



Καλή επιτυχία!!!



*"μην εξαντλείστε στο να κάνετε τα "πράγματα σωστά"
αλλά προσπαθείτε να κάνετε τα "σωστά πράγματα"*



*Οι έξυπνοι άνθρωποι συνεργάζονται δεν
διαπληκτίζονται*



*"Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς τη
σωστή στρατηγική. Η στρατηγική είναι η λεωφόρος
που οδηγεί στην επίτευξη.*



*"Οι νικητές διαθέτουν δύο πράγματα.
Ξεκάθαρους στόχους και επιθυμία να πετύχουν.*



*"Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι το πιο
πολύτιμο, το πιο ατομικό, το πιο πεπερασμένο αγαθό"*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος περιέχει τις λύσεις όλων των ασκήσεων του βιβλίου
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ II Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και
πληροφορικής για να βοηθήσει τους μαθητές στην προετοιμασία τους για τις
Πανελλήνιες Εξετάσεις.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

• Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.	1153-1252	5
• Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	1253-1351	67
• Κανόνες De l' Hospital.	1352-1385	120
• Μονοτονία-Τοπικά ακρότατα συνάρτησης.	1386-1678	148
• Κυρτότητα-Σημεία καμπής συνάρτησης.	1679-1760	394
• Ασύμπτωτες	1761-1808	471
• Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	1809-1817	515

ΛΥΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

• Αρχική συνάρτηση-Παράγουσα	1818-1851	533
• Ορισμένο ολοκλήρωμα	1852-1972	547
•* Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	1973-1988	654
• Εμβαδόν επιπέδου χωρίου	1989-2046	665
• Ολοκλήρωμα και διάταξη	2047-2094	712

Υποθέσεις και συμπέρασμα Θ.Μ.Τ.

- 1153. i.** Η $f(x) = 2\ln x$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως λογαριθμική και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $f'(x) = \frac{2}{x}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{2}{e - 1} \Leftrightarrow \frac{2}{\xi} = \frac{2}{e - 1} \Leftrightarrow \xi = e - 1.$$

- ii.** Η f είναι συνεχής για $x < 0$ και για $x > 0$ ως πολωνυμική. Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα ούτε και στο διάστημα $[-1, 2]$. Η f λοιπόν δεν τηρεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

- 1154.** Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$ άρα

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 - \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) για $x < 1$ με $f'(x) = 3x^2 + 2x + \alpha$ και για $x > 1$ με $f'(x) = 2\beta x + 2$. Αφού στην f εφαρμόζεται το **θεώρημα μέσης τιμής** στο διάστημα $[0, 2]$ τότε η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και θα ισχύει :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1) = \alpha + \beta + 2}{\Leftrightarrow} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 + \alpha x - \alpha - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\beta x^2 + 2x - \beta - 2}{x - 1} \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1 + x^2 - 1 + \alpha x - \alpha}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\beta x^2 - \beta + 2x - 2}{x - 1} \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x + 1) + \alpha(x - 1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\beta(x - 1)(x + 1) + 2(x - 1)}{x - 1} \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1 + x + 1 + \alpha)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(\beta x + \beta + 2)}{x - 1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$5 + \alpha = 2\beta + 2 \stackrel{\alpha = \beta}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta = 3.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 3x + 3, & x < 1 \\ 3x^2 + 2x + 3, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{19 - 3}{2} = 8.$$

$$- \text{ Αν } \xi \in (0, 1) \text{ τότε } f'(\xi) = 3\xi^2 + 2\xi + 3 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 2\xi - 5 = 0 \text{ με } \Delta = 64$$

$$\text{Άρα } \xi_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{6} = \begin{cases} \xi_1 = 1, \text{ απορρίπτεται} \\ \xi_2 = -\frac{5}{3}, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

– Αν $\xi \in [1, 2)$ τότε $f'(\xi) = 6\xi + 2 \Leftrightarrow 6\xi = 6 \Leftrightarrow \xi = 1$ δεκτή.

1155. i. Η $g(x) = \ln f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε εφαρμόζεται το

θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[a, \beta]$.

ii. Σύμφωνα λοιπόν με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(a)}{\beta - a} = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(a)}{\beta - a} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln \frac{f(\beta)}{f(a)}}{\beta - a} \Leftrightarrow$$

$$(\beta - a) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \ln \frac{f(\beta)}{f(a)} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{f(a)} = e^{(\beta - a) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}.$$

Υπαρξη ξ ώστε $f'(\xi) = c$ ($c \in \mathbb{R}^+$)

1156. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda = -3$, αφού έχουμε παράλληλες ευθείες, όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $3x + y - 5 = 0$. Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f με τετμημένη $\xi \in (1, 3)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $3x + y - 5 = 0$.

1157. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot \lambda = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = -1$, αφού έχουμε κάθετες ευθείες, όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $2x - 2y + 7 = 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f με τετμημένη $\xi \in (a, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 2y + 7 = 0$.

- 1158.** Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3}{2}f(2) - f(2) = \frac{1}{2}f(2) \Leftrightarrow 2f'(\xi) = f(2).$$

- 1159.** Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$. Για να διέρχεται αυτή η εφαπτομένη από το σημείο P θα πρέπει να την επαληθεύει :

$$\cancel{f(\xi)} + 1 = f'(\xi)(\cancel{\xi} + 1 - \cancel{\xi}) + \cancel{f(\xi)} \Leftrightarrow f'(\xi) = 1.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1.$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να διέρχεται από το P .

- 1160.** i. Αφού η f είναι περιττή τότε $f(-x) = -f(x)$ στην οποία αν θέσουμε $x=0$ παίρνουμε $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Δηλαδή η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $3x - y + 7 = 0$ είναι $\lambda = 3$. Οι εφαπτομένες της C_f σε σημεία με τετμημένες $\xi \in \mathbb{R}$ που είναι παράλληλες σε αυτήν την ευθεία πρέπει να έχουν συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi) = \lambda = 3$.

Από τη σχέση $f(-x) = -f(x)$ για $x=2$ έχουμε $f(-2) = -f(2) = -6$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{\cancel{f(0)}^0 - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{6}{2} = 3.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - \cancel{f(0)}^0}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο εφαπτομένες της C_f παράλληλες στην ευθεία $3x - y + 7 = 0$.

- 1161.** i. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ έχει τη μορφή :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + f(1)$$

Όμως η $y = f'(1)x - f'(1) + f(1)$ είναι η $y = 3x - 5$, οπότε :

$$\underline{f'(1) = 3} \text{ και } \cancel{-f'(1)}^3 + f(1) = -5 \Leftrightarrow \underline{f(1) = -2}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $B(3, f(3))$ έχει τη μορφή :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = f'(3)x - 3f'(3) + f(3)$$

Όμως η $y = f'(3)x - 3f'(3) + f(3)$ είναι η $y = -x + 7$, οπότε :

$$\underline{f'(3) = -1} \text{ και } \cancel{-3f'(3)}^{-1} + f(3) = 7 \Leftrightarrow \underline{f(3) = 4}.$$

ii. Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3.$$

iii. Η f' είναι συνεχής στο $[1, 3] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f''(x_0) = \frac{f'(3) - f'(1)}{3 - 1} = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

1162. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\beta, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (β, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

$$\text{Η } f' \text{ είναι συνεχής στο } [\xi_1, \xi_2] \subseteq \mathbb{R} \text{ με } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \cdot \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} =$$

$$= \frac{(f(\beta) - f(a)) \cdot (f(\gamma) - f(\beta))}{(\beta - a) \cdot (\gamma - \beta)} < 0 \text{ αφού } a < \beta \Leftrightarrow \beta - a > 0, \beta < \gamma \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0$$

και $(f(\beta) - f(a)) \cdot (f(\gamma) - f(\beta)) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1163. i. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) \cdot f(\beta) = 25a\beta < 0$ αφού $a < 0$ και $\beta > 0$,

οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Αποδείξαμε λοιπόν πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $\varepsilon : x - 5y + 2010 = 0$ είναι $\lambda = \frac{1}{5}$. Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $\xi \in \mathbb{R}$ που να είναι κάθετη στην ε , πρέπει $f'(\xi) \cdot \lambda = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = -5$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{5\alpha - 5\beta}{\beta - \alpha} = \frac{-5(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -5.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ε .

iii. Πρέπει να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Έστω $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 5\beta - \frac{5\alpha + 5\beta}{2} = \frac{5\beta - 5\alpha}{2} = \frac{5}{2}(\beta - \alpha) > 0, \text{ αφού } \alpha < \beta \text{ και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 5\alpha - \frac{5\alpha + 5\beta}{2} = \frac{5\alpha - 5\beta}{2} = \frac{5}{2}(\alpha - \beta) < 0, \text{ αφού } \alpha < \beta.$$

Δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$, δηλαδή

η f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

1164. i. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε θα είναι παραγωγίσιμη και σε ένα τυχαίο σύνολο (α, β) με $\alpha < \beta$. Έχουμε λοιπόν :

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Γνωρίζουμε πως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς έχουμε:

$$f'(\xi) \neq 0 \stackrel{\alpha < \beta}{\Leftrightarrow} f(\beta) - f(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \neq f(\beta).$$

Ξεκινήσαμε με $\alpha \neq \beta$ και καταλήξαμε σε $f(\alpha) \neq f(\beta)$, άρα η f είναι $\langle\langle 1-1 \rangle\rangle$.

ii. Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(1,7)$, τότε έχουμε $f(-2)=1$ και $f(1)=7$. Συνεπώς :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-6+f(x^2-8)) &= -2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(-6+f(x^2-8))) = f(-2) \Leftrightarrow \\ -6+f(x^2-8) &= 1 \Leftrightarrow f(x^2-8) = 7 \Leftrightarrow f(x^2-8) = f(1) \stackrel{f \ll 1-1 \gg}{\Leftrightarrow} x^2-8=1 \Leftrightarrow \\ x^2-8 &= 1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3. \end{aligned}$$

iii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $\varepsilon : x+2y-3=0$ είναι $\lambda = -\frac{1}{2}$. Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $\xi \in \mathbb{R}$ που να είναι κάθετη στην ε , πρέπει $f'(\xi) \cdot \lambda = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2$.

Η f είναι συνεχής στο $[-2,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-2,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{7-1}{3} = 2.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ε .

Θ.Μ.Τ. και ανισότητες

1165. i. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως ημίγειο συνεχών συναρτήσεων και

$$\text{παραγωγίσιμη στο } (e, e^2) \text{ με } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}, \text{ οπότε}$$

εφαρμόζεται το **θεώρημα μέσης τιμής** στο διάστημα $[e, e^2]$.

ii. Σύμφωνα λοιπόν με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\begin{aligned} \xi \in (e, e^2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) &= \frac{f(e^2)-f(e)}{e^2-e} = \frac{\frac{\ln e^2}{e^2-1} - \frac{\ln e}{e-1}}{e^2-e} = \frac{\frac{2}{(e-1)(e+1)} - \frac{1}{e-1}}{e^2-e} = \\ &= \frac{\frac{2-(e+1)}{(e-1)(e+1)}}{e(e-1)} = \frac{1-e}{e(e-1)^2(e+1)} < 0, \text{ αφού } e > 1 \Leftrightarrow 1-e < 0 \text{ και όλες οι} \end{aligned}$$

υπόλοιπες ποσότητες είναι θετικές.

1166. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0 \text{ αφού } \alpha < \beta \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) > 0 \text{ και} \\ \alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0.$$

1167. Το σημείο $A(0,2)$ ανήκει στην C_f άρα $f(0) = 2$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (0,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{f(3) - 2}{3}.$$

Έχουμε λοιπόν :

$$3 \leq f'(x) \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{f(3) - 2}{3} \leq 7 \Leftrightarrow 9 \leq f(3) - 2 \leq 21 \Leftrightarrow 11 \leq f(3) \leq 23.$$

1168. i. Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} 2x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $|f'(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(x) \leq 1$.

$$\bullet \quad f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

που ισχύει.

$$\bullet \quad f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \Leftrightarrow 2x \geq -1-x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ισχύει $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $\alpha < \beta$. Τότε θα έχουμε :

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

$$\text{τουλάχιστον ένα } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Άρα } |f'(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \Leftrightarrow |f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|.$$

1169. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$.

— Η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{f(0) + 2}{2}.$$

$$\text{Έτσι } f'(\xi_1) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(0) + 2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0) \leq 0}}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - f(0)}{2}.$$

$$\text{Έτσι } f'(\xi_1) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 - f(0)}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2 - f(0) \leq 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(0) \geq 0}}$$

Έχουμε λοιπόν $f(0) = 0$.

1170. i. Στην δοθείσα ισότητα για $y = x$ έχουμε $|\sin x - \sin x| \leq |x - x| \Leftrightarrow 0 \leq 0$ που ισχύει. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $x < y$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(u) = \sin u$ η οποία είναι συνεχής στο $[x, y]$ και παραγωγίσιμη στο (x, y) με $f'(u) = -\eta\mu u$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = \frac{\sin y - \sin x}{y - x}.$$

$$\text{Είναι } |\eta\mu\xi| \leq 1 \Leftrightarrow |-\eta\mu\xi| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\sin y - \sin x|}{|y - x|} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$|\sin y - \sin x| \leq |y - x| \Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ii. Στη δοθείσα σχέση αν βάλουμε όπου x το $\sqrt{x}$ και όπου y το $\sqrt{x+1}$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} |\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}| &\leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| \Leftrightarrow \\ -|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| &\leq \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| \end{aligned}$$

Έστω $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = A$.

Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται $-|A| \leq \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \leq |A|$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-|A|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} |A| = 0$, οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο**

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$.

1171. i. Στην δοθείσα ισότητα για $\beta = \alpha$ έχουμε $|\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha| \leq |\alpha - \alpha| \Leftrightarrow 0 \leq 0$ που ισχύει. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $\alpha < \beta$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin^2 x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = -2\eta\mu x \cdot \sin x$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα**

μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -2\eta\mu\xi\sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } |-2\eta\mu\xi \cdot \sigma\upsilon\nu\xi| = |-\eta\mu 2\xi| = |\eta\mu 2\xi| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \Leftrightarrow |\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha| \leq |\beta - \alpha| \Leftrightarrow |\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta| \leq |\alpha - \beta|.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι $|\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha| \leq |\beta - \alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Έστω $f(x) = x \sin x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = \sin x - x \eta\mu x$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq (0, 1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta \sigma\upsilon\nu\beta - \alpha \sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } |f'(x)| = |\sin x - x \eta\mu x| \leq |\sin x| + |-x \eta\mu x| = |\sin x| + |x| |\eta\mu x| \leq 2, \text{ αφού } |\sin x| \leq 1, |\eta\mu x| \leq 1 \text{ και ισχύει } x \in (0, 1) \Leftrightarrow |x| < 1.$$

$$\text{Άρα και } |f'(\xi)| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{\beta \sigma\upsilon\nu\beta - \alpha \sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{|\beta \sigma\upsilon\nu\beta - \alpha \sigma\upsilon\nu\alpha|}{|\beta - \alpha|} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$|\beta \sigma\upsilon\nu\beta - \alpha \sigma\upsilon\nu\alpha| \leq 2|\beta - \alpha| \Leftrightarrow |\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha - \beta \sigma\upsilon\nu\beta| \leq 2|\alpha - \beta|.$$

1172. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως εκθετική και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = 2^x \ln 2$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha}$

Η f' έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{2^x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 2^{x_1} \ln 2 < 2^{x_2} \ln 2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Έτσι έχουμε :

$$\alpha < \xi < \beta \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow 2^\alpha \ln 2 < \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} < 2^\beta \ln 2.$$

1173. Για $\alpha = \beta$ έχουμε $0 \leq 0 \leq 0$ που ισχύει.

Για $\alpha < \beta$ από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$\frac{\beta - \alpha}{\eta\mu^2 \beta} \leq \sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta \leq \frac{\beta - \alpha}{\eta\mu^2 \alpha} \stackrel{\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\eta\mu^2 \beta} \leq \frac{\sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta}{\beta - \alpha} \leq \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha < \beta$, η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως τριγωνομετρική και

παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης**

τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση του ημιτόνου είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

κάθε $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \quad \overset{\text{θετικές ποσότητες}}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2 x_1 < \eta\mu^2 x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 x_1} > \frac{1}{\eta\mu^2 x_2} \Leftrightarrow \\ &-\frac{1}{\eta\mu^2 x_1} < -\frac{1}{\eta\mu^2 x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \alpha < \xi < \beta \quad \overset{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) &\Leftrightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} < \frac{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}{\beta - \alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2 \beta} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} > -\frac{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}{\beta - \alpha} > \frac{1}{\eta\mu^2 \beta} &\Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 \beta} < \frac{\sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Έτσι αποδείξαμε πως για κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha \leq \beta$ είναι

$$\frac{1}{\eta\mu^2 \beta} \leq \frac{\sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta}{\beta - \alpha} \leq \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\eta\mu^2 \beta} \leq \sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta \leq \frac{\beta - \alpha}{\eta\mu^2 \alpha}.$$

1174. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\eta\mu x)$ με $x \in (0, \pi)$.

Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ με $\alpha < \beta$, η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = \sigma\phi x$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq (0, \pi)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Η συνάρτηση $f'(x) = \sigma\phi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$, έτσι έχουμε :

$$\alpha < \xi < \beta \quad \overset{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow \sigma\phi\alpha > \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha)}{\beta - \alpha} > \sigma\phi\beta \Leftrightarrow$$

$$\sigma\phi\beta < \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha)}{\beta - \alpha} < \sigma\phi\alpha.$$

1175. Αφού είναι $\alpha < \beta$ τότε από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$(\beta - \alpha)\epsilon\phi\alpha < \ln \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} < (\beta - \alpha)\epsilon\phi\beta \quad \stackrel{\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \quad \epsilon\phi\alpha < \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta - \alpha} < \epsilon\phi\beta.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha < \beta$, η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων

συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = -\epsilon\phi x$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\beta) - \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση της εφαπτομένης είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \epsilon\phi x_1 < \epsilon\phi x_2 \Leftrightarrow -\epsilon\phi x_1 > -\epsilon\phi x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \alpha < \xi < \beta &\stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow -\epsilon\phi\alpha > \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\beta) - \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\beta - \alpha} > -\epsilon\phi\beta \Leftrightarrow \\ \epsilon\phi\alpha < \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta - \alpha} < \epsilon\phi\beta &\Leftrightarrow (\beta - \alpha)\epsilon\phi\alpha < \ln \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} < (\beta - \alpha)\epsilon\phi\beta. \end{aligned}$$

1176. Από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$\alpha e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta e \Leftrightarrow \ln(\alpha e) < \ln\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \ln(\beta e) \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha + \ln e < \frac{1}{\beta - \alpha} \ln\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right) < \ln \beta + \ln e \Leftrightarrow \ln \alpha + 1 < \frac{\ln \beta^\beta - \ln \alpha^\alpha}{\beta - \alpha} < \ln \beta + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha + 1 < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln \beta + 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$f'(x) = \ln x + 1$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Η f' έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 + 1 < \ln x_2 + 1 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Έτσι έχουμε :

$$\alpha < \xi < \beta \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow \ln \alpha + 1 < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln \beta + 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}} < \beta e.$$

1177. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, \beta) \subseteq \Delta$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\beta, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (β, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\beta, \gamma) \subseteq \Delta$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

1178. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[8, 9]$ και $[10, 11]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[8, 9]$ και παραγωγίσιμη στο $(8, 9)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (8, 9)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(9) - f(8)}{9 - 8} = f(9) - f(8).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[10, 11]$ και παραγωγίσιμη στο $(10, 11)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (10, 11)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = f(11) - f(10).$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$f(9) - f(8) > f(11) - f(10) \Leftrightarrow f(8) + f(11) < f(9) + f(10).$$

1179. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[α, α+1]$ και $[α+2, α+3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[α, α+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, α+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (α, α+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(α+1) - f(α)}{α+1 - α} = f(α+1) - f(α)$.
- Η f είναι συνεχής στο $[α+2, α+3]$ και παραγωγίσιμη στο $(α+2, α+3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (α+2, α+3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(α+3) - f(α+2)}{α+3 - α - 2} = f(α+3) - f(α+2)$.

Έχουμε λοιπόν: $\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$f(α+1) - f(α) > f(α+3) - f(α+2) \Leftrightarrow f(α+1) + f(α+2) > f(α) + f(α+3).$$

1180. i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, e]$ ως λογαριθμική και παραγωγίσιμη στο $(2, e)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(e) - f(2)}{e - 2} = \frac{1 - \ln 2}{e - 2}$.

Η f' έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}^*$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A . Έτσι έχουμε:

$$2 < \xi < e \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(2) > f'(\xi) > f'(e) \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1 - \ln 2}{e - 2} > \frac{1}{e} \stackrel{e > 2}{\Leftrightarrow} \frac{e - 2}{2} > 1 - \ln 2 > \frac{e - 2}{e} \Leftrightarrow \frac{e}{2} - 2 > -\ln 2 > -\frac{2}{e} \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}.$$

ii. Έστω $g(x) = x + \ln x - \frac{x}{e} - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, e]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(2) = \ln 2 - \frac{2}{e} < 0$ αφού $\ln 2 < \frac{2}{e}$ και

$g(e) = e - 2 > 0$. Δηλαδή $g(2) \cdot g(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, e)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 + \ln x_0 = \frac{x_0}{e} + 2$.

1181. i. Έστω η συνάρτηση $f(u) = e^u$ η οποία είναι συνεχής στο $[x, 0]$ ως εκθετική και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$ με $f'(u) = e^u$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{1 - e^x}{-x} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Η συνάρτηση $f'(u) = e^u$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[x, 0]$ οπότε

$$\text{έχουμε : } x < \xi < 0 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \Leftrightarrow e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1.$$

ii. Έστω η συνάρτηση $f(u) = e^u$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, x]$ ως εκθετική και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $f'(u) = e^u$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης**

$$\text{τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Η συνάρτηση $f'(u) = e^u$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0, x]$ οπότε

$$\text{έχουμε : } 0 < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x.$$

iii. Έστω η συνάρτηση $f(u) = \ln u$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, x+1]$ ως εκθετική

και παραγωγίσιμη στο $(1, x+1)$ με $f'(u) = \frac{1}{u}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα**

μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(1)}{x+1 - 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Η f' έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A . Έτσι έχουμε :

$$1 < \xi < x+1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(1) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow 1 > \frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$x > \ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

1182. Για $x=1$ η ισότητα ισχύει. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Πρέπει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις, για $x < 1$ και για $x > 1$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το **θεώρημα μέσης τιμής** στα διαστήματα $[1, x]$ και $[x, 1]$.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}^*$.

