$ex-1$	-		-	+
γινόμενο	+		-	+

Είναι $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Συνεπώς η $f(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{ex-1}{x}$ έχει πεδίο

ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} \ln \frac{ex-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \frac{ex-1}{x}}{\frac{2}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{ex-1} \cdot \frac{ex-1}{x^2} + 1}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{x}{2(ex-1)} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ex-1}{x} \stackrel{u = \frac{ex-1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ex-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} (ex-1) = (-\infty) \cdot (-1) = +\infty \right)$$

Άρα η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{x}{2} \ln \frac{ex-1}{x} = \frac{1}{2e} \cdot (-\infty) = -\infty, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \ln \frac{ex-1}{x} \stackrel{u = \frac{ex-1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{e}^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$$

$$\text{, αφού } x \rightarrow \frac{1}{e}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow x - \frac{1}{e} > 0 \Leftrightarrow ex - 1 > 0 \Rightarrow ex - 1 \rightarrow 0^+.$$

Άρα η ευθεία $x = \frac{1}{e}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{ex-1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{ex-1}{x} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}}, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ex-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e}{1} = e.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{2} \ln \frac{ex-1}{x} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} \left(\ln \frac{ex-1}{x} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{ex-1}{x} - 1}{\frac{2}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{ex-1} \cdot \frac{ex-1}{x^2} + 1}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2ex-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{-x}}{2e\cancel{x}} = -\frac{1}{2e} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = -\frac{1}{2e}}}.$$

Άρα η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2e}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2e}$.

Άρα η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2e}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

- 1763. i.** Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x^3 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 2(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -2$.

Άρα η $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x + 2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ και είναι συνεχής

σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 5}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} \cdot \frac{3x^2 - 5}{(x-1)^2} = (-\infty) \cdot \frac{7}{9} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow -2^- \Rightarrow x < -2 \Leftrightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x+2 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = -2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 5}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{3x^2 - 5}{x+2} = (+\infty) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = 1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- ii.** Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $\frac{x-1}{3-x} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) > 0$, με $x \neq 3$.

Οπότε μηδενίζουμε το γινόμενο : $(x-1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$ ή $x=3$ και κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$(x-1)(3-x)$	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$	-

Άρα $x \in (1, 3)$, έτσι η $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$

έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, 3)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} \stackrel{u = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} \stackrel{u = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 3^- \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=3}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- 1764. i.** Η $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1 - (x^3 - 2x - x^2 + 2)}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} + x^2 + x + 1 - \cancel{x^3} + 2x + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x^2} + 3\cancel{x} - 1}{\cancel{x^2} - 1} = 2. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=2}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y=2}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

- ii.** Η $f(x) = e^{-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} \stackrel{u = -x^2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

- iii.** Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x^2 - 4x + 5 \geq 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 5$ έχει αρνητική διακρίνουσα, συνεπώς θα ισχύει πάντα $x^2 - 4x + 5 > 0$. Άρα η

$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = (-\infty) \cdot 2 = -\infty .$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4x + 5})(x + \sqrt{x^2 - 4x + 5})}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 5}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 - \frac{5}{x} \right)}{x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 - \frac{5}{x} \right)}{x + x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(4 - \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)} = \frac{4 - 0}{1 + \sqrt{1 - 0 + 0}} = 2 . \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

1765. Η $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0 . \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty .$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0^-}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0^-} e^u = 1 .$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

1766. i. Η $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-2)\ln x + x - 3) = (-2) \cdot (-\infty) + 0 - 3 = +\infty .$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)\ln x + x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \ln x + 1 - \frac{3}{x} \right) = 1 \cdot (+\infty) + 1 - 0 = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

ii. Η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 = \ln x + 1 - \frac{2}{x} + 1 = \ln x - \frac{2}{x} + 2.$$

$$\text{Επιπλέον είναι : } f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ και άρα 1-1.

Είναι $f'(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $f'(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι 1-1. Οπότε :

– Για $\boxed{0 < x < 1}$ έχουμε : $x < 1 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$.

– Για $\boxed{x > 1}$ έχουμε : $x > 1 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$.

iii. Έχουμε $f(1) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-2)\ln x + x - 3) = (-2) \cdot (-\infty) + 0 - 3 = +\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-2)\ln x + x - 3) = (+\infty) \cdot (+\infty) + \infty - 3 = +\infty.$$

$$\text{Άρα : } f(A_1) = f\left((0, 1]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=}} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-2, +\infty),$$

$$f(A_2) = f\left([1, +\infty)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=}} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty).$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A_1 .
 - Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .
- Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο θετικές ρίζες**.

iv. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, με $0 < x_1 < 1$ και $x_2 > 1$, οπότε θα είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf'(x) - f(x)$.

Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(x_1) = x_1 f'(x_1) - \cancel{f(x_1)}^0 = x_1 f'(x_1) < 0$, αφού $x_1 > 0$ και $f'(x_1) < 0$ και

$g(x_2) = x_2 f'(x_2) - \cancel{f(x_2)}^0 = x_2 f'(x_2) > 0$, αφού $x_2 > 0$ και $f'(x_2) > 0$. Δηλαδή

$g(x_1)g(x_2) < 0$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0}$.

Ακόμη είναι $g'(x) = \cancel{f'(x)} + f''(x) - \cancel{f'(x)} = f''(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, οπότε η g

είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1, οπότε η παραπάνω **ρίζα**

$\xi \in (x_1, x_2)$ είναι **μοναδική**.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι η :

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x - f'(\xi)\xi + f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$y = f'(\xi)x - \cancel{(\xi f'(\xi) - f(\xi))}^0 \Leftrightarrow y = f'(\xi)x, \text{ δηλαδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων.}$$

- 1767. i.** Η $f(x) = \frac{x^2+3}{x} + 2x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 3}{x^2} + 2 = \frac{x^2 - 3 + 2x^2}{x^2} = \frac{3x^2 - 3}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)}{x^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3(x^2 - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } \underline{x=-1}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
x^2	+	+		+	+	
$3(x^2-1)$	+	○	-	-	○	+
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f(x)$		↗ T.M.	↘	↘ T.E.	↗	

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = -1$ το $f(-1) = -6$.
- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 1$ το $f(1) = 6$.

ii. Εξετάζουμε την ύπαρξη ασυμπτωτών :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2+3}{x} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{3}{x} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + \frac{3}{x} \right) = 0 - \infty = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+3+2x^2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 3}{x} + 2x - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3 - \cancel{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

iii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι η :

$$y = \cancel{f'(1)}^0 (x - 1) + f(1) \Leftrightarrow \boxed{y = 6}.$$

$$\text{iv. Είναι : } \lambda_{AB} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{10 - 6}{2} = 2.$$

Για να είναι παράλληλη η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με το ευθύγραμμο τμήμα AB πρέπει :

$$f'(\xi) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow f'(\xi) = 2 \Leftrightarrow \frac{3\xi^2 - 3}{\xi^2} = 2 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 3 = 2\xi^2 \Leftrightarrow \xi^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\xi = \sqrt{3}, \text{ αφού είναι } \xi > 0.$$

$$\text{Οπότε είναι και } f(\sqrt{3}) = \frac{3+3}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = \frac{6+6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Άρα $\boxed{M(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})}$ το ζητούμενο σημείο.

1768. i. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{3}{4}x + \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} \right) = \underline{\underline{-\frac{3}{4} + \lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{-\frac{3}{4}} + \lambda = \cancel{-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0}.$$

$$\text{ii. Για } \lambda = 0 \text{ έχουμε } f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x & , x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x} & , x > 1 \end{cases}.$$

α. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x < 1$ ως πολωνυμική και για $x > 1$ ως ρητή.

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{3}{4}(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = -\frac{3}{4} \text{ και}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} + \frac{3}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4 + 3x}{4x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{4x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 4)(\cancel{x - 1})}{4x(\cancel{x - 1})} = -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με

$f'(1) = -\frac{3}{4}$. Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε :

- Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4}{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 8\cancel{x} + 4}{4\cancel{x^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{1}{4}}}. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{4}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} - \frac{1}{4}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 8\cancel{x} + 4 - \cancel{x^2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x + 4}{4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8\cancel{x}}{4\cancel{x}} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = -2}}.\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = \frac{1}{4}x - 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

1769. α. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x \neq 0$, άρα $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$.

β. Η $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)x - (x^2 + 2x + k)}{x^2} = \frac{2x^2 + 2\cancel{x} - x^2 - 2\cancel{x} - k}{x^2} = \frac{x^2 - k}{x^2}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στο άξονα $x'x$ όταν

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - k}{1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = 1}.$$

γ. Για $k=1$ είναι $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$.

ι. Η $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2x + 1) \right] = (-\infty) \cdot 1 = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = 0 \text{ (άξονας } y'y)}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+2x+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+1}{\cancel{x^2}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2+2x+1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=2}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Όμοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 2$.

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

ii. Η παράγωγος της $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ είναι η $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, οπότε έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}}.$$

Έτσι κάνουμε τον πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
x^2-1	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Παρατηρούμε πως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

1770. i. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 3) = \alpha + \beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha + \beta = 5}.$$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 + \beta - \alpha - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2\alpha$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3 - (\alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 2.$$

Οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}.$$

Έτσι θα είναι και $\beta = 5 - \alpha \Rightarrow \beta = 5 - 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 4}$.

iii. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, άρα :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x} & , x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1] \\ \frac{2x + 3}{x} & , x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Εξετάζουμε τη συνέχεια της g στο $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{x} = 5 \text{ και } g(1) = 5.$$

Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$ άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} (x^2 + 4) = (-\infty) \cdot 4 = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_g .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}.$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_g στο $-\infty$.

Επιπλέον έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x + 3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}}.$$

Άρα η ευθεία $y = 2$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_g στο $+\infty$.

1771. i. Η $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

$$\text{συνεχής) με παράγωγο } f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^3 - 1$	-		$\oplus$	+
$f'(x)$	-		$\oplus$	+
f(x)				

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, 1]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

και

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)=3$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι η εξής :

$$\varepsilon : y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x - 7 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon : y = \frac{7}{2}x - 2}.$$

iii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_f :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) = 0 + (-\infty) = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{2}{x^2} \right) = (-\infty) + 0 = -\infty.$$

Άρα η C_f **δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη** στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x^2} \right) = (+\infty) + 0 = +\infty.$$

Άρα η C_f **δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$.

iii. Έχουμε $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 2x$ οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2} + 2x - 3}{x^2 - 1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{2}{x^3} + 2}{2x} = 0.$$

1772. i. Έχουμε :

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[x^2f(x) - x^3 + f(x) \right]' = 0 \Leftrightarrow x^2f(x) - x^3 + f(x) = c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow$$

$$c = 2f(1) - 1 \Leftrightarrow c = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c=0}}. \text{ Άρα :}$$

$$x^2f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}}.$$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0, \text{ με την ισότητα να}$$

ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_f :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}+x} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{-x}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $+\infty$.

iii. Έχουμε :

$$f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \leq f\left(8(x^2+1)^2\right) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} 5(x^2+1)^3 - 8 \leq 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2+1)^3 \leq 8(x^2+1)^2 + 8 \Leftrightarrow 5(x^2+1)^3 \leq 8\left[(x^2+1)^2 + 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow f(x^2+1) \leq f(2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2+1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{-1 \leq x \leq 1}.$$

iv. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 3x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \sqrt{\frac{1+0}{1+0+0}} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{f'(x)} - \kappa \right) = 5 \Leftrightarrow 1 - \kappa = 5 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = -4}.$$

1773. i. Η $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\cancel{e^x} + 1 - \cancel{e^x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0$ και

$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η h είναι **κοίλη** στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \stackrel{h'(x) > 0}{\Leftrightarrow} \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{2h'(x) < 1} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \stackrel{h''(x) < 0}{\Leftrightarrow} \stackrel{h' \text{ γν.φθ.}}{\boxed{x > 0}}.$$

iii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_h :

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \ln(e^x + 1) \right) = 1 - 0 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{u = e^x + 1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 1}} \ln u = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cancel{x} - \ln(e^x + 1) - \cancel{x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) \stackrel{u = e^x + 1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 1}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} (-\ln u) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \stackrel{u = \frac{e^x}{e^x + 1}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 1}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x} + 1} = 1. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 0 \text{ (άξονας } x'x)}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_h στο $+\infty$.

1774. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cancel{x} + \cancel{x} - \frac{2e^x}{1+e^x} - \cancel{x} - \cancel{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{1+e^x} \right) = -\frac{2 \cdot 0}{1+0} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = x+1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cancel{x} + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x} - \cancel{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2e^x}{1+e^x} + 2 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2e^x + 2 + 2e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^x} = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = 1 + (+\infty) = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

1775. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 3x}{e^x + 1}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$.

$$\text{Είναι : } g(x) = \frac{f(x) - 3x}{e^x + 1} \Leftrightarrow (e^x + 1)g(x) = f(x) - 3x \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 3x - 2 = (e^x + 1)g(x) - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((e^x + 1)g(x) - 2) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x - 2) = (0 + 1) \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (3x - 2)] = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

1776. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 5)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x - \frac{\eta\mu x}{x} + \cancel{2x} + \cancel{5} - \cancel{2x} - \cancel{5} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 - 0 = 0, \text{ όπου} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} 2^u = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0 \text{ αφού είναι}$$

μηδενική επι φραγμένη με απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

1777. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cancel{2x} + e^x \sin x - \cancel{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \sin x) = 0, \text{ αφού είναι}$$

μηδενική επι φραγμένη με απόδειξη :

$$|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow |e^x| |\sin x| \leq |e^x| \Leftrightarrow |e^x \sin x| \leq |e^x| \Leftrightarrow -|e^x| \leq e^x \sin x \leq |e^x|,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-|e^x|) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} |e^x| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin x = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 2x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

ii. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με την ε , εργαζόμαστε ως εξής :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \cancel{2x} + e^x \sin x = \cancel{2x} \Leftrightarrow e^x \sin x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, δηλαδή οι C_f και ε έχουν **άπειρα κοινά σημεία**, όλα τα σημεία με

τετμημένη $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

1778. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}\eta\mu x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}\eta\mu x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \eta\mu x + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x x} \eta\mu x + 1 \right) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}, \text{ αφού}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ οπότε έχουμε **μηδενική επι φραγμένη** με απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{e^x x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{e^x x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{e^x x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{e^x x} \right| \Leftrightarrow - \left| \frac{1}{e^x x} \right| \leq \frac{1}{e^x x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{e^x x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \left| \frac{1}{e^x x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{e^x x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{θα είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x x} \eta\mu x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}\eta\mu x + \cancel{x} - \cancel{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \eta\mu x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}, \text{ αφού έχουμε}$$

μηδενική επι φραγμένη με απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{e^x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{e^x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{e^x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{e^x} \right| \Leftrightarrow - \left| \frac{1}{e^x} \right| \leq \frac{1}{e^x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{e^x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \left| \frac{1}{e^x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{e^x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \eta\mu x = 0$. Άρα η ευθεία $y=x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

ii. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=x$, εργαζόμαστε ως εξής :

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x}\eta\mu x + \cancel{x} = \cancel{x} \Leftrightarrow e^{-x}\eta\mu x = 0 \stackrel{e^{-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z},$$

δηλαδή οι C_f και η ευθεία $y=x$ έχουν **άπειρα κοινά σημεία**, όλα τα σημεία με τετμημένη $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

1779. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)} = 0 \text{ και } f(2) = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, δηλαδή η f είναι **συνεχής** στο $x_0 = 2$.

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - \cancel{f(2)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{4 - x^2}{8}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{8(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{8(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(\cancel{x-2})(2+x)}{8(\cancel{x-2})} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x-1)} = -\frac{1}{2}.$$

Οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}, \text{ άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2 \text{ με}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2}.$$

ii. Για $x < 2$ είναι $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη ως

πολυωνυμική τότε είναι και $f'(x) = -\frac{1}{4}x$. Οπότε $f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = 0$, συνεπώς η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ είναι η :

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

iii. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + 2 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 + x + 4x - 4}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2(x-1)} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

1780. α. Η $f(x) = x^2 - 2\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}} \text{ ή } x = -1, \text{ το}$$

οποίο απορρίπτεται αφού $x > 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		-	+
x		+	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

ο f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 1$.

Θα είναι λοιπόν

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq 1} \text{ για κάθε } x > 0.$$

β. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_f :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2\ln x) = 0 - 2 \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = (+\infty) - 2 \cdot 0 = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα η C_f **δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες**.

γ. i. Αφού η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ τότε είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ οπότε

έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(x)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \left(2x - \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Έτσι παίρνουμε : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} = k}.$$

ii. Η g είναι συνεχής στο $[0, e]$ με $g(0) = -\frac{1}{2} < 0$ και $g(e) = \frac{1}{f(e)} = \frac{1}{e^2 - 2} > 0$,

οπότε $g(0)g(e) < 0$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, e)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Δηλαδή η g έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** στο $(0, e)$.

1781. α. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ όπου L πραγματικός αριθμός. Έχουμε :

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2) \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow L}} e^u = e^L \in \mathbb{R}, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} \in \mathbb{R}.$$

Ο παρονομαστής είναι πρώτου βαθμού πολυώνυμο άρα πρέπει και ο αριθμητής να είναι πρώτου βαθμού πολυώνυμο, συνεπώς πρέπει $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-1}$.

β. i. Η $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0, \text{ για κάθε } x > -1 \text{ (} x+1 > 0 \text{ και } x+2 > 1 \text{)}.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-1, +\infty)$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1) - \ln(x+2)] = (-\infty) - 0 = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -1^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty,$$

όπου $x \rightarrow -1^+ \Rightarrow x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^+$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln 1 = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Οπότε $f((-1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$ το σύνολο τιμών της f .

ii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της C_f :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = -1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

iii. Έχουμε $f(x) = -x^2$. Είναι $-x^2 \in (-\infty, 0)$ αφού $x \neq 0$, δηλαδή ανήκει στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = -x^2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $A = (-1, +\infty)$ η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

1782. Έχουμε: $2x+3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2} \Leftrightarrow 2x+3 \leq f(x) \leq 2x+3+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$$0 \leq f(x) - (2x+3) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα

είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+3)] = 0$. Άρα η ευθεία $y=2x+3$ είναι **πλάγια**

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Όμοια βρίσκουμε και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x+3)] = 0$.

Άρα η ευθεία $y=2x+3$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $-\infty$.

1783. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $e^x - x - 1 \neq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = e^x - 1$.

$$\text{Έτσι έχουμε: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 0}.$$

Επιπλέον έχουμε:

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ και

$$\bullet \quad e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$
$g(x)$	$\swarrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

ο Η g παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=0$ το $g(0)=0$.

Θα είναι λοιπόν $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα η $f(x) = \frac{x^2+2}{e^x-x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό.

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2}{e^x-x-1} \stackrel{\left(\frac{2}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x-x-1} (x^2+2) = (+\infty) \cdot 2 = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\text{για } x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$e^x - x - 1 \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{e^x - x - 1} \rightarrow +\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

1784. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - x + 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$		T.M.	

Συνεπώς :

ο Η g παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x=1$ το $g(1)=0$.

Θα είναι λοιπόν $g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = x - 1$ είναι το **$x=1$** .

ii. Αφού η εξίσωση $\ln x - x + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$, τότε η συνάρτηση

$f(x) = \frac{1}{\ln x - x + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x - x + 1} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) = (-\infty) - 0 + 1 = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x - x + 1} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\text{για } x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \stackrel{g \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\ln x - x + 1 \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{\ln x - x + 1} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x - x + 1} = 0, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = (+\infty) \cdot (0 - 1 + 0) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

1785. α. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cancel{a}^x \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(ax)}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x \ln(ax)}{2x\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x \ln(ax)}{2x^2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2 - \ln(ax)}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Αφού η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη της ευθείας $y=x$, τότε

$$\text{είναι : } f'(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \ln \alpha = 2 \Leftrightarrow \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}.$$

α. Για $\alpha=1$ είναι $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$.

i. Η $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$.

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^2}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^2 \Leftrightarrow x < e^2$ και
- $2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x > e^2$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	e^2	$+\infty$
$2 - \ln x$		+	$\ominus$
x		+	+
$f'(x)$		+	$\ominus$
f(x)		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $A_1 = (0, e^2]$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_2 = [e^2, +\infty)$.

και

ο Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = e^2$ το $f(e^2) = \frac{2}{e}$.

ii. Έχουμε $f(e^2) = \frac{2}{e}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f\left((0, e^2]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e^2)\right] = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right],$$

$$f(A_2) = f\left([e^2, +\infty)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(f(e^2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left(\frac{2}{e}, 0\right).$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$ το **σύνολο τιμών** της f. Επιπλέον είναι :

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας y'y) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας x'x) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

iii. Έχουμε :

$$\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}} > \left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}} > \ln\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\kappa+1} \ln\left(\sqrt{\kappa}\right) > \sqrt{\kappa} \ln\left(\sqrt{\kappa+1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\kappa+1} \ln \kappa > \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} \ln(\kappa+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \kappa}{\sqrt{\kappa}} > \frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}} \Leftrightarrow f(\kappa) > f(\kappa+1) \text{ το οποίο ισχύει αφού } \kappa+1 > \kappa \geq 8 > e^2, \text{ οπότε}$$

$$\kappa < \kappa+1 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(\kappa) > f(\kappa+1) \text{ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο } [e^2, +\infty).$$

1786. i. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 5$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, απ' όπου παίρνουμε

$$f(x) = h(x) + 2x \text{ άρα και } f(x+1) = h(x+1) + 2x + 2. \text{ Είναι :}$$

$$f(x+1) - f(x) = h(x+1) + 2x + 2 - h(x) - 2x \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) - f(x) = h(x+1) - h(x) + 2. \text{ Επιπλέον έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x+1) \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} h(u) = 5 \text{ οπότε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x+1) - h(x) + 2) = 5 - 5 + 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2}.$$

ii. Αναζητούμε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$:

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(f(x))^2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 4}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 4x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(f(x))^2}{x} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^2 - 4x^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x) - 2x)(f(x) + 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) \left(\frac{f(x)}{x} + 2 \right) = \\ &= 5 \cdot (2 + 2) = 20 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 20}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 4x + 20}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_g στο $+\infty$.

iii. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x-1, x)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, x+1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε έχουμε :

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)}.$$

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (f(u+1) - f(u)) = 2.$$

Για την $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 2$, οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι

$$\text{και } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2}.$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο $\varphi'(x) = f'(x+1) - f'(x)$. Είναι :

$$x < x+1 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Έχουμε } \varphi(\mathbb{R}) = \varphi((-\infty, +\infty)) \stackrel{\substack{\varphi \text{ συνεχής} \\ \varphi \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), 2 \right) \text{ το}$$

$$\text{σύνολο τιμών της } \varphi, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2.$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει : } \varphi(x) \in \varphi(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(x) < 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x+1) - f(x) < 2}.$$

Εύρεση παραμέτρων και ορίων από δοσμένες ασύμπτωτες

1787. Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x' , δηλαδή την ευθεία $y=0$, είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (2x+1)] = 0.$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x+1}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_g στο $+\infty$.

1788. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x+3$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 3. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + x\eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + 1 + \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 2 + 1 + 0 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 3}},$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{1}{x} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0^+}} \eta\mu u = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + x + x\eta\mu \frac{1}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - 2x + x\eta\mu \frac{1}{x} \right) = \\ &= 3 + 1 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 4}}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\eta\mu \frac{1}{x} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{1}{u} \eta\mu u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = 1. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 3x+4}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_g στο $+\infty$.

1789. Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=3$, είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$

Ακόμη είναι $g(x) = f(x) - \frac{2x^2+1}{x-2}$.

Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - \frac{2x^2+1}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{2x^2+1}{x^2-2x} \right) = 0 - 2 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -2}},$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x^2}+1}{\cancel{x^2}-2x} = 2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{2x^2+1}{x-2} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{-2\cancel{x^2}-1+2\cancel{x^2}-4x}{x-2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{4x+1}{x-2} \right) = 3 - 4 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = -1}}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\cancel{x}+1}{\cancel{x}-2} = 4. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -2x - 1}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_g στο $-\infty$.

1790. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x + 1$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] = 1. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + x\eta\mu x}{x^2f(x) - 5x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^{\cancel{x}} \left(\frac{f(x)}{x} - 3 + \frac{\eta\mu x}{x} \right)}{\cancel{x}^{\cancel{x}} (f(x) - 5x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - 3 + \frac{\eta\mu x}{x}}{f(x) - 5x} = \\ &= \frac{5 - 3 + 0}{1} = 2, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0 \text{ η οποία} \end{aligned}$$

είναι **μηδενική επι φραγμένη** με απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0.$$

1791. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x + 5$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 5. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2 + 1}{x^2f(x) - 3x^3 + 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^{\cancel{x}} \left(\frac{f(x)}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x}^{\cancel{x}} (f(x) - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + 1 + \frac{1}{x^2}}{f(x) - 3x + 2} = \\ &= \frac{3 + 1 + 0}{5 + 2} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

1792. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x - 7$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -7. \text{ Ακόμη έχουμε } g(x) = f(x) - x + 4.$$

α. i. Είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{4}{x} \right) = 3 - 1 + 0 = 2.$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 4 + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x + 4 + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\frac{f(x)}{x} + 2 + \frac{4}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} \right)}{\cancel{x} \left(f(x) - 3x + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + 2 + \frac{4}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x}}{f(x) - 3x + \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{3 + 2 + 0 + 0}{-7 + 0} = -\frac{5}{7}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu 2x = 0 \end{aligned}$$

οποία είναι **μηδενική επι φραγμένη** με απόδειξη :

$$|\eta\mu 2x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} |\eta\mu 2x| \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu 2x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta\mu 2x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu 2x = 0.$$

β. Έχουμε ήδη βρει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}$. Επιπλέον έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 4 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 4) = -7 + 4 = -3 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\beta = -3}}. \text{ Άρα η ευθεία } \boxed{y = 2x - 3} \text{ είναι } \underline{\underline{\text{πλάγια ασύμπτωτη}} \text{ της } C_g \text{ στο } +\infty.$$

1793. i. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 5$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\mu \frac{f(x)}{x} + 4 \right)}{\cancel{x} (f(x) - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \frac{f(x)}{x} + 4}{f(x) - 2x + 3} = \frac{2\mu + 4}{5 + 3} = \\ &= \frac{2\mu + 4}{8} = \frac{\mu + 2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu + 2}{4} = 1 \Leftrightarrow \mu + 2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 2}.$$

1794. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x - 2$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] = -2. \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - \alpha x + 4}{\alpha f(x) + 10x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(f(x) - 5x - \alpha + \frac{4}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\alpha \frac{f(x)}{x} + 10 - \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 5x - \alpha + \frac{4}{x}}{\alpha \frac{f(x)}{x} + 10 - \frac{2}{x}} =$$

$$= \frac{-2 - \alpha}{5\alpha + 10}. \text{ Οπότε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - \alpha x + 4}{\alpha f(x) + 10x - 2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-2 - \alpha}{5\alpha + 10} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 5\alpha + 10 = -8 - 4\alpha \Leftrightarrow$$

$$9\alpha = -18 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2}.$$

1795. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x + 2$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 2. \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} \cdot f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4 + 1} - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{1}{x^2} \right)} \cdot f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)} - x^3 + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} \cdot f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{f(x)}{x} + 3\mu + \frac{4}{x^2} \right)}{\cancel{x} \left(f(x) + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - x + \frac{2}{x^2} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{f(x)}{x} + 3\mu + \frac{4}{x^2}}{f(x) - x + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{9 + 0} \cdot 1 + 3\mu + 0}{2 + \sqrt{1 + 0} + 0} = \frac{3 + 3\mu}{3} = 1 + \mu.$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} \cdot f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4 + 1} - x^3 + 2} = 10 \Leftrightarrow 1 + \mu = 10 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 9}.$$

1796. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \kappa x^2}{f(x) + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} (f(x) - \kappa x)}{\cancel{x} \left(\frac{f(x)}{x} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \kappa x}{\frac{f(x)}{x} + 2}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \kappa x}{\frac{f(x)}{x} + 2} = -1$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x) - \kappa x}{\frac{f(x)}{x} + 2} \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - \kappa x}{\frac{f(x)}{x} + 2} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} + 2 = \frac{f(x) - \kappa x}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - \kappa x}{g(x)} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - \kappa x + 2 - 2}{g(x)} - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - \kappa x + 2 - 2}{g(x)} - 2 \right) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{0-2}{-1} - 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \kappa x + 2$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. Έτσι έχουμε :

$$h(x) = f(x) - \kappa x + 2 \Leftrightarrow f(x) = h(x) + \kappa x - 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) + \kappa x - 2) = 0 + \kappa \cdot (+\infty) - 2. \text{ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :}$$

- Αν $\kappa > 0$ ή $\kappa < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, οπότε δε θα υπάρχουν ασύμπτωτες.
- Αν $\kappa = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2) = 0 - 2 = -2$, συνεπώς η ευθεία

$\boxed{y = -2}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

1797. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 1$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -1.$$

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\alpha x^2} + \beta \cancel{x}}{\cancel{x^2} - 2\cancel{x}} = \alpha.$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + \beta x}{x - 2} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + \beta x - \cancel{2x^2} + 4x}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta + 4)x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta + 4)\cancel{x}}{\cancel{x}} = \beta + 4. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -1 \Rightarrow \beta + 4 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -5}.$$

1798. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x + 2$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 2.$$

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\alpha x^2} + \beta \cancel{x} + 5}{\cancel{x^2} - 2\cancel{x}} = \alpha.$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + \beta x + 5}{x - 2} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x^2} + \beta x + 5 - \cancel{3x^2} + 6x}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta + 6)x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta + 6)\cancel{x} + 5}{\cancel{x}} = \beta + 6. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 2 \Rightarrow \beta + 6 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -4}.$$

1799. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \beta x - 4$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = -4. \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\cancel{2}}}{3x^{\cancel{2}}} = \frac{\alpha}{3}.$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{3} = \beta \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 3\beta}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x - 1} - \beta x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3\beta x^2} - 13x + 6 - \cancel{3\beta x^2} + \beta x}{3x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta - 13)x + 6}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta - 13)\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{\beta - 13}{3}. \text{ Οπότε :} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = -4 \Rightarrow \frac{\beta - 13}{3} = -4 \Leftrightarrow \beta - 13 = -12 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}.$$

$$\text{Άρα και } \alpha = 3\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}.$$

1800. i. Για να είναι η ευθεία $x=4$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , πρέπει $4 \notin D_f$. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$, άρα $\boxed{\alpha = 4}$.

ii. Η $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 3)(x - \alpha) - (x^2 - 3x + 2)}{(x - \alpha)^2} = \frac{2x^2 - 2\alpha x - \cancel{3x} + 3\alpha - x^2 + \cancel{3x} - 2}{(x - \alpha)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2\alpha x + 3\alpha - 2}{(x - \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,0)$ είναι η : $\varepsilon : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

$$\text{Είναι } f'(1) = \frac{-1 + \alpha}{(1 - \alpha)^2} = \frac{\cancel{\alpha - 1}}{(\alpha - 1)^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(1) = \frac{1}{\alpha - 1}}} \text{ και } \underline{\underline{f(1) = 0}}, \text{ επομένως η}$$

εφαπτομένη έχει τη μορφή : $\varepsilon : y = \frac{1}{\alpha - 1}x - \frac{1}{\alpha - 1}$. Επιπλέον έχουμε :

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{\alpha - 1}(-2) - \frac{1}{\alpha - 1} \Leftrightarrow 3\alpha - 3 = -2 - 1 \Leftrightarrow 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}.$$

iii. Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη x_0 , παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ πρέπει $f'(x_0) = 0$. Παρατηρούμε πως $f(1) = 0$ και $f(2) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(1) = f(2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$f'(x_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της C_f , στο σημείο με τετμημένη x_0 , να είναι **παράλληλη στον άξονα x'** .

1801. α. i. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0. \text{ Έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-\alpha)x^2 - \kappa x + 2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-\alpha)x^2 - \kappa x + 2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-\alpha)x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}} = \\ &= 2 - \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow 2 - \alpha = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - \kappa x + 2}{x-3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{2}} - \kappa x + 2 - x^{\cancel{2}} + 3x}{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-\kappa)x + 2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-\kappa)x^{\cancel{1}}}{x^{\cancel{1}}} = 3 - \kappa. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = 0 \Rightarrow 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}.$$

ii. Είναι $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}$. Παρατηρούμε πως $f(1) = 0$ και $f(2) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(1) = f(2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει αριθμός $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η **εφαπτομένη** της C_f , στο σημείο με τετμημένη ξ , να είναι **παράλληλη στον άξονα x'** .

β. Η $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 2)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - \cancel{3x} + 9 - x^2 + \cancel{3x} - 2}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}. \end{aligned} \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο με τετμημένη } x_0 = 1 \text{ είναι η :}$$

$$\varepsilon : y = f'(1)(x-1) + f(1). \text{ Είναι } f'(1) = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(1) = \frac{1}{2}}} \text{ και } \underline{\underline{f(1) = 0}},$$

$$\text{επομένως η εφαπτομένη έχει τη μορφή : } \boxed{\varepsilon : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}.$$

1802. Για να είναι η ευθεία $x = -2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , πρέπει $-2 \notin D_f$.

$$\text{Είναι } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\gamma}{3} \right\}, \text{ άρα } -\frac{\gamma}{3} = -2 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 6}.$$

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3. \text{ Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^2 + \beta x + 5}{3x + 6}. \text{ Για να είναι το όριο}$$

πραγματικός αριθμός πρέπει ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή να είναι ο ίδιος. Επομένως πρέπει $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$.

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x + 5}{3x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\beta} \cancel{x} + 5}{3\cancel{x} + 6} = \frac{\beta}{3}.$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow \frac{\beta}{3} = 3 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 9}.$$

- 1803.** Αφού οι ευθείες $x=2$ και $x=3$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f τότε θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \pm\infty$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) = 8$ άρα και στις δύο περιπτώσεις

θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - \alpha x + \beta) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - \alpha x + \beta) = 0$. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - \alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 2\alpha - 4}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - \alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 3\alpha - 9}}.$$

$$\text{Έτσι : } 2\alpha - 4 = 3\alpha - 9 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 5} \text{ και } \beta = 2\alpha - 4 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 6}.$$

$$\text{Οπότε έχουμε τη συνάρτηση } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^2 - 1}{\cancel{x}^2 - 5\cancel{x} + 6} = 1.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 1}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$. Όμοια βρίσκουμε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. Άρα η ευθεία $\boxed{y = 1}$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f και στο $-\infty$.

- 1804.** Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f :

$$\text{Πρέπει } x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq 3, \text{ άρα}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$. Για να έχει η C_f μόνο μία κατακόρυφη ασύμπτωτη πρέπει είτε το 1

$$\text{είτε το 3 να είναι ρίζες του αριθμητή. Έτσι : Για το 1 : } 1^2 - \alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7.$$

$$\text{Για το 3 : } 3^2 - 3\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = 15 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

Άρα η C_f έχει μόνο μία κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν $\boxed{\alpha = 7}$ ή όταν $\boxed{\alpha = 5}$.

- 1805.** Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Για να μην έχει η C_f καμία κατακόρυφη ασύμπτωτη πρέπει το -2 να είναι και ρίζα του αριθμητή. Έτσι :

$$(-2)^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)(\alpha+2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -2.$$

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν $\boxed{\alpha = 1}$ ή όταν $\boxed{\alpha = -2}$.

- 1806.** Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αφού $x > 0$) την ευθεία $y = 2x$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0. \text{ Έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = \sqrt{\alpha}$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 4}}. \text{ Επιπλέον είναι:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + \beta x + 1} - 2x \right] \stackrel{(+\infty) - (+\infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + \beta x + 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 + \beta x + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + \beta x + 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x + 1}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x + 1}{x \sqrt{4 + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\beta + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{\beta}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{4} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 0}.$$

1807. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x + \frac{1}{4}$, είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \frac{1}{4}. \text{ Έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 2} - \alpha x + \beta - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - \alpha x + \beta - 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha x + \beta - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha + \frac{\beta - 2}{x} \right)}{\cancel{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha + \frac{\beta - 2}{x} \right) = 2 - \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \Rightarrow 2 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 3}}. \text{ Επιπλέον είναι:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + x + 2} - 3x + \beta - 2 + x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2x + \beta - 2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2x)(\sqrt{4x^2 + x + 2} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + x + 2} + 2x} + \beta - 2 \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + 2x} + \beta - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x} + \beta - 2 \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} + \beta - 2 \right) = \frac{1}{4} + \beta - 2 = \beta - \frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2}.$$

1808. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = ax + \beta$, είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta. \text{ Έχουμε :}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 3x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)} + 3x - 1}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + 3x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - 3 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x}} = -(-2) = 2.
\end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 5} + 3x - 1 - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} + x - 1) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 5} + (x - 1)][\sqrt{x^2 + 5} - (x - 1)]}{\sqrt{x^2 + 5} - (x - 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5} - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 5 - \cancel{x^2} + 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 5} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)} - x + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{2}{-2} = -1. \text{ Οπότε :}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \beta \Rightarrow \boxed{\beta = -1}.$$

Μελέτη συνάρτησης

1809. 1. Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως ρητή.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \stackrel{x \neq 2}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=4},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$x^2 - 4x$	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$		$\nearrow$ T.M.	$\searrow$	$\searrow$ T.E.	$\nearrow$	

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[4, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 2)$ και $(2, 4]$.

και

ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=4$ το $f(4)=8$.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμψής

Επιπλέον είναι :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{\cancel{2x^2} - 4x - 4x + 8 - \cancel{2x^2} + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3} \neq 0. \end{aligned}$$

Κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμψής :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$(x-2)^3$	-		+
$f''(x)$	-		+
$f(x)$		$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$

Συνεπώς :

– Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2)$.

– Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(2, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως η f δεν παρουσιάζει σημεία καμψής.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} x^2 = (-\infty) \cdot 4 = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} - 2\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

- Επίσης έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και όμοια } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} x^2 = (+\infty) \cdot 4 = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty.$$

➤ Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες

- Το $-2 \in A$ αλλά το $2 \notin A$, συνεπώς η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.
- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } x'x \text{ στο σημείο } O(0,0).$$

- Σημεία τομής με τον άξονα $y'y$:

$$f(0) = \frac{0^2}{0-2} = 0, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } y'y \text{ στο σημείο } O(0,0).$$

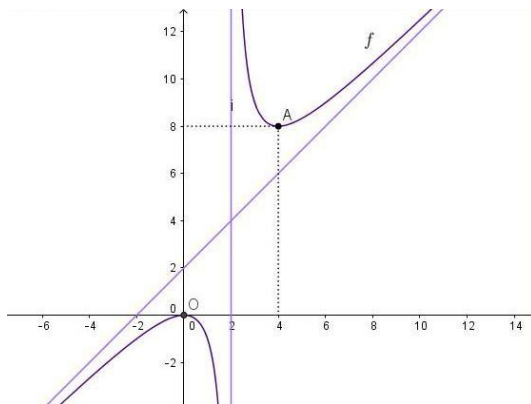
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$f''(x)$	-	-	-	+	+	+
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$ T.M. $\nearrow$ $+\infty$ $\searrow$ $-\infty$ $-\infty$ $\nearrow$ T.E. $\searrow$ $+\infty$ 8					

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



1810. 1. Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = x \ln x$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \ln x + 1$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-1}}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$ και
- $\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow x < e^{-1}$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, e^{-1}]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e^{-1}, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = e^{-1}$ το $f(e^{-1}) = -e^{-1}$.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Επιπλέον είναι $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει ούτε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

➤ Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες

- Από το πεδίο ορισμού συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.
- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } x'x \text{ στο σημείο } (1, 0).$$

- Το $0 \notin A$ άρα η C_f δεν τέμνει τον $y'y$.

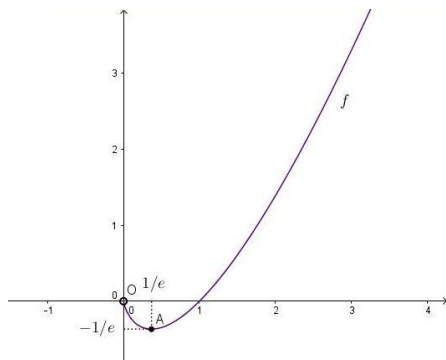
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον διπλανό πίνακα :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	-	+
$f''(x)$	$\parallel$	+	+
$f(x)$	0	T.E. $-e^{-1}$	$+\infty$

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



1811. 1. Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = xe^x$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο : $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow \overset{e^x \neq 0}{1+x=0} \Leftrightarrow \underline{x=-1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	Φ	+
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = -e^{-1}$.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμψής

Επιπλέον είναι : $f''(x) = e^x + xe^x = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$.

Έτσι έχουμε :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (2+x)e^x = 0 \Leftrightarrow \overset{e^x \neq 0}{2+x=0} \Leftrightarrow x = -2$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμψής :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	-	Φ	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Συνεπώς :

– Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2]$.

– Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[-2, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμψής στο $x = -2$ με $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$, το $K\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας x') είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

- Επίσης έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

➤ **Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες**

- Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$. Έχουμε :

$$f(-x) = -xe^{-x}, \text{ συνεπώς η } f \text{ δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιτή.}$$

- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } x'x \text{ στο σημείο } O(0,0).$$

- Σημεία τομής με τον άξονα $y'y$:

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } y'y \text{ στο σημείο } O(0,0).$$

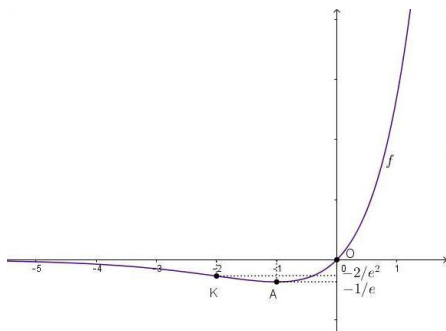
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	$\ominus$	+
$f''(x)$	-	$\ominus$	+	+
$f(x)$	0	$\searrow$ Σ.Κ. $-\frac{2}{e^2}$	$\searrow$ Ο.Ε. $-\frac{1}{e}$	$\nearrow$ $+\infty$

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



1812. 1. Πεδίο ορισμού. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = x^2 e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } (2-x=0 \Leftrightarrow \underline{x=2}), \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	$\ominus$	+	+
$2-x$	+	+	$\ominus$	-
$f'(x)$	-	$\ominus$	+	-
$f(x)$	$\searrow$	T.E.	T.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

και

- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=2$ το $f(2)=\frac{4}{e^2}$.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμψής

Επιπλέον είναι :

$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ . Είναι } \Delta = 8 \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 2 + \sqrt{2}} \text{ ή } \underline{x_2 = 2 - \sqrt{2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

κυρτότητας – σημείων καμψής :

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$	
x^2-4x+2	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f''(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\cup$	$\searrow$ Σ.Κ.	$\swarrow$ Σ.Κ.	$\cup$	

Συνεπώς :

– Η f είναι κυρτή στα
διαστήματα $(-\infty, 2 - \sqrt{2}]$ και
 $[2 + \sqrt{2}, +\infty)$.

– Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$.

Η f παρουσιάζει δύο σημεία καμψής, στο $x = 2 - \sqrt{2}$ με $f(2 - \sqrt{2}) = (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2}$,
το $K(2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2})$ και στο $x = 2 + \sqrt{2}$ με $f(2 + \sqrt{2}) = (6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$,
το $\Lambda(2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (-ue^u) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Επίσης έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} u^2 e^u = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

➤ Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες

- Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$. Έχουμε :

$f(-x) = x^2 e^x$, συνεπώς η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

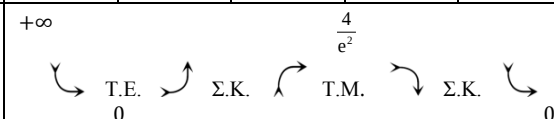
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(0,0)$.

- Σημεία τομής με τον άξονα $y'y$:

$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,0)$.

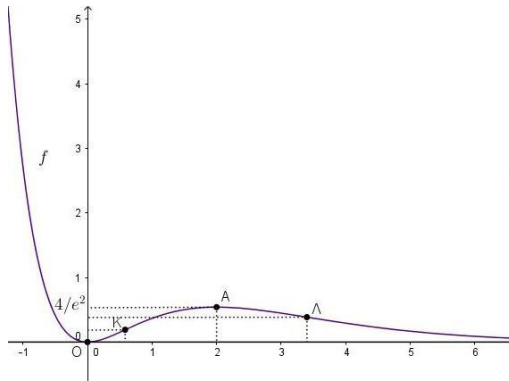
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	$-\infty$	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+	+	$\bigcirc$	-
$f''(x)$	+	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$
$f(x)$	$+\infty$ 					

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



1813. 1. Πεδίο ορισμού

Πρέπει $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$. Συνεπώς η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
2x	-				+
$x^2 - 1$	+				+
$f'(x)$	-				+
f(x)	↘ ↗				

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Επιπλέον είναι

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -2 \frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} < 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Συνεπώς η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) \stackrel{u=x^2-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -1^- \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = -1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) \stackrel{u=x^2-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x = 1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 1) \stackrel{u=x^2-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.

$$\text{Όμοια } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 1) \stackrel{u=x^2-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες και στο $+\infty$.

➤ Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες

- Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$. Έχουμε :

$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$, συνεπώς η f είναι άρτια, δηλαδή η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$x = -\sqrt{2}$ ή $x = \sqrt{2}$, δηλαδή η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(-\sqrt{2}, 0)$ και

$$B(\sqrt{2}, 0).$$

- Το $0 \notin A$ άρα η C_f δεν τέμνει τον $y'y$.

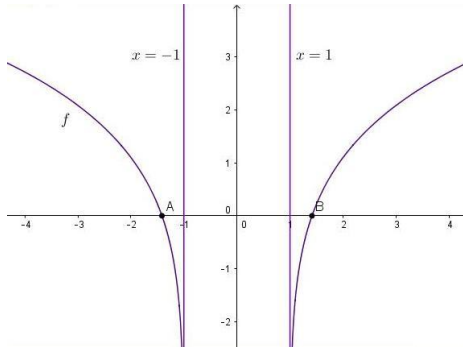
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f''(x)$	-			-
$f(x)$	$+\infty \searrow$ $-\infty$			

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



1814. 1. Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = 1 - x + \ln x$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
x		+	+
$1-x$		+	-
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και

- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=0$.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμψής

Επιπλέον είναι :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ συνεπώς η } f \text{ είναι κοίλη στο διάστημα } (0, +\infty)$$

και δεν παρουσιάζει σημεία καμψής.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x + \ln x) = 1 - 0 + (-\infty) = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 - 1 + 0 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \cancel{x} + \ln x + \cancel{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x) = 1 + (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

➤ Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες

- Από το πεδίο ορισμού συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιτή.
- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

Το $f(1)=0$ είναι ολικό μέγιστο, συνεπώς θα ισχύει :

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής.}$$

Δηλαδή είναι $f(x)=0$ μόνο για $x=1$.

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

- Το $0 \notin A$ άρα η C_f δεν τέμνει τον $y'y$.

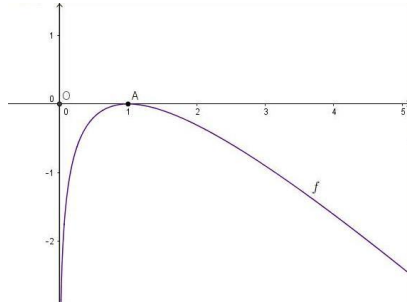
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	ϕ -
$f''(x)$		-	-
$f(x)$	$-\infty$ ↖ $\overset{0}{\curvearrowright}$ O.M. $\curvearrowright$ $-\infty$		

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



1815. 1. Πεδίο ορισμού Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

3. Μονοτονία – Ακρότατα

Η $f(x) = (1-x)e^x$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$, ^{$e^x \neq 0$} οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

και

ο Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=0$ το $f(0)=1$.

4. Κυρτότητα – Σημεία καμψής

Επιπλέον είναι : $f''(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$. Έτσι έχουμε :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -(1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$, ^{$e^x \neq 0$} οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμψής :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1+x$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f''(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Συνεπώς :

– Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$.

– Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμψής στο $x=-1$ με $f(-1) = \frac{2}{e}$, το $K\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές τιμές

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - e^x \right) = 0 - (+\infty) = -\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

- Επίσης έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

➤ Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες

- Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$. Έχουμε :

$$f(-x) = (1+x)e^{-x}, \text{ συνεπώς η } f \text{ δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.}$$

- Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } x'x \text{ στο σημείο } A(1,0).$$

- Σημεία τομής με τον άξονα $y'y$:

$$f(0) = (1-0)e^0 = 1, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } y'y \text{ στο σημείο } B(0,1).$$

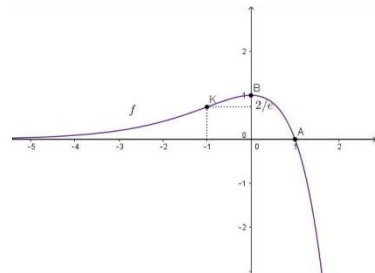
6. Πίνακας μεταβολών

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	⊖	-
$f''(x)$	+	⊖	-	-
$f(x)$	0 ↗ Σ.Κ. $\frac{2}{e}$	↘ O.M. 1	↘ $-\infty$	

7. Γραφική παράσταση

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



- 1816. α)** Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει πρώτα να τη μελετήσουμε.

Η $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό ως

αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Η $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη

$$\text{με παράγωγο: } f'(x) = \frac{1 - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1}.$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗ O.M.	↘

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$.

$$\text{Ακόμη έχουμε: } f''(x) = -\frac{x - 2x \ln x}{x^4} = -\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}.$$

$$\text{Έτσι: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 1}{x^3} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

Επιπλέον είναι :

- $2 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$ και
- $2 \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$2 \ln x - 1$		-	+
x^3		+	+
$f''(x)$		-	+
$f(x)$		↪ Σ.Κ. ↩	↗

Συνεπώς :

– Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, \sqrt{e}]$.

– Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[\sqrt{e}, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = \sqrt{e}$ με $f(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}}$, το $K\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.

Στη συνέχεια αναζητούμε τις ασύμπτωτες και τις οριακές τιμές της f .

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\ln x + 1) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Από το πεδίο ορισμού συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επιπλέον αφού $0 \notin A$, τότε η C_f δεν τέμνει τον $y'y$. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$:

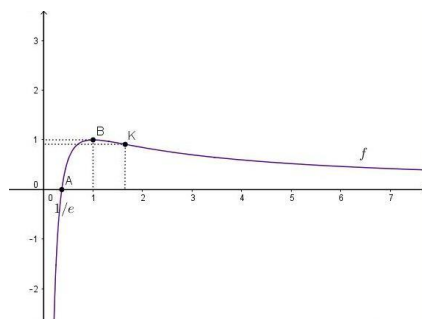
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{x} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}, \text{ δηλαδή η } C_f$$

τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	0	1	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f''(x)$		-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{3}{2\sqrt{e}}$	0

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



β) Έχουμε : $\ln x - \lambda x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = \lambda x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x + 1}{x} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$

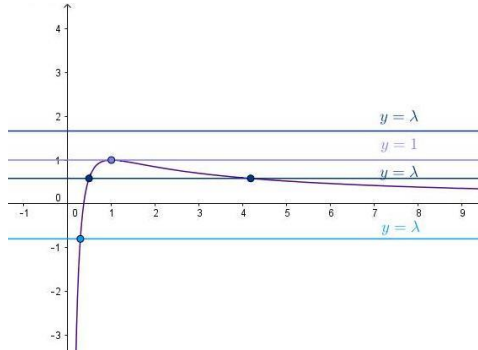
Αναζητούμε λοιπόν τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = \lambda$.

Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε εύκολα τα εξής :

- Αν $[\lambda \leq 0]$, τότε η $y = \lambda$ τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο, συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **μοναδική ρίζα** $\rho \in (0, +\infty)$.

- Αν $0 < \lambda < 1$, τότε η $y = \lambda$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία, συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**, έστω ρ_1, ρ_2 , τέτοιες ώστε $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$.
- Αν $\lambda = 1$, τότε η $y = 1$ τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο, το B, συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει **μοναδική ρίζα**, τη $x = 1$.
- Αν $\lambda > 1$, τότε η $y = \lambda$ δεν τέμνει την C_f συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι **αδύνατη**.

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό σχήμα :



1817. α) Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει πρώτα να τη μελετήσουμε.

Η $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σε αυτό ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Η $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ \frac{1}{e^x} \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$\oplus$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$\oplus$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $[1, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = e$. Ακόμη έχουμε :

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} \neq 0.$$

Κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	-		+
$f''(x)$	-		+
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

– Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Στη συνέχεια αναζητούμε τις ασύμπτωτες και τις οριακές τιμές της f .

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=1}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y=x+1$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Ομοια βρίσκουμε $\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και

$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 1$. Άρα η ευθεία $y=x+1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

- Επίσης έχουμε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{u} e^u \stackrel{u \rightarrow 0^-}{=} (-\infty) \cdot 1 = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} e^u \stackrel{u \rightarrow -\infty}{=} 0 \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} e^u \stackrel{u \rightarrow 0^+}{=} (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

Ελέγχουμε αν είναι άρτια ή περιττή :

- Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$. Έχουμε :

$$f(-x) = -x e^{-\frac{1}{x}}, \text{ συνεπώς η } f \text{ δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.}$$

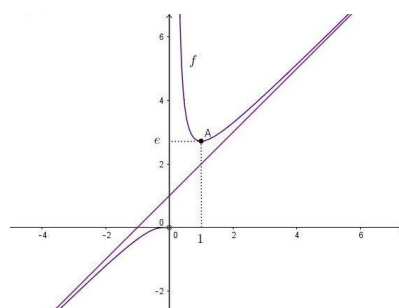
Το $0 \notin A$, άρα η C_f δεν τέμνει τον $y'y$. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, το οποίο δεν ανήκει στο A , άρα η C_f δεν τέμνει ούτε τον $x'x$. Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον εξής πίνακα :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	—	$\emptyset$	+
$f''(x)$	—	+		+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

T.E.
e

Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :



β) Έχουμε :

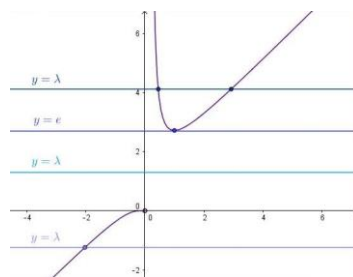
$$\lambda e^{\frac{1}{x}} = x \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

Αναζητούμε λοιπόν τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=\lambda$.

Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε εύκολα τα εξής :

- Αν $\lambda < 0$, τότε η $y=\lambda$ τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο, συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **μοναδική ρίζα** $\rho \in (-\infty, 0)$.
- Αν $0 \leq \lambda < e$, τότε η $y=\lambda$ δεν τέμνει την C_f συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι **αδύνατη**.
- Αν $\lambda = e$, τότε η $y=e$ τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο, το A , συνεπώς η εξίσωση $f(x) = e$ έχει **μοναδική ρίζα**, τη $x=1$.
- Αν $\lambda > e$, τότε η $y=\lambda$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία, συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**, έστω ρ_1, ρ_2 , τέτοιες ώστε $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό σχήμα :



Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση

1818. i. Είναι :

$$f(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x + 7 = 2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 7 = (2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 7x)'$$

Άρα $F(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 7x + c$ οι αρχικές της f .

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x+1)(x-2)^2 = (4x+1)(x^2-4x+4) = 4x^3 - 16x^2 + 16x + x^2 - 4x + 4 = \\ &= 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = 4x^3 - 5 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x + 4 = (x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x)' \end{aligned}$$

Άρα $F(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x + c$ οι αρχικές της f .

iii. Είναι :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^3} = 3 - 5\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 3 - 5\frac{1}{x} - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) - x^{-3} = \\ &= \left(3x - 5\ln|x| - 2\frac{1}{x} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)' = \left(3x - 5\ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)' \end{aligned}$$

Άρα $F(x) = 3x - 5\ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$ οι αρχικές της f .

$$\begin{aligned} \text{iv. Είναι : } f(x) &= \frac{4x^4 + 9x^3 - 8x^2 + x + 1}{x^3} = 4x + 9 - 8\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \\ &= 2 \cdot 2x + 9 - 8\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + x^{-3} = \left(2x^2 + 9x - 8\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)' = \\ &= \left(2x^2 + 9x - 8\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)' \end{aligned}$$

Άρα $F(x) = 2x^2 + 9x - 8\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$ οι αρχικές της f .

$$\begin{aligned} \text{v. Είναι : } f(x) &= 5x\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} = 5x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{3}} = 5x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{3}} = \left(5\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right)' = \\ &= \left(\cancel{5} \cdot \frac{2}{\cancel{2}} x^{\frac{5}{2}} - \cancel{4} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} x^{\frac{4}{3}}\right)' = (2\sqrt{x^5} - 3\sqrt[3]{x^4})' = (2x^2\sqrt{x} - 3x\sqrt[3]{x})' \end{aligned}$$

Άρα $F(x) = 2x^2\sqrt{x} - 3x\sqrt[3]{x} + c$ οι αρχικές της f .

vi. Είναι :

$$f(x) = \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x^2} = \frac{x - x^{\frac{2}{3}}}{x^2} = \frac{1}{x} - x^{\frac{2}{3}-2} = \frac{1}{x} - x^{-\frac{4}{3}} = \left(\ln|x| - \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} \right)' =$$

$$= \left(\ln|x| - \left(-\frac{3}{1} \right) \cdot x^{-\frac{1}{3}} \right)' = \left(\ln|x| + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)'. \text{ Άρα } \boxed{F(x) = \ln|x| + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c} \text{ οι αρχικές της } f.$$

vii. Είναι : $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 5x - e^{2x} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot (5\sigma\upsilon\nu 5x) - \frac{1}{2} \cdot (2e^{2x}) = \left(\frac{2}{5}\eta\mu 5x - \frac{1}{2}e^{2x} \right)'.$

Άρα $\boxed{F(x) = \frac{2}{5}\eta\mu 5x - \frac{1}{2}e^{2x} + c}$ οι αρχικές της f .

viii. Είναι :

$$f(x) = \eta\mu 2x + e^{3x+1} = -\frac{1}{2} \cdot (-2\eta\mu 2x) + \frac{1}{3} \cdot (3e^{3x+1}) = \left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{3}e^{3x+1} \right)'.$$

Άρα $\boxed{F(x) = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{3}e^{3x+1} + c}$ οι αρχικές της f .

ix. Είναι :

$$f(x) = \sqrt{e^{-x}} - \frac{2}{x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{2}{x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \right) - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} =$$

$$= \left(-2e^{-\frac{x}{2}} - 2\ln|x| - \sigma\phi x \right)' = \left(-2\sqrt{e^{-x}} - 2\ln|x| - \sigma\phi x \right)'.$$

Άρα $\boxed{F(x) = -2\sqrt{e^{-x}} - 2\ln|x| - \sigma\phi x + c}$ οι αρχικές της f .

x. Είναι :

$$f(x) = 3^x - \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\ln 3} (3^x \cdot \ln 3) - 2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 3\frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(\frac{3^x}{\ln 3} - 2\epsilon\phi x + 3\sqrt{x} \right)'.$$

Άρα $\boxed{F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - 2\epsilon\phi x + 3\sqrt{x} + c}$ οι αρχικές της f .

xi. Είναι :

$$f(x) = \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^3 x + 1 - \eta\mu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 1}{\eta\mu^2 x} = \eta\mu x - 1 - \frac{1}{\eta\mu^2 x} =$$

$$= -(-\eta\mu x) - 1 + \left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x} \right)' = (-\sigma\upsilon\nu x - x + \sigma\phi x)'.$$

Άρα $\boxed{F(x) = -\sigma\upsilon\nu x - x + \sigma\phi x + c}$ οι αρχικές της f .

xii. Είναι : $f(x) = \frac{e^{2x} - 5\sqrt{e^x} + 3}{e^{3x}} = e^{-x} - 5\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{3x}} + 3e^{-3x} = e^{-x} - 5e^{-\frac{5x}{2}} + 3e^{-3x} =$

$$\begin{aligned}
 &= -(-e^{-x}) - \cancel{\beta} \cdot \frac{2}{\cancel{\beta}} \cdot \frac{5}{2} e^{-\frac{5x}{2}} - (-3e^{-3x}) = -(-e^{-x}) + 2 \left(-\frac{5}{2} e^{-\frac{5x}{2}} \right) - (-3e^{-3x}) = \\
 &= \left(-e^{-x} + 2e^{-\frac{5x}{2}} - e^{-3x} \right)' . \text{ Άρα } \boxed{F(x) = -e^{-x} + 2e^{-\frac{5x}{2}} - e^{-3x} + c} \text{ οι αρχικές της } f.
 \end{aligned}$$

xiii. Είναι : $f(x) = \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} = [\ln|\eta\mu x|]'$.

Άρα $\boxed{F(x) = \ln|\eta\mu x| + c}$ οι αρχικές της f .

xiv. Είναι :

$$f(x) = \sigma\phi^2 x = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1 - \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1 = -\left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) - 1 = (-\sigma\phi x - x)' .$$

Άρα $\boxed{F(x) = -\sigma\phi x - x + c}$ οι αρχικές της f .

xv. Είναι : $f(x) = \frac{x+5}{x+1} = \frac{x+1+4}{x+1} = 1 + \frac{4}{x+1} = (x + 4\ln|x+1|)'$.

Άρα $\boxed{F(x) = x + 4\ln|x+1| + c}$ οι αρχικές της f .

xvi. Είναι : $f(x) = \frac{7-x}{2-x} = \frac{5+2-x}{2-x} = \frac{5}{2-x} + 1 = -5\left(-\frac{1}{2-x} \right) + 1 = (-5\ln|2-x| + x)'$

Άρα $\boxed{F(x) = -5\ln|2-x| + x + c}$ οι αρχικές της f .

xvii. Είναι :

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+6}{x^2+6x+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+6x+5)'}{x^2+6x+5} = \left(\frac{1}{2} \ln|x^2+6x+5| \right)' .$$

Άρα $\boxed{F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+5| + c}$ οι αρχικές της f .

xviii. Είναι : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = 1 - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = (x - \ln(x^2+1))'$

Άρα $\boxed{F(x) = x - \ln(x^2+1) + c}$ οι αρχικές της f .

xix. Είναι : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^x+1}{e^x+x} = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} + \frac{(e^x+x)'}{e^x+x} = (\ln(e^x+1) + \ln|e^x+x|)'$.

Άρα $\boxed{F(x) = \ln(e^x+1) + \ln|e^x+x| + c}$ οι αρχικές της f .

xx. Είναι : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} = (\ln(e^x+1))'$.

Άρα $\boxed{F(x) = \ln(e^x+1) + c}$ οι αρχικές της f .

xxi. Είναι : $f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = (x - \ln(1+e^x))'$.

Άρα $F(x) = x - \ln(1+e^x) + c$ οι αρχικές της f .

xxii. Είναι :

$$f(x) = \frac{1-x}{e^x+x} = \frac{1-x+e^x-e^x}{e^x+x} = \frac{e^x+1-(e^x+x)}{e^x+x} = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{(e^x+x)'}{e^x+x} - 1 = (\ln|e^x+x|-x)'. \text{ Άρα } F(x) = \ln|e^x+x|-x+c \text{ οι αρχικές της } f.$$

1819. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως εκθετική, οπότε γράφεται : $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ το σύνολο των αρχικών της f είναι $F(x) = e^x + c$.

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ το σύνολο των αρχικών της f είναι $F(x) = -e^{-x} + c_1$.

Συνεπώς έχουμε : $F(x) = \begin{cases} e^x + c, & x > 0 \\ -e^{-x} + c_1, & x \leq 0 \end{cases}$.

Επειδή η F είναι αρχική της f , θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό, οπότε και στο 0. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) \Leftrightarrow -1 + c_1 = 1 + c \Leftrightarrow c_1 = c + 2.$$

Επομένως : $F(x) = \begin{cases} e^x + c, & x > 0 \\ -e^{-x} + c + 2, & x \leq 0 \end{cases}$.

1820. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Ελέγχουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 0$ και έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x - 1) = 0 \text{ και } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0), \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής και στο } x_0 = 0 \text{ και άρα σε όλο το } \mathbb{R}$$

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ το σύνολο των αρχικών της f είναι $F(x) = e^x - x + c$.

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ το σύνολο των αρχικών της f είναι $F(x) = \eta\mu x - x + c_1$.

Συνεπώς έχουμε : $F(x) = \begin{cases} e^x - x + c, & x \geq 0 \\ \eta\mu x - x + c_1, & x < 0 \end{cases}$. Επειδή η F είναι αρχική της f , θα

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό, οπότε και στο 0. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) \Leftrightarrow c_1 = 1 + c. \text{ Επομένως: } F(x) = \begin{cases} e^x - x + c, & x \geq 0 \\ \eta\mu x - x + 1 + c, & x < 0 \end{cases}$$

1821. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, οπότε $f(1) = 2$, και η κλίση της C_f σε κάθε

σημείο της $(x, f(x))$ είναι $\frac{4}{x^5}$ άρα $f'(x) = \frac{4}{x^5}$ για κάθε $x > 0$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = \frac{4}{x^5} \Leftrightarrow f'(x) = 4x^{-5} \Leftrightarrow (f(x))' = \left(4 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} \right)' \Leftrightarrow (f(x))' = \left(-\frac{1}{x^4} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^4} + c \xrightarrow{x=1} f(1) = -1 + c \Leftrightarrow 2 = -1 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=3}}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = -\frac{1}{x^4} + 3, x > 0}.$$

1822. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f''(x) = -2\frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow (f'(x))' = (-2\sqrt{x})' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -2\sqrt{x} + c_1 \xrightarrow{x=1} f'(1) = -2 + c_1 \Leftrightarrow 1 = -2 + c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1=3}}, \text{ οπότε :}$$

$$f'(x) = -2\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow f'(x) = -2x^{\frac{1}{2}} + 3 \Leftrightarrow (f(x))' = \left(-2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3x \right)' \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = \left(-2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 3x \right)' \Leftrightarrow (f(x))' = \left(-\frac{4}{3} \sqrt{x^3} + 3x \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -\frac{4}{3} x \sqrt{x} + 3x + c_2 \xrightarrow{x=9} -10 = -36 + 27 + c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2=-1}}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = -\frac{4}{3} x \sqrt{x} + 3x - 1, x > 0}.$$

1823. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, άρα θα είναι $f(1) = 0$ και $f(2) = 0$. Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6 \Leftrightarrow (f'(x))' = (4x^3 - 9x^2 + 6x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + c_1 \Leftrightarrow (f(x))' = (x^4 - 3x^3 + 3x^2 + c_1 x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + c_1 x + c_2.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ παίρνουμε : } \cancel{f(1)}^0 = 1 + c_1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = -1.$$

$$\text{Για } x=2 \text{ παίρνουμε : } \cancel{f(2)}^0 = 16 - 24 + 12 + 2c_1 + c_2 \Leftrightarrow 2c_1 + c_2 = -4.$$

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε $c_1 = -3$ οπότε $c_2 = 2$.

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}}.$$

1824. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ το 3, άρα θα είναι $f'(1) = 0$ και $f(1) = 3$. Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 6x - 12 \Leftrightarrow f''(x) = 3 \cdot 2x - 12 \Leftrightarrow (f'(x))' = (3x^2 - 12x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + c_1 \xRightarrow{x=1} f'(1) = -9 + c_1 \Leftrightarrow \underline{c_1 = 9}.$$

$$\text{Οπότε : } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (x^3 - 6x^2 + 9x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c_2 \xRightarrow{x=1} f(1) = 4 + c_2 \Leftrightarrow$$

$$3 = 4 + c_2 \Leftrightarrow \underline{c_2 = -1}. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1, x \in \mathbb{R}}.$$

1825. Αφού η C_f έχει ασύμπτωτη την $y = 3x - 4$ στο $+\infty$, τότε θα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -4. \text{ Έχουμε :}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow f''(x) = -2x^{-3} \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(-2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)' \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' = (x^{-2})' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} + c_1 \Leftrightarrow f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) + c_1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = \left(-\frac{1}{x} + c_1 x\right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x} + c_1 x + c_2. \text{ Οπότε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x} + c_1 x + c_2}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} + c_1 + c_2 \frac{1}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$-0 + c_1 + c_2 \cdot 0 = 3 \Leftrightarrow \underline{c_1 = 3}, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \cancel{3x} + c_2 - \cancel{3x}\right) = -4 \Leftrightarrow -0 + c_2 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\underline{c_2 = -4}. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = -\frac{1}{x} + 3x - 4, x > 0}.$$

1826. Είναι :

$$f'(\ln x) = 2x^2 + x \xLeftrightarrow{x \neq 0} f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = 2x + 1 \Leftrightarrow f'(\ln x) \cdot (\ln x)' = 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(\ln x))' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow f(\ln x) = x^2 + x + c \xRightarrow{x=1} f(0) = 2 + c \Leftrightarrow 3 = 2 + c \Leftrightarrow \underline{c = 1}.$$

Έτσι έχουμε $f(\ln x) = x^2 + x + 1$. Θέτουμε όπου $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$ και παίρνουμε

$$f(y) = e^{2y} + e^y + 1. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = e^{2x} + e^x + 1, x \in \mathbb{R}}.$$

1827. Είναι :

$$f'(x^2) = 2x + 1 \xLeftrightarrow{-2x} f'(x^2) \cdot 2x = 4x^2 + 2x \Leftrightarrow f'(x^2) \cdot (x^2)' = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3x^2) + 2x \Leftrightarrow$$

$$(f(x^2))' = \left(\frac{4}{3}x^3 + x^2\right)' \Leftrightarrow f(x^2) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 + c \xRightarrow{x=1} f(1) = \frac{4}{3} + 1 + c \Leftrightarrow$$

$$2 = \frac{7}{3} + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -\frac{1}{3}}}.$$

Έτσι έχουμε $f(x^2) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$. Θέτουμε όπου $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ και

$$\text{παίρνουμε : } f(y) = \frac{4}{3}y\sqrt{y} + y - \frac{1}{3}. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x - \frac{1}{3}, x > 0}.$$

1828. Είναι : $f'(x^3 + x) = 4x \Leftrightarrow f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1) = 4x(3x^2 + 1) \Leftrightarrow$

$$f'(x^3 + x) \cdot (x^3 + x)' = 3 \cdot (4x^3) + 2 \cdot (2x) \Leftrightarrow (f(x^3 + x))' = (3x^4 + 2x^2)' \Leftrightarrow$$

$$f(x^3 + x) = 3x^4 + 2x^2 + c \xrightarrow{x=1} f(2) = 5 + c \Leftrightarrow 3 = 5 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -2}}.$$

Έτσι έχουμε $f(x^3 + x) = 3x^4 + 2x^2 - 2$.

$$\text{Θέτοντας όπου } x = 2 \text{ παίρνουμε : } f(10) = 48 + 8 - 2 \Leftrightarrow \boxed{f(10) = 54}.$$

1829. Η C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\frac{3}{5}$ άρα είναι

$$f'(1) = \frac{3}{5}. \text{ Στη δοθείσα σχέση για } x=1 \text{ παίρνουμε :}$$

$$f'(1) \cdot e^{f(1)} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{5}e^{f(1)} = 3 \Leftrightarrow e^{f(1)} = 5 \Leftrightarrow \ln e^{f(1)} = \ln 5 \Leftrightarrow f(1) = \ln 5. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2x + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + x + c \xrightarrow{x=1}$$

$$e^{f(1)} = 2 + c \Leftrightarrow e^{\ln 5} = 2 + c \Leftrightarrow 5 = 2 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 3}}.$$

$$\text{Άρα } e^{f(x)} = x^2 + x + 3 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln(x^2 + x + 3) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \ln(x^2 + x + 3), x > 0}.$$

1830. Η C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 5$ άρα είναι $f'(2) = 5$. Στη δοθείσα σχέση για $x=2$ παίρνουμε :

$$\frac{f'(2)}{f(2)} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{f(2)} = 5 \Leftrightarrow f(2) = 1. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x - 3 \xrightarrow{f(x) > 0} (\ln f(x))' = (2x^2 - 3x)' \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x^2 - 3x + c \xrightarrow{x=2}$$

$$\ln f(2) = 2 + c \Leftrightarrow \ln 1 = 2 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -2}}.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) = 2x^2 - 3x - 2 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^{2x^2 - 3x - 2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{2x^2 - 3x - 2}, x \in \mathbb{R}}.$$

1831. Έχουμε :

$$f'(x) = f(x)(\sin x + 2x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \sin x + 2x \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} (\ln f(x))' = (\eta \mu x + x^2)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \eta \mu x + x^2 + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \ln f(0) = c \Leftrightarrow \ln 1 = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=0}}.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) = \eta \mu x + x^2 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^{\eta \mu x + x^2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{\eta \mu x + x^2}, x \in \mathbb{R}}.$$

1832. Η C_f σε σημείο $M(x, f(x))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

άρα είναι $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$. Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, e+1)$, τότε είναι

$f(1) = e+1$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x} + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = e + c \Leftrightarrow e + 1 = e + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \frac{e^x}{x} + 1, x > 0}.$$

1833. Έχουμε :

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = 2x^3 + 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (2f(x)f'(x)) = 2x^3 + 2x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(2\frac{x^4}{4} + x^2\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2}f^2(0) = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = \frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{2}f^2(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = (x^2 + 1)^2.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$

συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $\boxed{f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}}$.

1834. Έχουμε : $xf(x)f'(x) + xf(x) = f^2(x) + x^2f'(x) \Leftrightarrow$

$$x^2f'(x) - xf(x)f'(x) + f^2(x) - xf(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$xf'(x)(x - f(x)) - f(x)(x - f(x)) = 0 \Leftrightarrow (x - f(x))(xf'(x) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) = x}}\right) \text{ ή } \left(xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} (\ln f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln x + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \ln f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$$

, άρα $\ln f(x) = \ln x \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) = x}}$. Συνεπώς είναι $\boxed{f(x) = x, x > 0}$.

