

Μέγιστα – Ελάχιστα αποστάσεων & εμβαδών

1458. α. Είναι :

$$(AM) = \sqrt{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{81}{4} + x} = \sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}.$$

Για το τριώνυμο $x^2 - 8x + \frac{81}{4}$ έχουμε $\Delta = -17 < 0$, συνεπώς είναι $x^2 - 8x + \frac{81}{4} > 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε : $(AM) = \sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}, x \in \mathbb{R}.$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}} = \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}} = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

στο $x = 4$ το $g(4) = \frac{\sqrt{17}}{2}.$

Άρα η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη για $x = 4$, το οποίο μας δίνει $\boxed{M(4, 2)}.$

γ. i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M έχει τύπο :

$$\varepsilon : y = f'(4)(x - 4) + f(4).$$

$$\text{Είναι } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \underline{\underline{f(4) = 2}} \text{ και } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \underline{\underline{f'(4) = \frac{1}{4}}}, \text{ άρα :}$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{x}{4} - 1 + 2 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = \frac{x}{4} + 1}.$$

ii. Είναι : $\lambda_{AM} = \frac{2 - 0}{4 - \frac{9}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4.$

$$\text{Διαπιστώνουμε πως } \lambda_{AM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow AM \perp \varepsilon, \text{ δηλαδή η γωνία που}$$

σχηματίζει η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο M με την ευθεία AM είναι $\boxed{\varphi = 90^\circ}.$

1459. i. Έστω $M\left(x, \frac{1}{8}x^2\right)$, αφού $M \in C_f$. Είναι :

$$(AM) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{1}{8}x^2 - 4\right)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{64}x^4 - x^2 + 16} \Leftrightarrow$$

$$(AM) = \sqrt{\frac{1}{64}x^4 - 4x + 20}. \text{ Είναι :}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{64}x^4 - 4x + 20 &= \frac{1}{64}x^4 - x^2 + x^2 - 4x + 4 + 16 = \frac{1}{64}x^4 - x^2 + (x-2)^2 + 16 = \\ &= \frac{x^4 - 64x^2 + 1024}{64} + (x-2)^2 = \frac{(x^2 - 32)^2}{64} + (x-2)^2 > 0. \text{ Οπότε :} \end{aligned}$$

$$(AM) = \sqrt{\frac{1}{64}x^4 - 4x + 20}, x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{\frac{1}{64}x^4 - 4x + 20}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{16}x^3 - 4}{2\sqrt{\frac{1}{64}x^4 - 4x + 20}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{16}x^3 - 4}{2\sqrt{\frac{1}{64}x^4 - 4x + 20}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}.$$

Επιπλέον είναι : $\frac{1}{16}x^3 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 64 \Leftrightarrow x > 4$, και

$\frac{1}{16}x^3 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^3 < 64 \Leftrightarrow x < 4$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας –

ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$g(x)$			

T.E.

Συνεπώς η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 4$ το $g(4) = 2\sqrt{2}$.

Άρα η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη για $x=4$, το οποίο μας δίνει $\boxed{M(4, 2)}$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M , είναι το $f'(4)$.

Είναι $f(x) = \frac{1}{8}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x \xRightarrow{x=4} f'(4) = 1 = \lambda_\epsilon$, όπου ϵ η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο M . Ακόμη είναι $\lambda_{AM} = \frac{2-4}{4-2} = -1$.

Διαπιστώνουμε πως $\lambda_{AM} \cdot \lambda_\epsilon = -1 \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{AM \perp \epsilon}$.

1460. i. Είναι $f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{x^2}}{\frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0.$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x} \frac{4}{\cancel{x}}}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty.$$

ii. Έστω $M\left(x, \frac{4}{x}\right)$, αφού $M \in C_f$. Είναι :

$$(OM) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{4}{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 16}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}, \text{ αφού } x > 0. \text{ Οπότε}$$

$$(OM) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}, x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 16}} \cdot x - \sqrt{x^4 + 16}}{x^2} = \frac{\frac{2x^4 - (x^4 + 16)}{\sqrt{x^4 + 16}}}{x^2} = \frac{\frac{2x^4 - x^4 - 16}{\sqrt{x^4 + 16}}}{x^2} = \frac{\frac{x^4 - 16}{\sqrt{x^4 + 16}}}{x^2} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{x = 2} \text{ ή } x = -2, \text{ το οποίο απορρίπτεται αφού } x > 0, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	2	$+\infty$
$x^2 - 4$		-	+
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		↘	↗

T.E.

iii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f σε ένα τυχαίο σημείο (x, y)

$$\text{της } C_f \text{ είναι το } f'(x) = -\frac{4}{x^2}.$$

Η εφαπτομένη αυτή πρέπει να είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 6$, άρα θα

$$\text{πρέπει : } f'(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{4}{x^2} = -2 \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} - 2 = 0.$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $h(x) = \frac{4}{x^2} - 2$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Συνεπώς η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ το $g(2) = 2\sqrt{2}$.

Άρα η απόσταση OM γίνεται ελάχιστη για $x = 2$, το οποίο μας δίνει $M(2, 2)$.

Για να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 6$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.

Η $h(x) = \frac{4}{x^2} - 2$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ με $h(1) = 2 > 0$ και $h(2) = -1 < 0$,

δηλαδή $h(1) \cdot h(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.

Είναι $h'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

συνεπώς και $1-1$, άρα το παραπάνω ξ είναι μοναδικό, δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.

- 1461. i.** Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο M είναι η :
 $\varepsilon : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Έχουμε $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται :

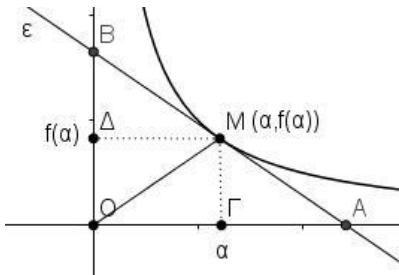
$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}}.$$

Η ε τέμνει τον $x'x$ για $y=0$:

$$0 = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}x = \frac{2}{a} \Leftrightarrow x = 2a, \text{ δηλαδή } \boxed{A(2a, 0)}.$$

$$\text{Η } \varepsilon \text{ τέμνει τον } y'y \text{ για } x=0 : y = -\frac{1}{a^2} \cdot 0 + \frac{2}{a} \Leftrightarrow y = \frac{2}{a}, \text{ δηλαδή } \boxed{B\left(0, \frac{2}{a}\right)}.$$

ii. Είναι :



$$\begin{aligned} E_{\triangle OAM} &= \frac{1}{2}(OA) \cdot (MG) = \frac{1}{2}(OA) \cdot f(a) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle OAM$ είναι σταθερό.

iii. Έστω Π η περίμετρος του $\triangle OGM$. Οπότε :

$$\Pi = (OG) + (GM) + (MO) = a + f(a) + a + f(a) = 2a + 2f(a) = 2a + \frac{2}{a}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(a) = 2a + \frac{2}{a} = \frac{2a^2 + 2}{a}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(a) = \frac{4a \cdot a - (2a^2 + 2)}{a^2} = \frac{4a^2 - 2a^2 - 2}{a^2} = \frac{2a^2 - 2}{a^2} = 2 \frac{a^2 - 1}{a^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}} \text{ ή } \alpha = -1, \text{ το οποίο}$$

απορρίπτεται αφού $\alpha > 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

α	0	1	$+\infty$
$\alpha^2 - 1$		-	+
α^2		+	+
$g'(\alpha)$		-	+
$g(\alpha)$		$\searrow$	$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\alpha = 1$ το $g(1) = 4$.

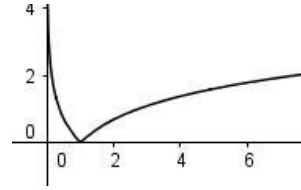
Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη για $\alpha = 1$, το οποίο μας δίνει

$$M(1, f(1)) \Leftrightarrow \boxed{M(1, 1)}.$$

1462. i. Είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$ ($0 < x < 1$).

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ -\ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ οπότε είναι :}$$



Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \text{ άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1.$$

$$\text{Άρα είναι } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases} \text{ η παράγωγός της.}$$

ii. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$:

$$f(x) = a \Leftrightarrow |\ln x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = a \text{ για } x > 1 \\ -\ln x = a \text{ για } 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^a \text{ για } x > 1 \\ x = e^{-a} \text{ για } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Έστω $x_1 = e^a$ και $x_2 = e^{-a}$. Τότε θα έχουμε $x_1 x_2 = e^a \cdot e^{-a} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1$.

iii. Βρίσκουμε τις εφαπτομένες της C_f στα σημεία A και B :

$$\varepsilon_A : y = f'(e^a)(x - e^a) + f(e^a) \stackrel{x > 1}{\Leftrightarrow} y = \frac{1}{e^a}(x - e^a) + a \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^a}x - 1 + a \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_A : y = e^{-a}x - 1 + a}, \text{ με } \lambda_{\varepsilon_A} = e^{-a}.$$

$$\varepsilon_B : y = f'(e^{-a})(x - e^{-a}) + f(e^{-a}) \stackrel{0 < x < 1}{\Leftrightarrow} y = -\frac{1}{e^{-a}}(x - e^{-a}) + a \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{e^{-a}}x + 1 + a \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_B : y = -e^a x + 1 + a}, \text{ με } \lambda_{\varepsilon_B} = -e^a.$$

Έτσι έχουμε $\lambda_{\varepsilon_A} \cdot \lambda_{\varepsilon_B} = -e^a \cdot e^{-a} = -1 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_A \perp \varepsilon_B}$ για κάθε $a > 0$.

iv. Η ε_B τέμνει τον $x'x$ για $y=0$:

$$0 = -e^a x + 1 + a \Leftrightarrow e^a x = 1 + a \Leftrightarrow x = \frac{1+a}{e^a}, \text{ δηλαδή } M\left(\frac{1+a}{e^a}, 0\right).$$

Η ε_B τέμνει τον $y'y$ για $x=0$: $y = -e^a \cdot 0 + 1 + a \Leftrightarrow y = 1 + a$, δηλαδή $N(0, 1+a)$.

Τα σημεία M, N ανήκουν στους άξονες $x'x$ και $y'y$ οπότε το τρίγωνο $\triangle OMN$ είναι ορθογώνιο με $\hat{O} = 90^\circ$, οπότε : $E_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}(OM) \cdot (ON) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+a}{e^a} \cdot (1+a) = \frac{(1+a)^2}{2e^a}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(a) = \frac{(1+a)^2}{2e^a}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(a) = \frac{2(1+a) \cdot 2e^{-a} - (1+a)^2 \cdot 2e^{-a}}{(2e^a)^2} = \frac{(1+a) \cdot 2e^{-a} (2 - (1+a))}{(2e^a)^2} = \frac{(1+a)(1-a)}{2e^a} =$$

$$= \frac{1-a^2}{2e^a}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{2e^a} = 0 \Leftrightarrow 1-a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{a=1} \text{ ή } a=-1, \text{ το οποίο}$$

απορρίπτεται αφού $a > 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

a	0	1	$+\infty$
$1-a^2$		+	$\ominus$
$g'(a)$		+	$\ominus$
$g(a)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

στο $a=1$ το $g(1) = \frac{2}{e}$.

T.M.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μέγιστο για $a=1$, το οποίο μας δίνει

$\varepsilon_A : y = e^{-1}x - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \Leftrightarrow y = e^{-1}x$, δηλαδή η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Κρίσιμα σημεία συνάρτησης

1463. Έστω x_0 ένα κρίσιμο σημείο της f , δηλαδή ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της για το οποίο θα είναι $f'(x_0) = 0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη.

Έχουμε :

$$f^2(x) + 2f(x) = x^3 + x + e^x \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 2f'(x) = 3x^2 + 1 + e^x \xrightarrow{x=x_0}$$

$$2f(x_0) \cdot \cancel{f'(x_0)}^0 + 2\cancel{f'(x_0)}^0 = 3x_0^2 + 1 + e^{x_0} \Leftrightarrow 3x_0^2 + 1 + e^{x_0} = 0, \text{ άτοπο, αφού}$$

$$3x^2 + 1 + e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα η } f \text{ δεν έχει κρίσιμα σημεία.}$$

1464. Η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη, άρα δεν είναι 1-1. Δηλαδή θα υπάρχουν

$\kappa, \lambda \in [\alpha, \beta]$ (έστω $\kappa < \lambda$), τέτοια ώστε $f(\kappa) = f(\lambda)$, με $(\kappa, \lambda) \in (\alpha, \beta)$.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και αφού θα είναι και $f(\kappa) = f(\lambda)$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\kappa, \lambda) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η f θα έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.
- Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η f δεν θα είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή και πάλι θα έχουμε τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.

Αποδείξαμε λοιπόν σε κάθε περίπτωση πως η f θα έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.

- 1465.** Αφού τα x_1, x_2 είναι κρίσιμα σημεία της f και η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, τότε θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, δηλαδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f' .
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$. Άρα :
 $f''(x_1) + f''(x_2) = 6ax_1 + 2b + 6ax_2 + 2b = 6a(x_1 + x_2) + 4b$.

Τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f' οπότε σύμφωνα με τους τύπους Vieta θα είναι

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}. \text{ Έτσι λοιπόν έχουμε :}$$

$$f''(x_1) + f''(x_2) = 6a(x_1 + x_2) + 4b = 6a\left(-\frac{2b}{3a}\right) + 4b = -4b + 4b = 0.$$

- 1466.** Έχουμε : $af'(\alpha) + bf'(\beta) = 0 \Leftrightarrow bf'(\beta) = -af'(\alpha) \stackrel{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(\beta) = -\frac{af'(\alpha)}{\beta}$.

$$\text{Η } f' \text{ είναι συνεχής στο } [\alpha, \beta], \text{ και } f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = f'(\alpha) \cdot \left(-\frac{af'(\alpha)}{\beta}\right) = -\frac{a(f'(\alpha))^2}{\beta} \leq 0$$

αφού $a, \beta > 0$.

- Αν $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f στο x_0 έχει κρίσιμο σημείο.
- Αν $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = 0$ τότε, είτε $f'(\alpha) = 0$ δηλαδή το $x = \alpha$ είναι ρίζα της f' στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο στο α , είτε $f'(\beta) = 0$ δηλαδή το $x = \beta$ είναι ρίζα της f' στο $(\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο στο β .

Αποδείξαμε λοιπόν πως η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$.

- 1467. i.** Η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 1)$ και

$(1, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x^2}\right) = 0 = f(1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x) = 0.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και άρα σε όλο το πεδίο ορισμού της, που είναι το $[-1, +\infty)$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -1 \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } 1.$$

Δηλαδή η f στο 1 έχει κρίσιμο σημείο. Άρα :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ \ln x + 1, & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Για } -1 < x < 1 \text{ έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \text{ και}$$

$$\text{για } x > 1 \text{ έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}, \text{ το οποίο απορρίπτεται.}$$

Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $\boxed{(1,0)}$ και $\boxed{(0,1)}$.

ii. Τα πιθανά ακρότατα της f είναι τα κρίσιμα σημεία της $(1,0)$ και $(0,1)$ και το σημείο $(-1,0)$, όπου το -1 είναι κλειστό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού.

iii. Είναι :

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0, \quad -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

Για $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 1 > 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της f :

x	-1	0	$1 + \infty$
$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$		$+$ $\bigcirc$ $-$	
$\ln x + 1$			$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = -1$ το $f(-1) = 0$ και στο $x = 1$ το $f(1) = 0$.

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = 0$ το $f(0) = 1$.

T.E T.M. T.E.

1468. i. Είναι :

$$\text{Αν } x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \text{ τότε } |x - 3| = 3 - x \text{ και}$$

$$\text{αν } x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ τότε } |x - 3| = x - 3 \text{ οπότε :}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(3-x), & 1 \leq x < 3 \\ x^2(x-3), & 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2, & 1 \leq x < 3 \\ x^3 - 3x^2, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Η $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2, & 1 \leq x < 3 \\ x^3 - 3x^2, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[1, 3)$ και $(3, 4]$ ως

πολυωνυμική σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^3 + 3x^2) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^3 - 3x^2) = 0 = f(3).$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και άρα

σε όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το $[1, 4]$.

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^3 + 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2) = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3.

Δηλαδή **η f στο 3 έχει κρίσιμο σημείο**. Άρα :

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2, & 1 \leq x < 3 \\ x^3 - 3x^2, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x, & 1 \leq x < 3 \\ 3x^2 - 6x, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Για } 1 \leq x < 3 \text{ έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=2} \text{ ή } x=0, \text{ το οποίο απορρίπτεται και}$$

$$\text{για } 3 < x \leq 4 \text{ έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } x=0, \text{ τα οποία απορρίπτονται.}$$

Οπότε τα **κρίσιμα σημεία** της f είναι τα $\boxed{(3,0)}$ και $\boxed{(2,4)}$.

ii. Τα πιθανά ακρότατα της f είναι τα κρίσιμα σημεία της $(3,0)$ και $(2,4)$ και τα σημεία $(1,2)$ και $(4,16)$, όπου τα 1 και 4 είναι κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού της.

iii. Είναι :

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0, \quad -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 1 > 0, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	1	2	3	4
$-3x^2 + 6x$		$+$	Φ	$-$
$3x^2 - 6x$				$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

ο Hf παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)=2$ και στο $x=3$ το $f(3)=0$.

ο Hf παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x=2$ το $f(2)=4$ και στο $x=4$

T.E T.M. T.E. T.M.

$$\text{το } f(4)=16.$$

- 1469. i.** Η $g(x) = e^x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

Προφανής ρίζα της $g(x) = 0$ είναι το $x=0$ και αφού η g είναι και $1-1$, τότε η ρίζα είναι μοναδική. Επιπλέον είναι :

$$\boxed{x > 0} \stackrel{\text{g γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0} \text{ και}$$

$$\boxed{x < 0} \stackrel{\text{g γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

- ii.** Η f είναι παραγωγίσιμη άρα βρίσκουμε τις ρίζες της f' αν υπάρχουν. Έτσι :

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x - 1 \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = e^x + x - 1 \Leftrightarrow$$

$$3f'(x)(f^2(x) + 1) = e^x + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x + x - 1}{3(f^2(x) + 1)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{3(f^2(x) + 1)}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{3(f^2(x) + 1)} = 0 \stackrel{3(f^2(x) + 1) \neq 0}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

Επιπλέον :

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x - 1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f^3(0) + 3f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(0) = 0. \text{ Άρα το κρίσιμο σημείο της } f \text{ είναι το } (0, f(0)) = \boxed{(0, 0)}.$$

- iii.** Κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\ominus$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\ominus$	$+$
$f(x)$			

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Τ.Ε.

- iv.** Όπως παρατηρούμε και από τον πίνακα το $f(0)$ είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η f , συνεπώς είναι **ολικό ελάχιστο**.

Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών εξίσωσης

- 1470. i.** Για την $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x}$ πρέπει $x > 0$, $x \neq 0$ και $(1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1)$, άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 1]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0, \text{ αφού } \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0, x^2 > 0 \text{ και } x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 > 0. \text{ Συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0,1].$$

$$\text{Έχουμε } f(1) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x} \right) = -\infty - (+\infty) - 1 = -\infty, \text{ άρα}$$

$$f(A) = f\left((0,1]\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, -1] \Leftrightarrow \boxed{f(A) = (-\infty, -1]} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

ii. Για την $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ πρέπει $-x^2 + 4x - 3 > 0$. Έτσι έχουμε

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=3 \text{ και}$$

κάνουμε πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$	-	$\oplus$	$\oplus$	-

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (1,3)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής)

$$\text{με παράγωγο : } f'(x) = \frac{-2x+4}{-x^2+4x-3} = \frac{-2(x-2)}{-x^2+4x-3}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{-x^2+4x-3} = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της f :

x	1	2	3
$-2x+4$	$\oplus$	$\oplus$	-
$-x^2+4x-3$	$\oplus$	$\oplus$	-
$f'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (1,2]$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = [2,3)$.

$$\text{Έχουμε } f(2) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(-x^2 + 4x - 3)) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\ln(-x^2 + 4x - 3)) = -\infty, \text{ άρα}$$

$$f(A_1) = f((1,2]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), f(2) \right] = (-\infty, 0] \text{ και}$$

$$f(A_2) = f([2,3)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.φθ.}}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), f(2) \right] = (-\infty, 0].$$

$$\text{Οπότε } \boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 0]} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

iii. Η $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x-2)x - (x^2 - 2x + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } \underline{x=-1}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
x^2-1	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Συνεπώς:

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα

διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$A_2 = [1, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα

διαστήματα $A_3 = [-1, 0)$ και $A_4 = (0, 1]$.

$$\text{Έχουμε } f(-1) = -4, f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \left(\frac{1}{0^-} \right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty. \text{ Άρα:}$$

$$f(A_1) = f\left((-\infty, -1]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, -4],$$

$$f(A_2) = f\left([1, +\infty)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

$$f(A_3) = f\left([-1, 0)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f(-1) \right) = (-\infty, -4],$$

$$f(A_4) = f\left((0, 1]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, +\infty).$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ το σύνολο

τιμών της f .

iv. Η $f(x) = x + \sin x + \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο:

$$f'(x) = 1 - \eta\mu x + \frac{1}{x} > 0, \text{ αφού } x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0 \text{ και } \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x + \ln x) = 0 + 1 - \infty = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} \sin x + \frac{\ln x}{x} \right) = (+\infty)(1 + 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{όπου } |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \sin x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \sin x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \sin x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα

είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \sin x \right) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη) και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

Άρα $f(A) = f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{f(A) = \mathbb{R}}$

το **σύνολο τιμών** της f .

v. Η $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2)$. Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow (4x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}})$ ή

$(x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=2}})$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα **μονοτονίας** της f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
4x	-	○	+	+	+		
x^2-3x+2	+	+	○	-	○	+	
$f'(x)$	-	○	+	○	-	○	+
$f(x)$							

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = [0, 1]$ και

$A_2 = [2, +\infty)$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_3 = (-\infty, 0]$ και

$A_4 = [1, 2]$.

Έχουμε $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$.

Άρα :

$f(A_1) = f([0, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} [f(0), f(1)] = [1, 2],$

$f(A_2) = f([2, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty),$

$f(A_3) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f(0) \right) = [1, +\infty),$

$f(A_4) = f([1, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} [f(2), f(1)] = [1, 2].$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = [1, +\infty)}$ το **σύνολο τιμών** της f .

vi. Η $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-3\}$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-5)}{(x+3)^2} = \frac{2\cancel{x} + 6 - 2\cancel{x} + 5}{(x+3)^2} = \frac{11}{(x+3)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \neq -3.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -3)$ και

$$A_2 = (-3, +\infty). \text{ Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-5}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} (2x-5) \frac{1}{x+3} = -11 \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow -3^- \Rightarrow x < -3 \Leftrightarrow x+3 < 0 \Rightarrow x+3 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-5}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} (2x-5) \frac{1}{x+3} = -11 \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow -3^+ \Rightarrow x > -3 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x+3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \rightarrow +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, -3)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \right) = (2, +\infty),$$

$$f(A_2) = f((-3, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 2),$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R} - \{2\}}$ το σύνολο τιμών της f .

viii. Για την $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 4x + 5}$ πρέπει $x^2 - 4x + 5 \neq 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 5$ έχει

διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$, άρα ισχύει $x^2 - 4x + 5 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με

$$\begin{aligned} \text{παράγωγο : } f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^2-4x+5) - (x^2-4x+7)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2} = \\ &= \frac{(2x-4)(\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 5 - \cancel{x^2} + \cancel{4x} - 7)}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{-2(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 2]$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = [2, +\infty)$.

Έχουμε $f(2)=3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1. \text{ Άρα:}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 2]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(2) \right] = (1, 3],$$

$$f(A_2) = f([2, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2) \right] = (1, 3].$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (1, 3]}$ το σύνολο τιμών της f .

viii. Για την $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ πρέπει $x^2 - x + 1 \neq 0$. Το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει

διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα ισχύει $x^2 - x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με

$$\begin{aligned} \text{παράγωγο: } f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - x + 1 - 2x^3 + x^2 - 2x^2 + x - 2x + 1}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2-x+1)^2} = \\ &= \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=1}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$-2x^2+2$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$f'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα $A_1 = [-1, 1]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα

διαστήματα $A_2 = (-\infty, -1]$ και $A_3 = [1, +\infty)$

Έχουμε $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f([-1, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αὐξ.}}{=} [f(-1), f(1)] = \left[\frac{1}{3}, 3\right],$$

$$f(A_2) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right] = \left[\frac{1}{3}, 1\right),$$

$$f(A_3) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)\right] = (1, 3].$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ το σύνολο τιμών της f .

v. Η $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } \underline{\underline{x=2}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 2x$	+	0	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$		

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0]$ και

$A_2 = [2, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα

διαστήματα $A_3 = [0, 1)$ και $A_4 = (1, 2]$.

Έχουμε $f(0) = -2$, $f(2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty - 1 + 0 = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = 0 + (-\infty) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = 0 + (+\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty - 1 + 0 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αὐξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, -2],$$

$$f(A_2) = f([2, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αὐξ.}}{=} \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = [2, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([0, 1)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), f(0) \right) = (-\infty, -2],$$

$$f(A_4) = f((1, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = [2, +\infty). \text{ Οπότε}$$

$$\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

1471. Η $f(x) = x + \frac{1}{x-3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{3\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

$$\text{και συνεχής) με παράγωγο : } f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 9 - 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 4$ ή $x = 2$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
x^2-6x+8	+	○	-	-	○	+
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f(x)$		↗	↘	↘	↗	

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 2]$ και $A_2 = [4, +\infty)$.

T.M.

T.E.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_3 = [2, 3)$ και $A_4 = (3, 4]$, και

- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = 2$ το $f(2) = 1$.
- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 4$ το $f(4) = 5$.

$$\text{Έχουμε } f(2) = 1, f(4) = 5, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x-3} \right) = -\infty + 0 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x + \frac{1}{x-3} \right) = 3 + (-\infty) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(x + \frac{1}{x-3} \right) = 3 + (+\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x-3} \right) = +\infty + 0 = +\infty. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(2) \right) = (-\infty, 1],$$

$$f(A_2) = f([4, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(4), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [5, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([2, 3)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{f \text{ γν.φθ.}} = \left[\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), f(2) \right] = (-\infty, 1],$$

$$f(A_4) = f((3, 4]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{f \text{ γν.φθ.}} = \left[f(4), \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \right) = [5, +\infty).$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ το **σύνολο τιμών** της f .

1472. Η $f(x) = x^2 e^{-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = [-1, 3]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$. Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow \overset{e^{-x} \neq 0}{x=0 \text{ ή } x=2}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	-1	0	2	3
x		-	+	+
2-x		+	+	-
f'(x)		-	+	-
f(x)		↘	↗	↘

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [0, 2]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_2 = [-1, 0]$ και $\Delta_3 = [2, 3]$.

Έχουμε $f(-1) = e$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4e^{-2}$ και $f(3) = 9e^{-3}$. Άρα :

$$f(\Delta_1) = f([0, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{f \text{ γν.αύξ.}} = [f(0), f(2)] = [0, 4e^{-2}],$$

$$f(\Delta_2) = f([-1, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{f \text{ γν.φθ.}} = [f(0), f(-1)] = [0, e],$$

$$f(\Delta_3) = f([2, 3]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{f \text{ γν.φθ.}} = [f(3), f(2)] = [9e^{-3}, 4e^{-2}].$$

Οπότε $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [0, e]$ το **σύνολο τιμών** της f .

1473. Η $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = [-2, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 12[x^2(x-2) - (x-2)] = 12(x-2)(x^2-1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=2} \text{ ή } (x^2=1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } \underline{x=-1}).$$

Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε θα παρουσιάζει και μέγιστο και ελάχιστο. Έχουμε :

$$f(-2) = 3 \cdot 16 - 8 \cdot (-8) - 6 \cdot 4 - 48 - 12 = 48 + 64 - 24 - 60 = 28, \quad f(-1) = -31,$$

$$f(1) = 1 \text{ και } f(2) = 3 \cdot 16 - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 48 - 12 = 48 - 64 - 24 + 36 = -4.$$

Η μικρότερη τιμή είναι το $f(-1) = -31$ που είναι το ελάχιστο της f , και η μεγαλύτερη τιμή είναι το $f(-2) = 28$ που είναι το μέγιστο της f .

Οπότε $f(\Delta) = [-31, 28]$ το **σύνολο τιμών** της f .

1474. Η $f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, \pi]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2}\eta\mu x = \eta\mu x (2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2}). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x (2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } \underline{\underline{x=\pi}}) \text{ ή}$$

$$\left(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{3\pi}{4}}} \right).$$

Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε θα παρουσιάζει και μέγιστο και ελάχιστο. Έχουμε : $f(0) = \cancel{\eta\mu^2 0^0} - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 0 + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \eta\mu^2 \frac{3\pi}{4} - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} + 2\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} + 1 + 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} + 2\sqrt{2} \text{ και } f(\pi) = \cancel{\eta\mu^2 \pi^0} - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \pi + 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Η μικρότερη τιμή είναι το $f(0) = \sqrt{2}$ που είναι το ελάχιστο της f , και η μεγαλύτερη τιμή είναι το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} + 2\sqrt{2}$ που είναι το μέγιστο της f .

Συνεπώς το **σύνολο τιμών** της f είναι το $f(A) = \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{2} \right]$.

1475. Για την $f(x) = \frac{\lambda x}{x^2 + x + 1}$ πρέπει $x^2 + x + 1 \neq 0$. Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει

διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα ισχύει $x^2 + x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\lambda(x^2 + x + 1) - \lambda x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{\lambda x^2 + \cancel{\lambda x} + \lambda - 2\lambda x^2 - \cancel{\lambda x}}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{\lambda - \lambda x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{\lambda(1 - x^2)}{(x^2 + x + 1)^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda(1 - x^2)}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - x^2) = 0 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	$\ominus$	+	$\ominus$
$f'(x)$	-	$\ominus$	+	$\ominus$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = [-1, 1]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_2 = (-\infty, -1]$ και

$$A_3 = [1, +\infty).$$

Έχουμε, $f(1) = \frac{\lambda}{3}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda \cancel{x}}{\cancel{x}^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda}{x} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cancel{x}}{\cancel{x}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{x} = 0. \text{ Άρα:}$$

$$f(A_1) = f([-1, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αὐξ.}}{=} [f(-1), f(1)] = \left[-\lambda, \frac{\lambda}{3}\right],$$

$$f(A_2) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right] = [-\lambda, 0],$$

$$f(A_3) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)\right) = \left(0, \frac{\lambda}{3}\right).$$

$$\text{Οπότε } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\lambda, \frac{\lambda}{3}\right] \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

Το σύνολο τιμών της f πρέπει να είναι το $\left[-2, \frac{2}{3}\right]$ δηλαδή πρέπει

$$\left(-\lambda = -1 \text{ και } \frac{\lambda}{3} = \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda = 1), \text{ άρα } \boxed{\lambda = 1}.$$

1476. i. Η $f(x) = \varepsilon\phi x + \eta\mu x - x - 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x - 1 = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\phi^2 x + \sigma\upsilon\nu x > 0, \text{ αφού όταν } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ είναι } \sigma\upsilon\nu x > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Έχουμε $f(0) = \cancel{\varepsilon\phi 0^0} + \cancel{\eta\mu 0^0} - 2 = -2$ και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\varepsilon\phi x + \eta\mu x - x - 2) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \eta\mu x - x - 2 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \eta\mu x - x - 2 \right) = 1 \cdot (+\infty) + 1 - \frac{\pi}{2} - 2 = +\infty, \end{aligned}$$

αφού για $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ είναι $\sigma\upsilon\nu x \rightarrow 0^+$ συνεπώς $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \rightarrow +\infty$. Άρα :

$$f(A) = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αὐξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right] = [-2, +\infty) \Leftrightarrow \boxed{f(A) = [-2, +\infty)} \text{ το}$$

σύνολο τιμών της f .

ii. Το $0 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A .

1477. α. Η $f(x) = x^4 - 4x + 5$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x^3 - 1$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = [1, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = (-\infty, 1]$.

Έχουμε $f(1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [2, +\infty),$$

$$f(A_2) = f((-\infty, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} (f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = [2, +\infty).$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [2, +\infty)$ το **σύνολο τιμών** της f .

β. i. Το $1 \notin f(A_1)$ και $1 \notin f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 1$, δεν έχει καμία ρίζα ούτε στο A_1 , ούτε στο A_2 , συνεπώς είναι αδύνατη.

ii. Όπως βλέπουμε και από τον πίνακα μονοτονίας, η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι και ολικό, στο $x=1$, το $f(1) = 2$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μοναδική λύση η οποία είναι το $x=1$.

iii. Έχουμε :

- Το $3 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $3 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο $A_1 = [1, +\infty)$ και μία στο $A_2 = (-\infty, 1]$.

1478. i. Η $f(x) = x + 1 + \frac{2}{1+e^x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 + \cancel{2e^x} + e^{2x} - \cancel{2e^x}}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 + \frac{2}{1+e^x} \right) = -\infty + 1 + \frac{2}{1+0} = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{2}{1+e^x} \right) \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^x) = +\infty}{=} +\infty + 1 + 0 = +\infty, \text{ άρα}$$

$$f(A) = f\left((-\infty, +\infty)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αυξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

ii. Το $0 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A . Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$. Έτσι έχουμε :

$$f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho + 1 + \frac{2}{1+e^\rho} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{1+e^\rho} = -\rho - 1 \Leftrightarrow 2 = -\rho - 1 - \rho e^\rho - e^\rho \Leftrightarrow$$

$$\rho e^\rho + e^\rho = -\rho - 3 \Leftrightarrow (\rho + 1)e^\rho = -\rho - 3 \Leftrightarrow e^\rho = \frac{-\rho - 3}{\rho + 1}.$$

$$f(\rho) = \rho + 1 + \frac{2}{1+e^\rho} \stackrel{\rho = -\rho}{\Rightarrow} f(-\rho) = -\rho + 1 + \frac{2}{1+e^{-\rho}} = -\rho + 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{e^\rho}} = -\rho + 1 + \frac{2}{\frac{1+e^\rho}{e^\rho}} =$$

$$= -\rho + 1 + e^\rho \frac{2}{1+e^\rho} = -\rho + 1 + \frac{-\rho - 3}{\rho + 1} \cdot \frac{2}{1 + \frac{-\rho - 3}{\rho + 1}} = -\rho + 1 - \frac{\rho + 3}{\rho + 1} \cdot \frac{2}{\frac{-2}{\rho + 1}} =$$

$$= -\rho + 1 + \frac{\rho + 3}{\rho + 1} \cdot \frac{\cancel{(\rho + 1)}}{\cancel{-2}} = -\cancel{\rho} + 1 + \cancel{\rho} + 3 = 4 \Leftrightarrow f(-\rho) = 4.$$

1479. i. Η $f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + 2015$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2x - 4 = \frac{2 + 2x^2 - 4x}{x} = 2 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 2 \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ (η}$$

f' μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).
Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\ln x + x^2 - 4x + 2015) = -\infty + 2015 = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\ln x + x^2 - 4x + 2015) = +\infty + (+\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 2015) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \text{ άρα}$$

$$f(A) = f\left((0, +\infty)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αυξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

$$\text{Είναι : } 2\ln x + x^2 + 2015 = 4x \Leftrightarrow 2\ln x + x^2 - 4x + 2015 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Το $0 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $2\ln x + x^2 + 2015 = 4x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα A .

1480. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{x=1}$ ή $\underline{x=-1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
x^2-1	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$					

Συνεπώς:

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$$A_2 = [1, +\infty).$$

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $A_3 = [-1, 1]$. Έχουμε $f(-1)=5$, $f(1)=-3$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty. \text{ Άρα:}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αυξ.}}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 5],$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αυξ.}}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([-1, 1]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. φθ.}}}{=} [f(1), f(-1)] = [-3, 5].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $2x^3 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .
- Το $0 \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες, μία στο $A_1 = (-\infty, -1]$, μία στο $A_2 = [1, +\infty)$ και μία στο $A_3 = [-1, 1]$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - \sin x - x \ln x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο:

$$f'(x) = 2x + \cancel{\eta \mu \acute{\chi}} - \cancel{\eta \mu \acute{\chi}} - x \cos x = x(2 - \sin x). \text{ Έτσι έχουμε:}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \sin x = 2 \text{ Αδύνατη. Επιπλέον είναι:}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \Leftrightarrow 3 \geq 2 - \sin x \geq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	$\emptyset$	+
$2 - \sin x$	+		+
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς:

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = [0, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = (-\infty, 0]$.

Έχουμε $f(0) = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin x - x \eta \mu x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \sin x - \frac{1}{x} \eta \mu x \right) =$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sin x - x \eta \mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \sin x - \frac{1}{x} \eta \mu x \right) =$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty, \text{ όπου}$$

$$|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} \right| |\sin x| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} \sin x \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \sin x \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|,$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x^2} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x^2} \right| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο**

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \sin x \right) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη),

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x^2} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x^2} \right| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο**

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \sin x \right) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη),

και

$$|\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| |\eta \mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta \mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής**

θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \eta \mu x \right) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη),

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα

είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \eta \mu x \right) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη). Άρα :

$$f(A_1) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right) = [-1, +\infty).$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$x^2 = \sin x + x \eta \mu x \Leftrightarrow x^2 - \sin x - x \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 :$$

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο $A_1 = [0, +\infty)$ και μία στο $A_2 = (-\infty, 0]$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 2015$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x - 2015) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (e^u + u - 2015) = +\infty + \infty - 2015 = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - x - 2015) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} (e^u + u - 2015) = 0 - \infty - 2015 = -\infty.$$

Άρα :

$$f(A) = f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$e^{-x} = x + 2015 \Leftrightarrow e^{-x} - x - 2015 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0:$$

Το $0 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $A = \mathbb{R}$.

1481. Η $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 2$ ή $x = -1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
x^2-x-2	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$A_2 = [2, +\infty)$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $A_3 = [-1, 2]$. Έχουμε $f(-1) = \mathbf{6}$, $f(2) = \mathbf{-21}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 6],$$

$$f(A_2) = f([2, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{=} \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-21, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([-1, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} [f(2), f(-1)] = [-21, 6].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Το $0 \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_3 .

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ με $f(-1) = 6 > 0$ και $f(0) = -1 < 0$, δηλαδή $f(-1) \cdot f(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 0) \subseteq A_3$ (αρνητική ρίζα) τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι $1-1$, στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες, μία **αρνητική** στο $(-\infty, -1]$, μία **θετική** στο $[2, +\infty)$ και μία **αρνητική** στο $[-1, 2]$.

1482. i. Έστω ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό n . Τότε το $P'(x)$ θα έχει βαθμό $n-1$. Το n δεν μπορεί να είναι μικρότερο του 3 γιατί το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους της εξίσωσης $P(x) = P'(x) + x^3$ θα είχε μεγαλύτερο βαθμό από αυτό του πρώτου μέλους. Όμοια το n δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του 3 γιατί τότε το πολυώνυμο του πρώτου μέλους της εξίσωσης $P(x) = P'(x) + x^3$ θα είχε μεγαλύτερο βαθμό από αυτό του δεύτερου μέλους, Άρα **$n=3$** .

ii. Έστω $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ το ζητούμενο πολυώνυμο με παράγωγο

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c. \text{ Οπότε έχουμε:}$$

$$P(x) = P'(x) + x^3 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 3ax^2 + 2bx + c + x^3 \Leftrightarrow$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$\text{Άρα } a = 1, b = 3a = 3, c = 2b = 6, d = c = 6.$$

$$\text{Οπότε } \boxed{P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6}.$$

iii. Η συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και παράγωγο $P'(x) = 3x^2 + 6x + 6 = 3(x^2 + 2x + 2)$. Έτσι έχουμε:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0, \text{ αδύνατη αφού } \Delta = -4 < 0.$$

Οπότε $x^2 + 2x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $P'(x) > 0$.

Συνεπώς η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty. \text{ Άρα:}$$

$$P(A) = P(\mathbb{R}) = P((-\infty, +\infty)) \stackrel{P \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{P \text{ γν. αυξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $P(x) = 0$:

Το $0 \in P(A)$ άρα η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $A = \mathbb{R}$.

iv. Η P είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ με $P(-2) = -2 < 0$ και $P(0) = 6 > 0$, δηλαδή $P(-2) \cdot P(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-2, 0) \subseteq A$ (αρνητική ρίζα) τέτοιο ώστε $P(\xi) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η P είναι $1-1$, στο A . Συνεπώς το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακριβώς μία **αρνητική** ρίζα στο $\mathbb{R}$.

1483. Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$, άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή θα είναι είτε $f'(x) > 0$ και η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, είτε $f'(x) < 0$ και η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Δηλαδή η f σε κάθε περίπτωση είναι γνησίως μονότονη και άρα $1-1$. Έχουμε:

$$f(e^{-x}) - f(x + \alpha) = 0 \Leftrightarrow f(e^{-x}) = f(x + \alpha) \stackrel{f \text{ } 1-1}{\Leftrightarrow} e^{-x} = x + \alpha \Leftrightarrow e^{-x} - x - \alpha = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - x - \alpha$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο:

$$g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0. \text{ Συνεπώς η } g \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x - \alpha) \stackrel{u = -x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (e^u + u - \alpha) = +\infty + \infty - \alpha = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - x - \alpha) \stackrel{u = -x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} (e^u + u - \alpha) = 0 - \infty - \alpha = -\infty. \text{ Άρα:}$$

$$g(A) = g(\mathbb{R}) = g((-\infty, +\infty)) \stackrel{\substack{g \text{ συνεχής} \\ g \text{ γν. φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $g(x) = 0$:

Το $0 \in g(A)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$, άρα και η αρχική $f(e^{-x}) - f(x + \alpha) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $A = \mathbb{R}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

1484. i. Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έστω:

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \stackrel{f \circ g \text{ } 1-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2, \text{ δηλαδή και η } g \text{ είναι } 1-1.$$

ii. Έχουμε:

$$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1) \stackrel{g \text{ } 1-1}{\Leftrightarrow} \cancel{f(x)} + x^3 - x = \cancel{f(x)} + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } h(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ η οποία έχει πεδίο ορισμού το } A = \mathbb{R} \text{ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο:}$$

$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Έτσι έχουμε :

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=1}$ ή $\underline{x=-1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της h :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
x^2-1	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$h'(x)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η h είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$A_2 = [1, +\infty)$.

– Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $A_3 = [-1, 1]$.

Έχουμε $h(-1) = 3$, $h(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. Άρα :

$$h(A_1) = h((-\infty, -1]) \stackrel{\substack{h \text{ συνεχής} \\ h \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(-1) \right] = (-\infty, 3],$$

$$h(A_2) = h([1, +\infty)) \stackrel{\substack{h \text{ συνεχής} \\ h \text{ γν.αυξ.}}}{=} \left[h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$h(A_3) = h([-1, 1]) \stackrel{h \text{ συνεχής}}{=} [h(1), h(-1)] = [-1, 3].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $h(x) = 0$:

- Το $0 \in h(A_1)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in h(A_2)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Το $0 \in h(A_3)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_3 .

Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $h(0) = 1 > 0$ και $h(1) = -1 < 0$, δηλαδή

$h(0) \cdot h(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1) \subseteq A_3$ (θετική ρίζα) τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η h είναι $1-1$, στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $h(x) = 0$, άρα και η $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$, έχει ακριβώς τρεις ρίζες, μία **αρνητική** στο $(-\infty, -1]$, μία **θετική** στο $[1, +\infty)$ και μία **θετική** στο $[-1, 1]$.

- 1485. i.** Η $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ (η } f'$$

μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \text{ Άρα :}$$

$$f(A) = f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = (0, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

ii. Έχουμε :

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = f(2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\underset{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}} e^{3-x} \cdot (x^2+1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3}{e^x} \cdot (x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}.$$

Το $\frac{e^3}{2} \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{e^3}{2}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \frac{e^3}{2}$, άρα και η αρχική $f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = \frac{e^2}{5}$, έχει

ακριβώς μία ρίζα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

1486. i. Η $f(x) = e^{x-1} - \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$. Για το πρόσημό της f'

εργαζόμαστε ως εξής : $f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα και

άρα 1-1. Είναι $f'(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $f'(x) = 0$, η οποία είναι

μοναδική αφού η f' είναι 1-1. Οπότε :

– Για $\boxed{0 < x < 1}$ έχουμε : $x < 1 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}$.

– Για $\boxed{x > 1}$ έχουμε : $x > 1 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}$.

δηλαδή η f' είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $x < 1$.

Έτσι κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		– 0 +	
$f(x)$		↘ ↗	

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο

διάστημα $A_1 = [1, +\infty)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο

διάστημα $A_2 = (0, 1]$.

Έχουμε $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x-1} - \ln x) = e^{-1} - (-\infty) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} \right) = (+\infty)(1-0) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{x-1}} = 0 \text{ και}$$

Άρα :

$$f(A_1) = f([1, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αὐξ.}}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f((0, 1]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. φθ.}}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

ii. Έχουμε :

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = f(1) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} f(x) - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}.$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$:

- Το $\frac{3}{2} \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $\frac{3}{2} \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

iii. Αφού είναι $x_1 < x_2$, τότε έστω $x_1 \in (0, 1]$ και $x_2 \in [1, +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι η

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi), \text{ και αφού διέρχεται από το σημείο } M\left(0, \frac{3}{2}\right), \text{ τότε είναι :}$$

$$\frac{3}{2} = -\xi f'(\xi) + f(\xi) \Leftrightarrow 3 = -2\xi f'(\xi) + 2f(\xi) \Leftrightarrow 2\xi f'(\xi) - 2f(\xi) + 3 = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $2xf'(x) - 2f(x) + 3 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(x_1, 1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2xf'(x) - 2f(x) + 3$. Είναι :

$$g'(x) = \cancel{2f'(x)} + 2xf''(x) - \cancel{2f'(x)} = 2xf''(x) > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα,}$$

άρα και $1-1$, στο $(0, +\infty)$.

Η $g(x) = 2xf'(x) - 2f(x) + 3$ είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(1) = 2f'(1) - 2f(1) + 3 = -2 \cdot 1 + 3 = 1 > 0$ και

$$g(x_1) = 2x_1f'(x_1) - 2f(x_1) + 3 = 2x_1f'(x_1) - \cancel{2} \frac{3}{\cancel{2}} + 3 = 2x_1f'(x_1) < 0 \text{ αφού}$$

$$0 < x_1 < 1 \text{ και } x_1 < 1 \stackrel{f' \text{ γν. αὐξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x_1) < 0.$$

Δηλαδή $g(x_1) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi f'(\xi) - 2f(\xi) + 3 = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η g είναι 1-1.