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 < x_2 \text{ έχουμε: } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

- Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - \cancel{f(1)}^0}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1}.$$

$$\text{Άρα : } 1 < \xi_1 < x \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(1) > f'(\xi_1) > f'(x) \Leftrightarrow 1 > \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x} \stackrel{x>1 \Leftrightarrow x-1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x-1 > \ln x > \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(1)}^0 - f(x)}{1-x} = \frac{-\ln x}{-(x-1)} = \frac{\ln x}{x-1}.$$

$$\text{Άρα : } x < \xi_2 < 1 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi_2) > f'(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x-1} > 1 \stackrel{x<1 \Leftrightarrow x-1<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως σε κάθε περίπτωση θα έχουμε $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

1183. Από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε :

$$1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x}$. Πρέπει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις, για $x < 0$ και για $x > 0$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, x]$ και $[x, 0]$.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ με πεδίο ορισμού $A = (-1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1+x_1 < 1+x_2 \stackrel{x+1>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{1+x_1} < \sqrt{1+x_2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x_1} < 2\sqrt{1+x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x_1}} > \frac{1}{2\sqrt{1+x_2}} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

- Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

Άρα :

$$0 < \xi_1 < x \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) > f'(\xi_1) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} > \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \\ \frac{x}{2} > \sqrt{1+x}-1 > \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x}-1 < \frac{x}{2}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{-x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Άρα :

$$x < \xi_2 < 0 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi_2) > f'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} > \frac{1}{2} \stackrel{x<0}{\Leftrightarrow} \\ \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x}-1 < \frac{x}{2}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως σε κάθε περίπτωση θα έχουμε $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

1184. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ η οποία είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ ως λογαριθμική

και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα**

μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}} = \ln(x+1) - \ln x.$$

Η f' έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}^*$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A . Έτσι έχουμε :

$$x < \xi < x+1 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

1185. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x$ η οποία είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ ως

αποτελεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με

$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x$ οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}} = \ln^2(x+1) - \ln^2 x.$

Έχουμε $f''(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} < 0$ αφού

$$x > e \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0.$$

Οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Έτσι έχουμε: } x < \xi < x+1 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x} \ln x > \ln^2(x+1) - \ln^2 x > \frac{2}{x+1} \ln(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} < \frac{1}{2} \ln^2(x+1) - \frac{1}{2} \ln^2 x < \frac{\ln x}{x}.$$

1186. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ η οποία είναι συνεχής στο $A = (0, +\infty)$ ως

λογαριθμική και παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Επιπλέον για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x-1, x)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = \ln x - \ln(x-1) = \ln \frac{x}{x-1}.$$

$$\text{Άρα: } x-1 < \xi_1 < x \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x-1) > f'(\xi_1) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > \ln \frac{x}{x-1} > \frac{1}{x}$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x}.$$

$$\text{Άρα: } x < \xi_2 < x+1 \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi_2) > f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln \frac{x+1}{x} > \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Αποδείξαμε λοιπόν πως } \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} < \ln \frac{x}{x-1}.$$

1187. i. Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Έτσι έχουμε :

$$x < \xi < x+1 \stackrel{f' \text{ γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)}}$$

ii. Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}} = f(x+1) - f(x).$$

Έτσι έχουμε :

$$x < \xi < x+1 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < \underline{\underline{f(x+1) - f(x)}} < f'(x+1)$$

iii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x+1, x+2]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x-1, x)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1).$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x+1, x+2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x+1, x+2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in (x+1, x+2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2 - (x+1)} = f(x+2) - f(x+1)$$

Έχουμε λοιπόν :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+2) - f(x+1) \Leftrightarrow \\ f(x) + f(x+1) < f(x-1) + f(x+2).$$

iv. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[x, 2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x, 2x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[2x, 3x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2x, 3x)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(3x) - f(2x)}{3x - 2x} = \frac{f(3x) - f(2x)}{x}.$$

Έχουμε λοιπόν :

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(2x) - f(x)}{x} < \frac{f(3x) - f(2x)}{x} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \\ f(2x) - f(x) < f(3x) - f(2x) \Leftrightarrow f(x) + f(3x) > 2f(2x).$$

v. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, x^2]$ και $[x^2, x^3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, x^2]$ και παραγωγίσιμη στο (x, x^2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x, x^2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x^2, x^3]$ και παραγωγίσιμη στο (x^2, x^3) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x^2, x^3)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^3 - x^2} = \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2(x-1)}.$$

Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)} < \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2(x-1)} \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} \\ x(f(x^2) - f(x)) &< f(x^3) - f(x^2) \Leftrightarrow xf(x^2) - xf(x) < f(x^3) - f(x^2) \Leftrightarrow \\ xf(x) + f(x^3) &> (x+1)f(x^2). \end{aligned}$$

vi. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[e^x, e^{2x}]$ και $[e^{2x}, e^{3x}]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[e^x, e^{2x}]$ και παραγωγίσιμη στο (e^x, e^{2x}) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (e^x, e^{2x})$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x} = \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^x(e^x - 1)}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[e^{2x}, e^{3x}]$ και παραγωγίσιμη στο (e^{2x}, e^{3x}) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (e^{2x}, e^{3x})$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{3x} - e^{2x}} = \frac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{2x}(e^x - 1)}.$$

Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^x(e^x - 1)} < \frac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{2x}(e^x - 1)} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \stackrel{e^x>1}{\Leftrightarrow} \\ e^x(f(e^{2x}) - f(e^x)) &< f(e^{3x}) - f(e^{2x}) \Leftrightarrow f(e^{2x}) - e^x f(e^x) < f(e^{3x}) - f(e^{2x}) \Leftrightarrow \\ e^x f(e^x) + f(e^{3x}) &> (e^x + 1)f(e^{2x}). \end{aligned}$$

1188. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x-1, x)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1).$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \quad x-1 < \xi_1 < x &\stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x-1) > f'(\xi_1) > f'(x) \Leftrightarrow \\ &\underline{f'(x-1) > f(x) - f(x-1) > f'(x)}. \end{aligned}$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \quad x < \xi_2 < x+1 &\stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi_2) > f'(x+1) \Leftrightarrow \\ &\underline{f'(x) > f(x+1) - f(x) > f'(x+1)}. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.

1189. i. Για $x=1$ έχουμε $3 \leq f(1) \leq 3$ που ισχύει αφού $f(1)=3$.

Για $x>1$ εργαζόμαστε ως εξής :

Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 3}{x - 1}.$$

Είναι $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και

$$|f'(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{f(x) - 3}{x - 1} \leq 1 \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} 1 - x \leq f(x) - 3 \leq x - 1 \Leftrightarrow$$

$$4 - x \leq f(x) \leq x + 2.$$

ii. Έχουμε $4 - x \leq f(x) \leq x + 2 \Leftrightarrow x + 4 \leq f(x) + 2x \leq 3x + 2 \stackrel{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x+4}{x^2+1} \leq \frac{f(x)+2x}{x^2+1} \leq \frac{3x+2}{x^2+1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ οπότε}$$

σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+2x}{x^2+1} = 0$.

iii. Έστω $g(x) = f(x) - 3x + 4$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων με $g(2) = f(2) - 2 \geq 0$, αφού $4 - x \leq f(x) \stackrel{x=2}{\Leftrightarrow} 2 \leq f(2)$, και

$g(3) = f(3) - 5 \leq 0$, αφού $f(x) \leq x + 2 \stackrel{x=3}{\Leftrightarrow} f(3) \leq 5$, δηλαδή $g(2) \cdot g(3) \leq 0$.

- Αν $g(2) \cdot g(3) < 0$ τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3) \subseteq [2, 3]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3\xi - 4$.
- Αν $g(2) \cdot g(3) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(2) = 0$ δηλαδή το $x = 2$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(3) = 0$ δηλαδή το $x = 3$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [2, 3]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3\xi - 4$.

1190. i. Για $x=0$ έχουμε $0 \leq f(0) \leq 0$ που ισχύει αφού $f(0)=0$.

Για $x>0$ εργαζόμαστε ως εξής :

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Είναι $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ άρα και

$$|f'(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} -x \leq f(x) \leq x.$$

$$\text{ii. Έχουμε } -x \leq f(x) \leq x \Leftrightarrow x \leq f(x) + 2x \leq 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{f(x) + 2x} \leq \frac{1}{x}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) + 2x} = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x) + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) + 2x} \eta\mu x = 0$ αφού είναι **μηδενική επι φραγμένη** με

απόδειξη :

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{f(x) + 2x} \leq \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right| \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x) + 2x} \right| = 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο}$$

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x) + 2x} = 0$

1191. Η f είναι συνεχής στο $[0, x] \subseteq [0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Έτσι έχουμε :

$$0 < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) > f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(0) > \frac{f(x)}{x} > f'(x)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

- 1192. i.** Η f είναι συνεχής στο $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Έτσι έχουμε :

$$a < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(a) > f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a).$$

- ii.** Από τη σχέση $f'(x) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$ πολλαπλασιάζοντας με $x - a > 0$

$$\text{παίρνουμε } (x - a)f'(x) < f(x) - f(a) < (x - a)f'(a) \Leftrightarrow$$

$$(x - a)f'(x) + f(a) < f(x) < (x - a)f'(a) + f(a).$$

- iii.** Είναι $g'(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)' = \frac{(x - a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x - a)^2} < 0$ αφού

$$(x - a)f'(x) + f(a) < f(x) \Leftrightarrow (x - a)f'(x) + f(a) - f(x) < 0 \text{ και } (x - a)^2 > 0.$$

- 1193.** Η f είναι συνεχής στο $[0, x] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Έτσι έχουμε :

$$0 < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$$

- 1194.** $g'(x) = \left(\frac{f(x) - x}{x} \right)' = \frac{(f'(x) - 1)x - f(x) + x}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$

Για να δείξουμε ότι $g'(x) > 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $xf'(x) - f(x) > 0$ αφού $x^2 > 0$ για $x > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, x] \subseteq [0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Έτσι έχουμε :

$$0 < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x).$$

Δηλαδή $\frac{f(x)}{x} < f'(x) \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$, άρα και $g'(x) > 0$ για $x > 0$.

1195. $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x-2} \right)' = \frac{f'(x)(x-2) - f(x)}{(x-2)^2}.$

Για να δείξουμε ότι $g'(x) < 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x)(x-2) - f(x) < 0$ αφού $(x-2)^2 > 0$ για $x \neq 2$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για $x < 2$ και μία για $x > 2$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, 2]$ και $[2, x]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \frac{f(x)}{x - 2}.$$

Άρα : $x < \xi < 2 \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(2) \Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(x)}{x-2} > f'(2) \Leftrightarrow$

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x-2} \stackrel{x < 2}{\Leftrightarrow} (x-2)f'(x) < f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-2) - f(x) < 0.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2}.$$

Άρα : $2 < \xi < x \stackrel{f' \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f'(2) > f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(2) > \frac{f(x)}{x-2} > f'(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x-2} > f'(x) \stackrel{x > 2}{\Leftrightarrow} f(x) > (x-2)f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-2) - f(x) < 0.$$

Και στις δύο περιπτώσεις αποδείξαμε ότι $f'(x)(x-2) - f(x) < 0$ δηλαδή $g'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2$.

- 1196.** Για να δείξουμε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = (k-1)x$ σε ένα ακριβώς σημείο, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0 \Leftrightarrow f(x) - (k-1)x = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - (k-1)x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, 0]$ και $[0, x]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 0) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = -\frac{f(0) - f(x)}{x}.$$

Είναι $f'(x) > k$ άρα και

$$\begin{aligned} f'(\xi) > k &\Leftrightarrow -\frac{f(0) - f(x)}{x} > k \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} -f(0) + f(x) < kx \Leftrightarrow f(x) - kx < f(0) \Leftrightarrow \\ &f(x) - kx + x < f(0) + x \Leftrightarrow f(x) - (k-1)x < f(0) + x \Leftrightarrow \\ &g(x) < f(0) + x. \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0) + x) = -\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Οπότε υπάρχει $\alpha < 0$ τέτοιο ώστε $g(\alpha) < 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Είναι $f'(x) > k$ άρα και

$$\begin{aligned} f'(\xi) > k &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} > k \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} f(x) - f(0) > kx \Leftrightarrow f(x) - kx > f(0) \Leftrightarrow \\ &f(x) - kx + x > f(0) + x \Leftrightarrow f(x) - (k-1)x > f(0) + x \Leftrightarrow \\ &g(x) > f(0) + x. \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) + x) = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Οπότε υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $g(\beta) > 0$.

Η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, με $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = (k-1)x_0$. Δηλαδή η ευθεία $y = (k-1)x$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Έστω ότι υπάρχουν δύο σημεία τομής με τετμημένες x_1, x_2 . Τότε θα είναι

$$g(x_1) = g(x_2) = 0, \text{ οπότε θα έχουμε}$$

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - (k-1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = k-1 < k, \text{ άτοπο.}$$

Άρα το σημείο είναι μοναδικό.

1197. α. Είναι $f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4} \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = -\frac{x}{4}$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

$$- \quad x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$f(f(x_1)) - f(x_1) < f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow -\frac{x_1}{4} < -\frac{x_2}{4} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άτοπο, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

β. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \stackrel{u=f(x)}{=} \lambda \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{f(u)}{u} = \lambda^2$$

$$\text{ii. Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{4} \right) = \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma. \text{ Στη δοθείσα σχέση για } x=0 \text{ παίρνουμε } f(f(0)) = f(0) \stackrel{f \text{ γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} \underset{\text{άρα και } \ll -1 \gg}{f(0) = 0}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για $x < 0$ και μία για $x > 0$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, 0]$ και $[2, 0]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) > \frac{1}{4} \text{ άρα και } f'(\xi) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{4} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} f(x) < \frac{x}{4}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} = -\infty \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) > \frac{1}{4} \text{ άρα και } f'(\xi) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{4} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} f(x) > \frac{x}{4}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{Άρα } f(A) = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συν.}}{=} \underset{f \text{ γν.αυξ.}}{\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

δ. Έστω $g(x) = f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1)$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Έχουμε $g(-1) = 2f(3)$, $g(0) = -f(2)$ και $g(1) = 2f(4)$.

Για τα πρόσημα των $f(2)$, $f(3)$ και $f(4)$ εργαζόμαστε ως εξής :

$$2 > 0 \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(2) > f(0) \Leftrightarrow \underline{f(2) > 0}, \quad 3 > 0 \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(3) > f(0) \Leftrightarrow \underline{f(3) > 0}$$

$$, \text{ και } 4 > 0 \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(4) > f(0) \Leftrightarrow \underline{f(4) > 0}.$$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και ισχύει $g(-1) \cdot g(0) = -2f(2) \cdot f(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (-1, 0) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho_1) = 0$.
- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $g(0) \cdot g(1) = -2f(2) \cdot f(4) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (0, 1) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$, και επειδή η g είναι δευτεροβάθμια θα έχει το πολύ δύο ρίζες, συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες της g στο $(-1, 1)$, οι οποίες είναι άνισες αφού ανήκουν σε διαφορετικά μεταξύ τους διαστήματα.

Έχουμε $f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 f(2) - f(2) + x^2 f(3) - x f(3) + x^2 f(4) + x f(4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(2) + f(3) + f(4))x^2 + (f(4) - f(3))x - f(2) = 0$$

και αφού ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της, τότε από τους τύπους Vieta έχουμε

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f(4) - f(3)}{f(2) + f(3) + f(4)} \quad \text{και} \quad \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-f(2)}{f(2) + f(3) + f(4)}.$$

$$\text{Έτσι } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{-\frac{f(4) - f(3)}{f(2) + f(3) + f(4)}}{-\frac{f(2)}{f(2) + f(3) + f(4)}} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}.$$

1198. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 1) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 1.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1, 2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1 - f(1).$$

Τέλος αφού η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , τότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1 - f(1) - (f(1) - 1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{2 - 2f(1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

$$\text{Έτσι } |f''(x_0)| = \left| \frac{2 - 2f(1)}{\xi_2 - \xi_1} \right| = \frac{|2 - 2f(1)|}{|\xi_2 - \xi_1|} = \frac{2|f(1) - 1|}{|\xi_2 - \xi_1|} > 2 \frac{|f(1) - 1|}{2} = |f(1) - 1| \Leftrightarrow$$

$$|f''(x_0)| > |f(1) - 1|.$$

$$\text{αφού } \begin{cases} 0 < \xi_1 < 1 \\ 1 < \xi_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -\xi_1 > -1 \\ 1 < \xi_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -\xi_1 < 0 \\ 1 < \xi_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \xi_2 - \xi_1 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\text{άρα } |\xi_2 - \xi_1| < 2 \stackrel{\xi_1 \neq \xi_2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|} > \frac{1}{2}.$$

1199. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$.

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{-f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha} = 2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Τέλος αφού η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , τότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f''(x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - 2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}}{\xi_2 - \xi_1} =$$

$$= \frac{2 \left(\frac{f(\alpha)}{\alpha-\beta} + \frac{f(\beta)}{\alpha-\beta} \right)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{2 \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\alpha-\beta}}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\alpha-\beta}}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{(\xi_2 - \xi_1)(\alpha-\beta)}.$$

Είναι $|f''(x)| \leq 1$ άρα και

$$|f''(x_0)| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{(\xi_2 - \xi_1)(\alpha-\beta)} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| \leq |(\xi_2 - \xi_1)(\alpha-\beta)| \Leftrightarrow$$

$$\left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} |(\xi_2 - \xi_1)(\alpha-\beta)| = \frac{1}{2} |\xi_2 - \xi_1| |\beta - \alpha| < \frac{1}{2} |\beta - \alpha| |\beta - \alpha| = \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| < \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}.$$

$$\text{αφού } \begin{cases} \alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\alpha+\beta}{2} < -\xi_1 < -\alpha \\ \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \xi_2 - \xi_1 < \beta - \alpha$$

άρα $|\xi_2 - \xi_1| < |\beta - \alpha|$.

1200. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[-1, x]$ και $[x, 3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0$ άρα και

$$f'(\xi_1) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \geq 0 \stackrel{x > -1}{\Leftrightarrow} f(x) - f(-1) \geq 0 \Leftrightarrow f(-1) \leq f(x).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0$ άρα και

$$f'(\xi_2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} \geq 0 \stackrel{x < 3 \Leftrightarrow 3 - x > 0}{\Leftrightarrow} f(3) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(3).$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $f(-1) \leq f(x) \leq f(3)$.

1201. i. Η f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - f(-1)}{3}.$$

Είναι $|f'(x)| \leq 2$ άρα και

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq f'(\xi) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{3 - f(-1)}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \\ -6 \leq 3 - f(-1) \leq 6 &\Leftrightarrow -9 \leq -f(-1) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq f(-1) \leq 9. \end{aligned}$$

ii. Η f είναι συνεχής στο $[x, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 2) \subseteq (-1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \frac{3 - f(x)}{2 - x}.$$

Είναι $|f'(x)| \leq 2$ άρα και

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq f'(\xi) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{3 - f(x)}{2 - x} \leq 2 \quad \begin{matrix} x < 2 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \\ -4 + 2x \leq 3 - f(x) \leq 4 - 2x &\Leftrightarrow -7 + 2x \leq -f(x) \leq 1 - 2x \Leftrightarrow \\ 2x - 1 \leq f(x) \leq 7 - 2x &\text{ για } x \in [-1, 2). \end{aligned}$$

Για $x=2$ ισχύουν οι ισότητες άρα $2x - 1 \leq f(x) \leq 7 - 2x$ για $x \in [-1, 2]$.

Χωρισμός διαστήματος σε υποδιαστήματα για εφαρμογή Θ.Μ.Τ.

1202. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 4]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{\cancel{f(2)}^4 - \cancel{f(1)}^2}{2 - 1} = 2.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(4)}^3 - \cancel{f(2)}^4}{4 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

Είναι $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 4)$ άρα $\xi_1 \neq \xi_2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi_1) = 2$ και η

εφαπτομένη της C_f στο σημείο Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi_2) = -\frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε πως $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ άρα οι εφαπτομένες είναι μεταξύ τους κάθετες.

- 1203. i.** Έστω $g(x) = f(x) - 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(a) = f(a) - 2a = 2\beta - 2a = 2(\beta - a)$ και

$$g(\beta) = f(\beta) - 2\beta = 2a - 2\beta = -2(\beta - a), \text{ δηλαδή}$$

$g(a) \cdot g(\beta) = -4(\beta - a)^2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0$.

- ii.** Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x_0) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{2x_0 - 2a}{x_0 - a} = \frac{2(x_0 - a)}{x_0 - a}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{2a - 2x_0}{\beta - x_0} = \frac{2(a - x_0)}{\beta - x_0}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{2(x_0 - a)}{x_0 - a} \cdot \frac{2(a - x_0)}{\beta - x_0} = 4 \cdot \frac{\cancel{x_0} - \beta}{\cancel{x_0} - a} \cdot \frac{\cancel{x_0} - a}{\cancel{x_0} - \beta} = 4.$$

- 1204. i.** Έστω $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(a) = f(a) - a = \beta - a$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta = a - \beta = -(\beta - a)$,

δηλαδή $g(a) \cdot g(\beta) = -(\beta - a)^2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = \gamma$.

- ii.** Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (a, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (a, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\kappa) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - a}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda \in (\gamma, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\lambda) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}.$$

$$\text{Άρα } f'(\kappa) \cdot f'(\lambda) = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - a} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{\cancel{\gamma} - \beta}{\cancel{\gamma} - a} \cdot \frac{\cancel{\gamma} - \alpha}{\cancel{\gamma} - \beta} = 1.$$

- 1205. i.** Έστω $g(x) = f(x) - ax$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων με $g(0) = f(0) = \alpha > 0$ και $g(1) = f(1)^0 - \alpha = -\alpha < 0$, δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \alpha x_0$.

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{\alpha x_0 - \alpha}{x_0} = \alpha \frac{x_0 - 1}{x_0}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(1)^0 - f(x_0)}{1 - x_0} = -\frac{\alpha x_0}{1 - x_0}.$$

$$\text{Άρα } f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \alpha \frac{x_0 - 1}{x_0} \cdot \left(-\frac{\alpha x_0}{1 - x_0} \right) = \alpha \frac{x_0 - 1}{x_0} \cdot \frac{\alpha x_0}{x_0 - 1} = \alpha^2.$$

1206. i. Έστω $g(x) = f(x) - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$$g(\alpha) = f(\alpha) - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha^2 \text{ και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = \alpha^2 - \beta^2 = -(\beta^2 - \alpha^2),$$

δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -(\beta^2 - \alpha^2)^2 < 0$, αφού $\alpha \neq -\beta$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = (\alpha + \beta)x_0 - \alpha\beta.$$

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_0) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{(\alpha + \beta)x_0 - \alpha\beta - \beta^2}{x_0 - \alpha} = \frac{(\alpha + \beta)x_0 - \beta(\alpha + \beta)}{x_0 - \alpha} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha}. \end{aligned}$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{\alpha^2 - (\alpha + \beta)x_0 + \alpha\beta}{\beta - x_0} = \frac{\alpha(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)x_0}{\beta - x_0} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - x_0)}{\beta - x_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) &= \frac{(\alpha + \beta)(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha} \cdot \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - x_0)}{\beta - x_0} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta) \cancel{(x_0 - \beta)}}{\cancel{x_0 - \alpha}} \cdot \frac{(\alpha + \beta) \cancel{(\alpha - x_0)}}{\cancel{x_0 - \beta}} = (\alpha + \beta)^2. \end{aligned}$$

- 1207. i.** Έστω $g(x) = f(x) - 2016$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = \cancel{f(0)}^{2017} - 2016 = 1 > 0$ και $g(1) = \cancel{f(1)}^{2015} - 2016 = -1 < 0$, δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2016$.

- ii.** Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.
 – Η f είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\alpha) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{2016 - 2017}{x_0} = -\frac{1}{x_0}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\beta \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\beta) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{2015 - 2016}{1 - x_0} = -\frac{1}{1 - x_0}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(\alpha)} + \frac{1}{f'(\beta)} = \frac{1}{-\frac{1}{x_0}} + \frac{1}{-\frac{1}{1 - x_0}} = \cancel{-x_0} - 1 + \cancel{x_0} = -1.$$

- 1208. i.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $4 < 6 < 16 \Leftrightarrow f(3) < 6 < f(13)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (3, 13)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 6$. Όμοια :

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $4 < 10 < 16 \Leftrightarrow f(3) < 10 < f(13)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (3, 13)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 10$.