1835. Έχουμε :

$$f''(x) = e^{2f(x)} \Leftrightarrow f''(x) \cdot 2f'(x) = e^{2f(x)} \cdot 2f'(x) \Leftrightarrow \left([f'(x)]^2\right)' = \left(e^{2f(x)}\right)' \Leftrightarrow$$

$$[f'(x)]^2 = e^{2f(x)} + c_1 \xrightarrow{x=1} [f'(1)]^2 = e^{2f(1)} + c_1 \Leftrightarrow (-1)^2 = e^0 + c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = 0}}.$$

$$\text{Οπότε : } [f'(x)]^2 = e^{2f(x)} \Leftrightarrow [f'(x)]^2 = \left(e^{f(x)}\right)^2 \neq 0.$$

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, και ισχύει $f'(x) \neq 0$, άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και αφού έχουμε και $f'(1) = -1 < 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς $f'(x) = -e^{f(x)}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = -e^{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} = \frac{-e^{f(x)}}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)} = -1 \Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-f(x)} \cdot (-f(x))' = 1 \Leftrightarrow \left(e^{-f(x)}\right)' = x' \Leftrightarrow e^{-f(x)} = x + c_2 \xrightarrow{x=1} e^{-f(1)} = 1 + c_2 \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}.$$

$$\text{Άρα } e^{-f(x)} = x \Leftrightarrow \ln e^{-f(x)} = \ln x \Leftrightarrow -f(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -\ln x, x > 0}.$$

1836. Έχουμε :

$$f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow \ln f(x) = x^2 + c \xrightarrow{x=0}$$

$$\ln f(0) = c \Leftrightarrow \ln e = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 1}}.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^{x^2+1} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{x^2+1}, x \in \mathbb{R}}.$$

1837. Η C_f στο $x_0 = 0$ έχει κλίση 2, δηλαδή $f'(0) = 2$. Στην αρχική σχέση για $x=0$ έχουμε : $f'(0) + f(0) = 1 + e^0 \Leftrightarrow 2 + f(0) = 1 + 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) + f(x) = 1 + e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)e^x)' = e^x + 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (e^x + x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x = e^x + x + c \xrightarrow{x=0} f(0)e^0 = 1 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -1}}. \text{ Άρα}$$

$$f(x)e^x = e^x + x - 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 1 + xe^{-x} - e^{-x}, x \in \mathbb{R}}. \text{ Για τις αρχικές της } f \text{ έχουμε :}$$

$$f(x) = 1 + xe^{-x} - e^{-x} = 1 - x(-e^{-x}) - e^{-x} = 1 - [e^{-x} + x(-e^{-x})] =$$

$$= 1 - [(x)'e^{-x} + x(e^{-x})'] = (x - xe^{-x})'. \text{ Άρα } \boxed{F(x) = x - xe^{-x} + c} \text{ οι αρχικές της } f.$$

1838. Έχουμε :

$$f'(x) = \frac{2+f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = 2+f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot x - f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} (f(x))' \cdot x - f(x) \cdot (x)' &= 2 \Leftrightarrow \frac{(f(x))' \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{f(x)}{x}\right)' &= \left(-\frac{2}{x}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\frac{2}{x} + c \xrightarrow{x=3} \frac{f(3)}{3} = -\frac{2}{3} + c \Leftrightarrow c = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{c=3}} \\ \text{Άρα } \frac{f(x)}{x} &= -\frac{2}{x} + 3 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 3x - 2, x \neq 0}. \end{aligned}$$

1839. α. Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση παίρνουμε $-F'(2-x) + 2xF'(x^2-4) = 6$,

δηλαδή $-f(2-x) + 2xf(x^2-4) = 6$. Για $x=0$ έχουμε :

$$-f(2-0) + 2 \cdot 0 \cdot f(0^2-4) = 6 \Leftrightarrow -f(2) = 6 \Leftrightarrow \boxed{f(2) = -6}. \text{ Για } x=2 \text{ έχουμε :}$$

$$-f(2-2) + 2 \cdot 2 \cdot f(2^2-4) = 6 \Leftrightarrow -f(0) + 4f(0) = 6 \Leftrightarrow 3f(0) = 6 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 2}$$

β. i. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως παραγωγίσιμη, με $f(0) \cdot f(2) = -12 < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + 4x$, $x \in \mathbb{R}$, με $g'(x) = f'(x) + 4$ και $g(0) = f(0) = 2$ και $g(2) = f(2) + 8 = -6 + 8 = 2$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και $g(0) = g(2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -4$.

1840. α. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$-2F'(1-2x) + 2xF'(x^2+2) = 4x^3 + 10x + 2, \text{ δηλαδή}$$

$$-2f(1-2x) + 2xf(x^2+2) = 4x^3 + 10x + 2. \text{ Για } x=0 \text{ έχουμε :}$$

$$-2f(1-2 \cdot 0) + 2 \cdot 0 \cdot f(0^2+2) = 4 \cdot 0^3 + 10 \cdot 0 + 2 \Leftrightarrow -2f(1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = -1}.$$

$$\text{Για } x=-1 \text{ έχουμε : } -2f(3) - 2f(3) = -4 - 10 + 2 \Leftrightarrow -4f(3) = -12 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 3}.$$

β. i. Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, ως παραγωγίσιμη, με $f(1) \cdot f(3) = -3 < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, \rho]$ και $[\rho, 3]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[1, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, \rho)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, \rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\cancel{\rho})^0 - f(1)}{\rho - 1} = \frac{1}{\rho - 1}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(\rho, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(\rho)}{3 - \rho} = \frac{3}{3 - \rho}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{1}{\frac{1}{\rho - 1}} + \frac{3}{\frac{3}{3 - \rho}} = \rho - 1 + \frac{3(3 - \rho)}{3} = \rho' - 1 + 3 - \rho' = 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = 2}.$$

- 1841.** Παραγωγίζουμε τη σχέση $2xF(x) + f(x) = e^{-x^2}$ και παίρνουμε

$$2F(x) + 2xF'(x) + f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Είναι $F'(x) = f(x)$ οπότε $F''(x) = f'(x)$, άρα τελικά έχουμε :

$$2F(x) + 2xF'(x) + F''(x) = -2xe^{-x^2} \Leftrightarrow (2x)' F(x) + 2xF'(x) + F''(x) = (-x^2)' e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$(2xF(x) + F'(x))' = (e^{-x^2})' \Leftrightarrow 2xF(x) + F'(x) = e^{-x^2} + c_1,$$

το οποίο αλλιώς γράφεται $2xF(x) + f(x) = e^{-x^2} + c_1$.

Αν στη σχέση $2xF(x) + f(x) = e^{-x^2}$ βάλουμε όπου x το 0 έχουμε $f(0) = 1$, συνεπώς

$$2xF(x) + f(x) = e^{-x^2} + c_1 \xrightarrow{x=0} f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = 0}}.$$

Έτσι έχουμε $2xF(x) + f(x) = e^{-x^2}$ το οποίο γράφεται :

$$2xF(x) + F'(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot 2xF(x) + e^{x^2} F'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} \cdot (x^2)' F(x) + e^{x^2} F'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{x^2} F(x))' = (x)' \Leftrightarrow e^{x^2} F(x) = x + c_2 \xrightarrow{x=0}$$

$$F(0) = c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}. \text{ Συνεπώς είναι : } e^{x^2} F(x) = x \Leftrightarrow F(x) = xe^{-x^2}.$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία σχέση και έχουμε :

$$F'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2) = \frac{1 - 2x^2}{e^{x^2}} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1 - 2x^2}{e^{x^2}}, x \in \mathbb{R}}.$$

- 1842.** Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση και παίρνουμε $F'(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2$, το οποίο γράφεται

$$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 6x^2 \Leftrightarrow xf'(x) = 6x^2 \xrightarrow{x \neq 0} f'(x) = 6x \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (3x^2)' \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 + c \xrightarrow{x=1} f(1) = 3 + c \Leftrightarrow 7 = 3 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 4}}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = 3x^2 + 4, x > 0}.$$

1843. Στη σχέση $f(x) = 2xe^{x^2-F(x)}$ αν βάλουμε όπου x το 1 έχουμε :

$$f(1) = 2e^{1-F(1)} \Leftrightarrow 2 = 2e^{1-F(1)} \Leftrightarrow e^{1-F(1)} = 1 \Leftrightarrow e^{1-F(1)} = e^0 \Leftrightarrow 1-F(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$F(1) = 1$. Είναι $F'(x) = f(x)$ άρα η αρχική σχέση γράφεται :

$$F'(x) = 2xe^{x^2-F(x)} \Leftrightarrow F'(x) = 2xe^{x^2} \cdot e^{-F(x)} \Leftrightarrow e^{F(x)} \cdot F'(x) = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{F(x)} \cdot (F(x))' = (x^2)' e^{x^2} \Leftrightarrow (e^{F(x)})' = (e^{x^2})' \Leftrightarrow e^{F(x)} = e^{x^2} + c \xrightarrow{x=1} e^{F(1)} = e + c \Leftrightarrow$$

$$e = e + c \Leftrightarrow \underline{c=0}.$$

$$\text{Συνεπώς : } e^{F(x)} = e^{x^2} \Leftrightarrow F(x) = x^2 \Rightarrow F'(x) = 2x \text{ άρα } \boxed{f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}}.$$

1844. i. Έχουμε : $2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = e^x \cdot e^{-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow$

$$(2e^{f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow 2e^{f(x)} = e^x + c \xrightarrow{x=0} 2e^{f(0)} = 1 + c \Leftrightarrow 2e^0 = 1 + c \Leftrightarrow \underline{c=1}.$$

Συνεπώς :

$$2e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln \frac{e^x + 1}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2}, x \in \mathbb{R}}$$

ii. Στη σχέση $h(x) = G(x) - G(-x)$ για $x=0$ έχουμε $h(0) = \cancel{G(0)} - \cancel{G(0)} = 0$.

Είναι $G'(x) = g(x) = x^{2017} f(x)$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $h(x) = G(x) - G(-x)$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= G'(x) + G'(-x) = x^{2017} f(x) + (-x)^{2017} f(-x) = \\ &= x^{2017} \ln \frac{e^x + 1}{2} + (-x)^{2017} \ln \frac{e^{-x} + 1}{2} = x^{2017} \ln \frac{e^x + 1}{2} - x^{2017} \ln \frac{1 + e^x}{2e^x} = \\ &= x^{2017} \left(\ln \frac{e^x + 1}{2} - \ln \frac{1 + e^x}{2e^x} \right) = x^{2017} \cdot \ln \frac{\frac{e^x + 1}{2}}{\frac{1 + e^x}{2e^x}} = x^{2017} \cdot \ln \frac{\cancel{2}e^x (e^x + 1)}{\cancel{2}(1 + e^x)} = \\ &= x^{2017} \cdot \ln e^x = x \cdot x^{2017} = x^{2018}. \text{ Είναι :} \end{aligned}$$

$$h'(x) = x^{2018} \Leftrightarrow (h(x))' = \left(\frac{1}{2019} x^{2019} \right)' \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2019} x^{2019} + c \xrightarrow{x=0}$$

$$h(0) = c \Leftrightarrow \underline{c=0}. \text{ Άρα } \boxed{h(x) = \frac{1}{2019} x^{2019}, x \in \mathbb{R}}.$$

1845. Είναι $F'(x) = f(x)$. Αφού η F δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $F(x_1) = F(x_2)$.

Η F είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και είναι και

$F(x_1) = F(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = 0}.$$

1846. Είναι $F'(x) = f(x)$. Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$F'(x)F(1-x) - F(x)F'(1-x) = 2xF'(x^2), \text{ δηλαδή}$$

$$f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = 2xf(x^2).$$

$$\text{Για } x=0 \text{ παίρνουμε : } f(0)F(1) - F(0)f(1) = 0.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ παίρνουμε : } f(1)F(0) - F(1)f(0) = 2f(1).$$

$$\text{Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε τελικά } 2f(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 0}.$$

1847. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = F(x) - \frac{x^2}{2}$ με

$$g'(x) = F'(x) - x \Rightarrow g'(x) = f(x) - x.$$

$$\text{Είναι } g(1) = F(1) - \frac{1}{2} \text{ και } g(-1) = F(-1) - \frac{1}{2} = F(1) - \frac{1}{2} = g(1).$$

Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και είναι και $g(-1) = g(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle**

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = \xi}.$$

1848. α. Αν στην αρχική σχέση βάλουμε όπου x το 0 τότε έχουμε :

$$f(0) \cdot F(0) = 1 \Leftrightarrow 2F(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{F(0) = \frac{1}{2}}.$$

β. Αν στη σχέση $f(x)F(-x) = 1$ βάλουμε όπου x το $-x$ παίρνουμε $f(-x)F(x) = 1$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $g(x) = F(x)F(-x)$ έχουμε :

$$g'(x) = F'(x)F(-x) - F(x)F'(-x) \Rightarrow$$

$$g'(x) = f(x)F(-x) - F(x)f(-x) = \cancel{f} - \cancel{f} = 0, \text{ συνεπώς η } g \text{ είναι σταθερή}$$

συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν :

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c \Leftrightarrow F(x)F(-x) = c \xRightarrow{x=0} F(0)F(0) = c \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = c \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{c = \frac{1}{4}}}. \text{ Άρα } \boxed{g(x) = \frac{1}{4}, x \in \mathbb{R}}.$$

γ. Είναι $f(x)F(-x) = 1$ και $F(x)F(-x) = \frac{1}{4}$ με $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

διαιρώντας κατά μέλη έχουμε :

$$\frac{f(x) \cancel{F(-x)}}{F(x) \cancel{F(-x)}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = 4 \Leftrightarrow (\ln F(x))' = (4x)' \Leftrightarrow \ln F(x) = 4x + c \xRightarrow{x=0}$$

$$\ln F(0) = c \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow \underline{c = -\ln 2}. \text{ Επομένως :}$$

$$\ln F(x) = 4x - \ln 2 \Leftrightarrow \ln F(x) = \ln e^{4x} - \ln 2 \Leftrightarrow \ln F(x) = \ln \frac{e^{4x}}{2} \Leftrightarrow F(x) = \frac{e^{4x}}{2}$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$F'(x) = \frac{4e^{4x}}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2e^{4x}, x \in \mathbb{R}}.$$

1849. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = F(x) - x$ με $g'(x) = F'(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = f(x) - 1$.

$$\text{Είναι } g(\alpha) = F(\alpha) - \alpha = \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} = 0 \text{ και } g(\beta) = F(\beta) - \beta = \cancel{\beta} - \cancel{\beta} = 0.$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και είναι και $g(\alpha) = g(\beta)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο
ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 1$. Αποδείξαμε πως η C_f τέμνει την
ευθεία $\varepsilon: y=1$, σε **ένα τουλάχιστον σημείο** με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$.

1850. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta\mu x$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \sigma\upsilon\nu x$.

$$\text{Είναι } g(0) = f(0) = 0, \text{ άρα :}$$

$$f(x) \geq \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) - \eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0), \text{ δηλαδή η } g$$

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $g(0)$. Έτσι έχουμε :

– Το $x=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $D_g = \mathbb{R}$,

– η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=0$ και

– η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1. \text{ Έχουμε :}$$

$$f''(x) = 2 \Leftrightarrow (f'(x))' = (2x)' \Rightarrow f'(x) = 2x + c_1 \xrightarrow{x=0} f'(0) = c_1 \Leftrightarrow \underline{c_1 = 1}. \text{ Άρα}$$

$$f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow (f(x))' = (x^2 + x)' \Rightarrow f(x) = x^2 + x + c_2 \xrightarrow{x=0} f(0) = c_2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{c_2 = 0}. \text{ Συνεπώς } \boxed{f(x) = x^2 + x, x \in \mathbb{R}}.$$

1851. α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$.

$$\text{Έχουμε } g(x) = \frac{f(x)}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = (x-2)g(x) \text{ με}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-2)g(x)] = 0 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0}.$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, συνεπώς θα είναι :

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0. \text{ Έχουμε :}$$

$$f'(x) = e^{x-2} + 2 \Leftrightarrow (f(x))' = (e^{x-2} + 2x)' \Leftrightarrow f(x) = e^{x-2} + 2x + c \xrightarrow{x=2}$$

$$\cancel{f(2)}^0 = 1 + 4 + c \Leftrightarrow \underline{c = -5}. \text{ Οπότε } \boxed{f(x) = e^{x-2} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}}.$$

Ο ρ ι σ μ έ ν ο ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α

1852. Είμαι :

$$I_1 = \int_1^2 (3x^2 + 6x - 7) dx = \left[\cancel{\beta} \frac{x^3}{\cancel{\beta}} + 6 \frac{x^2}{2} - 7x \right]_1^2 = \left[x^3 + 3x^2 - 7x \right]_1^2 = 6 - (-3) = \mathbf{9} .$$

$$I_2 = \int_0^1 (3x^2 - x - 1) dx = \left[\cancel{\beta} \frac{x^3}{\cancel{\beta}} - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left[x^3 - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} .$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 (x-1)^2 (3x+2) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)(3x+2) dx = \\ &= \int_0^1 (3x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 3x + 2) dx = \int_0^1 (3x^3 - 4x^2 - x + 2) dx = \\ &= \left[3 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{12}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-1}^2 12t(t-1)^2 dt = \int_{-1}^2 12t(t^2 - 2t + 1) dx = \int_{-1}^2 (12t^3 - 24t^2 + 12t) dx = \\ &= \left[12 \frac{t^4}{4} - 24 \frac{t^3}{3} + 12 \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^2 = \left[3t^4 - 8t^3 + 6t^2 \right]_{-1}^2 = 8 - 17 = \mathbf{-9} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5 \frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^2 = \\ &= \left(-\frac{22}{3} - \ln 2 \right) - \left(-\frac{13}{6} \right) = -\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{6}} + \mathbf{\ln 2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_1^2 \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2} dx = \\ &= \int_1^2 \left(x + 2 - \frac{1}{x} - 2 \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(x + 2 - \frac{1}{x} + 2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \ln x + 2 \frac{1}{x} \right]_1^2 = \\ &= (7 - \ln 2) - \frac{9}{2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} - \mathbf{\ln 2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_1^3 \frac{9\alpha^2 + x^2}{x^3} dx = \int_1^3 \left(\frac{9\alpha^2}{x^3} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(9\alpha^2 \cdot x^{-3} + \frac{1}{x} \right) dx = \left[9\alpha^2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + \ln x \right]_1^3 = \\ &= \left[-\frac{9\alpha^2}{2x^2} + \ln x \right]_1^3 = -\frac{\alpha^2}{2} + \ln 3 + \frac{9\alpha^2}{2} = \mathbf{4\alpha^2 + \ln 3} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_1^2 \frac{4x^2 + 6x - 8}{x^3} dx = \int_1^2 \left(4 \frac{1}{x} + 6 \frac{1}{x^2} - 8x^{-3} \right) dx = \int_1^2 \left(4 \frac{1}{x} - 6 \left(-\frac{1}{x^2} \right) - 8x^{-3} \right) dx = \\ &= \left[4 \ln x - 6 \frac{1}{x} - 8 \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \left[4 \ln x - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} \right]_1^2 = (4 \ln 2 - 2) + 2 = \mathbf{4 \ln 2} . \end{aligned}$$

$$I_9 = \int_4^9 \sqrt{x} dx = \int_4^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_4^9 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_4^9 = \frac{2}{3} 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{9^3} - \frac{2}{3} \sqrt{4^3} = \frac{38}{3}.$$

$$I_{10} = \int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 3 \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_1^4 3x^{\frac{3}{2}} dx = \left[3 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_1^4 = \left[3 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \frac{6}{5} 4^{\frac{5}{2}} - \frac{6}{5} =$$

$$= \frac{6}{5} \sqrt{4^5} - \frac{6}{5} = \frac{186}{5}.$$

$$I_{11} = \int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{3x+1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_1^4 \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left[3 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 =$$

$$= \left[\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \left[2\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} \right]_1^4 = 2 \left[x\sqrt{x} + \sqrt{x} \right]_1^4 = 2(10-2) = 16.$$

$$I_{12} = \int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x^4} dx = \int_1^8 \frac{x - x^{\frac{2}{3}}}{x^4} dx = \int_1^8 \left(x^{-3} - x^{\frac{2}{3}-4} \right) dx = \int_1^8 \left(x^{-3} - x^{-\frac{10}{3}} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-\frac{10}{3}+1}}{-\frac{10}{3}+1} \right]_1^8 = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{x^{-\frac{7}{3}}}{-\frac{7}{3}} \right]_1^8 = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} \right]_1^8 = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{7x^2 \sqrt[3]{x}} \right]_1^8 =$$

$$= \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{3}{7\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2} \right) \right]_1^8 = \frac{1}{64} \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \right) = \frac{15}{224}.$$

$$I_{13} = \int_1^4 \left(\sigma \nu(\pi x) + \sqrt{x} \right) dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \sigma \nu(\pi x) + x^{\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{\pi} \cdot (\pi x)' \cdot \sigma \nu(\pi x) + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{\pi} \eta \mu(\pi x) + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[\frac{1}{\pi} \eta \mu(\pi x) + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 =$$

$$= \left[\frac{\eta \mu(\pi x)}{\pi} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{\cancel{\eta \mu} 4 \pi^0}{\pi} + \frac{16}{3} - \frac{\cancel{\eta \mu} \pi^0}{\pi} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$I_{14} = \int_0^1 \left(x^2 + 1 + \sigma \nu(\pi x) \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + 1 + \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \sigma \nu(\pi x) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + 1 + \frac{1}{\pi} \cdot (\pi x)' \cdot \sigma \nu(\pi x) \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{\pi} \eta \mu(\pi x) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{\cancel{\eta\mu}\pi^0}{\pi} - \frac{\cancel{\eta\mu}0^0}{\pi} = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} I_{15} &= \int_0^1 (e^{2x} - \eta\mu(\pi x)) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot 2e^{2x} - \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \eta\mu(\pi x) \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot (2x)' e^{2x} + \frac{1}{\pi} \cdot (\pi x)' \cdot (-\eta\mu(\pi x)) \right) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{\pi} \sigma\upsilon\nu(\pi x) \right]_0^1 = \\ &= \frac{e^2}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\pi}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{\pi} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{16} &= \int_0^1 \left(4e^{2x-1} + 5\sqrt{\frac{1}{e^{5x}}} \right) dx = \int_0^1 \left(2 \cdot 2e^{2x-1} + 5\sqrt{e^{-5x}} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(2 \cdot (2x-1)' e^{2x-1} + 5e^{-\frac{5x}{2}} \right) dx = \int_0^1 \left(2 \cdot (2x-1)' e^{2x-1} - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) \cdot e^{-\frac{5x}{2}} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(2 \cdot (2x-1)' e^{2x-1} - 2 \cdot \left(-\frac{5x}{2} \right)' e^{-\frac{5x}{2}} \right) dx = \left[2e^{2x-1} - 2e^{-\frac{5x}{2}} \right]_0^1 = 2e - 2\sqrt{e^{-5}} - \frac{2}{e} + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{17} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{e^{2x}} - 3^x \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2e^{-2x} - 3^x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-(-2x)' e^{-2x} - \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x \ln 3 \right) dx = \\ &= \left[-e^{-2x} - \frac{1}{\ln 3} 3^x \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{e} - \frac{\sqrt{3}}{\ln 3} + 1 + \frac{1}{\ln 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{18} &= \int_1^2 \left(2^x + \frac{3x+2}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x \ln 2 + 3 \frac{1}{x} - 2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{\ln 2} 2^x + 3 \ln x - 2 \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{4}{\ln 2} + 3 \ln 2 - 1 - \frac{2}{\ln 2} + 2 = \frac{2}{\ln 2} + 3 \ln 2 + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{19} &= \int_2^5 \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{2x+2}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{(x^2+2x-3)'}{x^2+2x-3} dx = \\ &= \frac{1}{2} [\ln |x^2+2x-3|]_2^5 = \frac{1}{2} (\ln 32 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

$$I_{20} = \int_0^\pi \frac{e^x + \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x} dx = \int_0^\pi \frac{(e^x + \eta\mu x)'}{e^x + \eta\mu x} dx = [\ln |e^x + \eta\mu x|]_0^\pi = \ln e^\pi - \ln 1^0 = \pi.$$

$$I_{21} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{(1+e^t)'}{1+e^t} dt = [\ln(1+e^t)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln \frac{1+e}{2}.$$

$$I_{22} = \int_0^1 \sqrt{\frac{e^x}{1+e^{-x}}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^x+1}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = 2 \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{2\sqrt{e^x+1}} dx = 2 [\sqrt{e^x+1}]_0^1 =$$

$$= 2(\sqrt{e+1} - \sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned} I_{23} &= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{2e^x - e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{2e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(2 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} - 1 \right) dx = \left[2 \ln(e^x + 1) - x \right]_0^1 = 2 \ln(e + 1) - 1 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{e + 1}{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{24} &= \int_0^1 \frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{1 + e \cdot e^x}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x - e^x + e \cdot e^x}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x + (e - 1)e^x}{1 + e^x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(1 + (e - 1) \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx = \int_0^1 \left(1 + (e - 1) \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} \right) dx = \left[x + (e - 1) \ln(1 + e^x) \right]_0^1 = \\ &= 1 + (e - 1) \ln(e + 1) - (e - 1) \ln 2 = 1 + (e - 1) \ln \frac{e + 1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{25} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{(\sigma \nu x)'}{\sigma \nu x} \right) dx = \left[-\ln |\sigma \nu x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= -\ln \left| \sigma \nu \frac{\pi}{4} \right| - (-\ln |\sigma \nu 0|) = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\ln 1^0) = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$I_{26} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 x} - 1 \right) dx = \left[\varepsilon \varphi x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} I_{27} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta \mu^2 x \sigma \nu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x}{\eta \mu^2 x \sigma \nu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 x} + \frac{1}{\eta \mu^2 x} \right) dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 x} - \left(-\frac{1}{\eta \mu^2 x} \right) \right) dx = \left[\varepsilon \varphi x - \sigma \varphi x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \cancel{(1 - 1)^0} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{28} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta \mu t \sigma \nu t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu^2 t + \sigma \nu^2 t}{\eta \mu t \sigma \nu t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\eta \mu t}{\sigma \nu t} + \frac{\sigma \nu t}{\eta \mu t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{\eta \mu t}{\sigma \nu t} + \frac{\sigma \nu t}{\eta \mu t} \right) dt = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{(\sigma \nu t)'}{\sigma \nu t} + \frac{(\eta \mu t)'}{\eta \mu t} \right) dt = \left[-\ln |\sigma \nu t| + \ln |\eta \mu t| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^0 - \left(-\ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{1}{2} \right) = \ln \sqrt{3} - \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 1^0} + \cancel{\ln 2} = \end{aligned}$$

$$= \ln 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

1853. Είναι :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sigma \nu \nu x - \eta \mu x) e^{-x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sigma \nu \nu x \cdot e^{-x} - \eta \mu x \cdot e^{-x}) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left((\eta \mu x)' \cdot e^{-x} + \eta \mu x \cdot (e^{-x})' \right) dx = \left[\eta \mu x \cdot e^{-x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\eta \mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot e^{\frac{\pi}{2}} = \eta \mu \frac{\pi}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} (2x \eta \mu x + x^2 \sigma \nu \nu x) dx = \int_0^{\pi} \left((x^2)' \eta \mu x + x^2 (\eta \mu x)' \right) dx = \left[x^2 \eta \mu x \right]_0^{\pi} = 0.$$

$$I_3 = \int_1^{\pi} \left(\ln x \cdot \sigma \nu \nu x + \frac{\eta \mu x}{x} \right) dx = \int_1^{\pi} \left(\ln x \cdot (\eta \mu x)' + (\ln x)' \cdot \eta \mu x \right) dx = \left[\eta \mu x \cdot \ln x \right]_1^{\pi} = 0.$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{x e^x - e^x}{x^2} dt = \int_1^2 \frac{(e^x)' x - e^x (x)'}{x^2} dt = \left[\frac{e^x}{x} \right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{2\eta \mu x}{x^3} - \frac{\sigma \nu \nu x}{x^2} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x}{x^3} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2x \eta \mu x - x^2 \sigma \nu \nu x}{x^4} dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(x^2)' \eta \mu x - x^2 (\eta \mu x)'}{x^4} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\eta \mu x)' \cdot x^2 - \eta \mu x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} dx = - \left[\frac{\eta \mu x}{x^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \frac{\eta \mu \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

$$I_6 = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} dx = \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^e = \frac{1}{e}.$$

$$I_7 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx = \int_e^{e^2} \frac{(x)' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} dx = \left[\frac{x}{\ln x} \right]_e^{e^2} = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2}.$$

$$I_8 = \int_1^e \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} dx = \int_1^e \frac{x - 2x \ln x}{x^4} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} dx = \left[\frac{\ln x}{x^2} \right]_1^e = \frac{1}{e^2}.$$

1854. i. Είναι : $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{(3x-2)'}{3x-2} dx = \frac{1}{3} [\ln |3x-2|]_1^2 = \frac{1}{3} \ln 4.$

ii. Είναι :

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx = [\ln |x^2-x+1|]_0^1 = \ln 1^0 - \ln 1^0 = 0.$$

iii. Είναι :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2+x} dx &= \int_2^3 \frac{2x+1-2x}{x^2+x} dx = \int_2^3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x^2+x} \right) dx = \int_2^3 \left(\frac{(x^2+x)'}{x^2+x} - 2 \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \left[\ln|x^2+x| - 2\ln|x+1| \right]_2^3 = (\ln 12 - 2\ln 4) - (\ln 6 - 2\ln 3) = \\ &= \ln \frac{12}{16} - \ln \frac{6}{9} = \ln \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

iv. Είναι $\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$x+1 = (A+B)x + (-2A-B), \text{ οπότε :}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+B=1 \\ A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=3 \\ A=-2 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε : $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$ επομένως :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx &= \int_{-1}^0 \left(-2 \frac{1}{x-1} + 3 \frac{1}{x-2} \right) dx = \left[-2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| \right]_{-1}^0 = \\ &= (-2\ln 1^0 + 3\ln 2) - (-2\ln 2 + 3\ln 3) = 3\ln 2 + 2\ln 2 - 3\ln 3 = \mathbf{5\ln 2 - 3\ln 3}.\end{aligned}$$

v. Κάνουμε τη διαίρεση :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x^2 - 4 \\ -x^3 & x \\ \hline & 2x + 1 \end{array}$$

Έτσι έχουμε :

$$x^3 - 2x + 1 = x(x^2 - 4) + 2x + 1, \text{ οπότε :}$$

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 2x + 1}{x^2 - 4} = x + \frac{2x + 1}{x^2 - 4}.$$

$$\text{Είναι } \frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx+2B}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+2B}{(x+2)(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$2x+1 = (A+B)x + (-2A+2B), \text{ οπότε :}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B=4 \\ -2A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4B=5 \\ -2A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{5}{4} \\ -2A+\frac{5}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} B = \frac{5}{4} \\ -2A = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{5}{4} \\ A = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε : $\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2}$ επομένως :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3-2x+1}{x^2-4} dx &= \int_0^1 \left(x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \ln|x+2| + \frac{5}{4} \ln|x-2| \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{5}{4} \ln 1 - \left(\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{5}{4} \ln 2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

vi. Κάνουμε τη διαίρεση :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 10x - 10 & x^2 - x - 12 \\ \hline -x^3 + x^2 + 12x & x+1 \\ \hline x^2 + 2x - 10 & \\ \hline -x^2 + x + 12 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} x^3 - 10x - 10 &= \\ &= (x+1)(x^2 - x - 12) + 3x + 2, \text{ οπότε :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 10x - 10}{x^2 - x - 12} &= \\ &= \frac{(x+1)(x^2 - x - 12) + 3x + 2}{x^2 - x - 12} = \\ &= x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 12}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \frac{3x+2}{x^2-x-12} = \frac{3x+2}{(x-4)(x+3)}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-3, 4\}$ έχουμε :

$$\frac{3x+2}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-4B}{(x-4)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-4B}{(x-4)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$3x+2 = (A+B)x + (3A-4B)$, οπότε :

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A+4B=12 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7A=14 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A=2 \\ 6-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε : $\frac{3x+2}{x^2-x-12} = \frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+3}$ επομένως :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12} dx &= \int_{-2}^0 \left(x + 1 + \frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+3} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x-4| + \ln|x+3| \right]_{-2}^0 = \\ &= 2 \ln 4 + \ln 3 - (2 \ln 6 + \ln 1) = 2 \ln \frac{4}{6} + \ln 3 = 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3 = \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

vii. Είναι $\frac{x^2 - x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x^2 - x + 4}{x(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x^2 - x + 4}{x(x-1)(x-2)}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 4}{x(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + \Gamma x(x-1)}{x(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{A(x^2 - 3x + 2) + B(x^2 - 2x) + \Gamma(x^2 - x)}{x(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx^2 - 2Bx + \Gamma x^2 - \Gamma x}{x(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{(A+B+\Gamma)x^2 + (-3A-2B-\Gamma)x + 2A}{x(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x^2 - x + 4 = (A+B+\Gamma)x^2 + (-3A-2B-\Gamma)x + 2A, \text{ οπότε :}$$

$$\begin{cases} A+B+\Gamma=1 \\ -3A-2B-\Gamma=-1 \\ 2A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+\Gamma=1 \\ -3A-2B-\Gamma=-1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+B+\Gamma=1 \\ -6-2B-\Gamma=-1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+\Gamma=-1 \\ -2B-\Gamma=5 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+\Gamma=-1 \\ -B=4 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+\Gamma=-1 \\ B=-4 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+\Gamma=-1 \\ B=-4 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma=3 \\ B=-4 \\ A=2 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε : $\frac{x^2 - x + 4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x} + \frac{-4}{x-1} + \frac{3}{x-2}$ επομένως :

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x^2 - x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx &= \int_3^4 \left(\frac{2}{x} - 4 \frac{1}{x-1} + 3 \frac{1}{x-2} \right) dx = [2 \ln|x| - 4 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2|]_3^4 = \\ &= 2 \ln 4 - 4 \ln 3 + 3 \ln 2 - (2 \ln 3 - 4 \ln 2 + 3 \ln 1^0) = \\ &= 2 \ln 4 - 4 \ln 3 + 3 \ln 2 - 2 \ln 3 + 4 \ln 2 = 4 \ln 2 + 7 \ln 2 - 6 \ln 3 = \\ &= \mathbf{11 \ln 2 - 6 \ln 3}. \end{aligned}$$

viii. Κάνουμε τη διαίρεση :

$2x^4 - x^3 - 16x^2 + 0x - 9$	$x^3 - 9x$
$-2x^4 \quad + 18x^2$	$2x - 1$
$-x^3 + 2x^2 \quad - 9$	
$x^3 \quad - 9x$	
$2x^2 - 9x - 9$	

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} 2x^4 - x^3 - 16x^2 - 9 &= \\ &= (2x-1)(x^3 - 9x) + 2x^2 - 9x - 9, \end{aligned}$$

οπότε :

$$\begin{aligned} \frac{2x^4 - x^3 - 16x^2 - 9}{x^3 - 9x} &= \\ &= \frac{(2x-1)(x^3 - 9x) + 2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} = \\ &= 2x - 1 + \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} = \frac{2x^2 - 9x - 9}{x(x-3)(x+3)}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 9x - 9}{x(x-3)(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{\Gamma}{x+3} = \frac{A(x-3)(x+3) + Bx(x+3) + \Gamma x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{A(x^2 - 9) + B(x^2 + 3x) + \Gamma(x^2 - 3x)}{x(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{Ax^2 - 9A + Bx^2 + 3Bx + \Gamma x^2 - 3\Gamma x}{x(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{(A+B+\Gamma)x^2 + (3B-3\Gamma)x - 9A}{x(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$2x^2 - 9x - 9 = (A+B+\Gamma)x^2 + (3B-3\Gamma)x - 9A, \text{ οπότε :}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} A+B+\Gamma=2 \\ 3B-3\Gamma=-9 \\ -9A=-9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+\Gamma=2 \\ B-\Gamma=-3 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+B+\Gamma=2 \\ B-\Gamma=-3 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+\Gamma=1 \\ B-\Gamma=-3 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} B+\Gamma=1 \\ 2B=-2 \\ A=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B+\Gamma=1 \\ B=-1 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+\Gamma=1 \\ B=-1 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma=2 \\ B=-1 \\ A=1 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι τελικά παίρνουμε : } \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} \text{ επομένως :}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} dx &= \int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + 2 \frac{1}{x+3} \right) dx = \\ &= \left[x^2 - x + \ln|x| - \ln|x-3| + 2\ln|x+3| \right]_1^2 = \\ &= 2 + \ln 2 - \ln 1^0 + 2\ln 5 - \left(\ln 1^0 - \ln 2 + 2\ln 4 \right) = \\ &= 2 + \ln 2 + 2\ln 5 + \ln 2 - 2\ln 2^2 = 2 + 2\ln 5 + 2\ln 2 - 4\ln 2 = \\ &= 2 + 2\ln 5 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

1855. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1} = \frac{\alpha x^2 + \alpha + \beta x^2 + \gamma x + \beta x + \gamma}{(x+1)(x^2+1)} = \\ &= \frac{(\alpha+\beta)x^2 + (\beta+\gamma)x + \alpha+\gamma}{(x+1)(x^2+1)} \Leftrightarrow. \end{aligned}$$

$$x-1 = (\alpha+\beta)x^2 + (\beta+\gamma)x + \alpha+\gamma, \text{ οπότε :}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta + \gamma = 1 \\ -\beta + \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta + \gamma = 1 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε : $\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}.$

ii. Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1} dx &= \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \left[-\ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

1856. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1} = \frac{\alpha x(x-1) + \beta(x-1) + \gamma x^2}{x^2(x-1)} = \\ &= \frac{\alpha x^2 - \alpha x + \beta x - \beta + \gamma x^2}{x^2(x-1)} = \frac{(\alpha + \gamma)x^2 + (\beta - \alpha)x - \beta}{x^2(x-1)} \Leftrightarrow . \end{aligned}$$

$x+1 = (\alpha + \gamma)x^2 + (\beta - \alpha)x - \beta$, οπότε :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \alpha = 1 \\ -\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -1 - \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε :

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}.$$

ii. Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{x+1}{x^3-x^2} dx &= \int_2^4 \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx = \int_2^4 \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \left[-2 \ln x + \frac{1}{x} + 2 \ln(x-1) \right]_2^4 = \\ &= -2 \ln 4 + \frac{1}{4} + 2 \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} = 2(\ln 2 + \ln 3 - \ln 4) - \frac{1}{4} = 2 \ln \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = 2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

1857. i. Είναι : $\int_1^2 6x^2 y dx = y \int_1^2 6x^2 dx = y \int_1^2 2 \cdot 3x^2 dx = y [2x^3]_1^2 = 14y.$

ii. Είναι :

$$\int_1^2 6x^2 y dy = 3x^2 \int_1^2 2y dy = 3x^2 [y^2]_1^2 = 3x^2 \cdot 3 = 9x^2.$$

ii. Είναι :

$$\int_1^2 6x^2 y du = 6x^2 y \int_1^2 1 du = 6x^2 y [u]_1^2 = 6x^2 y.$$

1858. i. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_1^x (x-2) dt + \int_x^1 (2x-5) dy &= 0 \Leftrightarrow (x-2) \int_1^x 1 dt + (2x-5) \int_x^1 1 dy = 0 \Leftrightarrow \\ (x-2)[t]_1^x + (2x-5)[y]_x^1 &= 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) + (2x-5)(1-x) = 0 \Leftrightarrow \\ (x-2)(x-1) - (2x-5)(x-1) &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2-2x+5) = 0 \Leftrightarrow \\ (x-1)(3-x) = 0 &\Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ή } x=3}. \end{aligned}$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^1 2t \ln x dt &= \int_1^e \frac{x}{t} dt - 1 \Leftrightarrow \ln x \int_0^1 2t dt = x \int_1^e \frac{1}{t} dt - 1 \Leftrightarrow \ln x \cdot [t^2]_0^1 = x [\ln t]_1^e - 1 \Leftrightarrow \\ \ln x &= x - 1. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $\boxed{x=1}$.

iii. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_2^x (x-1) dt &\geq 2x^2 - 9x + 7 \Leftrightarrow (x-1) \int_2^x 1 dt \geq 2x^2 - 9x + 7 \Leftrightarrow \\ (x-1)[t]_2^x &\geq 2x^2 - 9x + 7 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 2x^2 - 9x + 7 \Leftrightarrow \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 2x^2 - 9x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0. \end{aligned}$$

Είναι $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=1$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
x^2-6x+5	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Επομένως $\boxed{1 \leq x \leq 5}$.