1487. Γ.1 Είναι :

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + \cancel{x} = \cancel{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) + xf'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x) + xf(x) \right]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}f^2(x) + xf(x) = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2}f^2(0) = c \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{2}f^2(x) + xf(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη), άρα και η $f(x) + x$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και ισχύει $f(x) + x \neq 0$, άρα η $f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) + 0 = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}}.$$

$$\text{Γ.2 Είναι } f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, \text{ αφού}$$

$$x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0.$$

Συνεπώς η f θα είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα και 1-1. Είναι :

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} g(x) = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Η $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο : $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$. Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της g :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		

Συνεπώς :

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στα

διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$A_2 = [0, +\infty)$.

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [-1, 0]$.

Έχουμε $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Άρα :

$$g(A_1) = g((-\infty, -1]) \stackrel{\substack{g \text{ συνεχής} \\ g \text{ γν. αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right],$$

$$g(A_2) = g([0, +\infty)) \stackrel{\substack{g \text{ συνεχής} \\ g \text{ γν. αυξ.}}}{=} \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$g(A_3) = g([-1, 0]) \stackrel{\substack{g \text{ συνεχής} \\ g \text{ γν. φθ.}}}{=} [g(0), g(-1)] = \left[-1, -\frac{1}{2} \right].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $g(x) = 0$:

- Το $0 \notin g(A_1)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
- Το $0 \in g(A_2)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1–1, στο A_2 .
- Το $0 \notin g(A_3)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$, άρα και η $f(g(x)) = 1$ έχει **ακριβώς μία ρίζα** στο $[0, +\infty)$.

1488. α. Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{u = \frac{\ln x}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0 = f(0)$, αφού

$$\text{για } x \rightarrow 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και άρα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

β. Είναι $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e \text{ και}$$

$$1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f:$$

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	$\ominus$
$f'(x)$		+	$\ominus$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = [0, e]$.– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = [e, +\infty)$.

Έχουμε $f(0) = 0$, $f(e) = e^e$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0}} e^u = e^0 = 1$, αφού

για $x \rightarrow +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{DLH} \frac{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα :

$$f(A_1) = f([0, e]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αὐξ.}}{=} [f(0), f(e)] = \left[0, e^e\right],$$

$$f(A_2) = f([e, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)\right] = \left(1, e^e\right].$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[0, e^e\right]$ το σύνολο τιμών της f .

γ. i. Έχουμε :

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow 4 \ln x = x \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\ln x^4 = \ln 4^x \Leftrightarrow x^4 = 4^x.$$

ii. Παρατηρούμε ότι το 2 και το 4 είναι λύσεις της εξίσωσης $x^4 = 4^x$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και άλλη ρίζα έστω $x_3 > 0$ ($x_3 \neq 2$, $x_3 \neq 4$), η οποία θα είναι και ρίζα της ισοδύναμής της εξίσωσης $f(x) = f(4)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(4)$, $x > 0$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = f'(x)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $x_3 > 4$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[2, 4]$ και $[4, x_3]$.

– Η g είναι συνεχής στο $[2, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ και $g(2) = 0 = g(4)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2, 4)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = e.$$

– Η g είναι συνεχής στο $[4, x_3]$, παραγωγίσιμη στο $(4, x_3)$ και $g(4) = 0 = g(x_3)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (4, x_3)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \xi_2 = e.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $\xi_1 = \xi_2$, άποπο αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα, συνεπώς η εξίσωση $x^4 = 4^x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

1489. i. Για την $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$ πρέπει $x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$, δηλαδή το πεδίο

ορισμού της f είναι το $A = (5, +\infty)$.

ii. Βρίσκουμε την παράγωγο της $f : f'(x) = \frac{1}{x-5} + 2 > 0$ για κάθε $x \in (5, +\infty)$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

iii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (\ln(x-5) + 2x - 12) \stackrel{u=x-5}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 5^+ \\ u \rightarrow 0^+}} (\ln u + 2(u+5) - 12) = -\infty - 2 = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-5) + 2x - 12) \stackrel{u=x-5}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (\ln u + 2(u+5) - 12) = \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u + 2u - 2) = +\infty + \infty - 2 = +\infty, \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f(A) = f((5, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{f(A) = \mathbb{R}} \text{ το}$$

σύνολο τιμών της f .

iv. Το $2006 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A .

1490. A. Αφού η εφαιπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε θα πρέπει $f'(1) = 0$. Έχουμε :

$$f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 2kx \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = 6 - 2k \Leftrightarrow$$

$$6 - 2k = 0 \Leftrightarrow \boxed{k=3}. \text{ Άρα } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10.$$

i. Η $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$					

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0]$ και $A_2 = [1, +\infty)$.
T.M. T.E.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_3 = [0, 1]$, και

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x=0$ το $f(0)=10$.

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)=9$.

ii. Έχουμε $f(0) = 10$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 10) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$, άρα

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 10] \Leftrightarrow \boxed{f(A_1) = (-\infty, 10]}, \text{ το}$$

σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - a + 5$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι :

$$g(0) = f(0) - \alpha + 5 = 10 - \alpha + 5 = 15 - \alpha > 0 \text{ αφού } \alpha < 15 \text{ και}$$

$$g(1) = f(1) - \alpha + 5 = 9 - \alpha + 5 = 14 - \alpha < 0 \text{ αφού } \alpha > 14.$$

Δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \alpha - 5$.

Είναι $g'(x) = f'(x) < 0$ για $x \in [0,1]$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$,

συνεπώς και $1-1$, άρα το παραπάνω ξ είναι μοναδικό. Δηλαδή η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \alpha - 5 \text{ έχει ακριβώς μία λύση στο } (0,1).$$

1491. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 + 8x = 4x(3x^2 + 3x + 2). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(3x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } 3x^2 + 3x + 2 = 0, \text{ αδύνατη αφού}$$

$\Delta = -15 < 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$3x^2 + 3x + 2$	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$.

Έχουμε $f(0) = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, +\infty)$ το σύνολο τιμών της f .

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω ε η εφαπτομένη της C_g σε ένα τυχαίο σημείο $M(\xi, g(\xi))$. Είναι

$$\varepsilon : y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)x - \xi g'(\xi) + g(\xi). \text{ Αφού διέρχεται από την}$$

αρχή των αξόνων τότε θα είναι $-\xi g'(\xi) + g(\xi) = 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η

εξίσωση $-xg'(x) + g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $g(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε λοιπόν: } -xg'(x) + g(x) &= -x(4x^3 + 6x^2 + 8x + 2) + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = \\ &= -4x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 2x + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = -(3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1) = -f(x). \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς } -xg'(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχουν ακριβώς δύο εραπτομένες της C_g που άγονται από την αρχή των αξόνων.

1492. i. Η $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 4)(x^2 - 1) - 2x(x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^2 + 4 - 2x^4 + 8x^2}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 4}{(x^2 - 1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}. \text{ Συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως} \end{aligned}$$

αύξουσα στο πεδίο ορισμού της που είναι το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Έστω λοιπόν $A_1 = (-\infty, -1)$, $A_2 = (-1, 1)$ και $A_3 = (1, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 4x}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = -\frac{3}{2} \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 4x}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = -\frac{3}{2} \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 4x}{x + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} = -\frac{3}{2} \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 4x}{x + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} = -\frac{3}{2} \cdot (+\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty. \text{ Άρα:}$$

$$f(A_1) = f((-\infty, -1)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty),$$

$$f(A_2) = f((-1, 1)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty),$$

$$f(A_3) = f((1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}}$ το σύνολο τιμών της f .

ii. Είναι : $x^3 - \alpha x^2 - 4x + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = \alpha x^2 - \alpha \Leftrightarrow x^3 - 4x = \alpha(x^2 - 1) \Leftrightarrow$

• Για $x = -1$ είναι $2 = 0$, αδύνατη. • Για $x = 1$ είναι $-3 = 0$, αδύνατη.

• Για $x \neq -1, 1$ είναι $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = \alpha$: Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε :

- Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Το $\alpha \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

1493. i. Η $f(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2}e^x + \frac{x-1}{x+1}e^x = \frac{2}{(x+1)^2}e^x + \frac{x^2-1}{(x+1)^2}e^x = \frac{e^x}{(x+1)^2}(2+x^2-1) = \frac{e^x}{(x+1)^2}(x^2+1) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα**

στο πεδίο ορισμού της που είναι το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Έστω λοιπόν

$A_1 = (-\infty, -1)$ και $A_2 = (-1, +\infty)$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1}e^x = 1 \cdot 0 = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}-1}{\cancel{x}+1} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1}e^x = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[(x-1)e^x \frac{1}{x+1} \right] = -2 \cdot e^{-1} \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1}e^x = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(x-1)e^x \frac{1}{x+1} \right] = -2 \cdot e^{-1} \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1}e^x = 1 \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}-1}{\cancel{x}+1} = 1. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f\left((-\infty, -1)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = (0, +\infty),$$

$$f(A_2) = f\left((-1, +\infty)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}}$ το **σύνολο τιμών** της f .

ii. Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \notin f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
 - Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα που ανήκει στο $(-1, +\infty)$.

1494. i. Η $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

$$\text{συνεχής) με παράγωγο: } f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x} + 1} = 1. \text{ Άρα:}$$

$$f(A) = f\left((-\infty, +\infty)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = (0, 1) \Leftrightarrow \boxed{f(A) = (0, 1)} \text{ το } \sigma. \tau. \text{ της } f.$$

iii. Για να έχει η εξίσωση $f(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ λύση στο $\mathbb{R}$ αρκεί $\frac{\lambda}{1-\lambda} \in (0, 1)$, δηλαδή

$0 < \frac{\lambda}{1-\lambda} < 1$, απ'όπου παίρνουμε δύο ανισώσεις:

- $\frac{\lambda}{1-\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda) > 0$. Έχουμε $\lambda(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}$ ή $\underline{\underline{\lambda = 1}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

λ	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$\lambda(1-\lambda)$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

Από τον πίνακα παίρνουμε $\lambda \in (0, 1)$.

- $\frac{\lambda}{1-\lambda} < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1 + \lambda}{1-\lambda} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda - 1}{1-\lambda} < 0 \Leftrightarrow$

$$(2\lambda - 1)(1 - \lambda) < 0. \text{ Έχουμε } (2\lambda - 1)(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}} \text{ ή } \underline{\underline{\lambda = 1}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

λ	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2\lambda-1$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$+$	
$1-\lambda$	$+$	$+$	$\bigcirc$	$-$	
γινόμενο	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

Από τον πίνακα παίρνουμε

$$\lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

Συναληθεύοντας τις δύο λύσεις

$$\text{παίρνουμε } \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

1495. i. Η $f(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2} = -e^{-x} - \frac{2}{(x+1)^2} = -\left(e^{-x} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) < 0 \text{ για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Συνεπώς η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο πεδίο ορισμού της που είναι το

$$A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty). \text{ Έστω λοιπόν } A_1 = (-\infty, -1) \text{ και } A_2 = (-1, +\infty).$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - \frac{x-1}{x+1} \right) = +\infty - 1 = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}-1}{\cancel{x}+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(e^{-x} - \frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(e^{-x} - (x-1) \frac{1}{x+1} \right) = e - (-2) \cdot (-\infty) = -\infty,$$

$$\text{αφού } x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(e^{-x} - \frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(e^{-x} - (x-1) \frac{1}{x+1} \right) = e - (-2) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\text{αφού } x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} - \frac{x-1}{x+1} \right) = 0 - 1 = -1, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}-1}{\cancel{x}+1} = 1. \text{ Άρα :}$$

$$f(A_1) = f\left((-\infty, -1)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty),$$

$$f(A_2) = f\left((-1, +\infty)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right)} = (-1, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}}$ το **σύνολο τιμών** της f .

ii. Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**, μία στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και μία στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

- 1496. α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - x - 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε πως $g(0) = 0$ άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$ και αφού η g είναι $1-1$, τότε η ρίζα αυτή είναι **μοναδική**.

β. i. Έχουμε :

$$f(x) + 1 = x + e^{-f(x)} \Rightarrow f'(x) = 1 - f'(x)e^{-f(x)} \Leftrightarrow (1 + e^{-f(x)})f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο πεδίο ορισμού της.

ii. Είναι : $f(x) + 1 = x + e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{-f(x)} - f(x) - 1 = -x \Leftrightarrow g(f(x)) = -x,$

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - x - 1) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} (e^u + u - 1) = 0 - \infty - 1 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty. \text{ Έστω } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow \lambda}} g(u)$ και αφού βρήκαμε πως $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = -\infty$, τότε

θα είναι $\lim_{u \rightarrow \lambda} g(u) = -\infty$. Άρα πρέπει $\lambda = \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

iii. Στη σχέση $f(x) + 1 = x + e^{-f(x)}$ για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(0) + 1 = e^{-f(0)} \Leftrightarrow e^{-f(0)} - f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow g(f(0)) = 0 \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(0) = 0. \text{ Οπότε :}$$

$$\boxed{f(A) = f([0, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αύξ.}}}{=} [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [0, +\infty)} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

- 1497. i.** Για την $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x > 0$. Οπότε η f έχει

πεδίο ορισμού το $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1 - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2x - (x^2 - 2x + 1)}{x(x-1)^2} = \frac{-2\cancel{x} - x^2 + 2\cancel{x} - 1}{x(x-1)^2} = \\ &= -\frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της που είναι το

$A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Έστω λοιπόν $A_1 = (0, 1)$ και $A_2 = (1, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -1 - (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((x+1) \frac{1}{x-1} - \ln x \right) = 2 \cdot (-\infty) - 0 = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left((x+1) \frac{1}{x-1} - \ln x \right) = 2 \cdot (+\infty) - 0 = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = 1 - (+\infty) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}+1}{\cancel{x}-1} = 1.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f\left((0,1)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty),$$

$$f(A_2) = f\left((1,+\infty)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}}$ το σύνολο τιμών της f .

ii. Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .

- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες** στο πεδίο ορισμού της.

iii. Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_g , όπου $g(x) = \ln x$, στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$. Είναι

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \text{ οπότε έχουμε : } \varepsilon_1 : y = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln \alpha \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha.$$

Έστω ε_2 η εφαπτομένη της C_h , όπου $h(x) = e^x$, στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$. Είναι

$$h'(x) = e^x, \text{ οπότε έχουμε : } \varepsilon_2 : y = e^\beta(x - \beta) + e^\beta \Leftrightarrow y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{\alpha} = e^\beta}} \text{ και } -1 + \ln \alpha = -\beta e^\beta + e^\beta.$$

$$\text{Έτσι είναι } \frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \alpha^{-1} = e^\beta \Leftrightarrow \ln \alpha^{-1} = \ln e^\beta \Leftrightarrow \underline{\underline{-\ln \alpha = \beta}} \text{ και}$$

$$-1 + \ln \alpha = -(-\ln \alpha) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow -\alpha + \alpha \ln \alpha = \ln \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - \ln \alpha = \alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1) \ln \alpha = \alpha + 1 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Τέλος είναι $f(a) = \frac{a+1}{a-1} - \ln a = \frac{a+1}{a-1} - \frac{a+1}{a-1} = 0$, δηλαδή το a είναι **ρίζα** της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iv. Όταν οι παραπάνω εφαπτομένες ταυτίζονται, το a είναι ρίζα της f και αφού η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της τότε θα υπάρχουν δύο σημεία στα οποία οι εφαπτομένες θα ταυτίζονται. Οπότε οι C_f και C_g θα έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

1498. i. Η $f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x - \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = e^x - \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 1.$$

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο πεδίο ορισμού της που είναι το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii. Έστω λοιπόν $A_1 = (-\infty, 1)$ και $A_2 = (1, +\infty)$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{x+1}{x-1} \right) = 0 - 1 = -1$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^x - \frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^x - (x+1) \frac{1}{x-1} \right) = e - 2 \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(e^x - \frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(e^x - (x+1) \frac{1}{x-1} \right) = e - 2 \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ αφού}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{x+1}{x-1} \right) = +\infty - 1 = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, 1)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f((1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες** στο πεδίο ορισμού της.

iii. Έχουμε $f(\alpha) = e^\alpha - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ και αφού το α είναι ρίζα της f τότε θα είναι

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

$$\text{Επιπλέον είναι } h(x) = \ln x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x}.$$

Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_g , όπου $g(x) = e^x$, στο σημείο $A(\alpha, g(\alpha))$. Είναι $g'(\alpha) = e^\alpha$, οπότε έχουμε :

$$\varepsilon_1 : y = e^\alpha(x - \alpha) + e^\alpha \Leftrightarrow y = e^\alpha x - \alpha e^\alpha + e^\alpha \Leftrightarrow y = e^\alpha x - e^\alpha(\alpha - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = e^\alpha x - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha-1) \Leftrightarrow y = e^\alpha x - \alpha - 1.$$

Πρέπει η ε_1 να είναι και εφαπτομένη της C_h , οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $M(x_0, y_0)$ τέτοιο ώστε :

$$- M \in C_h \Leftrightarrow y_0 = \ln x_0,$$

$$- M \in \varepsilon \Leftrightarrow y_0 = e^\alpha x_0 - \alpha - 1 \text{ και}$$

$$- \lambda_\varepsilon = h'(x_0) \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \underline{\underline{e^\alpha x_0 = 1}}.$$

$$\text{Οπότε } y_0 = e^\alpha x_0 - \alpha - 1 = \cancel{1} - \alpha - \cancel{1} = -\alpha \Leftrightarrow \boxed{y_0 = -\alpha} \text{ και}$$

$$y_0 = \ln x_0 \Leftrightarrow -\alpha = \ln x_0 \Leftrightarrow \ln e^{-\alpha} = \ln x_0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = e^{-\alpha}}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει τέτοιο σημείο και είναι το $M(e^{-\alpha}, -\alpha)$

iv. Αφού το α είναι ρίζα της f και η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της τότε θα υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία στα οποία η εφαπτομένη θα είναι κοινή και για τις δύο γραφικές παραστάσεις. Οπότε οι C_f και C_g θα έχουν ακριβώς **δύο κοινές εφαπτομένες**.

1499. i. Η $g(x) = 1 + x(1 - \ln x) = 1 + x - x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = 1 - \ln x + \cancel{-x} \frac{1}{\cancel{x}} = \cancel{1} - \ln x - \cancel{1} = -\ln x. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1 \text{ και}$$

$$-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	⊖
$g(x)$		↗	↘

Συνεπώς :

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$.

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$.

Έχουμε $g(1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x - x \ln x) = 1 + 0 - 0 = 1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x(1 - \ln x)) = 1 + (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Άρα :

$$g(A_1) = g((0, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{f \text{ γν. αὐξ.}} g(x), g(1) \right) = (1, 2],$$

$$g(A_2) = g([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{f \text{ γν. φθ.}} g(x), g(1) \right) = (-\infty, 2].$$

Οπότε $\boxed{g(A) = g(A_1) \cup g(A_2) = (-\infty, 2]}$ το **σύνολο τιμών** της g .

ii. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}.$$

Αφού $x(x+1)^2 > 0$ τότε το πρόσημο της f' είναι το ίδιο με αυτό της g . Συνεπώς :

- Αν $x \in (0, 1]$ τότε $g(x) \in (1, 2] \Rightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$

- Αν $x \in [1, +\infty)$ τότε $g(x) \in (-\infty, 2]$, άρα θα υπάρχει κάποιο $\rho > 1$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0$ με τις τιμές της g να αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν του ρ .

Έτσι θα είναι :

- Για $\boxed{1 < x < \rho}$ έχουμε : $x < \rho \stackrel{g \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(\rho) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}$,
δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, \rho)$.

- Για $\boxed{x > \rho}$ έχουμε : $x > \rho \stackrel{g \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(\rho) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}$,
δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\rho, +\infty)$.

Άρα έχουμε τελικά την f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \rho]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho, +\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \rho$, δηλαδή $f(x) \leq f(\rho)$. Είναι :

$$f(\rho) = \frac{\ln \rho}{\rho+1} \text{ και } g(\rho) = 0 \Leftrightarrow 1 + \rho - \rho \ln \rho = 0 \Leftrightarrow \rho \ln \rho = 1 + \rho \Leftrightarrow \underline{\underline{\ln \rho = \frac{1+\rho}{\rho}}},$$

$$\text{δηλαδή } f(\rho) = \frac{\ln \rho}{\rho+1} = \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}+1} = \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}+1} = \frac{1}{\rho}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $f(x) \leq \frac{1}{\rho}$, για κάθε $x > 0$.

1500. i. Η $\varphi(x) = xe^x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $\varphi'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

Έτσι έχουμε :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της φ :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
1+x	-	$\emptyset$	+
$\varphi'(x)$	-		+
$\varphi(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$.

– Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [-1, +\infty)$.

Έχουμε $\varphi(-1) = -\frac{1}{e} - 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 1) = 0 - 1 = -1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = -0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) - 1 = +\infty.$$

Άρα :

$$\varphi(A_1) = \varphi((-\infty, -1]) \stackrel{\varphi \text{ συνεχής}}{\underset{\varphi \text{ γν. φθ.}}{=}} \left[\varphi(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right) = \left[-\frac{1}{e} - 1, -1 \right),$$

$$\varphi(A_2) = \varphi([-1, +\infty)) \stackrel{\varphi \text{ συνεχής}}{\underset{\varphi \text{ γν. αύξ.}}{=}} \left[\varphi(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = \left[-\frac{1}{e} - 1, +\infty \right).$$

Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $\varphi(x) = 0$:

- Το $0 \notin \varphi(A_1)$ άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
- Το $0 \in \varphi(A_2)$ άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει **ακριβώς μία ρίζα** στο πεδίο ορισμού της, έστω

x_0 , δηλαδή $\varphi(x_0) = 0$. Αν $x_0 < 0$ τότε, αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα, είναι $\varphi(x_0) < \varphi(0) \Leftrightarrow 0 < -1$. Άτοπο. Άρα $x_0 > 0$, δηλαδή η ρίζα της φ είναι **θετική**.

ii. Η $h(x) = (x-1)e^x - (x+1)$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$h'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} - 1 = xe^x - 1 = \varphi(x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$, όπου $x_0 \in A_2 = [-1, +\infty)$, στο οποίο η φ είναι γνησίως αύξουσα.

$$- \text{Αν } x \in A_1 \text{ τότε } \varphi(x) \in \varphi(A_1) = \left[-\frac{1}{e}-1, -1\right) \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

- Αν $x \in A_2$ τότε :

$$\bullet \text{ για } x < x_0 \stackrel{\varphi \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \varphi(x) < \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0,$$

$$\bullet \text{ για } x > x_0 \stackrel{\varphi \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της h :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, x_0]$.

- Η h είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } h(x_0) &= (x_0 - 1)e^{x_0} - (x_0 + 1) = x_0 e^{x_0} - e^{x_0} - x_0 - 1 = -1 - e^{x_0} - x_0 - 1 = \\ &= -e^{x_0} - x_0 < 0, \text{ αφού } \varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = 1 \text{ και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-1)e^x - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(x-1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = \\ &= (+\infty) \cdot (+\infty - 1 - 0 - 0) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Άρα :

$$h(\Delta_2) = h([x_0, +\infty)) \stackrel{h \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[h(x_0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = [-e^{x_0} - x_0, +\infty).$$

Το $0 \in h(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα έστω $\rho \in \Delta_2$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_2 . Ελέγχουμε αν και το $-\rho$ είναι ρίζα της h :

$$\begin{aligned} h(-\rho) &= (-\rho-1)e^{-\rho} - (-\rho+1) = \frac{-\rho-1}{e^{\rho}} - (-\rho+1) = \frac{-\rho-1 - (-\rho+1)e^{\rho}}{e^{\rho}} = \\ &= \frac{(\rho-1)e^{\rho} - (\rho+1)}{e^{\rho}} = \frac{h(\rho)}{e^{\rho}} = 0, \text{ συνεπώς και το } -\rho \text{ είναι ρίζα της } h. \end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε :

$\rho \in [x_0, +\infty) \Rightarrow \rho \geq x_0 > 0 \Leftrightarrow -\rho \leq -x_0 < 0 \Rightarrow -\rho \in (-\infty, x_0)$ κι επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα, άρα και $1-1$, τότε η ρίζα $-\rho$ είναι μοναδική.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες αντίθετες.

iii. Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f , όπου $f(x) = e^x$, στο σημείο $A(a, e^a)$. Είναι

$$f'(x) = e^x, \text{ οπότε έχουμε : } \varepsilon_1 : y = e^a (x-a) + e^a \Leftrightarrow \boxed{y = e^a x - ae^a + e^a}.$$

Έστω ε_2 η εφαπτομένη της C_g , όπου $g(x) = \ln x$, στο σημείο $B(\beta, \ln \beta)$. Είναι

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \text{ οπότε έχουμε: } \varepsilon_2: y = \frac{1}{\beta}(x - \beta) + \ln \beta \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{\beta}x - 1 + \ln \beta}.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν: } \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{e^a = \frac{1}{\beta}}} \text{ και } -ae^a + e^a = -1 + \ln \beta.$$

$$\text{Έτσι είναι: } e^a = \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{e^a} \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = e^{-a}}} \text{ και}$$

$$-ae^a + e^a = -1 + \ln \beta \Leftrightarrow -ae^a + e^a = -1 + \ln e^{-a} \Leftrightarrow -ae^a + e^a = -1 - a \Leftrightarrow$$

$$ae^a + e^a - 1 - a = 0 \Leftrightarrow (a+1)e^a - (1+a) = 0 \Leftrightarrow h(a) = 0.$$

Δηλαδή οι ευθείες ταυτίζονται όταν το a είναι ρίζα της $h(x) = 0$, η οποία έχουμε αποδείξει πως έχει δύο ακριβώς ρίζες. Επομένως υπάρχουν **ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες** για τις C_f και C_g .

1501. i. Η $f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

$$\text{παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο: } f'(x) = -\ln x + \frac{1-x}{x} = -\ln x + \frac{1}{x} - 1$$

$$\text{Επιπλέον είναι και } f''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0, \text{ συνεπώς η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο}$$

$A = (0, +\infty)$, άρα και $1-1$. Προφανής ρίζα της f' είναι η $x=1$ αφού $f'(1) = 0$, η οποία είναι μοναδική, αφού η f' είναι $1-1$. Έτσι έχουμε:

$$x < 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ και}$$

$$x > 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0,$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			

Συνεπώς:

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$.

T.M.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$

και

$$\circ \text{ Η } f \text{ παρουσιάζει } \underline{\text{ολικό μέγιστο}}, \text{ στο } x=1 \text{ το } f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{ii. Έχουμε } f(1) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1-x)\ln x + \frac{1}{2} \right) = 1 \cdot (-\infty) + \frac{1}{2} = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1-x)\ln x + \frac{1}{2} \right) = (-\infty) \cdot (+\infty) + \frac{1}{2} = -\infty$$

Άρα:

$$f(A_1) = f\left((0,1]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right],$$

$$f(A_2) = f\left([1,+\infty)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right).$$

Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ_1 στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ_2 στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες** ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 \in (0,1)$ και $\rho_2 \in (1,+\infty)$.

iii. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\rho_1, 1]$ και $[1, \rho_2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(\rho_1)}{1 - \rho_1} = \frac{\frac{1}{2} - \left[(1-\rho_1) \ln \rho_1 + \frac{1}{2} \right]}{1 - \rho_1} = \frac{\frac{1}{2} - (1-\rho_1) \ln \rho_1 - \frac{1}{2}}{1 - \rho_1} =$$

$$= \frac{-\cancel{(1-\rho_1)} \ln \rho_1}{\cancel{1-\rho_1}} = -\ln \rho_1.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, \rho_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2) - f(1)}{\rho_2 - 1} = \frac{\left[(1-\rho_2) \ln \rho_2 + \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2}}{\rho_2 - 1} = \frac{(1-\rho_2) \ln \rho_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\rho_2 - 1} =$$

$$= \frac{-\cancel{(\rho_2-1)} \ln \rho_2}{\cancel{\rho_2-1}} = -\ln \rho_2.$$

Οπότε : $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -\ln \rho_1 - \ln \rho_2 = -(\ln \rho_1 + \ln \rho_2) = -\ln(\rho_1 \rho_2)$.

iv. Η $g(x) = \frac{x^2 \ln x}{e^{2x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{(2x \ln x + x) e^{2x} - 2e^{2x} x^2 \ln x}{(e^{2x})^2} = \frac{x \cancel{e^{2x}} (2 \ln x + 1 - 2x \ln x)}{(e^{2x})^2} =$$

$$= \frac{x(2 \ln x + 1 - 2x \ln x)}{e^{2x}} = \frac{2x}{e^{2x}} \left(\ln x - x \ln x + \frac{1}{2} \right) = \frac{2x}{e^{2x}} \left[(1-x) \ln x + \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{2x}{e^{2x}} f(x).$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{e^{2x}} f(x) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \rho_1}} \text{ ή } \underline{\underline{x = \rho_2}}.$$

Επιπλέον είναι :

- Για $0 < \underline{x} < \rho_1$ έχουμε : $x < \rho_1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\rho_1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0},$
- Για $\underline{\rho_1} < x \leq 1$ έχουμε : $\rho_1 < x \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\rho_1) < f(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0},$
- $1 \leq x < \underline{\rho_2} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(\rho_2) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0},$
- $x > \rho_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\rho_2) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
2x		+	+	+
f(x)		−	+	−
g'(x)		−	+	−
g(x)		↘	↗	↘

T.E. T.M.

Συνεπώς :

- Η g παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = \rho_1$ το $g(\rho_1)$.
- Η g παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = \rho_2$ το $g(\rho_2)$.

- 1502. i.** Η $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Έτσι έχουμε :
- $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ ή } \underline{\underline{x = 2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'(x)	+	−	+	+
f(x)	↗	↘	↗	

Συνεπώς :

- − Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0]$ και $A_2 = [2, +\infty)$.

− Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_3 = [0, 2]$.

- ii.** Έχουμε $f(0) = \alpha + 1$, $f(2) = \alpha - 3$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + \alpha + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + \alpha + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, \alpha + 1],$$

$$f(A_2) = f([2, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [\alpha - 3, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([0, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} [f(2), f(0)] = [\alpha - 3, \alpha + 1].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$, αφού $\alpha+1 > 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$, αφού $\alpha-3 < 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Το $0 \in f(A_3)$, αφού $\alpha-3 < 0$ και $\alpha+1 > 0$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες, μία **αρνητική** στο $(-\infty, 0]$, μία **θετική** στο $[2, +\infty)$ και μία **θετική** στο $[0, 2]$.

1503. i. Η C_f εφάπτεται στον x' έστω σε ένα σημείο $M(x_0, 0)$, οπότε θα είναι $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$. Οπότε :

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + \alpha x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha x_0 = -x_0^3 - 2 \text{ και}$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x_0^2 = -\alpha}}.$$

- Αν $\alpha > 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 0$ τότε και $x_0 = 0$, άτοπο αφού $f(0) = 2$.
- Αν $\alpha < 0$ τότε $3x_0^2 = -\alpha \Leftrightarrow 3x_0^3 = -\alpha x_0 \Leftrightarrow \alpha x_0 = -3x_0^3$ και κάνουμε αντικατάσταση στην σχέση $\alpha x_0 = -x_0^3 - 2$:

$$\alpha x_0 = -x_0^3 - 2 \xrightarrow{\alpha x_0 = -3x_0^3} -3x_0^3 = -x_0^3 - 2 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = 1}} \text{ και}$$

$$3x_0^2 = -\alpha \Leftrightarrow 3 = -\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -3}.$$

ii. Η $f(x) = x^3 - 3x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}} \text{ ή } \underline{\underline{x = -1}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$					

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$$A_2 = [1, +\infty).$$

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [-1, 1]$.

Έχουμε $f(-1)=4$, $f(1)=0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 4],$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([-1, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(-1), f(1) \right] = [4, 0].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = \kappa$, $0 < \kappa < 4$:

- Το $\kappa \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_1 .
 - Το $\kappa \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .
 - Το $\kappa \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A_3 .
- Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες άνισες, μία στο $(-\infty, -1]$, μία στο $[1, +\infty)$ και μία στο $[-1, 1]$.

1504. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ ή } \underline{\underline{x = 2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0]$ και

$$A_2 = [2, +\infty).$$

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [0, 2]$.

Έχουμε $f(0) = a$, $f(2) = a - 4$.

$$\text{Άρα : } f(A_3) = f([0, 2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(2), f(0) \right] = [a - 4, a].$$

Θέλουμε η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + a = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ να έχει ρίζα στο $(0, 2)$, η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1 στο $(0, 2)$, οπότε πρέπει : $0 \in f(0, 2) \Leftrightarrow a - 4 < 0 < a \Leftrightarrow (a - 4 < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a < 4}})$ και $\underline{\underline{a > 0}}$.

Άρα $\boxed{0 < a < 4}$.

1505. i. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda$ η οποία έχει πεδίο ορισμού

το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6(x^2 - x + 1) > 0, \text{ αφού το τριώνυμο } x^2 - x + 1 \text{ έχει } \Delta < 0$$

οπότε θα είναι πάντα θετικό.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, άρα και 1-1.

$$\text{Έχουμε, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A) = f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει **ακριβώς μία ρίζα** στο $\mathbb{R}$, αφού $0 \in f(A)$ και η f είναι 1-1.

ii. Πρέπει να βρούμε το $f((0,1))$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda) = \lambda$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda) = 5 + \lambda, \text{ άρα :}$$

$$f((0,1)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (\lambda, 5 + \lambda).$$

Θέλουμε η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ να έχει ρίζα στο $(0,1)$, η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο $(0,1)$, οπότε πρέπει : $0 \in f((0,1)) \Leftrightarrow \lambda < 0 < 5 + \lambda \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda < 0}}$ και $(0 < 5 + \lambda \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda > -5}})$.

Άρα $\boxed{-5 < \alpha < 0}$.

1506. i. Η $f(x) = xe^{2x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = e^{2x-1} + 2xe^{2x-1} = e^{2x-1}(2x+1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x-1}(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο

$$\text{διάστημα } A_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right].$$

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο

$$\text{διάστημα } A_2 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

και

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**, το οποίο είναι και **ολικό**, στο $x = \frac{1}{2}$ το

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e^2}}.$$

ii. Έχουμε $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e^2}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x-1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{1-2x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{1-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{2x-1} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x-1}) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f\left(\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. φθ.}}}{=} \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{2e^2}, 0\right],$$

$$f(A_2) = f\left(\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν. αυξ.}}}{=} \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{2e^2}, +\infty\right).$$

α. Για να έχει λύσεις η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{8}$ πρέπει :

$$-\frac{1}{8} \geq -\frac{1}{2e^2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2e^2} \stackrel{\cdot 8e^2}{\Leftrightarrow} e^2 \leq 4, \text{ άτοπο, άρα η εξίσωση } f(x) = -\frac{1}{8} \text{ δεν έχει ρίζες στο } \mathbb{R}.$$

α. Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = a, a > 0$:

- Το $a \notin f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = a$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
- Το $a \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = a$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = a$ έχει **ακριβώς μία ρίζα** στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

1507. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\ominus$	$\ominus$	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα

διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$A_2 = [1, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = (-1, 1)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 2],$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty),$$

$$f(A_3) = f((-1, 1)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = (-2, 2).$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x^3 - 3x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$:

- Αν $\boxed{\alpha < -2}$, τότε το $\alpha \notin f(A_2)$, $\alpha \notin f(A_3)$ αλλά $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Αν $\boxed{\alpha = -2}$, τότε έχουμε :
 - Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.
- Αν $\boxed{-2 < \alpha < 2}$, τότε :
 - Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
 - Το $\alpha \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_3 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς τρεις ρίζες**.
- Αν $\boxed{\alpha = 2}$, τότε έχουμε :
 - Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.
- Αν $\boxed{\alpha > 2}$, τότε το $\alpha \notin f(A_1)$, $\alpha \notin f(A_3)$ αλλά $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

1508. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα

διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και

$$A_2 = [1, +\infty).$$

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = (-1, 1)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.αύξ.}}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 4],$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.αυξ.}}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

$$f(A_3) = f((-1, 1)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (0, 4).$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x^3 - 3x + 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$:

- Αν $\boxed{\alpha < 0}$, τότε το $\alpha \notin f(A_2)$, $\alpha \notin f(A_3)$ αλλά $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Αν $\boxed{\alpha = 0}$, τότε έχουμε :
 - Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.
- Αν $\boxed{0 < \alpha < 4}$, τότε :
 - Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

- ο Το $\alpha \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_3 . Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς τρεις ρίζες**.

• Αν $\boxed{\alpha = 4}$, τότε έχουμε :

- ο Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- ο Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 . Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.

• Αν $\boxed{\alpha > 4}$, τότε το $\alpha \notin f(A_1)$, $\alpha \notin f(A_3)$ αλλά $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

1509. i. Η $f(x) = e^{x \ln x - x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = e^{x \ln x - x} \cdot (\ln x + 1 - 1) = \ln x \cdot e^{x \ln x - x}$.

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x \cdot e^{x \ln x - x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{και} \quad \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1,$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$.

T.E.

και

- ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{e}$.

ii. Είναι : $x^x e^{-x} = \kappa \Leftrightarrow e^{\ln x^x} \cdot e^{-x} = \kappa \Leftrightarrow e^{x \ln x - x} = \kappa \Leftrightarrow f(x) = \kappa$.

Έχουμε $f(1) = \frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln x - x}) = e^{0-0} = 1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x \ln x - x}) \stackrel{u = x \ln x - x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln x - 1) = (+\infty)(+\infty - 1) = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((0,1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \left[\frac{1}{e}, 1 \right),$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[\frac{1}{e}, +\infty \right).$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = \kappa$:

- Αν $\kappa < \frac{1}{e}$, τότε $\kappa \notin f(A_1)$ και $\kappa \notin f(A_2)$, συνεπώς η εξίσωση είναι **αδύνατη**.
- Αν $\kappa = \frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{e}$ έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x=1$, αφού $f(1) = \frac{1}{e}$ και $f(x) > \frac{1}{e}$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.
- Αν $\frac{1}{e} < \kappa < 1$, τότε έχουμε :
 - ο Το $\kappa \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A_1 .
 - ο Το $\kappa \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.
- Αν $\kappa \geq 1$, τότε $\kappa \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .

iii. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ και $[1, e]$.

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{e}, 1 \right)$, οπότε σύμφωνα με

το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\frac{1}{e}, 1 \right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e} - e^{-\frac{2}{e}}}{\frac{e-1}{e}} = \frac{1 - e^{1-\frac{2}{e}}}{e-1} = \frac{1 - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}, \text{ όπου}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}} = e^{-\frac{2}{e}}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{e - 1} = \frac{\frac{e-1}{e}}{e-1} = \frac{1}{e}.$$

Έχουμε $f'(x) = \ln x \cdot e^{x \ln x - x} = f(x) \cdot \ln x$, άρα :

$$f'(\xi_1) = \frac{1 - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 = \frac{1 - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}} \text{ και}}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(\xi_2) \ln \xi_2 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \underline{\underline{ef(\xi_2) \ln \xi_2 = 1}}, \text{ οπότε προσθέτοντας τις} \\ \text{σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :}$$

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + ef(\xi_2) \ln \xi_2 = \frac{1 - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1} + 1 = \frac{\cancel{1} - e^{\frac{e-2}{e}} + e - \cancel{1}}{e-1} = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + ef(\xi_2) \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}.$$

1510. i. Είναι :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\alpha 2x}{x^4} + \frac{1}{(x-\beta)^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{1}{(x-\beta)^2}.$$

Αφού το σημείο $A\left(-2, \frac{5}{12}\right)$ ανήκει στην C_f , και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

A έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{5}{8}$, τότε παίρνουμε $f(-2) = \frac{5}{12}$ και $f'(-2) = \frac{5}{18}$,

αντίστοιχα. Άρα :

$$f(-2) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{-2-\beta} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2+\beta} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{4} = \frac{5}{12} - \frac{1}{2+\beta}}} \text{ και}$$

$$f'(-2) = \frac{5}{18} \Leftrightarrow -\frac{2\alpha}{-8} + \frac{1}{(-2-\beta)^2} = \frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{(2+\beta)^2} = \frac{5}{18} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{2+\beta} + \frac{1}{(2+\beta)^2} = \frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{(2+\beta)^2} - \frac{1}{2+\beta} + \frac{5}{36} = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 - 36(2+\beta) + 5(2+\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow 36 - 72 - 36\beta + 5(4 + 4\beta + \beta^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36 - 36\beta + 20 + 20\beta + 5\beta^2 = 0 \Leftrightarrow 5\beta^2 - 16\beta - 16 = 0.$$

$$\text{Είναι } \Delta = 576 \text{ και } \beta_{1,2} = \frac{16 \pm 24}{10} = \begin{cases} \beta_1 = 4 \\ \beta_2 = -\frac{4}{5} \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{\beta = 4} \text{ και } \frac{\alpha}{4} = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow 3\alpha = 5 - 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}.$$

ii. Η $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0, 4\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{-2(x-4)^2 + x^3}{x^3(x-4)^2} = \frac{-2(x^2 - 8x + 16) + x^3}{x^3(x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + 16x - 32}{x^3(x-4)^2} = \frac{(x-2)(x^2+16)}{x^3(x-4)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+16)}{x^3(x-4)^2}, \text{ αφού}$$

1	-2	16	-32	$\rho=2$
	2	0	32	
1	0	16	-	

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2+16)}{x^3(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \overset{x^2+16 \neq 0}{x-2=0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}. \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$x-2$	-	-	$\bigcirc$	+	+
x^3	-	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	$\bigcirc$	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, $\Delta_2 = [2, 4)$ και

$\Delta_3 = (4, +\infty)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $\Delta_4 = (0, 2)$.

T.E.

και

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=2$ το $f(2) = \frac{3}{4}$.

iii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \frac{3}{4}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = 0 - 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty + \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty + \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = \frac{1}{16} - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = \frac{1}{16} - (+\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = 0 - 0 = 0.$$

Άρα :

$$f(\Delta_1) = f((-\infty, 0)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} = (0, +\infty),$$

$$f(\Delta_2) = f([2, 4)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \right) = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right),$$

$$f(\Delta_3) = f((4, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0),$$

$$f(\Delta_4) = f((0, 2)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \left(\frac{3}{4}, +\infty \right).$$

Οπότε $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = \mathbb{R}^*$ το σύνολο τιμών της f .

iv. Έχουμε :

$$\kappa x^3 + (1-4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \stackrel{x \neq 0,4}{\Leftrightarrow} \frac{\kappa x^3}{x^2(x-4)} + \frac{(1-4\kappa)x^2}{x^2(x-4)} - \frac{x-4}{x^2(x-4)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa x}{x-4} + \frac{(1-4\kappa)}{x-4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa x}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{4\kappa}{x-4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa x - 4\kappa}{x-4} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} = \frac{\kappa(x-4)}{x-4} \Leftrightarrow f(x) = \kappa.$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = \kappa$:

- Αν $\boxed{\kappa < 0}$, τότε $\kappa \in f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_3 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_3 .
- Αν $\boxed{\kappa = 0}$, τότε $\kappa \notin f(\Delta_1)$, $\kappa \notin f(\Delta_2)$, $\kappa \notin f(\Delta_3)$ και $\kappa \notin f(\Delta_4)$, συνεπώς η εξίσωση είναι **αδύνατη**.
- Αν $\boxed{0 < \kappa < \frac{3}{4}}$, τότε $\kappa \in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_1 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_1 .
- Αν $\boxed{\kappa = \frac{3}{4}}$, τότε :
 - ο Το $\kappa \in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_1 .
 - ο Το $\kappa \in f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_2 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.
- Αν $\boxed{\kappa > \frac{3}{4}}$, τότε :
 - ο Το $\kappa \in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_1 .

- ο Το $\kappa \in f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_2 .
- ο Το $\kappa \in f(\Delta_4)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_4 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_4 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει **ακριβώς τρεις ρίζες**.

1511. i. Για να είναι η f συνεχής στο 0 πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0),$$

άρα η f είναι **συνεχής στο 0**.

ii. Η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \ln x + 1$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \text{ και}$$

$$\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow x < \frac{1}{e},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\ln x + 1$		-	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο

διάστημα $A_1 = \left[0, \frac{1}{e}\right)$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο

διάστημα $A_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Έχουμε $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right],$$

$$f(A_2) = f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ το σύνολο τιμών της f .

iii. Έχουμε :

$$x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = \alpha$:

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε $\alpha \notin f(A)$ συνεπώς η εξίσωση είναι **αδύνατη**.
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, τότε $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 . Η μοναδική ρίζα είναι το $x = \frac{1}{e}$.
- Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$, τότε :
 - ο Το $\alpha \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - ο Το $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
 Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει **ακριβώς μία ρίζα** την $x=1$.
- Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

iv. Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Επιπλέον έχουμε :

$f'(x) = \ln x + 1 \Leftrightarrow f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επομένως :

$$x < \xi < x+1 \xRightarrow{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

1512. i. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 \in (2, 3)$. Έχουμε :

- Το x_1 είναι εσωτερικό σημείο του $[2, 3]$,
- Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_1 και
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$, άρα και στο x_1 .

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_1) = 0$. Άτοπο αφού η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$ είναι η $x_0 = 3$.

Συνεπώς η f **δεν παρουσιάζει ακρότατο** στο διάστημα $(2, 3)$.

ii. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_2 \in (3, 4)$. Έχουμε :

- Το x_2 είναι εσωτερικό σημείο του $[3, 4]$,
- Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_2 και
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(3, 4)$, άρα και στο x_2 .

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_2) = 0$. Άτοπο αφού η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$ είναι η $x_0 = 3$.

Συνεπώς η f **δεν παρουσιάζει ακρότατο** στο διάστημα $(3, 4)$.

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[2, 4]$, άρα θα παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο.

Οι θέσεις των πιθανών ακροτάτων είναι :

- Τα κρίσιμα σημεία της f , που είναι :
 - το 3, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο και η μοναδική ρίζα της παραγώγου.
- Τα άκρα του διαστήματος $[2, 4]$, δηλαδή το 2 και το 4.

Είναι $f(2) = 2$, $f(3) = -1$ και $f(4) = 2$. Η μικρότερη από αυτές τις τιμές είναι το $f(3) = -1$ και η μεγαλύτερη είναι το $f(2) = f(4) = 2$.