- ii.** Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[3, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, 13]$

- Η f είναι συνεχής στο $[3, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, x_1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (3, x_1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(3)}{x_1 - 3} = \frac{\cancel{f(x_1)}^6 - \cancel{f(3)}^4}{x_1 - 3} = \frac{2}{x_1 - 3}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(x_2)}^{10} - \cancel{f(x_1)}^6}{x_2 - x_1} = \frac{4}{x_2 - x_1}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_2, 13]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_2, 13)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_3 \in (x_2, 13)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_3) = \frac{\cancel{f(13)}^{16} - \cancel{f(x_2)}^{10}}{13 - x_2} = \frac{6}{13 - x_2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} &= \frac{1}{\frac{2}{x_1 - 3}} + \frac{2}{\frac{4}{x_2 - x_1}} + \frac{3}{\frac{6}{13 - x_2}} = \\ &= \frac{x_1 - 3}{2} + \frac{2(x_2 - x_1)}{4} + \frac{3(13 - x_2)}{6} = \frac{x_1 - 3}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{13 - x_2}{2} = \\ &= \frac{\cancel{x_1} - 3 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + 13 - \cancel{x_2}}{2} = 5. \end{aligned}$$

- 1209. i.** Έστω $g(x) = 2f(x) - f(\alpha) - f(\beta)$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(\alpha) = 2f(\alpha) - f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha) - f(\beta)$ και $g(\beta) = 2f(\beta) - f(\alpha) - f(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) = -(f(\alpha) - f(\beta))$, δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -(f(\alpha) - f(\beta))^2 < 0$, αφού $f(\alpha) \neq f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) = f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

- ii.** Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[a, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x_0) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{\frac{f(a) + f(\beta)}{2} - f(a)}{x_0 - a} = \frac{\frac{f(\beta) - f(a)}{2}}{x_0 - a} = \frac{f(\beta) - f(a)}{2(x_0 - a)}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta) - \frac{f(a) + f(\beta)}{2}}{\beta - x_0} = \frac{\frac{f(\beta) - f(a)}{2}}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta) - f(a)}{2(\beta - x_0)}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2f'(\xi_1)} + \frac{1}{2f'(\xi_2)} &= \frac{1}{\cancel{2} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\cancel{2}(x_0 - \alpha)}} + \frac{1}{\cancel{2} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\cancel{2}(\beta - x_0)}} = \frac{x_0 - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)} + \frac{\beta - x_0}{f(\beta) - f(\alpha)} = \\ &= \frac{\cancel{x_0} - \alpha + \beta - \cancel{x_0}}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}. \end{aligned}$$

1210. i. Έστω $g(x) = 5f(x) - 2f(\alpha) - 3f(\beta)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως

αποτελέσματα πράξεων συνεχών συναρτήσεων με

$$g(\alpha) = 5f(\alpha) - 2f(\alpha) - 3f(\beta) = 3f(\alpha) - 3f(\beta) = 3(f(\alpha) - f(\beta)) \quad \text{και}$$

$$g(\beta) = 5f(\beta) - 2f(\alpha) - 3f(\beta) = 2f(\beta) - 2f(\alpha) = -2(f(\alpha) - f(\beta)),$$

δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -6(f(\alpha) - f(\beta))^2 < 0$, αφού $f(\alpha) \neq f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta) \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}.$$

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$ και $[\alpha, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_0) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\frac{3f(\beta) - 2f(\alpha)}{5}}{x_0 - \alpha} \Leftrightarrow \\ f'(\xi_1) &= \frac{3(f(\beta) - f(\alpha))}{5(x_0 - \alpha)}. \end{aligned}$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta) - \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}}{\beta - x_0} = \frac{\frac{2f(\beta) - 2f(\alpha)}{5}}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \\ f'(\xi_2) &= \frac{2(f(\beta) - f(\alpha))}{5(\beta - x_0)}. \end{aligned}$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} &= \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}(f(\beta) - f(\alpha))} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(f(\beta) - f(\alpha))} = \frac{5(x_0 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} + \frac{5(\beta - x_0)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \\ &= \frac{\cancel{5x_0} - 5\alpha + 5\beta - \cancel{5x_0}}{f(\beta) - f(\alpha)} = 5 \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)} = 5 \frac{1}{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}} = \frac{5}{f'(\xi)} . \end{aligned}$$

1211. i. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) .$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2) = f(0) - f(1) .$$

Άρα $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \cancel{f(1)} - \cancel{f(0)} + \cancel{f(0)} - \cancel{f(1)} = 0$.

ii. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [0,3]$ και ισχύει

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = (f(1) - f(0)) \cdot (f(0) - f(1)) = -(f(1) - f(0))^2 < 0 , \text{ αφού}$$

$f(1) \neq f(0)$ γιατί αν ήταν $f(1) = f(0) \stackrel{f \ll 1-1 \gg}{\Leftrightarrow} 1 = 0$, άτοπο. Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1212. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1,3]$ και $[3,5]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - 3f(3)}{2} = -f(3) .$$

- Η f είναι συνεχής στο $[3,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,5)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (3,5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{9f(3) - f(3)}{2} = 4f(3) .$$

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [1,5]$ και ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = -4f^2(3) < 0$, αφού $f(3) \neq 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

1213. i. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[4, 5]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) = \beta - \alpha.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[4, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 5)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (4, 5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = f(5) - f(4) = 2\alpha + 4 - \alpha - \beta = \alpha - \beta + 4.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \beta - \alpha + \alpha - \beta + 4 = 4.$$

ii. Έστω $g(x) = f'(x) - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [1, 5]$ με

$$g(\xi_1) = f'(\xi_1) - 2 = \beta - \alpha - 2 \text{ και}$$

$$g(\xi_2) = f'(\xi_2) - 2 = \alpha - \beta + 4 - 2 = \alpha - \beta + 2 = -(\beta - \alpha - 2)$$

και ισχύει $g(\xi_1) \cdot g(\xi_2) = -(\beta - \alpha - 2)^2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα**

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1, 5)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2.$$

1214. i. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x_0) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\cancel{x_0}) - f(a)}{x_0 - a} = -\frac{f(a)}{x_0 - a}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\cancel{x_0})}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta)}{\beta - x_0}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = -\frac{f(a)}{x_0 - a} \cdot \frac{f(\beta)}{\beta - x_0} = -\frac{f(a) \cdot f(\beta)}{(x_0 - a)(\beta - x_0)} > 0 \text{ αφού } f(a) \cdot f(\beta) < 0$$

$$\text{και } a < x_0 < \beta \Leftrightarrow (a < x_0 \text{ και } x_0 < \beta) \Leftrightarrow (x_0 - a > 0 \text{ και } \beta - x_0 > 0).$$

1215. i. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[α, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (α, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta)}{\beta - x_0}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha} < \frac{f(\beta)}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x_0} > 0$$

1216. i. Έχουμε $f(x) = (1-x)f'(x) \Leftrightarrow (1-x)f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(1-x)f'(x) + (1-x)'f(x) = 0 \Leftrightarrow [(1-x)f(x)]' = 0.$$

Άρα έστω $g(x) = (1-x)f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g(0) = f(0) = 0$ και $g(1) = 0$, δηλαδή $g(0) = g(1)$. Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = (1-\xi)f'(\xi)$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $[0, \xi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \xi)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \xi)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{f(\xi)}{\xi}.$$

Από τη σχέση $f(\xi) = (1-\xi)f'(\xi)$ παίρνουμε

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{(1-\xi)f'(\xi)}{\xi} \Leftrightarrow f'(x_0) = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f'(\xi)}{\xi} - f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f'(x_0)}{\xi} - f'(x_0).$$

Είναι $f(x) > 0$ άρα και $f(\xi) > 0 \Leftrightarrow (1-\xi)f'(\xi) > 0 \stackrel{\xi < 1 \Leftrightarrow 1-\xi > 0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) > 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{\xi} - f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow f'(x_0) < \frac{f'(\xi)}{\xi}.$

1217. i. Η f είναι συνεχής στο $[1, 6]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ με $f(1) = f(6)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο ώστε η C_f να έχει στο $A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 6]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 6)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 6)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{f(1) - f(2)}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) &= f(2) - f(1) + \cancel{4} \frac{f(1) - f(2)}{\cancel{4}} = \\ &= \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)} + \cancel{f(1)} - \cancel{f(2)} = 0. \end{aligned}$$

1218. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \cancel{f(\alpha)}}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(\beta)} - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = -\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = -2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} - 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} = 0.$$

1219. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0, 2]$ τότε $f(1) = 2$ και $f(3) = 0$. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - 2.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -f(2).$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(2) - 2 - f(2) = -2.$$

1220. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και $[\alpha, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) &= 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} + 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha} = \\ &= 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) + f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha} = 2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 2f'(\xi)\end{aligned}$$

1221. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,2]$ και $[2,3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_3 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_3) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2).$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) &= f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) = \\ &= f(3) - f(0) \stackrel{f(0)=f(3)}{=} 0.\end{aligned}$$

1222. Θα χωρίσουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - \alpha}{1+1+1} = \frac{\beta - \alpha}{3}$,

άρα θα εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα

$$\left[\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3} \right] = \left[\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3} \right], \left[\frac{2\alpha + \beta}{3}, \alpha + 2 \frac{\beta - \alpha}{3} \right] = \left[\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right] \text{ και } \left[\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta \right]$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3} \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3} \right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3} \right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2\alpha + \beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} = 3 \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{\alpha+2\beta}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$,
 οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{\alpha+2\beta}{3}\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \frac{2\alpha+\beta}{3}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} = \\ &= 3 \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right)$, οπότε
 σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_3 \in \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha+2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} = 3 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta-\alpha}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} + 3 \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\beta-\alpha} + 3 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta-\alpha} = \\ &= 3 \frac{\cancel{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)} - f(\alpha) + \cancel{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)} - \cancel{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)} + f(\beta) - \cancel{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}}{\beta-\alpha} = \\ &= 3 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 3 \frac{\alpha+3\beta-\beta-3\alpha}{\beta-\alpha} = 3 \frac{2\beta-2\alpha}{\beta-\alpha} = 3 \frac{2(\cancel{\beta}-\cancel{\alpha})}{\cancel{\beta}-\cancel{\alpha}} = 6. \end{aligned}$$

1223. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, 2]$, και $[2, 5]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, οπότε σύμφωνα με το
θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 5)$, οπότε σύμφωνα με το
θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{f(0) + 1 - f(2)}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } 2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) &= \cancel{2} \frac{f(2) - f(0)}{\cancel{2}} + \cancel{3} \frac{f(0) + 1 - f(2)}{\cancel{3}} = \\ &= \cancel{f(2)} - \cancel{f(0)} + \cancel{f(0)} + 1 - \cancel{f(2)} = 1. \end{aligned}$$

1224. Θα χωρίσουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}$, άρα θα

εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[a, a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda} \right]$, και

$$\left[a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}, \beta \right].$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[a, a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda} \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(a, a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda} \right)$,

οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in \left(a, a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda} \right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right) - \cancel{f(a)}}{a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda} - a} = \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}} = (\kappa + \lambda) \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\kappa(\beta - a)}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}, \beta \right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}, \beta \right)$,

οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}, \beta \right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{\cancel{f(\beta)} - f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\beta - a - \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}} = - \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\frac{\beta\cancel{\kappa} + \beta\lambda - \cancel{\alpha\kappa} - \alpha\lambda - \cancel{\kappa\beta} + \cancel{\kappa\alpha}}{\kappa + \lambda}} = \\ &= - \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\frac{\beta\lambda - \alpha\lambda}{\kappa + \lambda}} = -(\kappa + \lambda) \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\lambda(\beta - a)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \kappa f'(\xi_1) + \lambda f'(\xi_2) &= \cancel{\kappa}(\kappa + \lambda) \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\cancel{\kappa}(\beta - a)} - \cancel{\lambda}(\kappa + \lambda) \frac{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)}{\cancel{\lambda}(\beta - a)} = \\ &= \frac{\kappa + \lambda}{\beta - a} \left(\cancel{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)} - \cancel{f\left(a + \kappa \frac{\beta - a}{\kappa + \lambda}\right)} \right)^0 = 0. \end{aligned}$$

1225. Αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[α,β]$, τότε η f θα είναι συνεχής στο $[α,β]$, παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και θα ισχύει και $f(α) = f(β)$.

Θα χωρίσουμε το διάστημα $[α,β]$ σε υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{β-α}{1+2+3} = \frac{β-α}{6}$,

$$\begin{aligned} \text{άρα θα εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα } & \left[α, α + \frac{β-α}{6}\right] = \\ & = \left[α, \frac{β+5α}{6}\right], \left[\frac{β+5α}{6}, α + (1+2)\frac{β-α}{6}\right] = \left[\frac{β+5α}{6}, α + \frac{β-α}{2}\right] = \left[\frac{β+5α}{6}, \frac{β+α}{2}\right] \text{ και} \\ & \underline{\underline{\left[\frac{β+α}{2}, β\right]}}. \end{aligned}$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[α, \frac{β+5α}{6}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(α, \frac{β+5α}{6}\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in \left(α, \frac{β+5α}{6}\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{β+5α}{6}\right) - f(α)}{\frac{β+5α}{6} - α} = \frac{f\left(\frac{β+5α}{6}\right) - f(α)}{\frac{β-α}{6}} = 6 \frac{f\left(\frac{β+5α}{6}\right) - f(α)}{β-α}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{β+5α}{6}, \frac{β+α}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{β+5α}{6}, \frac{β+α}{2}\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{β+5α}{6}, \frac{β+α}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f\left(\frac{β+α}{2}\right) - f\left(\frac{β+5α}{6}\right)}{\frac{β+α}{2} - \frac{β+5α}{6}} = \frac{f\left(\frac{β+α}{2}\right) - f\left(\frac{β+5α}{6}\right)}{\frac{3β+3α}{6} - \frac{β+5α}{6}} = \\ &= \frac{f\left(\frac{β+α}{2}\right) - f\left(\frac{β+5α}{6}\right)}{\frac{2β-2α}{6}} = 3 \frac{f\left(\frac{β+α}{2}\right) - f\left(\frac{β+5α}{6}\right)}{β-α}. \end{aligned}$$

– Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{β+α}{2}, β\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{β+α}{2}, β\right)$, οπότε

$$\text{σύμφωνα με το } \textbf{θεώρημα μέσης τιμής} \text{ υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_3 \in \left(\frac{β+α}{2}, β\right)$$

τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\beta - \frac{\beta+\alpha}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) =$$

$$\begin{aligned} &= 6 \frac{f\left(\frac{\beta+5\alpha}{6}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} + 6 \frac{f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{\beta+5\alpha}{6}\right)}{\beta - \alpha} + 6 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\beta - \alpha} = \\ &= \frac{6}{\beta - \alpha} \left(f\left(\frac{\beta+5\alpha}{6}\right) - f(\alpha) + f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{\beta+5\alpha}{6}\right) + f(\beta) - f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{6}{\beta - \alpha} (f(\beta) - f(\alpha)) \stackrel{f(\alpha)=f(\beta)}{=} 0. \end{aligned}$$

1226. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και ισχύει $f(1) \cdot f(2) = f(1) \cdot (-f(1)) = -f^2(1) < 0$,

αφού $f(1) \neq 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, 2]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = -\frac{f(1)}{x_0 - 1}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{f(2)}{2 - x_0} = -\frac{f(1)}{2 - x_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε λοιπόν } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} &= \frac{1}{-\frac{f(1)}{x_0 - 1}} + \frac{1}{-\frac{f(1)}{2 - x_0}} = -\frac{x_0 - 1}{f(1)} - \frac{2 - x_0}{f(1)} = \\ &= \frac{-x_0 + 1 - 2 + x_0}{f(1)} = -\frac{1}{f(1)}. \end{aligned}$$

1227. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $0 < \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow f(0) < \frac{1}{2} < f(1)$,

οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = \frac{1}{2}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{\frac{1}{2}}{x_0} = \frac{1}{2x_0}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - x_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - x_0} = \frac{1}{2(1 - x_0)}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{1}{\frac{1}{2x_0}} + \frac{1}{\frac{1}{2(1-x_0)}} = 2x_0 + 2 - 2x_0 = 2.$$

1228. Επειδή $2+3=5$, θεωρούμε τον αριθμό $d = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{5}$, καθώς και τον αριθμό γ του

διαστήματος $[f(\alpha), f(\beta)]$, για τον οποίο ισχύει $\gamma - f(\alpha) = 2d$ και $f(\beta) - \gamma = 3d$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον ισχύει $f(\alpha) < \gamma < f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \gamma$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$, και $[x_0, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_1) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x_1) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\gamma - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{2d}{x_0 - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta) - \gamma}{\beta - x_0} = \frac{3d}{\beta - x_0}.$$

Επιπλέον είναι :

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}d} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}d} = \frac{x_0 - \alpha}{d} + \frac{\beta - x_0}{d} = \frac{\beta - \alpha}{d} = \frac{\beta - \alpha}{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{5}} \\ &= \frac{5}{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}} = \frac{5}{f'(\xi)}. \end{aligned}$$

1229. Επειδή $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 1$, θεωρούμε τον αριθμό $d = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{1} = f(\beta) - f(\alpha)$, καθώς

και τους αριθμούς γ_1, γ_2 του διαστήματος $[f(\alpha), f(\beta)]$ με $\gamma_1 < \gamma_2$, για τους

οποίους ισχύει $\gamma_1 - f(\alpha) = \frac{1}{4}d$, $\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{1}{3}d$ και $f(\beta) - \gamma_2 = \frac{5}{12}d$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον ισχύει $f(\alpha) < \gamma_2 < f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \gamma_2$.
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_2]$ και επιπλέον ισχύει $f(\alpha) < \gamma_1 < \gamma_2 \Leftrightarrow f(\alpha) < \gamma_1 < f(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \gamma_1$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_1) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x_1) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{\gamma_1 - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{\frac{1}{4}d}{x_1 - \alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{x_1 - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{3}d}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{x_2 - x_1}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_2, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_2, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_3 \in (x_2, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - x_2} = \frac{f(\beta) - \gamma_2}{\beta - x_2} = \frac{\frac{5}{12}d}{\beta - x_2} = \frac{5}{12} \cdot \frac{d}{\beta - x_2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4f'(\xi_1)} + \frac{1}{3f'(\xi_2)} + \frac{5}{12f'(\xi_3)} &= \frac{1}{\cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{d}{x_1 - \alpha}} + \frac{1}{\cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{d}{x_2 - x_1}} + \frac{\cancel{5}}{\cancel{12} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{12}} \cdot \frac{d}{\beta - x_2}} = \\ &= \frac{x_1 - \alpha}{d} + \frac{x_2 - x_1}{d} + \frac{\beta - x_2}{d} = \frac{\beta - \alpha}{d} = \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}. \end{aligned}$$

1230. i. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}+1)f(x)\eta\mu(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = 4 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}+1)f(x)\eta\mu(x-1)}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)f(x) \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = 4 \Leftrightarrow$$

$$2f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1) = 2$$

όπου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει και $f(x) \neq 0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επιπλέον έχουμε και $f(1) = 2 > 0$ οπότε είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$ και

$$B\left(2, \frac{14}{3}\right), \text{ άρα } g(0) = 0, g(1) = \frac{4}{3} \text{ και } g(2) = \frac{14}{3}.$$

$$\text{Είναι } \frac{4}{3} < 3 < \frac{14}{3} \Leftrightarrow g(1) < 3 < g(2).$$

Η g είναι συνεχής στο $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $g(1) < 3 < g(2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 3$. Η g είναι και γνησίως αύξουσα, άρα $\ll 1-1 \gg$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

iii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, \xi]$ και $[\xi, 2]$.

– Η g είναι συνεχής στο $[1, \xi]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, \xi)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, \xi)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1} = \frac{3 - \frac{4}{3}}{\xi - 1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\xi - 1} \stackrel{g'(x)=f(x)}{\Leftrightarrow} f(\theta_1) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\xi - 1}.$$

– Η g είναι συνεχής στο $[\xi, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\xi, 2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\theta_2) = \frac{g(2) - g(\xi)}{2 - \xi} = \frac{\frac{14}{3} - 3}{2 - \xi} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2 - \xi} \stackrel{g'(x)=f(x)}{\Leftrightarrow} f(\theta_2) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2 - \xi}.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{f(\theta_1)\cdot f(\theta_2)} = \frac{1}{f(\theta_1)} + \frac{1}{f(\theta_2)} = \frac{1}{\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\xi-1}} + \frac{1}{\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2-\xi}} = \frac{3}{5}(\cancel{\xi}-1+2-\cancel{\xi}) = \frac{3}{5}.$$

iv. Έχουμε : $f(x+1)-f(x)=2 \Leftrightarrow g'(x+1)-g'(x)=2 \Leftrightarrow$

$$g'(x+1)-g'(x)-2=0 \Leftrightarrow (g(x+1)-g(x)-2x)'=0.$$

Άρα θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle στην $G(x)=g(x+1)-g(x)-2x$ στο διάστημα $[0,1]$.

$$G(0)=g(1)-g(0)-0=\frac{4}{3} \text{ και } G(1)=g(2)-g(1)-2=\frac{14}{3}-\frac{4}{3}-2=\frac{4}{3}.$$

Η G είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $G(0)=G(1)=\frac{4}{3}$, τότε

σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $G'(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho+1)-f(\rho)=2$.

Πίζα της f'' και πρόσημο $f''(\xi)$

1231. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[3,4]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1,2) \subseteq (1,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1).$$

– Η f είναι συνεχής στο $[3,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (3,4) \subseteq (1,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = f(4)-f(3) = f(2)-f(1), \text{ αφού}$$

$$f(1)+f(4)=f(2)+f(3).$$

Τέλος αφού η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

1232. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[-\alpha, 0]$ και $[0, \alpha]$.

– Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-\alpha, 0) \subseteq (-\alpha, \alpha)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g(0)-g(-\alpha)}{0-(-\alpha)} = \frac{g(0)-2g(0)+g(\alpha)}{\alpha} = \frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha} \text{ αφού}$$

$$g(-\alpha)+g(\alpha)=2g(0) \Leftrightarrow g(-\alpha)=2g(0)-g(\alpha).$$

- Η g είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0, \alpha) \subseteq (\alpha, \alpha)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } g'(\xi_2) = \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha - 0} = \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha}.$$

Τέλος αφού η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$.

1233. Αφού οι αριθμοί $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε θα

$$\text{ισχύει } f(4) = \frac{f(2) + f(6)}{2} \Leftrightarrow 2f(4) = f(2) + f(6).$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[2, 4]$ και $[4, 6]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2, 4) \subseteq (2, 6)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{f(4) - 2f(4) + f(6)}{2} = \frac{f(6) - f(4)}{2}, \text{ αφού}$$

$$2f(4) = f(2) + f(6) \Leftrightarrow f(2) = 2f(4) - f(6).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[4, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 6)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (4, 6) \subseteq (2, 6)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{f(6) - f(4)}{2}.$$

Τέλος αφού η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (2, 6)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

1234. Αφού οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $f(\beta)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

$$\text{προόδου τότε θα ισχύει } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta).$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \subseteq (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} = \\ &= 2 \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} \text{ αφού} \end{aligned}$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Τέλος αφού η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

- 1235.** Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\rho) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = \mu.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[0, \rho]$ και $[\rho, 1]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, \rho]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ και $f'(0) = f'(\rho) = \mu$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, \rho) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_1) = 0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[\rho, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(\rho, 1)$ και $f'(\rho) = f'(1) = \mu$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\rho, 1) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_2) = 0$.

Δηλαδή $f''(x_1) = f''(x_2)$ με $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in (0, 1)$.

- 1236.** Για να βρούμε τα σημεία που τέμνει η ευθεία $y = ax + \beta$ την C_f , γράφουμε $f(x) = ax + \beta$, οπότε θεωρούμε την εξίσωση $g(x) = f(x) - ax - \beta$ με $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$. Επιπλέον είναι $g'(x) = f'(x) - a$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $g(x_1) = g(x_2)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_1) = 0$.
- Η g είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) και $g(x_2) = g(x_3)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\xi_2 \in (x_2, x_3) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0$.

Τέλος αφού η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με
 $g''(x) = f''(x)$, και $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει
τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) = 0 \Leftrightarrow f''(x_0) = 0$.

1237. Θεωρούμε ευθεία $\varepsilon: y = ax + \beta$. Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει την C_f σε τρία σημεία με
θετικές τετμημένες x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$. Τα σημεία τομής της ε με την C_f τα
βρίσκουμε από την $f(x) = ax + \beta$, οπότε θεωρούμε την εξίσωση

$$g(x) = f(x) - ax - \beta \text{ με } g(x_1) = g(x_2) = g(x_3). \text{ Επιπλέον είναι } g'(x) = f'(x) - a.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $g(x_1) = g(x_2)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_1) = 0$.
- Η g είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) και $g(x_2) = g(x_3)$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\xi_2 \in (x_2, x_3) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0$.