1859. Έστω $\int_1^2 f(x) dt = \alpha$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) \left[\int_1^2 f(x) dx \right] dx &= \int_1^2 x \left[\int_1^2 f(x) dx \right] dx - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) \cdot \alpha dx = \int_1^2 x \cdot \alpha dx - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \alpha \int_1^2 f(x) dx &= \alpha \int_1^2 x dx - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \alpha^2 &= \frac{3}{2} \alpha - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0. \end{aligned}$$

Είναι $\Delta=1$ και $\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=\frac{1}{2}$, δηλαδή $\boxed{\int_1^2 f(x) dt = 1 \text{ ή } \int_1^2 f(x) dt = \frac{1}{2}}$.

1860. Έχουμε :

$$\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x)g(t)dt \right) dx = \int_0^1 \left(f(x) \int_2^3 g(t)dt \right) dx = \int_0^1 f(x) \cdot 5dx = 5 \int_0^1 f(x)dx = 5 \cdot 2 = \mathbf{10}.$$

1861. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 (f^2(t) - 2xt^2f(t) + x^2t^4)dt = \int_0^1 f^2(t)dt - 2x \int_0^1 t^2f(t)dt + x^2 \int_0^1 t^4dt = \\ &= \int_0^1 f^2(t)dt - 2x \int_0^1 t^2f(t)dt + x^2 \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \int_0^1 f^2(t)dt - 2x \int_0^1 t^2f(t)dt + \frac{1}{5}x^2. \end{aligned}$$

$$\text{Παραγωγίζοντας έχουμε : } g'(x) = -2 \int_0^1 t^2f(t)dt + \frac{2}{5}x.$$

$$\text{Αν } \int_0^1 t^2f(t)dt = \beta, \text{ τότε } g'(x) = \frac{2}{5}x - 2\beta.$$

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x - 2\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = 2\beta \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5\beta}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	5β	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\emptyset$	+
$g(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η g παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο**

$$\text{στο } x_0 = 5\beta \Leftrightarrow x_0 = 5 \int_0^1 t^2f(t)dt.$$

1862. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 (x^2 - 2t\sin x + g(t))dt = x^2 \int_0^1 1dt - \sin x \int_0^1 2tdt + \int_0^1 g(t)dt = \\ &= x^2 [t]_0^1 - \sin x \cdot [t^2]_0^1 + \int_0^1 g(t)dt = x^2 - \sin x + \int_0^1 g(t)dt. \end{aligned}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) οπότε παραγωγίζοντας έχουμε :

$$f'(x) = 2x + \eta\mu x.$$

Είναι $f''(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1.

Είναι $f'(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $f'(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι 1-1. Οπότε :

$$- \text{ Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}, \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η f παρουσιάζει **ένα μόνο ακρότατο**, το οποίο είναι **ολικό ελάχιστο**,

$$\text{στο } x_0 = 0 \text{ το } f(0) = -1 + \int_0^1 g(t)dt.$$

ii. Είναι $\int_1^2 t^2 \left(\int_0^1 g(x) dx \right) dt = 14$, οπότε αν $\int_0^1 g(x) dx = k$, τότε :

$$\int_1^2 t^2 k dt = 14 \Leftrightarrow k \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = 14 \Leftrightarrow \frac{7}{3}k = 14 \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow \int_0^1 g(x) dx = 6.$$

Έτσι είναι $f(0) = -1 + \int_0^1 g(t) dt = -1 + 6 = 5$ και αφού το $f(0)$ είναι ολικό ελάχιστο

τότε θα ισχύει : $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1863. i. Για $x > 0$ είναι :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \lambda x}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \lambda = \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}}{x} + \lambda = \cancel{x} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \lambda = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \lambda$$

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \lambda \right) = 1 \Leftrightarrow \cancel{x} + \lambda = \cancel{x} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0}.$$

ii. Για $\lambda = 0$ είναι $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, άρα :

$$\int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

1864. Η f είναι περιττή οπότε ισχύει :

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \alpha(-x)^3 + \beta(-x) + \gamma = -(ax^3 + \beta x + \gamma) \Leftrightarrow$$

$$-\cancel{\alpha x^3} - \beta \cancel{x} + \gamma = -\cancel{\alpha x^3} - \beta \cancel{x} - \gamma \Leftrightarrow 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\gamma = 0}}.$$

Έτσι έχουμε $f(x) = ax^3 + \beta x$ με $f'(x) = 3ax^2 + \beta$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$ οπότε ισχύει :

– Το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,

– Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και

– Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική, άρα και στο $x_0 = 1$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + \beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = -3a}}.$$

Τέλος έχουμε :

$$\int_0^2 f(x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 (ax^3 + \beta x) dx = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{\beta x^2}{2} \right]_0^2 = 2 \Leftrightarrow 4a + 2\beta = 2 \Leftrightarrow$$

$$2a + \beta \stackrel{\beta = -3a}{=} 1 \Leftrightarrow 2a - 3a = 1 \Leftrightarrow -a = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -1}}, \text{ οπότε είναι και } \underline{\underline{\beta = 3}}.$$

Άρα $\boxed{f(x) = -x^3 + 3x, x \in \mathbb{R}}$ η ζητούμενη πολωνυμική συνάρτηση.

1865. i. Αφού η f έχει σημείο καμπής το $K(1,2)$ τότε θα είναι $f''(1) = 0$ και $f(1) = 2$.

Είναι $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$.

Έτσι έχουμε :

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 2\beta = -6\alpha \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = -3\alpha}} \text{ και}$$

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \xrightarrow{\beta = -3\alpha} \alpha - 3\alpha = 2 \Leftrightarrow -2\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}}, \text{ οπότε είναι και } \underline{\underline{\beta = 3}}.$$

ii. Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και παράγωγο $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow (3x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}) \text{ ή } (-x + 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}),$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$		$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		T.E.	T.M.		

Συνεπώς :

ο f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_1 = 0$ το $f(0) = 0$.

ο f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_2 = 2$ το $f(2) = 4$.

$$\text{iii. Είναι : } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (-x^3 + 3x^2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^2 f(x) dx = 4}.$$

1866. Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(2,8)$ είναι $f(-1) = 3$ και $f(2) = 8$

Η f' είναι συνεχής άρα και ολοκληρώσιμη. Έχουμε λοιπόν :

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx = [f(x)]_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = 8 - 3 = 5 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-1}^2 f'(x) dx = 5}.$$

1867. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

γωνία $\frac{\pi}{3}$, άρα είναι $f'(\alpha) = \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = \beta$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

γωνία $\frac{\pi}{4}$, άρα είναι $f'(\beta) = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$.

Η f'' είναι συνεχής άρα και ολοκληρώσιμη. Συνεπώς έχουμε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx = [f'(x)]_{\alpha}^{\beta} = f'(\beta) - f'(\alpha) = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx = 1 - \sqrt{3}}.$$

1868. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^x (f(x) + f'(x)) dx = \int_0^1 (e^x f(x) + e^x f'(x)) dx = \int_0^1 ((e^x)' f(x) + e^x (f(x))') dx = \\ &= [e^x f(x)]_0^1 = ef(1) - f(0) = e \frac{3}{e} - 1 = 3 - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{I = 2}. \end{aligned}$$

- 1869.** Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ το 0, άρα $f(1) = 0$ και $f'(1) = 0$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ οπότε είναι $f(0) = -1$.

Έχουμε :

$$\int_0^1 (f(x) - f''(x))e^x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) + f'(x) - f'(x) - f''(x))e^x dx = 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (f(x) + f'(x))e^x dx - \int_0^1 (f'(x) + f''(x))e^x dx = 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (e^x f(x) + e^x f'(x)) dx - \int_0^1 (e^x f'(x) + e^x f''(x)) dx = 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \left((e^x)' f(x) + e^x (f(x))' \right) dx - \int_0^1 \left((e^x)' f'(x) + e^x (f'(x))' \right) dx = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left[e^x f(x) \right]_0^1 - \left[e^x f'(x) \right]_0^1 = 2 \Leftrightarrow e f(1) - f(0) - \left(e f'(1) - f'(0) \right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$-(-1) + f'(0) = 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1, \text{ δηλαδή η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο } A \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda = 1.$$

Η ευθεία $x + y = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda' = -1$.

Είναι $\lambda \cdot \lambda' = -1$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A είναι **κάθετη** στην ευθεία $x + y = 0$.

- 1870.** Έχουμε :

$$\int_0^\pi (f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^\pi \left((f(x))' \sin x + f(x) (\sin x)' \right) dx = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x) \sin x \right]_0^\pi = 2 \Leftrightarrow f(\pi) \sin \pi - f(0) \sin 0 = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot (-1) - f(0) \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$-3 - f(0) = 2 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = -5}.$$

- 1871.** Έχουμε :

$$f'(x) = 1 + g'(x) \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 1 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) - g(x) = x + c \xrightarrow{x=0} f(0) - g(0) = c \Leftrightarrow \cancel{g(0)} - 1 - \cancel{g(0)} = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -1}}.$$

Άρα είναι $f(x) - g(x) = x - 1$. Είναι :

$$\int_1^a f(x) dx - \int_1^a g(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^a (f(x) - g(x)) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^a (x - 1) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - a = 0 \Leftrightarrow a \left(\frac{a}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a = 0 \text{ ή } a = 2}.$$

- 1872.** Έχουμε : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \eta \mu x f'(x)) e^{f(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot e^{f(x)} + \eta \mu x \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)) dx =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\eta \mu x)' \cdot e^{f(x)} + \eta \mu x \cdot (e^{f(x)})' \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu x \cdot e^{f(x)})' dx = \\
 &= \left[\eta \mu x \cdot e^{f(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \eta \mu \frac{\pi}{2} \cdot e^{f(\frac{\pi}{2})} = 1 \cdot e^1 = e \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma \nu \nu x + \eta \mu x f'(x)) e^{f(x)} dx = e}.
 \end{aligned}$$

1873. i. Η f' είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) e^{f(x)} dx = 0 &\Leftrightarrow \int_{\beta}^{\alpha} (e^{f(x)})' dx = 0 \Leftrightarrow \left[e^{f(x)} \right]_{\beta}^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{f(\beta)} - e^{f(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow \\
 e^{f(\beta)} &= e^{f(\alpha)} \Leftrightarrow \boxed{f(\beta) = f(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

ii. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a) = f(\beta)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** στο διάστημα (a, β) .

1874. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln(ax) dx &= \int_1^e \ln(\beta x) dx \Leftrightarrow \int_1^e \ln(ax) dx - \int_1^e \ln(\beta x) dx = 0 \Leftrightarrow \\
 \int_1^e (\ln(ax) - \ln(\beta x)) dx &= 0 \Leftrightarrow \int_1^e \ln \frac{\alpha \cancel{x}}{\beta \cancel{x}} dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^e \ln \frac{\alpha}{\beta} dx = 0 \Leftrightarrow \\
 \ln \frac{\alpha}{\beta} [x]_1^e &= 0 \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha}{\beta} \cdot (e-1) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha}{\beta} = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\boxed{\alpha = \beta}.
 \end{aligned}$$

1875. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \frac{x^2+4}{x^2+3} dx + \int_3^1 \frac{1}{x^2+3} dx &= \int_1^3 \frac{x^2+4}{x^2+3} dx - \int_1^3 \frac{1}{x^2+3} dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2+4}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx = \\
 &= \int_1^3 \frac{x^2+3}{x^2+3} dx = \int_1^3 1 dx = [x]_1^3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\int_1^3 \frac{x^2+4}{x^2+3} dx + \int_3^1 \frac{1}{x^2+3} dx = 2}.
 \end{aligned}$$

1876. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{x^2+1} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2x\eta \mu x}{(x^2+1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{x^2+1} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\eta \mu x}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma \nu \nu x}{x^2+1} - \frac{2x\eta \mu x}{(x^2+1)^2} \right) dx = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x \cdot (x^2+1) - 2x\eta \mu x}{(x^2+1)^2} dx = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta \mu x)' \cdot (x^2+1) - \eta \mu x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta \mu x}{x^2+1} \right)' dx =
 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\eta\mu x}{x^2+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}+1} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}+4} = \frac{4}{\pi^2+4} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2x\eta\mu x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{4}{\pi^2+4}}.$$

1877. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \ln t dt - \int_{\beta}^{\alpha} \ln \frac{\mu}{t} dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \ln t dt + \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{\mu}{t} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\ln t + \ln \frac{\mu}{t} \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \ln \left(t \cdot \frac{\mu}{t} \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \ln \mu dt = \\ &= \ln \mu [t]_{\alpha}^{\beta} = (\beta - \alpha) \ln \mu \Leftrightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \ln t dt - \int_{\beta}^{\alpha} \ln \frac{\mu}{t} dt = (\beta - \alpha) \ln \mu}. \end{aligned}$$

1878. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_4^{\kappa^2} \frac{2x^2+23}{x^2+7} dx + \int_{\kappa^2}^4 \frac{2-x^2}{x^2+7} dx &= 36 \Leftrightarrow \int_4^{\kappa^2} \frac{2x^2+23}{x^2+7} dx - \int_4^{\kappa^2} \frac{2-x^2}{x^2+7} dx = 36 \Leftrightarrow \\ \int_4^{\kappa^2} \left(\frac{2x^2+23}{x^2+7} - \frac{2-x^2}{x^2+7} \right) dx &= 36 \Leftrightarrow \int_4^{\kappa^2} \frac{2x^2+23-2+x^2}{x^2+7} dx = 36 \Leftrightarrow \\ \int_4^{\kappa^2} \frac{3x^2+21}{x^2+7} dx &= 36 \Leftrightarrow \int_4^{\kappa^2} \frac{3(x^2+7)}{x^2+7} dx = 36 \Leftrightarrow \int_4^{\kappa^2} 3 dx = 36 \Leftrightarrow 3[x]_4^{\kappa^2} = 36 \Leftrightarrow \\ 3(\kappa^2-4) &= 36 \Leftrightarrow \kappa^2-4=12 \Leftrightarrow \kappa^2=16 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=4 \text{ ή } \kappa=-4}. \end{aligned}$$

1879. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_2^{\kappa} \frac{3x^2-1}{x^2+4} dx - \int_{\kappa}^2 \frac{9-x^2}{x^2+4} dx &= 12 \Leftrightarrow \int_2^{\kappa} \frac{3x^2-1}{x^2+4} dx + \int_2^{\kappa} \frac{9-x^2}{x^2+4} dx = 12 \Leftrightarrow \\ \int_2^{\kappa} \left(\frac{3x^2-1}{x^2+4} + \frac{9-x^2}{x^2+4} \right) dx &= 12 \Leftrightarrow \int_2^{\kappa} \frac{3x^2-1+9-x^2}{x^2+4} dx = 12 \Leftrightarrow \\ \int_2^{\kappa} \frac{2x^2+8}{x^2+4} dx &= 12 \Leftrightarrow \int_2^{\kappa} \frac{2(x^2+4)}{x^2+4} dx = 12 \Leftrightarrow \int_2^{\kappa} 2 dx = 12 \Leftrightarrow 2[x]_2^{\kappa} = 12 \Leftrightarrow \\ 2(\kappa-2) &= 12 \Leftrightarrow \kappa-2=6 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=8}. \end{aligned}$$

1880. i. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_2^1 \frac{f(x)}{x^2} dx &= 1 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = 1 \Leftrightarrow \\ \int_1^2 \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \right) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} dx = 1 \Leftrightarrow \\ \int_1^2 \frac{(f(x))' \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} dx &= 1 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]_1^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \frac{f(2)}{2} - f(1) &= 1 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{2} - 6 = 1 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{2} = 7 \Leftrightarrow \boxed{f(2)=14}. \end{aligned}$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 x(2f(x) + xf'(x))dx = \int_1^2 (2xf(x) + x^2f'(x))dx = \int_1^2 \left((x^2)'f(x) + x^2f'(x) \right)dx = \\
 &= \int_1^2 (x^2f(x))'dx = [x^2f(x)]_1^2 = 4f(2) - f(1) = 4 \cdot 14 - 6 = 56 - 6 = \mathbf{50}.
 \end{aligned}$$

1881. i. Είναι :

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 (2xf(2) - f(4))dx &= -16 \Leftrightarrow [x^2f(2) - xf(4)]_0^2 = -16 \Leftrightarrow \\
 4f(2) - 2f(4) &= -16 \Leftrightarrow 2f(2) - f(4) = -8 \Leftrightarrow \boxed{f(4) = 2f(2) + 8}.
 \end{aligned}$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^4 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_4^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_2^4 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_2^4 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_2^4 \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \right) dx = \\
 &= \int_2^4 \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} dx = \int_2^4 \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} dx = \int_2^4 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \left[\frac{f(x)}{x} \right]_2^4 = \\
 &= \frac{f(4)}{4} - \frac{f(2)}{2} = \frac{2f(2) + 8}{4} - \frac{f(2)}{2} = \frac{f(2) + 4}{2} - \frac{f(2)}{2} = \mathbf{2}.
 \end{aligned}$$

1882. i. Έχουμε :

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx + \int_{10}^4 f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_4^{10} f(x)dx = 8 - 5 = \mathbf{3}.$$

ii. Έχουμε :

$$\int_9^{10} f(x)dx = \int_9^0 f(x)dx + \int_0^{10} f(x)dx = -\int_0^9 f(x)dx + \int_0^{10} f(x)dx = -6 + 8 = \mathbf{2}.$$

iii. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_7^9 f(x)dx &= \int_7^4 f(x)dx + \int_4^0 f(x)dx + \int_0^9 f(x)dx = \int_7^4 f(x)dx - \int_4^0 f(x)dx + \int_0^9 f(x)dx = \\
 &= -2 - 3 + 6 = \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

1883. i. Έχουμε :

$$\int_5^2 f(x)dx = -\int_2^5 f(x)dx = \mathbf{-3}.$$

ii. Έχουμε :

$$\int_5^7 f(x)dx = \int_5^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -\int_1^5 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -2 + 5 = \mathbf{3}.$$

iii. Έχουμε :

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_5^2 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx = 2 - 3 = \mathbf{-1}.$$

iv. Έχουμε :

$$\int_2^7 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -(-1) + 5 = \mathbf{6}.$$

1884. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική και

εκθετική αντίστοιχα. Εξετάζουμε τη συνέχεια και στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x^2 + 3) = 3 \text{ και } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, συνεπώς και σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε είναι και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της, άρα και στο $[-1, 1]$. Συνεπώς υπάρχει το $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-2x^2 + 3) dx + \int_0^1 (e^x + 2) dx = \\ &= \left[-2 \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^0 + \left[e^x + 2x \right]_0^1 = -\left(\frac{2}{3} - 3 \right) + (e + 2 - 1) = \frac{7}{3} + e + 1 = \frac{10}{3} + e. \end{aligned}$$

- 1885.** Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Εξετάζουμε τη συνέχεια και στο $x_0 = 0$:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\eta\mu x + 2x + 3) = 3 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma\upsilon\nu x + 2x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, συνεπώς και σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε είναι και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της, άρα και στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς υπάρχει το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 (\eta\mu x + 2x + 3) dx + \int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu x + 2x + 2) dx = \\ &= \left[-\sigma\upsilon\nu x + x^2 + 3x \right]_{-\pi}^0 + \left[\eta\mu x + x^2 + 2x \right]_0^{\pi} = \\ &= -\sigma\upsilon\nu 0 - (-\sigma\upsilon\nu(-\pi) + \pi^2 - 3\pi) + \eta\mu \pi^0 + \pi^2 + 2\pi = \\ &= -1 + \sigma\upsilon\nu(-\pi) - \pi^2 + 3\pi + \pi^2 + 2\pi = 5\pi - 1 + \sigma\upsilon\nu \pi = 5\pi - 1 - 1 = 5\pi - 2. \end{aligned}$$

- 1886. i.** Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμικές συναρτήσεις. Για να είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$ πρέπει να ισχύει

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f(2) = 4, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 - 5x + 2) = 4a - 8 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 6) = 2b - 6.$$

$$\text{Άρα } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4 = 4a - 8 \Leftrightarrow 4a = 12 \Leftrightarrow \boxed{a = 3} \text{ και}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4 = 2b - 6 \Leftrightarrow 2b = 10 \Leftrightarrow \boxed{b = 5}.$$

ii. Έχουμε λοιπόν :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2, & x < 2 \\ 4, & x = 2. \\ 5x - 6, & x > 2 \end{cases}$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε είναι και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της, άρα και στο $[0, 3]$. Συνεπώς υπάρχει το $\int_0^3 f(x) dx$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^2 (3x^2 - 5x + 2) dx + \int_2^3 (5x - 6) dx = \\ &= \left[x^3 - 5\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[5\frac{x^2}{2} - 6x \right]_2^3 = 2 + \left(\frac{45}{2} - 18 \right) - (-2) = \frac{45}{2} - 14 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

1887. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πολωνυμικές συναρτήσεις. Για να είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$ πρέπει να ισχύει

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - \alpha x + 5) = 8 - \alpha \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x + \beta) = \alpha + \beta.$$

$$\text{Άρα } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 8 - \alpha = \alpha + \beta \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 8 - 2\alpha}}.$$

Επιπλέον ισχύει :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= 12 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 12 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 (3x^2 - \alpha x + 5) dx + \int_1^2 (\alpha x + \beta) dx &= 12 \Leftrightarrow \left[x^3 - \alpha \frac{x^2}{2} + 5x \right]_0^1 + \left[\alpha \frac{x^2}{2} + \beta x \right]_1^2 = 12 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$6 - \alpha \frac{1}{2} + 2\alpha + 2\beta - \left(\alpha \frac{1}{2} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow 6 - \alpha \frac{1}{2} + 2\alpha + 2\beta - \alpha \frac{1}{2} - \beta = 12 \Leftrightarrow$$

$$6 - \alpha + 2\alpha + \beta = 12 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \stackrel{\beta = 8 - 2\alpha}{\Leftrightarrow} \alpha + 8 - 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2} \text{ και } \boxed{\beta = 4}.$$

1888. i. Έστω $f(x) = |x^2 - x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολωνυμική, άρα και ολοκληρώσιμη.

Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 2$. Έχουμε :

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1 \text{ και κάνουμε πίνακα}$$

προσήμων :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	$\bigcirc$	- $\bigcirc$	+

Η συνάρτηση f πλέον έχει την εξής μορφή :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2 \\ -x^2 + x + 2, & -1 < x < 2 \end{cases}.$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-2}^2 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^2 f(x) dx = \\
&= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx + \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \\
&= \left(-\frac{5}{6} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) - \left(\frac{5}{6} - 2 \right) = -\frac{5}{6} + \cancel{2} + \frac{8}{3} - \cancel{2} - \frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = \\
&= -\frac{5}{3} + 8 = \frac{19}{3}.
\end{aligned}$$

ii. Ισχύει $\eta\mu x < x$ για κάθε $x > 0$ και $\eta\mu x > x$ για κάθε $x < 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\eta\mu x - x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2(\eta\mu x - x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(x - \eta\mu x) dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (2\eta\mu x - 2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 2\eta\mu x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - x^2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - x^2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-2 + \frac{\pi^2}{4} \right) + \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) = -2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} - 2 = \\
&= \frac{\pi^2}{2} - 4 = \frac{\pi^2 - 8}{2}.
\end{aligned}$$

iii. Έστω $f(x) = |x| + 3|x-1|$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, άρα και ολοκληρώσιμη.

Βρίσκουμε το πρόσημο της f . Έχουμε :

$x = 0$ και $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ και κάνουμε πίνακα προσημών :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	$\oplus$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$\oplus$	$+$

Έτσι :

- για $x \leq 0$ είναι

$$f(x) = -x - 3(x-1) =$$

$$= -x - 3x + 3 = -4x + 3.$$

- για $0 < x \leq 1$ είναι $f(x) = x - 3(x-1) = x - 3x + 3 = -2x + 3$ και
- για $x > 1$ είναι $f(x) = x + 3(x-1) = x + 3x - 3 = 4x - 3$.

Η συνάρτηση f πλέον έχει την εξής μορφή :

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3, & x \leq 0 \\ -2x + 3, & 0 < x \leq 1. \\ 4x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Συνεπώς :

$$I_3 = \int_{-2}^2 (|x| + 3|x-1|) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^0 (-4x+3)dx + \int_0^1 (-2x+3)dx + \int_1^2 (4x-3)dx = \\
&= \left[-2x^2+3x\right]_{-2}^0 + \left[-x^2+3x\right]_0^1 + \left[2x^2-3x\right]_1^2 = 14+2+3 = \mathbf{19}.
\end{aligned}$$

iv. Έστω $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως εκθετική, άρα και ολοκληρώσιμη.

Είναι :

- $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$ και
- $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$.

Η συνάρτηση f πλέον έχει την εξής μορφή :

$$f(x) = \begin{cases} -e^x + 1, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \\
&= \left[-e^x + x\right]_{-1}^0 + \left[e^x - x\right]_0^1 = -1 - (-e^{-1} - 1) + e - 1 - 1 = e + \frac{1}{e} - 2.
\end{aligned}$$

1889. i. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 \frac{\eta\mu 3x}{3x} \stackrel{u=3x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ u \rightarrow 0^-}} 3 \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = \mathbf{3}.$$

ii. Αφού η f είναι συνεχής τότε θα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow 3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \alpha x + \beta \sin x) \Leftrightarrow 3 = \beta \cdot \sin 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 3}}.$$

Για $x > 0$ είναι $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \sin x$, άρα $f'(x) = 2x + \alpha - \beta \eta\mu x$.

Έχουμε :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow \cancel{2} \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \eta\mu \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow \cancel{\pi} + \alpha - \beta \cdot 1 = \cancel{\pi} \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = \beta}}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $\boxed{\alpha = \beta = 3}$.

iii. Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 3x + 3\sin x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς είναι :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi (x^2 + 3x + 3\sin x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 3\eta\mu x \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} + 3 \frac{\pi^2}{2} + 3 \cancel{\eta\mu \pi}^0 \Leftrightarrow \\
&\boxed{\int_0^\pi f(x) dx = \frac{2\pi^3 + 9\pi^2}{6}}.
\end{aligned}$$

1890. Έχουμε :

$$f'(x) = f^2(x) \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x), \text{ άρα είναι :}$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 (\ln f(x))' dx = [\ln f(x)]_0^1 = \ln f(1) - \ln f(0) = \ln \frac{f(1)}{f(0)} =$$

$$= \ln \frac{2f(1)}{f(0)} = \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{I = \ln 2}.$$

1891. Τα $f(\alpha)$ και $-f(\beta)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 5x - 1 = 0$, άρα σύμφωνα με τους τύπους Vietta είναι :

$$f(\alpha) + (-f(\beta)) = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{f(\alpha) - f(\beta) = \frac{5}{3}}} \text{ και}$$

$$f(\alpha) \cdot (-f(\beta)) = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{3} \Rightarrow -f(\alpha) \cdot f(\beta) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(\alpha) \cdot f(\beta) = \frac{1}{3}}}.$$

Έχουμε :

$$f^3(x) + f'(x) = 0 \stackrel{f^2(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \text{ άρα είναι :}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{f(x)} \right)' dx = \left[\frac{1}{f(x)} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{f(\beta)} - \frac{1}{f(\alpha)} = \\ &= \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{f(\alpha)f(\beta)} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5 \Leftrightarrow \boxed{I = 5}. \end{aligned}$$

1892. i. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \stackrel{(+\infty) - (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0} \end{aligned}$$

ii. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{\cancel{x}} = -(\sqrt{1+0} + 1) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -2}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \stackrel{(+\infty)+(-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \\ &= 0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -2x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

iii. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cancel{x} \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \cancel{x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1, \text{ άρα :} \\ f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x = \\ &= \cancel{x} - \cancel{\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{x^2 + 1} - \cancel{x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\boxed{f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0}. \end{aligned}$$

iv. Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε :

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) &= 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = -f(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -\frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} &= -\frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ άρα} \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int_0^1 \left(-\frac{f'(x)}{f(x)} \right) dx = -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -[\ln(f(x))]_0^1 = \\ &= -(\ln f(1) - \ln f(0)) = -(\ln(\sqrt{2} - 1) - \cancel{\ln 1^0}) = -\ln(\sqrt{2} - 1) = \\ &= \ln(\sqrt{2} - 1)^{-1} = \ln \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \ln(\sqrt{2} + 1) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(\sqrt{2}+1).$$

1893. i. Είναι :

$$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow f'(x)f'(x) + f(x)f''(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' f'(x) + f(x)(f'(x))' = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow (f(x)f'(x))' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) = \frac{e^x}{2} + c_1 \xrightarrow{x=0} f(0)f'(0) = \frac{1}{2} + c_1 \Leftrightarrow 1 \cdot 0 = \frac{1}{2} + c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = -\frac{1}{2}}}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f(x)f'(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = \frac{e^x - 1}{2} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = (e^x - x)' \Leftrightarrow f^2(x) = e^x - x + c_2 \xrightarrow{x=0} f^2(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow 1^2 = 1 + c_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}.$$

$$\text{Άρα } f^2(x) = e^x - x.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ παίρνουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 1 > 0.$$

$$\text{Άρα } f^2(x) = e^x - x = g(x) \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = \sqrt{e^x - x}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Είναι $f(x) = \sqrt{e^x - x}$ με $f'(x) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}$ και από τη δοσμένη σχέση

$$\text{παίρνουμε } [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = \frac{e^x}{2} \Rightarrow$$

$$f(x)f''(x) = \frac{e^x}{2} - [f'(x)]^2 = \frac{e^x}{2} - \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x - x)}, \text{ οπότε :}$$

$$I = \int_1^2 \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1} dx = \int_1^2 \frac{1}{e^x - 1} f(x)f''(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{e^x - 1} \left(\frac{e^x}{2} - \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x - x)} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x}{2} - \frac{1}{\cancel{e^x - 1}} \cdot \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x - x)} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{e^x - 1}{e^x - x} \right) dx = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln |e^x - 1| - \frac{1}{4} \ln |e^x - x| \right]_1^2 = \\
&= \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1) - \frac{1}{4} \ln(e^2 - 2) - \left(\frac{1}{2} \ln(e - 1) - \frac{1}{4} \ln(e - 1) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1) - \frac{1}{4} \ln(e^2 - 2) - \frac{1}{4} \ln(e - 1) = \frac{1}{4} \ln(e^2 - 1)^2 - \frac{1}{4} (\ln(e^2 - 2) + \ln(e - 1)) = \\
&= \frac{1}{4} \ln(e^2 - 1)^2 - \frac{1}{4} \ln(e^2 - 2)(e - 1) = \frac{1}{4} [\ln(e^2 - 1)^2 - \ln(e^2 - 2)(e - 1)] = \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(e^2 - 1)^2}{(e^2 - 2)(e - 1)} = \frac{1}{4} \ln \frac{(e^2 - 1)(e^2 - 1)}{(e^2 - 2)(e - 1)} = \frac{1}{4} \ln \frac{(e^2 - 1) \cancel{(e - 1)} (e + 1)}{(e^2 - 2) \cancel{(e - 1)}} = \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(e^2 - 1)(e + 1)}{e^2 - 2} = \frac{1}{4} \ln \frac{e^3 + e^2 - e - 1}{e^2 - 2}.
\end{aligned}$$

1894. i. Είναι :

$$\int_0^2 (xf'(x^2) + 1) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2xf'(x^2) + 1 \right) dx = 4 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot (x^2)' f'(x^2) + 1 \right) dx = 4 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} f(x^2) + x \right]_0^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} f(4) + 2 - \frac{1}{2} f(0) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} f(4) - 2 = \frac{1}{2} f(0) \Leftrightarrow f(4) - 4 = f(0).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ με $g'(x) = f'(x) - 1$ και $g(0) = f(0)$

καθώς και $g(4) = f(4) - 4 = f(0)$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 4]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο

$(0, 4)$ με $g(0) = g(4)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον

ένα $\rho \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) = 1$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{4}$ με $h'(x) = f'(x) - \frac{x}{2}$ και

$h(0) = f(0)$ καθώς και $h(4) = f(4) - 4 = f(0)$.

Η h είναι συνεχής στο $[0, 4]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο

$(0, 4)$ με $h(0) = h(4)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον

ένα $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{\xi}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\xi}{2}$.

1895. i. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^1 f(x) dx = c \text{ θα είναι } f(x) = x + 2c. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$c = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2c) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2cx \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2} + 2c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2},$$

$$\text{δηλαδή } f(x) = x + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = c \text{ θα είναι } f(x) = \frac{x^2}{2} + c. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} c &= \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^2 \frac{\frac{x^2}{2} + c}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2 + 2c}{2x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + c \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + c \ln x \right]_1^2 = \\ &= 1 + c \ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + c \ln 2 \Rightarrow c = \frac{3}{4} + c \ln 2 \Leftrightarrow (1 - \ln 2)c = \frac{3}{4} \Leftrightarrow c = \frac{3}{4(1 - \ln 2)}, \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή } \boxed{f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4(1 - \ln 2)}, x \in \mathbb{R}}.$$

iii. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = c \text{ θα είναι } c = f(x) + e^x \Leftrightarrow f(x) = c - e^x. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$c = \int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = \int_0^1 e^{1-x} (c - e^x) dx = \int_0^1 (ce^{1-x} - e) dx = [-ce^{1-x} - ex]_0^1 = -c - e + ce \Rightarrow$$

$$c = -c - e + ce \Leftrightarrow (2 - e)c = -e \Leftrightarrow c = \frac{e}{e - 2},$$

$$\text{δηλαδή } f(x) = \frac{e}{e - 2} - e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -e^x + \frac{e}{e - 2}, x \in \mathbb{R}}.$$

iv. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 tf(t) dt$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^1 tf(t) dt = c \text{ θα είναι } c = f(x) - x^2 - \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(x) = x^2 + \frac{15}{4} + c. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$c = \int_0^1 tf(t) dt = \int_0^1 t \left(t^2 + \frac{15}{4} + c \right) dt = \int_0^1 \left(t^3 + \frac{15}{4}t + ct \right) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{15}{4} \cdot \frac{t^2}{2} + c \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{15}{8} + \frac{1}{2}c = \frac{17}{8} + \frac{1}{2}c \Rightarrow c = \frac{17}{8} + \frac{1}{2}c \Leftrightarrow \frac{1}{2}c = \frac{17}{8} \Leftrightarrow c = \frac{17}{4},$$

$$\text{δηλαδή } f(x) = x^2 + \frac{15}{4} + \frac{17}{4} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^2 + 8, x \in \mathbb{R}}.$$

v. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t) dt$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^1 f(t) dt = c \text{ θα είναι :}$$

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(t) dt \Leftrightarrow f(x) = x^2 + x \int_0^1 f(t) dt \stackrel{\int_0^1 f(t) dt = c}{\Leftrightarrow} f(x) = x^2 + cx.$$

Έτσι έχουμε :

$$c = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t^2 + ct) dt = \left[\frac{t^3}{3} + c \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}c \Rightarrow c = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}c \Leftrightarrow c = \frac{2}{3},$$

$$\text{δηλαδή } \boxed{f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x, x \in \mathbb{R}}.$$

1896. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^1 f(x) dx = \alpha \text{ θα είναι } f'(x) = \alpha. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = \alpha \Leftrightarrow (f(x))' = (\alpha x)' \Leftrightarrow f(x) = \alpha x + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \alpha x + 1.$$

Συνεπώς :

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (\alpha x + 1) dx = \left[\alpha \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \alpha \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \alpha = \alpha \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}}.$$

1897. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t) dt$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^1 f(t) dt = \alpha \text{ θα είναι } f'(x) = f(x) + \alpha. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = f(x) + \alpha \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \alpha \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = \alpha e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' e^{-x} + f(x)(e^{-x})' = (-\alpha e^{-x})' \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (-\alpha e^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-x} = -\alpha e^{-x} + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = -\alpha + c \Leftrightarrow 1 = -\alpha + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1+\alpha}}.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{-x} = -\alpha e^{-x} + 1 + \alpha \Leftrightarrow f(x) = -\alpha + (1 + \alpha)e^x.$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-\alpha + (1+\alpha)e^x) dx = [-\alpha x + (1+\alpha)e^x]_0^1 = \\ &= -\alpha + (1+\alpha)e - 1 - \alpha = -2\alpha + \alpha e + e - 1 \Rightarrow \alpha = -2\alpha + \alpha e + e - 1 \Leftrightarrow \\ 3\alpha - \alpha e &= e - 1 \Leftrightarrow (3-e)\alpha = e - 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{e-1}{3-e}.\end{aligned}$$

Άρα

$$f(x) = -\frac{e-1}{3-e} + \left(1 + \frac{e-1}{3-e}\right)e^x = \frac{1-e}{3-e} + \frac{2}{3-e}e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{3-e}e^x + \frac{1-e}{3-e}, x \in \mathbb{R}}.$$

1898. Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(t) dt$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^2 f(t) dt = \alpha \text{ θα είναι :}$$

$$\frac{3}{4} \int_0^2 x f(t) dt = f'(x) \Leftrightarrow \frac{3}{4} x \int_0^2 f(t) dt = f'(x) \Leftrightarrow \frac{3}{4} x \cdot \alpha = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{3\alpha}{4} x \Leftrightarrow (f(x))' = \left(\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{3\alpha x^2}{8} + c \xrightarrow{x=4} f(4) = 6\alpha + c \Leftrightarrow$$

$$16 = 6\alpha + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 16 - 6\alpha}}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{3\alpha x^2}{8} + 16 - 6\alpha.$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{3\alpha x^2}{8} + 16 - 6\alpha \right) dx = \left[\frac{\alpha x^3}{8} + 16x - 6\alpha x \right]_0^2 = \\ &= \alpha + 32 - 12\alpha = -11\alpha + 32 \Rightarrow \alpha = -11\alpha + 32 \Leftrightarrow 12\alpha = 32 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{\cancel{3} \frac{8}{\cancel{3}} x^2}{8} + 16 - 6 \frac{8}{3} = x^2 + \cancel{16} - \cancel{16} = x^2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}}.$$

1899. α. Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(t) dt$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε αν

$$\int_0^2 f(t) dt = \alpha \text{ θα είναι :}$$

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\alpha - 45 = 10\alpha x^3 + 3\alpha x - 45, \text{ συνεπώς :}$$

$$\alpha = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (10\alpha x^3 + 3\alpha x - 45) dx = \left[10\alpha \frac{x^4}{4} + 3\alpha \frac{x^2}{2} - 45x \right]_0^2 =$$

$$= 40\alpha + 6\alpha - 90 = 46\alpha - 90 \Rightarrow \alpha = 46\alpha - 90 \Leftrightarrow 45\alpha = 90 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Άρα $\boxed{f(x) = 20x^3 + 6x - 45, x \in \mathbb{R}}.$

β. Είναι :

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} \stackrel{h=-t}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{g'(x-t) - g'(x)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-t)}{t} \Rightarrow$$

$$\boxed{g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}}.$$

γ. i. Είναι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2} g''(x) + \frac{1}{2} g''(x) = g''(x).$$

Οπότε έχουμε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x \Leftrightarrow$$

$$(g'(x))' = (5x^4 + 3x^2)' \Leftrightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} g'(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

Άρα :

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow (g(x))' = (x^5 + x^4 + x) \Leftrightarrow g(x) = x^5 + x^4 + x + c_2 \stackrel{x=0}{\Rightarrow}$$

$$g(0) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Έτσι βρήκαμε $\boxed{g(x) = x^5 + x^4 + x + 1, x \in \mathbb{R}}.$

ii. Είναι :

$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και άρα είναι και 1-1.