Συνεπώς $f([2, 4]) = [-1, 2]$ το **σύνολο τιμών** της f .

iii. Παρατηρούμε πως $3 \notin [-1, 2]$, άρα η εξίσωση $f(x) = 3$ είναι αδύνατη.

iv. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[2, 3]$ και $[3, 4]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2, 3) \subseteq (2, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{-1 - 2}{1} = -3.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[3, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, 4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (3, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3. \text{ Οπότε : } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = -3 \cdot 3 = -9.$$

1513. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 13$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, 6]$ με

$g(2) = f(2) - 13$ και $g(6) = f(6) - 13 = 26 - f(2) - 13 = 13 - f(2) = -(f(2) - 13)$,
 οπότε $g(2) \cdot g(6) = -(f(2) - 13)^2 \leq 0$.

- Αν $g(2) \cdot g(6) < 0$ τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 6)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
- Αν $g(2) \cdot g(6) = 0$ τότε, είτε $g(2) = 0$ δηλαδή το $x=2$ είναι ρίζα της g στο $[2, 6)$, είτε $g(6) = 0$ δηλαδή το $x=6$ είναι ρίζα της g στο $(2, 6]$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει $x_0 \in [2, 6]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 13$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [1, 7]$.

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in [1, 7]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < f(1)$. Τότε θα έχουμε $f(x_1) < f(1) < f(4)$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, 4]$ και επιπλέον ισχύει $f(x_1) < f(1) < f(4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (x_1, 4)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = f(1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, \rho_1]$, παραγωγίσιμη στο $(1, \rho_1)$ και είναι και $f(\rho_1) = f(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, \rho_1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$ είναι η $x_0 = 4$. Όμως είναι $\xi < \rho_1 < 4$ άρα δεν μπορεί το ξ να είναι λύση της $f'(\xi) = 0$, συνεπώς κατάληξαμε σε άτοπο. Άρα $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [1, 7]$, δηλαδή το $f(1)$ είναι το **ολικό ελάχιστο** της f .

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 7]$, άρα θα παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο.

Οι θέσεις των πιθανών ακροτάτων είναι :

- Τα κρίσιμα σημεία της f , που είναι :
 - το 4, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο και η μοναδική ρίζα της παραγώγου.
 - το 5, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο στο οποίο η f δεν παραγωγίζεται.
- Τα άκρα του διαστήματος $[1, 7]$, δηλαδή το 1 και το 7.

Τα πιθανά δηλαδή ακρότατα είναι τα $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$ και $f(7)$.

Στο πρώτο ερώτημα αποδείξαμε πως υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = 13$, άρα δεν μπορούν να είναι ακρότατα τα $f(4)$ και $f(7)$ αφού υπάρχει τιμή και μεγαλύτερη και μικρότερη από αυτά. Αποδείξαμε πως το $f(1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της f , συνεπώς το $f(5)$ θα είναι το **ολικό μέγιστο** της f .

1514. i. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έτσι θα έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 1 + f(x_1) = 1 + f(x_2) \Leftrightarrow f(1 + f(x_1)) = f(1 + f(x_2)) \text{ και}$$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$, οπότε προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(1+f(x_1)) - f(x_1) = f(1+f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \Leftrightarrow$$

$$2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι } 1-1. \text{ Έχουμε :}$$

$$f(1+f(x)) - f(x) = 2x - 6 \xrightarrow{x=0} f(1+f(0)) - f(0) = -6 \Leftrightarrow f(1+5) - 5 = -6 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(6) = -1} \text{ και}$$

$$f(1+f(x)) - f(x) = 2x - 6 \xrightarrow{x=3} f(1+f(3)) - f(3) = \cancel{6} - \cancel{6} \Leftrightarrow$$

$$f(1+f(3)) = f(3) \xrightarrow{f \text{ } 1-1} 1+f(3) = 3 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 2}.$$

ii. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, 3]$ και $[3, 6]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{2 - 5}{3} = -1.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[3, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, 6)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (3, 6)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{-1 - 2}{3} = -1.$$

Είναι $\xi_1 \in (0, 3)$ και $\xi_2 \in (3, 6)$, άρα $\xi_1 \neq \xi_2$ και βρήκαμε ακόμη ότι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

Άρα η f' δεν είναι 1-1.

iii. Είναι :

$$f(1+f(x)) - f(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(1+f(x)) \cdot f'(x) - f'(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(f'(1+f(x)) - 1) = 2, \text{ δηλαδή } f'(x) \neq 0 \text{ και αφού η } f' \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R},$$

συμπεραίνουμε πως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(\xi_1) = -1 < 0$ άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot x \right) = m \cdot (-\infty) \stackrel{m < 0}{=} +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot x \right) = L \cdot (+\infty) \stackrel{L < 0}{=} -\infty.$$

$$\text{Οπότε } f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

v. Στη δοθείσα σχέση, για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f(1+f(x)) - f(x) = 2x - 6 \Leftrightarrow \frac{f(1+f(x))}{x} - \frac{f(x)}{x} = 2 - \frac{6}{x}.$$

Έτσι έχουμε :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1+f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(1+f(x))}{1+f(x)} \cdot \frac{1+f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(1+f(x))}{1+f(x)} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) \right] \\ = m \cdot (0+L) = m \cdot L,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1+f(x))}{1+f(x)} \stackrel{u=1+f(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} \frac{f(u)}{u} = m \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+f(x)) = 1 - \infty = -\infty.$$

Τέλος παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(1+f(x))}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{6}{x} \right) \Leftrightarrow m \cdot L - L = 2 - 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{m \cdot L - L = 2}}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(1+f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(1+f(x))}{1+f(x)} \cdot \frac{1+f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(1+f(x))}{1+f(x)} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) \right] \\ = L \cdot (0+m) = L \cdot m,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(1+f(x))}{1+f(x)} \stackrel{u=1+f(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{f(u)}{u} = L \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+f(x)) = 1 + \infty = +\infty.$$

Τέλος παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(1+f(x))}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{6}{x} \right) \Leftrightarrow L \cdot m - m = 2 - 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{L \cdot m - m = 2}}.$$

Βρήκαμε $m \cdot L - L = 2$ και $L \cdot m - m = 2$, οπότε αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε : ~~$m \cdot L - L - L \cdot m + m = 2 - 2$~~ $\Leftrightarrow L = m$, οπότε :

$$m \cdot L - L = 2 \stackrel{L=m}{\Leftrightarrow} L^2 - L - 2 = 0 \Leftrightarrow (L+1)(L-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{L = -1}} \text{ ή } L = 2 \text{ το οποίο απορρίπτεται αφού } L \in (-\infty, 0). \text{ Έτσι } \boxed{m = L = -1}.$$

Εύρεση προσήμου συνάρτησης

1515. i. Η $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} + e^{x-1} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $f(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι $1-1$. Οπότε :

$$- \text{Για } \boxed{0 < x < 1} \text{ έχουμε : } x < 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$- \text{Για } \boxed{x > 1} \text{ έχουμε : } x > 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

Δηλαδή η f είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $0 < x < 1$.

ii. Η $f(x) = 4x - 3\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 4 - 3\sigma\upsilon\nu x > 0$ αφού

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3\sigma\upsilon\nu x \geq -3 \Leftrightarrow 7 \geq 4 - 3\sigma\upsilon\nu x \geq 1 \Rightarrow 4 - 3\sigma\upsilon\nu x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Είναι $f(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι $\ll 1-1 \gg$. Οπότε :

$$\text{— Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

Δηλαδή η f είναι θετική για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$.

iii. Η $f(x) = 2 - 3x - 2\sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = -3 + 2\eta\mu x < 0$ αφού

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq -3 + 2\eta\mu x \leq -1 \Rightarrow -3 + 2\eta\mu x < 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = \mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Είναι $f(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι 1-1. Οπότε :

$$\text{— Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

Δηλαδή η f είναι θετική για $x < 0$ και αρνητική για $x > 0$.

iv. Η $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ (η } f' \text{ μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).}$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Είναι $f(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι 1-1. Οπότε :

$$\text{— Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

Δηλαδή η f είναι θετική για $x < 0$ και αρνητική για $x > 0$.

v. Η $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

$$\text{(άρα και συνεχής) με παράγωγο } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	$\oplus$
$f'(x)$		-	$\oplus$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x=1$, το $f(1)=0$. Δηλαδή είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Συνεπώς $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

vi. Η $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x}$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2 \frac{x^2-1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } x=-1,$$

απορρίπτεται αφού $x \in (0, +\infty)$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	1	$+\infty$
x^2-1		-	$\oplus$
x		+	+
$f'(x)$		-	$\oplus$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x=1$, το $f(1)=0$. Δηλαδή είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Συνεπώς $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

vii. Η $f(x) = \ln x - x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	$\oplus$
x		+	+
$f'(x)$		+	$\oplus$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο για $x=1$, το $f(1)=0$. Δηλαδή είναι $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Συνεπώς $\boxed{f(x) < 0}$ για κάθε $\boxed{x \in (0,1) \cup (1,+\infty)}$.

viii. Η $f(x) = e^x - e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = e - e^x$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$e - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow x < 1 \text{ και}$$

$$e - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f:$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$e - e^x$	+	$\bigcirc$	-
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο για $x=1$, το $f(1)=0$. Δηλαδή είναι $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Συνεπώς $\boxed{f(x) < 0}$ για κάθε $\boxed{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)}$.

1516. i. Η $f(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A = \mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Είναι $f(1) = 0$, άρα το $x=1$ είναι **ρίζα** της $f(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι 1-1. Οπότε :

$$\text{-- Για } \boxed{x < 1} \text{ έχουμε : } x < 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$\text{-- Για } \boxed{x > 1} \text{ έχουμε : } x > 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

Δηλαδή η f είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $x < 1$.

ii. Έχουμε :

$$1 + \ln(3-2x) < x \Leftrightarrow \ln(3-2x) < x-1 \Leftrightarrow \ln(3-2x) < \ln e^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$3-2x < e^{x-1} \Leftrightarrow e^{x-1} + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Όμως πρέπει και } 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}, \text{ άρα } \boxed{1 < x < \frac{3}{2}}.$$

1517. i. Η $g(x) = e^x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Είναι $g(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι 1-1.

Οπότε :

$$- \text{Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

$$- \text{Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

δηλαδή η g είναι θετική για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$.

ii. Είναι :

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x - 1 \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = e^x + x - 1 \Leftrightarrow$$

$$3f'(x)(f^2(x) + 1) = e^x + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x + x - 1}{3(f^2(x) + 1)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{3(f^2(x) + 1)}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{3(f^2(x) + 1)} = 0 \stackrel{3(f^2(x) + 1) \neq 0}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0, +\infty)$.

1518. i. Η $g(x) = \ln x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, άρα και $1 - 1$.

Είναι $g(1) = 0$, άρα το $x = 1$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι $1 - 1$. Οπότε :

$$- \text{Για } \boxed{0 < x < 1} \text{ έχουμε : } x < 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

$$- \text{Για } \boxed{x > 1} \text{ έχουμε : } x > 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

δηλαδή η g είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $0 < x < 1$.

ii. Η $f(x) = \frac{2 + x \ln x}{1 + x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1) \cdot (1 + x) - (2 + x \ln x)}{(1 + x)^2} = \frac{\ln x + 1 + \cancel{x \ln x} + x - 2 - \cancel{x \ln x}}{(1 + x)^2} =$$

$$= \frac{\ln x + x - 1}{(1 + x)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x)^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{(1+x)^2}=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		–	+
$f'(x)$		–	+
$f(x)$		↘	↗

Συνεπώς :

ο $H f$ παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)=1$.

T.E.

- 1519. i.** Η $f(x)=2x-\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x)=2-\sigma\upsilon\nu x > 0$, αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sigma\upsilon\nu x \geq -1 \Leftrightarrow 3 \geq 2-\sigma\upsilon\nu x \geq 1 \Rightarrow 2-\sigma\upsilon\nu x > 0$.

Συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A=(0, +\infty)$, άρα και $1-1$, οπότε **δεν έχει ακρότατα**.

Είναι $f(0)=0$, άρα το $x=0$ είναι **ρίζα** της $f(x)=0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι $1-1$. Οπότε :

$$\text{– Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$\text{– Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

δηλαδή η f είναι θετική για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$.

- ii.** Η $g(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu x-1$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x)=2x-\eta\mu x=f(x)$. Έτσι έχουμε :

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας –}$$

ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	–	+	+
$f'(x)$	–	+	+
$f(x)$	↘		↗

Συνεπώς :

– Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

– Η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0, +\infty)$.

T.E.

και

$$\text{ο } H g \text{ παρουσιάζει } \textbf{ολικό ελάχιστο} \text{ στο } x=0 \text{ το } \boxed{g(0)=0}.$$

- 1520. i.** Η $f(x)=e^x-ex$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x)=e^x-e$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e=0 \Leftrightarrow e^x=e \Leftrightarrow \underline{x=1}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$e^x-e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$e^x - e$	–	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	–	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

T.E.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό **ελάχιστο**, το οποίο είναι και ολικό, στο $x=1$ το

$$\boxed{f(1)=0}.$$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x=1$, το $f(1)=0$. Δηλαδή είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Το $x=1$ είναι η **μοναδική ρίζα** της f .

Συνεπώς $\boxed{f(x) > 0}$ για κάθε $\boxed{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)}$.

ii. Η $g(x) = 2e^{x-1} - x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2e^{x-1} - 2x = 2(e^{x-1} - x) = 2\left(\frac{e^x}{e} - x\right) = 2\frac{e^x - ex}{e} = 2\frac{f(x)}{e} > 0, \text{ για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{1\}, \text{ με } g'(1) = 0.$$

Συνεπώς η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A = \mathbb{R}$.

1521. i. Η $g(x) = x - \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	1	$+\infty$
x		+	+
$x-1$		–	$\bigcirc$
$g'(x)$		–	$\bigcirc$
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

T.E.

- ο Η g παρουσιάζει ολικό **ελάχιστο** στο $x=1$ το $\boxed{g(1)=1}$.

ii. Η $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^x \cdot \ln x + \frac{1}{x} e^x = \frac{1}{x^2} e^x (x - \ln x) = \frac{1}{x^2} e^x g(x).$$

Για την $g(x)$ έχουμε :

Αφού το $g(1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της g τότε θα είναι :

$$g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επιπλέον είναι $\frac{1}{x^2} > 0$ και $e^x > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \cdot \ln x \right) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0}} e^u = 1, \text{ άρα}$$

$$f(A) = f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{f(A) = \mathbb{R}} \text{ το}$$

σύνολο τιμών της f .

1522. i. Η $g(x) = x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2x - 2x \ln(x^2 + 1) - 2x = -2x \ln(x^2 + 1).$$

Έτσι έχουμε : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$ ή

$$(\ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=0})$$

Επιπλέον είναι :

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \geq 0, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	+	$\bigcirc$	-
$\ln(x^2 + 1)$	+	$\bigcirc$	+
$g'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

- Η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

- Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο για $x=0$, το $g(0) = 0$. Δηλαδή είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Το $x=0$ είναι η **μοναδική ρίζα** της g .

Συνεπώς $\boxed{g(x) < 0}$ για κάθε $\boxed{x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$.

ii. Η $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot x^2 - 2x \ln(x^2+1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x(x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^4} = \\ &= 2x \frac{x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^4(x^2+1)} = 2x \frac{g(x)}{x^4(x^2+1)} = \frac{2g(x)}{x^3(x^2+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2g(x)}{x^3(x^2+1)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$
x^3	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1523. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) , άρα και 1–1. Επίσης είναι $f'(a) = 0$ άρα το $x=a$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Άρα :

$$x > a \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(a) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (a, \beta), \text{ άρα και 1–1.}$$

Τέλος έχουμε $f(\beta) = 0$ άρα το $x=\beta$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

$$\text{Άρα : } x < \beta \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\beta) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0} \text{ για κάθε } x \in (a, \beta).$$

1524. Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, β) , άρα και 1–1.

Επίσης είναι $f'(\beta) = 0$ άρα το $x=\beta$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Άρα :

$$x < \beta \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\beta) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (a, \beta), \text{ άρα και 1–1.}$$

Τέλος έχουμε $f(a) = 0$ άρα το $x=a$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

$$\text{Άρα : } x > a \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(a) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in (a, \beta).$$

1525. Η C_f εφάπτεται στον $x'x$ στο $x_0 = 1$, άρα $f(1) = 0$ και $f'(1) = 0$.

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Αφού είναι $f'(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Άρα :

$$- \text{ Αν } x < 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (-\infty, 1].$$

$$- \text{ Αν } x > 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [1, +\infty).$$

Τέλος έχουμε και $f(1) = 0$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f . Έτσι :

$$- \text{ Αν } x < 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ και}$$

$$- \text{ Αν } x > 1 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0.$$

Άρα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \neq 1$.

1526. i. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, +\infty)$, άρα και $1-1$. Επίσης είναι $f'(a) = 0$ άρα το $x=a$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Άρα :

$$x > a \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(a) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (a, +\infty), \text{ άρα και } 1-1. \text{ Τέλος έχουμε } f(a) = 0 \text{ άρα το } x=a \text{ είναι η μοναδική ρίζα της } f.$$

$$\text{Άρα : } x > a \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(a) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in (a, +\infty).$$

ii. Η ανίσωση γίνεται : $2x \ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x \ln x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$. Είναι :

$$g(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x \Rightarrow g'(x) = 2x - 2 \ln x - 2 \Rightarrow g''(x) = 2 - \frac{2}{x} = 2 \frac{x-1}{x} > 0,$$

αφού $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$. Επιπλέον είναι $g(1) = 0$ και $g'(1) = 0$.

Έτσι έχουμε $g(1) = g'(1) = 0$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, οπότε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x \ln x > 0 \Leftrightarrow 2x \ln x < x^2 - 1.$$

1527. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Αφού είναι $f''(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f'' . Άρα :

$$- \text{ Αν } x < 1 \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(1) \Leftrightarrow f''(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (-\infty, 1].$$

- Αν $x > 1 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(1) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Αφού είναι $f'(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

- Για $x < 1$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα :
 $x < 1 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.
- Για $x > 1$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :
 $x > 1 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Τέλος έχουμε και $f(1) = 0$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f . Έτσι :

- Αν $x < 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και
- Αν $x > 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Όλα αυτά συνοψίζονται στον διπλανό πίνακα :
 Δηλαδή η f είναι αρνητική για $x < 1$ και θετική για $x > 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'''(x)$	+		+
$f''(x)$	- ↗	○	↗ +
$f'(x)$	+ ↘	○	↗ +
$f(x)$	- ↗	○	↗ +

1528. i. Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$, και άρα $1-1$.

Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και είναι και $f(a) = f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Η f' είναι $1-1$ συνεπώς αυτό το $\xi \in (a, \beta)$ είναι μοναδικό.

ii. Είναι $f'(\xi) = 0$ άρα το $x=\xi$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Άρα :

- Αν $x < \xi \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \xi]$.
- Αν $x > \xi$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\xi, \beta]$.

Τέλος έχουμε και $f(a) = f(\beta) = 0$, έτσι :

- Αν $a < x \leq \xi \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(a) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και
- Αν $\xi \leq x < \beta \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(\beta) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Άρα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

1529. i. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, και άρα $1-1$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και είναι και $f(0) = f(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Η f' είναι $1-1$ συνεπώς αυτό το $\xi \in (0, 1)$ είναι μοναδικό.

ii. Είναι $f'(\xi) = 0$ άρα το $x = \xi$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Άρα :

- Αν $x < \xi$ $\overset{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \xi)$.
- Αν $x > \xi$ $\overset{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\xi, 1]$.

Τέλος έχουμε και $f(0) = f(1) = 0$, έτσι :

- Αν $0 < x \leq \xi$ $\overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(0) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και
- Αν $\xi \leq x < 1$ $\overset{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Άρα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

1530. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$, και άρα $1-1$.

Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και είναι και $f(a) = f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Η f' είναι $1-1$ συνεπώς αυτό το $\xi \in (a, \beta)$ είναι μοναδικό.

Είναι $f'(\xi) = 0$ άρα το $x = \xi$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Άρα :

- Αν $x < \xi$ $\overset{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \xi)$.
- Αν $x > \xi$ $\overset{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\xi, \beta]$.

Τέλος έχουμε και $f(a) = f(\beta) = 1$, έτσι :

- Αν $a < x \leq \xi$ $\overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(a) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 1$ και
- Αν $\xi \leq x < \beta$ $\overset{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\beta) \Leftrightarrow f(x) < 1$.

Άρα είναι $f(x) < 1$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

1531. Έστω ότι υπάρχει $x \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x) > 0$. Τότε θα έχουμε :

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, και άρα 1-1.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και είναι και $f(\alpha) = f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Η f' είναι 1-1 συνεπώς αυτό το $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι μοναδικό.

Είναι $f'(\xi) = 0$ άρα :

$$- \text{ Αν } x < \xi \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [\alpha, \xi].$$

$$- \text{ Αν } x > \xi \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (\xi, \beta].$$

Τέλος έχουμε και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, έτσι :

$$- \text{ Αν } \underline{\alpha} < x \leq \xi \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ και}$$

$$- \text{ Αν } \xi \leq x < \underline{\beta} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\beta) \Leftrightarrow f(x) < 0.$$

Άρα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αποπο αφού πρέπει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x) \leq 0$.

1532. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, και άρα 1-1.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και είναι και $f(\alpha) = f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Η f' είναι 1-1 συνεπώς αυτό το $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι μοναδικό.

Είναι $f'(\xi) = 0$ και $\xi \in (\alpha, \beta)$, άρα :

$$\alpha < \xi \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\alpha) < 0 \text{ και}$$

$$\xi < \beta \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\beta) > 0.$$

Συνεπώς $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) < 0$.

1533. i. Αφού είναι $f''(x) \neq 0$ τότε $f''(x) < 0$ ή $f''(x) > 0$, δηλαδή η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα αντίστοιχα. Οπότε η f' θα είναι γνησίως μονότονη στο $[0, 2]$ και άρα 1-1. Είναι :

$$f(x) = f(2-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(2-x) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = -f'(1) \Leftrightarrow 2f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$f'(1) = 0$, δηλαδή το $x=1$, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού, θα είναι ρίζα της f' , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f' είναι $1-1$.

ii. Αν $f''(x) < 0$ τότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$. Είναι :

$x < 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, οπότε :

$0 < 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(0) < f(1)$, άτοπο αφού $f(0) > f(1)$, συνεπώς είναι $f''(x) > 0$.

Έτσι έχουμε :

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Αφού είναι $f'(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

- $x < 1 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0, 1]$.
- $x > 1 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1, 2]$.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα :

x	0	1	2
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$		- ↗	↘ +
$f(x)$		↘	↗

Παρατηρούμε πως η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x=0$ το $f(0)$ και στο $x=2$ το $f(2)$ και **ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)$.

Επίσης είναι $f(x) = f(2-x) \stackrel{x=2}{\Rightarrow} f(2) = f(0)$.

1534. i. Αν $f'(a) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε θα είναι και $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$,

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) - f(a)) > 0$, αφού $x - a > 0$.

Συνεπώς κοντά στο a θα είναι $f(x) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(a)$, άτοπο αφού το $f(a)$ είναι μέγιστο.

Άρα $\boxed{f'(a) \leq 0}$.

ii. Αν $f'(\beta) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε θα είναι και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} > 0$,

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \beta^-} (f(x) - f(\beta)) < 0$, αφού $x - \beta < 0$.

Συνεπώς κοντά στο β θα είναι $f(x) - f(\beta) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\beta)$, άτοπο αφού το $f(\beta)$ είναι ελάχιστο.

Άρα $\boxed{f'(\beta) \leq 0}$.

Όταν για την εύρεση της μονοτονίας μιας f απαιτείται η $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$...

1535. i. Η $f(x) = 4e^x + x^4 + 6x^2 - 4x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους $f'(x) = 4e^x + 4x^3 + 12x - 4$ και $f''(x) = 4e^x + 12x^2 + 12 > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Έτσι :

– Για $x < 0$ $\stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 0]$.

– Για $x > 0$ $\stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

ii. Η $f(x) = -4\eta\mu x - 3x^2 + 4x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους $f'(x) = -4\sigma\upsilon\eta x - 6x + 4$ και $f''(x) = 4\eta\mu x - 6 = 4\left(\eta\mu x - \frac{3}{2}\right) < 0$, αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Έτσι :

– Για $x < 0$ $\stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 0]$.

– Για $x > 0$ $\stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0, +\infty)$.

iii. Η $f(x) = e^{2x}(x-1)^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$f'(x) = 2e^{2x}(x-1)^2 + 2e^{2x}(x-1) = 2xe^{2x}(x-1)$. Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{2x}(x-1) = 0 \stackrel{e^{2x} \neq 0}{\Leftrightarrow} (2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}) \text{ ή } (x-1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}})$,

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	Φ	$+$
$2x$	$-$	Φ	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	Φ	$-$	Φ
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E. $\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[0, 1]$.

iv. Η $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-2} - 2x \ln x + x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = e^{2x-2} - 2\ln x - 1, \quad f''(x) = 2e^{2x-2} - \frac{2}{x} \text{ και}$$

$$f'''(x) = 4e^{2x-2} + \frac{2}{x^2} > 0, \text{ άρα η } f'' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα και}$$

1-1. Είναι $f''(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f'' . Έτσι :

$$- \text{ Για } 0 < x < 1 \xrightarrow{f'' \text{ γν. αύξ.}} f''(x) < f''(1) \Leftrightarrow f''(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, 1].$$

$$- \text{ Για } x > 1 \xrightarrow{f'' \text{ γν. αύξ.}} f''(x) > f''(1) \Leftrightarrow f''(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty).$$

Αφού είναι $f'(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

- Για $0 < x < 1$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα :

$$0 < x < 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. φθ.}} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, 1].$$

- Για $x > 1$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$x > 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty).$$

Αφού η f είναι συνεχής τότε συμπεραίνουμε πως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$.

1536. Η $f(x) = 2\sin x - \frac{x^4}{12}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = 2\eta\mu x - \frac{x^3}{3}, \quad f''(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x^2 \text{ και } f'''(x) = 2\eta\mu x - 2x = 2(\eta\mu x - x).$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \underline{\underline{\eta\mu x}} < x \Rightarrow \eta\mu x - x < 0$, άρα η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Έτσι εφόσον είναι $f''(0) = -2$ έχουμε :

$$- \text{ Για } x > 0 \xrightarrow{f'' \text{ γν. φθ.}} f''(x) < f''(0) \Rightarrow f''(x) < -2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0, +\infty)$$

- Για $x > 0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα :

$$x > 0 \xrightarrow{f' \text{ γν. φθ.}} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0, +\infty).$$

1537. i. Η $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 2\ln x + 2 - 2x = 2(\ln x - x + 1).$$

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα είναι $f'(x) \leq 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $f(1) = 0$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f . Έτσι :

$$- \text{ Για } \boxed{0 < x < 1} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Rightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0} \text{ και}$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 1} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

ii. Είναι :

$$2\ln x = \frac{x^2 - 1}{x} \Leftrightarrow 2x \ln x = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x \ln x - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x = 1}.$$

iii. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι :

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow 2x \ln x - x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x \ln x > x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

αφού $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \underline{x^2} < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$. Για κάθε $x > 1$ είναι :

$$x > 1 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x \ln x - x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x \ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2},$$

αφού $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$.

Άρα είναι $\boxed{\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

1538. i. Η $g(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2x - 2\ln x - 2 = -2(\ln x - x + 1).$$

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα είναι $g'(x) \geq 0$, δηλαδή η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $g(1) = 0$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της g . Έτσι :

$$- \text{ Για } \boxed{0 < x < 1} \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0} \text{ και}$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 1} \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

ii. Η $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} - \ln^2 x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x-1)^2}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{(x-1)(2x-x+1)}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{x^2-1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{x^2-1-2x\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	ϕ +
$f'(x)$		-	ϕ +
$f(x)$		$\searrow$ O.E. $\nearrow$	

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0,1]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** μόνο για $x=1$, το $f(1)=0$.

iii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, δηλαδή $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$. Συνεπώς έχουμε :

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} - \ln^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq \ln^2 x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{(x-1)^2 \geq x \ln^2 x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

iv. Είναι $f(1)=0$, οπότε έχουμε :

$$- \text{ Για } 0 < \underline{x \leq 1} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Rightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ και}$$

$$- \text{ Για } x > 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

Συνεπώς ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ με $f(1)=0$. Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι το **$x=1$** .

1539. i. Η $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 2x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} - 2, \quad f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2} \text{ και}$$

$$f'''(x) = e^{x-1} + \frac{2}{x^3} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f'' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0,+\infty)$$

άρα και 1-1. Είναι $f''(1)=0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f'' . Έτσι :

$$- \text{ Για } 0 < \underline{x \leq 1} \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f''(x) < f''(1) \Leftrightarrow f''(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0,1].$$

$$- \text{ Για } x > 1 \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(1) \Leftrightarrow f''(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1,+\infty).$$

Αφού είναι $f'(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

- Για $0 < x < 1$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα :

$$x < 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } (0, 1].$$

- Για $x > 1$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$x > 1 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } [1, +\infty).$$

Αφού η f είναι συνεχής τότε συμπεραίνουμε πως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$.

Τέλος είναι και $f(1) = 0$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f και έχουμε :

$$- \text{ Για } \boxed{0 < x < 1} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 1} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

ii. Είναι :

$$e^{x-1} + \ln x = 2x - 1 \Leftrightarrow e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \stackrel{i.}{\Leftrightarrow} \boxed{x = 1}.$$

iii. Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > 0$. Συνεπώς :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > 2x - 1 - \ln x \stackrel{e^{1-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$1 > (2x - 1 - \ln x)e^{1-x} \Leftrightarrow \boxed{(2x - 1 - \ln x)e^{1-x} < 1}.$$

1540. i. Η $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ και } f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$(-1, +\infty)$, άρα και $1-1$. Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Έτσι :

$$- \text{ Για } -1 < x < 0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως} \\ \text{φθίνουσα στο } A_1 = (-1, 0].$$

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } A_2 = [0, +\infty).$$

Άρα η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** για $x=0$, το $f(0) = 0$.

ii. Έχουμε $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^x - \ln(x+1) - 1) = e^{-1} - (-\infty) - 1 = +\infty$,
αφού για $x \rightarrow -1^+$ είναι $x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x+1 \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(x+1) \rightarrow -\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln(x+1) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) =$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = 0.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-1, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

iii. Είναι $f(0) = 0$ έτσι έχουμε :

$$- \text{ Για } \boxed{-1 < x < 0} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 0} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

Συνεπώς ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι το $x = 0$.

iv. Έχουμε :

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \leq 0.$$

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $0 < x \neq 1$ συνεπώς έχουμε :

$$f(2\alpha+\beta-1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta-1 = 0 \text{ και } f(\alpha+2\beta-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha+2\beta-2 = 0.$$

Άρα :

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=1 \\ \alpha+2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha-2\beta=-2 \\ \alpha+2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha=0 \\ \alpha+2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha+2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha=0} \\ \boxed{\beta=1} \end{cases}.$$

1541. i. Η $f(x) = x^2 + x \ln x - \ln x - 2x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = 2x + \ln x + 1 - \frac{1}{x} - 2 = 2x + \ln x - \frac{1}{x} - 1 \text{ και}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $f'(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Έτσι :

– Για $0 < x < 1 \xrightarrow{f' \text{ γν.αύξ.}} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $A_1 = (0, 1]$.

– Για $x > 1 \xrightarrow{f' \text{ γν.αύξ.}} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A_2 = [1, +\infty)$.

ii. Έχουμε $f(1) = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x \ln x - \ln x - 2x) = 0 + 0 - (-\infty) - 0 = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \ln x - \ln x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 + \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x} \right) \right] =$$

$$= (+\infty)(1 + 0 - 0 - 0) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((0, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

iii. Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
 - Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .
- Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.

1542. i. Η $f(x) = x^2(2 \ln x - 3) + 4x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = 2x(2 \ln x - 3) + 2x + 4 = 4x \ln x - 4x + 4,$$

$$f''(x) = 4 \ln x + 4 - 4 = 4 \ln x \text{ και}$$

$$f'''(x) = \frac{4}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f'' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα}$$

και $1-1$. Είναι $f''(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f'' . Έτσι :

- Για $0 < x < 1 \xrightarrow{f'' \text{ γν. αὐξ.}} f''(x) < f''(1) \Leftrightarrow f''(x) < 0$, δηλαδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.
- Για $x > 1 \xrightarrow{f'' \text{ γν. αὐξ.}} f''(x) > f''(1) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Αφού είναι $f'(1) = 0$ τότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

- Για $0 < x < 1$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα :
 $x < 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. φθ.}} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.
- Για $x > 1$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :
 $x > 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Αφού η f είναι συνεχής τότε συμπεραίνουμε πως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$.

ii. Τέλος είναι και $f(1) = 0$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f και έχουμε :

- Για $0 < x < 1 \xrightarrow{f \text{ γν. αὐξ.}} f(x) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}$.
- Για $x > 1 \xrightarrow{f \text{ γν. αὐξ.}} f(x) > f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}$.

1543. i. Η $f(x) = x^2 - \sin x + \beta$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = 2x + \eta\mu x \text{ και}$$

$f''(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x > 0$, αφού είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1. Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Έτσι :

- Για $x < 0 \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0]$.
- Για $x > 0 \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** για $x=0$, το $f(0) = \beta - 1$.

ii. Έχουμε $f(0) = \beta - 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin x + \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \sin x + \frac{\beta}{x^2} \right) = (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty,$$

όπου

$$|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} \right| |\sin x| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} \sin x \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \sin x \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|,$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x^2} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x^2} \right| = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο**

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \sin x \right) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη),

και όμοια αποδεικνύεται πως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [\beta - 1, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [\beta - 1, +\infty).$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0$:

- Αν $\beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta > 1}$, τότε το $0 \notin f(A_1)$ και $0 \notin f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

- Αν $\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$, τότε έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς μία ρίζα, την $x=0$** .

- Αν $\beta - 1 < 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta < 1}$, τότε έχουμε :

- ο Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- ο Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες**.

1544. A. i. Η $g(x) = \frac{2x}{e^x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

$$\text{συνεχής) με παράγωγο : } g'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{2(1-x)}{e^x}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$\oplus$	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

– Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο

διάστημα $[1, +\infty)$.

- ο Η g παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x=1$ το $\boxed{g(1) = \frac{2}{e}}$.

ii. Αφού η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=1$, τότε είναι :

$$g(x) \leq g(1) \Rightarrow \frac{2x}{e^x} \leq \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \frac{2x}{e^x} < 1 \Leftrightarrow \boxed{e^x > 2x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B. i. Η $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = e^x - x^2 - 1 \text{ και}$$

$$f''(x) = e^x - 2x > 0, \text{ λόγω του A.ii., άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και}$$

1-1. Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Έτσι :

$$- \text{ Για } x < 0 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι } \textbf{γνησίως} \\ \textbf{φθίνουσα} \text{ στο } A_1 = (-\infty, 0].$$

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι } \textbf{γνησίως} \\ \textbf{αύξουσα} \text{ στο } A_2 = [0, +\infty).$$

Παρατηρούμε πως η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=0$ το $\boxed{f(0)=0}$.

ii. Έχουμε $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1 \right) = 0 - (-\infty) - (-\infty) - 1 = +\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x^3}{3e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right] = \\ = (+\infty) \cdot (1 - 0 - 0 - 0) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{3e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{3e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{3e^x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=}} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=}} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)}$ το **σύνολο τιμών** της f .

iii. Είναι $e^{2x} > 0$ και $4x^2 + 1 > 0$ οπότε :

$$f(e^{2x}) < f(4x^2 + 1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{2x} < 4x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 4x^2 - 1 < 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{2x} - 4x^2 - 1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$h'(x) = 2e^{2x} - 8x = 2(e^{2x} - 4x) = 2(e^{2x} - 2 \cdot 2x) > 0, \text{ λόγω του A.ii., άρα η } h \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1. Έχουμε :

$$e^{2x} - 4x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{x < 0}.$$

1545. i. Η $f(x) = (x-1)\ln x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty),$$

άρα και $1-1$. Είναι $f'(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Έτσι :

– Για $0 < x < 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\Delta_1 = (0, 1]$.

– Για $x > 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

Έχουμε $f(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x - 1] = -1 \cdot (-\infty) - 1 = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)\ln x - 1] = (+\infty)(+\infty) - 1 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(\Delta_1) = f((0, 1]) \xrightarrow[f \text{ γν. φθ.}]{f \text{ συνεχής}} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty),$$

$$f(\Delta_2) = f([1, +\infty)) \xrightarrow[f \text{ γν. αὐξ.}]{f \text{ συνεχής}} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Οπότε $\boxed{f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)}$ το **σύνολο τιμών** της f .

ii. Είναι :

$$x^{x-1} = e^{2013} \xrightarrow{x>0} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012.$$

Ελέγχουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 2012$:

- Το $2012 \in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_1 στο Δ_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_1 .
- Το $2012 \in f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_2 στο Δ_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο Δ_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει **ακριβώς δύο θετικές ρίζες** x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, όπου $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) + f(x) - 2012$, $x > 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με

$$g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) + \cancel{2012} - \cancel{2012} = f'(x_1) < 0 \text{ αφού } x_1 \in (0, 1)$$

$$\text{και } g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) + \cancel{2012} - \cancel{2012} = f'(x_2) > 0 \text{ αφού}$$

$x_2 \in (1, +\infty)$, οπότε $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$. Έτσι σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Εύρεση μονοτονίας με χρήση βοηθητικής συνάρτησης

1546. i. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x - x}{x^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 - \ln x - x$, $x > 0$ με παράγωγο $g'(x) = -\frac{1}{x} - 1 < 0$,

για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1 - 1$.

Είναι $g(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της g . Έτσι :

– Για $0 < x < 1$ ^{g γν.φθ.} $\Rightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

– Για $x > 1$ ^{g γν.φθ.} $\Leftrightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ με $x^2 > 0$. Έτσι :

- για $0 < x < 1$ έχουμε $g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, 1]$.

- για $x > 1$ έχουμε $g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[1, +\infty)$.

ii. Η $f(x) = \frac{2+x \ln x}{1+x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1+x) - (2+x \ln x)}{(1+x)^2} = \frac{\ln x + \cancel{x \ln x} + 1 + x - 2 - \cancel{x \ln x}}{(1+x)^2} = \frac{\ln x + x - 1}{(1+x)^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$ με παράγωγο $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$,

για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1 - 1$.

Είναι $g(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της g . Έτσι :

– Για $0 < x < 1$ ^{g γν.αύξ.} $\Rightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

– Για $x > 1$ ^{g γν.αύξ.} $\Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$ με $(1+x)^2 > 0$. Έτσι :

- για $0 < x < 1$ έχουμε $g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{(1+x)^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1]$.
- για $x > 1$ έχουμε $g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{(1+x)^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1, +\infty)$.

iii. Η $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - 1 - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = -xe^x$.

Είναι $g'(0) = 0$. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις :

– Για $x < 0$ είναι $g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Έτσι έχουμε : $x < 0 \xrightarrow{g \text{ γν.αύξ.}} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

– Για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Έτσι έχουμε : $x > 0 \xrightarrow{g \text{ γν.φθ.}} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$ με $(e^x - 1)^2 > 0$. Έτσι :

- για $x < 0$ έχουμε $g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 0)$.
- για $x > 0$ έχουμε $g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$.

iv. Η $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$, $x > -1$ με παράγωγο
 $g'(x) = 1 - \ln(x+1) - 1 = -\ln(x+1)$.

Είναι $g'(0) = 0$. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις :

– Για $-1 < x \leq 0$ είναι $x+1 < 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 0 \Leftrightarrow -\ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$,
 δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0)$.

Έτσι έχουμε : $-1 < x \leq 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

– Για $x > 0$ είναι $x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x+1) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$,
 δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Έτσι έχουμε : $x > 0 \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x+1)}$ με $x^2(x+1) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Έτσι :

- για $-1 < x < 0$ έχουμε $g(x) < 0 \stackrel{x^2(x+1) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{x^2(x+1)} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$,

δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1, 0)$.

- για $x > 0$ έχουμε $g(x) < 0 \stackrel{x^2(x+1) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{x^2(x+1)} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή

η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$.

v. Η $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{2\ln x}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x - 2x \ln x}{4x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x - 2x \ln x}{8x^2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2 - \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x - 2 + \ln x$, $x > 0$ με παράγωγο $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$

, για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $g(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της g . Έτσι :

– Για $0 < x < 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

– Για $x > 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$ με $4x\sqrt{x} > 0$ για κάθε $x > 0$. Έτσι :

- για $0 < x < 1$ έχουμε $g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1]$.
- για $x > 1$ έχουμε $g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1, +\infty)$.

1547. i. Η $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{2\ln x}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x - 2x \ln x}{4x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x - 2x \ln x}{8x^2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2 - \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση}$$

$$g(x) = 2x - 2 + \ln x, \quad x > 0 \text{ με παράγωγο } g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0,$$

για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1 - 1$.

Είναι $g(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της g . Έτσι :

$$- \text{ Για } 0 < \underset{\substack{\text{g γν.αύξ.}}}{x} < 1 \Rightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0.$$

$$- \text{ Για } x > 1 \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{g γν.αύξ.}}}{g(x)} > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0.$$

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$ με $4x\sqrt{x} > 0$ για κάθε $x > 0$. Έτσι :

- για $0 < x < 1$ έχουμε $g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1]$.
- για $x > 1$ έχουμε $g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x > 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα, έτσι έχουμε :

$$f(x) > f(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} \ln x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \ln \sqrt{x} > \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ln \sqrt{x} < x - \sqrt{x}}.$$

1548. i. Η $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 1)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1-x) + x \ln x}{(1-x)^2} = \frac{\ln x + 1 - x}{(1-x)^2}$.

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Έτσι για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε :

$$\ln x < x - 1 \Leftrightarrow \ln x + 1 - x < 0 \stackrel{(1-x)^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x + 1 - x}{(1-x)^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f$$

είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1)$.

ii. Για κάθε $0 < \alpha < \beta < 1$ είναι :

$$\alpha < \beta \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha} > \frac{\beta \ln \beta}{1-\beta} \stackrel{\substack{1-\alpha > 0 \\ 1-\beta > 0}}{\Leftrightarrow} \alpha(1-\beta) \ln \alpha > \beta(1-\alpha) \ln \beta \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha^{\alpha(1-\beta)} > \ln \beta^{\beta(1-\alpha)} \Leftrightarrow \boxed{\alpha^{\alpha(1-\beta)} > \beta^{\beta(1-\alpha)}}.$$

1549. i. Η $f(x) = \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sin^2 x} - \varepsilon \varphi x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{\eta \mu x}{\sin x}}{x^2} = \frac{x - \eta \mu x \sin x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{2x - 2\eta \mu x \sin x}{2x^2 \sin^2 x} =$$

$$= \frac{2x - \eta \mu 2x}{2x^2 \sin^2 x}.$$

Είναι $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Έτσι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και θέτοντας όπου x το $2x$, έχουμε $2x - \eta \mu 2x > 0$, οπότε

$$f'(x) = \frac{2x - \eta \mu 2x}{2x^2 \sin^2 x} > 0 \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι } \mathbf{\text{γνησίως αύξουσα}}$$
 στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii. Για κάθε $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ είναι :

$$\alpha < \beta \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon \varphi \alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon \varphi \beta}{\beta} \stackrel{\substack{\varepsilon \varphi \beta > 0 \\ \alpha > 0}}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{\varepsilon \varphi \alpha}{\varepsilon \varphi \beta} < \frac{\alpha}{\beta}}.$$

1550. i. Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} e^x = 1 = f(0)$, δηλαδή η f είναι **συνεχής** στο $x_0 = 0$ και άρα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Έτσι για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = xe^x$.

Είναι $g'(0) = 0$. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις :

– Για $x < 0$ είναι $g'(x) < 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Έτσι έχουμε : $x < 0 \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

– Για $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έτσι έχουμε : $x > 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ με $x^2 > 0$. Έτσι :

- για $x < 0$ έχουμε $g(x) > 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 0]$.
- για $x > 0$ έχουμε $g(x) > 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii. Είναι :

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2 = \left(x \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e \right)^2 (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 (x - 2)^2.$$

Η $g(x) = (e^x - e)^2 (x - 2)^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(e^x - e)e^x (x - 2)^2 + 2(x - 2)(e^x - e)^2 = \\ &= 2(x - 2)(e^x - e) \left[e^x (x - 2) + (e^x - e) \right] = \\ &= 2(x - 2)(e^x - e)(xe^x - 2e^x + e^x - e) = 2(x - 2)(e^x - e)(xe^x - e^x - e). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = xe^x - e^x - e$, $x > 0$ με παράγωγο $h'(x) = xe^x > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι :

$h(1) = -e < 0$ και $h(2) = e^2 - e > 0$, δηλαδή $h(1) \cdot h(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.

Όμως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα το $x_1 \in (1, 2)$ είναι μοναδικό στο $(0, +\infty)$. Έτσι έχουμε :

$$0 < x < x_1 \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0 \text{ και}$$

$$x > x_1 \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0.$$

$$\text{Είναι : } g'(x) = 2(x - 2)(e^x - e)(xe^x - e^x - e) = 2(x - 2)(e^x - e)h(x).$$

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(e^x - e)h(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}} \text{ ή } (e^x = e \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}) \text{ ή}$$

$$(h(x)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}).$$

Επιπλέον είναι :

$$e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$e^x - e < 0 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow x < 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } g :$$

x	0	1	x_1	2	$+\infty$
$x-2$		-	-	-	+
$e^x - e$		-	+	+	+
$h(x)$		-	-	+	+
$g'(x)$		-	+	-	+
$g(x)$		↘ T.E. ↗		↘ T.M. ↗	

Αποδείξαμε λοιπόν πως η g έχει
δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων
και μία θέση τοπικού
μέγιστου.