Τέλος αφού η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με
 $g''(x) = f''(x)$ και $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει
τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) = 0 \Leftrightarrow f''(x_0) = 0$.

Άτοπο αφού $f''(x_0) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε κάθε ευθεία ε τέμνει την C_f σε δύο το
πολύ σημεία.

1238. Είναι $f(x) = (x^2 + 2x + 4)e^x$,

$$f'(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 4)e^x = (x^2 + 4x + 6)e^x \text{ και}$$

$$f''(x) = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 6)e^x = (x^2 + 6x + 10)e^x.$$

Έστω ότι υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία πάνω στην C_f , τα $A(x_1, f(x_1))$,

$B(x_2, f(x_2))$, και $\Gamma(x_3, f(x_3))$. Αφού θα είναι συνευθειακά τότε θα έχουμε

$$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
- Η f είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_2, x_3) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Από την παραπάνω σχέση που βρήκαμε από την ισότητα των συντελεστών διεύθυνσης, παίρνουμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Επιπλέον αφού η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_0^2 + 6x_0 + 10)e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 10 = 0.$$

Το τριώνυμο όμως έχει διακρίνουσα αρνητική ($\Delta = -4$) άρα δε μηδενίζεται. Συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο άρα δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία πάνω στη C_f .

1239. i. Έστω ότι $M \in C_f$. Τότε θα είναι $f(\kappa) = \lambda$.

Τα A, B, M είναι συνευθειακά, άρα :

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BM} \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\lambda - f(\beta)}{\kappa - \beta} \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\kappa) - f(\beta)}{\kappa - \beta}.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \kappa]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\beta, \kappa]$ και παραγωγίσιμη στο (β, κ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\beta, \kappa)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\kappa) - f(\beta)}{\kappa - \beta}.$$

Από την παραπάνω σχέση που βρήκαμε από την ισότητα των συντελεστών

δieleύθυνσης, παίρνουμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ $\overset{f \text{ γν.μον.}}{\Leftrightarrow} \xi_1 = \xi_2$, άτοπο αφού ανήκουν σε

διαφορετικά μεταξύ τους διαστήματα. Άρα $M \notin C_f$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Για να διέρχεται η εφαπτομένη από το $M(\kappa, \lambda)$, τότε αυτό πρέπει να την επαληθεύει : $\lambda = f'(x_0)(\kappa - x_0) + f(x_0)$.

Παίρνουμε την $f'(x)(\kappa - x) + f(x) = \lambda \Leftrightarrow f'(x)(\kappa - x) - f(x)(\kappa - x)' = \lambda \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)(\kappa - x) - f(x)(\kappa - x)'}{(\kappa - x)^2} = \frac{\lambda}{(\kappa - x)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\kappa - x} \right)' - \frac{\lambda}{(\kappa - x)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\kappa - x} - \frac{\lambda}{\kappa - x} \right)' = 0$$

Άρα θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle στην $G(x) = \frac{f(x) - \lambda}{\kappa - x}$ στο διάστημα $[a, \beta]$.

$$\text{Είναι } G(a) = \frac{f(a) - \lambda}{\kappa - a} = -\frac{f(a) - \lambda}{a - \kappa} \text{ και } G(\beta) = \frac{f(\beta) - \lambda}{\kappa - \beta} = -\frac{f(\beta) - \lambda}{\beta - \kappa}.$$

Τα A, B, M είναι συνευθειακά, άρα :

$$\lambda_{MA} = \lambda_{MB} \Leftrightarrow \frac{f(a) - \lambda}{a - \kappa} = \frac{f(\beta) - \lambda}{\beta - \kappa} \Leftrightarrow -\frac{f(a) - \lambda}{a - \kappa} = -\frac{f(\beta) - \lambda}{\beta - \kappa} \Leftrightarrow G(a) = G(\beta)$$

Η G είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και $G(a) = G(\beta)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $G'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = f'(x_0)(\kappa - x_0) + f(x_0)$. Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το M.

- 1240.** i. Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, και αφού διέρχεται από το B θα έχουμε :

$$f(\beta) = f'(a)(\beta - a) + f(a) \Leftrightarrow f'(a)(\beta - a) = f(\beta) - f(a) \Leftrightarrow f'(a) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Δηλαδή $f'(\xi) = f'(a)$. Αν η f' ήταν $\ll 1-1 \gg$ τότε θα είχαμε $\xi = a$. Άτοπο, αφού $\xi \in (a, \beta)$, άρα η f δεν είναι $\ll 1-1 \gg$.

- ii. Η f' είναι συνεχής στο $[a, \xi]$, παραγωγίσιμη στο (a, ξ) και $f'(\xi) = f'(a)$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \xi) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

- 1241.** Αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε θα

$$\text{ισχύει } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma.$$

Και αφού οι αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε θα ισχύει $f^2(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\gamma)$.

Επιπλέον είναι $g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και $g''(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$.

i. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

– Η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_1) = \frac{g(\beta) - g(a)}{\beta - a} = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(a)}{\beta - a} = \frac{\ln \frac{f(\beta)}{f(a)}}{\beta - a}.$$

– Η g είναι συνεχής στο $[\beta, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (β, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_2) = \frac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{\ln f(\gamma) - \ln f(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{\ln \frac{f(\gamma)}{f(\beta)}}{\gamma - \beta} = \frac{\ln \frac{f(\beta)}{f(a)}}{\beta - a}.$$

$$\text{αφού } f^2(\beta) = f(a) \cdot f(\gamma) \Leftrightarrow \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} = \frac{f(\beta)}{f(a)} \text{ και}$$

$$\beta - a = \gamma - \beta. \text{ Έχουμε λοιπόν}$$

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} \Leftrightarrow f'(x_1) \cdot f(x_2) = f'(x_2) \cdot f(x_1).$$

ii. Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g''(\xi) = \frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(\xi) \cdot f(\xi) - (f'(\xi))^2}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(\xi) \cdot f(\xi) - (f'(\xi))^2 \Leftrightarrow f''(\xi) \cdot f(\xi) = (f'(\xi))^2.$$

1242. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = -\frac{f(a)}{\beta - a}.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\beta) - f'(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{\frac{f(a)}{\beta - a} - (-\frac{f(a)}{\beta - a})}{\beta - x_0} = \frac{f(a)}{(\beta - x_0)(\beta - a)} < 0, \text{ αφού } f(a) < 0 \text{ και}$$

$$\alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0 \text{ και } \beta - x_0 > 0.$$

1243. i. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - \cancel{f(1)}}{2-1} = f(2).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(3)} - f(2)}{3-2} = -f(2).$$

Παρατηρούμε ότι $f'(\xi_2) = -f'(\xi_1) \Leftrightarrow f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$ με $\xi_1 < \xi_2$.

ii. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-f(2) - f(2)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-2f(2)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \text{ αφού } f(2) > 0 \text{ και } \xi_2 - \xi_1 > 0.$$

1244. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[a, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (a, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (a, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - \cancel{f(a)}}{\gamma - a} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - a}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(\beta)} - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = -\frac{f(\gamma)}{\beta - \gamma}.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-\frac{f(\gamma)}{\beta - \gamma} - \frac{f(\gamma)}{\beta - \gamma}}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-2\frac{f(\gamma)}{\beta - \gamma}}{\xi_2 - \xi_1} = -2\frac{f(\gamma)}{(\xi_2 - \xi_1)(\beta - \gamma)} > 0, \text{ αφού } f(\gamma) < 0 \text{ και } \xi_2 - \xi_1 > 0 \text{ και } \beta - \gamma > 0.$$

1245. i. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $\gamma < \delta$, και αφού $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ και πάλι χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$ με $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\gamma, \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, x_0]$, $[x_0, \delta]$ και $[\delta, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (α, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - \cancel{f(\alpha)}}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0, \text{ αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και } \gamma - \alpha > 0.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, x_0) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\gamma, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{\cancel{f(x_0)} - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} = -\frac{f(\gamma)}{x_0 - \gamma} < 0, \text{ αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και } x_0 - \gamma > 0.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \delta]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, δ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in (x_0, \delta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_3) = \frac{f(\delta) - \cancel{f(x_0)}}{\delta - x_0} = \frac{f(\delta)}{\delta - x_0} < 0, \text{ αφού } f(\delta) < 0 \text{ και } \delta - x_0 > 0.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\delta, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (δ, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_4 \in (\delta, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_4) = \frac{\cancel{f(\beta)} - f(\delta)}{\beta - \delta} = -\frac{f(\delta)}{\beta - \delta} > 0, \text{ αφού } f(\delta) < 0 \text{ και } \beta - \delta > 0.$$

Έπειτα εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f' στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_3, x_4]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f''(\xi_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \text{ αφού}$$

$$\begin{cases} f'(x_1) > 0 \\ f'(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'(x_1) < 0 \\ f'(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x_2) - f'(x_1) < 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0.$$

- Η f' είναι συνεχής στο $[x_3, x_4]$ και παραγωγίσιμη στο (x_3, x_4) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_3, x_4)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f''(\xi_2) = \frac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} > 0, \text{ αφού}$$

$$\begin{cases} f'(x_3) < 0 \\ f'(x_4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'(x_3) > 0 \\ f'(x_4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x_4) - f'(x_3) > 0 \text{ και } x_4 - x_3 > 0.$$

iii. Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ με $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

1246. i. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και επιπλέον ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\alpha, \gamma) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = f(\beta)$. Όμως είναι $\rho \neq \beta$ αφού $\alpha < \rho < \gamma < \beta$, άρα η f δεν είναι $\ll 1-1 \gg$.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (α, γ) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0, \text{ αφού } f(\alpha) < f(\gamma) \text{ και } \alpha < \gamma.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0, \text{ αφού } f(\beta) < f(\gamma) \text{ και } \gamma < \beta.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ με $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

iii. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο

ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$, αφού

$$\begin{cases} f'(\xi_1) > 0 \\ f'(\xi_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'(\xi_1) < 0 \\ f'(\xi_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0 \text{ και } \xi_2 - \xi_1 > 0.$$

1247. i. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1).$$

– Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = -f(1).$$

Είναι $f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ με $\xi_1 < \xi_2$.

ii. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-f(1) - f(1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-2f(1)}{\xi_2 - \xi_1} \Leftrightarrow |f''(\xi)| = \left| \frac{-2f(1)}{\xi_2 - \xi_1} \right| \Leftrightarrow$$

$$|f''(\xi)| = 2 \left| \frac{f(1)}{\xi_2 - \xi_1} \right| \Leftrightarrow |f''(\xi)| = 2 \frac{|f(1)|}{|\xi_2 - \xi_1|} > 2 \frac{|f(1)|}{2} = |f(1)| \Leftrightarrow |f''(\xi)| > |f(1)|,$$

$$\text{αφού } \begin{cases} 0 < \xi_1 < 1 \\ 1 < \xi_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -\xi_1 > -1 \\ 1 < \xi_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -\xi_1 < 0 \\ 1 < \xi_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \xi_2 - \xi_1 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\text{άρα } |\xi_2 - \xi_1| < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|} > \frac{1}{2}.$$

1248. i. Η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημορίου είναι η ευθεία $y=x$ για $x>0$.

Η C_f τέμνει την $y=x$ σε τρία σημεία, έστω $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και

$\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $0 < x_1 < x_2 < x_3$, οπότε θα είναι $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$ και

$f(x_3) = x_3$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$, και παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_2} = 1.$$

Βρήκαμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1 = \lambda_s$, δηλαδή υπάρχουν δύο εφαπτομένες της C_f παράλληλες στην δ .

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $K(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν

$$0 = f'(x_0)(-x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x) - f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες.

$$\text{Παίρνουμε την } xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - (x)'f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0.$$

Άρα θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle στην $G(x) = \frac{f(x)}{x}$ στα διαστήματα $[x_1, x_2]$

και $[x_2, x_3]$. Είναι $G(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{x_1}{x_1} = 1$, $G(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{x_2}{x_2} = 1$ και

$$G(x_3) = \frac{f(x_3)}{x_3} = \frac{x_3}{x_3} = 1. \text{ Δηλαδή } G(x_1) = G(x_2) = G(x_3) = 1.$$

- Η G είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $G(x_1) = G(x_2)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $G'(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 f'(\rho_1) - f(\rho_1) = 0$.
- Η G είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) και $G(x_2) = G(x_3)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $G'(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_2 f'(\rho_2) - f(\rho_2) = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως υπάρχουν δύο εφαιπτομένες της C_f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

- 1249.** Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)) > 0, \text{ αφού } f(-1) < f(1).$$

Θα εφαρμόσουμε στην f' το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[-1, \xi]$ και $[\xi, 1]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[-1, \xi]$ και ισχύει $f'(-1) \cdot f'(\xi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (-1, \xi) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_1) = 0$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[\xi, 1]$ και ισχύει $f'(\xi) \cdot f'(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\xi, 1) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f''(x_0) = \frac{\cancel{f'(\rho_2)}^0 - \cancel{f'(\rho_1)}^0}{\rho_2 - \rho_1} = 0.$$

- 1250.** α. i. Έχουμε $f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - x^3)' = 0$.

Άρα θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle στην $G(x) = f(x) - x^3$ στο διάστημα $[a, \beta]$.

Είναι $G(\alpha) = f(\alpha) - \alpha^3$ και $G(\beta) = f(\beta) - \beta^3 \stackrel{\text{δεδωμένο}}{=} f(\alpha) - \alpha^3$.

Η G είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $G(\alpha) = G(\beta)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $G'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 3x_0^2$.

$$\begin{aligned} \text{ii. Παίρνουμε την } f'(x) &= \frac{f(\alpha) - f(x)}{x - \beta} \Leftrightarrow f'(x)(x - \beta) = f(\alpha) - f(x) \Leftrightarrow \\ f'(x)(x - \beta) + f(x) - f(\alpha) &= 0 \Leftrightarrow \\ f'(x)(x - \beta) + f(x)(x - \beta)' - f(\alpha) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(x)(x - \beta) - xf(\alpha))' &= 0 \end{aligned}$$

Άρα θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle στην $G(x) = f(x)(x - \beta) - xf(\alpha)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Είναι $G(\alpha) = f(\alpha)(\alpha - \beta) - \alpha f(\alpha) = \cancel{\alpha f(\alpha)} - \beta f(\alpha) - \cancel{\alpha f(\alpha)} = -\beta f(\alpha)$ και $G(\beta) = -\beta f(\alpha)$.

Η G είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $G(\alpha) = G(\beta)$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\xi)}{\xi - \beta}.$$

β. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, με $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = \beta - \alpha$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta = \alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$, δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -(\beta - \alpha)^2 < 0$. Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c.$$

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, c]$ και $[c, \beta]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, c]$ και παραγωγίσιμη στο (α, c) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, c)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha} = \frac{c - \beta}{c - \alpha}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[c, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (c, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (c, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c} = \frac{\alpha - c}{\beta - c}.$$

$$\text{Έτσι λοιπόν έχουμε } f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \frac{c-\beta}{c-\alpha} \cdot \frac{\alpha-c}{\beta-c} = \frac{\cancel{c}-\beta}{\cancel{c}-\alpha} \cdot \frac{\cancel{c}-\alpha}{\cancel{c}-\beta} = 1.$$

Λύση εξισώσεων – ανισώσεων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

1251. i. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[2, 3]$ και $[4, 5]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ με $f'(x) = ax^{a-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\kappa \in (2, 3) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\kappa) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 3^a - 2^a \Leftrightarrow a\kappa^{a-1} = 3^a - 2^a.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[4, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 5)$ με $f'(x) = ax^{a-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\lambda \in (4, 5) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\lambda) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 5^a - 4^a \Leftrightarrow a\lambda^{a-1} = 5^a - 4^a.$$

ii. Είναι $f(3) + f(4) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow 3^a + 4^a = 2^a + 5^a \Leftrightarrow 3^a - 2^a = 5^a - 4^a \Leftrightarrow$

$$a\kappa^{a-1} = a\lambda^{a-1} \Leftrightarrow a(\kappa^{a-1} - \lambda^{a-1}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=0}} \text{ ή } \kappa^{a-1} - \lambda^{a-1} = 0$$

$$\kappa^{a-1} = \lambda^{a-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{a-1} = 1 \Leftrightarrow \stackrel{\kappa, \lambda > 0}{\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{a-1}} = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^0 \Leftrightarrow a-1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=1}}.$$

iii. Έχουμε $3^a + 4^a > 2^a + 5^a \Leftrightarrow 3^a - 2^a > 5^a - 4^a \Leftrightarrow a\kappa^{a-1} > a\lambda^{a-1} \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow}$

$$\kappa^{a-1} > \lambda^{a-1} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\kappa^{a-1}}{\lambda^{a-1}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{a-1} > 1 \Leftrightarrow \stackrel{\kappa, \lambda > 0}{\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{a-1}} > \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^0 \stackrel{\kappa < \lambda \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\lambda} < 1}{\Leftrightarrow \text{γν. φθ.}}$$

$$a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1.$$

Άρα $0 < a < 1$.

1252. i. Θεωρούμε την εξίσωση $f(u) = u^x$, $u > 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[4, 5]$ και $[6, 7]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[4, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 5)$ με $f'(u) = xu^{x-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\kappa \in (4, 5) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\kappa) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 5^x - 4^x \Leftrightarrow x\kappa^{x-1} = 5^x - 4^x.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[6, 7]$ και παραγωγίσιμη στο $(6, 7)$ με $f'(u) = xu^{x-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\lambda \in (6, 7) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\lambda) = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} = 7^x - 6^x \Leftrightarrow x\lambda^{x-1} = 7^x - 6^x.$$

$$\text{Άρα } 7^x + 4^x = 5^x + 6^x \Leftrightarrow 7^x - 6^x = 5^x - 4^x \Leftrightarrow x\lambda^{x-1} = x\kappa^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$x(\lambda^{x-1} - \kappa^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } \lambda^{x-1} - \kappa^{x-1} = 0.$$

$$\lambda^{x-1} = \kappa^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

ii. Θεωρούμε την εξίσωση $f(u) = u^x$, $u > 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[6, 7]$ και $[8, 9]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[6, 7]$ και παραγωγίσιμη στο $(6, 7)$ με $f'(u) = xu^{x-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\kappa \in (6, 7) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\kappa) = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} = 7^x - 6^x \Leftrightarrow x\kappa^{x-1} = 7^x - 6^x.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[8, 9]$ και παραγωγίσιμη στο $(8, 9)$ με $f'(u) = xu^{x-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\lambda \in (8, 9) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\lambda) = \frac{f(9) - f(8)}{9 - 8} = 9^x - 8^x \Leftrightarrow x\lambda^{x-1} = 9^x - 8^x.$$

$$\text{Άρα } 6^x + 9^x = 7^x + 8^x \Leftrightarrow 9^x - 8^x = 7^x - 6^x \Leftrightarrow x\lambda^{x-1} = x\kappa^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$x(\lambda^{x-1} - \kappa^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \text{ ή } \lambda^{x-1} - \kappa^{x-1} = 0.$$

$$\lambda^{x-1} = \kappa^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

iii. Θέτουμε $x=2\omega$ οπότε έχουμε :

$$2^{2\omega} + 9^{2\omega} = 6^{2\omega} + 7^{2\omega} \Leftrightarrow 4^\omega + 81^\omega = 36^\omega + 49^\omega.$$

Θεωρούμε την εξίσωση $f(u) = u^\omega$, $u > 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[4, 36]$ και $[49, 81]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[4, 36]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 36)$ με $f'(u) = \omega u^{\omega-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\kappa \in (4, 36)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\kappa) = \frac{f(36) - f(4)}{36 - 4} = \frac{36^\omega - 4^\omega}{32} \Leftrightarrow \omega\kappa^{\omega-1} = \frac{36^\omega - 4^\omega}{32} \Leftrightarrow$$

$$32\omega\kappa^{\omega-1} = 36^\omega - 4^\omega.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[49, 81]$ και παραγωγίσιμη στο $(49, 81)$ με $f'(u) = \omega u^{\omega-1}$,
οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα
 $\lambda \in (49, 81)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\lambda) = \frac{f(81) - f(49)}{81 - 49} = \frac{81^\omega - 49^\omega}{32} \Leftrightarrow \omega\lambda^{\omega-1} = \frac{81^\omega - 49^\omega}{32} \Leftrightarrow$$

$$32\omega\lambda^{\omega-1} = 81^\omega - 49^\omega.$$

$$\text{Άρα } 4^\omega + 81^\omega = 36^\omega + 49^\omega \Leftrightarrow 81^\omega - 49^\omega = 36^\omega - 4^\omega \Leftrightarrow 32\omega\lambda^{\omega-1} = 32\omega\kappa^{\omega-1} \Leftrightarrow$$

$$\omega\lambda^{\omega-1} - \omega\kappa^{\omega-1} = 0 \Leftrightarrow \omega(\lambda^{\omega-1} - \kappa^{\omega-1}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\omega=0}} \text{ ή } \lambda^{\omega-1} - \kappa^{\omega-1} = 0.$$

$$\lambda^{\omega-1} = \kappa^{\omega-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^{\omega-1} = 1 \Leftrightarrow \omega-1=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\omega=1}}.$$

Έχουμε $\omega=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$ και $\omega=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$ οι λύσεις της εξίσωσης.