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με κατά παράγοντες ολοκλήρωση

1900. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 (x^2 - 2x) e^x dx = \int_0^2 (x^2 - 2x) (e^x)' dx = \left[(x^2 - 2x) e^x \right]_0^2 - \int_0^2 (x^2 - 2x)' e^x dx = \\ &= - \int_0^2 (2x - 2) e^x dx = - \int_0^2 (2x - 2) (e^x)' dx = - \left(\left[(2x - 2) e^x \right]_0^2 - \int_0^2 (2x - 2)' e^x dx \right) = \\ &= - \left(2e^2 + 2 - \int_0^2 2e^x dx \right) = - \left(2e^2 + 2 - \left[2e^x \right]_0^2 \right) = - \left(\cancel{2e^2} + 2 - \cancel{2e^2} + 2 \right) = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2}{e^{2x}} dx = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)' dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} (x^2)' e^{-2x} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2e^2} + \int_0^1 \frac{1}{2} x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^2} + \int_0^1 x \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)' dx = \\ &= -\frac{1}{2e^2} + \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} (x)' e^{-2x} \right) dx = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2e^2} + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 = -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) = -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 x^2 3^x dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right)' dx = \left[\frac{1}{\ln 3} x^2 3^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\ln 3} (x^2)' 3^x dx = \\ &= \frac{3}{\ln 3} - \int_0^1 \frac{1}{\ln 3} 2x \cdot 3^x dx = \frac{3}{\ln 3} - \int_0^1 \frac{1}{\ln 3} 2x \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right)' dx = \\ &= \frac{3}{\ln 3} - \left(\left[\frac{1}{\ln^2 3} 2x \cdot 3^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\ln^2 3} (2x)' 3^x dx \right) = \frac{3}{\ln 3} - \left(\frac{6}{\ln^2 3} - \int_0^1 \frac{2}{\ln^2 3} 3^x dx \right) = \\ &= \frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} + \left[\frac{2}{\ln^3 3} \cdot 3^x \right]_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{4}{\ln^3 3}. \end{aligned}$$

1901. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (-\eta \mu x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sigma \upsilon \nu x)' dx = - \left(\left[x \sigma \upsilon \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \sigma \upsilon \nu x dx \right) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu x dx = \left[\eta \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2) \eta \mu x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2) (-\eta \mu x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2) (\sigma \upsilon \nu x)' dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\left[(1-x^2) \sigma \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2)' \sigma \nu x dx \right) = - \left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sigma \nu x dx \right) = \\
&= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x (\eta \mu x)' dx = 1 - \left(\left[2x \eta \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)' \eta \mu x dx \right) = 1 - \left(\pi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \eta \mu x dx \right) = \\
&= 1 - \pi + \left[-2 \sigma \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \pi + 2 = \mathbf{3 - \pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 3x) \sigma \nu 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 3x) \left(\frac{\eta \mu 4x}{4} \right)' dx = \\
&= \left[\frac{1}{4} (x^2 + 3x) \eta \mu 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (x^2 + 3x)' \eta \mu 4x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2x + 3) \eta \mu 4x dx = \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2x + 3) \left(-\frac{\sigma \nu 4x}{4} \right)' dx = \left[\frac{1}{16} (2x + 3) \sigma \nu 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16} (2x + 3)' \sigma \nu 4x dx = \\
&= \frac{1}{16} (\pi + 3) - \frac{3}{16} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16} \cdot 2 \sigma \nu 4x dx = \frac{\pi}{16} + \frac{3}{16} - \frac{3}{16} - \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\eta \mu 4x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

1902. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 (x^3 - 2x) \ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right)' \ln x dx = \\
&= \left[\left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \cdot (\ln x)' dx = - \int_1^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \\
&= - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{4} - x \right) dx = - \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = - \left[(1-2) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \right) \right] = \mathbf{\frac{9}{16}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^e 8x \ln \sqrt{x} dx = \int_1^e (4x^2)' \ln \sqrt{x} dx = \left[4x^2 \ln \sqrt{x} \right]_1^e - \int_1^e 4x^2 (\ln \sqrt{x})' dx = \\
&= 4e^2 \ln e^{\frac{1}{2}} - \int_1^e 4x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^2 - \int_1^e 2x dx = 2e^2 - \left[x^2 \right]_1^e = 2e^2 - (e^2 - 1) = \\
&= \mathbf{e^2 + 1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \ln x dx = - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} \right)' \ln x dx = - \left(\left[\frac{1}{x} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} (\ln x)' dx \right) = \\
&= - \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \right) = - \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 \right) = - \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \mathbf{\frac{1 - \ln 2}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx = \int_1^2 x^{-3} \ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right)' \ln x dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \ln x \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} (\ln x)' dx = \\
 &= -\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^2 x^{-3} dx = -\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \\
 &= -\frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x^2} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} \ln 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x dx = \int_1^4 2 \left(\sqrt{x} \right)' \ln x dx = \left[2\sqrt{x} \cdot \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 2\sqrt{x} (\ln x)' dx = \\
 &= 4 \ln 4 - \int_1^4 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx = 8 \ln 2 - 2 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 8 \ln 2 - 4 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 8 \ln 2 - 4 \left[\sqrt{x} \right]_1^4 = \\
 &= \mathbf{8 \ln 2 - 4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx = \int_1^{e^2} x^{\frac{1}{2}} \ln x dx = \int_1^{e^2} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right)' \ln x dx = \frac{2}{3} \int_1^{e^2} \left(x^{\frac{3}{2}} \right)' \ln x dx = \\
 &= \frac{2}{3} \left(\left[x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)' dx \right) = \frac{2}{3} \left(e^3 \ln e^2 - \int_1^{e^2} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \\
 &= \frac{2}{3} \left(e^3 \ln e^2 - \int_1^{e^2} x^{\frac{1}{2}} dx \right) = \frac{2}{3} \left(2e^3 - \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^{e^2} \right) = \frac{2}{3} \left(2e^3 - \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^2} \right) = \\
 &= \frac{2}{3} \left(2e^3 - \frac{2}{3} (e^3 - 1) \right) = \frac{4}{3} e^3 - \frac{4}{9} e^3 + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} e^3 + \frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_7 &= \int_1^e x \ln^2 x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot (\ln^2 x)' dx = \\
 &= \frac{e^2}{2} \ln^2 e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \\
 &= \frac{e^2}{2} - \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx \right) = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \\
 &= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{e^2 - 1}}{4}.
 \end{aligned}$$

$$I_8 = \int_{-1}^0 \ln(x+2) dx = \int_{-1}^0 (x)' \ln(x+2) dx = \left[x \ln(x+2) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 x (\ln(x+2))' dx =$$

$$= -\int_{-1}^0 \frac{x}{x+2} dx = -\int_{-1}^0 \frac{x+2-2}{x+2} dx = -\int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = -\left[x - 2\ln(x+2)\right]_{-1}^0 =$$

$$= -(-2\ln 2 + 1) = \mathbf{2\ln 2 - 1}.$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \left[x \ln \frac{1-x}{1+x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\ln \frac{1-x}{1+x} \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{\cancel{1+x}}{1-x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 3 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x^2)'}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 3 - \left[\ln(1-x^2) \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \ln 3 - \ln 3 + \ln 4 = -\frac{3}{2} \ln 3 + \mathbf{2\ln 2}.$$

$$I_{10} = \int_1^2 x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln \frac{x+1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln \frac{x+1}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \left(\ln \frac{x+1}{x} \right)' dx =$$

$$= 2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} \right)' dx =$$

$$= 2(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^{\cancel{2}}}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx =$$

$$= 2 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx = 2 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= 2 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left[x - \ln(x+1) \right]_1^2 = 2 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} (2 - \ln 3 - 1 + \ln 2) =$$

$$= 2 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \mathbf{\frac{3}{2} \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}}.$$

$$I_{11} = \int_1^e x \ln(xe^x) dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln(xe^x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(xe^x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln(xe^x))' dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} \ln e^{e+1} - \frac{1}{2} - \int_1^e \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x} e^x} (xe^x)' dx = \frac{e^2(e+1)}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x}{e^x} (e^x + xe^x) dx =$$

$$= \frac{e^3}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x}{\cancel{e^x}} \cdot \cancel{e^x} (1+x) dx = \frac{e^3}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e (x+x^2) dx =$$

$$= \frac{e^3}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{5}{6} \right) =$$

$$= \frac{e^3}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^3}{6} + \frac{5}{12} = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{12}.$$

Για την εύρεση του I_{12} εργαζόμαστε ως εξής :

Έστω $f(x) = |\ln x - 1|$, $x > 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως λογαριθμική, άρα και ολοκληρώσιμη. Είναι :

- $\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln e \Leftrightarrow x \geq e$ και
- $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$.

Η συνάρτηση f πλέον έχει την εξής μορφή : $f(x) = \begin{cases} -\ln x + 1, & 0 < x < e \\ \ln x - 1, & x \geq e \end{cases}$.

Συνεπώς :

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{e^2} f(x) dx = \\ &= \int_1^e (-\ln x + 1) dx + \int_e^{e^2} (\ln x - 1) dx = -\int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx + \int_e^{e^2} \ln x dx - \int_e^{e^2} 1 dx = \\ &= -\int_1^e (x)' \ln x dx + [x]_1^e + \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx - [x]_e^{e^2} = \\ &= -\left([x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx \right) + e - 1 + [x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x (\ln x)' dx - e^2 + e = \\ &= -\left(e - \int_1^e 1 dx \right) + e^2 \ln e^2 - e - \int_e^{e^2} 1 dx - e^2 + 2e - 1 = \\ &= -e + [x]_1^e + 2e^2 - [x]_e^{e^2} - e^2 + e - 1 = e - 1 + 2e^2 - e^2 + e - e^2 - 1 = 2e - 2. \end{aligned}$$

1903. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cdot \eta \mu x dx = [e^x \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\eta \mu x)' dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma \nu x dx = \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sigma \nu x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \left([e^x \sigma \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sigma \nu x)' dx \right) = \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta \mu x dx \right) = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I_1 \Rightarrow I_1 = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^{2x} \sigma \nu 4x dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' \cdot \sigma \nu 4x dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \sigma \nu 4x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^{2x} (\sigma \nu 4x)' dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{2\pi}-1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} 4\eta\mu 4x dx = \frac{e^{2\pi}-1}{2} + \int_0^\pi (e^{2x})' \eta\mu 4x dx = \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{2} + [e^{2x} \eta\mu 4x]_0^\pi - \int_0^\pi e^{2x} (\eta\mu 4x)' dx = \frac{e^{2\pi}-1}{2} - 4 \int_0^\pi e^{2x} \sigma\nu\nu 4x dx = \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{2} - 4I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{e^{2\pi}-1}{2} - 4I_2 \Leftrightarrow 5I_2 = \frac{e^{2\pi}-1}{2} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{e^{2\pi}-1}{10}}. \\
I_3 &= \int_0^\pi \frac{2\sigma\nu\nu x}{e^x} dx = 2 \int_0^\pi e^{-x} \sigma\nu\nu x dx = -2 \int_0^\pi (-e^{-x}) \sigma\nu\nu x dx = -2 \int_0^\pi (e^{-x})' \sigma\nu\nu x dx = \\
&= -2 \left([e^{-x} \sigma\nu\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x} (\sigma\nu\nu x)' dx \right) = -2 \left(-e^{-\pi} - 1 + \int_0^\pi e^{-x} \eta\mu x dx \right) = \\
&= 2e^{-\pi} + 2 + 2 \int_0^\pi (e^{-x})' \eta\mu x dx = 2e^{-\pi} + 2 + 2 \left([e^{-x} \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x} (\eta\mu x)' dx \right) = \\
&= 2e^{-\pi} + 2 - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sigma\nu\nu x dx = 2e^{-\pi} + 2 - I_3 \Rightarrow I_3 = 2e^{-\pi} + 2 - I_3 \Leftrightarrow \\
2I_3 &= 2e^{-\pi} + 2 \Leftrightarrow \boxed{I_3 = e^{-\pi} + 1}.
\end{aligned}$$

1904. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^2 x} x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sigma\varphi x)' \cdot x dx = [-\sigma\varphi x \cdot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x \cdot (x)' dx = \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x dx = \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\nu\nu x}{\eta\mu x} dx = \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} dx = \frac{\pi}{4} + [\ln(\eta\mu x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\eta\mu \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \\
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sigma\nu\nu x)}{\sigma\nu\nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x} \ln(\sigma\nu\nu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi x)' \cdot \ln(\sigma\nu\nu x) dx = \\
&= [\varepsilon\varphi x \cdot \ln(\sigma\nu\nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x \cdot (\ln(\sigma\nu\nu x))' dx = \\
&= \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \cdot \ln\left(\sigma\nu\nu \frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\nu\nu x} \cdot (-\eta\mu x) dx = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x dx = \\
&= \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\nu\nu^2 x} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sigma\nu\nu^2 x}{\sigma\nu\nu^2 x} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x} - 1 \right) dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \ln 2 + [\varepsilon \varphi x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \ln 2 + 1 - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{4 - \pi}{4}. \\
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu x \cdot \ln(1 + \sigma \nu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu x)' \cdot \ln(1 + \sigma \nu x) dx = \\
&= [\eta \mu x \cdot \ln(1 + \sigma \nu x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \cdot (\ln(1 + \sigma \nu x))' dx = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \cdot \frac{1}{1 + \sigma \nu x} \cdot (-\eta \mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sigma \nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{1 + \sigma \nu x} dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sigma \nu x)(1 + \sigma \nu x)}{1 + \sigma \nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu x) dx = [x - \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \\
I_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \varepsilon \varphi^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 x} - 1 \right) dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x \frac{1}{\sigma \nu^2 x} - x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma \nu^2 x} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon \varphi x)' \cdot x dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= [\varepsilon \varphi x \cdot x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi x \cdot (x)' dx - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi x dx - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx - \frac{\pi^2}{32} = \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma \nu x)'}{\sigma \nu x} dx - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} + [\ln(\sigma \nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\sigma \nu \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{32} = \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}. \\
I_5 &= \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_0^1 (x)' \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \\
&= \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot (\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' dx = \\
&= \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx = \\
&= \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\
&= \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - [\sqrt{x^2 + 1}]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sigma\varphi x)}{\sigma\nu v^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\nu v^2 x} \ln(\sigma\varphi x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi x)' \ln(\sigma\varphi x) dx = \\
&= \left[\varepsilon\varphi x \cdot \ln(\sigma\varphi x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x \cdot (\ln(\sigma\varphi x))' dx = \\
&= \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \cdot \ln\left(\sigma\varphi \frac{\pi}{4}\right) - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \cdot \ln\left(\sigma\varphi \frac{\pi}{6}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\varphi x} \cdot \left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right) dx = \\
&= \cancel{\ln 1^0} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \ln \sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu v x} \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu v x} \cdot \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln 3 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\eta\mu^2 x}}{\sigma\nu v^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\eta\mu^2 x}} dx = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{6} \ln 3 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\nu v^2 x} dx = -\frac{\sqrt{3}}{6} \ln 3 + [\varepsilon\varphi x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \ln 3 + \frac{3-\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_e^{e^2} \left(\ln x + \frac{1}{x^2} \right) e^x dx = \int_e^{e^2} \ln x \cdot e^x dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \int_e^{e^2} \ln x \cdot (e^x)' dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \\
&= \left[\ln x \cdot e^x \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} (\ln x)' \cdot e^x dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \\
&= \ln e^2 \cdot e^{e^2} - \ln e \cdot e^e - \int_e^{e^2} \frac{1}{x} e^x dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = 2e^{e^2} - e^e - \int_e^{e^2} \frac{1}{x} (e^x)' dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \\
&= 2e^{e^2} - e^e - \left(\left[\frac{1}{x} e^x \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} \right)' e^x dx \right) + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \\
&= 2e^{e^2} - e^e - \left(\frac{1}{e^2} e^{e^2} - \frac{1}{e} e^e + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx \right) + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \\
&= 2e^{e^2} - e^e - \frac{1}{e^2} e^{e^2} + \frac{1}{e} e^e - \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} e^x dx = \left(2 - \frac{1}{e^2} \right) e^{e^2} + \left(\frac{1}{e} - 1 \right) e^e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\eta\mu x}{\sigma\nu v^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \cdot \varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\nu v^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot 2\varepsilon\varphi x \cdot (\varepsilon\varphi x)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (\varepsilon\varphi^2 x)' dx = \\
&= \left[x\varepsilon\varphi^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x)' \varepsilon\varphi^2 x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\nu v^2 x} dx = \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sigma\nu v^2 x}{\sigma\nu v^2 x} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\nu v^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\pi}{4} - [\varepsilon\varphi x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1. \\
I_9 &= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \int_e^{e^2} (x)' \frac{1}{\ln x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \\
&= \left[\frac{x}{\ln x} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \left(\frac{1}{\ln x} \right)' dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \\
&= \frac{e^2}{2} - e - \int_e^{e^2} \cancel{x} \left(-\frac{1}{\ln^2 x} \right) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \frac{e^2}{2} - e + \int_e^{e^2} \cancel{\frac{1}{\ln^2 x}} dx - \int_e^{e^2} \cancel{\frac{1}{\ln^2 x}} dx = \\
&= \frac{e^2 - 2e}{2} \quad \dot{\eta} \\
I_9 &= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx = \left[\frac{x}{\ln x} \right]_e^{e^2} = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2}.
\end{aligned}$$

1905. Έχουμε : $f'(x) = 6\alpha x + \beta \sin x - \beta x \eta \mu x \xrightarrow{x=0} f'(0) = \beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=1}$.

Επιπλέον είναι :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi (3\alpha x^2 + x \sin x) dx = \int_0^\pi 3\alpha x^2 dx + \int_0^\pi x \sin x dx = \left[\alpha x^3 \right]_0^\pi + \int_0^\pi x (\eta \mu x)' dx = \\
&= \alpha \pi^3 + [x \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \eta \mu x dx = \alpha \pi^3 - \int_0^\pi \eta \mu x dx = \alpha \pi^3 + [\sin x]_0^\pi = \\
&\alpha \pi^3 - 1 - 1 = \alpha \pi^3 - 2
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα : } \int_0^\pi f(x) dx = \pi^3 - 2 \Leftrightarrow \alpha \pi^3 - \cancel{2} = \pi^3 - \cancel{2} \Leftrightarrow \alpha \cancel{\pi^3} = \cancel{\pi^3} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}.$$

1906. Είναι :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f'(x) dx = \left[x f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = f(1) - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' f'(x) dx = \\
&= 2 - \left(\left[\frac{x^2}{2} f'(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f''(x) dx \right) = 2 - \left(\frac{1}{2} f'(1) - \int_0^1 \frac{x^2}{2} 6e^{x^3} dx \right) = \\
&= 2 - \left(1 - \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx \right) = 2 - 1 + \int_0^1 (x^3)' e^{x^3} dx = 1 + \left[e^{x^3} \right]_0^1 = \cancel{1} + e - \cancel{1} = e \Leftrightarrow \boxed{I=e}.
\end{aligned}$$

1907. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1} = \frac{\alpha x^2 + \alpha + \beta x^2 + \gamma x}{x(x^2+1)} = \frac{(\alpha+\beta)x^2 + \gamma x + \alpha}{x(x^2+1)} \Leftrightarrow$$

$1 = (\alpha+\beta)x^2 + \gamma x + \alpha$, οπότε :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx &= \int_1^e \frac{2x}{(x^2+1)^2} \ln x dx = - \int_1^e \left[-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \right] \ln x dx = - \int_1^e \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' \ln x dx = \\ &= - \left(\left[\frac{1}{x^2+1} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x^2+1} (\ln x)' dx \right) = - \left(\frac{1}{e^2+1} - \int_1^e \frac{1}{x(x^2+1)} dx \right) = \\ &= - \frac{1}{e^2+1} + \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = - \frac{1}{e^2+1} + \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{x}{x^2+1} dx = \\ &= - \frac{1}{e^2+1} + [\ln x]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx = - \frac{1}{e^2+1} + 1 - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{e^2}{e^2+1} - \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_1^e = \frac{e^2}{e^2+1} - \frac{1}{2} (\ln(e^2+1) - \ln 2) = \\ &= \frac{e^2}{e^2+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2}. \end{aligned}$$

1908. i. Η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$. Είναι

$$\begin{aligned} g(0) &= -(f'(0) - 2f(0)) = -(\cancel{2f'(0)} - \cancel{2f(0)}) = 0 \text{ και } g(2) = 12 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^4} = \\ &= 12 - \frac{\cancel{2f'(2)} + 12e^4 - \cancel{2f(2)}}{e^4} = 12 - \frac{12e^4}{e^4} = 0, \text{ άρα } g(0) = g(2) \text{ συνεπώς η } g \end{aligned}$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

ii. Παραγωγίζοντας την $g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x - \frac{e^{2x}(f''(x) - 2f'(x)) - 2e^{2x}(f'(x) - 2f(x))}{e^{4x}} = \\ &= 6x - \frac{e^{2x}(f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x))}{e^{4x}} = \\ &= 6x - \frac{e^{2x}(f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))}{e^{4x}} = 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} = \\ &= 6x - \frac{\cancel{\kappa x} e^{2x}}{e^{2x}} = 6x - \kappa x = (6 - \kappa)x. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 6\xi - \frac{f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi)}{e^{2\xi}} = 0 \Leftrightarrow e^{2\xi} \neq 0$$

$$6\xi e^{2\xi} - f''(\xi) + 4f'(\xi) - 4f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)}.$$

$$\text{iii. Είναι : } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (6 - \kappa)\xi = 0 \begin{matrix} \xleftrightarrow{\xi \neq 0} \\ \text{αφού } \xi \in (0,2) \end{matrix} \boxed{\kappa = 6}.$$

Επιπλέον αφού $\kappa=6$ και $g'(x) = (6 - \kappa)x$, τότε είναι :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c \xrightarrow{x=0} g(0) = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=0}}, \text{ άρα :}$$

$$g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 2].$$

iv. Από το προηγούμενο ερώτημα όπου αποδείξαμε πως είναι $g(x) = 0$ για κάθε

$$x \in [0, 2] \text{ και τη σχέση } g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \text{ παίρνουμε :}$$

$$3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = \frac{f'(x)e^{2x} - 2e^{2x}f(x)}{e^{4x}} \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{(f(x))' e^{2x} - f(x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} \Leftrightarrow$$

$$(x^3)' = \left(\frac{f(x)}{e^{2x}} \right)' \Leftrightarrow x^3 = \frac{f(x)}{e^{2x}} + c \xrightarrow{x=1} 1 = \frac{f(1)}{e^2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{e^2}{e^2} + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=0}}.$$

$$\text{Άρα : } x^3 = \frac{f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^3 e^{2x}, x \in [0, 2]}.$$

v. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} dx = \int_1^2 x e^{2x} dx = \int_1^2 x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x' e^{2x} dx = \\ &= e^4 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{2x} dx = e^4 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 = e^4 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 \right) = \\ &= e^4 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{4} e^2 = \frac{3}{4} e^4 - \frac{1}{4} e^2 = \frac{3e^4 - e^2}{4}. \end{aligned}$$

Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων με αλλαγή μεταβλητής

1909. ■ Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^1 (x+1)(x^2+2x+5)^3 dx$ θέτουμε $u = x^2+2x+5$.

$$\text{Συνεπώς είναι } du = (2x+2)dx \Leftrightarrow du = 2(x+1)dx \Leftrightarrow (x+1)dx = \frac{1}{2} du.$$

Για $x=0$ είναι $u=5$. Για $x=1$ είναι $u=8$. Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^1 (x+1)(x^2+2x+5)^3 dx = \int_0^1 (x^2+2x+5)^3 (x+1) dx = \int_5^8 u^3 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_5^8 u^3 du =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_5^8 = \frac{1}{8} [u^4]_5^8 = \frac{1}{8} (4096 - 625) = \frac{3471}{8}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_0^1 (2x^4 - 3x + 5)^3 (8x^3 - 3) dx$ θέτουμε

$$u = 2x^4 - 3x + 5. \text{ Συνεπώς είναι } du = (8x^3 - 3) dx.$$

Για $x=0$ είναι $u=5$. Για $x=1$ είναι $u=4$. Έτσι έχουμε :

$$I_2 = \int_0^1 (2x^4 - 3x + 5)^3 (8x^3 - 3) dx = \int_5^4 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_5^4 = \frac{256}{4} - \frac{625}{4} = -\frac{369}{4}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_3 = \int_1^2 \frac{x+2}{(x^2+4x)^3} dx$ θέτουμε $u = x^2 + 4x$.

$$\text{Συνεπώς είναι } du = (2x+4) dx \Leftrightarrow du = 2(x+2) dx \Leftrightarrow (x+2) dx = \frac{1}{2} du.$$

Για $x=1$ είναι $u=5$. Για $x=2$ είναι $u=12$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^2 \frac{x+2}{(x^2+4x)^3} dx = \int_5^{12} \frac{1}{u^3} (x+2) dx = \int_5^{12} \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_5^{12} u^{-3} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_5^{12} = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^2} \right]_5^{12} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{144} - \frac{1}{25} \right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{119}{3600} \right) = \frac{119}{14400}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_4 = \int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2} dx$ θέτουμε $u = x^3 - 6x + 1$.

$$\text{Συνεπώς είναι } du = (3x^2 - 6) dx \Leftrightarrow du = 3(x^2 - 2) dx \Leftrightarrow (x^2 - 2) dx = \frac{1}{3} du.$$

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=-4$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2} dx = \int_1^{-4} \frac{1}{u^2} (x^2-2) dx = \int_1^{-4} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{3} du = -\frac{1}{3} \int_1^{-4} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = \\ &= -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{u} \right]_1^{-4} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_5 = \int_0^1 (2x+5)(x+1)^4 dx$ θέτουμε

$$u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$$

Συνεπώς είναι $du = dx$. Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 (2x+5)(x+1)^4 dx = \int_1^2 (2(u-1)+5)u^4 du = \int_1^2 (2u+3)u^4 du = \int_1^2 (2u^5 + 3u^4) du = \\ &= \left[2 \frac{u^6}{6} + 3 \frac{u^5}{5} \right]_1^2 = \left[\frac{u^6}{3} + 3 \frac{u^5}{5} \right]_1^2 = \frac{608}{15} - \frac{14}{15} = \frac{198}{5}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_6 = \int_0^1 (x-2)^2 (x-1)^5 dx$ θέτουμε

$u = x-1 \Leftrightarrow x = u+1$. Συνεπώς είναι $du = dx$.

Για $x=0$ είναι $u=-1$. Για $x=1$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^1 (x-2)^2 (x-1)^5 dx = \int_{-1}^0 (u+1-2)^2 u^5 du = \int_{-1}^0 (u-1)^2 u^5 du = \\ &= \int_{-1}^0 (u^2 - 2u + 1) u^5 du = \int_{-1}^0 (u^7 - 2u^6 + u^5) du = \left[\frac{u^8}{8} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6} \right]_{-1}^0 = \\ &= -\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{7} + \frac{1}{6} \right) = -\frac{97}{168}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_7 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$ θέτουμε $u = x-1 \Leftrightarrow x = u+1$.

Συνεπώς είναι $du = dx$. Για $x=2$ είναι $u=1$. Για $x=3$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = \int_1^2 \frac{(u+1)^2}{u^3} du = \int_1^2 \frac{u^2 + 2u + 1}{u^3} du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - 2\left(-\frac{1}{u^2}\right) + u^{-3} \right) du = \left[\ln u - 2\frac{1}{u} + \frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \left[\ln u - \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} \right]_1^2 = \\ &= \ln 2 - 1 - \frac{1}{8} - \left(-2 - \frac{1}{2} \right) = \ln 2 + \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_8 = \int_0^1 \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} dx$ θέτουμε $u = 1+e^x$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$. Για $x=0$ είναι $u=2$. Για $x=1$ είναι $u=1+e$. Έτσι έχουμε :

$$I_8 = \int_0^1 \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_2^{1+e} \frac{2}{u^2} du = \left[-\frac{2}{u} \right]_2^{1+e} = -\frac{2}{1+e} + 1 = \frac{e-1}{e+1}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_9 = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} dx$ θέτουμε $u = x^2+9$.

Συνεπώς είναι $du = 2x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=9$. Για $x=\sqrt{7}$ είναι $u=16$. Έτσι έχουμε :

$$I_9 = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{2} \int_9^{16} \frac{5}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_9^{16} \frac{5}{\sqrt{u}} du = 5 \int_9^{16} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 5 \left[\sqrt{u} \right]_9^{16} = 5.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{10} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ θέτουμε $u = x^2+1$.

Συνεπώς είναι $du = 2x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=\sqrt{3}$ είναι $u=4$. Έτσι έχουμε :

$$I_{10} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} 2x dx = \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} du = 4 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 4 \left[\sqrt{u} \right]_1^4 = 4.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{11} = \int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$ θέτουμε $u = x^2 + 4x + 7$.

Συνεπώς είναι $du = (2x+4)dx \Leftrightarrow du = 2(x+2)dx \Leftrightarrow (x+2)dx = \frac{1}{2} du$.

Για $x=0$ είναι $u=7$. Για $x=1$ είναι $u=12$. Έτσι έχουμε :

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}} (x+2) dx = \int_7^{12} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du = \int_7^{12} \frac{1}{2\sqrt{u}} du =$$

$$= \left[\sqrt{u} \right]_7^{12} = \sqrt{12} - \sqrt{7} = 2\sqrt{3} - \sqrt{7}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{12} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}}$ θέτουμε $u = 1 + e^{-x}$.

Συνεπώς είναι $du = -e^{-x} dx$.

Για $x=-1$ είναι $u=1+e$. Για $x=0$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$I_{12} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}} = - \int_{-1}^0 \frac{-e^{-x} dx}{\sqrt{1+e^{-x}}} = - \int_{1+e}^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = -2 \int_{1+e}^2 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = -2 \left[\sqrt{u} \right]_{1+e}^2 =$$

$$= -2\sqrt{2} + 2\sqrt{1+e}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{13} = \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2+\ln x} dx = \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} \cdot e^{\ln x} dx = \int_1^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx$ θέτουμε

$u = x^2$. Συνεπώς είναι $du = 2x dx$.

Για $x=1$ είναι $u=1$. Για $x=\sqrt{2}$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$I_{13} = \int_1^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du = \frac{1}{2} \left[e^u \right]_1^2 = \frac{1}{2} (e^2 - e),$$

ή χωρίς αλλαγή μεταβλητής :

$$I_{13} = \int_1^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (x^2)' e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (e^2 - e).$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\varepsilon\phi x}}{\sin^2 x} dx$ θέτουμε $u = 1 + \varepsilon\phi x$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{\sin^2 x} dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\varepsilon\phi x}}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\varepsilon\phi x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int_1^2 \sqrt{u} du = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du = \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3} \left[u\sqrt{u} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{15} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx$ θέτουμε $u = -\eta\mu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\sigma\upsilon\nu x dx$.

Για $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι $u = 1$. Για $x = 0$ είναι $u = 0$. Έτσι έχουμε :

$$I_{15} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta\mu x} (-\sigma\upsilon\nu x) dx = - \int_1^0 e^u du = - \left[e^u \right]_1^0 = \mathbf{e - 1},$$

ή χωρίς αλλαγή μεταβλητής :

$$I_{15} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta\mu x} (-\sigma\upsilon\nu x) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta\mu x} (-\eta\mu x)' dx = - \left[e^{-\eta\mu x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \mathbf{e - 1}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{16} = \int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx$ θέτουμε $u = \ln x$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x = 1$ είναι $u = 0$. Για $x = 2$ είναι $u = \ln 2$. Έτσι έχουμε :

$$I_{16} = \int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx = \int_1^2 2^{\ln x} \frac{1}{x} dx = \int_0^{\ln 2} 2^u du = \left[\frac{2^u}{\ln 2} \right]_0^{\ln 2} = \frac{\mathbf{2^{\ln 2} - 1}}{\ln 2}.$$

■ Είναι $I_{17} = \int_0^1 \left[e^x \sigma\upsilon\nu(e^x + 1) + e^{-x} \eta\mu(e^{-x} + 2) \right] dx =$

$$= \int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu(e^x + 1) dx + \int_0^1 e^{-x} \eta\mu(e^{-x} + 2) dx = I_1 + I_2.$$

Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu(e^x + 1) dx$ θέτουμε $u = e^x + 1$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x = 0$ είναι $u = 2$. Για $x = 1$ είναι $u = e + 1$. Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu(e^x + 1) dx = \int_0^1 \sigma\upsilon\nu(e^x + 1) \cdot e^x dx = \int_2^{e+1} \sigma\upsilon\nu u du = \left[\eta\mu u \right]_2^{e+1} = \eta\mu(e+1) - \eta\mu 2$$

Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_0^1 e^{-x} \eta\mu(e^{-x} + 2) dx$ θέτουμε $u = e^{-x} + 2$.

Συνεπώς είναι $du = -e^{-x} dx$.

Για $x = 0$ είναι $u = 3$. Για $x = 1$ είναι $u = e^{-1} + 2$. Έτσι έχουμε :

$$I_2 = \int_0^1 e^{-x} \eta\mu(e^{-x} + 2) dx = - \int_0^1 \eta\mu(e^{-x} + 2) \cdot (-e^{-x}) dx = - \int_3^{e^{-1}+2} \eta\mu u du = \left[\sigma\upsilon\nu u \right]_3^{e^{-1}+2} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu(e^{-1} + 2) - \sigma\upsilon\nu 3. \text{ Συνεπώς :}$$

$$I_{17} = I_1 + I_2 = \eta\mu(e+1) - \eta\mu 2 + \sigma\upsilon\nu(e^{-1}+2) - \sigma\upsilon\nu 3.$$

Χωρίς αλλαγή μεταβλητής :

$$\begin{aligned} I_{17} &= \int_0^1 [e^x \sigma\upsilon\nu(e^x+1) + e^{-x} \eta\mu(e^{-x}+2)] dx = \\ &= \int_0^1 [(e^x+1)' \sigma\upsilon\nu(e^x+1) - (e^{-x}+2)' \eta\mu(e^{-x}+2)] dx = \\ &= [\eta\mu(e^x+1) + \sigma\upsilon\nu(e^{-x}+2)]_0^1 = \eta\mu(e+1) + \sigma\upsilon\nu(e^{-1}+2) - \eta\mu 2 - \sigma\upsilon\nu 3. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{18} = \int_1^{e^2} \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx$ θέτουμε $u = \ln x$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x=1$ είναι $u=0$. Για $x=e^2$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$. Έτσι έχουμε :

$$I_{18} = \int_1^{e^2} \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(u) du = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 e^{x^3} - e^{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 e^{x^3} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x dx$

θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\eta\mu x dx$. Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{19} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 e^{x^3} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3)' e^{x^3} dx + \int_1^0 e^u du = [e^{x^3}]_0^{\frac{\pi}{2}} + [e^u]_1^0 = \\ &= e^{\frac{\pi^3}{8}} - 1 + 1 - e = e^{\frac{\pi^3}{8}} - e. \end{aligned}$$

ή χωρίς αλλαγή μεταβλητής :

$$\begin{aligned} I_{19} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 e^{x^3} - e^{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((x^3)' e^{x^3} + e^{\sigma\upsilon\nu x} (\sigma\upsilon\nu x)' \right) dx = [e^{x^3} + e^{\sigma\upsilon\nu x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= e^{\frac{\pi^3}{8}} + 1 - 1 - e = e^{\frac{\pi^3}{8}} - e. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{20} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{e^x + 2} dx$ θέτουμε $u = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x = u - 2$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=3$. Για $x=\ln 2$ είναι $u=4$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I_{20} &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{e^x + 2} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x + 2} e^x dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x)^2}{e^x + 2} e^x dx = \int_3^4 \frac{(u-2)^2}{u} du = \int_3^4 \frac{u^2 - 4u + 4}{u} du = \\
 &= \int_3^4 \left(u - 4 + \frac{4}{u} \right) du = \left[\frac{u^2}{2} - 4u + 4 \ln u \right]_3^4 = -8 + 4 \ln 4 - \left(\frac{9}{2} - 12 + 4 \ln 3 \right) = \\
 &= -8 + 4 \ln 4 - \frac{9}{2} + 12 - 4 \ln 3 = -\frac{1}{2} + 4 \ln \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{21} = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \frac{x^2}{\sin^2 x^3} dx$ θέτουμε $u = x^3$.