Απόδειξη ανισοτήτων

1551. i. Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$\sqrt{x} + \ln(x+1) > e^{-x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \ln(x+1) - e^{-x} + 1 > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x+1) - e^{-x} + 1$, $x > 0$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x+1} + e^{-x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$(0, +\infty)$. Είναι $f(0) = 0$ συνεπώς έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \ln(x+1) - e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{x} + \ln(x+1) > e^{-x} - 1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\text{ii. } \Theta\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\mu\epsilon \text{ να δείξουμε ότι : } xe^{\varphi x} + 1 > \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow xe^{\varphi x} + 1 - \frac{1}{\sin x} > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^{\varphi x} + 1 - \frac{1}{\sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = e^{\varphi x} + \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} = e^{\varphi x} + \frac{x - \eta\mu x}{\sin^2 x} > 0, \text{ αφού για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι}$$

$$x - \eta\mu x > 0 \text{ και } e^{\varphi x} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Είναι $f(0) = 0$ συνεπώς έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow xe^{\varphi x} + 1 - \frac{1}{\sin x} > 0 \Leftrightarrow \boxed{xe^{\varphi x} + 1 > \frac{1}{\sin x}}, \text{ για}$$

$$\text{κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

iii. Θέλουμε να δείξουμε ότι : $e^x > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x+1} > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, $x > 0$ με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

Είναι $f(0) = 0$ συνεπώς έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \boxed{e^x > \frac{1}{x+1}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

iv. Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$e^x > 1 + \ln(1+x) \Leftrightarrow e^x - 1 - \ln(1+x) > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$, $x > 0$ με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ σύμφωνα με το ερώτημα iii), άρα η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Είναι $f(0) = 0$ συνεπώς έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x - 1 - \ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{e^x > 1 + \ln(1+x)}, \text{ για}$$

κάθε $x > 0$.

v. Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$\frac{1+x}{1-x} > e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} < \frac{1+x}{1-x} \stackrel{x < 1 \Leftrightarrow 1-x > 0}{\Leftrightarrow} (1-x)e^{2x} - (1+x) < 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{2x}(1-x) - (1+x)$, $x \in (0,1)$ με παραγώγους :

$$f'(x) = 2e^{2x}(1-x) - e^{2x} - 1 = e^{2x}(1-2x) - 1 \text{ και}$$

$$f''(x) = 2e^{2x}(1-2x) - 2e^{2x} = -4x \cdot e^{2x} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1), \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $(0,1)$, άρα και $1-1$. Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική

ρίζα της f' . Έτσι για $x \in (0,1)$ έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0,1).$$

Είναι $f(0) = 0$ συνεπώς για $x \in (0,1)$ έχουμε :

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow e^{2x}(1-x) - (1+x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x}(1-x) > 1+x \stackrel{1-x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{2x} < \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}}, \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

1552. Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \boxed{\ln x + \frac{1}{x} \geq 1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1553. i. Η $f(x) = \ln\left(\frac{\delta}{x}\right) - \frac{\delta}{x} + 1 = \ln \delta - \ln x - \frac{\delta}{x} + 1$, έχει πεδίο ορισμού το $A = [\gamma, \delta]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\delta}{x^2} = \frac{\delta - x}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in [\gamma, \delta], \text{ αφού } x < \delta \Leftrightarrow \delta - x > 0, \text{ δηλαδή}$$

η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[\gamma, \delta]$.

Άρα η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** για $x = \gamma$, το $f(\gamma) = \ln\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) - \frac{\delta}{\gamma} + 1$ και **ολικό μέγιστο** για $x = \delta$, το $f(\delta) = 0$.

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} 0 < \underline{\gamma} < \delta \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f(\gamma) < f(\delta) &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) - \frac{\delta}{\gamma} + 1 < 0 \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \gamma \ln\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) + \gamma - \delta < 0 \Leftrightarrow \\ \gamma - \delta < -\gamma \ln\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) &\Leftrightarrow \gamma - \delta < \ln\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{-\gamma} \Leftrightarrow \gamma - \delta < \ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\gamma} \Leftrightarrow \ln e^{\gamma - \delta} < \ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\gamma} \Leftrightarrow \\ e^{\gamma - \delta} < \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\gamma} &\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\gamma} > e^{\gamma - \delta}}. \end{aligned}$$

1554. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = xe^x - e^x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $h'(x) = xe^x$. Έτσι έχουμε :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \underline{x = 0}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } h :$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	ϕ	+
$h(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, το $h(0) = 1$.

Θα ισχύει λοιπόν :

$$h(x) \geq h(0) = 1 > 0 \Rightarrow$$

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x), \text{ δηλαδή η } C_f \text{ βρίσκεται πάνω από τη } C_g.$$

1555. Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$x^x \geq e^{x-1} \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln e^{x-1} \Leftrightarrow x \ln x \geq x-1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \boxed{x^x \geq e^{x-1}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1556. α. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=e}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e \text{ και}$$

$$1-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της } f :$$

x	0	e	$+\infty$
$1-\ln x$		+	$\ominus$
$f'(x)$		+	$\ominus$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, e)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(e, +\infty)$.

και

$$\circ \text{ Η } f \text{ παρουσιάζει } \textbf{τοπικό μέγιστο} \text{ στο } x=e \text{ το } f(e)=\frac{1}{e}.$$

β. i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$ άρα :

$$e < \pi \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Leftrightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Leftrightarrow \ln e^\pi > \ln \pi^e \Leftrightarrow \boxed{e^\pi > \pi^e}.$$

ii. Είναι $\alpha \geq e$ και $\alpha+1 > \alpha \geq e$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$ άρα :

$$\alpha+1 > \alpha \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha+1) < f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} < \frac{\ln \alpha}{\alpha} \stackrel{\alpha, \alpha+1 > 0}{\Leftrightarrow} \alpha \ln(\alpha+1) < (\alpha+1) \ln \alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^\alpha < \ln \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow (\alpha+1)^\alpha < \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \boxed{\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha}, \text{ για κάθε } \alpha \geq e.$$

iii. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=e$, άρα για κάθε $x>0$ είναι :

$$f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow x^e \leq e^x \Leftrightarrow \boxed{e^x \geq x^e} \text{ για κάθε } x>0.$$

iv. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=e$, άρα για κάθε $x>0$ είναι :

$$f(x) \leq f(e) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} < 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \boxed{\ln x < x}, \text{ για κάθε } x>0.$$

1557. i. Είναι : $(x^2+1)f'(x) > 2xf(x) \Leftrightarrow (x^2+1)f'(x) - 2xf(x) > 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x^2+1) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2} > 0, \text{ άρα η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Έτσι, για κάθε $x > 0$ είναι :

$$\boxed{x > 0} \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2+1} > f(0) \stackrel{x^2+1 > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f(x) > f(0)(x^2+1)}.$$

ii. Για κάθε $x < 0$ είναι :

$$\boxed{x < 0} \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) < F(0) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2+1} < f(0) \stackrel{x^2+1 > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f(x) < f(0)(x^2+1)}.$$

1558. i. Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα για $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$, θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε

$$\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x < \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \boxed{1 - \frac{1}{x} - \ln x < 0}, \text{ για κάθε } x > 1.$$

ii. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

$$\text{και συνεχής) με παράγωγο : } f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} < 0, \text{ σύμφωνα με το}$$

πρώτο ερώτημα, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(1, +\infty)$.

iii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, άρα και $1-1$. Έτσι για $\alpha, \beta > 1$ έχουμε :

$$(\alpha-1)\ln\beta = (\beta-1)\ln\alpha \Leftrightarrow \frac{\ln\beta}{\beta-1} = \frac{\ln\alpha}{\alpha-1} \Leftrightarrow f(\beta) = f(\alpha) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha = \beta}.$$

1559. i. Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x+1} > 0$ παίρνουμε :

$$\ln \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+1} - 1 \Leftrightarrow -\ln(x+1) < \frac{-x}{x+1} \Leftrightarrow \boxed{\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Η $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} < 0, \text{ αφού } \ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) < 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι } \mathbf{\text{γνησίως φθίνουσα}} \text{ στο } (1, +\infty).$$

1560. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}$ με πεδίο ορισμού το

$A = [0, +\infty]$. Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{1} + x^2 + \cancel{1}}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \geq 0, \text{ (η } g' \text{ μηδενίζεται σε}$$

πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της), άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty]$. Έτσι έχουμε :

$$x \geq 0 \quad \overset{\text{g.γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \quad g(x) \geq g(0) \Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

ii. Έχουμε :

$$f^5(x) + 2f^3(x) + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182 \Rightarrow$$

$$5f^4(x)f'(x) + 6f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = \ln(x+1) + 1 - \frac{4}{5} - x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$(5f^4(x) + 6f^2(x) + 3)f'(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} > 0, \text{ αφού}$$

$$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} > 0.$$

Αποδείξαμε ότι $(5f^4(x) + 6f^2(x) + 3)f'(x) > 0$. Επιπλέον είναι και

$$5f^4(x) + 6f^2(x) + 3 > 0, \text{ συνεπώς } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \geq 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty]$.

1561. i. Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ παίρνουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Rightarrow e^x \geq x+1 > x-1 \Leftrightarrow \boxed{e^x - x + 1 > 0}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε : $2e^x + 2x = x^2 + 2 \Leftrightarrow 2e^x + 2x - x^2 - 2 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 2x - x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f'(x) = 2e^x + 2 - 2x = 2(e^x - x + 1) > 0, \text{ λόγω του πρώτου ερωτήματος, άρα η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Είναι $f(0) = 0$ οπότε έχουμε :

$$2e^x + 2x - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 0, \text{ η μοναδική λύση της εξίσωσης } 2e^x + 2x = x^2 + 2.$$

1562. i. Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \ln x + \frac{1}{x} \geq 1 > 0 \Rightarrow \boxed{\ln x + \frac{1}{x} > 0}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \ln x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) > 0, \text{ λόγω του } \mathbf{i.}, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \ln x) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty. \text{ Οπότε :}$$

$$f(A) = f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{f(A) = \mathbb{R}} \text{ το}$$

σύνολο τιμών της f .

Για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης $e^x \ln x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$ παρατηρούμε πως

$\lambda \in \mathbb{R} = f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **μοναδική ρίζα** για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1563. A.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 2\ln x - 1$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } x = -1, \text{ την}$$

οποία δεν τη δεχόμαστε αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της g , οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		↘	↗

Συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $g(1) = 0$ και θα ισχύει πάντα :

$$g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow \boxed{x^2 - 2\ln x - 1 \geq 0}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

B. i. Η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ με πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x + 2}{x^2} > 0. \text{ Λόγω του } \mathbf{i.}, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο M είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = x$, δηλαδή $\lambda_{\varepsilon p} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Έχουμε :

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2\ln x + 2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2\ln x + 2 = \cancel{x^2} \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\boxed{M\left(e, \frac{e^2 + 2}{e}\right)}$, αφού $f(e) = \frac{e^2 + 2}{e}$.

iii. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 2e = \frac{1 - 2e^2}{e} < 0 \text{ και } f(1) = 1 > 0, \text{ δηλαδή } f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f(1) < 0, \text{ οπότε}$$

σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0. \text{ Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα το } x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \text{ είναι}$$

μοναδικό. Αποδείξαμε λοιπόν πως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε **ένα ακριβώς σημείο** με τετμημένη $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

1564. i. Πρέπει $x > 0$ και $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, άρα έχουμε $D_f = (0, 1)$.

ii. Η $f(x) = x^x \cdot (1-x)^{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, 1)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^x)' \cdot (1-x)^{1-x} + x^x \cdot ((1-x)^{1-x})' = (e^{\ln x^x})' \cdot (1-x)^{1-x} + x^x \cdot (e^{\ln(1-x)^{(1-x)}})' = \\ &= (e^{x \ln x})' \cdot (1-x)^{1-x} + x^x \cdot (e^{(1-x) \ln(1-x)})' = \\ &= e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) \cdot (1-x)^{1-x} + x^x \cdot e^{(1-x) \ln(1-x)} \cdot (-\ln(1-x) - 1) = \\ &= x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot (1-x)^{1-x} + x^x \cdot (1-x)^{1-x} \cdot (-\ln(1-x) - 1) = \\ &= x^x \cdot (1-x)^{1-x} \cdot (\ln x + 1 - \ln(1-x) - 1) = x^x \cdot (1-x)^{1-x} \cdot (\ln x - \ln(1-x)). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^x \cdot (1-x)^{1-x} \cdot (\ln x - \ln(1-x)) = 0 \Leftrightarrow_{\substack{x^x > 0 \\ (1-x)^{1-x} > 0}} \ln x = \ln(1-x) \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\ln x - \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln(1-x) \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\ln x - \ln(1-x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln(1-x) \Leftrightarrow x < 1-x \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		−	+
$f(x)$		↘	↗

Συνεπώς η f παρουσιάζει **ολικό**

ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$, το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

iii. Αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$, τότε για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι :

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}. \text{ Το } \alpha \in (0,1), \text{ άρα :}$$

$$f(\alpha) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} \geq \frac{1}{2} \stackrel{\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow 1-\alpha=\beta}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \geq \frac{1}{2}}.$$

1565. i. Είναι $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(1-x)^2 \geq 0$, $e^x > 0$, άρα $f(x) = (1-x)^2 e^x \geq 0 = f(1)$, δηλαδή η f έχει ελάχιστη τιμή το 0, για $x=1$.

Επιπλέον είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x)^2 e^x] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, και η f είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $\boxed{f(D_f) = [0, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

ii. Η $f(x) = (1-x)^2 e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -2(1-x)e^x + (1-x)^2 e^x = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = e^x (x-1)(x+1).$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (x-1)(x+1) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της } f :$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο

$$x = -1 \text{ το } f(-1) = \frac{4}{e}.$$

- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1) = 0$.

iii. Για κάθε $\alpha, \beta < 1$ είναι $f(\alpha) \leq f(-1)$ και $f(\beta) \leq f(-1)$, άρα :

$$f(\alpha) \leq f(-1) \Leftrightarrow (1-\alpha)^2 e^\alpha \leq \frac{4}{e} \Rightarrow 0 \leq (\alpha-1)^2 e^{\alpha+1} \leq 4 \text{ και}$$

$$f(\beta) \leq f(-1) \Leftrightarrow (1-\beta)^2 e^\beta \leq \frac{4}{e} \Rightarrow 0 \leq (\beta-1)^2 e^{\beta+1} \leq 4.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τελευταίες σχέσεις κατά μέλη, αφού είναι όλα θετικές

$$\text{ποσότητες, παίρνουμε } \boxed{(\alpha-1)^2 (\beta-1)^2 e^{\alpha+\beta+2} \leq 16}.$$

iv. Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-\frac{4}{e}}{2} = -\frac{2}{e}. \text{ Έχουμε λοιπόν : } f'(\xi) = -\frac{2}{e} \Leftrightarrow \boxed{ef'(\xi) = -2}.$$

1566. A. Στη σχέση $f(x) \geq e^x$ για $x=0$ παίρνουμε $f(0) \geq 1$.

Στη σχέση $f(x)f(-x) = 1$ για $x=0$ παίρνουμε

$$f^2(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) = \pm 1 \stackrel{f(0) \geq 1}{\Rightarrow} \boxed{f(0) = 1}.$$

Είναι $f(x) \geq e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου x το $-x$, παίρνουμε :

$$f(-x) \geq e^{-x} \Leftrightarrow \frac{f(x)f(-x)=1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(x) \leq e^x.$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} f(x) \geq e^x \\ f(x) \leq e^x \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

B. i. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x}$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}, \text{ όπου } f'(x) = e^x. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας -}$$

ακροτάτων της g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	$\oplus$
$g(x)$		 O.E. 	

Συνεπώς :

- Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0, 1]$.

- Η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1, +\infty)$,

και

ο H g παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $g(1) = f(1) = e$.

ii. Για κάθε $x > 0$ η g έχει ελάχιστη τιμή για $x=1$, το $g(1) = e$, συνεπώς είναι $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq e$.

Επιπλέον είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, και η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε $\boxed{g(A) = [e, +\infty)}$ το **σύνολο τιμών** της f .

iii. Είναι :

$$\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = \ln e \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e.$$

Αφού το $g(1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της g τότε είναι $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x > 0$.

Έτσι για τα $\alpha, \beta, \gamma > 0$ είναι :

$$g(\alpha) \geq g(1) \Leftrightarrow \frac{e^\alpha}{\alpha} \geq e \Leftrightarrow e^\alpha \geq e\alpha, \quad g(\beta) \geq g(1) \Leftrightarrow \frac{e^\beta}{\beta} \geq e \Leftrightarrow e^\beta \geq e\beta \text{ και}$$

$$g(\gamma) \geq g(1) \Leftrightarrow \frac{e^\gamma}{\gamma} \geq e \Leftrightarrow e^\gamma \geq e\gamma.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{cases} e^\alpha \geq e\alpha \\ e^\beta \geq e\beta \end{cases} \stackrel{\otimes}{\Rightarrow} e^\alpha e^\beta \geq e^2 \alpha \beta \Leftrightarrow e^{\alpha+\beta} \geq e^2 \alpha \beta \Leftrightarrow \gamma e^{\alpha+\beta} \geq e^2 \alpha \beta \gamma \Leftrightarrow \underline{\underline{\gamma e^{\alpha+\beta} \geq e^3}},$$

$$\begin{cases} e^a \geq ea \\ e^{\gamma} \geq e\gamma \end{cases} \stackrel{\otimes}{\Rightarrow} e^a e^{\gamma} \geq e^2 \alpha \gamma \Leftrightarrow e^{a+\gamma} \geq e^2 \alpha \gamma \Leftrightarrow \beta e^{a+\gamma} \geq e^2 \alpha \beta \gamma \Leftrightarrow \underline{\beta e^{a+\gamma} \geq e^3} \text{ και}$$

$$\begin{cases} e^{\beta} \geq e\beta \\ e^{\gamma} \geq e\gamma \end{cases} \stackrel{\otimes}{\Rightarrow} e^{\beta} e^{\gamma} \geq e^2 \beta \gamma \Leftrightarrow e^{\beta+\gamma} \geq e^2 \beta \gamma \Leftrightarrow \alpha e^{\beta+\gamma} \geq e^2 \alpha \beta \gamma \Leftrightarrow \underline{\alpha e^{\beta+\gamma} \geq e^3}.$$

Προσθέτοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$\boxed{\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{a+\gamma} + \gamma e^{a+\beta} \geq 3e^3}.$$

1567. Έστω $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = f(0) - g(0) \stackrel{f(0)=g(0)}{=} 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = x(e^x - 1) \text{ αφού } f'(x) = g'(x) + x(e^x - 1).$$

Έτσι, για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x(e^x - 1) > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty). \text{ Συνεπώς :}$$

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) > g(x)}, \text{ για κάθε } x > 0$$

1568. Έστω $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι :

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = \eta \mu^2 x + e^x > 0, \text{ αφού } f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x, \text{ άρα η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty). \text{ Συνεπώς :}$$

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > f(0) - g(0) \Leftrightarrow f(x) + g(0) > f(0) + g(x) \Leftrightarrow \boxed{f(0) + g(x) < f(x) + g(0)}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1569. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f^3(x) + 3f(x) + x = e^x + 3$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow 3(f^2(x) + 1)f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{3(f^2(x) + 1)}, \text{ όπου } 3(f^2(x) + 1) > 0.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{3(f^2(x) + 1)} = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0)$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(0)$.

Στη σχέση $f^3(x) + 3f(x) + x = e^x + 3$ για $x = 0$ έχουμε :

$$f^3(0) + 3f(0) = 4 \Leftrightarrow f^3(0) - f(0) + 4f(0) - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(0)(f^2(0) - 1) + 4(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) + 1)(f(0) - 1) + 4(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(0) - 1)(f^2(0) + f(0) + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f^2(0) + f(0) + 4 \neq 0 \\ \Delta = -15 < 0 \end{matrix} \quad \underline{\underline{f(0) = 1.}}$$

$$\text{Άρα: } f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1570. Είναι $f''(x) < 0$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x = \alpha$ η ισότητα ισχύει αφού $f(\alpha) \leq f(\alpha)$.

Διακρίνουμε άλλες δύο περιπτώσεις, μία για $x < \alpha$ και μία για $x > \alpha$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[x, \alpha]$ και $[\alpha, x]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο (x, α) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, \alpha)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x}.$$

$$\text{Άρα: } x < \underline{\xi} < \alpha \xrightarrow{f' \text{ γν. φθ.}} f'(\xi) > f'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} > f'(\alpha) \quad \begin{matrix} x < \alpha \Leftrightarrow \alpha - x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) - f(x) > f'(\alpha)(\alpha - x) \Leftrightarrow f(x) < -f'(\alpha)(\alpha - x) + f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{f(x) < f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).}}$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

$$\text{Άρα: } \underline{\alpha} < \xi < x \xrightarrow{f' \text{ γν. φθ.}} f'(\alpha) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\alpha) > \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad \begin{matrix} x > \alpha \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$f'(\alpha)(x - \alpha) > f(x) - f(\alpha) \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) < f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)}}$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $\boxed{f(x) \leq f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1571. Έστω $F(x) = f(x) - e^x + \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = f(0) - 1 + 1 - 1 = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$F'(x) = f'(x) - e^x + x < 0$ αφού $f'(x) < e^x - x$, δηλαδή η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς:

$$x > 0 \xrightarrow{F \text{ γν. φθ.}} F(x) < F(0) \Leftrightarrow f(x) - e^x + \frac{x^2}{2} < 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + f(x) < e^x}, \text{ για κάθε}$$

$$x > 0.$$

1572. i. ■ Έστω $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in [0, +\infty)$, με $g(0) = f(0) = 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$g'(x) = f'(x) - 2x > 0$ αφού $2x < f'(x)$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 > 1 \Leftrightarrow \underline{x^2 + 1 < f(x)}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

■ Έστω $h(x) = f(x) - e^x$, $x \in [0, +\infty)$, με $h(0) = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$h'(x) = f'(x) - e^x < 0$ αφού $f'(x) < e^x$, δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{h \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - e^x < 0 \Leftrightarrow \underline{f(x) < e^x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς $\boxed{x^2 + 1 < f(x) < e^x}$ για κάθε $x > 0$.

ii. Είναι $0 < 2x < f'(x) < e^x$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$A = [0, +\infty) \text{ και συνεχής, οπότε } f(A) = f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)).$$

Είναι $x^2 + 1 < f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

οπότε είναι $\boxed{f(A) = [1, +\infty)}$ το σύνολο τιμών της f .

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - 2x^2$, $x \in [1, 2]$, η οποία είναι

συνεχής στο $[1, 2]$ με $\varphi(1) = f(1) - 2 > 0$ αφού $x^2 + 1 < f(x) < e^x \xrightarrow{x=1} 2 < f(1) < e$

και $\varphi(2) = f(2) - 8 < 0$ αφού $x^2 + 1 < f(x) < e^x \xrightarrow{x=2} 5 < f(2) < e^2 \Rightarrow$

$$-3 < f(2) - 8 < e^2 - 8 < 0 \Rightarrow f(2) - 8 < 0, \text{ οπότε } \varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0.$$

Έτσι σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0^2$. Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $f(x) = 2x^2$ έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** στο διάστημα $(1, 2)$.

1573. i. Είναι :

$$f'(x) + f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = x' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x = x + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow \underline{c = 0}.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^x = x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Η $f(x) = xe^{-x}$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της } f:$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-
$f(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο
στο $x=1$ το $f(1)=\frac{1}{e}$, οπότε για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \text{ θα ισχύει } f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \leq \frac{1}{e}}.$$

1574. Έστω $F(x) = f(x) \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = f(0) = 1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$F'(x) = f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x > 0$ αφού $f'(x) \sin x > f(x) \eta \mu x$, δηλαδή η F είναι
γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \sin x > 1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1575. Έστω $F(x) = f(x) - \ln g(x)$, $x \in [0, +\infty)$, με $F(0) = f(0) - \ln g(0) = 1 - \ln 1^0 = 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$F'(x) = f'(x) - \frac{g'(x)}{g(x)} < 0 \text{ αφού } f'(x)g(x) < g'(x) \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x) < \frac{g'(x)}{g(x)}, \text{ δηλαδή η}$$

F είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} F(x) < F(0) \Leftrightarrow f(x) - \ln g(x) < 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 1 + \ln g(x)}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1576. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$
η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = -\eta \mu x + x - \frac{x^3}{6}, \quad f''(x) = -\sigma \nu x + 1 - \frac{x^2}{2} \text{ και } f'''(x) = \eta \mu x - x.$$

Για κάθε $x > 0$, είναι $\eta \mu x < x \Leftrightarrow \eta \mu x - x < 0 \Leftrightarrow f'''(x) < 0$ άρα η f'' είναι
γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $f''(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f'' . Έτσι :

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f'' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(0) \Leftrightarrow f''(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως} \\ \text{φθίνουσα στο } [0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως} \\ \text{φθίνουσα στο } [0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $f(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sin x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+e^x) - \ln 2 - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2}$ με πεδίο ορισμού το

$A = \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{e^x + \cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{2x}}}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{4e^x - (1+2e^x+e^{2x})}{(1+e^x)^2} = -\frac{4e^x+1+2e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -\frac{1+2e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -\frac{(1+e^x)^2}{4(1+e^x)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f''(x) = -\frac{(1+e^x)^2}{4(1+e^x)^2} < 0 \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και}$$

1-1. Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

– Για $x < 0 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, άρα και 1-1.

Είναι $f(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

– Για

$$x < 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(1+e^x) - \ln 2 - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ln(1+e^x) < \ln 2 + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2}}, \text{ για κάθε } x < 0.$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ με πεδίο ορισμού

το $A = (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = 12x \ln x + \cancel{6x^2} - 6x^2 - \cancel{6x} + 6 = 12x \ln x - 6x^2 + 6 \text{ και}$$

$f''(x) = 12 \ln x + 12 - 12x = 12(\ln x + 1 - x) < 0$, αφού από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x + 1 - x \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Είναι $f'(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

– Για $x > 1 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα και 1-1.

Είναι $f(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

$$- \text{ Για } x > 1 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1 < 0 \Leftrightarrow \boxed{6x^2 \ln x < 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1}, \text{ για κάθε } x > 1$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$ με πεδίο ορισμού το

$A = \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους :

$$f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad f''(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad f'''(x) = e^x - 1 - x.$$

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Θέτοντας όπου x το $e^x > 0$ παίρνουμε :

$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα $f'''(x) = e^x - 1 - x > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $f''(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f'' . Έτσι :

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f' \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } [0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } [0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $f(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \\ e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} > 0 \Leftrightarrow \boxed{e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1577. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2e^2 \ln x + \ln^2 x - e^2$ με πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 2e^{2x} - \frac{2e^2}{x} + \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2xe^{2x} - 2e^2 + 2 \ln x}{x} = 2 \frac{xe^{2x} - e^2 + \ln x}{x}.$$

Θεωρούμε και πάλι συνάρτηση $\varphi(x) = xe^{2x} - e^2 + \ln x$, $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\varphi'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} + \frac{1}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$$(0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1. \text{ Οπότε θα είναι } f'(x) = 2 \frac{xe^{2x} - e^2 + \ln x}{x} = 2 \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Είναι $\varphi(1) = 0$ οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της φ . Έτσι :

$$- \text{ Για } 0 < \underline{x} < 1 \stackrel{\varphi \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{x} < 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\varphi(x)}{x} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0,1].$$

$$- \text{ Για } x > 1 \stackrel{\varphi \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{x} > 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\varphi(x)}{x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty).$$

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ συμπεραίνουμε πως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το $f(1) = 0$.

$$\text{Άρα για κάθε } (0, +\infty) \text{ είναι: } f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \boxed{e^{2x} - 2e^2 \ln x + \ln^2 x \geq e^2}.$$

1578. Έστω $g(x) = f(x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ με $g(0) = f(0)^0 + 1 = 1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $g'(x) = f'(x) - \eta \mu x$ και

$g''(x) = f''(x) - \sin x > 0$, αφού $f''(x) > \sin x$, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Είναι $g'(0) = f'(0) = 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της g' .

$$- \text{ Για } x > 0 \stackrel{g' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty), \text{ άρα και } 1-1. \text{ Έτσι έχουμε:}$$

$$\text{Για } x > 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) + \sin x > 1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1579. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ με πεδίο ορισμού το $A = [0, \alpha]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x), \quad h''(x) = f''(x) - g''(x) \text{ και}$$

$$h'''(x) = f'''(x) - g'''(x) > 0, \text{ αφού είναι } f'''(x) > g'''(x), \text{ άρα η } h'' \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $[0, \alpha]$, άρα και $1-1$. Είναι $h''(0) = f''(0) - g''(0) \stackrel{f''(0)=g''(0)}{=} 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της h'' . Έτσι:

$$- \text{ Για } 0 < \underline{x} < \alpha \stackrel{h'' \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} h''(0) < h''(x) \Leftrightarrow 0 < h''(x) \Leftrightarrow h''(x) > 0, \text{ δηλαδή η } h' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, \alpha], \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $h'(0) = f'(0) - g'(0) \stackrel{f'(0)=g'(0)}{=} 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της h' .

$$- \text{ Για } 0 < \underline{x} < \alpha \stackrel{h' \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} h'(0) < h'(x) \Leftrightarrow 0 < h'(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, \alpha], \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $h(0) = f(0) - g(0) \stackrel{f(0)=g(0)}{=} 0$ οπότε το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της h .

$$- \text{ Για } 0 < \underline{x} < \alpha \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} h(0) < h(x) \Leftrightarrow 0 < h(x) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) > g(x)}, \text{ για κάθε } x \in (0, \alpha).$$

1580. i. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, παίρνουμε :

$$f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow (1 + e^{-f(x)}) f'(x) = 1 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Παραγωγίζοντας την $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0$ παίρνουμε :

$$f''(x) = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Θέτοντας όπου } x=0 \text{ στην } f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \text{ παίρνουμε } f'(0) = \frac{1}{1 + e^{-f(0)}} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[0, x]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - \cancel{f(0)}}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Άρα : } 0 < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)} \text{ για κάθε } x > 0.$$

1581. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^x + 1 > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και } 1-1.$$

Είναι $f(0) = 0$, οπότε η εξίσωση $e^x + x = 1$ γίνεται :

$$e^x + x = 1 \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$$

Αποδείξαμε πως η εξίσωση $e^x + x = 1$ έχει **μοναδική ρίζα** το $\boxed{x = 0}$.

ii. α. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) + e^{f(x)} = x + 1$, παίρνουμε :

$$f'(x) + e^{f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow (1 + e^{f(x)}) f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{f(x)}} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Παραγωγίζοντας την $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{f(x)}}$ παίρνουμε :

$$f''(x) = -\frac{e^{f(x)} f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} < 0, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Θέτοντας όπου $x=0$ στην $f'(x) = \frac{1}{1+e^{f(x)}}$ παίρνουμε $f'(0) = \frac{1}{1+e^{f(0)}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x, 0]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Άρα : } x < \xi < 0 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}} \text{ για κάθε } x < 0.$$

1582. Είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- i. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x-1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Είναι $x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1$, άρα :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2f(x) < f(x+1) - f(x-1)}.$$

- ii. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x-1, x+1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x-1, x+1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{x+1 - (x-1)} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}.$$

$$\text{Άρα : } x-1 < \xi < x+1 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x-1) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x-1) < \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} < f'(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2f'(x-1) < f(x+1) - f(x-1) < 2f'(x+1)}.$$

1583. i. Είναι $x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x-1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Είναι $x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1$, άρα :

$$\overset{f' \text{ γν. φθ.}}{\xi_1 < x < \xi_2} \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(x) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(x-1) > f'(x) > f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)}, \text{ για κάθε } x \geq 1.$$

ii. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \xRightarrow{x=u+1} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} f(u+1) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = 1}} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \xRightarrow{x=t-1} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty}} f(t-1) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x-1) = 1}}.$$

Έχουμε :

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1) \text{ με}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 1 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x-1) = 1 - 1 = 0.$$

Οπότε, σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0}$.

1584. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[a, x]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\text{Άρα : } a < \underline{\underline{\xi}} < x \xRightarrow{f' \text{ γν. αυξ.}} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x) \quad \overset{x > a \Leftrightarrow x - a > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) - f(a) < f'(x)(x - a) \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a)) > 0}}.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ έχει παράγωγο :

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2} > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (a, \beta)$$

1585. i. Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, τότε διαπιστώνουμε πως $f(1) = 1$.

Επίσης η C_f δέχεται στο A εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=x+1$, οπότε θα είναι και $f'(1) = \lambda_\varepsilon = 1$.

Έστω $F(x) = f'(x) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(1) = f'(1) - f(1) = 1 - 1 = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$F'(x) = f''(x) - f'(x) > 0$ αφού $f''(x) > f'(x)$, δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς :

Για κάθε $x < 1$ είναι :

$$x < 1 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) < F(1) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) < 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < f(x)}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι :

$$x > 1 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(1) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > f(x)}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = e^{-x}f(x)$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$G'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)).$$

Είναι $G'(1) = e^{-1}(f'(1) - f(1)) = e^{-1}(1 - 1) = 0$. Συνεπώς :

Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) - f(x) < 0$ άρα $G'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) < 0$, δηλαδή η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) - f(x) > 0$ άρα $G'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$, δηλαδή η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Συνεπώς η G παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το $G(1) = e^{-1}f(1) = \frac{1}{e}$, οπότε

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$G(x) \geq G(1) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{e}e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq e^{x-1}}.$$

1586. Έχουμε $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

■ Για $x < 0$, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x, 0]$.

— Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\overbrace{0}^0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Άρα :

$$\begin{aligned} x < \xi < 0 &\stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(x)}{x} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} xf'(x) < f(x) \Leftrightarrow \\ &xf'(x) - f(x) < 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι} \\ &\textbf{γνησίως φθίνουσα} \text{ στο } (-\infty, 0). \end{aligned}$$

- Για $x > 0$, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[0, x]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - \cancel{f(0)}}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Άρα :

$$\begin{aligned} 0 < \xi < x &\stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > f'(x) \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} f(x) > xf'(x) \Leftrightarrow \\ &xf'(x) < f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) < 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0, \\ &\text{δηλαδή η } g \text{ είναι } \textbf{γνησίως φθίνουσα} \text{ στο } (0, +\infty). \end{aligned}$$

- 1587.** Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

- Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha, x]$ και $[x, \beta]$
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

Είναι $\alpha < \xi_1 < x < \xi_2 < \beta$, άρα :

$$\begin{aligned} \xi_1 < x < \xi_2 < \beta &\stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) < f'(\beta) < 0. \text{ Έτσι έχουμε :} \\ f'(\xi_1) < 0 &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < 0 \stackrel{\alpha < x}{\Leftrightarrow} \stackrel{x - \alpha > 0}{f(x) - f(\alpha) < 0} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) < f(\alpha)}}. \end{aligned}$$

και

$$f'(\xi_2) < 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} < 0 \stackrel{x < \beta}{\Leftrightarrow} \stackrel{\beta - x > 0}{f(\beta) - f(x) < 0} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) > f(\beta)}}.$$

Άρα :

$$f(\alpha) > f(x) > f(\beta) \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) > f(\beta)}, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

1588. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \eta\mu x$, $x > 0$, με $g(\pi) = \frac{f(\pi)}{\pi} - \eta\mu\pi = 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \sigma\upsilon\nu x = \frac{xf'(x) - f(x) - x^2\sigma\upsilon\nu x}{x^2} < 0 \text{ αφού}$$

$$xf'(x) < f(x) + x^2\sigma\upsilon\nu x, \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, +\infty).$$

Συνεπώς :

$$x > \pi \stackrel{g \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(\pi) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \eta\mu x < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} f(x) - x\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) < x\eta\mu x}, \text{ για κάθε } x > \pi.$$

1589. Για κάθε $x > 0$, είναι :

$$f'(x) > -\frac{f(x)}{x} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} xf'(x) > -f(x) \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) > 0 \Leftrightarrow xf'(x) + x f'(x) > 0$$

$$(xf(x))' > 0.$$

Έστω συνάρτηση $F(x) = xf(x)$, $x \geq 0$. Συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$F'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty). \text{ Έτσι για κάθε } x > 0$$

$$\text{έχουμε : } x > 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow xf(x) > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f(x) > 0}.$$

1590. Έστω $F(x) = xf(x) - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - e^x > 0 \text{ αφού } xf'(x) > e^x - f(x), \text{ δηλαδή η } F \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } \mathbb{R}. \text{ Συνεπώς : Για κάθε } x < 0 \text{ είναι :}$$

$$x < 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) < F(0) \Leftrightarrow xf(x) - e^x + 1 < 0 \Leftrightarrow xf(x) < e^x - 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\underline{\underline{f(x) > \frac{e^x - 1}{x}}}.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow xf(x) - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow xf(x) > e^x - 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\underline{\underline{f(x) > \frac{e^x - 1}{x}}}. \text{ Αποδείξαμε λοιπόν πως } \boxed{f(x) > \frac{e^x - 1}{x}} \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

1591. Έστω $F(x) = e^{-2x}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = f(0) = 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$F(x) = -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x) = e^{-2x}(-2f(x) + f'(x)) > 0 \text{ αφού } f'(x) > 2f(x),$$

δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) > 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) > e^{2x}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1592. Έστω $F(x) = e^{-x}f(x)$, $x \geq 0$, με $F(0) = f(0) = 1$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι :

$F(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(-f(x) + f'(x)) > 0$ αφού $f(x) < f'(x)$, δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) > e^x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1593. Έστω $F(x) = e^{-x}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = f(0) = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$F(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(-f(x) + f'(x)) > 0$ αφού $f'(x) > f(x)$, δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς :

Για κάθε $x < 0$ είναι :

$$x < 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) < F(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) < 0 \stackrel{e^{-x} > 0}{\Leftrightarrow} f(x) < 0 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} xf(x) > 0.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > 0 \stackrel{e^{-x} > 0}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} xf(x) > 0.$$

Αποδειξαμε λοιπόν πως $\boxed{xf(x) > 0}$ για κάθε $x \neq 0$.

1594. i. Έστω $F(x) = e^x f(x) - e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, με $F(0) = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$F(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) - 2e^{2x} = e^x(f(x) + f'(x) - 2e^x) > 0 \text{ αφού}$$

$f(x) + f'(x) > 2e^x$, δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς :

$$x > 0 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow e^x f(x) - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^x f(x) > e^{2x} \Rightarrow f(x) > e^x > 1 \Rightarrow \boxed{f(x) > 1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Η $g(x) = f^2(x)e^{2x} - 4x$ έχει παράγωγο :

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)e^{2x} + 2f^2(x)e^{2x} - 4 = 2e^{2x}f(x)(f'(x) + f(x)) - 4. \text{ Είναι :}$$

$$f'(x) + f(x) > 2e^x \Leftrightarrow 2e^{2x}(f'(x) + f(x)) > 4e^{3x}, \text{ οπότε :}$$

$$g'(x) = 2e^{2x}f(x)(f'(x) + f(x)) - 4 > 4e^{3x}f(x) - 4. \text{ Έχουμε :}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow 3x > 0 \Leftrightarrow e^{3x} > e^0 \Leftrightarrow e^{3x} > 1 \Leftrightarrow 4e^{3x} > 4 \stackrel{f(x) > 1}{\Rightarrow}$$

$$4e^{3x}f(x) > 4f(x) > 4 \text{ αφού } f(x) > 1. \text{ Άρα :}$$

$$4e^{3x}f(x) > 4 \Leftrightarrow 4e^{3x}f(x) - 4 > 0, \text{ συνεπώς και } g'(x) > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

1595. i. Για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ έχει παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{\cancel{x}}{x+1} \cdot \frac{1}{x^{\cancel{2}}} + \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] = (+\infty) - 1 = +\infty, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \stackrel{u=1+\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] = \ln 1^0 - 0 = 0.$$

Άρα :

$$f(A) = f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty) \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

Συνεπώς αφού $f(x) \in f(A)$, τότε είναι $\boxed{f(x) > 0}$ για κάθε $x > 0$.

ii. Για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$ έχει παράγωγο :

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \cdot \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right] = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \cdot \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x f(x) > 0, \text{ αφού } \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x > 0 \text{ και } f(x) > 0, \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι} \end{aligned}$$

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

1596. α. i. Είναι : $\ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x} = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$

Από εφαρμογή του σχολικού γνωρίζουμε πως $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Θέτοντας όπου x το $1 + \frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \cancel{x} + \frac{1}{x} - \cancel{x} \Leftrightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x}, \text{ άρα :}$$

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Η $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ έχει παράγωγο :

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x+1-1}{x+1} - 1 - \frac{1}{x} =$$

$$= \ln(x+1) - \ln x + \cancel{x} - \frac{1}{x+1} - \cancel{x} - \frac{1}{x} = \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} < 0, \text{ αφού}$$

$$\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0 \text{ και } -\frac{1}{x+1} < 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$.

β. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{0}{0} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

γ. Είναι :

$$\begin{aligned} (\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1} &\Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^\alpha = \ln \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha+1) = (\alpha+1) \ln \alpha \Leftrightarrow \\ \alpha \ln(\alpha+1) - (\alpha+1) \ln \alpha &= 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(\alpha) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+1) - (x+1) \ln x] = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-\infty) = +\infty \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - (x+1) \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln x - \ln x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln(x+1) - \ln x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{x+1}{x} - \ln x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \ln x \right) \stackrel{\text{β.}}{=} 1 - (+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Άρα :

$$f(A) = f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

Είναι $0 \in f(A)$, άρα η εξίσωση $f(\alpha) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A , η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A .

1597. Α. i. Αν στη σχέση $f(xy) = \frac{1}{x}f(y) + \frac{1}{y}f(x)$ θέσουμε όπου $y=1$, έχουμε :

$$\cancel{f(x)} = \frac{1}{x}f(1) + \cancel{f(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{x}f(1) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{f(1)=0}}.$$

Έστω τυχαίο $x_0 > 0$. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{x=x_0h}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ h \rightarrow 1}} \frac{f(x_0h) - f(x_0)}{x_0h - x_0} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x_0}f(h) + \frac{1}{h}f(x_0) - f(x_0)}{x_0(h-1)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{hf(h) + x_0f(x_0) - x_0hf(x_0)}{x_0^2h(h-1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{hf(h) - x_0 f(x_0)(h-1)}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{f(h)}{h-1} - \frac{x_0 f(x_0)}{h} \right) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{f(h) - f(1)}{h-1} - \frac{x_0 f(x_0)}{h} \right) = \frac{1}{x_0^2} f'(1) - \frac{1}{x_0^2} \cancel{x_0} f(x_0) = \\
&= \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0} f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0^2} - \frac{f(x_0)}{x_0}.
\end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε πως η f είναι **παραγωγίσιμη** στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}}.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x} &\Leftrightarrow xf'(x) = \frac{1}{x} - f(x) \Leftrightarrow xf'(x) + x f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\
(xf(x))' = (\ln x)' &\Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = c \Leftrightarrow c = 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } xf(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0}.$$

B. Η συνάρτηση $g(x) = (x-1)f(x) + \frac{2}{x} - 2 = (x-1)\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$ με πεδίο ορισμού

το $A = (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\ln x}{x} + (x-1)\frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} [x \ln x + (x-1)(1-\ln x) - 2] = \\
&= \frac{1}{x^2} (\cancel{x \ln x} + x - \cancel{x \ln x} - 1 + \ln x - 2) = \frac{1}{x^2} (x + \ln x - 3).
\end{aligned}$$

Θεωρούμε και πάλι συνάρτηση $h(x) = x + \ln x - 3$, $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα}$$

$$\text{και } 1-1. \text{ Οπότε θα είναι } g'(x) = \frac{1}{x^2} (x + \ln x - 3) = \frac{1}{x^2} h(x).$$

Η h είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με $h(1) = -2 < 0$ και $h(e) = e - 2 > 0$, δηλαδή $h(1) \cdot h(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$. Η h είναι 1-1 άρα το $\xi \in (1, e)$ είναι μοναδικό. Έτσι :

$$\begin{aligned}
- \text{ Για } 0 < x < \xi \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} h(x) < h(\xi) &\Leftrightarrow h(x) < 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x^2} h(x) < 0 \Leftrightarrow \\
g'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } g &\text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, \xi].
\end{aligned}$$

$$- \text{ Για } x > \xi \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\xi) \Leftrightarrow h(x) > 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x^2} h(x) > 0 \Leftrightarrow .$$

$g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$.

Αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$ συμπεραίνουμε πως η g παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = \xi$, το

$$g(\xi) = (\xi - 1) \frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi} - 2.$$

Γ. Είναι $h(\xi) = 0$ δηλαδή $\xi + \ln \xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\ln \xi = 3 - \xi}$.

Αφού η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \xi$, τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι :

$$g(x) \geq g(\xi) \Leftrightarrow g(x) \geq (\xi - 1) \frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi} - 2 \Leftrightarrow g(x) \geq (\xi - 1) \frac{3 - \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi} - 2 \Leftrightarrow$$

$$g(x) \geq \frac{1}{\xi} [(\xi - 1)(3 - \xi) + 2 - 2\xi] \Leftrightarrow g(x) \geq \frac{1}{\xi} [3\xi - \xi^2 - 3 + \xi + 2 - 2\xi] \Leftrightarrow$$

$$g(x) \geq \frac{1}{\xi} (-\xi^2 + 2\xi - 1) \Leftrightarrow g(x) \geq -\frac{1}{\xi} (\xi^2 - 2\xi + 1) \Leftrightarrow \boxed{g(x) + \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} \geq 0}, \text{ για}$$

κάθε $x > 0$.

Δ. Έστω $\varphi(x) = g(x) + g'(x)$. Είναι :

$$\varphi(\xi) = g(\xi) + g'(\xi) = -\frac{(\xi - 1)^2}{\xi} + 0 = -\frac{(\xi - 1)^2}{\xi} < 0 \Rightarrow \varphi(\xi) < 0. \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x - 1) \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x} \ln x + \frac{2}{x} - 2 \right) = 1 \cdot (+\infty) + 0 - 2 = +\infty$$

$$, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} - 1}{\cancel{x}} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x - 3}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0.$$

Άρα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + g'(x)) = (+\infty) + 0 = +\infty, \text{ οπότε υπάρχει αριθμός } \beta > 0, \text{ αρκετά μεγάλος, ώστε } \varphi(\beta) > 0.$$

Η φ είναι συνεχής στο $[\xi, \beta]$ με $\varphi(\xi) < 0$ και $\varphi(\beta) > 0$, δηλαδή $\varphi(\xi) \cdot \varphi(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\xi, \beta)$, άρα

$$x_1 > \xi, \text{ τέτοιο ώστε } \varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_1) + g'(x_1) = 0}.$$

Ολικό μέγιστο $\leq \lambda \in \mathbb{R}$ ή **Ολικό ελάχιστο** $\geq \lambda \in \mathbb{R}$

1598. i. Η $f(x) = e^{\lambda x} - x$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους : $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1$ και

$f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Αναζητούμε τη ρίζα της f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \ln e^{\lambda x} = \ln \lambda^{-1} \Leftrightarrow \lambda x = -\ln \lambda \Leftrightarrow$$

$x = -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$, η μοναδική ρίζα της f' . Είναι $f'\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = 0$ οπότε έχουμε:

$$- \text{ Για } x < -\frac{\ln \lambda}{\lambda} \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right]$.

$$- \text{ Για } x > -\frac{\ln \lambda}{\lambda} \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\ln \lambda}{\lambda}, +\infty\right)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$ και η **ελάχιστη τιμή** της f είναι το

$$f\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = e^{\lambda\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right)} - \left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = e^{\ln \lambda^{-1}} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}}.$$

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \geq f\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \Leftrightarrow e^{\lambda x} - x \geq \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \Leftrightarrow e^{\lambda x} \geq x + \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}.$$

Για να ισχύει $e^{\lambda x} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $x + \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \geq x$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

να ισχύει $e^{\lambda x} \geq x + \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \geq x$.