Σταθερή συνάρτηση - Εύρεση συνάρτησης

1253. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x + g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)\eta\mu x = \\ &= \cancel{g(x)\eta\mu x} + \cancel{f(x)\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{f(x)\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{g(x)\eta\mu x} = 0. \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

1254. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(\ln f(x) - \eta\mu x) \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \sigma\upsilon\nu x \right) + 2(\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x) \left(\frac{g'(x)}{g(x)} + \eta\mu x \right) = \\ &= 2(\ln f(x) - \eta\mu x) \left(\frac{\cancel{f(x)} \ln g(x)}{\cancel{f(x)}} - \sigma\upsilon\nu x \right) + \\ &\quad + 2(\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x) \left(\frac{-\cancel{g(x)} \ln f(x)}{\cancel{g(x)}} + \eta\mu x \right) = \\ &= 2(\ln f(x) - \eta\mu x)(\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x) + 2(\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x)(-\ln f(x) + \eta\mu x) = \\ &= \cancel{2(\ln f(x) - \eta\mu x)(\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x)} - \cancel{2(\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x)(\ln f(x) - \eta\mu x)} = 0. \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

1255. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) + \cancel{f'(x)\eta\mu x} + f(x)\sigma\upsilon\nu x + f''(x)\sigma\upsilon\nu x - \\ &\quad - \cancel{f'(x)\eta\mu x} = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) + f(x)\sigma\upsilon\nu x + f''(x)\sigma\upsilon\nu x = \\ &= 2f'(x) \left(\cancel{f(x) + f''(x)} \right)^0 + \sigma\upsilon\nu x \left(\cancel{f(x) + f''(x)} \right)^0 = 0 \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

1256. Αφού η g είναι σταθερή τότε θα είναι $g'(x) = 0$. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)f(x) + 2f'(x)\sqrt{f(x)}}{2\sqrt{f(x)}f(x)} = 0 \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \\ f'(x)f(x) + 2f'(x)\sqrt{f(x)} &= 0 \Leftrightarrow f'(x)(f(x) + 2\sqrt{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} f'(x) = 0 & \text{ή} \\ f(x) + 2\sqrt{f(x)} = 0, & \text{άτοπο αφού } f(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

1257. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - (f(x) + 9)e^{-x} = \cancel{f'(x)e^{-x}} - \cancel{f'(x)e^{-x}} = 0.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$g(x) = c \Leftrightarrow (f(x) + 9)e^{-x} = c \xrightarrow{x=0} (f(0) + 9)e^0 = c \Leftrightarrow -8 + 9 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{g(x) = 1, x \in \mathbb{R}}.$$

iii. Είναι :

$$g(x) = (f(x) + 9)e^{-x} \Leftrightarrow 1 = (f(x) + 9)e^{-x} \Leftrightarrow f(x) + 9 = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - 9.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = e^x - 9, x \in \mathbb{R}}.$$

1258. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - 2 = \frac{2f(x)}{f(x)} - 2 = 2 - 2 = 0.$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$g(x) = c \Leftrightarrow \ln f(x) - 2x = c \xrightarrow{x=0} \ln f(0) = c \Leftrightarrow \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα $g(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Οπότε :

$$g(x) = \ln f(x) - 2x \Leftrightarrow 0 = \ln f(x) - 2x \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = e^{2x}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R}}.$$

1259. i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$g'(x) = f'(x)e^{-\frac{1}{x}} + f(x)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \left(f'(x) + \frac{f(x)}{x^2} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 f'(x) + f(x)}{x^2} = 0.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή για κάθε $x > 0$.

ii. Έχουμε : $g(x) = c \Leftrightarrow f(x)e^{-\frac{1}{x}} = c \xrightarrow{x=1} f(1)e^{-1} = c \Leftrightarrow e \cdot e^{-1} = c \Leftrightarrow c = 1.$

Άρα $g(x) = 1, x > 0$. Οπότε : $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 1 = f(x)e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x > 0}.$$

1260. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$g'(x) = 2e^{2x}f(x) + e^{2x}f'(x) = e^{2x}(2f(x) + f'(x)) = e^{2x} \left(2f(x) - 2f(x) \right) = 0.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Έχουμε : $g(x) = c \Leftrightarrow e^{2x}f(x) = c \xrightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$

Άρα $g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

Οπότε : $g(x) = e^{2x}f(x) \Leftrightarrow 1 = e^{2x}f(x) \Leftrightarrow f(x) = e^{-2x}$. Άρα $\boxed{f(x) = e^{-2x}, x \in \mathbb{R}}.$

iii. Έχουμε :

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \Leftrightarrow h'(x) - \varphi'(x) = 2\varphi(x) - 2h(x) \Leftrightarrow$$

$$h'(x) - \varphi'(x) = -2(h(x) - \varphi(x)) \Leftrightarrow (h(x) - \varphi(x))' = -2(h(x) - \varphi(x)).$$

Έστω $w(x) = h(x) - \varphi(x)$. Τότε $w'(x) = -2w(x)$, έτσι σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα η $e^{2x}w(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ με

$$e^{2x}w(x) = c_1 \Leftrightarrow e^{2x}(h(x) - \varphi(x)) = c_1 \xRightarrow{x=0} \cancel{h(0)}^0 - \cancel{\varphi(0)}^0 = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Δηλαδή έχουμε $e^{2x}w(x) = 0 \Leftrightarrow w(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \varphi(x)$.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το ίδιο, άρα $h = \varphi$.

1261. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) - \eta\mu x = \cancel{\eta\mu x} - \cancel{\eta\mu x} = 0.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ii. Έχουμε : } g(x) = c \Leftrightarrow xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = c \xRightarrow{x=0} 1 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα $g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε : } g(x) = xf(x) + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 1 = xf(x) + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow xf(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x.$$

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } xf(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}, x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 0.$$

iii. Θεωρούμε την εξίσωση $h(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x - \chi\eta\mu x$, η οποία είναι συνεχής στο

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με}$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cancel{\sigma\upsilon\nu}^0 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2 - \pi}{2} < 0 \text{ και}$$

$$h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \cancel{\sigma\upsilon\nu}^0 \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{3\pi}{2} = \frac{2 + 3\pi}{2} > 0, \text{ δηλαδή } h\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot h\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0.$$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } h(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x_0 = x_0 \eta\mu x_0.$$

iv. Θεωρούμε την εξίσωση $z(x) = \chi\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2$, η οποία είναι συνεχής

$$\text{στο } \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με}$$

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} + \cancel{\sigma\upsilon\nu}^0 \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{2}{\cancel{\pi^2}} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{2} > 0 \text{ και}$$

$$z(\pi) = \pi \cancel{\eta\mu}^0 + \sigma\upsilon\nu \pi - 1 - \frac{2}{\cancel{\pi^2}} \pi^2 = -1 - 1 - 2 = -4 < 0, \text{ δηλαδή } z\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot z(\pi) < 0.$$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, \pi) \text{ τέτοιο ώστε } z(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \eta\mu \xi + \sigma\upsilon\nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2.$$

1262. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(f(x)e^{-x} - \eta\mu x)(f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x) + \\ &\quad + 2(g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x)(g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} + \eta\mu x) = \\ &= 2(f(x)e^{-x} - \eta\mu x)[(f'(x) - f(x))e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x] + \\ &\quad + 2(g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x)[(g'(x) - g(x))e^{-x} + \eta\mu x] = \\ &= 2(f(x)e^{-x} - \eta\mu x)[g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x] + \\ &\quad + 2(g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x)[-f(x)e^{-x} + \eta\mu x] = \\ &= \cancel{2(f(x)e^{-x} - \eta\mu x)[g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x]} - \\ &\quad - \cancel{2(g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x)[f(x)e^{-x} - \eta\mu x]} = 0 \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} h(x) = c &\Leftrightarrow [f(x)e^{-x} - \eta\mu x]^2 + [g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x]^2 = c \xrightarrow{x=0} \\ [f(0)e^{-0} - \eta\mu 0]^2 + [g(0)e^{-0} - \sigma\upsilon\nu 0]^2 &= c \Leftrightarrow (1-1)^2 = c \Leftrightarrow c = 0. \end{aligned}$$

Άρα $h(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε :

$$\begin{aligned} h(x) &= [f(x)e^{-x} - \eta\mu x]^2 + [g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x]^2 \Leftrightarrow \\ [f(x)e^{-x} - \eta\mu x]^2 + [g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x]^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x)e^{-x} - \eta\mu x &= 0 \text{ και } g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \\ f(x)e^{-x} &= \eta\mu x \text{ και } g(x)e^{-x} = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = e^x \eta\mu x \text{ και } g(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x. \end{aligned}$$

Άρα $\boxed{f(x) = e^x \eta\mu x, x \in \mathbb{R}}$ και $\boxed{g(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}}$.

1263. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $g'(x) = f'(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot f'(-x) = x^2 - x^2 = 0$.

$$\text{αφού } f(-x) \cdot f'(x) = x^2 \xrightarrow{\text{όπου } x \text{ το } -x} f(x) \cdot f'(-x) = (-x)^2 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(-x) = x^2.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Έχουμε :

$$g(x) = c \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) = c \xrightarrow{x=0} f(0) \cdot f(0) = c \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα $\boxed{g(x) = 1, x \in \mathbb{R}}$.

1264. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2f(-x)f'(-x) = 2f(x) \cdot 2f(-x) - 2f(-x)f'(-x) = \\ &= 2f(-x)(2f(x) - f'(-x)) = 2f(-x)(\cancel{2f(x)} - \cancel{2f(x)}) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{αφού } f'(x) = 2f(-x) \xrightarrow{\text{όπου } x \text{ το } -x} f'(-x) = 2f(x).$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Στην αρχική σχέση $f'(x) = 2f(-x)$, για $x=0$ παίρνουμε

$$f'(0) = 2f(0) \Leftrightarrow 2 = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1. \text{ Έχουμε λοιπόν:}$$

$$g(x) = c \Leftrightarrow f^2(x) + f^2(-x) = c \xRightarrow{x=0} f^2(0) + f^2(0) = c \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 = c \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Άρα } g(x) = 2 \Leftrightarrow f^2(x) + f^2(-x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1265. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{1}{x}\right)$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2f(x)f'(x) - 2\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Στην αρχική σχέση $xf'(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, βάζοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε :

$$\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } g'(x) &= 2\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) - 2\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(f'(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \\ &= 2\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(f'(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{αφού } xf'(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = xf'(x).$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή για $x > 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$g(x) = c \Leftrightarrow f^2(x) + f^2\left(\frac{1}{x}\right) = c \xRightarrow{x=1} f^2(1) + f^2(1) = c \Leftrightarrow 3^2 + 3^2 = c \Leftrightarrow c = 18.$$

$$\text{Άρα } g(x) = 18 \Leftrightarrow f^2(x) + f^2\left(\frac{1}{x}\right) = 18 \text{ για κάθε } x > 0.$$

1266. i. Έχουμε :

$f''(x) = g'(x) = -f(x)$, οπότε η f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, αφού η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και η $-f$), και $g''(x) = -f'(x) = -g(x)$, οπότε και η g'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, αφού η g είναι παραγωγίσιμη (άρα και η $-g$).

ii. Είναι $f''(x) = -f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0$, και $g''(x) = -g(x) \Leftrightarrow g''(x) + g(x) = 0$. Δηλαδή $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = \cancel{2f(x)g(x)} - \cancel{2g(x)f(x)} = 0$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iv. Αφού x_1, x_2 είναι ρίζες της f τότε θα είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f(x_1) = f(x_2) = 0$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = 0$. Δηλαδή η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2) .

Έστω ότι η g έχει άλλη μία ρίζα στο (x_1, x_2) , χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω $\rho < \xi$, οπότε θα είναι $g(\rho) = 0$. Έτσι έχουμε :

Η g είναι συνεχής στο $[\rho, \xi]$, παραγωγίσιμη στο (ρ, ξ) και $g(\xi) = g(\rho) = 0$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (\rho, \xi) \subseteq (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -f(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(\theta) = 0$. Αποπο αφού είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Έτσι αποδείξαμε ότι η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

1267. i. Αν ήταν $f'(x) = 0$, τότε :

$$[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow 0^2 - f^2(x) = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = -4, \text{ άτοπο.}$$

Άρα είναι $f'(x) \neq 0$, συνεπώς η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο, έτσι γνωρίζοντας ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι $f'(0) = 2 > 0$ τότε θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Γνωρίζουμε πως η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον είναι :

$$[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow [f'(x)]^2 = [f(x)]^2 - 4,$$

δηλαδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Από την τελευταία σχέση παραγωγίζοντας

$$\text{έχουμε : } 2f'(x) \cdot f''(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \stackrel{f'(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f''(x) - f'(x))e^x + (f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - \cancel{f'(x)} + \cancel{f'(x)} - f(x))e^x = \\ &= (f''(x) - f(x))e^x = (\cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)})e^x = 0. \end{aligned}$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c_1$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Στην αρχική σχέση για $x=0$ παίρνουμε

$$[f'(0)]^2 - [f(0)]^2 = 4 \Leftrightarrow 4 - [f(0)]^2 = 4 \Leftrightarrow [f(0)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$g(x) = c_1 \Leftrightarrow [f'(x) - f(x)]e^x = c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f'(0) - \cancel{f(0)}^0 = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2.$$

Άρα $g(x) = 2 \Leftrightarrow [f'(x) - f(x)]e^x = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f''(x) + f'(x))e^{-x} - (f'(x) + f(x))e^{-x} = (f''(x) + \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} - f(x))e^{-x} = \\ &= (f''(x) - f(x))e^{-x} = (\cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)})e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c_2$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Έχουμε :

$$h(x) = c_2 \Leftrightarrow [f'(x) + f(x)]e^{-x} = c_2 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f'(0) + \cancel{f(0)}^0 = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2.$$

Άρα $h(x) = 2 \Leftrightarrow [f'(x) + f(x)]e^{-x} = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{aligned} [f'(x) - f(x)]e^x &= 2 \\ [f'(x) + f(x)]e^{-x} &= 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} [f'(x) - f(x)]e^x &= 2 \\ [f'(x) + f(x)]e^x &= 2e^{2x} \end{aligned} \right\} \text{ Αφαιρούμε κατά μέλη και}$$

παίρνουμε :

$$\cancel{e^x f'(x)} - e^x f(x) - \cancel{e^x f'(x)} - e^x f(x) = 2 - 2e^{2x} \Leftrightarrow -2e^x f(x) = 2 - 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = -1 + e^{2x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}}.$$

1268. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$h'(x) = 2g(x) \cdot g'(x) + 2g'(x) \cdot g''(x) = 2g'(x) \cdot (g(x) + g''(x)).$$

$$\text{Είναι } g(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \eta\mu x \Rightarrow g''(x) = f''(x) + \sigma\upsilon\nu x.$$

Άρα $g(x) + g''(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x + f''(x) + \sigma\upsilon\nu x = f(x) + f''(x) = 0$, οπότε και

$h'(x) = 0$. Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$h(x) = c \Leftrightarrow [g(x)]^2 + [g'(x)]^2 = c \Leftrightarrow [f(x) - \sigma\upsilon\nu x]^2 + [f'(x) + \eta\mu x]^2 = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow}$$

$$[f(0) - \sigma\upsilon\nu 0]^2 + [f'(0) + \eta\mu 0]^2 = c \Leftrightarrow (1-1)^2 = c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα $h(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow [g(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ και } g'(x) = 0.$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}}.$$

1269. Είναι $g(x) = f(x) - \alpha \sigma\upsilon\nu x - \beta \eta\mu x \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \alpha \eta\mu x - \beta \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$
 $g''(x) = f''(x) + \alpha \sigma\upsilon\nu x + \beta \eta\mu x.$

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$h'(x) = 2g'(x) \cdot g''(x) + 2g(x) \cdot g'(x) = 2g'(x) \cdot (g''(x) + g(x)) =$$

$$= 2g'(x) \cdot (f''(x) + \alpha \sigma\upsilon\nu x + \beta \eta\mu x + f(x) - \alpha \sigma\upsilon\nu x - \beta \eta\mu x) =$$

$$= 2g'(x) \cdot (f''(x) + f(x)) \stackrel{0}{=} 0.$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$h(x) = c \Leftrightarrow [g(x)]^2 + [g'(x)]^2 = c \Leftrightarrow$$

$$[f(x) - \alpha \sigma\upsilon\nu x - \beta \eta\mu x]^2 + [f'(x) + \alpha \eta\mu x - \beta \sigma\upsilon\nu x]^2 = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow}$$

$$[f(0) - \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 0 - \beta \eta\mu 0]^2 + [f'(0) + \alpha \eta\mu 0 - \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 0]^2 = c \Rightarrow$$

$$(\alpha - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 = c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } h(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow [g(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ και } g'(x) = 0.$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \alpha \sigma\upsilon\nu x - \beta \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \beta \eta\mu x + \alpha \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}}.$$

1270. Αν στη σχέση $|f(x) - f(y)| \leq (g(x) - g(y))^2$ βάλουμε όπου y το x_0 θα έχουμε :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (g(x) - g(x_0))^2 \stackrel{|x-x_0|>0}{\Leftrightarrow} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{(g(x) - g(x_0))^2}{|x - x_0|} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| &\leq \frac{|g(x) - g(x_0)|^2}{|x - x_0|} \Leftrightarrow \\
\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| &\leq \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| |g(x) - g(x_0)| \Leftrightarrow \\
-\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| |g(x) - g(x_0)| &\leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| |g(x) - g(x_0)| \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| |g(x) - g(x_0)| \right) &= -|g'(x_0)| \cdot \cancel{|g(x_0) - g(x_0)|^0} = 0 \text{ και} \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| |g(x) - g(x_0)| \right) &= |g'(x_0)| \cdot \cancel{|g(x_0) - g(x_0)|^0} = 0, \text{ οπότε}
\end{aligned}$$

σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0, \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f'(x) = 0$, άρα $f(x) = c$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

1271. Αν στη σχέση $|f(x) - f(y)| + \sin(x - y) \leq 1$ βάλουμε όπου y το x_0 θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| + \sin(x - x_0) &\leq 1 \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 1 - \sin(x - x_0) \quad |x - x_0| > 0 \\
\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} &\leq \frac{1 - \sin(x - x_0)}{|x - x_0|} \Leftrightarrow \frac{|f(x) - f(x_0)|}{x - x_0} \leq \frac{1 - \sin(x - x_0)}{|x - x_0|} \Leftrightarrow \\
-\frac{1 - \sin(x - x_0)}{|x - x_0|} &\leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{1 - \sin(x - x_0)}{|x - x_0|}
\end{aligned}$$

– Για $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$ θα είναι :

$$\begin{aligned}
-\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} &\leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \\
\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(-\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \right) &= 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \stackrel{u = x - x_0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ u \rightarrow 0}} \frac{1 - \sin u}{u} = 0$$

οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$

– Για $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$ θα είναι :

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} &\leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq -\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \\
\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \right) &= 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(-\frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1 - \sin(x - x_0)}{x - x_0} \stackrel{u=x-x_0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ u \rightarrow 0}} \frac{1 - \sin u}{u} = 0$$

οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0, \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f'(x) = 0$, άρα $f(x) = c$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

1272. i. Είναι $g(x) = f(x)e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)e^x$ άρα

$$\begin{aligned} |e^x g(y) e^{-y} - e^y g(x) e^{-x}| &\leq (x-y)^2 \Leftrightarrow |g(y) e^{x+y} - g(x) e^{x+y}| \leq (x-y)^2 \Leftrightarrow \\ |g(x) e^{x+y} - g(y) e^{x+y}| &\leq (x-y)^2 \Leftrightarrow |e^{x+y} (g(x) - g(y))| \leq (x-y)^2 \end{aligned}$$

Αν στη σχέση $|e^{x+y} (g(x) - g(y))| \leq (x-y)^2$ βάλουμε όπου y το x_0 θα έχουμε :

$$|e^{x+x_0} (g(x) - g(x_0))| \leq (x-x_0)^2 \Leftrightarrow \frac{|e^{x+x_0} (g(x) - g(x_0))|}{|x-x_0|} \leq \frac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|} \Leftrightarrow$$

$$\left| e^{x+x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{|x-x_0|^2}{|x-x_0|} \Leftrightarrow \left| e^{x+x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x-x_0| \Leftrightarrow$$

$$-|x-x_0| \leq e^{x+x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq |x-x_0| \Leftrightarrow -\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}} \right) = -\frac{\overbrace{|x_0-x_0|}^0}{e^{2x_0}} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}} \right) = \frac{\overbrace{|x_0-x_0|}^0}{e^{2x_0}} = 0, \text{ οπότε}$$

σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0, \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$g(x) = c \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = c \xrightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } g(x) = 1, x \in \mathbb{R}. \quad g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

Εύρεση συνάρτησης από ισότητα παραγώγων

1273. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = g'(x) + \sin x \Leftrightarrow (f(x))' = (g(x) + \eta \mu x)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \eta \mu x + c \xrightarrow{x=0}$$

$$f(0) = g(0) + \eta \mu 0 + c \Leftrightarrow \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα $f(x) = g(x) + \eta \mu x, x \in \mathbb{R}.$

1274. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = g'(x) + 1 \Leftrightarrow (f(x))' = (g(x) + x)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + x + c \xrightarrow{x=0} \\ f(0) = g(0) + c \Leftrightarrow \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } f(x) = g(x) + x, x \in \mathbb{R}.$$

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = (g'(x_0) + 1) \cdot (x - x_0) + g(x_0) + x_0 \Leftrightarrow \\ y = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + x - \cancel{x_0} + g(x_0) + \cancel{x_0} \Leftrightarrow y = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + x + g(x_0), \\ \text{η οποία τέμνει τον } y'y \text{ για } x=0: y = g'(x_0) \cdot (-x_0) + g(x_0) = -x_0 g'(x_0) + g(x_0), \\ \text{Δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } y'y \text{ στο σημείο } (0, -x_0 g'(x_0) + g(x_0)).$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(x_0, g(x_0))$ είναι η $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$, η οποία τέμνει τον $y'y$ για $x=0$: $y = g'(x_0) \cdot (-x_0) + g(x_0) = -x_0 g'(x_0) + g(x_0)$. Δηλαδή η C_g τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, -x_0 g'(x_0) + g(x_0))$.

Παρατηρούμε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία A και B τέμνονται στο ίδιο σημείο πάνω στον άξονα $y'y$.

1275. Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$ και η C_g στο σημείο $(0, g(0))$. Αφού οι C_f και C_g τέμνονται στον $y'y$ τότε $f(0) = g(0)$.

Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο $x_0=1$ είναι παράλληλες, άρα $f'(1) = g'(1)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f''(x) = g''(x) + 2 \Leftrightarrow (f'(x))' = (g'(x) + 2x)' \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + 2x + c_1 \xrightarrow{x=1} \\ f'(1) = g'(1) + 2 + c_1 \Leftrightarrow \cancel{f'(1)} = \cancel{f'(1)} + 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2, \text{ και} \\ f'(x) = g'(x) + 2x - 2 \Leftrightarrow (f(x))' = (g(x) + x^2 - 2x)' \Leftrightarrow \\ f(x) = g(x) + x^2 - 2x + c_2 \xrightarrow{x=0} f(0) = g(0) + c_2 \Leftrightarrow \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0 \\ \text{Οπότε } f(x) = g(x) + x^2 - 2x \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x^2 - 2x. \\ \text{Έτσι } f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 0.$$

Για το τριώνυμο γράφουμε $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$.

Έχουμε τον πίνακα :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Άρα $x \in (0, 2)$.