Συνεπώς είναι $du = 3x^2 dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$. Για $x=\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$ είναι $u=\frac{\pi}{4}$. Έτσι έχουμε :

$$I_{21} = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \frac{x^2}{\sin^2 x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\sin^2 x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{1}{3} [\varepsilon\phi x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}.$$

■ Είναι $I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \eta\mu x + \varepsilon\phi^7 x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\phi^7 x}{\sin^2 x} dx.$

Για τον υπολογισμό του $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\phi^7 x}{\sin^2 x} dx$ θέτουμε $u = \varepsilon\phi x$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{\sin^2 x} dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$. Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $u=1$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\phi^7 x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi^7 x \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int_0^1 u^7 du = \left[\frac{u^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\phi^7 x}{\sin^2 x} dx = [\varepsilon\phi x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} dx + \frac{1}{8} = \\
 &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} dx + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} + \left[\frac{1}{\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{8} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sin 0} = \frac{9}{8} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1 = \sqrt{2} + \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{23} = \int_e^{e^4} \frac{3 \ln x + \sqrt{\ln x}}{x \ln x} dx$ θέτουμε $u = \ln x$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x=e$ είναι $u=1$. Για $x=e^4$ είναι $u=4$. Έτσι έχουμε :

$$I_{23} = \int_e^{e^4} \frac{3 \ln x + \sqrt{\ln x}}{x \ln x} dx = \int_e^{e^4} \frac{3 \ln x + \sqrt{\ln x}}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^4 \frac{3u + \sqrt{u}}{u} du = \int_1^4 \left(3 + \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = \\ = \int_1^4 \left(3 + 2 \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du = \left[3u + 2\sqrt{u} \right]_1^4 = 11.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\eta \mu x} \cdot \sigma \nu \eta x dx$ θέτουμε $u = \eta \mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sigma \nu \eta x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=1$. Έτσι έχουμε :

$$I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\eta \mu x} \cdot \sigma \nu \eta x dx = \int_0^1 \sqrt[3]{u} du = \int_0^1 u^{\frac{2}{3}} du = \left[\frac{u^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \right]_0^1 = \frac{3}{5} \left[u^{\frac{5}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{25} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$ θέτουμε $u = 1-x \Leftrightarrow x = 1-u$.

Συνεπώς είναι $du = -dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$I_{25} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx = - \int_1^0 (1-u)^2 \sqrt{u} du = \int_0^1 (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du = \int_0^1 \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \\ = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 2 \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{7} \sqrt{u^7} - 2 \cdot \frac{2}{5} \sqrt{u^5} + \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{105}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{26} = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{\sqrt{3+x \ln x}} dx$ θέτουμε $u = 3+x \ln x$.

Συνεπώς είναι $du = (\ln x + 1) dx$.

Για $x=1$ είναι $u=3$. Για $x=e$ είναι $u=3+e$. Έτσι έχουμε :

$$I_{26} = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{\sqrt{3+x \ln x}} dx = \int_3^{3+e} \frac{1}{\sqrt{u}} (1 + \ln x) dx = \int_3^{3+e} \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2 \int_3^{3+e} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \\ = 2 \left[\sqrt{u} \right]_3^{3+e} = 2\sqrt{3+e} - 2\sqrt{3}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{27} = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ θέτουμε $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$.

Συνεπώς είναι $du = dx$.

Για $x=1$ είναι $u=2$. Για $x=2$ είναι $u=3$. Έτσι έχουμε :

$$I_{27} = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_2^3 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int_2^3 \left(\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = \int_2^3 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du =$$

$$= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2\sqrt{u} \right]_2^3 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - 2\sqrt{u} \right]_2^3 = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 2\sqrt{u} \right]_2^3 = -\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \right) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{28} = \int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}} dx$ θέτουμε $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$.

Συνεπώς είναι $du = dx$. Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{28} &= \int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{2(u-1)+3}{\sqrt{u}} du = \int_1^2 \frac{2u+1}{\sqrt{u}} du = \int_1^2 \left(\frac{2u}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = \\ &= \int_1^2 \left(2u^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du = \left[2 \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \left[2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{4}{3}u\sqrt{u} + 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \frac{14}{3}\sqrt{2} - \frac{10}{3} = \frac{14\sqrt{2}-10}{3}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{29} = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2e^{-x}+e^{-2x}}} dx$ θέτουμε $u = 1-e^x \Leftrightarrow$

$e^x = 1-u$. Συνεπώς είναι $du = -e^x dx$.

Για $x = -2\ln 2$ είναι $u = 1-e^{-2\ln 2} = 1-e^{\ln \frac{1}{4}} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Για $x = -\ln 2$ είναι $u = 1-e^{-\ln 2} = 1-e^{\ln \frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{29} &= \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2e^{-x}+e^{-2x}}} dx = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}}} dx = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^{2x}}}} dx = \\ &= \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\frac{\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}}{e^x}} dx = - \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}} (-e^x) dx = \\ &= - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{\sqrt{(1-u)^2-2(1-u)+1}} du = - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{\sqrt{1-2u+u^2-2+2u+1}} du = \\ &= - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{\sqrt{u^2}} du \stackrel{u>0}{=} - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{u} du = - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \ln u \cdot \frac{1}{u} du = - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} 2 \ln u \cdot (\ln u)' du = \\ &= - \frac{1}{2} \left[\ln^2 u \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} = - \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{1}{2} - \ln^2 \frac{3}{4} \right) = - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{4} \right) \left(\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{2}{\frac{3}{4}} \cdot \ln \frac{3}{8} = -\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \cdot \ln \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \cdot \ln \frac{3}{8}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{30} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ θέτουμε $u = 1 + \sqrt{x}$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{30} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 \sqrt{u} du = 2 \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du = 2 \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^2 = \frac{4}{3} \left[u\sqrt{u} \right]_1^2 = \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{8\sqrt{2} - 4}{3}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{31} = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x \ln x} dx$ θέτουμε $u = \ln x$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x=e$ είναι $u=1$. Για $x=e^2$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$I_{31} = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{u-1}{u} du = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = [u - \ln u]_1^2 = 1 - \ln 2.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{32} = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ θέτουμε $u = 1 + \ln x \Leftrightarrow \ln x = u - 1$

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x=1$ είναι $u=1$. Για $x=e$ είναι $u=2$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{32} &= \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int_1^2 \left(\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = \\ &= \int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du = \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} - 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} - 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2\eta\mu x + 1) \sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x - 1)^3} dx$ θέτουμε $u = \eta\mu x - 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = u + 1$. Συνεπώς είναι $du = \sigma\upsilon\nu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=-1$. Για $x=\frac{\pi}{6}$ είναι $u=-\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2\eta\mu x + 1)\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x - 1)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu x + 1}{(\eta\mu x - 1)^3} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{2(u+1)+1}{u^3} du = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{2u+3}{u^3} du = \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(2\frac{1}{u^2} + 3u^{-3} \right) du = \left[-2\frac{1}{u} + 3\frac{u^{-2}}{-2} \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \left[-\frac{2}{u} - \frac{3}{2u^2} \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = 4 - \frac{3}{2} - \left(2 - \frac{3}{2} \right) = \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{34} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\phi x \ln(\eta\mu x) dx$ θέτουμε $u = \ln(\eta\mu x)$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow du = \sigma\phi x dx$.

Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $u = \ln\left(\eta\mu \frac{\pi}{4}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 2$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u = \ln\left(\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) = \ln 1 = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{34} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\phi x \ln(\eta\mu x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\eta\mu x) \cdot \sigma\phi x dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln 2}^0 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-\frac{1}{2} \ln 2}^0 = -\frac{\frac{1}{4} \ln^2 2}{2} = \\ &= -\frac{1}{8} \ln^2 2. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{35} = \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} dx$ θέτουμε $u = 1+x^2$.

Συνεπώς είναι $du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} du$.

Για $x=1$ είναι $u=2$. Για $x=2$ είναι $u=5$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_{35} &= \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} dx = \int_2^5 \frac{1}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} x dx = \int_2^5 \frac{1}{u \ln u} \cdot \frac{1}{2} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{\ln u} \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{\ln u} \cdot (\ln u)' du = \frac{1}{2} [\ln(\ln u)]_2^5 = \frac{1}{2} (\ln(\ln 5) - \ln(\ln 2)) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\ln 5}{\ln 2}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{36} = \int_1^e \frac{\ln x + 3}{x \ln x + x} dx = \int_1^e \frac{\ln x + 3}{x(\ln x + 1)} dx = \int_1^e \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} dx$

θέτουμε $u = \ln x + 1 \Leftrightarrow \ln x = u - 1$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x=1$ είναι $u=1$.

Για $x=e$ είναι $u=2$.

Έτσι έχουμε :

$$I_{36} = \int_1^e \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{u - 1 + 3}{u} du = \int_1^2 \frac{u + 2}{u} du = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{u}\right) du = [u + 2 \ln u]_1^2 = 2 + 2 \ln 2 - 1 = 1 + 2 \ln 2.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{37} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx$ θέτουμε $u = x \ln x$.

Συνεπώς είναι $du = (\ln x + 1) dx$.

Για $x=e$ είναι $u=e$.

Για $x=e^2$ είναι $u=2e^2$.

Έτσι έχουμε :

$$I_{37} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int_e^{2e^2} \frac{(1 + \ln x) dx}{(x \ln x)^2} = \int_e^{2e^2} \frac{1}{u^2} du = \left[-\frac{1}{u}\right]_e^{2e^2} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{e} = \frac{2e - 1}{2e^2}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{38} = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$ θέτουμε $u = e^x + x$.

Συνεπώς είναι $du = (e^x + 1) dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=1$ είναι $u=e+1$.

Έτσι έχουμε :

$$I_{38} = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx = \int_1^{e+1} \frac{1}{e^x + x} (e^x + 1) dx = \int_1^{e+1} \frac{1}{u} du = [\ln u]_1^{e+1} = \ln(e+1).$$

ή χωρίς αλλαγή μεταβλητής :

$$I_{38} = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx = \int_0^1 \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} dx = [\ln(e^x + x)]_0^1 = \ln(e+1).$$

1910. ■ Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ θέτουμε $u = x^2$.

Συνεπώς είναι $du = 2x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$.

Για $x=1$ είναι $u=1$.

Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u e^u du = \frac{1}{2} \int_0^1 u (e^u)' du = \frac{1}{2} \left([u e^u]_0^1 - \int_0^1 u' e^u du \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e - \int_0^1 e^u du \right) = \frac{1}{2} \left(e - [e^u]_0^1 \right) = \frac{1}{2} (e - 1 + 1) = \frac{1}{2}.$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x e^{\sigma\upsilon\nu x} dx$ θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\eta\mu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x e^{\sigma\upsilon\nu x} dx = - \int_1^0 2\sigma\upsilon\nu x e^{\sigma\upsilon\nu x} (-\eta\mu x) dx = - \int_1^0 2ue^u du = -2 \int_1^0 u(e^u)' du = \\ &= -2 \left([ue^u]_1^0 - \int_1^0 u'e^u du \right) = -2 \left(-e - \int_1^0 e^u du \right) = 2e + 2[e^u]_1^0 = 2e + 2(1-e) = \\ &= 2e + 2 - 2e = 2. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_3 = \int_0^{\pi} e^{2x} \eta\mu e^x dx$ θέτουμε $u = e^x$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=\pi$ είναι $u=e^{\pi}$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} e^{2x} \eta\mu e^x dx = \int_0^{\pi} e^x \eta\mu e^x \cdot e^x dx = \int_1^{e^{\pi}} u \eta\mu u du = \int_1^{e^{\pi}} u(-\sigma\upsilon\nu u)' du = \\ &= [-u\sigma\upsilon\nu u]_1^{e^{\pi}} + \int_1^{e^{\pi}} u' \sigma\upsilon\nu u du = -e^{\pi} \sigma\upsilon\nu e^{\pi} + \sigma\upsilon\nu 1 + \int_1^{e^{\pi}} \sigma\upsilon\nu u du = \\ &= -e^{\pi} \sigma\upsilon\nu e^{\pi} + \sigma\upsilon\nu 1 + [\eta\mu x]_1^{e^{\pi}} = -e^{\pi} \sigma\upsilon\nu e^{\pi} + \sigma\upsilon\nu 1 + \eta\mu e^{\pi} - \eta\mu 1. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}}{x^3} dx$ θέτουμε $u = \frac{1}{x}$.

Συνεπώς είναι $du = -\frac{1}{x^2} dx$.

Για $x=\frac{2}{\pi}$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$.

Για $x=\frac{1}{\pi}$ είναι $u=\pi$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{\sigma \nu \frac{1}{x}}{x^3} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{x} \sigma \nu \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} u \sigma \nu u du = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} u (\eta \mu u)' du = \\
 &= - \left([u \eta \mu u]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} u' \eta \mu u du \right) = - \left(-\frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} \eta \mu u du \right) = \frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} \eta \mu u du = \frac{\pi}{2} + [-\sigma \nu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} = \\
 &= \frac{\pi}{2} - [\sigma \nu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{2} - (-1) = \frac{\pi + 2}{2}.
 \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_5 = \int_0^1 e^{x+3} \ln(e^x + 5) dx$ θέτουμε $u = e^x + 5$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=6$.

Για $x=1$ είναι $u=e+5$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_0^1 e^{x+3} \ln(e^x + 5) dx = \int_0^1 e^3 \ln(e^x + 5) e^x dx = \int_6^{e+5} e^3 \ln u du = e^3 \int_6^{e+5} u' \ln u du = \\
 &= e^3 \left([u \ln u]_6^{e+5} - \int_6^{e+5} u (\ln u)' du \right) = e^3 \left((e+5) \ln(e+5) - 6 \ln 6 - \int_6^{e+5} 1 du \right) = \\
 &= e^3 \left((e+5) \ln(e+5) - 6 \ln 6 - [u]_6^{e+5} \right) = e^3 ((e+5) \ln(e+5) - 6 \ln 6 - e + 1).
 \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \ln(2 + \sigma \nu x) dx$ θέτουμε $u = 2 + \sigma \nu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\eta \mu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=3$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u=2$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \ln(2 + \sigma \nu x) dx = - \int_3^2 \ln(2 + \sigma \nu x) \cdot (-\eta \mu x) dx = - \int_3^2 \ln u du = - \int_3^2 u' \ln u du = \\
 &= - \left([u \ln u]_3^2 - \int_3^2 u (\ln u)' du \right) = -2 \ln 2 + 3 \ln 3 + \int_3^2 1 du = -2 \ln 2 + 3 \ln 3 + [u]_3^2 = \\
 &= -2 \ln 2 + 3 \ln 3 - 1.
 \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_7 = \int_0^3 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} dx$ θέτουμε $u = 1+x$.

Συνεπώς είναι $du = dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=3$ είναι $u=4$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_0^3 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} dx = \int_1^4 \frac{\ln u}{\sqrt{u}} du = 2 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{u}} \ln u du = 2 \int_1^4 (\sqrt{u})' \ln u du = \\
&= 2 \left(\left[\sqrt{u} \ln u \right]_1^4 - \int_1^4 \sqrt{u} (\ln u)' du \right) = 2 \left(2 \ln 4 - \int_1^4 \frac{\sqrt{u}}{u} du \right) = 2 \left(2 \ln 4 - \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}} du \right) = \\
&= 2 \left(2 \ln 4 - 2 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{u}} du \right) = 2 \left(2 \ln 4 - 2 \left[\sqrt{u} \right]_1^4 \right) = 2(2 \ln 4 - 2) = \mathbf{4 \ln 4 - 4} .
\end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_8 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ θέτουμε $u = \sqrt{x}$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$.

Για $x=1$ είναι $u=1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2u e^u du = \int_0^1 2u (e^u)' du = \\
&= \left[2u e^u \right]_0^1 - \int_0^1 (2u)' e^u du = 2e - \int_0^1 2e^u du = 2e - \left[2e^u \right]_0^1 = 2e - 2e + 2 = \mathbf{2} .
\end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_9 = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$ θέτουμε $u = \sqrt{x}$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$.

Για $x=\pi^2$ είναι $u=\pi$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_9 &= \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx = \int_0^{\pi} 2\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^{\pi} 2u \sin u du = \int_0^{\pi} 2u (\eta \mu u)' du = \\
&= \left[2u \eta \mu u \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (2u)' \eta \mu u du = - \int_0^{\pi} 2 \eta \mu u du = 2 \left[\sigma \nu x \right]_0^{\pi} = 2(-1-1) = \mathbf{-4} .
\end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_{10} = \int_1^{e^{\pi}} \eta \mu (\ln x) dx$ θέτουμε $u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u$.

Συνεπώς είναι $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x=1$ είναι $u=0$.

Για $x=e^{\pi}$ είναι $u=\pi$.

Έτσι έχουμε :

$$I_{10} = \int_1^{e^{\pi}} \eta \mu (\ln x) dx = \int_0^{\pi} x \eta \mu (\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_0^{\pi} e^u \eta \mu u du = \int_0^{\pi} (e^u)' \eta \mu u du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[e^u \eta \mu u \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^u (\eta \mu u)' du = - \int_0^\pi e^u \sigma \nu \nu u du = - \int_0^\pi (e^u)' \sigma \nu \nu u du = \\
 &= - \left(\left[e^u \sigma \nu \nu u \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^u (\sigma \nu \nu u)' du \right) = - \left(-e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^u \eta \mu u du \right) = e^\pi + 1 - I_{10} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$I_{10} = e^\pi + 1 - I_{10} \Leftrightarrow 2I_{10} = e^\pi + 1 \Leftrightarrow \boxed{I_{10} = \frac{e^\pi + 1}{2}}.$$

1911. i. Η $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x + \ln x)}{x^2} = \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Επιπλέον είναι :

- $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$ και
- $1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	ϕ –
$f'(x)$		+	ϕ –
$f(x)$		$\nearrow$	O.M. $\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, e]$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(e, +\infty]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = e$ το $f(e) = \frac{e+1}{e}$.

ii. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

iii. Είναι :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{x + \ln x}{x} dx = \int_1^{e^2} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int_1^{e^2} 1 dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = [x]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x dx = \\
 &= e^2 - 1 + \frac{1}{2} \int_1^{e^2} 2 \ln x (\ln x)' dx = e^2 - 1 + \frac{1}{2} [\ln^2 x]_1^{e^2} = e^2 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = e^2 + 1.
 \end{aligned}$$

1912. ■ Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu^2 x + 5 \sigma \nu x + 6} dx$ θέτουμε $u = \sigma \nu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\eta\mu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 6} dx = - \int_1^0 \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 6} (-\eta\mu x) dx = - \int_1^0 \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \\ &= - \int_1^0 \frac{1}{(u+2)(u+3)} du = - \int_1^0 \frac{u+3 - (u+2)}{(u+2)(u+3)} du = \\ &= - \int_1^0 \frac{u+3}{(u+2)(u+3)} du + \int_1^0 \frac{u+2}{(u+2)(u+3)} du = - \int_1^0 \frac{1}{u+2} du + \int_1^0 \frac{1}{u+3} du = \\ &= - [\ln(u+2)]_1^0 + [\ln(u+3)]_1^0 = -\ln 2 + \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2} dx$ θέτουμε $u = \eta\mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sigma\upsilon\nu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$.

Για $x=\frac{\pi}{6}$ είναι $u=\frac{1}{2}$.

Έτσι έχουμε :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2u}{u^2 - 3u + 2} du.$$

Είναι $\frac{2u}{u^2 - 3u + 2} = \frac{2u}{(u-1)(u-2)}.$

Για κάθε $u \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{2u}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} = \frac{Au - 2A + Bu - B}{(u-1)(u-2)} = \frac{(A+B)u - 2A - B}{(u-1)(u-2)} \Leftrightarrow$$

$2u = (A+B)u + (-2A-B)$, οπότε :

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+B=2 \\ A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=4 \\ A=-2 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε :

$$\frac{2u}{(u-1)(u-2)} = \frac{-2}{u-1} + \frac{4}{u-2} \text{ επομένως :}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2u}{u^2 - 3u + 2} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2u}{(u-1)(u-2)} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-2}{u-1} + \frac{4}{u-2} \right) du =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-2\ln|u-1| + 4\ln|u-2| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -2\ln\frac{1}{2} + 4\ln\frac{3}{2} - \left(-2\ln 1^0 + 4\ln 2 \right) = \\
&= -2\ln\frac{1}{2} + 4\ln\frac{3}{2} - \left(-2\ln 1^0 + 4\ln 2 \right) = -2\ln 1^0 + 2\ln 2 + 4\ln 3 - 4\ln 2 - 4\ln 2 = \\
&= 4\ln 3 - 6\ln 2.
\end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_3 = \int_2^3 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx$ θέτουμε $u = e^x$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x=2$ είναι $u = e^2$.

Για $x=3$ είναι $u = e^3$.

Έτσι έχουμε :

$$I_3 = \int_2^3 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx = \int_2^3 \frac{1}{(e^x)^2 - 4e^x + 3} e^x dx = \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{u^2 - 4u + 3} du.$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{u^2 - 4u + 3} = \frac{1}{(u-1)(u-3)}.$$

Για κάθε $u \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$ έχουμε :

$$\frac{1}{(u-1)(u-3)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-3} = \frac{Au - 3A + Bu - B}{(u-1)(u-3)} = \frac{(A+B)u - 3A - B}{(u-1)(u-3)} \Leftrightarrow$$

$1 = (A+B)u + (-3A - B)$, οπότε :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}+B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε :

$$\frac{1}{(u-1)(u-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-3} \quad \text{επομένως :}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{u^2 - 4u + 3} du = \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{(u-1)(u-3)} du = \int_{e^2}^{e^3} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-3} \right) du = \\
&= \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-1} \right) du = \frac{1}{2} \left[\ln|u-3| - \ln|u-1| \right]_{e^2}^{e^3} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(e^3 - 3) - \ln(e^3 - 1) - (\ln(e^2 - 3) - \ln(e^2 - 1)) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{e^3 - 3}{e^3 - 1} - \ln \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{(e^3 - 3)(e^2 - 1)}{(e^3 - 1)(e^2 - 3)}.
\end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_4 = \int_2^3 \frac{3e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$ θέτουμε $u = e^x$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x=2$ είναι $u=e^2$.

Για $x=3$ είναι $u=e^3$.

Έτσι έχουμε :

$$I_4 = \int_2^3 \frac{3e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \int_2^3 \frac{3e^x - 4}{(e^x)^2 - 3e^x + 2} e^x dx = \int_{e^2}^{e^3} \frac{3u - 4}{u^2 - 3u + 2} du.$$

$$\text{Είναι } \frac{3u - 4}{u^2 - 3u + 2} = \frac{3u - 4}{(u-1)(u-2)}.$$

Για κάθε $u \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{3u - 4}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} = \frac{Au - 2A + Bu - B}{(u-1)(u-2)} = \frac{(A+B)u - 2A - B}{(u-1)(u-2)} \Leftrightarrow$$

$3u - 4 = (A+B)u + (-2A - B)$, οπότε :

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-B=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+B=3 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=1 \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε :

$$\frac{3u - 4}{(u-1)(u-2)} = \frac{1}{u-1} + \frac{2}{u-2} \text{ επομένως :}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{3u - 4}{u^2 - 3u + 2} du = \int_{e^2}^{e^3} \frac{3u - 4}{(u-1)(u-2)} du = \int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{u-1} + \frac{2}{u-2} \right) du = \\ &= \left[\ln|u-1| + 2\ln|u-2| \right]_{e^2}^{e^3} = \ln(e^3 - 1) + 2\ln(e^3 - 2) - \ln(e^2 - 1) - 2\ln(e^2 - 2) = \\ &= \ln \frac{e^3 - 1}{e^2 - 1} + 2\ln \frac{e^3 - 2}{e^2 - 2}. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_5 = \int_1^2 \frac{3e^{4x} - e^{3x}}{e^x - 1} dx$ θέτουμε $u = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = u + 1$.

Συνεπώς είναι $du = e^x dx$.

Για $x=1$ είναι $u=e-1$.

Για $x=2$ είναι $u=e^2-1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_1^2 \frac{3e^{4x} - e^{3x}}{e^x - 1} dx = \int_1^2 \frac{3e^{3x} - e^{2x}}{e^x - 1} e^x dx = \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{3(u+1)^3 - (u+1)^2}{u} du = \\ &= \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{3(u^3 + 3u^2 + 3u + 1) - (u^2 + 2u + 1)}{u} du = \\ &= \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{3u^3 + 9u^2 + 9u + 3 - u^2 - 2u - 1}{u} du = \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{3u^3 + 8u^2 + 7u + 2}{u} du = \\ &= \int_{e-1}^{e^2-1} \left(3u^2 + 8u + 7 + \frac{2}{u} \right) du = \left[u^3 + 4u^2 + 7u + 2\ln u \right]_{e-1}^{e^2-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (e^2 - 1)^3 + 4(e^2 - 1)^2 + 7(e^2 - 1) + 2\ln(e^2 - 1) - \\
&\quad - \left((e-1)^3 + 4(e-1)^2 + 7(e-1) + 2\ln(e-1) \right) = \\
&= e^6 - 3e^4 + 3e^2 - 1 + 4(e^4 - 2e^2 + 1) + 7e^2 - 7 + 2\ln(e^2 - 1) - \\
&\quad - \left(e^3 - 3e^2 + 3e - 1 + 4(e^2 - 2e + 1) + 7e - 7 + 2\ln(e-1) \right) = \\
&= e^6 - 3e^4 + 3e^2 - \cancel{1} + 4e^4 - 8e^2 + \cancel{4} + 7e^2 - \cancel{7} + 2\ln(e^2 - 1) - \\
&\quad - e^3 + 3e^2 - 3e + \cancel{1} - 4e^2 + 8e - \cancel{4} - 7e + \cancel{7} - 2\ln(e-1) = \\
&= e^6 + e^4 - e^3 + e^2 - 2e + 2(\ln(e^2 - 1) - \ln(e-1)) = \\
&= e^6 + e^4 - e^3 + e^2 - 2e + 2\ln \frac{e^2 - 1}{e - 1} = \mathbf{e^6 + e^4 - e^3 + e^2 - 2e + 2\ln(e+1)}.
\end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_6 = \int_{e^2}^{e^3} \frac{2\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx$ θέτουμε $u = 1 - \ln^2 x$.

Συνεπώς είναι $du = -2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow du = \frac{-2\ln x}{x} dx$.

Για $x = e^2$ είναι $u = -3$.

Για $x = e^3$ είναι $u = -8$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{2\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx = - \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{1 - \ln^2 x} \cdot \frac{-2\ln x}{x} dx = - \int_{-3}^{-8} \frac{1}{u} du = - [\ln|u|]_{-3}^{-8} = \\
&= -(\ln 8 - \ln 3) = \ln 3 - \ln 8 = \mathbf{\ln \frac{3}{8}}.
\end{aligned}$$

1913. ■ Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ θέτουμε $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$.

Συνεπώς είναι $du = dx$.

Για $x=1$ είναι $u=2$.

Για $x=2$ είναι $u=3$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = \int_2^3 \frac{\ln(u-1)}{u^2} du = - \int_2^3 \left(-\frac{1}{u^2} \right) \ln(u-1) du = - \int_2^3 \left(\frac{1}{u} \right)' \ln(u-1) du = \\
&= - \left(\left[\frac{1}{u} \ln(u-1) \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u-1} du \right) = - \left(\frac{1}{3} \ln 2 - \int_2^3 \frac{1}{u(u-1)} du \right) = \\
&= -\frac{1}{3} \ln 2 + \int_2^3 \frac{u - (u-1)}{u(u-1)} du = -\frac{1}{3} \ln 2 + \int_2^3 \left(\frac{\cancel{u}}{u(u-1)} - \frac{\cancel{u-1}}{u(u-1)} \right) du = \\
&= -\frac{1}{3} \ln 2 + \int_2^3 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = -\frac{1}{3} \ln 2 + [\ln(u-1) - \ln u]_2^3 =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \frac{5\ln 2 - 3\ln 3}{3}.$$

■ Είναι $I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu^2 x} \eta \mu x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sigma \nu^2 x} \eta \mu x dx.$

Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sigma \nu^2 x} \eta \mu x dx$ θέτουμε $u = \sigma \nu x.$

Συνεπώς είναι $du = -\eta \mu x dx.$

Για $x = \frac{\pi}{3}$ είναι $u = \frac{1}{2}.$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 0.$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sigma \nu^2 x} \eta \mu x dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sigma \nu^2 x} (-\eta \mu x) dx = - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{1 - u^2} du = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{u^2 - 1} du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{(u-1)(u+1)} du. \end{aligned}$$

Για κάθε $u \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ έχουμε :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{Au + A + Bu - B}{(u-1)(u+1)} = \frac{(A+B)u + A-B}{(u-1)(u+1)} \Leftrightarrow$$

$$1 = (A+B)u + A-B, \text{ οπότε :}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u+1} \text{ επομένως :}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{(u-1)(u+1)} du = \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u+1} \right) du = \left[\frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| \right]_{\frac{1}{2}}^0 = \\ &= - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right) = - \left(-\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \ln \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

■ Για τον υπολογισμό του $I_3 = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1+e^x} dx$ θέτουμε $u = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow$

$$u^2 = 1 + e^x \Leftrightarrow e^x = u^2 - 1.$$

$$\text{Συνεπώς είναι } du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } u=\sqrt{2}.$$

$$\text{Για } x=\ln 3 \text{ είναι } u=2.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 3} \frac{\sqrt{1+e^x}^2}{\sqrt{1+e^x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} dx = 2 \int_0^{\ln 3} \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2}{u^2-1} du = \\ &= 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du = 2 \left(\int_{\sqrt{2}}^2 1 du + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{u^2-1} du \right) = \\ &= 2 \left([u]_{\sqrt{2}}^2 + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(u-1)(u+1)} du \right) = 2 \left(2 - \sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(u-1)(u+1)} du \right). \end{aligned}$$

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε πως :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u+1} \quad \text{επομένως :}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 2 \left(2 - \sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(u-1)(u+1)} du \right) = 4 - 2\sqrt{2} + 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u+1} \right) du = \\ &= 4 - 2\sqrt{2} + 2 \left[\frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| \right]_{\sqrt{2}}^2 = \\ &= 4 - 2\sqrt{2} + 2 \left(-\frac{1}{2} \ln 3 - \left(\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1) \right) \right) = \\ &= 4 - 2\sqrt{2} - \ln 3 - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1) = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 3 + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

1914. ■ Είναι $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \cdot \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 2x) \cdot \sin 2x dx.$

Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 2x) \cdot \sin 2x dx$ θέτουμε $u = \eta \mu 2x.$

$$\text{Συνεπώς είναι } du = 2 \cos 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} du = \cos 2x dx.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } u=0.$$

$$\text{Για } x=\frac{\pi}{2} \text{ είναι } u=0.$$

Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \sigma \nu 2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u^2) du = 0.$$

$$\blacksquare \text{ Είναι } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^4 x \cdot \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu^2 x)^2 \cdot \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu^2 x)^2 \cdot \eta \mu x dx.$$

$$\text{Για τον υπολογισμό του } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu^2 x)^2 \cdot \eta \mu x dx \text{ θέτουμε } u = \sigma \nu x.$$

Συνεπώς είναι $du = -\eta \mu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu^2 x)^2 \cdot \eta \mu x dx = - \int_1^0 (1 - \sigma \nu^2 x)^2 \cdot (-\eta \mu x) dx = - \int_1^0 (1 - u^2)^2 du = \\ &= \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4) du = \left[u - 2 \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Είναι } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x \cdot \sigma \nu^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \cdot \sigma \nu^2 x \cdot \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu^2 x) \cdot \sigma \nu^2 x \cdot \eta \mu x dx.$$

$$\text{Για τον υπολογισμό του } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu^2 x) \cdot \sigma \nu^2 x \cdot \eta \mu x dx \text{ θέτουμε } u = \sigma \nu x.$$

Συνεπώς είναι $du = -\eta \mu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \nu^2 x) \cdot \sigma \nu^2 x \cdot \eta \mu x dx = - \int_1^0 (1 - \sigma \nu^2 x) \cdot \sigma \nu^2 x \cdot (-\eta \mu x) dx = \\ &= - \int_1^0 (1 - u^2) u^2 du = \int_0^1 (u^2 - u^4) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Είναι } I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^7 x \cdot \sigma \nu^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^7 x \cdot \sigma \nu^2 x \cdot \sigma \nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^7 x \cdot (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \sigma \nu x dx.$$

$$\text{Για τον υπολογισμό του } I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^7 x \cdot (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \sigma \nu x dx \text{ θέτουμε } u = \eta \mu x.$$

Συνεπώς είναι $du = \sigma \nu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$.

Για $x = \pi$ είναι $u = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$I_4 = \int_0^{\pi} \eta \mu^7 x \cdot (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \sigma \nu x dx = \int_0^0 u^7 \cdot (1 - u^2) du = 0.$$

$$\blacksquare \text{ Είναι } I_5 = \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \cdot \sigma \nu^5 x dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \cdot \sigma \nu^4 x \cdot \sigma \nu x dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \cdot (\sigma \nu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu x dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \cdot (1 - \eta \mu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu x dx.$$

$$\text{Για τον υπολογισμό του } I_5 = \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \cdot (1 - \eta \mu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu x dx \text{ θέτουμε } u = \eta \mu x.$$

Συνεπώς είναι $du = \sigma \nu x dx$.

Για $x = 0$ είναι $u = 0$.

Για $x = \pi$ είναι $u = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$I_5 = \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \cdot (1 - \eta \mu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu x dx = \int_0^0 \sqrt{u} \cdot (1 - u^2)^2 du = 0.$$

1915. $\blacksquare$ Είναι $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu^4 x} \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^4 x} \eta \mu x dx.$

$$\text{Για τον υπολογισμό του } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^4 x} \eta \mu x dx \text{ θέτουμε } u = \sigma \nu x.$$

Συνεπώς είναι $du = -\eta \mu x dx \Leftrightarrow -du = \eta \mu x dx$.

Για $x = 0$ είναι $u = 1$.

Για $x = \frac{\pi}{3}$ είναι $u = \frac{1}{2}$.

Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^4 x} \eta \mu x dx = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1 - u^2}{u^4} du = - \int_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^2} \right) du = \int_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u^2} - u^{-4} \right) du =$$

$$= \left[-\frac{1}{u} - \frac{u^{-3}}{-3} \right]_1^{\frac{1}{2}} = \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} \right]_1^{\frac{1}{2}} = -2 + \frac{8}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

$$\blacksquare \text{ Είναι } I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu^5 x}{\eta \mu^7 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu^4 x}{\eta \mu^7 x} \sigma \nu x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sigma \nu^2 x)^2}{\eta \mu^7 x} \sigma \nu x dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \eta \mu^2 x)^2}{\eta \mu^7 x} \sigma \nu x dx.$$

Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\eta\mu^2 x)^2}{\eta\mu^7 x} \sigma\upsilon\nu x dx$ θέτουμε $u = \eta\mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sigma\upsilon\nu x dx$.

Για $x = \frac{\pi}{6}$ είναι $u = \frac{1}{2}$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\eta\mu^2 x)^2}{\eta\mu^7 x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-u^2)^2}{u^7} du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-2u^2+u^4}{u^7} du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u^7} - 2\frac{1}{u^5} + \frac{1}{u^3} \right) du = \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^{-7} - 2u^{-5} + u^{-3}) du = \left[\frac{u^{-6}}{-6} - 2\frac{u^{-4}}{-4} + \frac{u^{-2}}{-2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \left[-\frac{1}{6u^6} + \frac{1}{2u^4} - \frac{1}{2u^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{64}{6} + 8 - 2 \right) = -\frac{1}{6} + \frac{64}{6} - 6 = \frac{27}{6}. \end{aligned}$$

■ Είναι $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varepsilon\phi^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \eta\mu x dx$.

Για τον υπολογισμό του $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \eta\mu x dx$ θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow -du = \eta\mu x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x = \frac{\pi}{6}$ είναι $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \eta\mu x dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-u^2}{u^3} du = - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u} - u^{-3} \right) du = \\ &= \left[\ln u - \frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left[\ln u + \frac{1}{2u^2} \right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■ Είναι $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\phi^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^3 x} \sigma\upsilon\nu x dx$.

Για τον υπολογισμό του $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^3 x} \sigma\upsilon\nu x dx$ θέτουμε $u = \eta\mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sigma\upsilon\nu x dx$.

Για $x = \frac{\pi}{6}$ είναι $u = \frac{1}{2}$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^3 x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-u^2}{u^3} du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(u^{-3} - \frac{1}{u} \right) du = \\ &= \left[\frac{u^{-2}}{-2} - \ln u \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[-\frac{1}{2u^2} - \ln u \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} - \left(-2 - \ln \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + 2 + \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

1916. ■ Είναι $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot (\epsilon\phi x)' dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot (\epsilon\phi x)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon\phi^2 x + 1) \cdot (\epsilon\phi x)' dx.$$

Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon\phi^2 x + 1) \cdot (\epsilon\phi x)' dx$ θέτουμε $u = \epsilon\phi x$.

Συνεπώς είναι $du = (\epsilon\phi x)' dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$.

Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $u=1$.

Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon\phi^2 x + 1) \cdot (\epsilon\phi x)' dx = \int_0^1 (u^2 + 1) du = \left[\frac{u^3}{3} + u \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

■ Είναι $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot \left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) dx =$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot (\sigma\phi x)' dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} \cdot (\sigma\phi x)' dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sigma\phi^2 x) \cdot (\sigma\phi x)' dx.$$

Για τον υπολογισμό του $I_2 = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sigma\varphi^2 x) \cdot (\sigma\varphi x)' dx$ θέτουμε $u = \sigma\varphi x$.