Συνεπώς είναι:

$$\cancel{x} + \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \geq \cancel{x} \Leftrightarrow \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \geq 0 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} 1 + \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\ln \lambda \geq \ln e^{-1} \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{e}, \text{ άρα η } \textbf{μικρότερη τιμή} \text{ που μπορεί να πάρει το } \lambda \text{ είναι } \boxed{\lambda = \frac{1}{e}}.$$

1599. i. Η $f(x) = x \ln x - \lambda x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παραγώγους: $f'(x) = \ln x + 1 - \lambda$ και

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και

1-1. Αναζητούμε τη ρίζα της f' :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \ln x = \lambda - 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\lambda-1} \Leftrightarrow x = e^{\lambda-1}$, η μοναδική ρίζα της f' . Είναι $f'(e^{\lambda-1}) = 0$ οπότε έχουμε :

- Για $0 < x < e^{\lambda-1} \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) < f'(e^{\lambda-1}) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{\lambda-1}]$.
- Για $x > e^{\lambda-1} \xrightarrow{f' \text{ γν. αὐξ.}} f'(x) > f'(e^{\lambda-1}) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{\lambda-1}, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = e^{\lambda-1}$ και η **ελάχιστη τιμή** της f είναι το $f(e^{\lambda-1}) = e^{\lambda-1} \ln e^{\lambda-1} - \lambda e^{\lambda-1} + 1 = (\lambda - 1)e^{\lambda-1} - \lambda e^{\lambda-1} + 1 = \cancel{\lambda e^{\lambda-1}} - e^{\lambda-1} - \cancel{\lambda e^{\lambda-1}} + 1 = 1 - e^{\lambda-1} \Leftrightarrow \boxed{f(e^{\lambda-1}) = 1 - e^{\lambda-1}}$.

ii. Είναι $M(e^{\lambda-1}, f(e^{\lambda-1}))$ ή $M(e^{\lambda-1}, 1 - e^{\lambda-1})$. Έτσι, για $x = e^{\lambda-1}$ και $y = 1 - e^{\lambda-1}$ παίρνουμε $y = 1 - x$, δηλαδή το σημείο M κινείται πάνω στην ευθεία $\boxed{\varepsilon: y = -x + 1}$.

iii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = e^{\lambda-1}$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι :

$$f(x) \geq f(e^{\lambda-1}) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - e^{\lambda-1} \Leftrightarrow x \ln x - \lambda x + 1 \geq \cancel{\lambda} - e^{\lambda-1} \Leftrightarrow x \ln x \geq \lambda x - e^{\lambda-1}.$$

Για να ισχύει $x \ln x \geq \lambda x - 1$ για κάθε $x > 0$ πρέπει $\lambda x - e^{\lambda-1} \geq \lambda x - 1$ ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $x \ln x \geq \lambda x - e^{\lambda-1} \geq \lambda x - 1$. Συνεπώς είναι :

$$\cancel{\lambda x} - e^{\lambda-1} \geq \cancel{\lambda x} - 1 \Leftrightarrow e^{\lambda-1} \leq 1 \Leftrightarrow \ln e^{\lambda-1} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1, \text{ άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το } \lambda \text{ είναι } \boxed{\lambda = 1}.$$

iv. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) = \ln x + 1$, άρα $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$, έτσι η **εφαπτομένη** της C_g στο σημείο $(1, 0)$ είναι η :

$$y = g'(1)(x - 1) + \cancel{g(1)}^0 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

1600. i. Η $f(x) = \ln(1 + e^x) - x - \lambda$ με πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη

$$(\text{άρα και συνεχής}) \text{ με παράγωγο : } f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - 1 = \frac{\cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x}}{1 + e^x} = -\frac{1}{1 + e^x} < 0, \text{ άρα}$$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 0$ και η **μέγιστη τιμή** της f είναι το

$$\boxed{f(0) = \ln 2 - \lambda}.$$

ii. Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 0$, οπότε για κάθε $x \geq 0$ είναι :

$$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq \ln 2 - \lambda \Leftrightarrow \ln(1 + e^x) - x - \cancel{\lambda} \leq \ln 2 - \cancel{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\ln(1 + e^x) \leq \ln 2 + x.$$

Για να ισχύει $\ln(1+e^x) \leq x+\lambda$ για κάθε $x \geq 0$ πρέπει $\ln 2+x \leq x+\lambda$ ώστε για κάθε $x \geq 0$ να ισχύει $\ln(1+e^x) \leq \ln 2+x \leq x+\lambda$. Συνεπώς είναι :

$\ln 2 + \cancel{x} \leq \cancel{x} + \lambda \Leftrightarrow \lambda \geq \ln 2$, άρα η **μικρότερη τιμή** που μπορεί να πάρει το λ είναι $\boxed{\lambda = \ln 2}$.

1601. Η $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ με πεδίο ορισμού το $A = (0,1)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -\frac{\ln^2 x + \cancel{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{x^2 \ln^4 x} = -\frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x^2 \ln^4 x} = -\frac{\ln x (\ln x + 2)}{x^2 \ln^4 x}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x (\ln x + 2)}{x^2 \ln^4 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1) \\ \text{ή } (\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-2}}})$$

Επιπλέον είναι :

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1, \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1 \text{ και}$$

$$\ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -2 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-2} \Leftrightarrow x < e^{-2},$$

$\ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-2} \Leftrightarrow x > e^{-2}$ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	e^{-2}	1
$\ln x$		-	-
$\ln x + 2$		-	+
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗ O.M. ↘	

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο

$$\text{για } x = e^{-2}, \text{ το } f(e^{-2}) = \frac{e^2}{4}.$$

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = e^{-2}$, οπότε για κάθε $x \in (0,1)$ είναι :

$$f(x) \leq f(e^{-2}) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{e^2}{4}.$$

Για να ισχύει $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in (0,1)$ πρέπει $\frac{e^2}{4} \leq M$ ώστε για κάθε $x \in (0,1)$

να ισχύει $f(x) \leq \frac{e^2}{4} \leq M$. Συνεπώς είναι :

$$M \geq \frac{e^2}{4}, \text{ άρα η } \underline{\text{μικρότερη τιμή}} \text{ που μπορεί να πάρει το } M \text{ είναι } \boxed{M = \frac{e^2}{4}}.$$

1602. A. i. Αν στη σχέση $f(x-y) = \frac{f(x)+x}{f(y)+y} - x+y$ θέσουμε όπου $y=x$, έχουμε :

$$f(x-x) = \frac{f(x)+x}{f(x)+x} - \cancel{x} + \cancel{x} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0)=1}}.$$

Αφού η f είναι συνεχής τότε είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$$\text{Επιπλέον είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0 \text{ ή } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} = 0$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \stackrel{x=x_0-h}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{\cancel{x_0} - h - \cancel{x_0}} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0)+x_0}{f(h)+h} - x_0 + h - f(x_0)}{h} = \\ & = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)+x_0 - x_0 f(h) + h f(h) - f(x_0) f(h) - x_0 h + h^2 - h f(x_0)}{h(f(h)+h)} = \\ & = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(h)+h} \left(\frac{-x_0 f(h) + x_0 - f(x_0) f(h) + f(x_0)}{h} + f(h) - x_0 + h - f(x_0) \right) = \\ & = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(h)+h} \left(-x_0 \frac{f(h)-1}{h} - f(x_0) \frac{f(h)-1}{h} + f(h) - x_0 + h - f(x_0) \right) = \\ & = - \frac{1}{f(0)} (-x_0 \cdot 0 - f(x_0) \cdot 0 + f(0) - x_0 - f(x_0)) = -1(1 - x_0 - f(x_0)) = \\ & = f(x_0) + x_0 - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) + x_0 - 1. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε πως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$\boxed{f'(x) = f(x) + x - 1}.$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) + x - 1 & \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x - 1 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} x - e^{-x} \Leftrightarrow \\ e^{-x} f'(x) + (e^{-x})' f(x) & = -(e^{-x} - e^{-x} x) \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = -(x e^{-x})' \Leftrightarrow \\ e^{-x} f(x) & = -x e^{-x} + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c \Leftrightarrow c = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } e^{-x} f(x) = -x e^{-x} + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}}.$$

$$\text{B. Ισχύει: } f(x) \geq ax \Leftrightarrow e^x - x - ax \geq 0 \Leftrightarrow e^x - (1+a)x \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - (1+a)x$ που έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = e^x - (1+a)$.

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - (1+a) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1+a \Leftrightarrow \ln e^x = \ln(1+a) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(1+a)}}.$$

Επιπλέον είναι :

$e^x - (1+\alpha) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1+\alpha \Leftrightarrow \ln e^x > \ln(1+\alpha) \Leftrightarrow x > \ln(1+\alpha),$
 $e^x - (1+\alpha) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1+\alpha \Leftrightarrow \ln e^x < \ln(1+\alpha) \Leftrightarrow x < \ln(1+\alpha),$ οπότε
 κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	$\ln(1+\alpha)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$
$g(x)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό
 ελάχιστο για $x = \ln(1+\alpha)$, το

$$\begin{aligned}
 g(\ln(1+\alpha)) &= e^{\ln(1+\alpha)} - (1+\alpha)\ln(1+\alpha) = \\
 &= (1+\alpha) - (1+\alpha)\ln(1+\alpha) =
 \end{aligned}$$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \ln(1+\alpha)$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$g(x) \geq g(\ln(1+\alpha)) \Leftrightarrow g(x) \geq (1+\alpha) - (1+\alpha)\ln(1+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$g(x) \geq (1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)).$$

Για να ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $(1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)) \geq 0$ ώστε για
 κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $g(x) \geq (1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)) \geq 0$. Συνεπώς είναι :

$$(1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)) \geq 0 \stackrel{1+\alpha > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln(1+\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln(1+\alpha) \leq \ln e \Leftrightarrow 1+\alpha \leq e \Leftrightarrow \alpha \leq e-1, \text{ άρα η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το } \alpha \text{ είναι } \boxed{\alpha = e-1}.$$

1603. A. Αν στη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$ θέσουμε όπου y το x

$$\text{παίρνουμε : } f(1) = f(x) - f(x) + \alpha x - \alpha x - \frac{\alpha x}{x} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(1) = -\alpha}}.$$

Αρχικά παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$ ως προς x :

$$f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = f'(x) + \alpha - \frac{\alpha}{y} \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} = xf'(x) + \alpha x - \frac{\alpha x}{y}.$$

Έπειτα τη παραγωγίζουμε ως προς y :

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -f'(y) - \alpha + \frac{\alpha x}{y^2} \Leftrightarrow -f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} = -yf'(y) - \alpha y + \frac{\alpha x}{y}.$$

Πρόσθέτοντας τις δύο σχέσεις που βρήκαμε παίρνουμε :

$$xf'(x) + \alpha x - yf'(y) - \alpha y = 0.$$

Αν τώρα στην καινούρια σχέση θέσουμε όπου $y=1$, τότε έχουμε :

$$xf'(x) + \alpha x - f'(1) - \alpha = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + \alpha x - 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) + \alpha x - 1 = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = 1 - \alpha x \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln x - \alpha x + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = -\alpha + c \Leftrightarrow -\alpha = -\alpha + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα $\boxed{f(x) = \ln x - \alpha x, x > 0}$.

B. Έχουμε $f(x) = \ln x - \alpha x$, άρα $f(e) = 1 - \alpha e$ και $f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha$, άρα

$f'(e) = \frac{1}{e} - \alpha$ κι έτσι βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$:

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)(x - e) + 1 - \alpha e \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{e}x - \alpha x - \cancel{1} + \cancel{\alpha e} + \cancel{1} - \cancel{\alpha e} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)x, \text{ συνεπώς η εφαπτομένη της } C_f$$

στο A **διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**

Γ. Η $f(x) = \ln x - \alpha x$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1 - \alpha x}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha x}{x} = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$-\infty$
$1 - \alpha x$ ($\alpha > 0$)		+	−
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗ O.M. ↘	

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο

για $x = \frac{1}{\alpha}$, το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln \alpha - 1$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = \frac{1}{\alpha}$,

οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι :

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow f(x) \leq -\ln \alpha - 1.$$

Για να ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ πρέπει $-\ln \alpha - 1 \leq 1$ ώστε για κάθε

$x \in (0, +\infty)$ να ισχύει $f(x) \leq -\ln \alpha - 1 \leq 1$. Συνεπώς είναι :

$$-\ln \alpha - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \ln \alpha \geq -2 \Leftrightarrow \ln \alpha \geq \ln e^{-2} \Leftrightarrow \alpha \geq e^{-2}, \text{ άρα η μικρότερη τιμή}$$

που μπορεί να πάρει το α είναι $\boxed{\alpha = e^{-2}}$.

Δ. Είναι $g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha} (\ln e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha} (\alpha x - \alpha e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} - x$.

Η $g(x) = e^{\alpha x} - x$ με πεδίο ορισμού το $D_g = \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = \alpha e^{\alpha x} - 1$.

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ln e^{\alpha x} = \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha x = -\ln \alpha \Leftrightarrow x = -\frac{\ln \alpha}{\alpha}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\alpha e^{\alpha x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} > 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} e^{\alpha x} > \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ln e^{\alpha x} > \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x > -\ln \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x > -\frac{\ln \alpha}{\alpha} \text{ και}$$

$$\alpha e^{\alpha x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} < 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} e^{\alpha x} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ln e^{\alpha x} < \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x < -\ln \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow}$$

$x < -\frac{\ln \alpha}{\alpha}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της g :

x	$-\infty$	$-\frac{\ln \alpha}{\alpha}$	$-\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		O.E.	

Συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο για $x = -\frac{\ln \alpha}{\alpha}$, το

$$g\left(-\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right) = e^{-\ln \alpha} + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\alpha) = \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha}$, $\alpha > 0$ και αναζητούμε τη μέγιστη τιμή της.

$$\text{Είναι : } h'(\alpha) = \frac{\cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} - \ln \alpha}{\alpha^2} = -\frac{\ln \alpha}{\alpha^2}$$

Έτσι έχουμε : $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}}$. Επιπλέον είναι :

$$\ln \alpha > 0 \Leftrightarrow \ln \alpha > \ln 1 \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ και}$$

$\ln \alpha < 0 \Leftrightarrow \ln \alpha < \ln 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της g :

x	0	1	$-\infty$
$\ln \alpha$		-	+
$h'(\alpha)$		+	-
$h(\alpha)$	O.M.		

Συνεπώς η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha = 1$, δηλαδή η ελάχιστη τιμή της g γίνεται μέγιστη για $\alpha = 1$.

Εύρεση τιμών παραμέτρων ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

1604. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\beta x + 2\alpha - \beta - 3$ είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολωνυμική, στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=1$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(1)=0$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = 3x^2 - 6\alpha x + 3\beta$.

Έτσι έχουμε: $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3-6\alpha+3\beta=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{2\alpha-\beta=1}}$.

Επιπλέον είναι: $f(1)=2 \Leftrightarrow 1-3\alpha+3\beta+2\alpha-\beta-3=2 \Leftrightarrow \underline{\underline{-\alpha+2\beta=4}}$.

Οπότε: $\begin{cases} 2\alpha-\beta=1 \\ -\alpha+2\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=1 \\ -2\alpha+4\beta=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=1 \\ 3\beta=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=1 \\ \beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\alpha=4 \\ \beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha=2} \\ \boxed{\beta=3} \end{cases}$. Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ με

παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Έτσι:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$\underline{\underline{x=1}}$ ή $\underline{\underline{x=3}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Άρα για $\alpha=2$ και $\beta=3$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$, το $f(1)=2$.

1605. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \alpha \ln(x-1) - \beta x^2 - 4x + 1$ είναι το $D_f = (1, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, άρα και στα $x_1=2$ και $x_2=3$ που είναι εσωτερικά σημεία του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα $x_1=2$ και $x_2=3$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(2)=0$ και $f'(3)=0$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = \frac{\alpha}{x-1} - 2\beta x - 4$. Έτσι έχουμε:

$f'(2)=0 \Leftrightarrow \alpha-4\beta-4=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha-4\beta=4}}$ και

$f'(3)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}-6\beta-4=0 \Leftrightarrow \alpha-12\beta-8=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha-12\beta=8}}$.

Οπότε: $\begin{cases} \alpha-4\beta=4 \\ \alpha-12\beta=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-4\beta=4 \\ -\alpha+12\beta=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-4\beta=4 \\ 8\beta=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-4\beta=4 \\ \beta=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha+2=4 \\ \beta=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha=2} \\ \boxed{\beta=-\frac{1}{2}} \end{cases}$.

Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x-1) + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} + x - 4 = \frac{2+x^2-5x+4}{x-1} = \frac{x^2-5x+6}{x-1}. \text{ Έτσι:}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow$$

$\underline{x=2}$ ή $\underline{x=3}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	−	+
$f(x)$		↗ T.M.	↘ T.E.	↗

Άρα για $\alpha=2$ και $\beta=-\frac{1}{2}$ η f

παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x=2$

το $\boxed{f(2)=-5}$ και **τοπικό ελάχιστο**

$$\text{στο } x=3, \text{ το } f(3) = 2\ln 2 + \frac{9}{2} - 11 = 2\ln 2 - \frac{13}{2} \Rightarrow \boxed{f(3) = 2\ln 2 - \frac{13}{2}}.$$

1606. i. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 2x^3 - 3(\alpha-1)x^2 + 6\alpha^2x + 1$ είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = -1$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(-1) = 0$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = 6x^2 - 6(\alpha-1)x + 6\alpha^2$. Έτσι έχουμε:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 6(\alpha-1) + 6\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha - 1 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=0} \text{ ή } \boxed{\alpha=-1}.$$

ii. ■ Για $\alpha=0$ η συνάρτηση είναι η $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ η οποία έχει παράγωγο

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1). \text{ Έτσι:}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=-1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗ T.M.	↘ T.E.	↗	

Άρα για $\alpha=0$ η f παρουσιάζει **τοπικό**

μέγιστο στο $x_0=-1$, το $\boxed{f(-1)=2}$.

■ Για $\alpha=-1$ η συνάρτηση είναι η $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1$ η οποία έχει παράγωγο

$$f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x^2 + 2x + 1). \text{ Έτσι:}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x=-1},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	↗		↗

Άρα για $\alpha=-1$ η f είναι γνησίως

αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και **δεν**

παρουσιάζει κανένα τοπικό ακρότατο.

- iii. Η συνάρτηση f που παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -1$, είναι η $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$. Από τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f προκύπτει ότι :
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και $A_2 = [0, +\infty)$.
 - Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [-1, 0]$.

Έχουμε $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 6x^2 + 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$
 και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 6x^2 + 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$.

Άρα :

$$f(A_1) = f\left(\left(-\infty, -1\right]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 2],$$

$$f(A_2) = f\left(\left[0, +\infty\right)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty) \text{ και}$$

$$f(A_3) = f\left(\left[-1, 0\right]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f(0), f(-1) \right] = [1, 2].$$

Οπότε $\boxed{f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}}$ το σύνολο τιμών της f .

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1 - 1$, στο A_1 .
- Το $0 \notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, δεν έχει καμία ρίζα στο A_2 .
- Το $0 \notin f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, δεν έχει καμία ρίζα στο A_3 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς μία ρίζα** στο $\mathbb{R}$.

1607. Το M ανήκει στη C_f άρα οι συντεταγμένες του είναι $M(x, ax^2)$. Έτσι είναι :

$$(AM) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(ax^2 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - 9ax^2 + \frac{81}{4}} = \sqrt{a^2x^4 + (1-9a)x^2 + \frac{81}{4}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x) = \sqrt{a^2x^4 + (1-9a)x^2 + \frac{81}{4}}$ η οποία έχει πεδίο

ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$d'(x) = \frac{4a^2x^3 + 2(1-9a)x}{2\sqrt{a^2x^4 + (1-9a)x^2 + \frac{81}{4}}} = \frac{2a^2x^3 + (1-9a)x}{\sqrt{a^2x^4 + (1-9a)x^2 + \frac{81}{4}}} = \frac{2a^2x^3 + (1-9a)x}{d(x)}.$$

Η d είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 2$ που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Η d παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ (γίνεται ελάχιστη), συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $d'(2) = 0$. Έτσι έχουμε :

$$d'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{16a^2 - 18a + 2}{d(2)} = 0 \Leftrightarrow 16a^2 - 18a + 2 = 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 9a + 1 = 0.$$

Είναι $\Delta = 49$ και $a_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{16}$, οπότε $\boxed{a = 1}$ ή $\boxed{a = \frac{1}{8}}$.

■ Για $\alpha=1$ η συνάρτηση είναι η $d(x)=\sqrt{x^4-8x^2+\frac{81}{4}}$ η οποία έχει παράγωγο

$$d'(x)=\frac{2x^3-8x}{\sqrt{x^4-8x^2+\frac{81}{4}}}=\frac{2x(x^2-4)}{\sqrt{x^4-8x^2+\frac{81}{4}}}. \text{ Έτσι:}$$

$$d'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2-4)}{\sqrt{x^4-8x^2+\frac{81}{4}}}=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή}$$

$$(x^2-4=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-2}}), \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της d :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
2x	-	-	0	+	+		
x^2-4	+	0	-	-	0	+	
$d'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$d(x)$	$\searrow$ T.E.		$\nearrow$ T.M.	$\searrow$ T.E.		$\nearrow$	

Άρα για $\alpha=1$ η d παρουσιάζει
τοπικό ελάχιστο στο $x=2$, το

$$d(2)=\sqrt{\frac{17}{4}}.$$

■ Για $\alpha=\frac{1}{8}$ η συνάρτηση είναι η :

$$d(x)=\sqrt{\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{8}x^2+\frac{81}{4}}=\sqrt{\frac{1}{64}(x^4-8x^2+1296)}=\frac{1}{8}\sqrt{x^4-8x^2+1296}, \text{ η οποία}$$

έχει παράγωγο

$$d'(x)=\frac{1}{8} \cdot \frac{4x^3-16x}{2\sqrt{x^4-8x^2+1296}}=\frac{x^3-4x}{4\sqrt{x^4-8x^2+1296}}=\frac{x(x^2-4)}{4\sqrt{x^4-8x^2+1296}}. \text{ Έτσι:}$$

$$d'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2-4)}{4\sqrt{x^4-8x^2+1296}}=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή}$$

$$(x^2-4=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-2}}), \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της d :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
x	-	-	0	+	+		
x^2-4	+	0	-	-	0	+	
$d'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$d(x)$	$\searrow$ T.E.		$\nearrow$ T.M.	$\searrow$ T.E.		$\nearrow$	

Άρα για $\alpha=\frac{1}{8}$ η d παρουσιάζει

τοπικό ελάχιστο στο $x=2$, το
 $d(2)=2\sqrt{5}$.

1608. α. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1$ είναι το $D_f=\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=1$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(1)=0$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x - 3$. Έτσι έχουμε :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}.$$

β. i. Για $\lambda = 0$ είναι $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Έτσι : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$ ή $\underline{\underline{x = 1}}$, οπότε κάνουμε

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\ominus$	$\ominus$	+
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[-1, 1]$.

και

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = -1$ το $f(-1) = 3$.

ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 1$ το $f(1) = -1$.

ii. Οι εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 9x$ θα έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 9$, δηλαδή $f'(x) = 9$. Άρα :

$$f'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}} \text{ ή } \underline{\underline{x = 2}}.$$

Η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(-2, -1)$ είναι η :

$$\varepsilon_1 : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) \Leftrightarrow y = 9(x + 2) - 1 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 9x + 17}.$$

Η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$ είναι η :

$$\varepsilon_2 : y = f'(2)(x - 2) + f(2) \Leftrightarrow y = 9(x - 2) + 3 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = 9x - 15}.$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sqrt{x}$, $x \geq 0$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(0) = f(0) = 1 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$, δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{x} = 0$, έχει **μία τουλάχιστον λύση** στο $(0, 1)$.

1609. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$, συνεπώς σύμφωνα με το **Θεώρημα**

Fermat θα είναι $f'(1) = 0$. Επιπλέον είναι και $f(1) = e$.

Είναι $g(x) = \alpha [f(x)]^x$ με παράγωγο :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \alpha \left([f(x)]^x \right)' = \alpha \left(e^{\ln[f(x)]^x} \right)' = \alpha \left(e^{x \ln f(x)} \right)' = \alpha e^{x \ln f(x)} \left(\ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)} \right) = \\ &= \alpha [f(x)]^x \left(\ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } g'(1) = af(1) \left(\ln f(1) + \frac{f'(1)}{f(1)} \right) = ae \ln e = ae.$$

Αφού η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, g(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - 3y + 1 = 0$, τότε θα είναι :

$$\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\text{οπ}} = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot g'(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} ae = -1 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2e}}.$$

1610. i. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = a^x + 2^x$ είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = a^x \ln a + 2^x \ln 2$. Έτσι έχουμε :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln 2a = \ln 1 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{2} = 2^{-1}}}.$$

ii. Για $a = 2^{-1}$ είναι $f(x) = 2^{-x} + 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο :

$$f'(x) = -2^{-x} \ln 2 + 2^x \ln 2 = \ln 2 (-2^{-x} + 2^x). \text{ Έτσι :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 (-2^{-x} + 2^x) = 0 \Leftrightarrow -2^{-x} + 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow$$

$$x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$-2^{-x} + 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 2^{-x} \stackrel{2^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x > -x \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

$$-2^{-x} + 2^x < 0 \Leftrightarrow 2^x < 2^{-x} \stackrel{2^x \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < -x \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ και}$$

$$2 > 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της } f:$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2^{-x} + 2^x$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$		Ο.Ε.	

Συνεπώς :

- Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0, +\infty)$.

και

ο $H f$ παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 2$.

1611. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_1 = 3$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = 3$, συνεπώς σύμφωνα με το

θεώρημα Fermat θα είναι $\underline{\underline{f'(3) = 0}}$. Επιπλέον είναι και $\underline{\underline{f(3) = -2}}$.

Τέλος, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_2 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα $\underline{\underline{f'(1) = 0}}$.

Έτσι έχουμε : $f'''(x) = 6 \Leftrightarrow f''(x) = 6x + c_1 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + c_1x + c_2$.

Είναι $f'(3) = 0 \Leftrightarrow 27 + 3c_1 + c_2 = 0$ και $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + c_1 + c_2 = 0$. Άρα:

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 = -27 \\ c_1 + c_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_1 + c_2 = -27 \\ -c_1 - c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 = -24 \\ -c_1 - c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -12 \\ -c_1 - c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -12 \\ 12 - c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -12 \\ c_2 = 9 \end{cases}. \text{Οπότε } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9. \text{ Τέλος έχουμε :}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c \xrightarrow{x=3} f(3) = c \Leftrightarrow c = -2.$$

Άρα $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, x \in \mathbb{R}}$.

1612. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 3x^4 - 2\lambda x^3 + \mu x^2 + 1$ είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(1) = 0$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = 12x^3 - 6\lambda x^2 + 2\mu x$. Έτσι έχουμε :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 12 - 6\lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3\lambda - \mu = 6}}.$$

Επιπλέον, η κλίση της f στο 3 είναι εξαπλάσια της κλίσης της f στο 2, δηλαδή $f'(3) = 6f'(2)$. Επομένως είναι :

$$f'(3) = 6f'(2) \Leftrightarrow 324 - 54\lambda + 6\mu = 6(96 - 24\lambda + 4\mu) \Leftrightarrow$$

$$54 - 9\lambda + \mu = 96 - 24\lambda + 4\mu \Leftrightarrow 15\lambda - 3\mu = 42 \Leftrightarrow \underline{\underline{5\lambda - \mu = 14}}.$$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} 3\lambda - \mu = 6 \\ 5\lambda - \mu = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda + \mu = -6 \\ 5\lambda - \mu = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 8 \\ 5\lambda - \mu = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ 5\lambda - \mu = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 4 \\ 20 - \mu = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 4} \\ \boxed{\mu = 6} \end{cases}.$$

Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1). \text{ Έτσι :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ ή}$$

$$(x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}), \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$12x$	-	$\emptyset$	+	+
$x^2 - 2x + 1$	+	+	$\emptyset$	+
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+	+
$f(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$	$\nearrow$

Άρα **δεν υπάρχουν** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f να πληρεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος, αφού η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$.

1613. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $x = \alpha$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f (πρέπει $\alpha > 0$). Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = \alpha$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(\alpha) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $f^3(x) + x^3 = 3xf(x) - 1$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 3x^2 = 3f(x) + 3xf'(x) \xrightarrow{x=\alpha} 3f^2(\alpha)\cancel{f'(\alpha)}^0 + 3\alpha^2 = 3f(\alpha) + 3\alpha\cancel{f'(\alpha)}^0 \Leftrightarrow 3\alpha^2 = 3f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = f(\alpha).$$

Θέτοντας στην αρχική σχέση όπου x το α έχουμε :

$$f^3(\alpha) + \alpha^3 = 3\alpha f(\alpha) - 1 \Leftrightarrow (\alpha^2)^3 + \alpha^3 = 3\alpha(\alpha^2) - 1 \Leftrightarrow \alpha^6 + \alpha^3 = 3\alpha^3 - 1 \Leftrightarrow \alpha^6 - 2\alpha^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha^3 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1 > 0}.$$

1614. Έστω x_1, x_2, x_3 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f με $x_1 < x_2 < x_3$.

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 3x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$ είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, στο $\mathbb{R}$, άρα και στα x_1, x_2, x_3 που είναι εσωτερικά σημεία του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στα x_1, x_2, x_3 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0$ και $f'(x_3) = 0$. Οι παράγωγοι της f είναι :

$$f'(x) = 12x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x + 1 \text{ και } f''(x) = 36x^2 + 6\alpha x + 2\beta.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και

$f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) και

$f'(x_2) = 0 = f'(x_3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$.

Είναι $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$, δηλαδή η εξίσωση :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^2 + 6\alpha x + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 18x^2 + 3\alpha x + \beta = 0, \text{ έχει δύο άνισες ρίζες.}$$

Άρα πρέπει : $\Delta > 0 \Leftrightarrow 9\alpha^2 - 72\beta > 0 \Leftrightarrow 9\alpha^2 > 72\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha^2 > 8\beta}$.

1615. i. Η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + 2\alpha x + 3\alpha$ έχει παράγωγο :

$$f'(x) = -3x^2 + 2\alpha x + 2\alpha.$$

Αφού τα ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι ρίζες της f , τότε είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$
τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$.
- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) και $f(\rho_2) = f(\rho_3)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$
τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$.

Είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, δηλαδή η εξίσωση :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2ax + 2a = 0, \text{ έχει δύο άνισες ρίζες. Άρα πρέπει :}$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 24a > 0 \Leftrightarrow a^2 + 6a > 0 \Leftrightarrow a(a+6) > 0, \text{ άρα}$$

$$a \in (-\infty, -6) \cup (0, +\infty).$$

ii. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζες τα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2a$,
οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	−	○	+	○	−
$f(x)$		T.E.		T.M.	

Διαπιστώνουμε πως η f παρουσιάζει
τοπικό ελάχιστο στο $x = x_1$ και τοπικό
μέγιστο στο $x = x_2$.

Αφού τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $-3x^2 + 2ax + 2a = 0$, τότε σύμφωνα με τους τύπους

$$\text{Vieta είναι : } x_1 + x_2 = -\frac{2a}{-3} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{2a}{3} \text{ και } x_1 x_2 = \frac{2a}{-3} \Leftrightarrow x_1 x_2 = -\frac{2a}{3}.$$

Έτσι έχουμε :

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 1 + \frac{2a}{3} - \frac{2a}{3} = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό
μέγιστο στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 για τα οποία ισχύει $(1+x_1)(1+x_2) = 1$.

1616. Η $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a}$, $a < 0$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-a\}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x+a) - (x^2 + ax + 1)}{(x+a)^2} = \frac{2x^2 + 2ax + \cancel{ax} + a^2 - x^2 - \cancel{ax} - 1}{(x+a)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2ax + a^2 - 1}{(x+a)^2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2ax + a^2 - 1}{(x+a)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Είναι } \Delta = \cancel{4a^2} - \cancel{4a^2} + 4 = 4, \text{ με } x_{1,2} = \frac{-2a \pm 2}{2} = -a \pm 1, \text{ οπότε}$$

$x = -a + 1$ ή $x = -a - 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	$-\alpha-1$	$-\alpha+1$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -\alpha-1$ το $f(-\alpha-1)$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = -\alpha+1$ το $f(-\alpha+1)$.

Η τιμή για την οποία η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο είναι διπλάσια της τιμής για την οποία παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, οπότε :

$$-\alpha+1=2(-\alpha-1) \Leftrightarrow -\alpha+1=-2\alpha-2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-3}.$$

Η f δεν έχει ακρότατα

1617. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα**

Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 4f(x)f'(x) + 3f'(x) = 3x^2 + 4x + 3 \quad \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow}$$

$$3f^2(x_0)\cancel{f'(x_0)}^0 + 4f(x_0)\cancel{f'(x_0)}^0 + 3\cancel{f'(x_0)}^0 = 3x_0^2 + 4x_0 + 3 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 + 4x_0 + 3 = 0, \text{ όπου } \Delta = -20 < 0, \text{ δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη.}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f **δεν έχει ακρότατα**.

1618. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα**

Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) + \ln(1+f^2(x)) = e^x + x^3 + 1$ παίρνουμε :

$$f'(x) + \frac{2f(x)f'(x)}{1+f^2(x)} = e^x + 3x^2 \quad \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} \quad \cancel{f'(x_0)}^0 + \frac{2f(x_0)\cancel{f'(x_0)}^0}{1+f^2(x_0)} = e^{x_0} + 3x_0^2 \Leftrightarrow$$

$e^{x_0} + 3x_0^2 = 0$, άτοπο αφού $e^{x_0} > 0$ και $3x_0^2 > 0$. Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f **δεν έχει ακρότατα**.

1619. Έστω ότι η $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα**

Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$ παίρνουμε :

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} \cancel{f'(x_0)}^0 = 3x_0^2 + 2\alpha x_0 + \beta \Leftrightarrow 3x_0^2 + 2\alpha x_0 + \beta = 0.$$

Είναι $\Delta = 4\alpha^2 - 12\beta = 4(\alpha^2 - 3\beta) < 0$, αφού $\alpha^2 < 2\beta < 3\beta$.

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f **δεν έχει ακρότατα**.

1620. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $f^3(x) + xf(x) = x + 2$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) = 1 \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} 3f^2(x_0)\cancel{f'(x_0)}^0 + f(x_0) + x_0\cancel{f'(x_0)}^0 = 1 \Leftrightarrow$$

$f(x_0) = 1$. Θέτοντας στην αρχική σχέση όπου x το x_0 έχουμε :

$$f^3(x_0) + x_0 f(x_0) = x_0 + 2 \Leftrightarrow 1 + x_0 = x_0 + 2 \Leftrightarrow 0x_0 = 1, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f **δεν έχει ακρότατα**.

1621. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $3x^2 f(x) - f^3(x) = 2x^3 - 1$ παίρνουμε :

$$6xf(x) + 3x^2 f'(x) - 3f^2(x)f'(x) = 6x^2 \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow}$$

$$6x_0 f(x_0) + 3x_0^2 \cancel{f'(x_0)}^0 - 3f^2(x_0)\cancel{f'(x_0)}^0 = 6x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$6x_0 f(x_0) = 6x_0^2 \stackrel{x_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x_0) = x_0.$$

Θέτοντας στην αρχική σχέση όπου x το x_0 έχουμε :

$$3x_0^2 f(x_0) - f^3(x_0) = 2x_0^3 - 1 \Leftrightarrow 3x_0^2 x_0 - x_0^3 = 2x_0^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^3 - x_0^3 = -1 \Leftrightarrow 0x_0^3 = -1, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f **δεν έχει ακρότατα**.

1622. i. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \quad \overset{x=x_0}{\Rightarrow}$$

$$3f^2(x_0) \cancel{f'(x_0)}^0 + 2\beta f(x_0) \cancel{f'(x_0)}^0 + \gamma \cancel{f'(x_0)}^0 = 3x_0^2 - 4x_0 + 6 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 4x_0 + 6 = 0, \text{ όπου } \Delta = -56 < 0, \text{ δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη.}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f **δεν έχει**

ακρότατα.

ii. Είναι :

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) = 3x^2 - 4x + 6.$$

Αναζητώντας το πρόσημο του τριωνύμου (ως προς $f(x)$) $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma$,

βρίσκουμε $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ και αφού ο συντελεστής του $f^2(x)$ είναι

$3 > 0$ συμπεραίνουμε πως $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$. Άρα :

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 6}{3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma} \text{ με } 3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0 \text{ και } 3x^2 - 4x + 6 > 0, \text{ αφού}$$

έχει $\Delta = -56 < 0$ και ο συντελεστής του x^2 είναι $3 > 0$.

Οπότε είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο

$[0, 1]$ ως πολυωνμική. Είναι $g(0) = -1 < 0$ και $g(1) = 4 > 0$, δηλαδή

$g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Έτσι έχουμε :

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = g(x) \quad \overset{x=\xi}{\Rightarrow} \quad f^3(\xi) + \beta f^2(\xi) + \gamma f(\xi) = \cancel{g(\xi)}^0 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi)(f^2(\xi) + \beta f(\xi) + \gamma) = 0.$$

Το τριώνυμο (ως προς $f(\xi)$) $f^2(\xi) + \beta f(\xi) + \gamma$, έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$, αφού

$\beta^2 < 3\gamma < 4\gamma$ και αφού ο συντελεστής του $f^2(x)$ είναι $1 > 0$ συμπεραίνουμε πως

$f^2(\xi) + \beta f(\xi) + \gamma > 0$.

Άρα :

$$f(\xi)(f^2(\xi) + \beta f(\xi) + \gamma) = 0 \quad \overset{f^2(\xi) + \beta f(\xi) + \gamma \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad f(\xi) = 0, \text{ δηλαδή το } \xi \in (0, 1) \text{ είναι ρίζα}$$

της εξίσωσης $f(x) = 0$ και είναι **μοναδικό** επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

1623. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 2e^x - x^2 - 2x + 2016$ παίρνουμε :

$$f'(x) + e^{f(x)}f'(x) = 2e^x - 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{f(x)}) = 2e^x - 2x - 2 \quad \overset{1 + e^{f(x)} \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2x - 2}{1 + e^{f(x)}} = \frac{2(e^x - x - 1)}{1 + e^{f(x)}}.$$

Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Οπότε θέτοντας όπου x το $e^x>0$ έχουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0, \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επιπλέον είναι και $1+e^{f(x)} > 0$, άρα $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f'(x) = 0$ μόνο για $x=0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν έχει τοπικά ακρότατα**.

1624. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f^3(x) + 3f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x + x - \frac{x^2}{4}$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = (x-1)\ln x + \frac{x}{2} - 1 + 1 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$3f'(x)(f^2(x)+1) = (x-1)\ln x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{(x-1)\ln x}{3(f^2(x)+1)}.$$

Αναζητούμε το πρόσημο του αριθμητή :

$$(x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } (\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}).$$

Επιπλέον είναι :

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1,$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα προσήμων :}$$

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	+
$\ln x$		-	+
$(x-1)\ln x$		+	+

Συνεπώς είναι $(x-1)\ln x \geq 0$. Επιπλέον είναι και $f^2(x)+1 > 0$, άρα $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, με $f'(x) = 0$ μόνο για $x=1$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$, οπότε **δεν έχει τοπικά ακρότατα**.

1625. Παραγωγίζοντας τη σχέση $\frac{1}{3}f^3(x) + f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 2016$ παίρνουμε :

$$f^2(x)f'(x) + f'(x) = \ln x + 1 - x \Leftrightarrow f'(x)(f^2(x)+1) = \ln x + 1 - x \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\ln x + 1 - x}{f^2(x)+1}.$$

Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού ότι $\ln x \leq x-1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x < 0$, με $f'(x) = 0$ μόνο για $x=1$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε **δεν έχει τοπικά ακρότατα**.

1626. Η $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 3x + a^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + 3. \text{ Είναι :}$$

$$\Delta = 4(a-1)^2 - 36 = 4((a-1)^2 - 9) = 4(a-1-3)(a-1+3) = 4(a-4)(a+2).$$

Αναζητούμε το πρόσημο της διακρίνουσας :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\alpha - 4)(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 4}} \text{ ή } \underline{\underline{\alpha = -2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

προσήμων :

α	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :
Δ	$+$	Φ	$-$	Φ	

■ για $\alpha < -2$ ή $\alpha > 4$ είναι $\Delta > 0$, δηλαδή η $f'(x)$ έχει δύο ρίζες άνισες, έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta > 0$ τότε θα αλλάξει πρόσημο διαδοχικά στα $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) και $(x_2, +\infty)$, συνεπώς θα παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

■ για $-2 < \alpha < 4$ είναι $\Delta < 0$, δηλαδή η $f'(x)$ δεν έχει καμία ρίζα και είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.

■ για $\alpha = -2$ είναι $\Delta = 0$, δηλαδή η $f'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα και αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta = 0$ τότε είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.

■ για $\alpha = 4$ είναι $\Delta = 0$, δηλαδή η $f'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα και αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta = 0$ τότε είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η f δεν έχει τοπικά ακρότατα για $\boxed{-2 \leq \alpha \leq 4}$.

1627. Η $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + 6)x + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \alpha + 6$. Είναι : $\Delta = 4\alpha^2 - 12(\alpha + 6) = 4(\alpha^2 - 3(\alpha + 6)) = 4(\alpha^2 - 3\alpha - 18) = 4(\alpha + 3)(\alpha - 6)$.

Αναζητούμε το πρόσημο της διακρίνουσας :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\alpha + 3)(\alpha - 6) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = -3}} \text{ ή } \underline{\underline{\alpha = 6}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

προσήμων :

α	$-\infty$	-3	6	$+\infty$	Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :
Δ	$+$	Φ	$-$	Φ	

■ για $\alpha < -3$ ή $\alpha > 6$ είναι $\Delta > 0$, δηλαδή η $f'(x)$ έχει δύο ρίζες άνισες, έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta > 0$ τότε θα αλλάξει πρόσημο διαδοχικά στα $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) και $(x_2, +\infty)$, συνεπώς θα παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

■ για $-3 < \alpha < 6$ είναι $\Delta < 0$, δηλαδή η $f'(x)$ δεν έχει καμία ρίζα και είναι $f'(x) > 0$, αφού $3 > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.

■ για $\alpha = -3$ είναι $\Delta = 0$, δηλαδή η $f'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα και αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta = 0$ τότε είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.

■ για $\alpha=6$ είναι $\Delta=0$, δηλαδή η $f'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα και αφού είναι δευτεροβάθμια με $\Delta=0$ τότε είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.
Αποδείξαμε λοιπόν πως η f δεν έχει τοπικά ακρότατα για $\boxed{-3 \leq \alpha \leq 6}$.

Από ανισοϊσότητα σε ισότητα με Fermat

- 1628.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^{2x} - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$.
Η σχέση $\alpha^{2x} \geq 2x + 1 \Leftrightarrow \alpha^{2x} - 2x - 1 \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$.
Η $f(x) = \alpha^{2x} - 2x - 1$ έχει παράγωγο $f'(x) = 2\alpha^{2x} \ln \alpha - 2$, οπότε :
 $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\ln \alpha = 2 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = e}$.
- 1629.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$. Παρατηρούμε πως $f(\alpha) = 0$, όπου $0 < \alpha \neq 1$.
Η σχέση $\alpha^x \geq x^\alpha \Leftrightarrow \alpha^x - x^\alpha \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(\alpha)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\alpha$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $x=\alpha$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(\alpha) = 0$.
Η $f(x) = \alpha^x - x^\alpha$ έχει παράγωγο $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \alpha x^{\alpha-1}$, οπότε :
 $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^\alpha \ln \alpha - \alpha \cdot \alpha^{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha^\alpha \ln \alpha - \alpha^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^\alpha (\ln \alpha - 1) = 0 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = e}$.
- 1630.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - \alpha x$, $x \in (-1, +\infty)$.
Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$.
Η σχέση $2(x+1)\ln(x+1) \leq x^2 + \alpha x \Leftrightarrow 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - \alpha x \leq 0$ γίνεται $f(x) \leq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, +\infty)$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$.
Η $f(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - \alpha x$ έχει παράγωγο $f'(x) = 2\ln(x+1) + 2 - 2x - \alpha$, οπότε : $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln 1^0 + 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$.
- 1631.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$.
Η σχέση $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η

f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0)=0$.

Η $f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ έχει παράγωγο $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta - 5e^x$, οπότε :

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta - 5 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha \beta = 5 \Leftrightarrow \ln \alpha \beta = \ln e^5 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \beta = e^5}.$$

- 1632.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x - \gamma^x - \delta^x$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $f(0)=0$.

Η σχέση $\alpha^x + \beta^x \geq \gamma^x + \delta^x \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - \gamma^x - \delta^x \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0)=0$.

Η $f(x) = \alpha^x + \beta^x - \gamma^x - \delta^x$ έχει παράγωγο $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta - \gamma^x \ln \gamma - \delta^x \ln \delta$, οπότε : $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta - \ln \gamma - \ln \delta = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta = \ln \gamma + \ln \delta \Leftrightarrow \ln \alpha \beta = \ln \gamma \delta \Leftrightarrow \boxed{\alpha \beta = \gamma \delta}$.

- 1633.** Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $f(0)=0$

Η σχέση $f(x) \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0)=0$.

Η $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$ έχει παράγωγο $f'(x) = 2^x \ln 2 + m^x \ln m - 4^x \ln 4 - 5^x \ln 5$, οπότε : $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln 2 + \ln m - \ln 4 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + \ln m = \ln 4 + \ln 5 \Leftrightarrow \ln 2m = \ln 20 \Leftrightarrow 2m = 20 \Leftrightarrow \boxed{m=10}$.

- 1634.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\eta\mu\alpha)^{x-1} + (2\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\ln x} - 2$, $x \in (0, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως $f(1)=0$.