1276. i. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow (f'(x))' = (g'(x))' \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + c \Leftrightarrow \\ (f(x))' = (g(x) + cx)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + cx + c_1 \xrightarrow{x=0} f(0) = g(0) + c_1 \Leftrightarrow \\ \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Άρα $f(x) = g(x) + cx, x \in \Delta$, δηλαδή $f(x) - g(x) = cx$.

ii. Οι ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της g οπότε $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 < 0$ αφού είναι ετερόσημες. Η $g(x) = f(x) - cx$ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με $g(\rho_1) = f(\rho_1) - c\rho_1 = -c\rho_1$ και

$$g(\rho_2) = f(\rho_2) - c\rho_2 = -c\rho_2, \text{ δηλαδή } g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) = c^2 \rho_1 \rho_2 \leq 0.$$

- Αν $g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) < 0$ τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq [\rho_1, \rho_2]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
- Αν $g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(\rho_1) = 0$ δηλαδή το $x = \rho_1$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(\rho_2) = 0$ δηλαδή το $x = \rho_2$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

1277. i. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = 2e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (f(x))' = \left(2e^x + \ln x + \frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2e^x + \ln x + \frac{1}{x} + c \xRightarrow{x=1} f(1) = 2e + 1 + c \Rightarrow 2e = 2e + 1 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = 2e^x + \ln x + \frac{1}{x} - 1, x \in \Delta}.$$

ii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f(x))' = (e^x \cdot \eta\mu x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x \cdot \eta\mu x + c \xRightarrow{x=0}$$

$$f(0) = \eta\mu 0 + c \Leftrightarrow c = 3. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = e^x \cdot \eta\mu x + 3, x \in \Delta}.$$

iii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\eta\mu x)' \cdot x - \eta\mu x \cdot x'}{x^2} \Leftrightarrow (f(x))' = \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + c \xRightarrow{x=\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + c \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + c \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} = c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{\pi}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{1}{\pi}, x \in \Delta}.$$

iv. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x) = (\eta\mu x)^{-2} \cdot (\eta\mu x)' \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = \left(\frac{(\eta\mu x)^{-1}}{-1} \right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{\eta\mu x} + c \xRightarrow{x=\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} + c \Leftrightarrow$$

$$3 = -1 + c \Leftrightarrow c = 4. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = -\frac{1}{\eta\mu x} + 4, x \in \Delta}.$$

v. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu 3x + 2x \cdot e^{x^2+1} \Leftrightarrow f'(x) = \sigma\upsilon\nu 3x \cdot (3x)' \cdot \frac{1}{3} + (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = \left(\frac{1}{3} \eta\mu 3x + e^{x^2+1} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3} \eta\mu 3x + e^{x^2+1} + c \xrightarrow{x=0}$$

$$f(0) = \frac{1}{3} \eta\mu 0 + e + c \Leftrightarrow 1 = e + c \Leftrightarrow c = 1 - e.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \frac{1}{3} \eta\mu 3x + e^{x^2+1} + 1 - e, x \in \Delta}.$$

vi. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f''(x) = 2x - \eta\mu x - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(x^2 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{x} + c_1 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 1 + \sigma\upsilon\nu 1 + 1 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 1 = 2 + \sigma\upsilon\nu 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2, \text{ και}$$

$$f'(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{x} - 2 \Leftrightarrow (f(x))' = \left(\frac{x^3}{3} + \eta\mu x + \ln x - 2x \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \eta\mu x + \ln x - 2x + c_2 \xrightarrow{x=1} f(1) = \frac{1}{3} + \eta\mu 1 - 2 + c_2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 1 = -\frac{5}{3} + \eta\mu 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} + \eta\mu x + \ln x - 2x + \frac{5}{3}, x \in \Delta}.$$

vii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow (f'(x))' = (-\varepsilon\phi x)' \Leftrightarrow f'(x) = -\varepsilon\phi x + c_1 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{4} + c_1 \Leftrightarrow 2 = -1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 3, \text{ και}$$

$$f'(x) = -\varepsilon\phi x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} + (3x)' \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (\ln(\sigma\upsilon\nu x) + 3x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x) + 3x + c_2 \xrightarrow{x=0}$$

$$f(0) = \ln(\sigma\upsilon\nu 0) + c_2 \Leftrightarrow 1 = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x) + 3x + 1, x \in \Delta}.$$

1278. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'''(x) = 24 \Leftrightarrow (f''(x))' = (24x)' \Leftrightarrow f''(x) = 24x + c_1 \xrightarrow{x=1} f''(1) = 24 + c_1 \Leftrightarrow 18 = 24 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -6, \text{ και}$$

$$f''(x) = 24x - 6 \Leftrightarrow (f'(x))' = (12x^2 - 6x)' \Leftrightarrow f'(x) = 12x^2 - 6x + c_2 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 12 - 6 + c_2 \Leftrightarrow 8 = 6 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2, \text{ και}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow (f(x))' = (4x^3 - 3x^2 + 2x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + c_3 \xrightarrow{x=1} f(1) = 4 - 3 + 2 + c_3 \Leftrightarrow 2 = 3 + c_3 \Leftrightarrow c_3 = -1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1, x \in \Delta}.$$

1279. Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(1,0)$, άρα $f(1)=0$. Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$x[e^x f'(x) + \ln x] = 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) + \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} \Leftrightarrow (f(x))' = \left(\frac{\ln x}{e^x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{e^x} + c \xrightarrow{x=1}$$

$$f(1) = c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, x > 0}.$$

1280. i. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = \sigma\phi x \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot (\eta\mu x)' = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \in (0, \pi) \\ \eta\mu x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot (\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = c \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} = c \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1} = c \Leftrightarrow c = 1. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \eta\mu x, x \in \Delta}.$$

ii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{f(x)} f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[e^{f(x)} - \frac{1}{x}\right]' = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{x} = c \xrightarrow{x=1} e^{f(1)} - \frac{1}{1} = c \Leftrightarrow e^0 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } e^{f(x)} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -\ln x, x \in \Delta}.$$

iii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) + 2xf^2(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \frac{1}{f^2(x)} + 2x = 0 \Leftrightarrow (f(x))^{-2} f'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{(f(x))^{-1}}{-1} + x^2 \right)' = 0 \Leftrightarrow -(f(x))^{-1} + x^2 = c \xrightarrow{x=0} -(f(0))^{-1} = c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Άρα } -(f(x))^{-1} + x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \Delta}.$$

iv. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) - e^x \sqrt{f(x) - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x) - 1}} - e^x = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x) - 1}} - \frac{1}{2} e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(f(x) - 1)'}{2\sqrt{f(x) - 1}} - \frac{e^x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x) - 1} - \frac{e^x}{2} \right)' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x) - 1} - \frac{e^x}{2} = c \xrightarrow{x=0}$$

$$\sqrt{f(0) - 1} - \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow \sqrt{2 - 1} - \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \sqrt{f(x) - 1} - \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{f(x) - 1} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow f(x) - 1 = \frac{(e^x + 1)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{(e^x + 1)^2}{4} + 1, x \in \Delta}.$$

v. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) \sin x = 1 + f(x) \eta \mu x \Leftrightarrow f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \sin x + f(x) (\sin x)' = x' \Leftrightarrow (f(x) \sin x)' = x' \Leftrightarrow f(x) \sin x = x + c \xrightarrow{x=0}$$

$$f(0) \cdot \sin 0 = c \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } f(x) \sin x = x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{x + 1}{\sin x}, x \in \Delta}.$$

vi. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$xf'(x) = \frac{1}{x^2} - 2f(x) \Leftrightarrow x^2 f'(x) = \frac{1}{x} - 2xf(x) \Leftrightarrow x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$(x^2 f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow x^2 f(x) = \ln x + c \xrightarrow{x=1} f(1) = c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } x^2 f(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x \in \Delta}.$$

vii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$1 + xf'(x) = xe^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)} + xe^{f(x)} f'(x) = x \Leftrightarrow x e^{f(x)} + x (e^{f(x)})' = x \Leftrightarrow$$

$$(xe^{f(x)})' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow xe^{f(x)} = \frac{x^2}{2} + c \xrightarrow{x=1} e^{f(1)} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow e^0 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } xe^{f(x)} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow xe^{f(x)} = \frac{x^2+1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{x^2+1}{2x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln \frac{x^2+1}{2x}, x \in \Delta}.$$

viii. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + x^2 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) + x^3 \Leftrightarrow f'(x)x - f(x)x' = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2} = x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{2} + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+3}{2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^3+3x}{2}, x \in \Delta}.$$

ix. Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε :

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3f(x) \cdot \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + 3 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 0 \Leftrightarrow (\ln f(x))' - 3 \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} = 0 \Leftrightarrow (\ln f(x) - 3 \ln(\sigma\upsilon\nu x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) - 3 \ln(\sigma\upsilon\nu x) = c \stackrel{x=\frac{\pi}{3}}{\Rightarrow} \ln \left(f \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) - 3 \ln \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \right) = c \Leftrightarrow \ln 1^0 - 3 \ln \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow$$

$$c = -3 \ln 2^{-1} \Leftrightarrow c = 3 \ln 2.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) - 3 \ln(\sigma\upsilon\nu x) = 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln 8 + \ln(\sigma\upsilon\nu^3 x) \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \ln(8 \sigma\upsilon\nu^3 x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 8 \sigma\upsilon\nu^3 x, x \in \Delta}.$$

1281. Η C_f έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ με συντελεστή διεύθυνσης

$$4x\sqrt{f(x)}, \text{ άρα } f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε :}$$

$$f'(x) = 4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 4x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} \right)' = (x^2)' \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{f(x)} = x^2 + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \sqrt{f(1)} = 1 + c \Leftrightarrow \sqrt{9} = 1 + c \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Άρα } \sqrt{f(x)} = x^2 + 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = (x^2 + 2)^2, x \in \mathbb{R}}.$$

1282. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon :$

$$x-y=1 \text{ άρα } f'(e) \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow f'(e) \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow f'(e) = -1.$$

$$\text{Από τη σχέση } \frac{f(x)}{f'(x)} + x \cdot \ln x = 0 \text{ για } x=e \text{ έχουμε :}$$

$$\frac{f(e)}{f'(e)} + e \cdot \ln e = 0 \Leftrightarrow \frac{f(e)}{-1} + e = 0 \Leftrightarrow f(e) = e.$$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε :

$$\frac{f(x)}{f'(x)} + x \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) + x \cdot \ln x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot f(x) + \ln x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x)' \cdot f(x) + \ln x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot \ln x)' = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot \ln x = c \xrightarrow{x=e}$$

$$f(e) \cdot \ln e = c \Leftrightarrow c = e.$$

$$\text{Άρα } f(x) \cdot \ln x = e \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{e}{\ln x}, x > 1}.$$

1283. i. Αφού η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, τότε θα είναι περιττή και ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Έτσι για $x=0$ έχουμε :

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = e^x \cdot e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = e^x + c \xrightarrow{x=0} e^{f(0)} = 1 + c \Leftrightarrow e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } e^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x, x \in \mathbb{R}}.$$

1284. Για $x=0$ από τη δοσμένη σχέση παίρνουμε $0 = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$xf'(x) = f(x) + x^2(2e^{2x} - 1) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^2(2e^{2x} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2e^{2x} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^{2x} - x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} e^{2x} - x + c_1, & x < 0 \\ e^{2x} - x + c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} xe^{2x} - x^2 + c_1x, & x < 0 \\ xe^{2x} - x^2 + c_2x, & x > 0 \end{cases}$$

Πρέπει να πάρουμε δύο περιπτώσεις αφού έχουμε δύο διαστήματα, $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^{2x} - x^2 + c_1x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{2x} - x^2 + c_2x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} - x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} - x + c_2) \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } f(x) = xe^{2x} - x^2 + c_1x \xrightarrow{x=-1} f(-1) = -e^{-2} - 1 - c_1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2} - 1 - c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1, \text{ άρα και } c_2 = -1.$$

$$\text{Βρήκαμε λοιπόν πως } f(x) = \begin{cases} xe^{2x} - x^2 - x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ xe^{2x} - x^2 - x, & x > 0 \end{cases}.$$

Άρα $\boxed{f(x) = xe^{2x} - x^2 - x, x \in \mathbb{R}}$.

1285. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{x-x^2} \Leftrightarrow f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^x \cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} \cdot f'(x) + e^{x^2} \cdot 2x \cdot f(x) = e^x \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f'(x) + (e^{x^2})' \cdot f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$(e^{x^2} \cdot f(x))' = e^x \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f(x) = e^x + c.$$

Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x^2} \cdot f(x) - xe^x - \eta\mu x}{x} = -1$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \frac{xe^{x^2} \cdot f(x) - xe^x - \eta\mu x}{x} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1 \text{ οπότε έχουμε :}$$

$$h(x) = \frac{xe^{x^2} \cdot f(x) - xe^x - \eta\mu x}{x} \Leftrightarrow h(x) = e^{x^2} \cdot f(x) - e^x - \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow$$

$$h(x) = \cancel{e^{x^2}} + c - \cancel{e^{x^2}} - \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow h(x) = c - \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(c - \frac{\eta\mu x}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1} = c - \cancel{1} \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα $e^{x^2} \cdot f(x) = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{x-x^2}, x \in \mathbb{R}}$.

1286. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+e^x}{1+f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}(1+f(x)) = 1+e^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) = 1+e^x \Leftrightarrow (\ln f(x) + f(x))' = (x + e^x)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x + c \xrightarrow{x=0} \ln \cancel{f(0)}^1 + \cancel{f(0)}^1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Οπότε $\ln f(x) + f(x) = x + e^x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x + x$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Είναι

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \text{ άρα η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς και } \ll 1-1 \gg.$$

Είναι $h(e^x) = \ln e^x + e^x = x + e^x$, άρα η σχέση $\ln f(x) + f(x) = x + e^x$ γίνεται :

$$h(f(x)) = h(e^x) \xrightarrow{h \ll 1-1 \gg} \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

1287. α. Για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε :

$$2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (-\sqrt{1-x} + \ln x)' \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{1-x} + \ln x + c \xrightarrow{x=1} f(1) = c \Leftrightarrow c = 0.$$

Οπότε $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}, x \in (0,1)$.

$$\text{Έχουμε δηλαδή } f(x) = \begin{cases} \ln x - \sqrt{1-x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases},$$

$$\text{άρα } f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}, \quad x \in (0,1].$$

β. Για την $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού $A = (0,1]$ έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

$$- \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2}$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\ln x_1 - \sqrt{1-x_1} < \ln x_2 - \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$ συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη.

$$\text{i. Είναι } D_{f^{-1}} = f\left((0,1]\right) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{=} \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 0],$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \sqrt{1-x}) = -\infty - 1 = -\infty.$$

ii. Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή $f^{-1}(x) \in (0,1]$.

$$\text{Άρα } 0 < f^{-1}(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 f^{-1}(x) \leq x^2.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, οπότε σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f^{-1}(x)) = 0.$$

1288. i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$f(x) \ln f(x) + 2x f'(x) = 0 \Leftrightarrow \stackrel{f(x) > 0}{\ln f(x)} + 2x \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln f(x) + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln f(x) + \sqrt{x} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} \cdot \ln f(x))' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln f(x) = c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \ln f(1) = c \Leftrightarrow \ln e = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Οπότε } \sqrt{x} \cdot \ln f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad x \in (0, +\infty)}.$$

ii. Για την $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$ έχουμε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} > e^{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A , άρα και $\ll 1-1 \gg$ συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη.

$$\begin{aligned} \text{Έστω τώρα } y = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\text{πρέπει } \underline{y > 0} \right) &\Leftrightarrow \ln y = \ln e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \\ \sqrt{x} = \frac{1}{\ln y} \left(\text{πρέπει } \frac{1}{\ln y} \geq 0 \Leftrightarrow \ln y > 0 \Leftrightarrow \ln y > \ln 1 \Leftrightarrow \underline{y > 1} \right) &\text{ και} \\ \left(\ln y \neq 0 \Leftrightarrow \underline{y \neq 1} \right) &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln^2 y} \text{ με } y > 1. \end{aligned}$$

$$\text{Επιπλέον πρέπει } x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln^2 y} > 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

$$\text{Άρα } \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}, x > 1}$$

1289. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \\ \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g'(x)} &= \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{g'(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f'(x) \Leftrightarrow \\ f'(x)g(x) - f'(x) - f(x)g'(x) &= 0 \Leftrightarrow f'(x)(g(x) - 1) - f(x)(g(x) - 1)' = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{f'(x)(g(x) - 1) - f(x)(g(x) - 1)'}{(g(x) - 1)^2} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x) - 1} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x) - 1} = c \Leftrightarrow \\ f(x) &= c(g(x) - 1) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = c(g(1) - 1) \Leftrightarrow 2 = c(-1 - 1) \Leftrightarrow c = -1. \\ \text{Άρα } f(x) &= -(g(x) - 1) \Leftrightarrow f(x) = 1 - g(x). \end{aligned}$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - g(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{(1 - g(x))'}{g'(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{g(x)} - 1 \right)' = \frac{-g'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{g(x)} - 1 \right)' = -1 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{1}{g(x)} - 1 \right)' &= (-x)' \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} - 1 = -x + c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \frac{1}{g(1)} - 1 = -1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1. \\ \frac{1}{g(x)} - 1 &= -x \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} = -x \Leftrightarrow \boxed{g(x) = -\frac{1}{x}, x > 0}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x) = 1 - g(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{x}, x > 0}.$$

1290. i. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$ ως προς y έχουμε :

$$f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -f'(y) - y + \frac{\alpha x}{y^2} \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} -xf'\left(\frac{x}{y}\right) = -y^2 f'(y) - y^3 + \alpha x \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{x} f'(y) + \frac{y^3}{x} - a \stackrel{y=1}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{1}{x} \cancel{f'(1)^0} + \frac{1}{x} - a \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - a \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (\ln x - ax)' \Leftrightarrow f(x) = \ln x - ax + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = -a + c \Leftrightarrow$$

$$\cancel{a} = \cancel{a} + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Το $f(1)$ το βρήκαμε θέτοντας $x=y=1$ στη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + ax - ay - \frac{ax}{y}$:

$$\cancel{f(1)} = \cancel{f(1)} - f(1) + \cancel{a} - \cancel{a} - a \Leftrightarrow f(1) = -a.$$

Άρα $\boxed{f(x) = \ln x - ax, x > 0}$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$ είναι η $y = f'(e)(x - e) + f(e)$.

$f'(e) = \frac{1}{e} - a$ και $f(e) = \ln e - ae = 1 - ae$ οπότε η εφαπτομένη γίνεται :

$$y = \left(\frac{1}{e} - a\right)(x - e) + 1 - ae \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x - \cancel{x} - ax + \cancel{ae} + \cancel{1} - \cancel{ae} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{e} - a\right)x,$$

δηλαδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

1291. i. Για $x=y=1$ στη δοσμένη σχέση έχουμε $\cancel{f(1)} = \cancel{f(1)} + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \cancel{f(1)^0}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $x_0 > 0$, το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι

πραγματικός αριθμός. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{u = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 u}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u \rightarrow 1}} \frac{f(x_0 u) - f(x_0)}{x_0 u - x_0} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{x_0 f(u) + u f(x_0) - f(x_0)}{x_0(u - 1)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{x_0 f(u) + (u - 1)f(x_0)}{x_0(u - 1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{f(u)}{u - 1} + \frac{f(x_0)}{x_0} \right) = f'(1) + \frac{f(x_0)}{x_0} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ με $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} + f'(1)$,

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1)$.

iii. Έχουμε :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1 \Leftrightarrow x f'(x) = f(x) + x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot x - f(x) \cdot (x)' = x \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \ln x + c \xrightarrow{x=1} f(1) = c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{x} = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x \ln x, x > 0}$$

1292. α. i. Για $x=y=1$ στη δοθείσα σχέση έχουμε

$$f(1) = f(1) \cdot f(1) \Leftrightarrow f(1)(f(1) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \text{ απορρίπτεται αφού } f(x) \neq 0 \\ \text{ή } \boxed{f(1) = 1} \end{cases}$$

Έχουμε :

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \xrightarrow{y=\frac{1}{x}} f(1) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 1 = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της και αφού είναι και $f(1) = 1 > 0$ τότε έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Ισχύει επιπλέον και $f(0) = 0$ για $x = 0$ οπότε αποδείξαμε πως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

iii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο α άρα $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της αρκεί να δείξουμε

ότι, για κάθε $x_0 > 0$, το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός

αριθμός. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{u = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = \frac{x_0 u}{\alpha}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ u \rightarrow \alpha}} \frac{f\left(\frac{x_0 u}{\alpha}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0 u}{\alpha} - x_0} = \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f\left(x_0 u \frac{1}{\alpha}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0 u - \alpha x_0}{\alpha}} = \\ &= \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f(x_0 u) \cdot f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0(u - \alpha)}{\alpha}} = \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f(x_0) \cdot f(u) \cdot \frac{1}{f(\alpha)} - f(x_0)}{\frac{x_0(u - \alpha)}{\alpha}} = \\ &= \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f(x_0) \left(f(u) \cdot \frac{1}{f(\alpha)} - 1 \right)}{\frac{x_0(u - \alpha)}{\alpha}} = \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f(x_0) \frac{f(u) - f(\alpha)}{f(\alpha)}}{\frac{x_0(u - \alpha)}{\alpha}} = \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f(x_0)}{\frac{x_0}{\alpha}} \cdot \frac{f(u) - f(\alpha)}{u - \alpha} = \\ &= \frac{f(x_0)}{\frac{x_0}{\alpha}} f'(\alpha) = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} f'(\alpha) = \alpha \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ με $f'(x_0) = \alpha \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}$,

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \alpha \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} \Leftrightarrow$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{af'(a)}{f(a)}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

β. Η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$ είναι η $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ από την οποία παίρνουμε

$$y = f'(a)x - af'(a) + f(a) \Leftrightarrow f'(a)x - y - af'(a) + f(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{1}{f'(a)}y - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = 0.$$

Η ευθεία $\varepsilon: x - 2\sqrt{a}y + a = 0$ είναι η $x - \frac{1}{f'(a)}y - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = 0$, άρα

$$\bullet \quad -\frac{1}{f'(a)} = -2\sqrt{a} \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}}}, \text{ και}$$

$$\bullet \quad -a + \frac{f(a)}{f'(a)} = a \Leftrightarrow \frac{f(a)}{f'(a)} = 2a \Leftrightarrow f(a) = 2af'(a) \Leftrightarrow$$

$$f(a) = 2a \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(a) = \sqrt{a}}}.$$

Οπότε έχουμε :

$$f'(x) = a \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \Leftrightarrow f'(x) = \cancel{a} \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{2\cancel{a}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{2x} \Leftrightarrow$$

$$2xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\ln f(x) - \frac{1}{2} \ln x \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) - \frac{1}{2} \ln x = c \xRightarrow{x=1} \ln f(1) = c \Leftrightarrow c = \ln 1 \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) - \frac{1}{2} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x}, x > 0}.$$

1293. i. Είναι $f'(x) = -e^{g(x)}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα

πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Όμοια η $g'(x) = -e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$f'(x) = -e^{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) + e^{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x)g'(x) + e^{g(x)}g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(-e^{f(x)}) + e^{g(x)}g'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{f(x)}f'(x) + e^{g(x)}g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-e^{f(x)} + e^{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow -e^{f(x)} + e^{g(x)} = c \xRightarrow{x=1} -e^{f(1)} + e^{g(1)} = c \Leftrightarrow$$

$$-e^0 + e^0 = c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Οπότε } -e^{f(x)} + e^{g(x)} = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

iii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -e^{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = -e^{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) + e^{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \\
 f'(x)e^{-f(x)} + e^{f(x)}e^{-f(x)} &= 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)} + e^0 = 0 \Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow \\
 (e^{-f(x)})' &= x' \Leftrightarrow e^{-f(x)} = x + c \xrightarrow{x=1} e^{-f(1)} = 1 + c \Leftrightarrow e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0. \\
 \text{Άρα } e^{-f(x)} &= x \Leftrightarrow -f(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -\ln x, x > 0}.
 \end{aligned}$$

Ισότητες της μορφής $f'(g(x)) = h(x)$

- 1294.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 2$ είναι $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$. Στην δοσμένη σχέση για $x=1$ έχουμε $f'(2) = 4$. Μένει να βρούμε το $f(2)$.

$$\begin{aligned}
 f'(x^3 + x) &= 4x \Leftrightarrow f'(x^3 + x) \cdot (x^3 + x)' = 4x(x^3 + x)' \Leftrightarrow \\
 f'(x^3 + x) \cdot (x^3 + x)' &= 4x(3x^2 + 1) \Leftrightarrow f'(x^3 + x) \cdot (x^3 + x)' = 12x^3 + 4x \Leftrightarrow \\
 (f(x^3 + x))' &= (3x^4 + 2x^2)' \Leftrightarrow f(x^3 + x) = 3x^4 + 2x^2 + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow \\
 c &= 2. \text{ Άρα } f(x^3 + x) = 3x^4 + 2x^2 + 2 \xrightarrow{x=1} f(2) = 3 + 2 + 2 \Leftrightarrow f(2) = 7. \\
 \text{Η ζητούμενη εφαπτομένη λοιπόν είναι η} \\
 y &= 4(x - 2) + 7 \Leftrightarrow y = 4x - 8 + 7 \Leftrightarrow \boxed{y = 4x - 1}.
 \end{aligned}$$

- 1295.** Έχουμε : $g'(x + x^3) = 8x \Leftrightarrow g'(x + x^3) \cdot (x + x^3)' = 8x(x + x^3)' \Leftrightarrow$
 $g'(x + x^3) \cdot (x + x^3)' = 8x(1 + 3x^2) \Leftrightarrow g'(x + x^3) \cdot (x + x^3)' = 8x + 24x^3 \Leftrightarrow$
 $(g(x + x^3))' = (4x^2 + 6x^4)' \Leftrightarrow g(x + x^3) = 4x^2 + 6x^4 + c \xrightarrow{x=1} g(2) = 4 + 6 + c \Leftrightarrow$
 $10 = 10 + c \Leftrightarrow c = 0.$
 Άρα $g(x + x^3) = 4x^2 + 6x^4 \xrightarrow{x=0} \boxed{g(0) = 0}.$