Συνεπώς είναι $du = (\sigma\varphi x)' dx$.

Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $u = 1$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$I_2 = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sigma\varphi^2 x) \cdot (\sigma\varphi x)' dx = -\int_1^0 (1 + u^2) du = \int_0^1 (1 + u^2) du = \left[u + \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

1917. ■ Είναι $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1 - \eta\mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu^2 x}{1 - \eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(1 - \eta\mu x)} (1 + \eta\mu x)}{\cancel{1 - \eta\mu x}} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x dx.$$

Για τον υπολογισμό του $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x dx$ θέτουμε $u = \eta\mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sigma\upsilon\nu x dx$.

Για $x = 0$ είναι $u = 0$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 (1 + u) du = \left[u + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

■ Είναι

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \varepsilon\varphi^2 x}{x + \varepsilon\varphi x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{x + \varepsilon\varphi x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{x + \varepsilon\varphi x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{x + \varepsilon\varphi x} dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{x + \varepsilon\varphi x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x + \varepsilon\varphi x} \left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx.$$

Για τον υπολογισμό του $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x + \varepsilon\varphi x} \left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx$ θέτουμε $u = x + \varepsilon\varphi x$.

Συνεπώς είναι $du = \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $u = \frac{\pi}{4} + 1$.

Για $x = \frac{\pi}{3}$ είναι $u = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Έτσι έχουμε :

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x + \varepsilon \varphi x} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}+1}^{\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}} \frac{1}{u} du = [\ln u]_{\frac{\pi}{4}+1}^{\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4} + 1\right).$$

$$\blacksquare \text{ Είναι } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta \mu x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \eta \mu x)(1 + \eta \mu x)}{\sin x (1 + \eta \mu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta \mu^2 x}{\sin x (1 + \eta \mu x)} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \eta \mu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} \sin x dx.$$

Για τον υπολογισμό του $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} \sin x dx$ θέτουμε $u = 1 + \eta \mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sin x dx$.

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u=2$.

Έτσι έχουμε :

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} \sin x dx = \int_1^2 \frac{1}{u} du = [\ln u]_1^2 = \ln 2.$$

1918. i. Είναι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu x}{(1 + \eta \mu x)(1 - \eta \mu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu x}{1 - \eta \mu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\eta \mu x}{\sin^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} \right) dx = \left[\varepsilon \varphi x - \frac{1}{\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = 2 - \sqrt{2}.$$

ii. Είναι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \eta \mu x)}{(1 + \eta \mu x)(1 - \eta \mu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \eta \mu x)}{1 - \eta \mu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \eta \mu x)}{\sin^2 x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\eta \mu x}{\sin^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} \right) dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\varepsilon \varphi x - \frac{1}{\sin x} \right)' dx = \left[x \left(\varepsilon \varphi x - \frac{1}{\sin x} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x' \left(\varepsilon \varphi x - \frac{1}{\sin x} \right) dx = \\
&= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\varepsilon \varphi x - \frac{1}{\sin x} \right) dx = \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\eta \mu x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx = \\
&= \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x - 1}{\sin x} dx = \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu x}{\sin x} dx.
\end{aligned}$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu x}{\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \eta \mu x)(1 + \eta \mu x)}{\sin x (1 + \eta \mu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu^2 x}{\sin x (1 + \eta \mu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \eta \mu x)} dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \eta \mu x)'}{1 + \eta \mu x} dx = \left[\ln(1 + \eta \mu x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \eta \mu x} dx = \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta \mu x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{2}) + \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Το τέχνασμα της προσθαφαίρεσης I+J, I-J

1919. Είναι :

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \eta \mu x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sin x + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \eta \mu x}{\sin x + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\begin{aligned}
A - B &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \eta \mu x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sin x + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \eta \mu x}{\sin x + \eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\eta \mu x + \sin x)'}{\eta \mu x + \sin x} dx = \\
&= \left[\ln |\eta \mu x + \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left| \eta \mu \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right| - \ln 1^0 = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε :

$$2A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2}.$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε :

$$2B = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2}.$$

Υπαρξη σε ολοκλήρωμα γινομένου με παράγοντα $f'(x)$ ή $f''(x)$

1920. Έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} x (f'(x))' dx = [x f'(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (x)' f'(x) dx = \\ &= \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - [f(x)]_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - \cancel{f(\beta)} + \cancel{f(\alpha)} = \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx = \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) .}$$

1921. Έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) g(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (f'(x))' g(x) dx = [f'(x) g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g'(x) dx = \\ &= f'(\beta) \cancel{g(\beta)}^0 - f'(\alpha) \cancel{g(\alpha)}^0 - \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))' g'(x) dx = \\ &= -[f(x) g'(x)] + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g''(x) dx = \\ &= -\cancel{f(\beta)}^0 g'(\beta) + \cancel{f(\alpha)}^0 g'(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g''(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g''(x) dx \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g''(x) dx .}$$

1922. Έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (g(x) + g'(x)) e^x dx &= 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} (e^x g(x) + e^x g'(x)) dx = 2 \Leftrightarrow \\ \int_0^{\pi} \left((e^x)' g(x) + e^x (g(x))' \right) dx &= 2 \Leftrightarrow [e^x g(x)]_0^{\pi} = 2 \Leftrightarrow \\ e^{\pi} g(\pi) - g(0) &= 2 \Leftrightarrow e^{\pi} \cdot e^{-\pi} - g(0) = 2 \Leftrightarrow 1 - g(0) = 2 \Leftrightarrow \boxed{g(0) = -1} .\end{aligned}$$

1923. Έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x g'(x) dx &= 1993 - \int_0^1 g(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x g'(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 1993 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 (x g'(x) + g(x)) dx &= 1993 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(x (g(x))' + x' g(x) \right) dx = 1993 \Leftrightarrow \\ [x g(x)]_0^1 &= 1993 \Leftrightarrow \boxed{g(1) = 1993} .\end{aligned}$$

1924. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του

$\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα **Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$. Επιπλέον η C_f εφάπτεται στον $x'x$ στο σημείο $M(1,0)$, συνεπώς $f'(1) = 0$ και $f(1) = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x) - f''(x)}{e^x} dx = 1 &\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f(x) - f'(x) + f'(x) - f''(x)}{e^x} dx = 1 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 \left(-\frac{f'(x) - f(x)}{e^x} - \frac{f''(x) - f'(x)}{e^x} \right) dx = 1 &\Leftrightarrow \\ -\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx - \int_0^1 \frac{f''(x) - f'(x)}{e^x} dx = 1 &\Leftrightarrow \\ -\int_0^1 \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} dx - \int_0^1 \frac{f''(x)e^x - f'(x)e^x}{e^{2x}} dx = 1 &\Leftrightarrow \\ -\int_0^1 \frac{(f(x))' e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} dx - \int_0^1 \frac{(f'(x))' e^x - f'(x)(e^x)'}{(e^x)^2} dx = 1 &\Leftrightarrow \\ -\left[\frac{f(x)}{e^x} \right]_0^1 - \left[\frac{f'(x)}{e^x} \right]_0^1 = 1 &\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^x} \right]_0^1 + \left[\frac{f'(x)}{e^x} \right]_0^1 = -1 \Leftrightarrow \\ \frac{\cancel{f(1)}^0}{e} - f(0) + \frac{\cancel{f'(1)}^0}{e} - \cancel{f'(0)}^0 = -1 &\Leftrightarrow \boxed{f(0) = 1}. \end{aligned}$$

- 1925.** Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 2$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα **Fermat** θα είναι $f'(2) = 0$. Επιπλέον η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, συνεπώς $f(0) = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x)) dx = -\frac{8}{3} &\Leftrightarrow \int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x)) dx = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \\ \int_0^2 xf''(x) dx + 3 \int_0^2 f'(x) dx = -\frac{8}{3} &\Leftrightarrow \int_0^2 x(f'(x))' dx + 3 \int_0^2 f'(x) dx = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \\ [xf'(x)]_0^2 - \int_0^2 x f'(x) dx + 3 \int_0^2 f'(x) dx = -\frac{8}{3} &\Leftrightarrow \\ 2\cancel{f'(2)}^0 - \int_0^2 x f'(x) dx + 3 \int_0^2 f'(x) dx = -\frac{8}{3} &\Leftrightarrow 2 \int_0^2 f'(x) dx = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \\ 2[f(x)]_0^2 = -\frac{8}{3} &\Leftrightarrow 2(f(2) - f(0)) = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow 2f(2) - 2 \cdot 1 = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \\ 2f(2) = -\frac{2}{3} &\Leftrightarrow \boxed{f(2) = -\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

- 1926.** Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \pi$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = \pi$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα **Fermat** θα είναι $f'(\pi) = 0$. Δίνεται και το $A(0, 2016)$ που είναι σημείο της C_f , συνεπώς έχουμε και $f(0) = 2016$. Για να βρούμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο A αρκεί να βρούμε και το $f'(0)$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx &= -2 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = -2 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \int_0^\pi (f'(x))' \sin x dx &= -2 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \sin x dx + [f'(x) \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) (\sin x)' dx &= -2 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \sin x dx - \cancel{f'(\pi)}^0 - f'(0) + \int_0^\pi f'(x) \eta \mu x dx &= -2 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \sin x dx - f'(0) + \int_0^\pi (f(x))' \eta \mu x dx &= -2 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \sin x dx - f'(0) + [f(x) \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f(x) (\eta \mu x)' dx &= -2 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi \cancel{f(x) \sin x dx} - f'(0) - \int_0^\pi \cancel{f(x) \sin x dx} &= -2 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(0) = 2}}. \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A έχει τύπο :

$$\varepsilon: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: y = 2x + 2016}.$$

- 1927.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζουν τα A και B είναι :

$$\lambda_{AB} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda_{AB} = \frac{f(3) - f(-2)}{5}}}.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $\varepsilon: 2x + 4y + 3 = 0$ είναι

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}}}.$$

Οι ευθείες AB και ε τέμνονται κάθετα άρα :

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{f(3) - f(-2)}{5} = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(3) - f(-2) = 10}}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 3 τέμνει τον άξονα $x'x$ υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$,

$$\text{συνεπώς είναι } f'(3) = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(3) = 1}}.$$

Επιπλέον η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = -2$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα **Fermat** θα είναι $f'(-2) = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^3 x f''(x) dx = \int_{-2}^3 x (f'(x))' dx = [x f'(x)]_{-2}^3 - \int_{-2}^3 x' f'(x) dx = \\ &= 3f'(3) + 2f'(-2) - \int_{-2}^3 f'(x) dx = 3 \cdot 1 - [f(x)]_{-2}^3 = 3 - (f(3) - f(-2)) = 3 - 10 = -7 \end{aligned}$$

1928. Η C_f εφάπτεται στον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$, συνεπώς $f'(1) = 0$ και $f(1) = 0$.

i. Είναι :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f''(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (f'(x))' dx = \frac{1}{2} \left([x^2 f'(x)]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' f'(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(f'(1) - \int_0^1 2x f'(x) dx \right) = - \int_0^1 x (f(x))' dx = \\ &= - \left([x f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)' f(x) dx \right) = - \left(f(1) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

Έτσι αποδείξαμε :

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f''(x) dx}.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f''(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{3}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^1 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^1 \frac{(1+x^3)'}{2\sqrt{1+x^3}} dx = \\ &= \left[\sqrt{1+x^3} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

1929. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \eta \mu x dx &= 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx + \int_0^\pi (f'(x))' \eta \mu x dx &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx + [f'(x) \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) (\eta \mu x)' dx &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu \nu x dx &= 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx - \int_0^\pi (f(x))' \sigma \nu \nu x dx = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx - [f(x) \sigma \upsilon \nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x) (\sigma \upsilon \nu x)' dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx - (-f(\pi) - f(0)) - \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx = 0 \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\pi) = -f(0).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta \mu x \sigma \upsilon \nu \frac{x}{2} f'(x)$, η οποία είναι συνεχής στο

$[0, \pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με $g(0) = f(0)$ και

$g(\pi) = f(\pi) = -f(0)$, δηλαδή $g(0) \cdot g(\pi) = -f^2(0) < 0$ (αφού $f(0) \neq 0$).

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \pi)$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta \mu x_0 \sigma \upsilon \nu \frac{x_0}{2} f'(x_0) = 0$.

Αποδείξαμε πως η εξίσωση $f(x) - \eta \mu x \sigma \upsilon \nu \frac{x}{2} f'(x) = 0$ έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** στο $(0, \pi)$.

1930. i. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(\xi, f(\xi))$ είναι :

$$\varepsilon : y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \Leftrightarrow \varepsilon : y = f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Αν η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε θα είναι :

$$0 = f'(\xi) \cdot 0 + f(\xi) - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x) - f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(3, 5)$.

Είναι :

$$xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x))' \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, η οποία είναι συνεχής στο $[3, 5]$ ως

αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(3, 5)$.

Επιπλέον είναι $g(3) = \frac{f(3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$ και $g(5) = \frac{f(5)}{5} = \frac{10}{5} = 2$, δηλαδή $g(3) = g(5)$,

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3, 5)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(\xi)}{\xi} \right)' = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0. \text{ Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον}$$

ένα $\xi \in (3, 5)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} x f''(x) dx &= \int_0^{\xi} x (f'(x))' dx = [x f'(x)]_0^{\xi} - \int_0^{\xi} (x)' f'(x) dx = \xi f'(\xi) - \int_0^{\xi} f'(x) dx = \\ &= \xi f'(\xi) - [f(x)]_0^{\xi} = \xi f'(\xi) - f(\xi) + f(0) = f(0) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\xi} x f''(x) dx = f(0)}.$$

1931. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} x f''(x) dx &= f(0) - f(\xi) \Leftrightarrow \int_0^{\xi} x (f'(x))' dx = f(0) - f(\xi) \Leftrightarrow \\ [x f'(x)]_0^{\xi} - \int_0^{\xi} (x)' f'(x) dx &= f(0) - f(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - \int_0^{\xi} f'(x) dx = f(0) - f(\xi) \Leftrightarrow \\ \xi f'(\xi) - [f(x)]_0^{\xi} &= f(0) - f(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) + f(0) = f(0) - f(\xi) \Leftrightarrow \\ \xi f'(\xi) &= 0 \Leftrightarrow_{\substack{\xi \neq 0 \\ \xi \in (0,1)}} f'(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f(0) = f(1)$,

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Δηλαδή **υπάρχει** $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{\xi} x f''(x) dx = f(0) - f(\xi)$.

1932. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^a x f''(x) dx &= 0 \Leftrightarrow \int_0^a x (f'(x))' dx = 0 \Leftrightarrow [x f'(x)]_0^a - \int_0^a (x)' f'(x) dx = 0 \Leftrightarrow \\ a f'(a) - \int_0^a f'(x) dx &= 0 \Leftrightarrow a f'(a) - [f(x)]_0^a = 0 \Leftrightarrow a f'(a) - f(a) + f(0) = 0 \Leftrightarrow \\ \underline{\underline{f(a) - a f'(a) = f(0)}}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - xf'(a)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, a]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, a)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Επιπλέον είναι $g(0) = f(0)$ και $g(a) = f(a) - af'(a) = f(0)$, δηλαδή $g(0) = g(a)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, a)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - f'(a) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(a)$.

1933. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 2$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(2) = 0$.

Επιπλέον η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, συνεπώς $f(0) = 1$.

i. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x)) dx &= 6 \Leftrightarrow \int_0^2 (xf''(x) + f'(x) + 2f'(x)) dx = 6 \Leftrightarrow \\ \int_0^2 (xf''(x) + f'(x)) dx + 2 \int_0^2 f'(x) dx &= 6 \Leftrightarrow \\ \int_0^2 (x(f'(x))' + (x)' f'(x)) dx + 2[f(x)]_0^2 &= 6 \Leftrightarrow \\ [xf'(x)]_0^2 + 2(f(2) - f(0)) &= 6 \Leftrightarrow 2f'(2) + 2(f(2) - 1) = 6 \Leftrightarrow \\ 2(f(2) - 1) &= 6 \Leftrightarrow f(2) - 1 = 3 \Leftrightarrow \boxed{f(2) = 4}. \end{aligned}$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_0^2 2f'(x) e^{f^2(x) + \ln f(x)} dx &= \int_0^2 2f'(x) e^{f^2(x)} e^{\ln f(x)} dx = \int_0^2 2f(x) f'(x) e^{f^2(x)} dx = \\ &= \int_0^2 (f^2(x))' e^{f^2(x)} dx = [e^{f^2(x)}]_0^2 = e^{f^2(2)} - e^{f^2(0)} = e^{16} - e. \end{aligned}$$

iii. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[x_0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $0 < 1 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$f'(2) < 1 < f'(x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, 2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$.

Αναγωγικοί (αναδρομικοί) τύποι

1934. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{(v+1)x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{vx+x}}{1+e^x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{vx}}{1+e^x} + \frac{e^{vx} \cdot e^x}{1+e^x} \right) dx = \int_0^1 \frac{e^{vx} \cdot \cancel{(1+e^x)}}{\cancel{1+e^x}} dx = \int_0^1 e^{vx} dx = \left[\frac{1}{v} e^{vx} \right]_0^1 = \frac{1}{v} e^v - \frac{1}{v} = \\ &= \frac{1}{v} (e^v - 1) \Leftrightarrow \boxed{I_v + I_{v+1} = \frac{1}{v} (e^v - 1), v \in \mathbb{N}^*}. \end{aligned}$$

ii. Έχουμε $I_{v+1} = \frac{1}{v} (e^v - 1) - I_v$, επομένως :

για $v=2$ είναι $I_3 = \frac{1}{2} (e^2 - 1) - I_2$ και για $v=1$ είναι $I_2 = e - 1 - I_1$ με

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln \frac{1+e}{2}.$$

Συνεπώς είναι :

$$I_2 = e - 1 - I_1 = e - 1 - \ln \frac{1+e}{2} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) - I_2 = \frac{1}{2} (e^2 - 1) - \left(e - 1 - \ln \frac{1+e}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^2 - 1) - e + 1 + \ln \frac{1+e}{2} = \\ &= \frac{e^2 - 1 - 2e + 2}{2} + \ln \frac{1+e}{2} = \frac{e^2 - 2e + 1}{2} + \ln \frac{1+e}{2} = \frac{(e-1)^2}{2} + \ln \frac{1+e}{2}. \end{aligned}$$

1935. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I_v + I_{v-2} &= \int_0^1 \frac{x^v}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{v-2}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^v}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^v}{x^2(x^2+1)} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^v}{x^2+1} + \frac{x^v}{x^2(x^2+1)} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^v x^2 + x^v}{x^2(x^2+1)} dx = \int_0^1 \frac{x^v \cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2} (x^2+1)} dx = \int_0^1 \frac{x^v}{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 x^{v-2} dx = \left[\frac{x^{v-1}}{v-1} \right]_0^1 = \frac{1}{v-1} \Leftrightarrow I_v + I_{v-2} = \frac{1}{v-1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}, v > 2}.$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$, επομένως :

για $v=5$ είναι $I_5 = \frac{1}{4} - I_3$ και για $v=3$ είναι $I_3 = \frac{1}{2} - I_1$ με

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{Συνεπώς είναι : } I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \text{ και}$$

$$I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2}.$$

1936. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I_{v+2} + I_v &= \int_0^2 \frac{x^{v+2}}{x^2+1} dx + \int_0^2 \frac{x^v}{x^2+1} dx = \int_0^2 \frac{x^v x^2}{x^2+1} dx + \int_0^2 \frac{x^v}{x^2+1} dx = \int_0^2 \left(\frac{x^v x^2}{x^2+1} + \frac{x^v}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \frac{x^v \cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} dx = \int_0^2 x^v dx = \left[\frac{x^{v+1}}{v+1} \right]_0^2 = \frac{2^{v+1}}{v+1} \Leftrightarrow \boxed{I_{v+2} + I_v = \frac{2^{v+1}}{v+1}, v \in \mathbb{N}^*}. \end{aligned}$$

ii. Έχουμε $I_{v+2} = \frac{2^{v+1}}{v+1} - I_v$, επομένως :

$$\text{για } v=3 \text{ είναι } I_5 = \frac{2^4}{4} - I_3 = 4 - I_3, \quad \text{για } v=2 \text{ είναι } I_4 = \frac{2^3}{3} - I_2 = \frac{8}{3} - I_2 \text{ και}$$

$$\text{για } v=1 \text{ είναι } I_3 = \frac{2^2}{2} - I_1 = 2 - I_1. \quad \text{Συνεπώς είναι :}$$

$$\begin{aligned} S &= I_1 + I_2 + 2I_3 + I_4 + I_5 = I_1 + \cancel{I_2} + 2I_3 + \cancel{\frac{8}{3}} - \cancel{I_2} + 4 - I_3 = I_1 + I_3 + \frac{20}{3} = \\ &= \cancel{I_1} + 2 - \cancel{I_1} + \frac{20}{3} = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

1937. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I_v &= \int_1^e x \ln^v x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^v x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln^v x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln^v x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2} v \ln^{v-1} x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{v}{2} \int_1^e x \ln^{v-1} x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{v}{2} I_{v-1} \Leftrightarrow \\ &\boxed{I_v = \frac{e^2}{2} - \frac{v}{2} I_{v-1}, v > 1}. \end{aligned}$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{e^2}{2} - \frac{v}{2} I_{v-1}$, επομένως :

$$\text{για } v=4 \text{ είναι } I_4 = \frac{e^2}{2} - \frac{4}{2} I_3 = \frac{e^2}{2} - 2I_3, \text{ για } v=3 \text{ είναι } I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} I_2 \text{ και}$$

$$\text{για } v=2 \text{ είναι } I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{2}{2} I_1 = \frac{e^2}{2} - I_1 \text{ με}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι :

$$I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4},$$

$$I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{3e^2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{e^2}{8} + \frac{3}{8} \text{ και}$$

$$I_4 = \frac{e^2}{2} - 2I_3 = \frac{e^2}{2} - 2 \left(\frac{e^2}{8} + \frac{3}{8} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

1938. i. Είναι :

$$\begin{aligned}
 I_v &= \int_0^1 x^v e^{ax} dx = \int_0^1 x^v \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' dx = \left[x^v \frac{e^{ax}}{a} \right]_0^1 - \int_0^1 (x^v)' \frac{e^{ax}}{a} dx = \frac{e^a}{a} - \int_0^1 v x^{v-1} \frac{e^{ax}}{a} dx = \\
 &= \frac{e^a}{a} - \frac{v}{a} \int_0^1 x^{v-1} e^{ax} dx = \frac{e^a}{a} - \frac{v}{a} I_{v-1} \Leftrightarrow \boxed{I_v = \frac{e^a}{a} - \frac{v}{a} I_{v-1}, v > 1}
 \end{aligned}$$

ii. Για $a=2$ έχουμε $I_v = \frac{e^2}{2} - \frac{v}{2} I_{v-1}$, επομένως :

$$\text{για } v=4 \text{ είναι } I_4 = \frac{e^2}{2} - \frac{4}{2} I_3 = \frac{e^2}{2} - 2I_3, \text{ για } v=3 \text{ είναι } I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} I_2 \text{ και}$$

$$\text{για } v=2 \text{ είναι } I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{2}{2} I_1 = \frac{e^2}{2} - I_1 \text{ με}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 x e^{2x} dx = \int_0^1 x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι :

$$I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4},$$

$$I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{3e^2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{e^2}{8} + \frac{3}{8} \text{ και}$$

$$I_4 = \frac{e^2}{2} - 2I_3 = \frac{e^2}{2} - 2 \left(\frac{e^2}{8} + \frac{3}{8} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 x^4 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 3}{4}}.$$

1939. i. Είναι :

$$\begin{aligned}
I_v &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^v \sigma \nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^v (\eta \mu x)' dx = \left[x^v \eta \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^v)' \eta \mu x dx = \\
&= \frac{\pi^v}{2^v} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v x^{v-1} \eta \mu x dx = \frac{\pi^v}{2^v} + v \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{v-1} (-\eta \mu x) dx = \frac{\pi^v}{2^v} + v \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{v-1} (\sigma \nu x)' dx = \\
&= \frac{\pi^v}{2^v} + v \left(\left[x^{v-1} \sigma \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^{v-1})' \sigma \nu x dx \right) = \frac{\pi^v}{2^v} + v \left(- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (v-1) x^{v-2} \sigma \nu x dx \right) = \\
&= \frac{\pi^v}{2^v} - v(v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{v-2} \sigma \nu x dx = \frac{\pi^v}{2^v} - v(v-1) I_{v-2} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$I_v = \frac{\pi^v}{2^v} - v(v-1) I_{v-2}, \quad v > 2.$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{\pi^v}{2^v} - v(v-1) I_{v-2}$, επομένως : για $v=3$ είναι $I_3 = \frac{\pi^3}{8} - 6I_1$ με

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sigma \nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\eta \mu x)' dx = \left[x \eta \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \eta \mu x dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx = \\
&= \frac{\pi}{2} + \left[\sigma \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι :

$$I_3 = \frac{\pi^3}{8} - 6I_1 = \frac{\pi^3}{8} - 6 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sigma \nu x dx = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6.$$

1940. i. Είναι :

$$\begin{aligned}
I_v &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^v x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \cdot \eta \mu^{v-1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sigma \nu x)' \cdot \eta \mu^{v-1} x dx = \\
&= \left[-\sigma \nu x \cdot \eta \mu^{v-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu x (\eta \mu^{v-1} x)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu x \cdot (v-1) \eta \mu^{v-2} x \cdot \sigma \nu x dx = \\
&= (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu^2 x \cdot \eta \mu^{v-2} x dx = (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \eta \mu^{v-2} x dx = \\
&= (v-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^{v-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \cdot \eta \mu^{v-2} x dx \right) = (v-1) \left(I_{v-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^v x dx \right) = \\
&= (v-1)(I_{v-2} - I_v) = (v-1) I_{v-2} - (v-1) I_v \Leftrightarrow I_v = (v-1) I_{v-2} - (v-1) I_v \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$I_v + (v-1)I_v = (v-1)I_{v-2} \Leftrightarrow vI_v = (v-1)I_{v-2} \Leftrightarrow I_v = \frac{v-1}{v}I_{v-2}, v > 2.$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{v-1}{v}I_{v-2}$, επομένως :

για $v=3$ είναι $I_3 = \frac{2}{3}I_1$ με $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

$$\text{Συνεπώς είναι : } I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x dx = \frac{2}{3}.$$

1941. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I_v + I_{v-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon \varphi^v x}{\varepsilon \varphi^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\varepsilon \varphi^v x + \frac{\varepsilon \varphi^v x}{\varepsilon \varphi^2 x} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x \frac{\varepsilon \varphi^2 x + 1}{\varepsilon \varphi^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} x (\varepsilon \varphi^2 x + 1) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} x \left(\frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu^2 x} + 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} x \frac{1}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} x (\varepsilon \varphi x)' dx = \\ &= \frac{1}{v-1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (v-1) \varepsilon \varphi^{v-2} x (\varepsilon \varphi x)' dx = \frac{1}{v-1} [\varepsilon \varphi^{v-1} x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{v-1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$I_v + I_{v-2} = \frac{1}{v-1} \Leftrightarrow I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}, v > 2.$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$, επομένως :

για $v=5$ είναι $I_5 = \frac{1}{4} - I_3$ και για $v=3$ είναι $I_3 = \frac{1}{2} - I_1$ με

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma \nu x)'}{\sigma \nu x} dx = - [\ln(\sigma \nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= - \left(\ln \left(\sigma \nu \frac{\pi}{4} \right) - \ln(\sigma \nu 0) \right) = - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \frac{2}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι : $I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$ και

$$I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

1942. i. Είναι :

$$\begin{aligned}
I_v &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^v x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^{v-2} x} \cdot \frac{1}{\sigma v v^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^{v-2} x} \cdot (\varepsilon \phi x)' dx = \\
&= \left[\frac{1}{\sigma v v^{v-2} x} \cdot \varepsilon \phi x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sigma v v^{v-2} x} \right)' \cdot \varepsilon \phi x dx = \\
&= \frac{1}{\left(\sigma v \frac{\pi}{3} \right)^{v-2}} \cdot \varepsilon \phi \frac{\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sigma v v^{2-v} x \right)' \cdot \varepsilon \phi x dx = \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)^{v-2}} \cdot \sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2-v) \sigma v v^{1-v} x \cdot (-\eta \mu x) \cdot \frac{\eta \mu x}{\sigma v v x} dx = \\
&= 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^{v-1} x} \cdot \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma v v x} dx = 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma v v^{v-1} x \cdot \sigma v v x} dx = \\
&= 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma v v^{v-2} x \cdot \sigma v v^2 x} dx = 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma v v^2 x}{\sigma v v^{v-2} x \cdot \sigma v v^2 x} dx = \\
&= 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sigma v v^v x} - \frac{1}{\sigma v v^{v-2} x} \right) dx = \\
&= 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^v x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^{v-2} x} dx \right) = 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) (I_v - I_{v-2}) \Leftrightarrow \\
I_v &= 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) (I_v - I_{v-2}) \Leftrightarrow I_v = 2^{v-2} \sqrt{3} + (2-v) I_v - (2-v) I_{v-2} \Leftrightarrow \\
I_v - (2-v) I_v &= 2^{v-2} \sqrt{3} - (2-v) I_{v-2} \Leftrightarrow (v-1) I_v = 2^{v-2} \sqrt{3} - (2-v) I_{v-2} \Leftrightarrow \\
\boxed{I_v} &= \frac{2^{v-2} \sqrt{3}}{v-1} + \frac{v-2}{v-1} I_{v-2}, \quad v > 2.
\end{aligned}$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{2^{v-2} \sqrt{3}}{v-1} + \frac{v-2}{v-1} I_{v-2}$, επομένως :

$$\text{για } v=6 \text{ είναι } I_6 = \frac{2^4 \sqrt{3}}{5} + \frac{4}{5} I_4 = \frac{16\sqrt{3}}{5} + \frac{4}{5} I_4 \text{ και}$$

$$\text{για } v=4 \text{ είναι } I_4 = \frac{2^2 \sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} I_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} I_2 \text{ με } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma v v^2 x} dx = [\varepsilon \phi x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Συνεπώς είναι : } I_4 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ και}$$

$$I_6 = \frac{16\sqrt{3}}{5} + \frac{4}{5}2\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{24\sqrt{3}}{5} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin v^6 x} dx = \frac{24\sqrt{3}}{5}}.$$

1943. i. Είναι :

$$\begin{aligned} I_v &= \int_0^1 \frac{x^v}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{v-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{v-1} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{v-1} \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \\ &= \int_0^1 x^{v-1} (\sqrt{x^2+1})' dx = \left[x^{v-1} (\sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 - \int_0^1 (x^{v-1})' \sqrt{x^2+1} dx = \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 (v-1) x^{v-2} \sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{2} - (v-1) \int_0^1 x^{v-2} \sqrt{x^2+1} dx = \\ &= \sqrt{2} - (v-1) \int_0^1 x^{v-2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - (v-1) \int_0^1 x^{v-2} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \\ &= \sqrt{2} - (v-1) \left(\int_0^1 x^{v-2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int_0^1 x^{v-2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \right) = \\ &= \sqrt{2} - (v-1) \int_0^1 \frac{x^v}{\sqrt{x^2+1}} dx - (v-1) \int_0^1 \frac{x^{v-2}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - (v-1)I_v - (v-1)I_{v-2} \Leftrightarrow \\ I_v &= \sqrt{2} - (v-1)I_v - (v-1)I_{v-2} \Leftrightarrow I_v + (v-1)I_v = \sqrt{2} - (v-1)I_{v-2} \Leftrightarrow \\ vI_v &= \sqrt{2} - (v-1)I_{v-2} \Leftrightarrow \boxed{I_v = \frac{\sqrt{2}}{v} - \frac{v-1}{v}I_{v-2}, v > 2}. \end{aligned}$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{\sqrt{2}}{v} - \frac{v-1}{v}I_{v-2}$, επομένως :

για $v=5$ είναι $I_5 = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{5}I_3$ και για $v=3$ είναι $I_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}I_1$ με

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

Συνεπώς είναι :

$$I_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \text{ και}$$

$$I_5 = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{5} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{8}{15} = \frac{7\sqrt{2}-8}{15}.$$

1944. i. Είναι :

$$I_v = \int_0^1 x^v \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{v-1} \cdot x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{v-1} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{v-1} \cdot (x^2+1)' \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{v-1} \left(\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right)' dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_0^1 x^{v-1} \left((x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right)' dx = \frac{1}{3} \left(\left[x^{v-1} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right] - \int_0^1 (x^{v-1})' (x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - \int_0^1 (v-1) x^{v-2} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx \right) = \frac{1}{3} \left(2\sqrt{2} - (v-1) \int_0^1 x^{v-2} (x^2+1) \sqrt{x^2+1} dx \right) = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} \int_0^1 (x^{v-2} \cdot x^2 \sqrt{x^2+1} + x^{v-2} \sqrt{x^2+1}) dx = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} \left(\int_0^1 x^v \sqrt{x^2+1} dx + \int_0^1 x^{v-2} \sqrt{x^2+1} dx \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} (I_v + I_{v-2}) \Leftrightarrow \\
I_v &= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} (I_v + I_{v-2}) \Leftrightarrow I_v = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} I_v - \frac{v-1}{3} I_{v-2} \Leftrightarrow \\
I_v + \frac{v-1}{3} I_v &= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} I_{v-2} \Leftrightarrow \frac{v+2}{3} I_v = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{v-1}{3} I_{v-2} \Leftrightarrow \\
\boxed{I_v &= \frac{2\sqrt{2}}{v+2} - \frac{v-1}{v+2} I_{v-2}, v > 2}.
\end{aligned}$$

ii. Έχουμε $I_v = \frac{2\sqrt{2}}{v+2} - \frac{v-1}{v+2} I_{v-2}$, επομένως :

για $v=5$ είναι $I_5 = \frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{4}{7} I_3$ και για $v=3$ είναι $I_3 = \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5} I_1$ με

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^1 x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2+1)' \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{3} \left[(x^2+1) \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5} I_1 = \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{6\sqrt{2}}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15} \text{ και} \\
I_5 &= \frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{4}{7} I_3 = \frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{4}{7} \left(\frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{8\sqrt{2}}{105} - \frac{8}{105} = \frac{22\sqrt{2}-8}{105}.
\end{aligned}$$

1945. i. Για τον υπολογισμό του $K_v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^v x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$ θέτουμε $u = \eta\mu x$.

Συνεπώς είναι $du = \sigma\upsilon\nu x dx$. Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{3}$ είναι $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} K_v &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^v x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^v du = \left[\frac{u^{v+1}}{v+1} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{v+1}}{v+1} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{v+1}}{v+1} = \\ &= \frac{1}{v+1} \cdot \frac{1}{2^{v+1}} \left(\sqrt{3}^{v+1} - \sqrt{2}^{v+1} \right) \Leftrightarrow \boxed{K_v = \frac{1}{(v+1)2^{v+1}} \left(\sqrt{3}^{v+1} - \sqrt{2}^{v+1} \right)}. \end{aligned}$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} I_{v+2} - I_v &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^{v+2} x}{\sigma\upsilon\nu x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^v x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^v x}{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^v x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^v x}{\sigma\upsilon\nu x} (\eta\mu^2 x - 1) dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^v x}{\sigma\upsilon\nu x} (1 - \eta\mu^2 x) dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^v x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}} \cancel{\sigma\upsilon\nu x} dx = \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^v x \sigma\upsilon\nu x dx = -K_v = - \frac{1}{(v+1)2^{v+1}} \left(\sqrt{3}^{v+1} - \sqrt{2}^{v+1} \right). \end{aligned}$$

iii. Έχουμε $I_{v+2} - I_v = - \frac{1}{(v+1)2^{v+1}} \left(\sqrt{3}^{v+1} - \sqrt{2}^{v+1} \right) \Leftrightarrow$

$I_{v+2} = I_v - \frac{1}{(v+1)2^{v+1}} \left(\sqrt{3}^{v+1} - \sqrt{2}^{v+1} \right)$, επομένως :

για $v=1$ είναι $I_3 = I_1 - \frac{1}{2 \cdot 2^2} \left(\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 \right) = I_1 - \frac{1}{8}$ με

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = - \left[\ln(\sigma\upsilon\nu x) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= - \left(\ln \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \right) - \ln \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \right) \right) = - \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{\ln 2} + \ln \sqrt{2} - \cancel{\ln 2} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι $I_3 = I_1 - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{8}$.

Αλλαγή μεταβλητής σε θεωρητικές εφαρμογές

1946. Θέτοντας $u = 1 - x$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(x) dx}.$$

1947. Θέτοντας $u = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - u$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=1$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^1 x^a (1-x)^\beta dx = -\int_1^0 (1-u)^a u^\beta du = \int_0^1 u^\beta (1-u)^a du = \int_0^1 x^\beta (1-x)^a dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 x^a (1-x)^\beta dx = \int_0^1 x^\beta (1-x)^a dx}.$$

1948. i. Θέτοντας $u = x - \gamma$ παίρνουμε $du = dx$.

Για $x = \alpha + \gamma$ είναι $u = \alpha$. Για $x = \beta + \gamma$ είναι $u = \beta$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma) dx = \int_\alpha^\beta f(u) du = \int_\alpha^\beta f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma) dx = \int_\alpha^\beta f(x) dx}.$$

ii. Θέτοντας $u = \frac{x}{\gamma}$ παίρνουμε $du = \frac{1}{\gamma} dx \Leftrightarrow dx = \gamma du$.