Η σχέση $(\eta\mu\alpha)^{x-1} + (2\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\ln x} \geq 2 \Leftrightarrow (\eta\mu\alpha)^{x-1} + (2\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\ln x} - 2 \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(1)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $x=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(1)=0$.

Η $f(x) = (\eta\mu\alpha)^{x-1} + (2\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\ln x} - 2$ έχει παράγωγο

$$f'(x) = (\eta\mu\alpha)^{x-1} \cdot \ln(\eta\mu\alpha) + (2\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\ln x} \cdot \ln(2\sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot \frac{1}{x}, \text{ οπότε :}$$

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow \ln(\eta\mu\alpha) + \ln(2\sigma\upsilon\nu\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(\eta\mu 2\alpha) = \ln 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}.$$

- 1635. i.** Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \kappa x^x + \lambda \beta^x + \mu \gamma^x$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $f(0) = \kappa + \lambda + \mu$.

Η σχέση $f(x) \geq \kappa + \lambda + \mu$ γίνεται $f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$.

Η $f(x) = \kappa x^\kappa + \lambda \beta^x + \mu \gamma^x$ έχει παράγωγο $f'(x) = \kappa x^{\kappa-1} \ln \alpha + \lambda \beta^x \ln \beta + \mu \gamma^x \ln \gamma$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \kappa \ln \alpha + \lambda \ln \beta + \mu \ln \gamma = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha^\kappa + \ln \beta^\lambda + \ln \gamma^\mu = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha^\kappa \beta^\lambda \gamma^\mu) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha^\kappa \beta^\lambda \gamma^\mu = 1}$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = \kappa x^{\kappa-2} \ln^2 \alpha + \lambda \beta^x \ln^2 \beta + \mu \gamma^x \ln^2 \gamma$.

Είναι $\alpha^\kappa, \beta^\lambda, \gamma^\mu > 0$, $\kappa, \lambda, \mu > 0$ και $\ln^2 \alpha, \ln^2 \beta, \ln^2 \gamma > 0$, άρα $\boxed{f''(x) > 0}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1636. i. Αναζητούμε την τιμή ή τις τιμές που παίρνει το x έτσι ώστε να είναι

$3x+1 = 2x^2 + x + 1$ και έχουμε :

$$3x+1 = 2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Έτσι αν στη σχέση $f^2(3x+1) + 4 \leq 4f(2x^2 + x + 1)$ θέσουμε :

– όπου x το 0, παίρνουμε :

$$f^2(1) + 4 \leq 4f(1) \Leftrightarrow f^2(1) - 4f(1) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1) - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(1) = 2}}.$$

– όπου x το 1, παίρνουμε :

$$f^2(4) + 4 \leq 4f(4) \Leftrightarrow f^2(4) - 4f(4) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(4) - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(4) = 2}}.$$

Είναι $f(1) = f(4)$, αλλά $1 \neq 4$, συνεπώς η f δεν είναι 1-1, άρα **δεν αντιστρέφεται**.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(3x+1) + 4 - 4f(2x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε πως $g(1) = f^2(4) + 4 - 4f(4) = 0$ και $g(0) = f^2(1) + 4 - 4f(1) = 0$.

Η σχέση $f^2(3x+1) + 4 \leq 4f(2x^2 + x + 1) \Leftrightarrow f^2(3x+1) + 4 - 4f(2x^2 + x + 1) \leq 0$

γίνεται $g(x) \leq g(0)$, αλλά και $g(x) \leq g(1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στα $x_1=0$ και $x_2=1$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα $x_1=0$, $x_2=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0) = 0$ και $g'(1) = 0$.

Η $g(x) = f^2(3x+1) + 4 - 4f(2x^2 + x + 1)$ έχει παράγωγο

$$g'(x) = 6f(3x+1)f'(3x+1) - 4(4x+1)f'(2x^2 + x + 1), \text{ οπότε :}$$

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 6f(1)f'(1) - 4f'(1) = 0 \Leftrightarrow 12f'(1) - 4f'(1) = 0 \Leftrightarrow 8f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \text{ και}$$

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f(4)f'(4) - 20f'(4) = 0 \Leftrightarrow 12f'(4) - 20f'(4) = 0 \Leftrightarrow -8f'(4) = 0 \Leftrightarrow f'(4) = 0.$$

Έτσι έχουμε $f'(1) = f'(4)$, αλλά $1 \neq 4$, συνεπώς η f' δεν είναι 1-1, άρα **δεν αντιστρέφεται**.

iii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[1, 4]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[1, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ και $f'(1) = f'(4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** στο $\mathbb{R}$.

1637. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x - 3\beta^x$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως $f(0) = 0$.

Η σχέση $(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x \Leftrightarrow (\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x - 3\beta^x \geq 0$ γίνεται

$f(x) \geq f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(0) = 0$.

Η $f(x) = (\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x - 3\beta^x$ έχει παράγωγο

$f'(x) = (\alpha\beta)^x \ln(\alpha\beta) - \beta^{-x} \ln \beta + (\beta\gamma)^x \ln(\beta\gamma) - 3\beta^x \ln \beta$, οπότε :

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) - \ln \beta + \ln(\beta\gamma) - 3 \ln \beta = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) + \ln(\beta\gamma) = \ln \beta + \ln \beta^3 \Leftrightarrow$

$\ln(\alpha\beta^2\gamma) = \ln \beta^4 \Leftrightarrow \alpha\beta^2\gamma = \beta^4 \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta^2$, δηλαδή α, β και γ είναι **διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου**.

1638. Η συνάρτηση $g(x) = e^x - xf(x)$, $x < 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο :

$$g'(x) = e^x - f(x) - xf'(x).$$

Παρατηρούμε πως $g(0) = 1$, συνεπώς η σχέση $g(x) \leq 1$ γίνεται $g(x) \leq g(0)$,

δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(-\infty, 1)$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0) = 0$.

Έτσι έχουμε : $g'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - f(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 1}$.

1639. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x - \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Αφού το $A(0, 1)$ ανήκει στη C_f είναι $f(0) = 1$. Είναι $g(0) = f(0) - 1 - 1 = 0$.

Η σχέση $f(x) \leq e^x + \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) - e^x - \ln(x^2 + 1) \leq 0$ γίνεται $g(x) \leq g(0)$,

δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0) = 0$.

Η $g(x) = f(x) - e^x - \ln(x^2 + 1)$ έχει παράγωγο $g'(x) = f'(x) - e^x - \frac{2x}{x^2 + 1}$, οπότε :

$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$. Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

στο σημείο A είναι : $\varepsilon : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = x + 1}$.

1640. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{x+1}f(x) + 2$, $x < 0$.

Είναι $g(-1) = f(-1) + 2 = -2 + 2 = 0$.

Η σχέση $e^{x+1}f(x) \leq -2 \Leftrightarrow e^{x+1}f(x) + 2 \leq 0$ γίνεται $g(x) \leq g(-1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x = -1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(-\infty, 0)$.

Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, άρα και στο $x = -1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(-1) = 0$.

Η $g(x) = e^{x+1}f(x) + 2$ έχει παράγωγο $g'(x) = e^{x+1}f(x) + e^{x+1}f'(x)$, οπότε :

$$g'(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) + f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(-1) = 2}.$$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(-1, -2)$ είναι :

$$\varepsilon: y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \Leftrightarrow y = 2(x+1) - 2 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: y = 2x}.$$

1641. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(2x) - 2e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = f(0) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Η σχέση $f(2x) \geq 2e^{-2x} \Leftrightarrow f(2x) - 2e^{-2x} \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(0)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0) = 0$.

Η $g(x) = f(2x) - 2e^{-2x}$ έχει παράγωγο $g'(x) = 2f'(2x) + 4e^{-2x}$, οπότε :

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 2f'(0) + 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = -2}.$$

1642. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + 1 - x^2 - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = f(0) + 1 - 0 - 0 = 0$, όπου $f(0) = 0$, αφού η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η σχέση $f(x) + 1 \geq x^2 + \sin x \Leftrightarrow f(x) + 1 - x^2 - \sin x \geq 0$ γίνεται

$g(x) \geq g(0)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0) = 0$.

Η $g(x) = f(x) + 1 - x^2 - \sin x$ έχει παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 2x - \cos x$, οπότε :

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0. \text{ Η εξίσωση της εφαπτομένης της } C_f \text{ στο σημείο } O(0,0)$$

είναι : $\varepsilon: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow \varepsilon: y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$.

Αποδείξαμε λοιπόν, πως η C_f **εφάπτεται στον $x'x$** .

1643. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ είναι η :

$$\varepsilon: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow \varepsilon: y = f'(0)x + f(0).$$

Η εφαπτομένη ε διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \alpha)$, δηλαδή $f(\alpha) = \alpha$. Έτσι έχουμε :

$$\alpha = f'(0)\alpha + f(0) \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0) = \alpha - f'(0)\alpha}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{\alpha x} - f(0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.

Η σχέση $f(x)e^{ax} \geq f(0) \Leftrightarrow f(x)e^{ax} - f(0) \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(0)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0)=0$.

Η $g(x) = f(x)e^{ax} - f(0)$ έχει παράγωγο $g'(x) = f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax}$, οπότε :

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + af(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + a(a - f'(0)) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + a^2 - f'(0)a^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - a^2)f'(0) + a^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = \frac{a^2}{a^2 - 1}}.$$

1644. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(1+x) - f(1-x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = f(1) - f(1) = 0$.

Η σχέση $f(1+x) - f(1-x) \leq x^2 \Leftrightarrow f(1+x) - f(1-x) - x^2 \leq 0$ γίνεται

$g(x) \leq g(0)$, δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0)=0$.

Η $g(x) = f(1+x) - f(1-x) - x^2$ έχει παράγωγο $g'(x) = f'(1+x) + f'(1-x) - 2x$, οπότε : $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2f'(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 0}$.

1645. i. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \ln x - \frac{\alpha}{x} + \alpha$ είναι το $D_f = (0, +\infty)$.

Παρατηρούμε πως $f(1) = 0$. Οπότε η σχέση $f(x) \geq 0$ γίνεται $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $x=1$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=1$, συνεπώς σύμφωνα με το

θεώρημα Fermat θα είναι $f'(1) = 0$. Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2}$.

Έτσι έχουμε : $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$.

ii. Η $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας - ακροτάτων της f :

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	$\oplus$
$f'(x)$		-	$\oplus$
$f(x)$		 Ο.Ε. 	

Συνεπώς :

- Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0, 1]$.

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)=0$.

iii. Είναι $f(1)=0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $f(x)=0$. Έχουμε :

$$- \text{ Για } 0 < x < 1 \text{ είναι } x < 1 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ και}$$

$$- \text{ Για } x > 1 \text{ είναι } x > 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

Άρα $x=1$ είναι η **μοναδική ρίζα** της $f(x)=0$.

iv. Έχουμε :

$$\ln(2\lambda^2 + 2) - \frac{1}{\lambda^2 + 3} > \ln(\lambda^2 + 3) - \frac{1}{2\lambda^2 + 2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2\lambda^2 + 2) + \frac{1}{2\lambda^2 + 2} > \ln(\lambda^2 + 3) + \frac{1}{\lambda^2 + 3} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2\lambda^2 + 2) + \frac{1}{2\lambda^2 + 2} - 1 > \ln(\lambda^2 + 3) + \frac{1}{\lambda^2 + 3} - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(2\lambda^2 + 2) > f(\lambda^2 + 3) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \underset{\text{στο } [1, +\infty)}{2\lambda^2 + 2} > \lambda^2 + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda > 1 \text{ ή } \lambda < -1}.$$

1646. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } g(1) = f(1) - 3 = 3 - 3 = 0 \text{ αλλά και } g(2) = f(2) - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Η σχέση $f(x) \geq 2x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 2x - 1 \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(1)$ ή $g(x) \geq g(2)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1=1$ και $x_2=2$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα $x_1=1$ και $x_2=2$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(1)=0$ και $g'(2)=0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την g' στο διάστημα $[1, 2]$.

- Η g' είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $g'(1)=0=g'(2)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$
τέτοιο ώστε $g''(\xi)=0$.

$$\text{Η } g(x) = f(x) - 2x - 1 \text{ έχει παραγώγους τις } g'(x) = f'(x) - 2 \text{ και } g''(x) = f''(x).$$

$$\text{Άρα η } g''(\xi) = 0 \text{ γίνεται } \boxed{f''(\xi) = 0}.$$

1647. Τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της f , άρα $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$
τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $f(x) \geq 0$, έτσι είναι $f(x) \geq f(\rho_1)$ και $f(x) \geq f(\rho_2)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = \rho_1$ και $x_2 = \rho_2$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $(0,1)$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, άρα και στα $x_1 = \rho_1$ και $x_2 = \rho_2$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(\rho_1) = 0$ και $f'(\rho_2) = 0$.

Είναι $\rho_1 < x_1 < \rho_2$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[\rho_1, x_1]$ και $[x_1, \rho_2]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1, x_1]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, x_1) και $f'(\rho_1) = 0 = f'(x_1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, ρ_2) και $f'(x_1) = 0 = f'(\rho_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$.

Τέλος εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και για την f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

- Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f''(\xi_1) = 0 = f''(\xi_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $\boxed{f'''(\xi) = 0}$.

1648. i. Αν στη σχέση $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1$ θέσουμε :

– όπου x το 0, παίρνουμε :

$$2f(0) - f^2(0) \geq 1 \Leftrightarrow f^2(0) - 2f(0) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0) = 1}}.$$

– όπου x το 1, παίρνουμε :

$$2f(1) - f^2(1) \geq 1 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(1) = 1}}.$$

Είναι $f(0) = f(1)$, αλλά $0 \neq 1$, συνεπώς η f δεν είναι 1-1, άρα **δεν αντιστρέφεται**.

ii. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(0) = 1 = f(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή **η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο**.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2f(x^2) - f^2(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = 2f(0) - f^2(0) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$ αλλά και

$$g(1) = 2f(1) - f^2(1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Η σχέση $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2f(x^2) - f^2(x) - 1 \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(0)$ ή $g(x) \geq g(1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα

$x_1=0$ και $x_2=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0)=0$ και $g'(1)=0$.

Η $g(x)=2f(x^2)-f^2(x)-1$ έχει παράγωγο $g'(x)=4xf'(x^2)-2f(x)f'(x)$, οπότε :

$$g'(0)=0 \Leftrightarrow 2f(0)f'(0)=0 \Leftrightarrow 2f'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0 \text{ και}$$

$$g'(1)=0 \Leftrightarrow 4f'(1)-2f(1)f'(1)=0 \Leftrightarrow 4f'(1)-2f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0.$$

Είναι $f'(0)=0=f'(1)$, άρα οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(1,f(1))$ είναι **παράλληλες**, αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

iv. Είναι $f'(0)=0$, $f'(x_0)=0$ και $f'(1)=0$ με $0 < x_0 < 1$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[0, x_0]$, παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$ και $f'(0)=f'(x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=0$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$ και $f'(x_0)=f'(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2)=0$.

Είναι $f''(\xi_1)=0=f''(\xi_2)$, δηλαδή υπάρχουν **δύο τουλάχιστον σημεία** της $C_{f'}$ στα οποία οι εφαπτομένες τους είναι παράλληλες στον $x'x$.

1649. i. Αν στη σχέση $f^2(x)+9 \leq 6f(x^2)$ θέσουμε :

– όπου x το 0, παίρνουμε :

$$f^2(0)+9 \leq 6f(0) \Leftrightarrow f^2(0)-6f(0)+9 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0)=3}}.$$

– όπου x το 1, παίρνουμε :

$$f^2(1)+9 \leq 6f(1) \Leftrightarrow f^2(1)-6f(1)+9 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1)-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(1)=3}}.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[0, 1]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f(0)=f(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\underline{\underline{f'(x_1)=0}}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)+9-6f(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=f^2(0)+9-6f(0)=9+9-18=0$ αλλά και

$$g(1)=f^2(1)+9-6f(1)=9+9-18=0.$$

Η σχέση $f^2(x)+9 \leq 6f(x^2) \Leftrightarrow f^2(x)+9-6f(x^2) \leq 0$ γίνεται $g(x) \leq g(0)$ ή

$g(x) \leq g(1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στα $x=0$ και $x=1$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα

$x=0$ και $x=1$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(0)=0$ και $g'(1)=0$.

Η $g(x)=f^2(x)+9-6f(x^2)$ έχει παράγωγο $g'(x)=2f(x)f'(x)-12xf'(x^2)$, οπότε $g'(0)=0 \Leftrightarrow 2f(0)f'(0)=0 \Leftrightarrow 6f'(0)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(0)=0}}$ και

$g'(1)=0 \Leftrightarrow 2f(1)f'(1)-12f'(1)=0 \Leftrightarrow 6f'(1)-12f'(1)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(1)=0}}$.

Είναι $0 < x_1 < 1$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[0, x_1]$ και $[x_1, 1]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, x_1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, x_1)$ και $f'(0)=0=f'(x_1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1, 1)$ και $f'(x_1)=0=f'(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2)=0$.

Τέλος εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και για την f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

- Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi)=0$.

Αποδείξαμε πως η εξίσωση $f'''(x)=0$ έχει **τουλάχιστον μία** ρίζα.

ii. Είναι :

$$f''(x)=f'(x) \Leftrightarrow f''(x)-f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}f''(x)-e^{-x}f'(x)=0 \Leftrightarrow (e^{-x}f'(x))' + (e^{-x})'f'(x)=0 \Leftrightarrow (e^{-x}f'(x))'=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=e^{-x}f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $F(0)=f'(0)=0$, $F(x_1)=e^{-x_1}f'(x_1)=0$ και $F(1)=\frac{1}{e}f'(1)=0$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την F στα διαστήματα $[0, x_1]$ και $[x_1, 1]$.

- Η F είναι συνεχής στο $[0, x_1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, x_1)$ και $F(0)=0=F(x_1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa_1 \in (0, x_1)$ τέτοιο ώστε $F'(\kappa_1)=0$.
- Η F είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1, 1)$ και $F(x_1)=0=F(1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa_2 \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε $F'(\kappa_2)=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $F'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x}f'(x))' = 0 \Leftrightarrow f''(x) = f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

1650. i. Αν στη σχέση $2f(x) \geq f(1) + f(2)$ θέσουμε :

– όπου x το 1, παίρνουμε : $2f(1) \geq f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(1) \geq f(2)$.

– όπου x το 2, παίρνουμε : $2f(2) \geq f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(2) \geq f(1)$.

Άρα είναι $\boxed{f(1) = f(2)}$.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[1, 2]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $f(1) = f(2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\underline{\underline{f'(x_1) = 0}}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2f(x) - f(1) - f(2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(1) = 2f(1) - f(1) - f(2) = f(1) - f(2) \stackrel{f(1)=f(2)}{=} 0$ αλλά και

$g(2) = 2f(2) - f(1) - f(2) = f(2) - f(1) \stackrel{f(1)=f(2)}{=} 0$.

Η σχέση $2f(x) \geq f(1) + f(2) \Leftrightarrow 2f(x) - f(1) - f(2) \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(1)$ ή $g(x) \geq g(2)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στα $x=1$ και $x=2$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα $x=1$ και $x=2$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(1) = 0$ και $g'(2) = 0$.

Η $g(x) = 2f(x) - f(1) - f(2)$ έχει παράγωγο $g'(x) = 2f'(x)$, οπότε :

$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2f'(1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(1) = 0}}$ και

$g'(2) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(2) = 0}}$.

Είναι $1 < x_1 < 2$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[1, x_1]$ και $[x_1, 2]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[1, x_1]$, παραγωγίσιμη στο $(1, x_1)$ και $f'(1) = 0 = f'(x_1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1, 2)$ και $f'(x_1) = 0 = f'(2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$.

Τέλος εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και για την f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

- Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f''(\xi_1) = 0 = f''(\xi_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f''(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

1651. i. Αν στη σχέση $f(x) \leq \frac{f(1)+f(5)}{2}$ θέσουμε :

- όπου x το 1, παίρνουμε :

$$f(1) \leq \frac{f(1)+f(5)}{2} \Leftrightarrow 2f(1) \leq f(1)+f(5) \Leftrightarrow f(1) \leq f(5).$$

- όπου x το 5, παίρνουμε :

$$f(5) \leq \frac{f(1)+f(5)}{2} \Leftrightarrow 2f(5) \leq f(1)+f(5) \Leftrightarrow f(5) \leq f(1).$$

Άρα είναι $f(1) = f(5)$.

$$\text{Είναι } f(x) \leq \frac{f(1)+f(5)}{2} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{f(1)+f(1)}{2} \Leftrightarrow f(x) \leq f(1), \text{ άρα και}$$

$f(x) \leq f(5)$, δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$ και $x=5$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα $x=1$ και $x=5$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(1) = 0$ και

$$\underline{\underline{f'(5) = 0}}. \text{ Συνεπώς } \boxed{f'(1) = f'(5)}.$$

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[1, 5]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ και $f(1) = f(5)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$. Είναι :

$$xf''(x) = f'(x) \Leftrightarrow xf''(x) - x'f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(f'(x))' x - f'(x)x'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f'(x)}{x} \right)' = 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } F(x) = \frac{f'(x)}{x}, x > 0.$$

$$\text{Είναι } F(1) = f'(1) = 0, F(x_1) = \frac{f'(x_1)}{x_1} = 0 \text{ και } F(5) = \frac{f'(5)}{5} = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την F στα διαστήματα $[1, x_1]$ και $[x_1, 5]$.

- Η F είναι συνεχής στο $[1, x_1]$, παραγωγίσιμη στο $(1, x_1)$ και $F(1) = 0 = F(x_1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, x_1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1) = 0$.

- Η F είναι συνεχής στο $[x_1, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1, 5)$ και $F(x_1) = 0 = F(5)$,
 οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, 5)$
 τέτοιο ώστε $F'(\xi_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow xf''(x) = f'(x)$

έχει **δύο τουλάχιστον ρίζες** στο $\mathbb{R}$.

1652. i. Αν στη σχέση $f(x) \leq \frac{3f(2) + 2f(3)}{5}$ θέσουμε :

- όπου x το 2, παίρνουμε :

$$f(2) \leq \frac{3f(2) + 2f(3)}{5} \Leftrightarrow 5f(2) \leq 3f(2) + 2f(3) \Leftrightarrow 2f(2) \leq 2f(3) \Leftrightarrow f(2) \leq f(3)$$

- όπου x το 3, παίρνουμε :

$$f(3) \leq \frac{3f(2) + 2f(3)}{5} \Leftrightarrow 5f(3) \leq 3f(2) + 2f(3) \Leftrightarrow 3f(3) \leq 3f(2) \Leftrightarrow f(3) \leq f(2)$$

Άρα είναι $f(2) = f(3)$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[2, 3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και $f(2) = f(3)$, οπότε
 σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο
 ώστε $\underline{\underline{f'(x_0) = 0}}$.

Αποδείξαμε πως **υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$ στο οποίο η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.**

$$\text{Είναι } f(x) \leq \frac{3f(2) + 2f(3)}{5} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{3f(2) + 2f(2)}{5} \Leftrightarrow f(x) \leq f(2), \text{ άρα και}$$

$f(x) \leq f(3)$, δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=2$ και $x=3$, τα οποία είναι
 εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα
 $x=2$ και $x=3$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $\underline{\underline{f'(2) = 0}}$ και

$$\underline{\underline{f'(3) = 0}}.$$

Είναι $2 < x_0 < 3$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στα
 διαστήματα $[2, x_0]$ και $[x_0, 3]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[2, x_0]$, παραγωγίσιμη στο $(2, x_0)$ και
 $f'(2) = 0 = f'(x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον
 ένα $\xi_1 \in (2, x_0)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[x_0, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(x_0, 3)$ και
 $f'(x_0) = 0 = f'(3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον
 ένα $\xi_2 \in (x_0, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$.

Τέλος εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και για την f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

- Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και
 $f''(\xi_1) = 0 = f''(\xi_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει
τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$.

1653. α. Η $f(x) = x^4 + 4x + 8$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x+1)(x^2 - x + 1).$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1} \text{ ή } x^2 - x + 1 = 0, \text{ η οποία είναι}$$

αδύνατη αφού $\Delta = -3 < 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 - x + 1$	+		+
$x + 1$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$		$\swarrow$ O.E. $\nearrow$	

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0, -1]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = -1$ το $f(-1) = 5$.

β. Είναι $f(-1) = 5$. Έχουμε :

– Για $x < -1$ είναι $x < -1 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(-1) \Leftrightarrow f(x) > 5$ και

– Για $x > -1$ είναι $x > -1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(-1) \Leftrightarrow f(x) > 5$.

Άρα $x = -1$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 5$.

Άρα είναι : $f\left(\frac{2}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$.

γ. Είναι $4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25\alpha^4$.

■ Αν $\alpha = 0$, η εξίσωση γίνεται $16(\beta^4 + 4\beta + 8) = 0 \Leftrightarrow 16f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = 0$,
 άτοπο αφού $f(x) \geq 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

■ Αν $\alpha \neq 0$, τότε :

$$4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25\alpha^4 \stackrel{\alpha^4 \neq 0}{\Leftrightarrow} 4\left(2 + \frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^4}\right)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25 \Leftrightarrow$$

$$\left(8 + \frac{8}{\alpha} + \frac{16}{\alpha^4}\right)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{\alpha}\right)^4 + 4\frac{2}{\alpha} + 8\right)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{2}{\alpha}\right)f(\beta)=5\cdot 5 \Rightarrow f\left(\frac{2}{\alpha}\right)=5 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha}=-1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-2} \text{ και } \\ (f(\beta)=5 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-1}).$$

δ. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 (\sigma\upsilon\nu x + x)}{x^4 + 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} (\sigma\upsilon\nu x + x)}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{8}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x + 1}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{8}{x^4}} = \\ = \frac{0+1}{1+0+0} = 1, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ως μηδενική επί φραγμένη.}$$

Είναι :

$$|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} |\sigma\upsilon\nu x| \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \right) = 0.$$

ε. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = h(g(x)) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \varphi(0) = h(g(0)) - f(0) = h(1) - 8 = 8 - 8 = 0.$$

Η σχέση $h(g(x)) \leq f(x) \Leftrightarrow h(g(x)) - f(x) \leq 0$ γίνεται $\varphi(x) \leq \varphi(0)$, δηλαδή η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Επιπλέον η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $\varphi'(0) = 0$.

Η $\varphi(x) = h(g(x)) - f(x)$ έχει παράγωγο $\varphi'(x) = h'(g(x))g'(x) - f'(x)$, οπότε :

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow h'(g(0))g'(0) - f'(0) = 0 \Leftrightarrow h'(1) \cdot 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{h'(1) = 4}}, \text{ με}$$

$$g'(x) = -\eta\mu x + 1.$$

Η εφαπτομένη της C_h που διέρχεται από το σημείο $(1, h(1))$ είναι η :

$$\varepsilon_1 : y = h'(1)(x-1) + h(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) + 8 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 4x + 4}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = h'(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την H στο διάστημα $[1, 3]$.

– Η H είναι συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ και

$$H(1) = h'(1) - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ και } H(3) = h'(3) - 3 = 6 - 3 = 3, \text{ δηλαδή}$$

$$H(1) = H(3), \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα}$$

$$\xi \in (1, 3) \text{ τέτοιο ώστε } H'(\xi) = 0.$$

Η παράγωγος της $H(x) = h'(x) - x$ είναι η $H'(x) = h''(x) - 1$.

Έτσι έχουμε :

$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow h''(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{h''(\xi) = 1}$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $h''(\xi) = 1$.

1654. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = \alpha$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f . Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = \alpha$, συνεπώς σύμφωνα με το

θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\alpha) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f'(x)) - (x - \alpha)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(\alpha) = f(f'(\alpha)) - f(0) = 0$.

Η σχέση $f(f'(x)) \geq (x - \alpha)^2 \Leftrightarrow f(f'(x)) - (x - \alpha)^2 \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(\alpha)$,

δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \alpha$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = \alpha$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $g'(\alpha) = 0$.

Η $g(x) = f(f'(x)) - (x - \alpha)^2$ έχει παράγωγο $g'(x) = f'(f'(x))f''(x) - 2(x - \alpha)$,

οπότε: $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f'(f'(\alpha))f''(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(0)f''(\alpha) = 0}}$.

Αν είναι $f'(0) = 0$ τότε, αν στη σχέση $f(f'(x)) \geq (x - \alpha)^2$ βάλουμε όπου x το 0,

παίρνουμε $f(f'(0)) \geq (-\alpha)^2 \Leftrightarrow f(0) \geq \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 0$, άτοπο, αφού $\alpha \neq 0$.

Άρα $f'(0) \neq 0$, συνεπώς $\boxed{f''(\alpha) = 0}$.

1655. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = [0, 1]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, άρα και στο $x = c$ που είναι εσωτερικό σημείο του $[0, 1]$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = c$, συνεπώς σύμφωνα με το

θεώρημα Fermat θα είναι $f'(c) = 0$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f' στα διαστήματα $[0, c]$ και $[c, 1]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[0, c]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, c)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, c)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\cancel{c}) - f'(0)}{c - 0} = -\frac{f'(0)}{c} \Rightarrow \underline{\underline{f'(0) = -cf''(\xi_1)}}.$$

– Η f' είναι συνεχής στο $[c, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(c, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (c, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(1) - f'(\cancel{c})}{1 - c} = \frac{f'(1)}{1 - c} \Rightarrow \underline{\underline{f'(1) = (1 - c)f''(\xi_2)}}.$$

Άρα: $|f'(0)| + |f'(1)| = |-cf''(\xi_1)| + |(1 - c)f''(\xi_2)| = c|f''(\xi_1)| + (1 - c)|f''(\xi_2)| \leq$

$$\leq 2016c + 2016(1-c) = 2016 \Rightarrow \boxed{|f'(0)| + |f'(1)| \leq 2016}, \text{ αφού} \\ |f''(x)| \leq 2016 \text{ για κάθε } x \in [0,1] \text{ άρα και } |f''(\xi_1)| \leq 2016, |f''(\xi_2)| \leq 2016.$$

Όταν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα

1656. α. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[1, e]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[1, e]$ μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, 4]$. Είναι $f(1) \neq -1$ και $f(1) \neq 4$, όπως και $f(e) \neq -1$ και $f(e) \neq 4$. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, e)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $\boxed{f(x_1) = -1}$ και $\boxed{f(x_2) = 4}$.

β. Τα x_1, x_2 είναι θέσεις ακροτάτων και εσωτερικά σημεία του $[1, e]$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in (x_1, x_2) \subseteq (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(x_3) = 0$.

Συνεπώς αποδείξαμε πως $\boxed{f'(x_1) = f'(x_2) = f''(x_3) = 0}$.

1657. i. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[a, \beta]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[a, \beta]$ μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-2, 2]$. Είναι $f(a) \neq -2$ και $f(a) \neq 2$, όπως και $f(\beta) \neq -2$ και $f(\beta) \neq 2$. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $f(x_1) = -2$ και $f(x_2) = 2$.

Τα x_1, x_2 είναι θέσεις ακροτάτων και εσωτερικά σημεία του $[a, \beta]$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $\boxed{f'(x_1) = 0}$ και $\boxed{f'(x_2) = 0}$.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in (x_1, x_2) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_3) = 0$.

Συνεπώς αποδείξαμε πως η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει **τουλάχιστον μία ρίζα** στο (a, β)

1658. i. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[a, \beta]$. Άρα η f θα παίρνει στο

$[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, 2]$. Είναι $f(\alpha) \neq -1$ και $f(\alpha) \neq 2$, όπως και $f(\beta) \neq -1$ και $f(\beta) \neq 2$. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $f(x_1) = -1$ και $f(x_2) = 2$.

Τα x_1, x_2 είναι θέσεις ακροτάτων και εσωτερικά σημεία του $[\alpha, \beta]$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - (x^2 + 1)f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$$g(x_1) = f'(x_1) - (x_1^2 + 1)f(x_1) = (-1) - (x_1^2 + 1)(-1) = x_1^2 + 1 > 0 \text{ και}$$

$$g(x_2) = f'(x_2) - (x_2^2 + 1)f(x_2) = 0 - (x_2^2 + 1)2 = -2(x_2^2 + 1) < 0, \text{ δηλαδή}$$

$g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον

ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x^2 + 1)f(x), \text{ έχει μία τουλάχιστον λύση στο } (\alpha, \beta).$$

1659. i. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[1, 4]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[1, 4]$ μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, 2]$. Είναι $f(1) \neq -1$ και $f(1) \neq 2$, όπως και $f(4) \neq -1$ και $f(4) \neq 2$. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 4)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $f(x_1) = -1$ και $f(x_2) = 2$.

Τα x_1, x_2 είναι θέσεις ακροτάτων και εσωτερικά σημεία του $[1, 4]$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Είναι $f'(x_1) = f'(x_2)$ αλλά $x_1 \neq x_2$, συνεπώς η f' δεν είναι 1-1.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf(x) + f'(x)$, $x \in [1, 4]$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 4]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$$g(x_1) = x_1 f(x_1) + f'(x_1) = -x_1 < 0 \text{ και } g(x_2) = x_2 f(x_2) + f'(x_2) = 2x_2 > 0,$$

δηλαδή $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0}$.

1660. i. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[0, 5]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[0, 5]$ μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή, ο οποίος δεν μπορεί να είναι τα $f(0)$ και $f(5)$, αφού $f(1) < f(0) < f(5) < f(4)$.

Άρα υπάρχουν εσωτερικά σημεία του $(0,5)$, έστω α, β με $\alpha < \beta$, τέτοια ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατα σε αυτά.

Τα α, β είναι θέσεις ακροτάτων και εσωτερικά σημεία του $(0,5)$ και η f είναι

παραγωγίσιμη σε αυτά. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $f'(\alpha) = 0$ και

$$f'(\beta) = 0.$$

ii. Είναι :

$$f''(x) + 2xf'(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) + (x^2)'f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2}f''(x) + e^{x^2}(x^2)'f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2}f'(x))' = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = e^{x^2}f'(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

$$\text{Είναι } F(\alpha) = e^{\alpha^2} \cancel{f'(\alpha)}^0 = 0 \text{ και } F(\beta) = e^{\beta^2} \cancel{f'(\beta)}^0 = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την F στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

– Η F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $F(\alpha) = 0 = F(\beta)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq (0,5) \text{ τέτοιο ώστε } F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) = 0.$$

1661. Είναι $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο
ώστε $f(x_0) = 0$. Τότε $g(x) - 1 = f^2(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$g(x_0) = f^2(\cancel{x_0})^0 + 1 = 1.$$

Η σχέση $g(x) \geq 1$ γίνεται $g(x) \geq g(x_0)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο
 $x_0 \in \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat**

$$\text{είναι } g'(x_0) = 0.$$

1662. Είναι :

$$f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma) \Leftrightarrow f(\gamma) - f(\beta) = f(\alpha) > 0 \Rightarrow f(\gamma) - f(\beta) > 0 \Leftrightarrow f(\beta) < f(\gamma)$$

και

$$f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma) \Leftrightarrow f(\gamma) - f(\alpha) = f(\beta) > 0 \Rightarrow f(\gamma) - f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\gamma).$$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή, η οποία δεν είναι ούτε στο
 $x = \alpha$ αλλά ούτε και στο $x = \beta$ σύμφωνα με τις παραπάνω ανισότητες.

Άρα υπάρχει εσωτερικό σημείο του (α, β) , έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f
παρουσιάζει το μέγιστο. Επιπλέον η f είναι και παραγωγίσιμη, συνεπώς σύμφωνα με
το **θεώρημα Fermat** είναι $f'(x_0) = 0$.

1663. Είναι $f'(a) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, δηλαδή $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ για $x > a$, κοντά

στο a , άρα :

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} > 0 \quad \begin{matrix} x > \alpha \\ \Leftrightarrow \\ x - \alpha > 0 \end{matrix} \quad f(x)-f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha), \text{ δηλαδή το } f(\alpha)$$

δεν είναι μέγιστο της f .

$$\text{Όμοια είναι } f'(\beta) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} < 0, \text{ δηλαδή } \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} < 0 \text{ για } x < \beta,$$

κοντά στο β , άρα :

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} < 0 \quad \begin{matrix} x < \beta \\ \Leftrightarrow \\ x - \beta < 0 \end{matrix} \quad f(x)-f(\beta) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(\beta), \text{ δηλαδή το } f(\beta) \text{ δεν}$$

είναι μέγιστο της f .

Άρα υπάρχει εσωτερικό σημείο του (α, β) , έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f παρουσιάζει το μέγιστο. Επιπλέον η f είναι και παραγωγίσιμη, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $\boxed{f'(x_0)=0}$.

1664. Η $g(x) = f(x) - \lambda x$, $x \in [\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με παράγωγο

$$g'(x) = f'(x) - \lambda. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$g'(\alpha) = f'(\alpha) - \lambda < 0, \text{ αφού } f'(\alpha) < \lambda \text{ και } g'(\beta) = f'(\beta) - \lambda > 0, \text{ αφού } f'(\beta) > \lambda.$$

$$\text{Είναι } g'(\alpha) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} < 0, \text{ δηλαδή } \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} < 0 \text{ για } x > \alpha, \text{ κοντά}$$

στο α , άρα :

$$\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} < 0 \quad \begin{matrix} x > \alpha \\ \Leftrightarrow \\ x - \alpha > 0 \end{matrix} \quad g(x)-g(\alpha) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\alpha), \text{ δηλαδή το } g(\alpha)$$

δεν είναι ελάχιστο της g .

$$\text{Όμοια είναι } g'(\beta) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta} > 0, \text{ δηλαδή } \frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta} > 0 \text{ για } x < \beta,$$

κοντά στο β , άρα :

$$\frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta} > 0 \quad \begin{matrix} x < \beta \\ \Leftrightarrow \\ x - \beta < 0 \end{matrix} \quad g(x)-g(\beta) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\beta), \text{ δηλαδή το } g(\beta)$$

δεν είναι ελάχιστο της g .

Άρα υπάρχει εσωτερικό σημείο του (α, β) , έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον η f είναι και παραγωγίσιμη, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $\boxed{g'(x_0)=0}$.

1665. **A.** Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[1, e]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[1, e]$ μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, 4]$. Είναι $f(1) \neq -1$ και $f(1) \neq 4$, όπως και $f(e) \neq -1$ και $f(e) \neq 4$. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, e)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $f(x_1) = -1$ και $f(x_2) = 4$.

Τα x_1, x_2 είναι θέσεις ακροτάτων και εσωτερικά σημεία του $(1, e)$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Δηλαδή $\boxed{f'(x_1) = f'(x_2) = 0}$

B. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, e)$ τέτοιο ώστε $\boxed{f''(\xi) = 0}$.

Γ. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω x_1 η θέση του μεγίστου, οπότε θα είναι $\underline{f(x_1) = 4}$ και x_2 η θέση του ελαχίστου, οπότε θα είναι $\underline{f(x_2) = -1}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)[f'(x) - 4f^4(x)] - x$, $x \in [x_1, x_2] \subseteq (1, e)$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(x_1) = f(x_1) \left[\cancel{f'(x_1)}^0 - 4f^4(x_1) \right] - x_1 = 4 \cdot (-4^5) - x_1 = -4^6 - x_1 < 0$ και

$h(x_2) = f(x_2) \left[\cancel{f'(x_2)}^0 - 4f^4(x_2) \right] - x_2 = -(-4) - x_2 = 4 - x_2 > 0$, αφού $x_1 \in (1, e)$,

δηλαδή $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in [x_1, x_2] \subseteq (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0)[f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0}.$$

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) + x - e - 2$, $x \in [1, e]$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$$F(1) = f(1) - e - 1 = 2 - e - 1 = 1 - e < 0 \text{ και } F(e) = f(e) - 2 = \cancel{e} + 1 - \cancel{e} = 1 > 0,$$

δηλαδή $F(1) \cdot F(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $c_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$F(c_0) = 0 \Leftrightarrow f(c_0) + c_0 - e - 2 = 0 \Leftrightarrow f(c_0) = -c_0 + e + 2.$$

Δηλαδή η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0 \in (1, e)$.

E. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[1, c_0]$ και $[c_0, e]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[1, c_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, c_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, c_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c_0) - f(1)}{c_0 - 1} = \frac{-c_0 + e + \cancel{2} - \cancel{2}}{c_0 - 1} = \frac{e - c_0}{c_0 - 1} \Rightarrow \underline{\underline{f'(\xi_1) = \frac{e - c_0}{c_0 - 1}}}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[c_0, e]$ και παραγωγίσιμη στο (c_0, e) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (c_0, e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(c_0)}{e - c_0} = \frac{e^2 + 1 + c_0 - e^2 - 2}{e - c_0} = \frac{c_0 - 1}{e - c_0} \Rightarrow \underline{\underline{f'(\xi_2) = \frac{c_0 - 1}{e - c_0}}}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{\cancel{e - c_0}}{\cancel{c_0 - 1}} \cdot \frac{\cancel{c_0 - 1}}{\cancel{e - c_0}} \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1}.$$

1666. i. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano για την f στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, \gamma]$ με $f(a) > 0$ και $f(\gamma) < 0$, δηλαδή $f(a)f(\gamma) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (a, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.
- Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ με $f(\gamma) < 0$ και $f(\beta) > 0$, δηλαδή $f(\gamma)f(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **τουλάχιστον δύο λύσεις** στο διάστημα (a, β) .

ii. Είναι :

$$2xf(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2)'f(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}f'(x) + e^{x^2}(x^2)'f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2}f(x))' = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = e^{x^2}f(x)$, $x \in [a, \beta]$.

$$\text{Είναι } F(x_1) = e^{x_1^2} \cancel{f(x_1)}^0 = 0 \text{ και } F(x_2) = e^{x_2^2} \cancel{f(x_2)}^0 = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την F στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

- Η F είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $F(x_1) = 0 = F(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0}.$

iii. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$

- Η f είναι συνεχής στο $[a, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (a, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (a, \gamma) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} < 0$, αφού

$$\begin{cases} f(\alpha) > 0 \\ f(\gamma) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f(\alpha) < 0 \\ f(\gamma) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(\gamma) - f(\alpha) < 0 \text{ και } \gamma > \alpha \Leftrightarrow \gamma - \alpha > 0$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda \in (\gamma, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\lambda) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} > 0, \text{ αφού}$$

$$\begin{cases} f(\beta) > 0 \\ f(\gamma) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\beta) > 0 \\ -f(\gamma) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(\beta) - f(\gamma) > 0 \text{ και } \beta > \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma > 0.$$

Έτσι έχουμε $\boxed{f'(\kappa)f'(\lambda) < 0}$ με $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa \neq \lambda$.

iv. Είναι $f'(\kappa) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \kappa^+} \frac{f(x) - f(\kappa)}{x - \kappa} < 0$, δηλαδή $\frac{f(x) - f(\kappa)}{x - \kappa} < 0$ για $x > \kappa$,

κοντά στο κ , άρα :

$$\frac{f(x) - f(\kappa)}{x - \kappa} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x > \kappa \\ \Leftrightarrow x - \kappa > 0 \end{matrix} \quad f(x) - f(\kappa) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\kappa), \text{ δηλαδή το } f(\kappa)$$

δεν είναι ελάχιστο της f .

Όμοια είναι $f'(\lambda) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} > 0$, δηλαδή $\frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} > 0$ για $x < \lambda$,

κοντά στο λ , άρα :

$$\frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x < \lambda \\ \Leftrightarrow x - \lambda < 0 \end{matrix} \quad f(x) - f(\lambda) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\lambda), \text{ δηλαδή το } f(\lambda)$$

δεν είναι ελάχιστο της f .

Άρα υπάρχει εσωτερικό σημείο του (κ, λ) , έστω $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ στο οποίο η f παρουσιάζει το ελάχιστο. Επιπλέον η f είναι και παραγωγίσιμη, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

Όταν $m=M$ τότε η f είναι σταθερή

1667. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[0,1]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[0,1]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f θα την παρουσιάζει :

■ στα άκρα του διαστήματος $[0,1]$. Αλλά είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$, συνεπώς θα είναι $m = M = f(0) = f(1) = 0$.

■ σε εσωτερικό σημείο x_0 του $[0,1]$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_0) = 0$. Έτσι είναι $f(x_0) = (x_0^2 - x_0) f'(x_0) = 0$ και $m = M = f(x_0) = 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $m = M = 0$, δηλαδή η f είναι η **μηδενική συνάρτηση**.

1668. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $[1,4]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[1,4]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f θα την παρουσιάζει :

■ στα άκρα του διαστήματος $[1, 4]$. Αλλά είναι $f(1) = 2$ και $f(4) = 0$, συνεπώς θα είναι $m = M = f(1) = f(4) = 2$.

■ σε εσωτερικό σημείο x_0 του $[1, 4]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα

είναι $f'(x_0) = 0$. Έτσι είναι $f(x_0) = (x_0^2 - 5x_0 + 4) f'(x_0)^0 + 2 = 2$ και

$$m = M = f(x_0) = 2.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $m = M = 2$, δηλαδή η f είναι σταθερή συνάρτηση με $\boxed{f(x) = 2}$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1669. i. Το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση $M(x) = E(x) - K(x) = x^2 - \frac{\alpha}{4}x^3$, $x > 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $M'(x) = 2x - \frac{3\alpha}{4}x^2 = \frac{-3\alpha x^2 + 8x}{4} = \frac{1}{4}(-3\alpha x + 8)x$.

Έτσι :

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-3\alpha x + 8)x = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} -3\alpha x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3\alpha}, \text{ οπότε κάνουμε } \underline{\underline{x_0 = \frac{8}{3\alpha}}}$$

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της M :

x	0	$\frac{8}{3\alpha}$	$+\infty$
$M'(x)$		+	−
$M(x)$		↗ O.M.	↘

Άρα η M παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο

$$\boxed{x_0 = \frac{8}{3\alpha}}, \text{ το}$$

$$M(\alpha) = \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{4} \cdot \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^3 = \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{8}{3\alpha}\right) = \frac{64}{9\alpha^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{64}{27\alpha^2} \Leftrightarrow \boxed{M(\alpha) = \frac{64}{27\alpha^2}}$$

$$\text{, όπου } \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right].$$

ii. Για κάθε $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ είναι $M'(\alpha) = -\frac{128}{27\alpha^3} < 0$, άρα η συνάρτηση M είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$. Έστω $A = \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ το πεδίο ορισμού της M . Το

σύνολο τιμών της είναι :

$$M(A) = M\left(\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]\right) \stackrel{M \text{ γν. φθ.}}{=} \stackrel{M \text{ συνεχής}}{=} \left[M\left(\frac{9}{2}\right), M\left(\frac{2}{9}\right)\right], \text{ δηλαδή το } M(\alpha) \text{ γίνεται μέγιστο για}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{9}} \text{ και είναι ίσο με } M\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{64}{27} \cdot \frac{4}{81} = \frac{16}{\frac{1}{3}} = 48 \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{2}{9}\right) = 48}.$$

1670. Η συνάρτηση συνολικού κέρδους είναι η $P(t) = f(t) + K(t)$, $t \geq 0$.