- 1296.** Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x^2) &= 3x - 1 \Leftrightarrow f'(x^2) \cdot (x^2)' = (3x - 1)(x^2)' \Leftrightarrow f'(x^2) \cdot (x^2)' = (3x - 1)2x \Leftrightarrow \\
 f'(x^2) \cdot (x^2)' &= 6x^2 - 2x \Leftrightarrow (f(x^2))' = (2x^3 - x^2)' \Leftrightarrow f(x^2) = 2x^3 - x^2 + c \xrightarrow{x=1} \\
 f(1) &= 2 - 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x^2) = 2x^3 - x^2 \xrightarrow[\begin{smallmatrix} x^2=u \\ x^3=u\sqrt{u} \end{smallmatrix}]{x^2=u} f(u) = 2u\sqrt{u} - u.$$

$$\text{Οπότε } \boxed{f(x) = 2x\sqrt{x} - x, x > 0}.$$

- 1297.** Έχουμε :

$$f'(e^x) = 2xe^{x^2-x} \Leftrightarrow f'(e^x) \cdot (e^x)' = 2xe^{x^2-x}(e^x)' \Leftrightarrow f'(e^x) \cdot (e^x)' = 2xe^{x^2-x} \cdot e^x \Leftrightarrow$$

$$f'(e^x) \cdot (e^x)' = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow (f(e^x))' = (e^{x^2})' \Leftrightarrow f(e^x) = e^{x^2} + c \xrightarrow{x=0} f(1) = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } f(e^x) = e^{x^2} + 1 \Leftrightarrow_{x=\ln u}^{e^x=u} f(u) = e^{(\ln u)^2} + 1 = e^{\ln u \cdot \ln u} + 1 = e^{\ln u \cdot \ln u} + 1 = u^{\ln u} + 1.$$

$$\text{Οπότε } \boxed{f(x) = x^{\ln x} + 1, x > 0}.$$

1298. Έχουμε :

$$xf'(\ln x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow_{x \neq 0} f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(\ln x) \cdot (\ln x)' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$(f(\ln x))' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f(\ln x) = x + \frac{1}{x} + c \xrightarrow{x=1} f(0) = 1 + 1 + c \Leftrightarrow 2 = 2 + c \Leftrightarrow$$

$$c = 0. \text{ Άρα } f(\ln x) = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow_{x=e^u}^{\ln x=u} f(u) = e^u + \frac{1}{e^u} = e^u + e^{-u}.$$

$$\text{Οπότε } \boxed{f(x) = e^x + e^{-x}, x \in \mathbb{R}}.$$

1299. Έχουμε $f(g(x)) = x \Leftrightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \Leftrightarrow xg'(x) = 1 \Leftrightarrow_{x \neq 0} g'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$g(x) = \ln x + c. \text{ Έστω } g(x) = y. \text{ Τότε } y = \ln x + c \Leftrightarrow \ln x = y - c \Leftrightarrow x = e^{y-c}.$$

Έτσι γράφουμε :

$$f(g(x)) = x \Leftrightarrow f(y) = e^{y-c} \xrightarrow{y=1} f(1) = e^{1-c} \Leftrightarrow e^{2016} = e^{1-c} \Leftrightarrow 2016 = 1 - c \Leftrightarrow$$

$$c = -2015. \text{ Άρα } \boxed{g(x) = \ln x - 2015, x > 0},$$

$$\text{και } f(y) = e^{y+2015}, \text{ δηλαδή } \boxed{f(x) = e^{x+2015}, x \in \mathbb{R}}.$$

1300. Έχουμε :

$$f(g(x)) = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(g(x))g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{x^2}+1}{\cancel{x}} g'(x) = \frac{\cancel{x^2}+1}{\cancel{x^2}} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (g(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow g(x) = \ln x + c \xrightarrow{x=1}$$

$$g(1) = c \Leftrightarrow c = 2016. \text{ Άρα } \boxed{g(x) = \ln x + 2016, x > 0}.$$

$$\text{Έπειτα θέτουμε } g(x) = y \Leftrightarrow \ln x + 2016 = y \Leftrightarrow \ln x = y - 2016 \Leftrightarrow x = e^{y-2016}$$

και εργαζόμαστε ως εξής :

$$f(g(x)) = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(y) = e^{y-2016} - \frac{1}{e^{y-2016}} \Leftrightarrow f(y) = e^{y-2016} - e^{-y+2016},$$

$$\text{δηλαδή } \boxed{f(x) = e^{x-2016} - e^{2016-x}, x > 0}.$$

Ι σ ό τ η τ α π α ρ α γ ώ γ ω ν σ ε έ ν ω σ η δ ι α σ τ η μ ά τ ω ν

1301. i. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε :

$$g(x) = x^3 f(x) \Leftrightarrow g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^2 \cdot x f'(x) \Leftrightarrow g'(x) = \cancel{3x^2 f(x)} - \cancel{3x^2 f(x)} \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0. \end{cases}$$

Πρέπει να πάρουμε δύο περιπτώσεις αφού έχουμε δύο ξεχωριστά διαστήματα. Δηλαδή η g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

ii. Έχουμε :

$$g(x) = x^3 f(x) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{g(x)}{x^3} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{x^3}, & x < 0 \\ \frac{c_2}{x^3}, & x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Για } x < 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{c_1}{x^3} \stackrel{x=-1}{\Rightarrow} f(-1) = \frac{c_1}{(-1)^3} \Leftrightarrow -f(-1) = c_1 \stackrel{f \text{ άρτια}}{\Leftrightarrow} \stackrel{f(-1)=f(1)=2}{c_1 = -2}.$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{c_2}{x^3} \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = \frac{c_2}{1} \Leftrightarrow c_2 = 2. \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^3}, & x < 0 \\ \frac{2}{x^3}, & x > 0 \end{cases}.$$

1302. Έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ 3x^2-1, & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} (x^2-x)', & x < 0 \\ (x^3-x)', & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + c_1, & x < 0 \\ x^3 - x + c_2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Για } x \geq 0 \text{ έχουμε } f(x) = x^3 - x + c_2 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - x + c_2) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 2.$$

Έτσι βρήκαμε $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x < 0 \\ x^3 - x + 2, & x \geq 0 \end{cases}.$

1303. Για $x \neq 1$ έχουμε :

$$(x-1)f'(x) = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{x^2 - x + x^2 - 1}{x-1} =$$

$$\frac{x(x-1) + (x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{\cancel{x-1}(2x+1)}{\cancel{x-1}} = 2x+1 \Leftrightarrow (f(x))' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + x + c_1, & x < 1 \\ x^2 + x + c_2, & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Για } x < 1 \text{ έχουμε } f(x) = x^2 + x + c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1 οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + c_2) = f(1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1}^2 + c_1 = \cancel{1}^2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = c_1 = 2, \text{ και } f(1) = 2 + c_1 = 4.$$

Έτσι βρήκαμε $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ x^2 + x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Άρα $\boxed{f(x) = x^2 + x + 2, x \in \mathbb{R}}$.

1304. Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$x^2 f'(x) = x^2 \sin x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \sin x - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (f(x))' = \left(\eta \mu x + \frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + \frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \eta \mu x + \frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases}.$$

Για $x < 0$ είναι :

$$f(x) = \eta \mu x + \frac{1}{x} + c_1 \xrightarrow{x=-\pi} f(-\pi) = \eta \mu(-\pi) + \frac{1}{-\pi} + c_1 \Leftrightarrow 0 = -\eta \mu \pi - \frac{1}{\pi} + c_1 \Leftrightarrow$$

$$0 = -\cancel{\eta \mu \pi}^0 - \frac{1}{\pi} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{\pi}.$$

Για $x > 0$ είναι : $f(x) = \eta \mu x + \frac{1}{x} + c_2 \xrightarrow{x=\pi} f(\pi) = \cancel{\eta \mu \pi}^0 + \frac{1}{\pi} + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{\pi}.$

Έτσι βρήκαμε $\boxed{f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi}, & x < 0 \\ \eta \mu x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi}, & x > 0 \end{cases}}.$

1305. i. Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \neq 0} x f'(x) = \frac{1}{x} - f(x) \Leftrightarrow x f'(x) + x f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$(x f(x))' = (\ln|x|)' \Leftrightarrow x f(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1, & x < 0 \\ \ln|x| + c_2, & x > 0 \end{cases}.$$

Για $x < 0$ είναι :

$$x f(x) = \ln|x| + c_1 \xrightarrow{x=-1} -f(-1) = \ln|-1| + c_1 \Leftrightarrow -(-e) = \cancel{\ln 1}^0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = e.$$

Για $x > 0$ είναι :

$$x f(x) = \ln|x| + c_2 \xrightarrow{x=1} f(1) = \ln|1| + c_2 \Leftrightarrow e = \cancel{\ln 1}^0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = e.$$

Έτσι βρήκαμε $x f(x) = \begin{cases} \ln|x| + e, & x < 0 \\ \ln|x| + e, & x > 0 \end{cases}$, δηλ.

$$x f(x) = \ln|x| + e \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln|x| + e}{x}, x \in \mathbb{R}^*}$$

ii. Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f'(x) - 1 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x)x - x = f(x) \Leftrightarrow f'(x)x - f(x)x' = x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln|x|)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \ln|x| + c_1, & x < 0 \\ \ln|x| + c_2, & x > 0 \end{cases}.$$

Για $x < 0$ είναι :

$$\frac{f(x)}{x} = \ln|x| + c_1 \stackrel{x=-1}{\Rightarrow} \frac{f(-1)}{-1} = \ln|-1| + c_1 \Leftrightarrow -1 = \ln 1^0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

Για $x > 0$ είναι :

$$\frac{f(x)}{x} = \ln|x| + c_2 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = \ln|1| + c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln 1^0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Έτσι βρήκαμε } \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \ln|x| - 1, & x < 0 \\ \ln|x| + \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x \ln|x| - x, & x < 0 \\ x \ln|x| + \frac{x}{2}, & x > 0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(-x) - x, & x < 0 \\ x \ln x + \frac{x}{2}, & x > 0 \end{cases}.$$

1306. Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = e^x - f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot x + f(x) \cdot x' = e^x \Leftrightarrow$$

$$(f(x) \cdot x)' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x < 0 \\ e^x + c_2, & x > 0 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Είναι :

$$xf(x) = e^x + c_1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (xf(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + c_1) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1$$

$$xf(x) = e^x + c_2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_2) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

Επιπλέον έχουμε : $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = e^0 = 1.$

$$\text{Τελικά βρήκαμε } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Το τέχνασμα πολλαπλασιασμού με $e^{G(x)}$

1307. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 3f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (-3x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow \\
 f'(x)e^{-3x} + e^{-3x}(-3x)' f(x) &= 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-3x})' = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-3x} = c \xrightarrow{x=0} \\
 f(0) &= c \Leftrightarrow c = 1. \text{ Άρα } f(x)e^{-3x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{3x}, x \in \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (-x^3)' f(x) = 0 \Leftrightarrow \\
 f'(x)e^{-x^3} + e^{-x^3}(-x^3)' f(x) &= 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x^3})' = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x^3} = c \xrightarrow{x=0} \\
 f(0) &= c \Leftrightarrow c = 1. \text{ Άρα } f(x)e^{-x^3} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{x^3}, x \in \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2f(x) + 3 \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 3 \Leftrightarrow f'(x) + (-2x)' f(x) = 3 \Leftrightarrow \\
 f'(x)e^{-2x} + e^{-2x}(-2x)' f(x) &= 3e^{-2x} \Leftrightarrow (f(x)e^{-2x})' = \left(\frac{3}{-2}e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow \\
 f(x)e^{-2x} &= -\frac{3}{2}e^{-2x} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = -\frac{3}{2} + c \Leftrightarrow 1 = -\frac{3}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{5}{3}. \\
 \text{Άρα } f(x)e^{-2x} &= -\frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

iv. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 2f'(x) &= 3f(x) + 2 \Leftrightarrow 2f'(x) - 3f(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{3}{2}f(x) = 1 \Leftrightarrow \\
 f'(x) + \left(-\frac{3x}{2}\right)' f(x) &= 1 \Leftrightarrow f'(x)e^{-\frac{3x}{2}} + e^{-\frac{3x}{2}}\left(-\frac{3x}{2}\right)' f(x) = e^{-\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow \\
 \left(f(x)e^{-\frac{3x}{2}}\right)' &= \left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}\right)' \Leftrightarrow f(x)e^{-\frac{3x}{2}} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}} + c \xrightarrow{x=0} \cancel{f(0)}^0 = -\frac{2}{3} + c \Leftrightarrow \\
 c &= \frac{2}{3}. \text{ Άρα } f(x)e^{-\frac{3x}{2}} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} - \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

v. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x) + 2xf(x) &= x \Leftrightarrow f'(x) + (x^2)' f(x) = x \Leftrightarrow \\
 f'(x)e^{x^2} + e^{x^2}(x^2)' f(x) &= e^{x^2}x \Leftrightarrow (f(x)e^{x^2})' = \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' \Leftrightarrow \\
 f(x)e^{x^2} &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}. \\
 \text{Άρα } f(x)e^{x^2} &= \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

vi. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f'(x) + \sin x f(x) &= \sin x \Leftrightarrow f'(x) + (\eta \mu x)' f(x) = \sin x \Leftrightarrow \\
 f'(x) e^{\eta \mu x} + e^{\eta \mu x} (\eta \mu x)' f(x) &= \sin x e^{\eta \mu x} \Leftrightarrow (f(x) e^{\eta \mu x})' = (e^{\eta \mu x})' \Leftrightarrow \\
 f(x) e^{\eta \mu x} &= e^{\eta \mu x} + c \xrightarrow{x=0} f(0) e^{\eta \mu 0} = e^{\eta \mu 0} + c \Leftrightarrow 2e^0 = e^0 + c \Leftrightarrow c = 1. \\
 \text{Άρα } f(x) e^{\eta \mu x} &= e^{\eta \mu x} + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{e^{\eta \mu x} + 1}{e^{\eta \mu x}}, x \in \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

1308. i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + x^2 f'(x) \Leftrightarrow \frac{x \neq 0}{x^2} f(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \\
 f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' f(x) &= -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)' f(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \\
 \left(f(x) e^{\frac{1}{x}}\right)' &= \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \Leftrightarrow f(x) e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + c e^{-\frac{1}{x}}. \text{ Είναι όμως} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + c e^{-\frac{1}{x}}\right) = 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} u = -\frac{1}{x} \\ x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0 \end{matrix} \lim_{u \rightarrow 0} (1 + c e^u) = 2 \Leftrightarrow 1 + c = 2 \Leftrightarrow \\
 c &= 1. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x}}, x > 0}.
 \end{aligned}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right) \stackrel{u = -\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow -\infty}} (1 + e^u) = 1 + 0 = 1.$$

1309. i. Από την $h(x) = \frac{g(x)}{e^x} - x$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{g'(x) e^x - g(x) e^x}{e^{2x}} - 1 = \frac{\cancel{e^x} (g'(x) - g(x))}{\cancel{e^x} \cdot e^x} - 1 = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x} - 1 = \\
 &= \frac{f''(x) - f'(x) - f'(x) + f(x)}{e^x} - 1 = \frac{f(x) - 2f'(x) + f''(x)}{e^x} - 1 = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) = 0$, άρα $h(x) = c$, δηλαδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

$$\text{ii. Έχουμε : } h(x) = c \Leftrightarrow \frac{g(x)}{e^x} - x = c \xrightarrow{x=0} \frac{g(0)}{1} = c \Leftrightarrow \frac{1}{1} = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{g(x)}{e^x} - x = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{e^x} = x + 1 \Leftrightarrow \boxed{g(x) = x e^x + e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

iii. Έχουμε :

$$g(x) = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow xe^x + e^x = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow xe^x + e^x = f'(x) + (-x)' f(x) \Leftrightarrow$$

$$x+1 = f'(x)e^{-x} + e^{-x}(-x)' f(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)' = (f(x)e^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x = f(x)e^{-x} + c \xrightarrow{x=0} 0 = f(0) + c \Leftrightarrow 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{2}x^2 + x = f(x)e^{-x} - 1 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)e^x, x \in \mathbb{R}.$$

1310. i. Από την $g(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}$ παίρνουμε :

$$g'(x) = (f''(x) + f'(x))e^{-x} - (f'(x) + f(x))e^{-x} = (f''(x) + \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} - f(x))e^{-x} = (f''(x) - f(x))e^{-x} = 0.$$

$$\text{αφού } f''(x) = \frac{\cancel{2}f(x)f'(x)}{\cancel{2}\sqrt{16+f^2(x)}} = \frac{f(x)\sqrt{16+f^2(x)}}{\sqrt{16+f^2(x)}} = f(x) \Leftrightarrow f''(x) - f(x) = 0.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$g(x) = c \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))e^{-x} = c \xrightarrow{x=0} f'(0) + \cancel{f(0)}^0 = c \Leftrightarrow c = 4,$$

$$\text{αφού } f'(0) = \sqrt{16+f^2(0)} = \sqrt{16+0} = 4. \text{ Οπότε :}$$

$$(f'(x) + f(x))e^{-x} = 4 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} = 4 \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = 4e^x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^x + f(x)e^x = 4e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (2e^{2x})' \Leftrightarrow f(x)e^x = 2e^{2x} + c \xrightarrow{x=0}$$

$$\cancel{f(0)}^0 = 2 + c \Leftrightarrow c = -2.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^x = 2e^{2x} - 2 \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 2(e^x - e^{-x}), x \in \mathbb{R}.$$

iii. Είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $\ll 1-1 \gg$ συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη.

$$\text{Είναι } D_{f^{-1}} = f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{=} \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2(e^x - e^{-x})] = 2(0 - (+\infty)) = -\infty,$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty,$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2(e^x - e^{-x})] = 2(+\infty - 0) = +\infty, \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0.$$

Έστω $f(x) = y$. Έχουμε :

$$y = 2(e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow y = 2\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) \Leftrightarrow y = 2\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \Leftrightarrow ye^x = 2e^{2x} - 2 \Leftrightarrow$$

$2(e^x)^2 - ye^x - 2 = 0$. Θέτουμε $e^x = \omega$ και παίρνουμε $2\omega^2 - y\omega - 2 = 0$. Πρέπει να είναι $\omega > 0$. $\Delta = y^2 + 16$ και

$$\omega_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 16}}{4} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \\ \omega_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 + 16}}{4}, \text{ απορρίπτεται αφού } y - \sqrt{y^2 + 16} < 0. \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \omega = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \Leftrightarrow e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4}.$$

$$\text{Έτσι βρήκαμε } \boxed{f^{-1}(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4}, x \in \mathbb{R}}.$$

1311. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$xf'(x) + 1 = -2x^2(f(x) + \ln x) \Leftrightarrow xf'(x) + 1 = -2x^2f(x) - 2x^2 \ln x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + \frac{1}{x} = -2xf(x) - 2x \ln x \Leftrightarrow f'(x) + 2xf(x) = -\frac{1}{x} - 2x \ln x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + (x^2)'f(x) = -\frac{1}{x} - (x^2)' \ln x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{x^2} + e^{x^2}(x^2)'f(x) = -\frac{1}{x}e^{x^2} - e^{x^2}(x^2)' \ln x \Leftrightarrow (f(x)e^{x^2})' = (-\ln x \cdot e^{x^2})' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{x^2} = -e^{x^2} \ln x + c \xrightarrow{x=1} f(1) \cdot e = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{e} \cdot e \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{x^2} = -e^{x^2} \ln x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{-x^2} - \ln x, x > 0}.$$

1312. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \stackrel{w=-h}{=} -\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ w \rightarrow 0}} \frac{f(x+w) - f(x)}{-w} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x+w) - f(x)}{w} = f'(x). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f(x) + 1 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) + 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + (-x)'f(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + e^{-x}(-x)'f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-x} = -e^{-x} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = -1 + c \Leftrightarrow 1 = -1 + c \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{-x} = -e^{-x} + 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2e^x - 1, x \in \mathbb{R}}.$$

1313. Είναι :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h)}{h} &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{h} \stackrel{w=-2h}{=} -\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ w \rightarrow 0}} \frac{f'(x+w) - f'(x)}{-\frac{1}{2}w} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} 2 \frac{f'(x+w) - f'(x)}{w} = 2f''(x).\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h)}{h} = 2f'(x) \Leftrightarrow 2f''(x) = 2f'(x) \Leftrightarrow f''(x) = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = f(x) + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f'(0) = f(0) + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1, \text{ και}$$

$$f'(x) = f(x) + 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + (-x)' f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x} + e^{-x}(-x)' f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = -e^{-x} + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = -1 + c \Leftrightarrow$$

$$1 = -1 + c \Leftrightarrow c = 2. \text{ Άρα } f(x)e^{-x} = -e^{-x} + 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2e^x - 1, x \in \mathbb{R}}.$$

1314. i. Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της αρκεί να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{u=x-x_0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u+x_0) - f(x_0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{-x_0}f(u) + e^{-u}f(x_0) - f(x_0)}{u} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x_0}f(u)}{u} + \frac{e^{-u}-1}{u} f(x_0) \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(e^{-x_0} \frac{f(u)}{u} + \frac{e^{-u}-1}{u} f(x_0) \right) = \\ &= e^{-x_0} \cdot 1 + (-1) \cdot f(x_0) = e^{-x_0} - f(x_0) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\text{όπου } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{-u}-1}{u} \stackrel{w=-u}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ w \rightarrow 0}} \frac{e^w-1}{-w} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x-0} = -\left. \frac{d(e^x)}{dx} \right|_{x=0} = -e^0 = -1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = e^{-x_0} - f(x_0)$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{-x} - f(x)$.

ii. Έχουμε :

$$f'(x) = e^{-x} - f(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)e^x)' = x' \Leftrightarrow f(x)e^x = x + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c \Leftrightarrow c = 0$$

αφού αν στη σχέση $f(x+y) = e^{-y}f(x) + e^{-x}f(y)$ βάλουμε όπου $x=y=0$, παίρνουμε

$$\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Άρα $f(x)e^x = x \Leftrightarrow f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

iii. Στην σχέση $g'(x^3+1) = -x^3e^{-x^3-1}$ θέτουμε όπου $x^3+1=t$ και παίρνουμε :

$$\begin{aligned}g'(t) &= -(t-1)e^{-t} = e^{-t} - te^{-t} = (te^{-t})' \Leftrightarrow g(t) = te^{-t} + c_1 \stackrel{t=0}{\Rightarrow} g(0) = c_1 \stackrel{g(0)=f(0)=0}{\Leftrightarrow} \\ &c_1 = 0.\end{aligned}$$

Άρα $g(t) = te^{-t}$ δηλαδή $g(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξαμε λοιπόν πως $f(x) = g(x)$ και αφού έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, τότε $f=g$.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης ισούται με τον εαυτό της

1315. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

$$g'(x)\sin x + g(x)\eta\mu x = g(x)\sin x \Leftrightarrow$$

$$g'(x)\sin x - g(x)(\sin x)' = g(x)\sin x \Leftrightarrow$$

$$\frac{g'(x)\sin x - g(x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{g(x)}{\sin x} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{\sin x}\right)' = \frac{g(x)}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)}{\sin x} = ce^x \xrightarrow{x=0} \frac{g(0)}{\sin 0} = c \Leftrightarrow c = \frac{1992}{1} \Leftrightarrow c = 1992.$$

$$\text{Άρα } \frac{g(x)}{\sin x} = 1992e^x \Leftrightarrow \boxed{g(x) = 1992e^x \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}.$$

1316. Για κάθε $x \in (0, \pi)$ έχουμε :

$$f'(x)\eta\mu x = f(x)(\sin x + \eta\mu x) \Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x - f(x)\sin x = f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)(\eta\mu x)' = f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cancel{e^{\frac{\pi}{2}}}}{1} = c\cancel{e^{\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{\eta\mu x} = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x \eta\mu x, x \in (0, \pi)}.$$

1317. Έχουμε :

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f(x)g(x) \xrightarrow{g(x) \neq 0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x)}{g^2(x)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = ce^x \xrightarrow{x=0} \frac{f(0)}{g(0)} = c \xrightarrow{f(0)=g(0)} c = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{g(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x g(x).$$

1318. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f'(x)(1+x^2) - 2xf(x) = (1+x^2)f(x) \xrightarrow{1+x^2 \neq 0} \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)(1+x^2) - (1+x^2)'f(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{f(x)}{1+x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{1+x^2} \right)' = \frac{f(x)}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{1+x^2} = ce^x \xrightarrow{x=0} \frac{f(0)}{1} = c \Leftrightarrow c=1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{1+x^2} = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x(1+x^2), x \in \mathbb{R}}.$$

1319. Η C_f τέμνει τον $y'y$ για $x=0$, οπότε $f(0)=e$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = f(x) \ln f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln f(x) \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \ln f(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = ce^x \xrightarrow{x=0} \ln f(0) = c \Leftrightarrow \ln e = c \Leftrightarrow c=1.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{e^x}, x \in \mathbb{R}}.$$

1320. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$x(f'(x) - f(x)) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - xf(x) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xf(x) \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) - f(x)x' = xf(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)x'}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = c \cdot e^x \xrightarrow{x=1} f(1) = c \cdot e \Leftrightarrow \cancel{e} = \cancel{e}c \Leftrightarrow c=1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{x} = e^x \Leftrightarrow f(x) = xe^x, x > 0.$$

$$\text{Επιπλέον είναι : } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} xe^x = 0. \text{ Άρα } f(x) = xe^x, x \geq 0.$$

1321. i. Προσθέτουμε κατά μέλη τις $f'(x)g(x) = -1$ και $f(x)g'(x) = 1$ και παίρνουμε :

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)g(x))' = 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) = c \xrightarrow{x=0} \Rightarrow$$

$$f(0)g(0) = c \Leftrightarrow c=1. \text{ Άρα } f(x)g(x) = 1. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x)g(x) = -1 \Leftrightarrow f'(x)f(x)g(x) = -f(x) \Leftrightarrow f'(x) = -f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 0 \Leftrightarrow f(x)e^x = c \xrightarrow{x=0} \Rightarrow$$

$$f(0) = c \Leftrightarrow c=1. \text{ Άρα } f(x)e^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x)g(x) = 1 \Leftrightarrow e^{-x}g(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

ii. Η ευθεία $x=x_0$ τέμνει την C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και την C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$. Οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των C_f και C_g στα σημεία A και B είναι $f'(x_0)$ και $g'(x_0)$ αντίστοιχα.

$$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} \text{ και } g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x, \text{ άρα}$$

$$f'(x_0)g'(x_0) = -e^{-x_0} \cdot e^{x_0} = -e^{-x_0+x_0} = -e^0 = -1, \text{ δηλαδή οι εφαπτομένες στα σημεία}$$

A και B τέμνονται κάθετα.