Για $x = \alpha\gamma$ είναι $u = \alpha$. Για $x = \beta\gamma$ είναι $u = \beta$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right) dx = \int_\alpha^\beta f(u) \gamma du = \gamma \int_\alpha^\beta f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right) dx = \gamma \int_\alpha^\beta f(x) dx}.$$

1949. α. Αφού η f είναι περιττή είναι :

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \text{ για κάθε } x \in [-a, a] \text{ οπότε :}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_{-a}^a f(-x) dx.$$

Θέτοντας $u = -x$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -a$ είναι $u = a$. Για $x = a$ είναι $u = -a$. Έτσι έχουμε :

$$-\int_{-a}^a f(-x) dx = \int_a^{-a} f(u) du = -\int_{-a}^a f(u) du = -\int_{-a}^a f(x) dx.$$

Από τη σχέση $\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_{-a}^a f(-x) dx$ παίρνουμε :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_{-a}^a f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0}.$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 1}$, $x \in [-1, 1]$ η οποία είναι συνεχής στο

$[-1, 1]$. Έχουμε :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 1} = -f(x), \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι περιττή, έτσι σύμφωνα με}$$

το ερώτημα **α)** θα είναι $\boxed{\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 1} dx = 0}.$

1950. α. Θέτοντας $u = -x$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -a$ είναι $u = a$. Για $x = a$ είναι $u = -a$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{-a}^a f(-x) dx = -\int_a^{-a} f(u) du = \int_{-a}^a f(u) du = \int_{-a}^a f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx}.$$

β. i. Είναι : $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1+e^{-x}} = e^x \frac{\sin x}{e^x(1+e^{-x})} = e^x \frac{\sin x}{e^x + 1} = e^x f(x).$

Άρα :

$$f(x) + f(-x) = f(x) + e^x f(x) = (1+e^x)f(x) = \cancel{(1+e^x)} \frac{\sin x}{\cancel{1+e^x}} = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) + f(-x) = \sin x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Αποδείξαμε πως $f(x) + f(-x) = \sin x \Leftrightarrow f(-x) = \sin x - f(x)$ και

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx, \text{ το οποίο για } a = \frac{\pi}{2} \text{ γίνεται } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - f(x)) dx \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = [\eta \mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1 + \eta \mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1}.$$

1951. i. Είναι : $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{2^{-x} + 1} = 2^x \frac{x^2 + 1}{2^x(2^{-x} + 1)} = 2^x \frac{x^2 + 1}{1 + 2^x} = 2^x f(x).$

Άρα :

$$f(x) + f(-x) = f(x) + 2^x f(x) = (1+2^x)f(x) = \cancel{(1+2^x)} \frac{x^2 + 1}{\cancel{1+2^x}} = x^2 + 1$$

$$\boxed{f(x) + f(-x) = x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Αποδείξαμε πως $f(x) + f(-x) = x^2 + 1$ και αφού η f είναι συνεχής έχουμε :

$$\int_{-a}^a f(x) dx + \int_{-a}^a f(-x) dx = \int_{-a}^a (x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x) dx + \int_{-a}^a f(-x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-a}^a \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx + \int_{-a}^a f(-x) dx = \frac{a^3}{3} + a - \left(-\frac{a^3}{3} - a \right) \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x) dx + \int_{-a}^a f(-x) dx = \frac{2a^3}{3} + 2a$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{-a}^a f(-x) dx$ θέτοντας $u = -x$ είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -a$ είναι $u = a$. Για $x = a$ είναι $u = -a$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{-a}^a f(-x) dx = - \int_a^{-a} f(u) du = \int_{-a}^a f(u) du = \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\int_{-a}^a f(x) dx + \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{2a^3}{3} + 2a \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{2a^3}{3} + 2a \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{a^3}{3} + a}.$$

1952. i. α. Είναι $f(x)f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{f(-x)}$, έτσι η σχέση $I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1+f(x)} dx$

$$\text{γίνεται } I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1 + \frac{1}{f(-x)}} dx.$$

Θέτοντας $u = -x \Leftrightarrow x = -u$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -1$ είναι $u = 1$. Για $x = 1$ είναι $u = -1$. Έτσι έχουμε :

$$I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1 + \frac{1}{f(-x)}} dx = - \int_1^{-1} \frac{(-u)^{2v}}{1 + \frac{1}{f(u)}} du = \int_{-1}^1 f(u) \frac{u^{2v}}{f(u) + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v} f(x)}{f(x) + 1} dx$$

$$\boxed{I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v} f(x)}{1 + f(x)} dx}.$$

β. Θα είναι :

$$2I_v = I_v + I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1+f(x)} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^{2v} f(x)}{1+f(x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v} + x^{2v} f(x)}{1+f(x)} dx =$$

$$= \int_{-1}^1 x^{2v} dx = \left[\frac{x^{2v+1}}{2v+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2v+1} - \frac{-1}{2v+1} = \frac{2}{2v+1} \Leftrightarrow \boxed{2I_v = \frac{2}{2v+1}}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-1, 1]$. Για την f έχουμε $f(x)f(-x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$ συνεπώς ισχύουν οι υποθέσεις και

τα συμπεράσματα του πρώτου ερωτήματος, έτσι στη σχέση $I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1+f(x)} dx$ για

$$v=1008 \text{ παίρνουμε } I_{1008} = \int_{-1}^1 \frac{x^{2016}}{1+e^x} dx.$$

Για το I_v έχουμε αποδείξει επίσης πως $2I_v = \frac{2}{2v+1}$, έτσι για $v=1008$ είναι

$$2I_{1008} = \frac{2}{2017} \Leftrightarrow I_{1008} = \frac{1}{2017}.$$

$$\text{Συνεπώς } \boxed{\int_{-1}^1 \frac{x^{2016}}{1+e^x} dx = \frac{1}{2017}}.$$

1953. i. Είναι :

$$\begin{aligned} f(4-x) &= \ln \left(\frac{e^{4-x} + e^4}{e^{4-x} + 1} \right) = \ln \left(\frac{\frac{e^4}{e^x} + e^4}{\frac{e^4}{e^x} + 1} \right) = \ln \left(\frac{e^4 \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)}{\frac{e^4}{e^x} + 1} \right) = \ln \left(e^4 \frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{e^4}{e^x} + 1} \right) = \\ &= \ln e^4 + \ln \left(\frac{\cancel{e^x} \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)}{\cancel{e^x} \left(\frac{e^4}{e^x} + 1 \right)} \right) = 4 + \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x + e^4} \right) = 4 - \ln \left(\frac{e^x + e^4}{e^x + 1} \right) = 4 - f(x) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{f(4-x) = 4 - f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (4 - f(4-x)) dx = \int_0^4 4 dx - \int_0^4 f(4-x) dx = [4x]_0^4 - \int_0^4 f(4-x) dx = \\ &= 16 - \int_0^4 f(4-x) dx. \end{aligned}$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_0^4 f(4-x) dx$ θέτοντας $u = 4-x$ είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x=0$ είναι $u=4$. Για $x=4$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^4 f(4-x) dx = - \int_4^0 f(u) du = \int_0^4 f(u) du = \int_0^4 f(x) dx.$$

Επομένως η σχέση $I = 16 - \int_0^4 f(4-x) dx$ γίνεται :

$$I = 16 - \int_0^4 f(x) dx \Leftrightarrow I = 16 - I \Leftrightarrow 2I = 16 \Leftrightarrow \boxed{I=8}.$$

1954. i. Είναι :

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\eta\mu^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\eta\mu^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\nu^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\sigma\nu^{\nu}x}{\sigma\nu^{\nu}x+\eta\mu^{\nu}x}=\\=\frac{\sigma\nu^{\nu}x+\eta\mu^{\nu}x-\eta\mu^{\nu}x}{\sigma\nu^{\nu}x+\eta\mu^{\nu}x}=1-\frac{\eta\mu^{\nu}x}{\sigma\nu^{\nu}x+\eta\mu^{\nu}x}=1-f(x) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ii. Είναι :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \\= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx.$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx$ θέτοντας $u = \frac{\pi}{2}-x$ είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x=0$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Επομένως η σχέση $I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx$ γίνεται :

$$I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} - I \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}.$$

1955. Είναι $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x f(\alpha + \beta - x) dx$.

Θέτοντας $u = \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x = \alpha + \beta - u$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x=\alpha$ είναι $u=\beta$. Για $x=\beta$ είναι $u=\alpha$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x f(\alpha + \beta - x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} (\alpha + \beta - u) f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - u) f(u) du = \\= \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - x) f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta) f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_a^\beta x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_a^\beta f(x) dx .$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος :

$$(\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(\alpha + \beta - x) dx ,$$

θέτοντας $u = \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x = \alpha + \beta - u$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = \alpha$ είναι $u = \beta$. Για $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι $u = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx &= (\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(\alpha + \beta - x) dx = -(\alpha + \beta) \int_\beta^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(u) du = \\ &= -(\alpha + \beta) \int_\beta^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\frac{\alpha + \beta}{2}}^\beta f(x) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\cancel{(\alpha + \beta)} \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx = \cancel{(\alpha + \beta)} \int_{\frac{\alpha + \beta}{2}}^\beta f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\alpha + \beta}{2}}^\beta f(x) dx .$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} \int_a^\beta f(x) dx &= \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\alpha + \beta}{2}}^\beta f(x) dx \right) = \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx + \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx \right) = \cancel{\frac{\alpha + \beta}{2}} \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx = \\ &= (\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} \int_a^\beta f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx . \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \boxed{\int_a^\beta x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_a^\beta f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_a^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx} .$$

1956. Είναι $f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx = \int_a^\beta c dx \Leftrightarrow$

$$\int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx = [cx]_a^\beta \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x) dx = c(\beta - \alpha) .$$

Για τον υπολογισμό του $\int_a^{\beta} f(a+\beta-x)dx$ θέτουμε $u = a+\beta-x$ και παίρνουμε

$$du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

Για $x=a$ είναι $u=\beta$. Για $x=\beta$ είναι $u=a$. Έτσι έχουμε :

$$\int_a^{\beta} f(a+\beta-x)dx = -\int_{\beta}^a f(u)du = \int_a^{\beta} f(u)du = \int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Έτσι από τη σχέση $\int_a^{\beta} f(x)dx + \int_a^{\beta} f(a+\beta-x)dx = c(\beta-a)$, έχουμε :

$$\int_a^{\beta} f(x)dx + \int_a^{\beta} f(x)dx = c(\beta-a) \Leftrightarrow 2\int_a^{\beta} f(x)dx = c(\beta-a) \Leftrightarrow$$

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = c \frac{\beta-a}{2}.$$

Αν στη σχέση $f(x) + f(a+\beta-x) = c$ βάλουμε όπου x το a τότε έχουμε

$$f(a) + f(\beta) = c \text{ οπότε η σχέση } \int_a^{\beta} f(x)dx = c \frac{\beta-a}{2} \text{ γίνεται :}$$

$$\underline{\underline{\int_a^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta-a}{2}(f(a) + f(\beta))}}.$$

Αν στη σχέση $f(x) + f(a+\beta-x) = c$ βάλουμε όπου x το $\frac{a+\beta}{2}$ τότε έχουμε

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = c \Leftrightarrow 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = c \text{ οπότε η σχέση } \int_a^{\beta} f(x)dx = c \frac{\beta-a}{2}$$

γίνεται :

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \cancel{2}f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \cdot \frac{\beta-a}{\cancel{2}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\int_a^{\beta} f(x)dx = (\beta-a)f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{\int_a^{\beta} f(x)dx = (\beta-a)f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-a}{2}(f(a) + f(\beta))}.$$

1957. α. i. Για τον υπολογισμό του $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}dx$ θέτουμε $u = a-x \Leftrightarrow$

$$x = a-u \text{ και παίρνουμε } du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

Για $x=0$ είναι $u=a$. Για $x=a$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}dx = -\int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)}du = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)}du = \\ &= \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)}dx = J \Leftrightarrow \boxed{I=J}. \end{aligned}$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I+J &= \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)} dx = \\
 &= \int_0^a \left(\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} + \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)} \right) dx = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \int_0^a 1 dx = \\
 &= [x]_0^a = a > 0 \Leftrightarrow \boxed{I+J > 0}.
 \end{aligned}$$

β. Αφού είναι $I+J=a$ και $I=J$, τότε $2I=a \Rightarrow \boxed{I=\frac{a}{2}=J}$.

1958. i. Αφού η f είναι περιττή είναι :

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \text{ για κάθε } x \in [-a, a] \subseteq \mathbb{R} \text{ οπότε :}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_{-a}^a f(-x) dx.$$

Θέτοντας $u = -x$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -a$ είναι $u = a$. Για $x = a$ είναι $u = -a$. Έτσι έχουμε :

$$- \int_{-a}^a f(-x) dx = \int_a^{-a} f(u) du = - \int_{-a}^a f(u) du = - \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Από τη σχέση $\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_{-a}^a f(-x) dx$ παίρνουμε :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_{-a}^a f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0}.$$

ii. Είναι $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$

Αφού η f είναι άρτια είναι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-a, a] \subseteq \mathbb{R}$ οπότε :

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx.$$

Θέτοντας $u = -x$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -a$ είναι $u = a$. Για $x = 0$ είναι $u = 0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{-a}^0 f(-x) dx = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx.$$

Από τη σχέση $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ παίρνουμε :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx}.$$

iii. ■ Για το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_{-1}^1 x^3 e^{x^2} \ln(x^2 + 1) dx$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x) = x^3 e^{x^2} \ln(x^2 + 1)$, $x \in [-1, 1]$. Επιπλέον είναι :

$$f(-x) = (-x)^3 e^{(-x)^2} \ln((-x)^2 + 1) = -x^3 e^{x^2} \ln(x^2 + 1) = -f(x),$$

δηλαδή η f είναι περιττή, άρα σύμφωνα με το ερώτημα **i)** θα είναι :

$$I_1 = \int_{-1}^1 x^3 e^{x^2} \ln(x^2 + 1) dx = 0.$$

■ Για το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} = \sin x \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\sin x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x),$$

δηλαδή η f είναι περιττή, άρα σύμφωνα με το ερώτημα **i)** θα είναι :

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

■ Είναι :

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x \sin x + e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x \sin x}{1 + e^{|x|}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx.$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{x \sin x}{1 + e^{|x|}} dx$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + e^{|x|}}, x \in [-1, 1]$

. Έτσι έχουμε :

$$f(-x) = \frac{(-x) \sin(-x)}{1 + e^{|-x|}} = \frac{-x \sin x}{1 + e^{|x|}} = -f(x), \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι περιττή, άρα σύμφωνα}$$

με το ερώτημα **i)** θα είναι $\int_{-1}^1 \frac{x \sin x}{1 + e^{|x|}} dx = 0.$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}, x \in [-1, 1].$

Έτσι έχουμε :

$$g(-x) = \frac{e^{|-x|}}{1 + e^{|-x|}} = \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} = g(x), \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι άρτια, άρα σύμφωνα με το}$$

ερώτημα **ii)** θα είναι $\int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx = 2 \int_0^1 \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx.$

Άρα :

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x \sin x}{1 + e^{|x|}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx = 2 \int_0^1 \frac{e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx \stackrel{x \in (0,1)}{=} 2 \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = 2 \int_0^1 \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} dx =$$

$$= 2 \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 = 2(\ln(1+e) - \ln 2) = 2 \ln \frac{e+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x \sinh x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx = 2 \ln \frac{e+1}{2}.$$

1959. i. Θετόντας όπου x το $x+1$ στη σχέση $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 6x+6$ έχουμε :

$$f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) = 6(x+1) + 6 \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) = 6x+12 \quad \begin{matrix} f(x+1)+f(x+2)=6x+6-f(x) \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$6x+6-f(x) + f(x+3) = 6x+12 \Leftrightarrow \boxed{f(x+3) = f(x) + 6}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Στη σχέση $f(x+3) = f(x) + 6$ για $x=0$ έχουμε :

$$f(3) = f(0) + 6 \Leftrightarrow f(3) - f(0) = 6.$$

Στη σχέση $f(x+3) = f(x) + 6$ για $x=3$ έχουμε : $f(6) = f(3) + 6 \Leftrightarrow f(6) - f(3) = 6$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[0, 3]$ και $[3, 6]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 3) \subseteq (0, 6)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[3, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, 6)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (3, 6) \subseteq (0, 6)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 6)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε :

$$\boxed{f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 2}.$$

iii. α. Θετόντας $u = x + \kappa$ παίρνουμε $du = dx$.

Για $x=0$ είναι $u=\kappa$. Για $x=1$ είναι $u=\kappa+1$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^1 f(x+\kappa) dx = \int_{\kappa}^{\kappa+1} f(u) du = \int_{\kappa}^{\kappa+1} f(x) dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 f(x+\kappa) dx = \int_{\kappa}^{\kappa+1} f(x) dx, \kappa \in \mathbb{R}}.$$

β. Στη σχέση $\int_0^1 f(x+\kappa) dx = \int_{\kappa}^{\kappa+1} f(x) dx$,

για $\kappa=1$ παίρνουμε $\int_0^1 f(x+1) dx = \int_1^2 f(x) dx$ και

για $\kappa=2$ παίρνουμε $\int_0^1 f(x+2) dx = \int_2^3 f(x) dx$.

Έτσι έχουμε : $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 6x+6 \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x+1) dx + \int_0^1 f(x+2) dx = \int_0^1 (6x+6) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \left[3x^2 + 6x \right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^3 f(x) dx = 9}.$$

γ. Είναι :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+3} f(t) dt &= \int_x^{x+1} f(t) dt + \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt + \int_{x+2}^{x+3} f(t) dt = \\ &= \int_0^1 f(t+x) dt + \int_0^1 f(t+x+1) dt + \int_0^1 f(t+x+2) dt = \\ &= \int_0^1 (f(t+x) + f(t+x+1) + f(t+x+2)) dt = \\ &= \int_0^1 (6t+6x+6) dt = \left[3t^2 + (6x+6)t \right]_0^1 = 6x+9 \Leftrightarrow \boxed{\int_x^{x+3} f(t) dt = 6x+9}, \end{aligned}$$

όπου αν στην αρχική σχέση θέσουμε όπου x το $t+x$ παίρνουμε :

$$f(t+x) + f(t+x+1) + f(t+x+2) = 6(t+x) + 6 = 6t + 6x + 6.$$

δ. Στη σχέση $\int_x^{x+3} f(t) dt = 6x+9$, για $x=3$ είναι $\int_3^6 f(t) dt = 27$ και για $x=6$ είναι

$$\int_6^9 f(t) dt = 45, \text{ συνεπώς έχουμε :}$$

$$\int_0^9 f(t) dt = \int_0^3 f(t) dt + \int_3^6 f(t) dt + \int_6^9 f(t) dt = 9 + 27 + 45 = 81 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^9 f(t) dt = 81}.$$

ε. Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε υπάρχουν τα όρια

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x].$$

Για τον υπολογισμό του λ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 6x+6. \text{ Έτσι, κοντά στο μηδέν έχουμε :}$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x+1)}{x} + \frac{f(x+2)}{x} = 6 + \frac{6}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} + \frac{f(x+2)}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} = 6 + \frac{6}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} + \frac{f(x+2)}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 + \frac{6}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \lambda \cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 6 + 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 6 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{x+1} \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{f(u)}{u} = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)}{x+2} \stackrel{u=x+2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{f(u)}{u} = \lambda,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Για τον υπολογισμό του β θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση
 $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 6x + 6$.

Έτσι έχουμε :

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 6x + 6 \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) - 2x - 2x - 2x - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 2x + f(x+1) - 2(x+1) + f(x+2) - 2(x+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x + [f(x+1) - 2(x+1)] + [f(x+2) - 2(x+2)]] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta + \beta + \beta = 0 \Leftrightarrow 3\beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 0}}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - 2(x+1)] \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} [f(u) - 2u] = \beta \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) - 2(x+2)] \stackrel{u=x+2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} [f(u) - 2u] = \beta.$$

Επομένως η ζητούμενη πλάγια ασύμπτωτη είναι η $\boxed{y = 2x}$.

1960. α. Για τον υπολογισμό του $\int_0^3 f(2x+1)dx$ θέτουμε $u = 2x+1$ και παίρνουμε

$$du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du.$$

Για $x=0$ είναι $u=1$.

Για $x=3$ είναι $u=7$.

Έτσι έχουμε :

$$\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(u)du = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx}.$$

β. Έχουμε :

$$4 \int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2017 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2017 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^7 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2017 \Leftrightarrow \int_1^7 f(x)dx = 2017.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 7]$ άρα σύμφωνα με το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής** η f παρουσιάζει ελάχιστο m και μέγιστο M οπότε ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in [1, 7].$$

Έτσι ολοκληρώνοντας παίρνουμε :

$$\int_1^7 m dx \leq \int_1^7 f(x)dx \leq \int_1^7 M dx \Leftrightarrow [mx]_1^7 \leq 2017 \leq [Mx]_1^7 \Leftrightarrow 6m \leq 2017 \leq 6M \Leftrightarrow$$

$$m \leq \frac{2017}{6} \leq M, \text{ άρα υπάρχει } \xi \in (1, 7) \subseteq [1, 7] \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{2017}{6}.$$

H αντικατάσταση $u = \alpha + \beta - x$

1961. i. Θέτοντας $u = \alpha + \beta - x$ παίρνουμε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = \alpha$ είναι $u = \beta$. Για $x = \beta$ είναι $u = \alpha$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}.$$

ii. Για το $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^x + 1} dx$ θέτουμε $u = -x \Leftrightarrow x = -u$ και παίρνουμε

$$du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

Για $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = -\frac{\pi}{2}$. Έτσι έχουμε :

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^x + 1} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(-u)}{e^{-u} + 1} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{e^{-u} + 1} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^u \sin u}{1 + e^u} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1 + e^x} dx = I.$$

Αποδείξαμε πως $\boxed{I = J}$ και επιπλέον είναι :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{e^x + 1} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^x + 1} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x \sin x}{e^x + 1} + \frac{\sin x}{e^x + 1} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cancel{(e^x + 1)}}{\cancel{e^x + 1}} dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [\eta \mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 1 + \eta \mu \frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow I + J = 2 \stackrel{I=J}{\Leftrightarrow} \end{aligned}$$

$$\cancel{J} I = \cancel{J} \Leftrightarrow \boxed{I = 1}.$$

iii. Για τον υπολογισμό του $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \eta \mu x}{1 + \sin x} \right) dx$ θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$

Συνεπώς είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = 0$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 0$. Έτσι έχουμε :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \eta \mu x}{1 + \sin x} \right) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \left(\frac{1 + \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - u \right)}{1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right)} \right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \sin u}{1 + \eta \mu u} \right) du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \eta \mu u}{1 + \sigma \nu u} \right)^{-1} du = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \eta \mu u}{1 + \sigma \nu u} \right) du = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \eta \mu x}{1 + \sigma \nu x} \right) dx = -I \Leftrightarrow$$

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow \boxed{I = 0}.$$

iv. Για τον υπολογισμό του $K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx$ θέτουμε $u = \alpha + \beta - x \Leftrightarrow$

$$x - \alpha = \beta - u \text{ και } \beta - x = u - \alpha.$$

$$\text{Συνεπώς είναι } du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

Για $x = \alpha$ είναι $u = \beta$. Για $x = \beta$ είναι $u = \alpha$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} K &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx = - \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(\beta-u)}{f(\beta-u) + f(u-\alpha)} du = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta-u)}{f(\beta-u) + f(u-\alpha)} du = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta-x)}{f(\beta-x) + f(x-\alpha)} dx. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx \text{ και } K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta-x)}{f(\beta-x) + f(x-\alpha)} dx, \text{ οπότε}$$

προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$$2K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta-x)}{f(\beta-x) + f(x-\alpha)} dx \Leftrightarrow$$

$$2K = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} + \frac{f(\beta-x)}{f(\beta-x) + f(x-\alpha)} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$2K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha) + f(\beta-x)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx \Leftrightarrow 2K = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx \Leftrightarrow 2K = [x]_{\alpha}^{\beta} \Leftrightarrow 2K = \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$K = \frac{\beta - \alpha}{2} \Leftrightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx = \frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

1962. i. Για τον υπολογισμό του $I = \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx$ θέτουμε $u = \pi - x \Leftrightarrow x = \pi - u.$

$$\text{Συνεπώς είναι } du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

Για $x = 0$ είναι $u = \pi$. Για $x = \pi$ είναι $u = 0$. Έτσι έχουμε :

$$I = \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - u) f(\eta \mu (\pi - u)) du = \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\eta \mu u) du =$$

$$= \int_0^{\pi} \pi f(\eta \mu u) du - \int_0^{\pi} u f(\eta \mu u) du = \pi \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx - \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx - I \Leftrightarrow$$

$$I = \pi \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx - I \Leftrightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx.$$

Εππλέον έχουμε :

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta \mu x) dx \right).$$

Για τον υπολογισμό του $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta \mu x) dx$ θέτουμε $u = \pi - x \Leftrightarrow x = \pi - u$.

Συνεπώς είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \pi$ είναι $u = 0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta \mu x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta \mu (\pi - u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx.$$

Άρα η σχέση $\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta \mu x) dx \right)$ γίνεται :

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx \right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \underline{\underline{\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx}}.$$

Έτσι αποδείξαμε :

$$\boxed{\int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx}.$$

ii. Είναι $\int_0^{\pi} \frac{5x\eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx = \int_0^{\pi} x \frac{5\eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{5x}{3 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία για $x = \eta \mu x$ γίνεται

$f(\eta \mu x) = \frac{5\eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x}$. Έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα θα έχει τη μορφή :

$$\int_0^{\pi} x \frac{5\eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx = \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\eta \mu x}{4 - \sigma \nu^2 x} dx.$$

Για τον υπολογισμό του $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\eta \mu x}{4 - \sigma \nu^2 x} dx$ θέτουμε $u = \sigma \nu x$.

Συνεπώς είναι $du = -\eta \mu x dx \Leftrightarrow \eta \mu x dx = -du$.

Για $x=0$ είναι $u=1$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^{\pi} \frac{5\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{5}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x} \eta\mu x dx = -\int_1^0 \frac{5}{4-u^2} du = \int_0^1 \frac{5}{4-u^2} du.$$

$$\text{Είναι } \frac{5}{4-u^2} = \frac{5}{(2-u)(2+u)}.$$

Για κάθε $u \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{5}{(2-u)(2+u)} = \frac{A}{2-u} + \frac{B}{2+u} = \frac{2A + Au + 2B - uB}{(2-u)(2+u)} = \frac{(A-B)u + 2A + 2B}{(2-u)(2+u)} \Leftrightarrow$$

$$5 = (A-B)u + (2A+2B), \text{ οπότε :}$$

$$\begin{cases} A-B=0 \\ 2A+2B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=A \\ 2A+2B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=A \\ 4A=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=A \\ A=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{5}{4} \\ A=\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Έτσι τελικά παίρνουμε :

$$\frac{5}{(2-u)(2+u)} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2-u} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2+u} \text{ επομένως :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{5}{4-u^2} du &= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2-u} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2+u} \right) du = \left[-\frac{5}{4} \ln|2-u| + \frac{5}{4} \ln|2+u| \right]_0^1 = \\ &= \frac{5}{4} \ln 3 - \left(-\frac{5}{4} \ln 2 + \frac{5}{4} \ln 2 \right) = \frac{5}{4} \ln 3. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$\int_0^{\pi} \frac{5x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \pi \frac{5}{4} \ln 3 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\pi} \frac{5x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x} dx = \frac{5\pi}{4} \ln 3}.$$

1963. Στο ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx$ θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u.$

$$\text{Συνεπώς είναι } du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

Για $x=0$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$. Έτσι έχουμε :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x) dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x) dx}.$$

1964. ■ Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ θέτουμε $u = -x \Leftrightarrow$

$$x = -u.$$

Συνεπώς είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -1$ είναι $u = 1$. Για $x = 1$ είναι $u = -1$. Έτσι έχουμε :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = - \int_1^{-1} \frac{(-u)^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{e^u u^2}{1 + e^u} du = \int_{-1}^1 \frac{e^x x^2}{1 + e^x} dx .$$

Είναι $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ και $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{e^x x^2}{e^x + 1} dx$, οπότε προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x x^2}{e^x + 1} dx \Leftrightarrow 2I_1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{e^x + 1} + \frac{e^x x^2}{e^x + 1} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$2I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 (1 + e^x)}{e^x + 1} dx \Leftrightarrow 2I_1 = \int_{-1}^1 x^2 dx \Leftrightarrow 2I_1 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \Leftrightarrow 2I_1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{1}{3}}$$

■ Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx$ θέτουμε

$$u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u .$$

Συνεπώς είναι $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = 0$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 0$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\eta\mu^6 \left(\frac{\pi}{2} - u \right)}{\eta\mu^6 \left(\frac{\pi}{2} - u \right) + \sigma\upsilon\nu^6 \left(\frac{\pi}{2} - u \right)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^6 u}{\sigma\upsilon\nu^6 u + \eta\mu^6 u} du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^6 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x + \eta\mu^6 x} dx . \end{aligned}$$

Είναι $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx$ και $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^6 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x + \eta\mu^6 x} dx$, οπότε προσθέτοντας τις

σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^6 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x + \eta\mu^6 x} dx \Leftrightarrow$$

$$2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^6 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x + \eta\mu^6 x} \right) dx \Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx \Leftrightarrow$$

$$2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \Leftrightarrow 2I_2 = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2I_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}} .$$

Αντίστροφη συνάρτηση και ορισμένο ολοκλήρωμα

1965. i. Η $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A = \mathbb{R}$.

ii. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε είναι και 1-1 και άρα η f **αντιστρέφεται**.

iii. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Έτσι έχουμε :

$$D_{f^{-1}} = f(A) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^3 + x - 2) = 0 + (-\infty) + (-\infty) - 2 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^3 + x - 2) = (+\infty) + (+\infty) + (+\infty) - 2 = +\infty.$$

iv. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = f'(u) du$.

$$\text{Για } x = -1 \text{ είναι } -1 = f(u) \Leftrightarrow f(0) = f(u) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} u = 0.$$

$$\text{Για } x = e \text{ είναι } e = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} u = 1. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^e f^{-1}(x) dx = \int_0^1 f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 u (e^u + 3u^2 + 1) du = \\ &= \int_0^1 (ue^u + 3u^3 + u) du = \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 (3u^3 + u) du = \int_0^1 u (e^u)' du + \left[\frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \frac{5}{4} = e - [e^u]_0^1 + \frac{5}{4} = e - e + 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

1966. i. Η $f(x) = \sqrt{2x + \eta \mu x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{2 + \sigma \nu \eta x}{2\sqrt{2x + \eta \mu x}} > 0$, για κάθε $x \geq 0$, αφού

$2 + \sigma \nu \eta x > 0$, συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A = [0, +\infty)$.

ii. Είναι :

$$f(A) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty) \Leftrightarrow \boxed{f(A) = [0, +\infty)}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x \left(2 + \frac{1}{x} \eta \mu x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x} \eta \mu x} =$$

$$= (+\infty) \cdot \sqrt{2 + 0} = +\infty, \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta \mu x = 0 \text{ ως μηδενική επί φραγμένη.}$$

Είναι :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \eta\mu x = 0.$$

iii. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε είναι και 1-1 και άρα ορίζεται η f^{-1} . Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Έτσι έχουμε :

$$D_{f^{-1}} = f(A) = [0, +\infty) \Leftrightarrow \boxed{D_{f^{-1}} = [0, +\infty)}.$$

iv. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_0^{2\sqrt{\pi}} x f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = f'(u) du$.

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } 0 = f(u) \Leftrightarrow f(0) = f(u) \Leftrightarrow u=0.$$

$$\text{Για } x=2\sqrt{\pi} \text{ είναι } 2\sqrt{\pi} = f(u) \Leftrightarrow f(2\pi) = f(u) \Leftrightarrow u=2\pi.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\sqrt{\pi}} x f^{-1}(x) dx = \int_0^{2\pi} f(u) f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_0^{2\pi} u f'(u) du = \\ &= \int_0^{2\pi} u \frac{2 + \sigma\upsilon\nu u}{2\sqrt{2u + \eta\mu u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u (2 + \sigma\upsilon\nu u) du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2u + u\sigma\upsilon\nu u) du = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} 2u du + \int_0^{2\pi} u\sigma\upsilon\nu u du \right) = \frac{1}{2} \left([u^2]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} u(\eta\mu u)' du \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(4\pi^2 + [\eta\mu u]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \eta\mu u du \right) = \frac{1}{2} \left(4\pi^2 + [\sigma\upsilon\nu u]_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{2} 4\pi^2 = 2\pi^2. \end{aligned}$$

1967. i. Η $f(x) = x + \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$, συνεπώς

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ άρα και 1-1. Οπότε ορίζεται η f^{-1} , δηλαδή η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = f'(u) du$. Για $x=1$ είναι $1 = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \Leftrightarrow u=1$.

Για $x=e+1$ είναι $e+1 = f(u) \Leftrightarrow f(e) = f(u) \Leftrightarrow u=e$. Έτσι έχουμε :

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_1^e u f'(u) du = [u f(u)]_1^e - \int_1^e f(u) du =$$

$$= ef(e) - f(1) - \int_1^e f(x) dx = e(e+1) - 1 - \int_1^e f(x) dx = e^2 + e - 1 - \int_1^e f(x) dx$$

Οπότε :

$$\int_1^e f(x) dx + \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \cancel{\int_1^e f(x) dx} + e^2 + e - 1 - \cancel{\int_1^e f(x) dx} = e^2 + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_1^e f(x) dx + \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = e^2 + e - 1}.$$

- 1968.** Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, δηλαδή f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = [\alpha, \beta]$ άρα και $1-1$, συνεπώς ορίζεται η f^{-1} . Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το $f(A) = [\alpha, \beta]$, άρα είναι $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = f'(u) du$.

Για $x = \alpha$ είναι $\alpha = f(u) \Leftrightarrow f(\beta) = f(u) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} u = \beta$.

Για $x = \beta$ είναι $\beta = f(u) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(u) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} u = \alpha$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx &= \int_{\beta}^{\alpha} f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_{\beta}^{\alpha} u f'(u) du = [u f(u)]_{\beta}^{\alpha} - \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du = \\ &= \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du = \cancel{\alpha \beta} - \cancel{\beta \alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}.$$

- 1969.** Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, δηλαδή f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [\alpha, \beta]$, άρα και $1-1$, συνεπώς ορίζεται η f^{-1} . Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το $f(A) = [\alpha, \beta]$, άρα είναι $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = f'(u) du$.

Για $x = f(\alpha)$ είναι $f(\alpha) = f(u) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} u = \alpha$.

Για $x = f(\beta)$ είναι $f(\beta) = f(u) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} u = \beta$. Έτσι έχουμε :

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} u f'(u) du = [u f(u)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du =$$

$$= \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \beta^2 - \alpha^2 - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Οπότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \beta^2 - \alpha^2 - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta^2 - \alpha^2}.$$

- 1970.** Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, δηλαδή f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [\alpha, \beta]$, άρα και 1-1, συνεπώς ορίζεται η f^{-1} . Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \left[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right]$, άρα είναι $f(\alpha) = \frac{1}{\beta}$ και $f(\beta) = \frac{1}{\alpha}$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = f'(u) du$.

$$\text{Για } x = \frac{1}{\beta} \text{ είναι } \frac{1}{\beta} = f(u) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(u) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} u = \alpha.$$

$$\text{Για } x = \frac{1}{\alpha} \text{ είναι } \frac{1}{\alpha} = f(u) \Leftrightarrow f(\beta) = f(u) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} u = \beta.$$

Έτσι έχουμε :

$$\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} u f'(u) du = [u f(u)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du =$$

$$= \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Οπότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} f^{-1}(x) dx = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}}.$$

- 1971.** Είναι : $e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \Rightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)} + 1) = 1 \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } A = \mathbb{R},$$

άρα και $1-1$, συνεπώς ορίζεται η f^{-1} .

Στη σχέση $e^{f(x)} + f(x) = x+1$ για $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ έχουμε :

$$e^y + y = f^{-1}(y) + 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y - 1 \text{ με πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

Άρα : $f^{-1}(x) = e^x + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_0^e f(x) dx$ θέτουμε $x = f^{-1}(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = (f^{-1}(u))' du$. Για $x=0$ είναι

$$0 = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f(f^{-1}(0)) = f(f^{-1}(u)) \Leftrightarrow u = 0.$$

Για $x=e$ είναι $e = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = f^{-1}(u) \xrightarrow{f^{-1} \circ 1} u = 1$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^e f(x) dx = \int_0^1 f(f^{-1}(u)) (f^{-1}(u))' du = \int_0^1 u(e^u + 1) du = \int_0^1 (ue^u + u) du = \\ &= \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 u du = \int_0^1 u(e^u)' du + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \frac{1}{2} = e - [e^u]_0^1 + \frac{1}{2} = \\ &= e - e + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

1972. α. Είναι :

$$f^5(x) + 5f(x) = x \Rightarrow 5f^4(x)f'(x) + 5f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(5f^4(x) + 5) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{5f^4(x) + 5} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R},$$

άρα και $1-1$, συνεπώς ορίζεται η f^{-1} .

β. Στη σχέση $f^5(x) + 5f(x) = x$ για $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ έχουμε :

$$y^5 + 5y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^5 + 5y \text{ με } y \in f(A). \text{ Άρα } f^{-1}(x) = x^5 + 5x.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_a^\beta f(x) dx$ θέτουμε $x = f^{-1}(u)$.

Συνεπώς είναι $dx = (f^{-1}(u))' du$.

$$\text{Για } x=\alpha \text{ είναι } \alpha = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(f^{-1}(u)) \Leftrightarrow -1 = u \Leftrightarrow u = -1.$$

$$\text{Για } x=\beta \text{ είναι } \beta = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f(\beta) = f(f^{-1}(u)) \Leftrightarrow 1 = u \Leftrightarrow u = 1.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta f(x) dx = \int_{-1}^1 f(f^{-1}(u)) (f^{-1}(u))' du = \int_{-1}^1 u(5u^4 + 5) du = \int_{-1}^1 (5u^5 + 5u) du = \\ &= \int_{-1}^1 (5u^5 + 5u) du = \left[5\frac{u^6}{6} + 5\frac{u^2}{2} \right]_{-1}^1 = 5 \left[\frac{u^6}{6} + \frac{u^2}{2} \right]_{-1}^1 = 5 \left(\frac{4}{6} - \frac{4}{6} \right) = 0. \end{aligned}$$