Για κάθε $t > 0$ είναι :

$$P'(t) = f'(t) + K'(t) = \left(\frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \right)' + \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} = -\frac{A}{4} e^{-\frac{t+28}{14}} + \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} \left(1 - e^{-\frac{t-28}{14}} \right).$$

Έτσι :

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} \left(1 - e^{-\frac{t-28}{14}} \right) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} \neq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t-28}{14}} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t-28}{14}} = e^0 \Leftrightarrow \underline{t = 28}.$$

Επιπλέον είναι :

- $1 - e^{-\frac{t-28}{14}} > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t-28}{14}} < 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t-28}{14}} < e^0 \Leftrightarrow \frac{t-28}{14} < 0 \Leftrightarrow t < 28$ και
- $1 - e^{-\frac{t-28}{14}} < 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t-28}{14}} > 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t-28}{14}} > e^0 \Leftrightarrow \frac{t-28}{14} > 0 \Leftrightarrow t > 28$, οπότε

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της P :

t	0	28	$+\infty$
$P'(t)$		+	−
$P(t)$		↗ O.M.	↘

Άρα το P παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $\boxed{t = 28}$.

Δηλαδή το συνολικό κέρδος P γίνεται μέγιστο όταν $t=28$.

1671. i. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, άρα $f(6) = 15$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=6$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$.

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $x=6$, συνεπώς σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(6) = 0$.

Η παράγωγος της $f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$ είναι :

$$f'(t) = \frac{\alpha \left(1 + \frac{t^2}{\beta^2} \right) - 2 \left(\frac{t}{\beta} \right) \cdot \frac{1}{\beta} \alpha t}{\left(1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right)^2} = \alpha \frac{1 + \frac{t^2}{\beta^2} - 2 \frac{t^2}{\beta^2}}{\left(1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right)^2} = \alpha \frac{1 - \frac{t^2}{\beta^2}}{\left(1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right)^2}. \text{ Άρα :}$$

$$f'(6) = 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{1 - \frac{36}{\beta^2}}{\left(1 + \left(\frac{6}{\beta} \right)^2 \right)^2} = 0 \Leftrightarrow \overset{\alpha > 0}{1 - \frac{36}{\beta^2}} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 36 \Leftrightarrow \overset{\beta > 0}{\boxed{\beta = 6}}$$

$$\text{Ακόμη έχουμε : } f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{6\alpha}{1 + \left(\frac{6}{6} \right)^2} = 15 \Leftrightarrow 3\alpha = 15 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 5}.$$

ii. Η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, άρα :

$$f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{5t}{1+\left(\frac{t}{6}\right)^2} \geq 12 \stackrel{1+\left(\frac{t}{6}\right)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 5t \geq 12\left(1+\frac{t^2}{36}\right) \Leftrightarrow 5t \geq 12 + \frac{t^2}{3} \Leftrightarrow$$

$15t \geq 36 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-12) \leq 0 \Rightarrow t \in [3, 12]$, δηλαδή το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά, είναι από την 3^η έως την 12^η ώρα από τη λήψη του.

1672. i. Είναι :

$$f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 \Leftrightarrow f'(t) = (8\ln(t+1) - 2t)' \Leftrightarrow f(t) = 8\ln(t+1) - 2t + c \stackrel{t=0}{\Rightarrow}$$

$f(0) = c \Leftrightarrow \underline{c=0}$, αφού τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $f(0)=0$, αφού το φάρμακο χορηγείται για πρώτη φορά. Έτσι έχουμε : $\boxed{f(t) = 8\ln(t+1) - 2t, t \geq 0}$.

ii. Για κάθε $t > 0$ είναι $f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 = \frac{-2t+6}{t+1}$. Έτσι :

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2t+6}{t+1} = 0 \stackrel{t > 0}{\Leftrightarrow} -2t+6 = 0 \Leftrightarrow \underline{t=3}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$		+	−
$f(t)$		↗	↘

Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $t=3$, δηλαδή **η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό γίνεται μέγιστη μετά από 3 ώρες**.

iii. Τη χρονική στιγμή $t=8$ η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό είναι $f(8) = 8\ln 9 - 16 = 16\ln 3 - 16 = 16(\ln 3 - 1) > 0$, αφού

$3 > e \Leftrightarrow \ln 3 > \ln e \Leftrightarrow \ln 3 > 1 \Leftrightarrow \ln 3 - 1 > 0$, άρα **υπάρχει ακόμη επίδραση**.

Τη χρονική στιγμή $t=10$ η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό είναι $f(10) = 8\ln 11 - 20 \approx 8 \cdot 2,4 - 20 = 19,2 - 20 = -0,8 < 0$, άρα **η επίδραση του**

φαρμάκου έχει μηδενιστεί πριν τη χρονική στιγμή $t=10$.

1673. i. Η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά είναι :

$$P(0) = 4 + \frac{-6}{\frac{25}{4}} = 4 - \frac{24}{25} = \frac{76}{25} = 3,04 \text{ ή } \underline{\underline{3.040 \text{ δραχμές}}}.$$

ii. Για κάθε $t > 0$ η παράγωγος της συνάρτησης $P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}$ είναι :

$$P'(t) = \frac{t^2 + \frac{25}{4} - 2t(t-6)}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{t^2 + \frac{25}{4} - 2t^2 + 12t}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2}.$$

$$\text{Έτσι: } P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 12t + \frac{25}{4} = 0.$$

Είναι $\Delta = 144 + 25 = 169$ με $t_{1,2} = \frac{-12 \pm 13}{-2}$, δηλαδή $t = \frac{25}{2}$ ή $t = -\frac{1}{2}$, οπότε

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της P :

t	0			
---	---	--	--	--

Η P είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$\left[0, \frac{25}{2}\right]$, δηλαδή το χρονικό διάστημα

στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται, είναι από την εισαγωγή του

στην αγορά μέχρι και 12,5 μήνες μετά.

iii. Η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη 12,5 μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά.

iv. Για κάθε $t > \frac{25}{2}$ είναι η $P'(t) < 0$, δηλαδή η P είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η τιμή του προϊόντος συνεχώς μειώνεται. Όμως είναι :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} \right) = 4 + 0 = 4, \text{ αφού } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Είναι $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 4 > P(0)$, άρα η τιμή του προϊόντος δεν γίνεται ποτέ μικρότερη από την τιμή του τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

1674. Για κάθε $t \in (0, 20)$ είναι $f'(t) = \left(\frac{10000}{1+e^{-t+10}} + 10 \right)' = \frac{10000e^{-t+10}}{(1+e^{-t+10})^2}$ και

$$\begin{aligned} f''(t) &= \left(\frac{10000e^{-t+10}}{(1+e^{-t+10})^2} \right)' = \frac{-10000e^{-t+10}(1+e^{-t+10})^2 + 2(1+e^{-t+10})e^{-t+10} \cdot 10000e^{-t+10}}{(1+e^{-t+10})^4} = \\ &= 10000e^{-t+10} \frac{-1-e^{-t+10} + 2e^{-t+10}}{(1+e^{-t+10})^3} = \frac{10000e^{-t+10}}{(1+e^{-t+10})^3} (-1+e^{-t+10}). \end{aligned}$$

Έτσι :

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{10000e^{-t+10}}{(1+e^{-t+10})^3} (-1+e^{-t+10}) = 0 \Leftrightarrow -1+e^{-t+10} = 0 \Leftrightarrow e^{-t+10} = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-t+10} = e^0 \Leftrightarrow \underline{t=10}.$$

Επιπλέον είναι :

- $-1+e^{-t+10} > 0 \Leftrightarrow e^{-t+10} > 1 \Leftrightarrow e^{-t+10} > e^0 \Leftrightarrow -t+10 > 0 \Leftrightarrow t < 10$ και
- $-1+e^{-t+10} < 0 \Leftrightarrow e^{-t+10} < 1 \Leftrightarrow e^{-t+10} < e^0 \Leftrightarrow -t+10 < 0 \Leftrightarrow t > 10$,
οπότε

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f' :

t	0	10	20	
f''(t)		+	⊖	-
f'(t)		↗	O.M.	↘

Άρα η f' παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο

$$t_0 = 10, \text{ το } f'(10) = \frac{10000}{4} = 2500.$$

Δηλαδή ο ρυθμός αύξησης των πωλήσεων γίνεται μέγιστος σε 10 μήνες από την έναρξη των πωλήσεων.

- 1675. i.** Το ημερήσιο κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή x μονάδων προϊόντος είναι :

$$\begin{aligned} P(x) &= x \left(55 - \frac{1}{4}x \right) - (2500 + 25x) - \varphi x = 55x - \frac{1}{4}x^2 - 2500 - 25x - \varphi x = \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + (30 - \varphi)x - 2500 \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + (30 - \varphi)x - 2500, x \geq 0. \end{aligned}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $P'(x) = -\frac{1}{2}x + 30 - \varphi$.

Έτσι :

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 30 - \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 30 - \varphi \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 60 - 2\varphi}}, \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της P :

x	0	60-2φ	+∞
P'(x)		+	○ -
P(x)		↗	O.M. ↘

Η P παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο

$x = 60 - 2\varphi$, δηλαδή η βιομηχανία

πρέπει να παράγει ημερησίως 60-2φ μονάδες έτσι ώστε το ημερήσιο κέρδος

της να

γίνεται μέγιστο.

- ii.** Αν η βιομηχανία παράγει ημερησίως $x = 60 - 2\varphi$ μονάδες, τότε ο φόρος που εισπράττει το κράτος κάθε μέρα είναι :

$$f(\varphi) = \varphi \cdot (60 - 2\varphi) = -2\varphi^2 + 60\varphi, 0 \leq \varphi \leq 30.$$

Για κάθε $\varphi \in (0, 30)$ είναι $f'(\varphi) = -4\varphi + 60$. Έτσι :

$$f'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow -4\varphi + 60 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\varphi = 15}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας –}$$

ακροτάτων της f :

φ	0	15	30	
$f'(\varphi)$		+	$\bigcirc$	-
$f(\varphi)$		$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο

$\varphi = 15$, δηλαδή η βιομηχανία **πρέπει να πληρώνει φόρο 15€ για κάθε μονάδα προϊόντος, έτσι ώστε το κράτος να εισπράττει κάθε μέρα το μέγιστο φόρο.**

- 1676. α.** Πριν τη διαφημιστική καμπάνια το κέρδος της βιοτεχνίας δίνεται από τη συνάρτηση :

$$\begin{aligned} P(x) &= xT(x) - K(x) = x(3000 - 2x) - (2200x + 20000) = \\ &= 3000x - 2x^2 - 2200x - 20000 = -2x^2 + 800x - 20000 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P(x) = -2x^2 + 800x - 20000, 0 \leq x \leq 300.$$

Για κάθε $x \in (0, 300)$ είναι $P'(x) = -4x + 800$. Έτσι :

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 800 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 200}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας}$$

– ακροτάτων της P :

x	0	200	300
P'(x)		+	⊖
P(x)		↗ O.M. ↘	

Η P παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = 200$, δηλαδή **το κέρδος γίνεται μέγιστο, όταν η βιοτεχνία παράγει 200 μονάδες προϊόντος ημερησίως.**

Μετά τη διαφημιστική καμπάνια το κέρδος της βιοτεχνίας δίνεται από τη συνάρτηση :

$$P(x) = xT(x) - K(x) - x(x + 20) = x(3000 - 2x) - (2200x + 20000) - x(x + 20) = \\ = 3000x - 2x^2 - 2200x - 20000 - x^2 - 20x = -3x^2 + 780x - 20000 \Rightarrow$$

$$P(x) = -3x^2 + 780x - 20000, 0 \leq x \leq 300.$$

Για κάθε $x \in (0, 300)$ είναι $P'(x) = -6x + 780$. Έτσι :

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 780 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 130}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας}$$

– ακροτάτων της P :

x	0	130	300
P'(x)		+	⊖
P(x)		↗ O.M. ↘	

Η P παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = 130$, δηλαδή **το κέρδος γίνεται μέγιστο, όταν η βιοτεχνία παράγει 130 μονάδες προϊόντος ημερησίως.**

α. i. Πριν τη διαφημιστική καμπάνια η τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος είναι $T(200) = 3000 - 400 = 2600$ €, ενώ μετά τη διαφημιστική καμπάνια η τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος είναι $T(130) = 3000 - 260 = 2740$ €. Άρα **ο καταναλωτής βρίσκει το προϊόν κατά 140€ ακριβότερο.**

ii. Πριν τη διαφημιστική καμπάνια τα κέρδη της βιοτεχνίας είναι $P(200) = -80.000 + 160.000 - 20.000 = 60.000$ €, ενώ μετά τη διαφημιστική καμπάνια τα κέρδη της βιοτεχνίας είναι $P(130) = -50.700 + 101.400 - 20.000 = 30.700$ €. Άρα **η βιοτεχνία χάνει 29.300€.**

1677. i. Ο όγκος της δεξαμενής είναι $V = 1000$, άρα :

$$V = 1000 \Leftrightarrow x^2 h = 1000 \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \frac{1000}{x^2}}}.$$

Το ολικό εμβαδόν της δεξαμενής είναι :

$$E_{\text{ολ}} = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x \frac{1000}{x^2} = 2x^2 + \frac{4000}{x}.$$

$$\text{Το συνολικό μήκος των ακμών είναι : } 4h + 8x = 4 \frac{1000}{x^2} + 8x = \frac{4000}{x^2} + 8x.$$

Άρα το συνολικό κόστος κατασκευής της δεξαμενής είναι :

$$K(x) = \alpha \left(2x^2 + \frac{4000}{x} \right) + \beta \left(\frac{4000}{x^2} + 8x \right) = 2\alpha x^2 + \frac{4000\alpha}{x} + \frac{4000\beta}{x^2} + 8\beta x \Rightarrow$$

$$K(x) = 2\alpha x^2 + 8\beta x + \frac{4000\alpha}{x} + \frac{4000\beta}{x^2}.$$

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned} K'(x) &= 4\alpha x + 8\beta - \frac{4000\alpha}{x^2} - \frac{8000\beta}{x^3} = \frac{4\alpha x^4 + 8\beta x^3 - 4000\alpha x - 8000\beta}{x^3} = \\ &= \frac{4x^3(\alpha x + 2\beta) - 4000(\alpha x + 2\beta)}{x^3} = \frac{(\alpha x + 2\beta)(4x^3 - 4000)}{x^3} = \\ &= \frac{4(\alpha x + 2\beta)(x^3 - 1000)}{x^3} = \frac{4(\alpha x + 2\beta)(x - 10)(x^2 + 10x + 100)}{x^3}. \end{aligned}$$

Έτσι :

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(\alpha x + 2\beta)(x - 10)(x^2 + 10x + 100)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}} \text{ ή}$$

$$(x^2 + 10x + 100 = 0, \text{ Αδύνατη αφού } \Delta = -300 < 0) \text{ ή}$$

$$\left(\alpha x + 2\beta = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2\beta}{\alpha} < 0 \text{ αφού } \alpha, \beta > 0 \right), \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της K :

x	0	10	$+\infty$
$\alpha x + 2\beta$		+	+
$x - 10$		-	+
$x^2 + 10x + 100$		+	+
$K'(x)$		-	+
$K(x)$			O.E.

Η K παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = 10$, δηλαδή **το συνολικό κόστος της δεξαμενής γίνεται ελάχιστο για $x = 10$ dm, οπότε $h = 10$ dm, είναι δηλαδή ανεξάρτητο των α και β .**

1678. i. Οι x μηχανές σε t ώρες εκτυπώνουν $100xt$ αφίσες, άρα :

$$100xt = 100.000 \Leftrightarrow t = \frac{1.000}{x}, x > 0.$$

Έτσι το συνολικό κόστος είναι :

$$K(x) = 20x + 50 \frac{1.000}{x} = 20x + \frac{50.000}{x}, x > 0.$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } K'(x) = 20 - \frac{50.000}{x^2} = \frac{20x^2 - 50.000}{x^2}. \text{ Έτσι :}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{20x^2 - 50.000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 = 50.000 \Leftrightarrow x^2 = 2.500 \xrightarrow{x > 0} \underline{\underline{x = 50}}$$

, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της K :

x	0	50	$+\infty$
$K'(x)$		-	+
$K(x)$			O.E.

Η K παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = 50$, δηλαδή **πρέπει να τεθούν σε λειτουργία 50 μηχανές έτσι ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος.**

ii. Το **ελάχιστο δυνατό κόστος** είναι $K(50) = 1.000 + 1.000 = 2.000 \text{ €}$.

Εύρεση κυρτότητας και σημείων καμψής συνάρτησης

1679. i. Η $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - 3x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3$ και

$f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Έτσι έχουμε :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$ ή $\underline{x=1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

κυρτότητας – σημείων καμψής :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	$\bigcirc$	+	+
$x-1$	-	-	$\bigcirc$	+
$f''(x)$	-	$\bigcirc$	-	+
f(x)				

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

και

ο **Σημείο καμψής** είναι το $A\left(1, -\frac{61}{30}\right)$.

ii. Η $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$ και

$$f''(x) = \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2) \cdot (-2x) \cdot (x^2+1)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(1-x^2) + 4x(x^2+1)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x - 2x^3 + 4x^3 + 4x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Έτσι έχουμε : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα κυρτότητας – σημείων καμψής :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
2x	-	-	$\bigcirc$	+	+
$(1-x^2)^3$	-	+	+	-	-
$f''(x)$	+	-	$\bigcirc$	+	-
f(x)					

Συνεπώς :

– Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $[0, 1)$.

– Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα $(-1, 0]$ και $(1, +\infty)$.

και

ο **Σημείο καμψής** είναι το $O(0, 0)$.

iii. Η $f(x) = \ln(x^2+1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=-1} \text{ ή } \underline{x=1}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x^2$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-
$f''(x)$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-
$f(x)$	$\curvearrowright$ $\Sigma.K.$ $\curvearrowleft$ $\Sigma.K.$ $\curvearrowright$				

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $[-1, 1]$.

και

- ο **Σημεία καμπής** είναι τα $A(-1, \ln 2)$ και $B(1, \ln 2)$.

iv. Η $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$ και

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η f είναι **κοίλη** στο $\mathbb{R}$ και **δεν υπάρχουν σημεία καμπής**.

v. Η $f(x) = e^x(x^2 + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = x^2e^x + e^x + 2xe^x \text{ και}$$

$$f''(x) = 2xe^x + x^2e^x + e^x + 2e^x + 2xe^x = x^2e^x + 4xe^x + 3e^x = e^x(x^2 + 4x + 3).$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$\underline{x=-1}$ ή $\underline{x=-3}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
x^2+4x+3	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$f''(x)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$	$\curvearrowright_{\Sigma.K.} \quad \curvearrowleft_{\Sigma.K.} \quad \curvearrowright$				

Συνεπώς :

– Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[-1, +\infty)$.

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $[-3, -1]$.

και

- ο **Σημεία καμπής** είναι τα $A(-3, 10e^{-3})$ και $B(-1, 2e^{-1})$.

vi. Η $f(x) = 1 + 2x^2 + 2x^2(\ln x - 2)^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 4x + 4x(\ln x - 2)^2 + 4x^2(\ln x - 2) \cdot \frac{1}{x} = 4x + 4x(\ln x - 2)^2 + 4x(\ln x - 2) \text{ και}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 + 4(\ln x - 2)^2 + 8x(\ln x - 2) \cdot \frac{1}{x} + 4(\ln x - 2) + 4 = \\ &= 4 + 4(\ln^2 x - 4\ln x + 4) + 8\ln x - 16 + 4\ln x - 8 + 4 = \\ &= 4\ln^2 x - 16\ln x + 16 + 8\ln x - 16 + 4\ln x = 4\ln^2 x - 4\ln x = 4\ln x(\ln x - 1). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\ln x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}) \text{ ή } (\ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{x=e}).$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$,
- ο $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$ και
- ο $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.

Συνεπώς :

– Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[e, +\infty)$.

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $[1, e]$.

και

- ο **Σημεία καμπής** είναι τα

$$A(1, 11) \text{ και } B(e, 4e^2 + 1).$$

vii. Πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 4 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 3x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 6x^2 + 4 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 6x) = 0.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

$$\text{Για } x < 0 \text{ έχουμε : } f(x) = x^3 + 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6.$$

$$\text{Οπότε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1}.$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ έχουμε : } f(x) = x^3 - 6x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12.$$

$$\text{Οπότε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 2}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$6x+6$	-	Φ	+		
$6x-12$				-	Φ +
f(x)	$\curvearrowright_{\Sigma.K.} \curvearrowleft_{\Sigma.K.} \curvearrowright_{\Sigma.K.} \curvearrowleft_{\Sigma.K.}$				

Συνεπώς :

- Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0, 2]$.- Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[2, +\infty)$.

και

ο **Σημεία καμπής** είναι τα $A(-1, 6)$, $B(0, 4)$ και $\Gamma(2, -12)$.**viii.** Πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f στο $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 + 7x^2 - 7}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x-1) + 7(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 7x + 7) = 15 \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 13 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - 8x^2 + 8}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(x-1) - 8(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 8x - 8) = -15. \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,
 οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο αλλαγής.

Για $x < 1$ έχουμε : $f(x) = x^3 + 6x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x \Rightarrow f''(x) = 6x + 12$.

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}}$.

Για $x > 1$ έχουμε : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 13 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 6x - 18$.

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}}$.

Οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας - σημείων καμπής :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$6x+12$	-	Φ	+		
$6x-18$				-	Φ +
f(x)	$\curvearrowright_{\Sigma.K.} \curvearrowleft_{\Sigma.K.} \curvearrowright_{\Sigma.K.} \curvearrowleft_{\Sigma.K.}$				

Συνεπώς :

- Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, 3]$.- Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $[-2, 1]$ και $[3, +\infty)$.

και

ο **Σημεία καμπής** είναι τα $A(-2, 14)$ και $B(3, -41)$.

1680. Η $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{με παραγώγους : } f'(x) = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+4)^2 - 2(x^2+4) \cdot 2x \cdot (4-x^2)}{(x^2+4)^4} = \frac{-2x^3-8x-4x(4-x^2)}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-12) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή}$$

$(x^2=12 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2\sqrt{3}}} \text{ ή } \underline{\underline{x=-2\sqrt{3}}})$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	0	$2\sqrt{3}$	$+\infty$		
2x	-	-	0	+	+		
x^2-12	+	0	-	-	0	+	
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	$\curvearrowright$ Σ.Κ. $\curvearrowleft$ Σ.Κ. $\curvearrowright$ Σ.Κ. $\curvearrowleft$						

Συνεπώς :

ο **Σημεία καμπής** είναι τα
 $A\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $O(0,0)$ και
 $B\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

Έτσι έχουμε $\lambda_{OA} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{8}}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{16}$ και $\lambda_{OB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{16}$, οπότε $\lambda_{OA} = \lambda_{OB}$, δηλαδή η f

έχει **τρία σημεία καμπής** τα οποία είναι **συνευθειακά**.

1681. i. Η $f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)^4$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)^3(x-\gamma)^4 + 3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^4 +$$

$$+ 4(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)^3 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^3 [2(x-\beta)(x-\gamma) + 3(x-\alpha)(x-\gamma) + 4(x-\alpha)(x-\beta)]$$

Οπότε έχουμε :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^3 [2(x-\beta)(x-\gamma) + 3(x-\alpha)(x-\gamma) + 4(x-\alpha)(x-\beta)]}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)^4}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{[2(x-\beta)(x-\gamma) + 3(x-\alpha)(x-\gamma) + 4(x-\alpha)(x-\beta)]}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2(x-\beta)(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{3(x-\alpha)(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{4(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x-\alpha} + \frac{3}{x-\beta} + \frac{4}{x-\gamma}.$$

ii. Η $g(x) = \ln|f(x)|$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x-\alpha} + \frac{3}{x-\beta} + \frac{4}{x-\gamma} \text{ και}$$

$$g''(x) = -\frac{2}{(x-\alpha)^2} - \frac{3}{(x-\beta)^2} - \frac{4}{(x-\gamma)^2} = -\left(\frac{2}{(x-\alpha)^2} + \frac{3}{(x-\beta)^2} + \frac{4}{(x-\gamma)^2}\right) < 0.$$

Συνεπώς η g είναι **κοίλη** στα διαστήματα (α, β) και (β, γ) .

1682. i. Η $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 2\alpha x - 2 \ln x - 2 \text{ και } f''(x) = 2\alpha - \frac{2}{x} = \frac{2\alpha x - 2}{x} = \frac{2(\alpha x - 1)}{x}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\alpha x - 1)}{x} = 0 \Leftrightarrow \overset{x \neq 0}{\alpha x - 1 = 0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{\alpha}}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

κυρτότητας - σημείων καμπής :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
x		+	+
$\alpha x - 1$		-	+
$f''(x)$		-	+
f(x)		$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$

Συνεπώς :

- Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right]$.

- Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $\left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = (2\alpha - 2)(x-1) + \alpha \Leftrightarrow y = 2\alpha x - 2\alpha - 2x + 2 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon : y = 2(\alpha - 1)x - \alpha + 2}.$$

Αφού η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε το σημείο $O(0,0)$ θα την

$$\text{επαληθεύει : } \varepsilon : y = 2(\alpha - 1)x - \alpha + 2 \overset{x=y=0}{\Rightarrow} 0 = -\alpha + 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}.$$

1683. i. Η $f(x) = x^2 \ln x$ έχει **πεδίο ορισμού** το $A = (0, +\infty)$, αφού πρέπει $x > 0$, και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \overset{x \neq 0}{2 \ln x + 1 = 0} \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-\frac{1}{2}}}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\bullet \quad 2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \text{ και}$$

- $2\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x		+	+
$2\ln x + 1$		-	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο

$$\text{διάστημα } A_1 = \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right).$$

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο

$$\text{διάστημα } A_2 = \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right).$$

και

- Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$ το $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

ii. Η $f(x) = x^2 \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 2x \ln x + x \text{ και } f''(x) = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-\frac{3}{2}}}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{3}{2}},$

οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$		$\cap$	$\cup$

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα

$$\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right).$$

και

- **Σημείο καμπής** είναι το $A\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$.

iii. Έχουμε $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f\left(\left[0, e^{-\frac{1}{2}}\right]\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right],$$

$$f(A_2) = f\left(\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right).$$

$$\text{Οπότε } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right) \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

1684. α. Είναι $f(x) = a^x - \ln(x+1) \xrightarrow{x=0} f(0) = 1$, άρα θα είναι και

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0), \text{ δηλαδή το } f(0) \text{ είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων, άρα και συνεχής, με παράγωγο } f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}.$$

Έτσι έχουμε :

– Το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, +\infty)$,

– Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$ και

– Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, άρα και στο $x = 0$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = e}.$$

β. Έχουμε λοιπόν $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $x > -1$.

$$\text{i. Είναι : } f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ και } f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \text{ για κάθε } x > -1.$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $(-1, +\infty)$.

ii. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι $f'(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $f'(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι $1-1$. Οπότε :

– Για $-1 < x < 0$ έχουμε : $x < 0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1, 0]$.

– Για $x > 0$ έχουμε : $x > 0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

$$\text{iii. Είναι : } \frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$g(1) = -(f(\beta) - 1) < 0$, αφού $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ και $\beta \neq 0$ και

$g(2) = f(\gamma) - 1 > 0$, αφού $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ και $\gamma \neq 0$.

Είναι $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } x_0 \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{x_0 - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x_0 - 2} = 0.$$

Άρα η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ έχει **τουλάχιστον μία ρίζα** στο $(1, 2)$.

1685. A. Η $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη

$$(\text{άρα και συνεχής}) \text{ με παράγωγο : } f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2 + 2x}{x^2 + 1} = 2 \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 1}.$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα ισχύει $x^2 + x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B. Είναι :

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = \ln((3x - 2)^2 + 1) - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln((x^2)^2 + 1) = 2(3x - 2) + \ln((3x - 2)^2 + 1) \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x - 2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ή } x = 2}.$$

Γ. Η $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$ και

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = -2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \text{ ή } x = -1}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$-2x^2+2$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-
$f''(x)$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\curvearrowright$

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $[-1, 1]$.

και

ο **Σημεία καμπής** είναι τα $A(-1, -2 + \ln 2)$ και $B(1, 2 + \ln 2)$.

Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A :

$$\varepsilon_1 : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) \Leftrightarrow y = x + 1 - 2 + \ln 2 \Leftrightarrow y = x - 1 + \ln 2.$$

Έστω ε_2 η εφαπτομένη της C_f στο σημείο B :

$$\varepsilon_2 : y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 3(x-1) + 2 + \ln 2 \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2.$$

Βρίσκουμε το σημείο τομής των εφαπτομένων :

$$x - 1 + \ln 2 = 3x - 1 + \ln 2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ δηλαδή οι εφαπτομένες θα τέμνονται σε σημείο του άξονα } y'y.$$

1686. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα έχουμε :

$$f'(x) = \alpha f(x) \Rightarrow f''(x) = \alpha f'(x) \Leftrightarrow f''(x) = \alpha^2 f(x) > 0, \text{ αφού } \alpha \neq 0 \text{ και } f(x) > 0. \text{ Άρα η } f \text{ είναι κυρτή σε όλο το } \mathbb{R}.$$

1687. Η $g \circ f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, συνεπώς έχουμε :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \Rightarrow (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$(g \circ f)''(x) = g''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x).$$

Είναι $g''(f(x)) > 0$, αφού $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in f(\Delta)$, $g'(f(x)) > 0$ αφού $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in f(\Delta)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Συνεπώς θα είναι και $(g \circ f)''(x) > 0$, δηλαδή η $(g \circ f)(x)$ είναι **κυρτή** στο Δ .

1688. α. Η $g(x) = e^{x-f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού το Δ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παραγώγους :

$$g'(x) = (1 - f'(x))e^{x-f(x)} \text{ και}$$

$$g''(x) = -f''(x)e^{x-f(x)} + (1 - f'(x))^2 e^{x-f(x)} = e^{x-f(x)} \cdot [(1 - f'(x))^2 - f''(x)]. \text{ Είναι :}$$

$$|1 - f'(x)| < \sqrt{f''(x)} \Leftrightarrow (1 - f'(x))^2 < f''(x) \Leftrightarrow (1 - f'(x))^2 - f''(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x-f(x)} \cdot [(1 - f'(x))^2 - f''(x)] < 0 \Leftrightarrow g''(x) < 0, \text{ άρα η } g \text{ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, δηλαδή είναι κοίλη στο } \Delta.$$

β. Παρατηρούμε πως η $g(x) = e^{x-2x^2}$ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **α.** για

$$f(x) = 2x^2. \text{ Έχουμε λοιπόν } f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f''(x) = 4 \text{ και}$$

$$|1 - f'(x)| < \sqrt{f''(x)} \stackrel{f(x)=2x^2}{\Rightarrow} |1 - 4x| < \sqrt{4} \Leftrightarrow |1 - 4x| < 2 \Leftrightarrow -2 < 1 - 4x < 2 \Leftrightarrow -3 < -4x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}.$$

Έτσι λοιπόν αφού είναι $f''(x) = 4 > 0$ και $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, τότε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα η g **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω**.

1689. Είναι $f^{(3)}(x) > 0$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $f''(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της $f''(x) = 0$, αφού η f'' είναι $1-1$. Οπότε :

– Για $x < 0$ έχουμε : $x < 0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$, δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, 0]$.

– Για $x > 0$ έχουμε : $x > 0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $[0, +\infty)$.

1690. Η $f^{(3)}$ είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f^{(3)}(x) \neq 0$, άρα θα είναι $f^{(3)}(x) > 0$ ή $f^{(3)}(x) < 0$.

- Αν $f^{(3)}(x) > 0$ τότε η f'' θα είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , και άρα 1–1.

Επιπλέον είναι $f''(x_0) = 0$, άρα το $x = x_0$ είναι η μοναδική λύση της

$f''(x) = 0$ αφού είναι 1–1. Οπότε :

– Για $x < x_0$ έχουμε : $x < x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$ και

– Για $x > x_0$ έχουμε : $x > x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$.

Οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	–	Φ	+
$f(x)$		Σ.Κ.	

Συνεπώς το x_0 είναι **θέση σημείου καμπής** της f .

- Αν $f^{(3)}(x) < 0$ τότε η f'' θα είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , και άρα 1–1.

Επιπλέον είναι $f''(x_0) = 0$, άρα το $x = x_0$ είναι η μοναδική λύση της

$f''(x) = 0$ αφού είναι 1–1. Οπότε :

– Για $x < x_0$ έχουμε : $x < x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και

– Για $x > x_0$ έχουμε : $x > x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$.

Οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	+	Φ	–
$f(x)$		Σ.Κ.	

Συνεπώς το x_0 είναι **θέση σημείου καμπής** της f .

1691. Η $f(x) = \frac{2}{\lambda} e^x - x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

με παραγώγους : $f'(x) = \frac{2}{\lambda} e^x - 2x$ και $f''(x) = \frac{2}{\lambda} e^x - 2$. Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda} e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda} e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = \lambda \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln \lambda}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda}e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda}e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > \lambda \Leftrightarrow x > \ln \lambda$ και
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda}e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda}e^x < 2 \Leftrightarrow e^x < \lambda \Leftrightarrow x < \ln \lambda$, οπότε

κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
$f''(x)$	-	Φ	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	Σ.Κ.	$\curvearrowleft$

Συνεπώς :

ο **Σημείο καμπής** είναι το

$$A(\ln \lambda, f(\ln \lambda)).$$

Έχουμε :

$$f(\ln \lambda) = \frac{2}{\lambda}e^{\ln \lambda} - \ln^2 \lambda = \frac{2}{\lambda}\lambda - \ln^2 \lambda = 2 - \ln^2 \lambda, \text{ οπότε το σημείο καμπής είναι το}$$

$$A(\ln \lambda, 2 - \ln^2 \lambda). \text{ Έτσι θέτουμε } x = \ln \lambda \text{ και } y = 2 - \ln^2 \lambda, \text{ άρα :}$$

$y = 2 - \ln^2 \lambda \Leftrightarrow y = 2 - x^2, x \in \mathbb{R}$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων καμπής της C_f είναι μία **παραβολή**.

1692. Η $f(x) = \frac{\lambda + \ln x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = \frac{1 - \lambda - \ln x}{x^2}$ και

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \lambda - \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2(1 - \lambda - \ln x)}{x^3} = \frac{-1 - 2 + 2\lambda + 2 \ln x}{x^3} = \frac{2\lambda - 3 + 2 \ln x}{x^3}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda - 3 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 3 + 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = 3 - 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\ln x = \frac{3}{2} - \lambda \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{\frac{3}{2} - \lambda}}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $2\lambda - 3 + 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > 3 - 2\lambda \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} - \lambda \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2} - \lambda}$ και
- $2\lambda - 3 + 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow 2 \ln x < 3 - 2\lambda \Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{2} - \lambda \Leftrightarrow x < e^{\frac{3}{2} - \lambda}$, οπότε

κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	0	$e^{\frac{3}{2} - \lambda}$	$+\infty$
$2\lambda - 3 + 2 \ln x$		-	+
x^3		+	+
$f''(x)$		-	+
$f(x)$		$\curvearrowright$	Σ.Κ. $\curvearrowleft$

Συνεπώς :

ο **Σημείο καμπής** είναι το

$$A\left(e^{\frac{3}{2} - \lambda}, f\left(e^{\frac{3}{2} - \lambda}\right)\right).$$

Έχουμε :

$$f\left(e^{\frac{3-\lambda}{2}}\right) = \frac{\lambda + \ln e^{\frac{3-\lambda}{2}}}{e^{\frac{3-\lambda}{2}}} = \frac{\lambda + \frac{3}{2} - \lambda}{e^{\frac{3-\lambda}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3-\lambda}{2}}}, \text{ οπότε το σημείο καμπής είναι το}$$

$$A\left(e^{\frac{3-\lambda}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right). \text{ Έτσι θέτουμε } x = e^{\frac{3-\lambda}{2}} \text{ και } y = \frac{3}{2e^{\frac{3-\lambda}{2}}}, \text{ άρα :}$$

$$y = \frac{3}{2e^{\frac{3-\lambda}{2}}} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2x}, x > 0}, \text{ δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων καμπής}$$

της C_f είναι μία **υπερβολή**.

1693. Η f έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο, έστω στο x_0 , και αφού είναι και παραγωγίσιμη, τότε θα είναι $f'(x_0) = 0$ όπου x_0 μοναδικό.

$$\text{Είναι : } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \text{ οπότε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0, \text{ όπου } \Delta = 0, \text{ αφού πρέπει να έχει μοναδική ρίζα,}$$

$$\text{οπότε } x_0 = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}. \text{ Επιπλέον είναι : } f''(x) = 6ax + 2b. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας -}$$

σημείων καμπής :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
$f''(x)$ ($a > 0$)	-	$\bigcirc$	+
f(x)	$\curvearrowright$	Σ.Κ.	$\curvearrowleft$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
$f''(x)$ ($a < 0$)	+	$\bigcirc$	-
f(x)	$\curvearrowleft$	Σ.Κ.	$\curvearrowright$

ή

Συνεπώς :

$$\circ \text{ Σημείο καμπής, και στις δύο περιπτώσεις, είναι το } A\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right).$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως το κρίσιμο σημείο είναι **θέση σημείου καμπής**.

1694. α. Η $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + b \text{ και } f''(x) = 6x + 6a. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6a = 0 \Leftrightarrow x = -a, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας -}$$

σημείων καμπής :

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f''(x)$	-	$\bigcirc$	+
f(x)	$\curvearrowright$	Σ.Κ.	$\curvearrowleft$

Συνεπώς :

ο H_{C_f} έχει ακριβώς ένα **σημείο καμπής**,
το $A(-a, f(-a))$.

β. Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(-\alpha) < 0$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 3x^2 + 6\alpha x + \beta \xrightarrow{x=-\alpha} f'(-\alpha) = 3\alpha^2 - 6\alpha^2 + \beta \Leftrightarrow f'(-\alpha) = -3\alpha^2 + \beta.$$

Αφού η f πρέπει να έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο, τότε θα πρέπει η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6\alpha x + \beta = 0$ να έχει δύο άνισες ρίζες, συνεπώς πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 36\alpha^2 - 12\beta > 0 \Leftrightarrow 3\alpha^2 - \beta > 0 \Leftrightarrow -3\alpha^2 + \beta < 0 \Leftrightarrow f'(-\alpha) < 0,$$

δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής A **σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.**

γ. Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(-\alpha) > 0$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 3x^2 + 6\alpha x + \beta \xrightarrow{x=-\alpha} f'(-\alpha) = -3\alpha^2 + \beta.$$

Αφού η f δεν πρέπει να έχει τοπικά ακρότατα, τότε θα πρέπει η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6\alpha x + \beta = 0 \text{ να μην έχει καμία ρίζα, συνεπώς πρέπει :}$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 36\alpha^2 - 12\beta < 0 \Leftrightarrow 3\alpha^2 - \beta < 0 \Leftrightarrow -3\alpha^2 + \beta > 0 \Leftrightarrow f'(-\alpha) > 0,$$

δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής A **σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.**

1695. Η $f(x) = x^3 - 3x^2 \sin 2\alpha + 2x \sin^2 2\alpha + \eta \mu^2 2\alpha$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \sin 2\alpha + 2 \sin^2 2\alpha \text{ και}$$

$$f''(x) = 6x - 6 \sin 2\alpha = 6(x - \sin 2\alpha). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x - \sin 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow x - \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \sin 2\alpha}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας - σημείων καμπής :

x	$-\infty$	$\sin 2\alpha$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$		$\Sigma.Κ.$	

Συνεπώς :

ο **Σημείο καμπής** είναι το $A(\sin 2\alpha, f(\sin 2\alpha))$.

Έχουμε :

$$f(\sin 2\alpha) = \cancel{\sin^3 2\alpha} - 3\cancel{\sin^3 2\alpha} + 2\cancel{\sin^3 2\alpha} + \eta \mu^2 2\alpha = \eta \mu^2 2\alpha, \text{ οπότε το σημείο καμπής είναι το } A(\sin 2\alpha, \eta \mu^2 2\alpha).$$

Έτσι θέτουμε $x = \sin 2\alpha$ και $y = \eta \mu^2 2\alpha$, άρα :

$$y = \eta \mu^2 2\alpha \Leftrightarrow y = 1 - \sin^2 2\alpha \Leftrightarrow \boxed{y = 1 - x^2, x \in \mathbb{R}}, \text{ δηλαδή ο γεωμετρικός}$$

τόπος των σημείων καμπής της C_f , για τις διάφορες τιμές του α , είναι μία **παραβολή**.

1696. i. Η $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta \mu^2 \theta$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 1} \text{ ή } \underline{x = -1}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\nearrow$ T.M.		$\searrow$ T.E.		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$ και $A_2 = [1, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [-1, 1]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = -1$ το $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ και
- ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 1$ το $f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta$.

Έχουμε και $f''(x) = 6x$ άρα :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων

καμπής :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Συνεπώς :

- ο **Σημείο καμπής** είναι το $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$.

ii. Έχουμε $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, $f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Άρα :

$$f(A_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta],$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2 - 2\eta\mu^2\theta, +\infty),$$

$$f(A_3) = f([-1, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} [f(1), f(-1)] = [-2 - 2\eta\mu^2\theta, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

- Το $0 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_1 .
- Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο A_2 .
- Το $0 \in f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_3 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο A_3 .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **ακριβώς τρεις ρίζες**, μία στο $A_1 = (-\infty, -1]$, μία στο $A_2 = [1, +\infty)$ και μία στο $A_3 = [-1, 1]$.

iii. Έχουμε $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, οπότε :

$$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta \xRightarrow[x=2\sigma\upsilon\nu^2\theta]{x=-1} 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta, \text{ που ισχύει,}$$

δηλαδή **το Α ανήκει στην ευθεία** $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Έχουμε $B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$, οπότε :

$$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta \xRightarrow[y=-2-2\eta\mu^2\theta]{x=1} -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ δηλαδή **το Β**}$$

ανήκει στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. Έχουμε $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$, οπότε :

$$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta \xRightarrow[y=-2\eta\mu^2\theta]{x=0} -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ δηλαδή **το Γ ανήκει στην**}$$

ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

1697. i. Παρατηρώντας το σχήμα κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	3	5	7	9	10
$f'(x)$		+	⊖	+	⊖	+	⊖
$f(x)$		T.E. ↗	T.M. ↘	T.E. ↗	T.M. ↘	T.E. ↗	T.M. ↘

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως**
αύξουσα στα διαστήματα
 $[0,1]$, $[3,5]$ και $[7,9]$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στα διαστήματα $[1,3]$, $[5,7]$ και $[9,10]$.

και

- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στα $x=0$, $x=3$, $x=7$ και $x=10$ τα $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$ και $f(10)$ και
- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στα $x=1$, $x=5$ και $x=9$ τα $f(1)$, $f(5)$ και $f(9)$.

ii. Έπειτα κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f' και κυρτότητας της f :

x	0	2	4	6	8	10
$f'(x)$		↘	↗	↘	↗	↘
$f(x)$		↪ _{Σ.Κ.}	↩ _{Σ.Κ.}	↪ _{Σ.Κ.}	↩ _{Σ.Κ.}	↪ _{Σ.Κ.}

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα
 $[0,2]$, $[4,6]$ και $[8,10]$.

– Η f είναι **κυρτή** στα

διαστήματα $[2,4]$ και $[6,8]$ και

- **Σημεία καμψής** είναι τα $A(2, f(2))$, $B(4, f(4))$, $\Gamma(6, f(6))$ και $\Delta(8, f(8))$.

1698. i. Παρατηρώντας το σχήμα κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	2	4	6	8
$f'(x)$		⊕	⊖	⊕	⊖
$f(x)$		T.E. ↗	T.M. ↘	T.E. ↗	T.M. ↘

Γνωρίζουμε πως η f είναι συνεχής,
συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα
διαστήματα $[0,2]$ και $[4,6]$.

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στα διαστήματα $[2,4]$ και $[6,8]$.

και

- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στα $x=0$, $x=4$ και $x=8$ τα $f(0)$, $f(4)$ και $f(8)$ και
- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στα $x=2$ και $x=6$ τα $f(2)$ και $f(6)$.

ii. Έπειτα κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f' και κυρτότητας της f :

x	0	1	3	5	7	8
$f'(x)$		↗	↘	↗	↘	↗
$f(x)$		↪ _{Σ.Κ.}	↪ _{Σ.Κ.}	↪ _{Σ.Κ.}	↩	↪

Συνεπώς :

– Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $[0,1]$, $[3,5]$ και $[7,8]$.

– Η f είναι **κοίλη** στα διαστήματα $[1,3]$ και $[5,7]$.

ii. Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 7} f'(x) = -\infty$.

1699. Έχουμε : $(x^2 + 1)f''(x) = (e^x - 1)f^2(x) + x \Leftrightarrow f''(x) = \frac{(e^x - 1)f^2(x) + x}{x^2 + 1}$.

Επιπλέον για $x=0$ παίρνουμε $f''(0) = 0$, δηλαδή το $(0, f(0))$ είναι πιθανό σημείο καμπής. Για να είναι το $(0, f(0))$ σημείο καμπής της f αρκεί να αποδείξουμε ότι η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του $x=0$, δηλαδή ότι η f'' έχει διαφορετικό πρόσημο εκατέρωθεν του $x=0$. Οπότε :

– Αν $x < 0$ τότε :

$$x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \stackrel{f^2(x) \geq 0}{\Rightarrow} (e^x - 1)f^2(x) \leq 0 \stackrel{x < 0}{\Rightarrow}$$

$$(e^x - 1)f^2(x) + x \leq x < 0, \text{ δηλαδή :}$$

$$(e^x - 1)f^2(x) + x < 0 \stackrel{x^2 + 1 > 0}{\Rightarrow} \frac{(e^x - 1)f^2(x) + x}{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0, \text{ για } x < 0.$$

– Αν $x > 0$ τότε :

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \stackrel{f^2(x) \geq 0}{\Rightarrow} (e^x - 1)f^2(x) \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow}$$

$$(e^x - 1)f^2(x) + x \geq x > 0, \text{ δηλαδή :}$$

$$(e^x - 1)f^2(x) + x > 0 \stackrel{x^2 + 1 > 0}{\Rightarrow} \frac{(e^x - 1)f^2(x) + x}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0, \text{ για } x > 0.$$

Αποδείξαμε πως η f'' έχει διαφορετικό πρόσημο εκατέρωθεν του $x=0$, άρα το σημείο $(0, f(0))$ είναι το **μοναδικό σημείο καμπής** της f .

1700. i. Η $g(x) = 6 \ln x - 6x + 5$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = \frac{6}{x} - 6 = \frac{6 - 6x}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6 - 6x}{x} = 0 \Leftrightarrow 6 - 6x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	1	$+\infty$
x		+	+
$6 - 6x$		+	–
$g'(x)$		+	–
$g(x)$		↗ T.M.	↘

Συνεπώς :

– Η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

και

ο Η g παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x=1$ το $g(1)=-1$.

ii. Η $f(x) = 3x^2(\ln x - 1) - x^3 + 2014$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = 6x(\ln x - 1) + 3x - 3x^2 = 6x \ln x - 6x + 3x - 3x^2 = 6x \ln x - 3x^2 - 3x \text{ και}$$

$$f''(x) = 6 \ln x + 6 - 6x - 3 = 6 \ln x - 6x + 3 = 6 \ln x - 6x + 5 - 2 = g(x) - 2.$$

Αποδείξαμε πως η g έχει ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $g(1)=-1$, δηλαδή ισχύει

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow g(x) \leq -1 \Rightarrow g(x) - 2 \leq -3 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f **στρέφει τα κοίλα κάτω** στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1701. Η $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{με παραγώγους : } f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x - e^x)x^2 - 2x(xe^x - e^x + 1)}{x^4} = \frac{x^3e^x - 2x^2e^x + 2xe^x - 2x}{x^4} = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Μένει να βρούμε το πρόσημό της. Είναι :

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2e^x \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ (η } g'$$

μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

Είναι $g(0) = 0$, άρα το $x=0$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι $1-1$. Οπότε :

$$\text{— Για } \boxed{x < 0} \text{ έχουμε : } x < 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > 0} \text{ έχουμε : } x > 0 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

Δηλαδή η g είναι θετική για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$.

Μπορούμε πλέον να κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής της f με

$$f''(x) = \frac{g(x)}{x^3} :$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cup$

Συνεπώς :

— Η f είναι **κυρτή** στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

1702. Έχουμε :

- Το $x = 2$ είναι εσωτερικό σημείο του $[0, 4]$,
- Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 4]$, άρα και στο $x = 2$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(2) = 0$.

Η f' στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, 4]$, δηλαδή στο εσωτερικό του $[0, 4]$ η f'' είναι γνησίως φθίνουσα.

Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f' στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[2, 4]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2 - 0} = -\frac{f'(0)}{2}.$$

- Η f' είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(4) - f'(2)}{4 - 2} = \frac{f'(4)}{2}.$$

Είναι :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f'' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f''(\xi_1) > f''(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f'(0)}{2} > \frac{f'(4)}{2} \Leftrightarrow -f'(0) > f'(4) \Leftrightarrow \boxed{f'(0) + f'(4) < 0}.$$

1703. i. Η $g(x) = f(x)e^{-2x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$g'(x) = f'(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} + 4f(x)e^{-2x} = \\ &= f''(x)e^{-2x} - 4f'(x)e^{-2x} + 4f(x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύει :

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)) \Leftrightarrow f''(x)e^{-2x} > 4e^{-2x}(f'(x) - f(x)) \Leftrightarrow$$

$$f''(x)e^{-2x} > 4e^{-2x}f'(x) - 4e^{-2x}f(x) \Leftrightarrow f''(x)e^{-2x} - 4f'(x)e^{-2x} + 4f(x)e^{-2x} > 0 \Leftrightarrow$$

$g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

- Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,
- Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο x_0 .

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Επιπλέον είναι $f(x_0) = 0$ αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 το 0.

Έχουμε αποδείξει πως $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα θα είναι και 1-1.

Είναι $g'(x_0) = f'(x_0) e^{-2x_0} - 2f(x_0) e^{-2x_0} = 0$, άρα το x_0 είναι ρίζα της $g'(x) = 0$ η οποία είναι μοναδική αφού η g' είναι 1-1. Οπότε :

– Για $x < x_0$ έχουμε : $x < x_0 \xLeftrightarrow{g' \text{ γν. αύξ.}} g'(x) < g'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) < 0}$.

– Για $x > x_0$ έχουμε : $x > x_0 \xLeftrightarrow{g' \text{ γν. αύξ.}} g'(x) > g'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) > 0}$.

Κάνοντας τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g έχουμε :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\emptyset$	+
$g(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 και θα είναι :

$$g(x) \geq g(x_0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-2x} \geq 0 \xLeftrightarrow{e^{-2x} > 0} \boxed{f(x) \geq 0}.$$

1704. i. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{\beta - a}{\beta - a} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = 1}.$$

ii. Η $g(x) = f(x) - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $g'(x) = f'(x) - 1$ και

$g''(x) = f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g **στρέφει τα κοίλα κάτω** στο $\mathbb{R}$.

iii. Έχουμε αποδείξει πως $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα θα είναι και 1-1.

Είναι $g'(x_0) = f'(x_0) - 1 = 1 - 1 = 0$, άρα το x_0 είναι ρίζα της $g'(x) = 0$, η οποία είναι μοναδική αφού η g' είναι 1-1. Οπότε :

– Για $x < x_0$ έχουμε : $x < x_0 \xLeftrightarrow{g' \text{ γν. φθ.}} g'(x) > g'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) > 0}$.

– Για $x > x_0$ έχουμε : $x > x_0 \xLeftrightarrow{g' \text{ γν. φθ.}} g'(x) < g'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) < 0}$.

Κάνοντας τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g έχουμε :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	+	$\emptyset$	-
$g(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$.

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$.

και

ο H g παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο x_0 , το $g(x_0)$.

iv. Είναι :

$$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \text{ και}$$

$$f(\beta) = \beta \Leftrightarrow f(\beta) - \beta = 0 \Leftrightarrow g(\beta) = 0.$$

Οπότε :

$$- \text{Για } \boxed{\alpha < x < x_0} \text{ έχουμε : } \alpha < x \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(x) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

$$- \text{Για } \boxed{x_0 < x < \beta} \text{ έχουμε : } x < \beta \stackrel{g \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(\beta) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

Αποδείξαμε πως για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι :

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) > x}.$$

1705. i. Η $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x - \ln x - \cancel{1} + \cancel{1} = \frac{2}{x} \ln x - \ln x = \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x = \frac{2-x}{x} \ln x.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x} \ln x = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} (2-x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}) \text{ ή } (\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}).$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	0	1	2	$+\infty$
$\ln x$		–	+	+
$2-x$		+	+	–
x		+	+	+
$f'(x)$		–	+	–
$f(x)$		$\swarrow$ T.E. $\nearrow$ T.M. $\searrow$		

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στα διαστήματα $(0,1]$ και $[2,+\infty)$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1,2]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x=1$ το $f(1)=0$ και
- ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x=2$ το $f(2)=\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1$.

ii. Η $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο

φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = \frac{2-x}{x} \ln x$ και

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-x - (2-x)}{x^2} \ln x + \frac{2-x}{x^2} = \frac{-\cancel{x} - 2 + \cancel{x}}{x^2} \ln x + \frac{2-x}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2-x}{x^2} = \\ &= -\frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2-x}{x^2} = \frac{2-x-2\ln x}{x^2}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f''(x) = \frac{2-x-2\ln x}{x^2}$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f''(1)=1>0$ και $f''(2)=\frac{-2\ln 2}{4}=-\frac{\ln 2}{2}<0$,

δηλαδή $f''(1) \cdot f''(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$. Έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,2)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\begin{aligned} - \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2-x_1 > 2-x_2, \\ - \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -2\ln x_1 > -2\ln x_2, \\ - \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$2-x_1-2\ln x_1 > 2-x_2-2\ln x_2.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα με την τρίτη ανισότητα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις, έχουμε :

$$\frac{2-x_1-2\ln x_1}{x_1^2} > \frac{2-x_2-2\ln x_2}{x_2^2} \Leftrightarrow f''(x_1) > f''(x_2).$$

Άρα η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$, άρα και 1-1 συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in (1,2)$ είναι μοναδική. Οπότε :

$$\begin{aligned} - \text{ Για } \boxed{0 < x < x_0} \text{ έχουμε : } x < x_0 &\stackrel{f'' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f''(x) > 0}. \\ - \text{ Για } \boxed{x > x_0} \text{ έχουμε : } x > x_0 &\stackrel{f'' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f''(x) < 0}. \end{aligned}$$

Αφού η f'' μηδενίζεται στο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τότε το

$(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Αποδείξαμε λοιπόν πως η C_f έχει **ακριβώς ένα σημείο καμπής** με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$.

1706. i. Είναι $2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 \ln x + 1 > 0$, οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση
 $g(x) = 2x^2 \ln x + 1, x > 0$.

Η $g(x) = 2x^2 \ln x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $g'(x) = 4x \ln x + 2x = 2x(2 \ln x + 1)$.

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-\frac{1}{2}}}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\bullet \quad 2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \text{ και}$$

- $2\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$, οπότε κάνουμε τον

πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$2x$		+	+
$2\ln x + 1$		-	+
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

και

- ο Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$ το

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 2e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}.$$

Αφού το $g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο τότε θα είναι :

$$g(x) \geq g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0).$$

ii. Η $f(x) = (x^2 + 1) \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = \left(2x \ln x + \frac{1}{x}\right) + x > 0, \text{ αφού } 2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ και } x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και άρα 1-1.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και αφού η f είναι 1-1 τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Η $f(x) = (x^2 + 1) \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = 2x \ln x + x + \frac{1}{x}$ και

$$f''(x) = 2 \ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}.$$

Η συνάρτηση $f''(x) = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$, δηλαδή

$f''\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f''(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \text{ τέτοιο ώστε } f''(x_0) = 0.$$

$$\text{Έχουμε : } f^{(3)}(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, άρα και 1-1 συνεπώς η παραπάνω ρίζα

$$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \text{ είναι μοναδική. Οπότε :}$$

$$\text{— Για } \boxed{0 < x < x_0} \text{ έχουμε : } x < x_0 \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f''(x) < 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > x_0} \text{ έχουμε : } x > x_0 \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f''(x) > 0}.$$

Αφού η f'' μηδενίζεται στο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τότε το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Αποδεικνύουμε λοιπόν πως η C_f έχει **ακριβώς ένα σημείο καμπής** με τετμημένη

$$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right).$$

Η συνάρτηση $f''(x) = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$, δηλαδή

$f''\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f''(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \text{ τέτοιο ώστε } f''(x_0) = 0.$$

$$\text{Έχουμε : } f^{(3)}(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, άρα και 1-1 συνεπώς η παραπάνω ρίζα

$$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \text{ είναι μοναδική.}$$

1707. i. Η συνάρτηση $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + 2e - e^2 = -(e^2 - 2e + 1) = -(e-1)^2 < 0 \text{ και } g(1) = 1 > 0, \text{ δηλαδή}$$

$g\left(\frac{1}{e}\right) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε : } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}.$$

Για το τριώνυμο $x^2 - 2x + 2$ είναι $\Delta < 0$ άρα είναι $x^2 - 2x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επιπλέον είναι και $x^3 > 0$, άρα $g'(x) > 0$.

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, άρα και $1 - 1$,

συνεπώς η παραπάνω ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ είναι **μοναδική**.

ii. Η $f(x) = e^x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$ και

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \\ &= e^x g(x). \text{ Έτσι έχουμε :} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = x_0}} \text{ (μοναδική ρίζα).}$$

Για το πρόσημο της g έχουμε :

$$\text{— Για } \boxed{0 < x < x_0} \text{ έχουμε : } x < x_0 \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) < 0}.$$

$$\text{— Για } \boxed{x > x_0} \text{ έχουμε : } x > x_0 \stackrel{g \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow \boxed{g(x) > 0}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής της f :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$		Σ.Κ.	

Συνεπώς :

ο Σημείο καμπής είναι το $A(x_0, f(x_0))$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η C_f έχει **ακριβώς ένα σημείο καμπής**.

1708. Γ1. Έχουμε :

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow [e^x f'(x) - e^x]' = [xf'(x)]' \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \cancel{f'(0)}^0 - 1 = c_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = -1}}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow (e^x - x)f'(x) = e^x - 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο $g'(x) = e^x - 1$.

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ και
- $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας – ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\emptyset$	+
$g(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $g(0) = 1$ και θα είναι :

$$g(x) \geq g(0) \Rightarrow g(x) \geq 1 > 0 \Rightarrow e^x - x > 0.$$

Οπότε :

$$(e^x - x)f'(x) = e^x - 1 \stackrel{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow [f(x)]' = [\ln(e^x - x)]' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln(e^x - x) + c_2 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η $f(x) = \ln(e^x - x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 0 \stackrel{g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} g'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας – ακροτάτων της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\emptyset$	+
$g(x)$	+		+
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ3. Επιπλέον έχουμε

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x - \cancel{e^{2x}} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$h'(x) = -e^x - xe^x + 2e^x = e^x - xe^x = e^x(1 - x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(1-x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της h :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	$\bigcirc$	-
$h'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$h(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$

Συνεπώς:

– Η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$.

– Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$.

Έχουμε $h(1) = e - 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((2-x)e^x - 1) = 0 - 1 = -1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2-x)e^x - 1) = (-\infty) \cdot (+\infty) - 1 = -\infty.$$

$$\text{Άρα: } h(A_1) = h((-\infty, 1]) \stackrel{\substack{h \text{ συνεχής} \\ h \text{ γν. αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(1) \right] = (-1, e-1],$$

$$h(A_2) = h([1, +\infty)) \stackrel{\substack{h \text{ συνεχής} \\ h \text{ γν. φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(1) \right) = (-\infty, e-1].$$

Ελέγχουμε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $h(x) = 0$.

- Το $0 \in h(A_1)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_1 , η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, στο A_1 .
- Το $0 \in h(A_2)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, στο A_2 .

Συνεπώς η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες** στο $\mathbb{R}$, έστω ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 \in (-\infty, 1]$ και $\rho_2 \in [1, +\infty)$.

Οπότε:

- Για $\underline{x < \rho_1}$ έχουμε: $x < \rho_1 \stackrel{h \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(\rho_1) \Leftrightarrow \boxed{h(x) < 0}$,
- Για $\underline{\rho_1 < x \leq 1}$ έχουμε: $\rho_1 < x \stackrel{h \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(\rho_1) < h(x) \Leftrightarrow \boxed{h(x) > 0}$,
- Για $\underline{1 \leq x < \rho_2}$ έχουμε: $1 \leq x < \rho_2 \stackrel{h \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\rho_2) \Leftrightarrow \boxed{h(x) > 0}$,
- Για $\underline{x > \rho_2}$ έχουμε: $x > \rho_2 \stackrel{h \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} h(x) < h(\rho_2) \Leftrightarrow \boxed{h(x) < 0}$.

Κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής της f :

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$	
$h(x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
$f''(x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\Sigma.K.$	$\curvearrowleft$	$\Sigma.K.$	$\curvearrowright$

Συνεπώς:

ο Σημεία καμπής είναι τα $A(\rho_1, f(\rho_1))$ και $B(\rho_2, f(\rho_2))$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η C_f έχει **ακριβώς δύο σημεία καμπής**.

Γ4. Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\ln(e^x - x) = \sin x \Leftrightarrow f(x) = \sin x \Leftrightarrow f(x) - \sin x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - \sin x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως

διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $\varphi(0) = f(0) - \sin 0 = -1 < 0$ και

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0, \text{ δηλαδή } \varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \text{ οπότε}$$

σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - x) = \sin x.$$

Επιπλέον έχουμε $\varphi'(x) = f'(x) + \eta_{\mu x} > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, Συνεπώς η φ είναι

γνησίως αύξουσα και η παραπάνω ρίζα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι μοναδική.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει **ακριβώς μία λύση** στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1709. α. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[a, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (a, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - a} > 0, \text{ αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και } a < \gamma \Leftrightarrow \gamma - a > 0.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = -\frac{f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0, \text{ αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και } \gamma < \beta \Leftrightarrow \beta - \gamma > 0.$$

Έτσι έχουμε $\boxed{f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0}$.

β. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \text{ αφού } f'(\xi_1) > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{-f'(\xi_1) < 0}}, \underline{\underline{f'(\xi_2) < 0}} \text{ και}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\xi_2 - \xi_1 > 0}}. \text{ Άρα } \boxed{f''(\xi) < 0}.$$

γ. i. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a) = f(\beta)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Η f είναι κυρτή στο $[a, \beta]$, άρα :

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [a, \beta] \text{ και άρα } 1-1.$$

Συνεπώς υπάρχει **μοναδικό** $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

ii. Οπότε :

– Για $\boxed{a < x < x_0}$ έχουμε : $x < x_0 \xLeftrightarrow{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) < 0}$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

– Για $\boxed{x_0 < x < \beta}$ έχουμε : $x > x_0 \xLeftrightarrow{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > 0}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επιπλέον είναι :

– Για $\boxed{a < x < x_0}$ έχουμε : $a < x \xLeftrightarrow{f \text{ γν. φθ.}} f(a) > f(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}$.

– Για $\boxed{x_0 < x < \beta}$ έχουμε : $x < \beta \xLeftrightarrow{f \text{ γν. αύξ.}} f(x) < f(\beta) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως $\boxed{f(x) < 0}$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

1710. i. Έστω ότι η C_f έχει δύο διαφορετικά σημεία καμπής, έστω $A(p_1, f(p_1))$ και $B(p_2, f(p_2))$. Τότε θα είναι $f''(p_1) = 0$ και $f''(p_2) = 0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[p_1, p_2] \subseteq \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(p_1, p_2) \subseteq \mathbb{R}$ με

$f''(p_1) = f''(p_2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\rho \in (p_1, p_2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\rho) = 0$. Άτοπο, αφού είναι $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η C_f έχει το πολύ ένα σημείο καμπής.

ii. Έστω ότι υπάρχει ευθεία που εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$

και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f . Τότε θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = \lambda_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\theta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ άρα και } f'(\theta) = f'(x_1) = f'(x_2).$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[x_1, \theta]$ και $[\theta, x_2]$.

– Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, \theta]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, θ) με $f'(x_1) = f'(\theta)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, \theta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[\theta, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (θ, x_2) με $f'(\theta) = f'(x_2)$,
 άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\theta, x_2)$
 τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$.

Τέλος θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle και για την f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$:

Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$,
 άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\rho \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\rho) = 0$. Αποπο αφού $f^{(3)}(\rho) > 0$ για
 κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς αποδείξαμε ότι **δεν υπάρχει ευθεία** που να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά
 σημεία της C_f .

- 1711. i.** Αφού το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$ έχει τρεις ρίζες τότε το
 $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma$ θα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Οι ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι ρίζες του $P(x)$, δηλαδή θα είναι $P(\rho_1) = P(\rho_2) = P(\rho_3) = 0$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για το $P(x)$ στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$.

- Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με
 $P(\rho_1) = P(\rho_2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $P'(x_1) = 0$.
- Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) με
 $P(\rho_2) = P(\rho_3)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $P'(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε πως το $P'(x)$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και αφού σαν δευτεροβάθμια
 θα έχει το πολύ δύο ρίζες συμπεραίνουμε πως η εξίσωση $P'(x) = 0$ θα έχει **ακριβώς**
δύο ρίζες, τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Αφού είναι $a > 0$ κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$P(x)$		$\nearrow$ T.M.	$\searrow$ T.E.	$\nearrow$	

Συνεπώς το πολυώνυμο παρουσιάζει
τοπικό μέγιστο στο x_1 και **τοπικό**
ελάχιστο στο x_2 .

- ii.** Το $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma$ έχει ακριβώς δύο ρίζες άνισες μεταξύ τους, άρα θα
 είναι $\Delta < 0$:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\beta)^2 - 4 \cdot 3\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 12\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta^2 > 3\alpha\gamma}.$$

- iii.** Είναι $P''(x) = 6ax + 2\beta$ οπότε :

$$P''(x_1) + P''(x_2) = 6ax_1 + 2\beta + 6ax_2 + 2\beta = 6a(x_1 + x_2) + 4\beta.$$

Αφού x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, τότε από τους τύπους

Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = -\frac{2\beta}{3a}$, δηλαδή θα είναι :

$$P''(x_1) + P''(x_2) = 6a(x_1 + x_2) + 4\beta = 6a\left(-\frac{2\beta}{3a}\right) + 4\beta = -4\beta + 4\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P''(x_1) + P''(x_2) = 0}.$$

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ παρουσίαζε σημείο καμπής σε κάποιο από τα x_1, x_2 , τότε θα ήταν $P''(x_1) = 0$ ή $P''(x_2) = 0$. Όμως είτε το ένα είναι μηδέν, είτε το άλλο, από τη σχέση $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$ διαπιστώνουμε πως τελικά θα είναι και τα δύο ταυτόχρονα μηδεν. Δηλαδή η εξίσωση $P''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2\beta = 0$ θα έχει δύο ρίζες, άτοπο αφού είναι πρωτοβάθμια εξίσωση.

Συνεπώς το πολυώνυμο $P(x)$ **δεν μπορεί να παρουσιάζει σημείο καμπής** σε κάποιο από τα x_1, x_2 , ρίζες της εξίσωσης $P'(x) = 0$.

iv. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle για το $P'(x)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$P'(x_1) = P'(x_2) = 0$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $P''(x_0) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού το πολυώνυμο $P''(x) = 6ax + 2\beta$ είναι πρώτου βαθμού.

Αφού είναι $a > 0$ κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P''(x)$	-	ϕ	+
$P(x)$		Σ.Κ.	

Συνεπώς :

ο **Σημείο καμπής** είναι το $A(x_0, P(x_0))$

, όπου $x_0 \in (x_1, x_2)$.

1712. α. i. Είναι :

$$xf'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x + c \xrightarrow{x=1} \frac{f(1)}{1} = c \Leftrightarrow \underline{\underline{c=1}}.$$

Έτσι έχουμε : $\frac{f(x)}{x} = \ln x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x \ln x + x, x > 0}.$

ii. Η f είναι συνεχής άρα :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + x) = 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 0}, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

iii. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty + 1 = -\infty, \text{ άρα η}$$

f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

β. Η $f(x) = x \ln x + x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \ln x + 1 + 1 = \ln x + 2$.

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow \underline{x = e^{-2}}$.

Επιπλέον είναι :

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-2} \Leftrightarrow x > e^{-2}$ και
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -2 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-2} \Leftrightarrow x < e^{-2}$, οπότε

κάνουμε τον πίνακα μονotonίας – ακροτάτων της f :

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	T.M.	T.E.	

Συνεπώς :

– Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[0, e^{-2}]$.

– Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[e^{-2}, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = 0$ το $f(0) = 0$ και
- ο Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x = e^{-2}$ το $f(e^{-2}) = -e^{-2}$.

γ. Η $f(x) = x \ln x + x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \ln x + 2 \text{ και } f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι **κυρτή** στο $[0, +\infty)$.

Έστω ότι υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στην C_f , τα

$A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$. Αφού είναι συνευθειακά τότε θα

$$\text{ισχύει : } \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα

με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Έτσι από τη σχέση $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ παίρνουμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Τέλος εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\theta \in (\xi_1, \xi_2) \text{ τέτοιο ώστε } f''(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta} = 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα **δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στην C_f** .

δ. Είναι : $f(x) + \kappa \geq 1 + \kappa x \Leftrightarrow f(x) + \kappa - 1 - \kappa x \geq 0$.

Έστω $g(x) = f(x) + \kappa - 1 - \kappa x$ με $g'(x) = f'(x) - \kappa$. Θα είναι λοιπόν $g(x) \geq 0$.

Όμως είναι $g(1) = f(1) + \kappa - 1 - \kappa = 1 - 1 = 0$, δηλαδή ισχύει :

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1), \text{ άρα το } g(1) \text{ είναι ακρότατο της } g.$$

Έτσι έχουμε :

– Το $x=1$ είναι εσωτερικό σημείο του $[0, +\infty)$,

– Η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=1$ και

– Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και στο $x=1$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - \kappa = 0 \Leftrightarrow 2 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 2}.$$

1713. A. i. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[3, 5]$

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[3, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, 5)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (3, 5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{f(5) - f(3)}{2}.$$

Έχουμε :

$$2f(1)+f(5)<2f(2)+f(3) \Leftrightarrow f(5)-f(3)<2f(2)-2f(1) \Leftrightarrow \\ \frac{f(5)-f(3)}{2}<f(2)-f(1) \Leftrightarrow f'(\xi_2)<f'(\xi_1) \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi_1)>f'(\xi_2)}.$$

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Είναι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0$ και $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_2 - \xi_1 > 0$, συνεπώς $\boxed{f''(x_0) < 0}$.

iii. Επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f'' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε $f''(x_0) < 0$, τότε θα είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η f είναι **κοίλη** στο $\mathbb{R}$.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(a+b-x) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ με πεδίο

ορισμού το $A = \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $g'(x) = f'(x) - f'(a+b-x)$. Είναι $f''(x) < 0$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα 1-1. Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a+b-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(a+b-x) \stackrel{f' \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$x = a+b-x \Leftrightarrow 2x = a+b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\bullet \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a+b-x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(a+b-x) \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x < a+b-x \Leftrightarrow 2x < a+b \Leftrightarrow x < \frac{a+b}{2} \text{ και}$$

$$\bullet \quad g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a+b-x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(a+b-x) \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x > a+b-x \Leftrightarrow 2x > a+b \Leftrightarrow x > \frac{a+b}{2}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας}$$

– ακροτάτων της g :

x	$-\infty$	$\frac{a+b}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	Φ	-
$g(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right]$.

– Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right)$.

και

- Η g παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ το $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$.

Άρα θα ισχύει $g(x) \leq g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + f(\alpha+\beta-x) - 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x) + f(\alpha+\beta-x) \leq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1714. i. Έχουμε :

$g'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x > 0$, δηλαδή η g είναι **γνησίως αύξουσα** και άρα 1-1.

ii. Είναι : $xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \Leftrightarrow xf'(x)e^{f(x)} + xf'(x) = x+1 \Leftrightarrow$

$$f'(x)e^{f(x)} + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow [e^{f(x)} + f(x)]' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c \xRightarrow{x=1} e^{f(1)} + f(1) = 1 + c \Leftrightarrow 1 + 1 = 1 + c \Leftrightarrow \underline{c=0}.$$

Έτσι έχουμε :

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \Leftrightarrow g(f(x)) = g(\ln x) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \ln x, x > 0}.$$

iii. Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$h'(x) = \frac{1 - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow \underline{x = e^2}.$$

Επιπλέον είναι :

- $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^2 \Leftrightarrow x < e^2$ και
- $2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x > e^2$, οπότε κάνουμε τον πίνακα

μονοτονίας - ακροτάτων της h :

x	0	e^2	$+\infty$
$2 - \ln x$		+	-
x^2		+	+
$h'(x)$		+	-
$h(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

- Η h είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $A_1 = (0, e^2]$.

- Η h είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $A_2 = [e^2, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } h(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{1}{e^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\ln x - 1) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x - 1}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα :

$$h(A_1) = h\left(\left(0, e^2\right]\right) \stackrel{\substack{\text{h συνεχής} \\ \text{h γν. αύξ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), h(e^2) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{e^2} \right],$$

$$h(A_2) = h\left(\left[e^2, +\infty\right)\right) \stackrel{\substack{\text{h συνεχής} \\ \text{h γν. φθ.}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(e^2) \right) = \left(0, \frac{1}{e^2} \right).$$

Οπότε $\boxed{h(A) = h(A_1) \cup h(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e^2} \right]}$ το σύνολο τιμών της f.

iv. Έχουμε :

$$\left(\frac{\eta\mu x}{e} \right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \right)^{\eta\mu x} \stackrel{\substack{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{e} > 0, \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} > 0}}{\Leftrightarrow} \ln \left(\frac{\eta\mu x}{e} \right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln \left(\frac{\eta\mu x}{e} \right) = \eta\mu x \cdot \ln \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot (\ln(\eta\mu x) - 1) = \eta\mu x \cdot (\ln(\sigma\upsilon\nu x) - 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x).$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x \in (0, 1) \subseteq (0, e^2)$. Στο διάστημα αυτό η h είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς και $1-1$. Άρα έχουμε :

$$h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x) \stackrel{h 1-1}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}.$$

v. Η $h(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη με παραγώγους : $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ και

$$h''(x) = \frac{-x - 2x(2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x \ln x - 5x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 5}{x^3}.$$

Έτσι έχουμε :

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 5}{x^3} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{\frac{5}{2}}}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $2 \ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{2}}$ και
- $2 \ln x - 5 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x < e^{\frac{5}{2}}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής της h :

x	0	$e^{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$2\ln x - 5$		-	+
x^3		+	+
$h''(x)$		-	+
$h(x)$		$\cap$ Σ.Κ.	$\cup$

Συνεπώς :

- Η h είναι **κοίλη** στο διάστημα $\left(0, e^{\frac{5}{2}}\right]$.- Η h είναι **κυρτή** στο διάστημα $\left[e^{\frac{5}{2}}, +\infty\right)$

$$\text{Είναι } h'_{\min} = h'\left(e^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{2 - \ln e^{\frac{5}{2}}}{\left(e^{\frac{5}{2}}\right)^2} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{e^5} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^5} = -\frac{1}{2e^5} \text{ και άρα ισχύει :}$$

$$h'(x) \geq h'\left(e^{\frac{5}{2}}\right) \Leftrightarrow h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5} \text{ για κάθε } x > 0.$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την h στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

H h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Όμως είναι $h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5}$ για κάθε $x > 0$ και αφού είναι $\xi > 0$ τότε θα είναι :

$$h'(\xi) \geq -\frac{1}{2e^5} \Leftrightarrow \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}.$$

- 1715. i.** Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \neq 0$, συνεπώς η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1, +\infty)$ και αφού είναι $f(1) = e > 0$, συμπεραίνουμε πως θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } f''(x)f(x) > [f'(x)]^2 + 2f^2(x) \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f''(x) > \frac{[f'(x)]^2 + 2f^2(x)}{f(x)} > 0, \text{ άρα}$$

η f είναι **κυρτή** στο $[1, +\infty)$.**ii.** Είναι :

$$f''(x)f(x) > [f'(x)]^2 + 2f^2(x) \Leftrightarrow f''(x)f(x) - [f'(x)]^2 - 2f^2(x) > 0 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - 2x \right]^2 > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x$ με πεδίο ορισμού το $A = [1, +\infty)$. Από

την παραπάνω σχέση λοιπόν θα είναι $g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Έτσι έχουμε :

$$x > 1 \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x > \frac{f'(1)}{f(1)} - 2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x > \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x > 0 \Leftrightarrow [\ln f(x) - x^2]' > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln f(x) - x^2$ με πεδίο ορισμού το $A = [1, +\infty)$. Από την παραπάνω σχέση λοιπόν θα είναι $h'(x) > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Έτσι έχουμε :

$$x > 1 \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(1) \Leftrightarrow \ln f(x) - x^2 > \ln f(1) - 1 \Leftrightarrow \ln f(x) - x^2 > \ln e - 1 \Leftrightarrow \ln f(x) - x^2 > 0 \Leftrightarrow \ln f(x) > x^2 \Leftrightarrow \ln f(x) > \ln e^{x^2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) > e^{x^2}}, \text{ για κάθε } x > 1.$$

$$\text{iii. Είναι : } f(x) > e^{x^2} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{e^{x^2}} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < e^{-x^2}.$$

$$\text{Κατά μείζονα λόγο θα είναι } 0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq e^{-x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \stackrel{u = -x^2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0, \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο}$$

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$. Επομένως είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \stackrel{\frac{1}{f(x)} > 0}{=} +\infty. \text{ Γνωρίζουμε πως είναι και } f(1) = e.$$

Έχουμε :

$$g(x) > g(1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x > 0 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) - 2xf(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 2xf(x) > 0$$

, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 1$.

$$\text{Οπότε } \boxed{f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [e, +\infty)} \text{ το σύνολο τιμών της } f.$$

$$\text{iv. Έχουμε : } f(x) + \text{συν} \frac{\pi}{x} = e - 1 \Leftrightarrow (f(x) - e) + \left(\text{συν} \frac{\pi}{x} + 1 \right) = 0.$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[e, +\infty)$, οπότε θα είναι $f(x) \geq e \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) - e \geq 0}}$.

Επίσης ισχύει $\text{συν} \frac{\pi}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\text{συν} \frac{\pi}{x} + 1 \geq 0}}$.

Συνεπώς η $(f(x) - e) + \left(\text{συν} \frac{\pi}{x} + 1\right) = 0$ ισχύει μόνο όταν $f(x) - e = 0 \Leftrightarrow f(x) = e$

και $\text{συν} \frac{\pi}{x} + 1 = 0$.

Είναι $f(1) = e$ και για κάθε $x > 1$ θα είναι $x > 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > e$.

Άρα $f(x) = e \Leftrightarrow x = 1$ και αν το αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση θα

έχουμε $\text{συν} \frac{\pi}{1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{συν} \pi = -1$ που ισχύει. Άρα $\boxed{x=1}$.

1716. i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι παραγωγίσιμη, οπότε έχουμε :

$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ και $\lim_{h \rightarrow 0} f(x-h) \stackrel{u=-h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} f(x+u) = f(x)$, άρα είναι :

$\lim_{h \rightarrow 0} (3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x)) = 3f(x) + f(x) - 4f(x) = 0$.

Έχουμε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x)}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } h \rightarrow 0} \frac{3f'(x+h) - f'(x-h) - 2f'(x)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(x+h) - 3f'(x) - f'(x-h) + f'(x)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} \right) = \frac{3}{2} f''(x) - \frac{1}{2} (-f''(x)) =$$

$$= \frac{3}{2} f''(x) + \frac{1}{2} f''(x) = 2f''(x), \text{ αφού}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} \stackrel{u=-h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{-u} = -f''(x).$$

$$\text{Άρα } \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x)}{h^2} = 2f''(x)}.$$

ii. Είναι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x)}{h^2} > 2 - 2e^{f''(x)} \Leftrightarrow 2f''(x) > 2 - 2e^{f''(x)} \Leftrightarrow$$

$$2f''(x) + 2e^{f''(x)} > 2 \Leftrightarrow f''(x) + e^{f''(x)} > 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x + x$ με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$. Είναι

$h'(x) = e^x + 1 > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα $1 - 1$.

Επιπλέον είναι $h(0) = 1$. Έχουμε λοιπόν :

$f''(x) + e^{f'(x)} > 1 \Leftrightarrow h(f''(x)) > h(0) \stackrel{h \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

iii. Παρατηρούμε πως το $x=1$ είναι μία προφανής ρίζα της εξίσωσης

$$f(2x+1) - (x-1)f'(3x) = f(x+2).$$

– Για $x < 1$ έχουμε :

$$2x+1 - (x+2) = 2x+1-x-2 = x-1 < 0 \Leftrightarrow \underline{2x+1 < x+2}, \text{ οπότε}$$

εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[2x+1, x+2]$.

Η f είναι συνεχής στο $[2x+1, x+2] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο

$(2x+1, x+2) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (2x+1, x+2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2) - f(2x+1)}{x+2 - (2x+1)} = \frac{f(x+2) - f(2x+1)}{1-x} = \frac{f(2x+1) - f(x+2)}{x-1}.$$

$$\text{Είναι } 3x - (2x+1) = 3x - 2x - 1 = x - 1 < 0 \Leftrightarrow \underline{3x < 2x+1}.$$

Συνεπώς έχουμε :

$$3x < 2x+1 < \xi < x+2 \Rightarrow 3x < \xi \stackrel{f''(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(3x) < f'(\xi) \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(3x) < \frac{f(2x+1) - f(x+2)}{x-1} \stackrel{x-1 < 0}{\Leftrightarrow} (x-1)f'(3x) > f(2x+1) - f(x+2) \Leftrightarrow$$

$$f(2x+1) - (x-1)f'(3x) < f(x+2).$$

Επομένως για $x < 1$ η εξίσωση $f(2x+1) - (x-1)f'(3x) = f(x+2)$ δεν έχει λύση.

– Για $x > 1$ έχουμε :

$$2x+1 - (x+2) = 2x+1-x-2 = x-1 > 0 \Leftrightarrow \underline{2x+1 > x+2}, \text{ οπότε}$$

εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x+2, 2x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x+2, 2x+1] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο

$(x+2, 2x+1) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi \in (x+2, 2x+1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(2x+1) - f(x+2)}{2x+1 - (x+2)} = \frac{f(2x+1) - f(x+2)}{x-1}.$$

$$\text{Είναι } 3x - (2x+1) = 3x - 2x - 1 = x - 1 > 0 \Leftrightarrow \underline{3x > 2x+1}.$$

Συνεπώς έχουμε :

$$x+2 < \xi < 2x+1 < 3x \Rightarrow \xi < 3x \stackrel{f''(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(3x) \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(2x+1) - f(x+2)}{x-1} < f'(3x) \stackrel{x-1 > 0}{\Leftrightarrow} f(2x+1) - f(x+2) < (x-1)f'(3x) \Leftrightarrow$$

$$f(2x+1) - (x-1)f'(3x) < f(x+2).$$

Επομένως για $x > 1$ η εξίσωση $f(2x+1) - (x-1)f'(3x) = f(x+2)$ δεν έχει λύση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$f(2x+1) - (x-1)f'(3x) = f(x+2) \text{ είναι το } \boxed{x=1}.$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x+1) - f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο $\varphi'(x) = f'(x+1) - f'(x)$.

Είναι :

$$x+1 > x \stackrel{f''(x) > 0}{\Leftrightarrow}_{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) > 0,$$

δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε } \varphi(\mathbb{R}) = \varphi((-\infty, +\infty)) \stackrel{\varphi \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{\varphi \text{ γν. αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right)} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), 2016 \right) \text{ το}$$

σύνολο τιμών της φ , αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2016$.

$$\text{Άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε : } \varphi(x) < 2016 \Leftrightarrow \boxed{f(x+1) - f(x) < 2016}.$$

v. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 2019x$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$g'(x) = x^4 - 4x + 2019. \text{ Είναι και } g''(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1).$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } g''(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων της g' :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	-	Φ	+
$g'(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

- Η g' είναι γνησίως αύξουσα στο

$[1, +\infty)$.

και

- ο $H g'$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $g'(1) = 2016$.

Αυτό σημαίνει πως είναι $g'(x) \geq g'(1) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) \geq 2016}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x, x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\theta) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

$$\text{Είναι : } \underline{x} < \theta < x+1 \xRightarrow[\substack{f''(x) > 0 \\ f' \text{ γν. αύξ.}}]{f'(x) < f'(\theta)} f'(x) < f'(\theta) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < 2016 \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) < 2016}.$$

Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της $A(x_1, f(x_1))$ παράλληλη σε εφαπτομένη της C_g σε τυχαίο σημείο της $B(x_2, g(x_2))$, θα πρέπει οι εφαπτομένες στα σημεία αυτά να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλαδή $f'(x_1) = g'(x_2)$. Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 2016$, άρα και $f'(x_1) < 2016$ και $g'(x) \geq 2016$, άρα και $g'(x_2) \geq 2016$. Συνεπώς οι συντελεστές διεύθυνσης δεν μπορούν να είναι ίσοι και άρα **δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να είναι παράλληλη σε εφαπτομένη της C_g .**

- 1717. i.** Για το πεδίο ορισμού της f' πρέπει $x > 0$ και $\ln x - x \neq 0$. Όμως είναι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$. Άρα $\ln x - x \leq -1 \neq 0$, συνεπώς θα είναι $\boxed{D_{f'} = (0, +\infty)}$.

ii. Η συνάρτηση $f'(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x}$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x} + 1\right)(\ln x - x) - (\ln x + x)\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{(\ln x - x)^2} = \\ &= \frac{\frac{\ln x}{x} - 1 + \ln x - x - \frac{\ln x}{x} + \ln x - 1 + x}{(\ln x - x)^2} = \frac{2\ln x - 2}{(\ln x - x)^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{(\ln x - x)^2} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln x - 1)}{(\ln x - x)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$ και
- $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμψής της f :

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$		 Σ.Κ.	

Συνεπώς :

- ο **Σημείο καμψής** είναι το $A(e, f(e))$.

iii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x, x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\theta) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Για $x > e$ είναι $f''(x) > 0$ δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε :

$$x < \theta < x+1 \xrightarrow[\substack{x \rightarrow +\infty \\ f' \text{ γν. αὐξ.}}]{\Rightarrow} f'(x) < f'(\theta) < f'(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln x + x}{\ln x - x} < f(x+1) - f(x) < \frac{\ln(x+1) + x+1}{\ln(x+1) - x - 1}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{\ln x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right)}{\cancel{x} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right)} = \frac{0+1}{0-1} = -1 \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) + x+1}{\ln(x+1) - x - 1} \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{\ln u + u}{\ln u - u} = -1,$$

οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = -1}.$$

1718. i. Στη σχέση $2f(x^3) - f^2(x) \geq 1$:

- για $x=0$ είναι $2f(0) - f^2(0) \geq 1 \Leftrightarrow f^2(0) - 2f(0) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(0) = 1}},$
- για $x=1$ είναι $2f(1) - f^2(1) \geq 1 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(1) = 1}},$
- για $x=-1$ είναι $2f(-1) - f^2(-1) \geq 1 \Leftrightarrow f^2(-1) - 2f(-1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(-1) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(-1) - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(-1) = 1}}.$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ με $f(-1) = f(0)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f(0) = f(1)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $[-1, 1]$.

ii. Έστω $g(x) = 2f(x^3) - f^2(x) - 1$ με $g'(x) = 6x^2 f'(x^3) - 2f(x)f'(x)$, αφού είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- για $x=0$ είναι $g(0) = 2f(0) - f^2(0) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{g(0)=0}}$,
- για $x=1$ είναι $g(1) = 2f(1) - f^2(1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{g(1)=0}}$,
- για $x=-1$ είναι $g(-1) = 2f(-1) - f^2(-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{g(-1)=0}}$.

Τότε θα είναι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και :

- $g(x) \geq g(0)$, άρα το $g(0)$ είναι ακρότατο της g ,
- $g(x) \geq g(1)$, άρα το $g(1)$ είναι ακρότατο της g ,
- $g(x) \geq g(-1)$, άρα το $g(-1)$ είναι ακρότατο της g .

Έτσι έχουμε :

- Το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,
- Η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$ και
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 0$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow -2f(0)f'(0) = 0 \Leftrightarrow -2f'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = 0}.$$

Έτσι έχουμε :

- Το $x = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,
- Η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$ και
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 1$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) - 2f(1)f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) - 2f'(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 0}.$$

Έτσι έχουμε :

- Το $x = -1$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$,
- Η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -1$ και
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = -1$.

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι :

$$g'(-1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(-1) - 2f(-1)f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(-1) - 2f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(-1) = 0}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $\boxed{f'(-1) = f'(0) = f'(1)}$.

iii. Αφού είναι $f'(0) \leq 0$, $f'(1) \geq 0$, $f'(-1) \geq 0$ και $f'(-1) = f'(0) = f'(1)$ τότε θα είναι $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Επιπλέον είναι και $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[-1, x_1]$, $[x_1, 0]$, $[0, x_2]$ και $[x_2, 1]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[-1, x_1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, x_1)$ με $f'(-1) = f'(x_1)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-1, x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1, 0)$ με $f'(x_1) = f'(0)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, 0)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[0, x_2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, x_2)$ με $f'(0) = f'(x_2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_3 \in (0, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_3) = 0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[x_2, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(x_2, 1)$ με $f'(x_2) = f'(1)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_4 \in (x_2, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_4) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως η f έχει τουλάχιστον 4 πιθανά σημεία καμπής στο διάστημα $(-1, 1)$.

- 1719. i.** Η $f(x) = 2\ln x + x^2 - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2x = \frac{2 + 2x^2}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο A .

- ii.** Η $f(x) = 2\ln x + x^2 - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους :

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2x \text{ και } f''(x) = -\frac{2}{x^2} + 2 = \frac{2x^2 - 2}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \text{ ή } x = -1, \text{ το}$$

οποίο απορρίπτεται αφού $x > 0$, οπότε κάνουμε τον πίνακα κυρτότητας – σημείων καμπής :

x	0	1	$+\infty$
$2x^2 - 2$		–	+
$f''(x)$		–	+
$f(x)$	$\curvearrowright$ Σ.Κ. $\curvearrowleft$		

Συνεπώς :

– Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $[1, +\infty)$.

και

ο **Σημείο καμπής** είναι το $A(1,0)$.

iii. Είναι $f(1)=0$, άρα το $x=1$ είναι ρίζα της $f(x)=0$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A άρα και $1-1$.

Οπότε :

$$- \text{ Για } \boxed{0 < x < 1} \text{ έχουμε : } x < 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) < 0}.$$

$$- \text{ Για } \boxed{x > 1} \text{ έχουμε : } x > 1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) > 0}.$$

iv. Είναι :

$$f((0, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ το σύνολο τιμών της } f,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \ln x + x^2 - 1) = -\infty + 0 - 1 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x + x^2 - 1) = +\infty + \infty - 1 = +\infty.$$

v. Παρατηρούμε πως το $x=1$ είναι μία προφανής ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10}).$$

- Για $0 < x < 1$ έχουμε :

$$x > x^5 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x^5) \text{ και } x^2 > x^{10} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x^2) > f(x^{10}), \text{ οπότε}$$

προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(x) + f(x^2) > f(x^5) + f(x^{10}).$$

Επομένως για $0 < x < 1$ η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$ δεν έχει λύση.

- Για $x > 1$ έχουμε :

$$x < x^5 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^5) \text{ και } x^2 < x^{10} \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x^2) < f(x^{10}), \text{ οπότε}$$

προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(x) + f(x^2) < f(x^5) + f(x^{10}).$$

Επομένως για $x > 1$ η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$ δεν έχει λύση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10}) \text{ είναι το } \boxed{x=1}.$$

vi. Είναι :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \ln e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$2(\ln\alpha - \ln\beta) = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2\ln\alpha - 2\ln\beta = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2\ln\alpha + \alpha^2 = 2\ln\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$2\ln\alpha + \alpha^2 - 1 = 2\ln\beta + \beta^2 - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha=\beta}.$$