1322. i. Στην $f(x)f'(-x) = 1$ βάζοντας όπου x το $-x$ παίρνουμε $f(-x)f'(x) = 1$ και

αφαιρώντας τες κατά μέλη έχουμε :

$$f(-x)f'(x) - f(x)f'(-x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)f(-x))' = 0 \Leftrightarrow f(x)f(-x) = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0)f(0) = c \Leftrightarrow c = 1. \text{ Άρα } f(x)f(-x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε :

$$f(-x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x)f(-x)f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c \Leftrightarrow c = 1. \text{ Άρα } f(x)e^{-x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

1323. Στην $f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$ βάζοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε $f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Είναι } f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow \stackrel{x \neq 0}{\frac{1}{x^2}} f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}. \text{ Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις}$$

που βρήκαμε κατά μέλη παίρνουμε :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1)f(1) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) = \frac{1}{x} f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} f(x) \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)x - f(x)x' = 0 \Leftrightarrow \stackrel{x \neq 0}{\frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x, x > 0}.$$

1324. i. Είναι $f'(x) = e^{2x}f(-x)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων (της e^{2x} και της $f(-x)$). Δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii. Στη σχέση $f'(x) = e^{2x}f(-x)$ βάζοντας όπου x το $-x$ έχουμε $f'(-x) = e^{-2x}f(x)$.

Επιπλέον ισχύει $f''(x) = 2e^{2x}f(-x) - e^{2x}f'(-x)$. Άρα :

$$\begin{aligned} f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= 2e^{2x}f(-x) - e^{2x}f'(-x) - 2e^{2x}f(-x) + f(x) = \\ &= \cancel{2e^{2x}f(-x)} - e^{2x}f'(-x) - \cancel{2e^{2x}f(-x)} + f(x) = \\ &= -e^{2x}f'(-x) + f(x) = -e^{2x} \cdot e^{-2x}f(x) + f(x) = \\ &= -\cancel{f(x)} + \cancel{f(x)} = 0. \end{aligned}$$

iii. Έχουμε :

$$g'(x) = (f''(x) - f'(x))e^{-x} - (f'(x) - f(x))e^{-x} = (f''(x) - f'(x) - f'(x) + f(x))e^{-x} =$$

$$= (f''(x) - 2f'(x) + f(x))e^{-x} = 0.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iv. Είναι :

$$g(x) = c \Leftrightarrow (f'(x) - f(x))e^{-x} = c \xRightarrow{x=0} f'(0) - f(0) = c \Leftrightarrow 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0,$$

$$\text{όπου } f'(x) = e^{2x}f(-x) \xRightarrow{x=0} f'(0) = f(0) \Leftrightarrow f'(0) = 1. \text{ Άρα :}$$

$$(f'(x) - f(x))e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^x \xRightarrow{x=0} f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1,$$

$$\text{δηλαδή } \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

1325. i. Στην αρχική σχέση για $x=y=0$ έχουμε :

$$f(0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \text{ απορρίπτεται} \\ \text{αφού } f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{ ή} \\ \underline{f(0) = 1} \end{cases}$$

$$\text{Επιπλέον είναι } f'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της αρκεί να δείξουμε

$$\text{για κάθε } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ότι το όριο } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ υπάρχει και είναι πραγματικός}$$

αριθμός. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{u=x-x_0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u+x_0) - f(x_0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)f(x_0) - f(x_0)}{u} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - 1}{u} f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x)$.

$$\text{ii. Έχουμε : } f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \xRightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

1326. i. Στη σχέση $f(x-y) = \frac{f(x)+x}{f(y)+y} - x+y$ για $x=y=0$ έχουμε :

$$f(0) = \frac{\cancel{f(0)}}{\cancel{f(0)}} \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

$$\text{Τη σχέση } f(x-y) = \frac{f(x)+x}{f(y)+y} - x+y \text{ την παραγωγίζουμε ως προς } y :$$

$$-f'(x-y) = -\frac{f(x)+x}{(f(y)+y)^2}(f'(y)+1)+1 \text{ κι έπειτα θέτουμε } y=0 :$$

$$-f'(x) = -\frac{f(x)+x}{f^2(0)}\left(\cancel{f'(0)}^0+1\right)+1 \Leftrightarrow -f'(x) = -\frac{f(x)+x}{1^2}+1 \Leftrightarrow$$

$$-f'(x) = -f(x)-x+1 \Leftrightarrow f'(x) = f(x)+x-1.$$

ii. Έχουμε :

$$f'(x) = f(x)+x-1 \Leftrightarrow f'(x)-f(x) = x-1 \Leftrightarrow f'(x)+(-x)'f(x) = x-1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x} + e^{-x}(-x)'f(x) = xe^{-x} - e^{-x} \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (-xe^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-x} = -xe^{-x} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow c=1.$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{-x} = -xe^{-x} + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}}.$$

1327. α. Έχουμε :

$$e^{f(x)} = 1+f'(x) \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot e^x = e^x(1+f'(x)) \Leftrightarrow e^{x+f(x)} = e^x(1+f'(x)) \Leftrightarrow$$

$$e^{x+f(x)} = e^x(x+f(x))' \Leftrightarrow e^{-x} = e^{-(x+f(x))}(x+f(x))' \Leftrightarrow$$

$$(-e^{-x})' = (-e^{-(x+f(x))})' \Leftrightarrow -e^{-x} = -e^{-(x+f(x))} + c \xrightarrow{x=0} -1 = -e^{-f(0)} + c \Leftrightarrow$$

$$-1 = -e^{\ln 2} + c \Leftrightarrow -1 = -2 + c \Leftrightarrow c=1.$$

Έτσι παίρνουμε :

$$-e^{-x} = -e^{-(x+f(x))} + 1 \Leftrightarrow e^{-(x+f(x))} = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x+f(x)}} = \frac{1}{e^x} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{x+f(x)}} = \frac{1+e^x}{e^x} \Leftrightarrow e^{x+f(x)} = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow \ln e^{x+f(x)} = \ln \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow$$

$$x+f(x) = \ln \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow x+f(x) = \ln e^x - \ln(1+e^x) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x} + f(x) = \cancel{x} - \ln(1+e^x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}.$$

β. Η εξίσωση $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ έχει προφανή ρίζα το 1 αφού $f(1) + f(0) = f(1) + f(0)$.

Η συνάρτηση $f(x) = -\ln(e^x + 1)$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ οπότε :

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Leftrightarrow \ln(e^{x_1} + 1) < \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow$$

$$-\ln(e^{x_1} + 1) > -\ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2). \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } A.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

— Για $x > 1$ είναι :

$$x < x^2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x^2) \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x^2) < f(x) \text{ και}}}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{f(\ln x) < f(0)}}.$$

$$\text{Άρα } f(x^2) + f(\ln x) < f(x) + f(0)$$

– Για $0 < x < 1$ είναι :

$$x > x^2 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^2) \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x^2) > f(x) \text{ και}}}$$

$$x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{f(\ln x) > f(0)}}.$$

$$\text{Άρα } f(x^2) + f(\ln x) > f(x) + f(0).$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ που είναι και η μοναδική λύση.

γ. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - (\ln(e+1) - \ln 2)x + \ln(e+1)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, με

$$g(0) = f(0) + \ln(e+1) = -\ln 2 + \ln(e+1) = \ln \frac{e+1}{2} \text{ και}$$

$$g(1) = f(1) - \cancel{\ln(e+1)} + \ln 2 + \cancel{\ln(e+1)} = -\ln(e+1) + \ln 2 = \ln \frac{2}{e+1}, \text{ δηλαδή}$$

$$g(0) \cdot g(1) = \ln \frac{e+1}{2} \cdot \ln \frac{2}{e+1} = -\ln \frac{2}{e+1} \cdot \ln \frac{2}{e+1} = -\left(\ln \frac{2}{e+1}\right)^2 < 0.$$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1)$.

ii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

– Η f είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1) + \ln 2}{x_0} = \\ &= \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - (\ln(e+1) - \ln 2)}{x_0} = \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)(x_0 - 1)}{x_0} = \\ &= \frac{\ln \frac{e+1}{2} \cdot (x_0 - 1)}{x_0} = \frac{x_0 - 1}{x_0} \ln \frac{e+1}{2}. \end{aligned}$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{-\cancel{\ln(e+1)} - (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 + \cancel{\ln(e+1)}}{1 - x_0} =$$

$$= \frac{-(\ln(e+1) - \ln 2)x_0}{1-x_0} = \frac{x_0}{x_0-1} \ln \frac{e+1}{2}.$$

Έτσι έχουμε

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{x_0-1}{x_0} \ln \frac{e+1}{2} \cdot \frac{x_0}{x_0-1} \ln \frac{e+1}{2} \Leftrightarrow f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \ln^2 \left(\frac{e+1}{2} \right).$$

1328. i. Αν στη σχέση $|e^y f(x) - e^x f(y)| \leq (x-y)^2$ βάλουμε όπου y το x_0 θα έχουμε :

$$\begin{aligned} |e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)| &\leq (x-x_0)^2 \Leftrightarrow \frac{|e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq \frac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|} \Leftrightarrow \\ \left| \frac{e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)}{x-x_0} \right| &\leq \frac{|x-x_0|^2}{|x-x_0|} \Leftrightarrow \left| \frac{e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)}{x-x_0} \right| \leq |x-x_0| \Leftrightarrow \\ -|x-x_0| &\leq \frac{e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0| \Leftrightarrow \\ -|x-x_0| &\leq \frac{e^{x_0} f(x) - e^{x_0} f(x_0) + e^{x_0} f(x_0) - e^x f(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0| \Leftrightarrow \\ -|x-x_0| &\leq \frac{e^{x_0} (f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(e^{x_0} - e^x)}{x-x_0} \leq |x-x_0| \Leftrightarrow \\ -|x-x_0| &\leq e^{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} \leq |x-x_0| \Leftrightarrow \\ -|x-x_0| - f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} &\leq e^{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0| - f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{e^{x_0}} |x-x_0| - \frac{1}{e^{x_0}} f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} &\leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{1}{e^{x_0}} |x-x_0| - \frac{1}{e^{x_0}} f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0}. \end{aligned}$$

Άρα :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{1}{e^{x_0}} |x-x_0| - \frac{1}{e^{x_0}} f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} \right) = -\frac{1}{e^{x_0}} f(x_0) \cdot (-e^{x_0}) = f(x_0),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} = -\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = -\left. \frac{d(e^x)}{dx} \right|_{x=x_0} = -e^{x_0}, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{e^{x_0}} |x-x_0| - \frac{1}{e^{x_0}} f(x_0) \frac{e^{x_0} - e^x}{x-x_0} \right) = -\frac{1}{e^{x_0}} f(x_0) \cdot (-e^{x_0}) = f(x_0), \text{ οπότε}$$

σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, για

κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξαμε λοιπόν πως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \xrightarrow{x=0} f(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

$$\text{iii. Είναι : } -1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\eta\mu 2x \leq 3 \Leftrightarrow -8 \leq 3\eta\mu 2x - 5 \leq -2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{8} \geq \frac{1}{3\eta\mu 2x - 5} \geq -\frac{1}{2} \quad \begin{matrix} f(x^2+x) = e^{x^2+x} \\ \Leftrightarrow \\ e^{x^2+x} > 0 \end{matrix} \quad -\frac{e^{x^2+x}}{8} \geq \frac{e^{x^2+x}}{3\eta\mu 2x - 5} \geq -\frac{e^{x^2+x}}{2}.$$

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{x^2+x}}{8} \right) = -\frac{1}{8} \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2+x} \stackrel{u=x^2+x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{e^{x^2+x}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x^2+x}}{3\eta\mu 2x - 5} = -\infty.$$

iv. α. Ισχύει :

$g'(x) = -f(h(x)) = -e^{h(x)}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (των $-e^x$ και $h(x)$), και

$h'(x) = -f(g(x)) = -e^{g(x)}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (των $-e^x$ και $g(x)$). Άρα παίρνουμε τις :

$$g''(x) = -e^{h(x)} \cdot h'(x) = -e^{h(x)} \cdot (-e^{g(x)}) = e^{g(x)+h(x)} \text{ και}$$

$$h''(x) = -e^{g(x)} \cdot g'(x) = -e^{g(x)} \cdot (-e^{h(x)}) = e^{g(x)+h(x)}, \text{ δηλαδή}$$

$$g''(x) = h''(x) \Leftrightarrow g'(x) = h'(x) + c \xrightarrow{x=1} g'(1) = h'(1) + c \Leftrightarrow -e^{h(1)} = -e^{g(1)} + c \Leftrightarrow -e^0 = -e^0 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Προκύπτει ότι :

$$g'(x) = h'(x) \Leftrightarrow -e^{h(x)} = -e^{g(x)} \Leftrightarrow e^{h(x)} = e^{g(x)} \Leftrightarrow h(x) = g(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

β. Έχουμε :

$$g'(x) = -e^{h(x)} \Leftrightarrow g'(x) = -e^{g(x)} \Leftrightarrow -e^{-g(x)} g'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{-g(x)})' = x' \Leftrightarrow$$

$$e^{-g(x)} = x + c \xrightarrow{x=1} e^{-g(1)} = 1 + c \Leftrightarrow e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } e^{-g(x)} = x \Leftrightarrow -g(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{g(x) = -\ln x, x > 0}.$$

Όταν για τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης είναι απαραίτητο αυτή να διατηρεί σταθερό πρόσημο

1329. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x)f'(x) - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) + 2\sigma\upsilon\nu x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2\sin x = c \xRightarrow{x=0} f^2(0) + 2\sin 0 = c \Leftrightarrow (-\sqrt{2})^2 + 2 = c \Leftrightarrow c = 4.$$

$$\text{Άρα } f^2(x) + 2\sin x = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 4 - 2\sin x.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = -\sqrt{2} < 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = -\sqrt{4 - 2\sin x}, x \in \mathbb{R}}.$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x)f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) - x^2)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - x^2 = c \xRightarrow{x=0} f^2(0) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } f^2(x) - x^2 = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 1 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}}.$$

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x)f(x) - e^x \sqrt{1+f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) - e^x \cdot 2\sqrt{1+f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2f'(x)f(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} - e^x = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+f^2(x)} - e^x\right)' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} - e^x = c \xRightarrow{x=0}$$

$$\sqrt{1+f^2(0)} - 1 = c \Leftrightarrow \sqrt{1+3} - 1 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \sqrt{1+f^2(x)} - e^x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow 1 + f^2(x) = (1 + e^x)^2 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = (1 + e^x)^2 - 1 = 1 + 2e^x + e^{2x} - 1 = e^{2x} + 2e^x \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + 2e^x \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = \sqrt{3} > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = \sqrt{e^{2x} + 2e^x}, x \in \mathbb{R}}.$$

iv. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x)f(x) - x \cdot f^2(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) - 2xf^2(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' + (-x^2)' f^2(x) = -(-x^2)' \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' e^{-x^2} + e^{-x^2} (-x^2)' f^2(x) = -e^{-x^2} (-x^2)' \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x)e^{-x^2})' = (-e^{-x^2})' \Leftrightarrow f^2(x)e^{-x^2} = -e^{-x^2} + c \xRightarrow{x=0} f^2(0) = -1 + c \Leftrightarrow$$

$$e^{-1} = -1 + c \Leftrightarrow c = e.$$

$$\text{Άρα } f^2(x)e^{-x^2} = -e^{-x^2} + e \Leftrightarrow f^2(x) = e^{x^2+1} - 1 \neq 0, \text{ αφού}$$

$$e^{x^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+1} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0, \text{ άποπο.}$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = \sqrt{e-1} > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = \sqrt{e^{x^2+1}} - 1, x \in \mathbb{R}}.$$

v. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + e^x}{f(x) - 1} \Leftrightarrow f'(x)(f(x) - 1) = e^{2x} + e^x \Leftrightarrow f'(x)f(x) - f'(x) = e^{2x} + e^x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f^2(x)}{2} - f(x) \right)' = \left(\frac{e^{2x}}{2} + e^x \right)' \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} - f(x) = \frac{e^{2x}}{2} + e^x + c \xrightarrow{x=0}$$

$$\frac{f^2(0)}{2} - f(0) = \frac{1}{2} + 1 + c \Leftrightarrow \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } \frac{f^2(x)}{2} - f(x) = \frac{e^{2x}}{2} + e^x \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 = e^{2x} + 2e^x + 1 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = (e^x + 1)^2 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής, άρα και η $f-1$, και ισχύει $f(x) - 1 \neq 0$, άρα η $f-1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) - 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) - 1 = e^x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}}.$$

1330. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 0 \Leftrightarrow f(x)f'(x) - e^xf(x) - e^xf'(x) + e^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) - (e^xf(x) + e^xf'(x)) + e^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2} - e^xf(x) + \frac{e^{2x}}{2} \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f^2(x)}{2} - e^xf(x) + \frac{e^{2x}}{2} = c \xrightarrow{x=0} \frac{f^2(0)}{2} - f(0) + \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow \frac{4}{2} - 2 + \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Άρα :

$$\frac{f^2(x)}{2} - e^xf(x) + \frac{e^{2x}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^xf(x) + e^{2x} = 1 \Leftrightarrow (f(x) - e^x)^2 = 1 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής, άρα και η $f(x) - e^x$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, και ισχύει $f(x) - e^x \neq 0$, άρα η $f(x) - e^x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$ συμπεραίνουμε πως $f(x) - e^x > 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}. \text{ Συνεπώς } f(x) - e^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}}.$$

1331. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + x' = x' \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) + xf'(x) + xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2} + xf(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = c \xRightarrow{x=0} \frac{f^2(0)}{2} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = 1 + x^2 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής, άρα και η $f(x) + x$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και ισχύει $f(x) + x \neq 0$, άρα η $f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) + 0 = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) + x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{1+x^2} - x, x \in \mathbb{R}}.$$

1332. i. Στη σχέση $f'(-x)f(x) = -x$ βάζουμε όπου $x=0$ και παίρνουμε $f'(0)f(0) = 0$ άρα $f'(0) = 0$.

ii. Έστω ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$. Τότε και πάλι από τη σχέση

$$f'(-x)f(x) = -x \text{ για } x=\rho \text{ παίρνουμε } f'(-\rho)f(\rho) = -\rho \Rightarrow \rho = 0, \text{ δηλαδή}$$

$f(0) = 0$. Άτοπο αφού $f(0) = 1$. Συνεπώς είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού η f είναι και συνεχής τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε $f(0) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Έχουμε :

$$g'(x) = \frac{-f'(-x)f(x) - f(-x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{-(-x) - x}{f^2(x)} = 0,$$

$$\text{αφού } f'(-x)f(x) = -x \Leftrightarrow f'(x)f(-x) = x.$$

Είναι $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

$$\text{iv. Είναι : } g(x) = c \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = c \xRightarrow{x=0} \frac{f(0)}{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x).$$

$$\text{Οπότε } f'(-x)f(x) = x \xRightarrow{f(-x)=f(x)} f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow f(x)f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f(x)f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) - x^2)' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - x^2 = c_1 \xRightarrow{x=0} f^2(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

$$\text{Άρα } f^2(x) - x^2 = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 1 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}}.$$

1333. Έχουμε :

$$f(x)g(x)=1 \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Έτσι παίρνουμε :

$$f'(x)g'(x)=-1 \Leftrightarrow f'(x)\left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)=-1 \Leftrightarrow -\frac{(f'(x))^2}{f^2(x)}=-1 \Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{f^2(x)}=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=f(x) \text{ ή} \\ f'(x)=-f(x) \end{cases}.$$

– Αν $f'(x)=f(x)$ τότε

$$f(x)=ce^x \xrightarrow{x=0} f(0)=c \Leftrightarrow c=1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x)=e^x, x \in \mathbb{R}} \text{ και } g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{e^x}=e^{-x} \Leftrightarrow \boxed{g(x)=e^{-x}, x \in \mathbb{R}}.$$

– Αν $f'(x)=-f(x)$ τότε

$$f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=0 \Leftrightarrow (f(x)e^x)'=0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x=c \xrightarrow{x=0} f(0)=c \Leftrightarrow c=1$$

$$\text{Άρα } f(x)e^x=1 \Leftrightarrow \boxed{f(x)=e^{-x}, x \in \mathbb{R}} \text{ και}$$

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{e^{-x}}=e^x \Leftrightarrow \boxed{g(x)=e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

1334. Έχουμε :

$$(x^2+1)^2(f'(x)-1)-x(f(x)-x)^3=0 \xrightarrow{(f(x)-x) \neq 0} \frac{f'(x)-1}{(f(x)-x)^3}(x^2+1)^2-x=0 \xrightarrow{x^2+1 \neq 0} \Leftrightarrow$$

$$(f(x)-x)'(f(x)-x)^{-3}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{(f(x)-x)^{-2}}{-2}\right)'-\frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{2(f(x)-x)^2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\right)'=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2(f(x)-x)^2}+\frac{1}{2(x^2+1)}=c \xrightarrow{x=0} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2f^2(0)}+\frac{1}{2}=c \Leftrightarrow -\frac{1/2}{1}+\frac{1/2}{1}=c \Leftrightarrow c=0.$$

$$\text{Άρα } -\frac{1}{2(f(x)-x)^2}+\frac{1}{2(x^2+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2(f(x)-x)^2}=\frac{1}{2(x^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$2(f(x)-x)^2=2(x^2+1) \Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+1 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής, άρα και η $f(x) - x$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, και ισχύει $f(x) - x \neq 0$, άρα η $f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) - 0 = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, x \in \mathbb{R}}.$$

1335. Έχουμε :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) = e^{2x} \text{ και } g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)f(x) = e^{2x}.$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x)g(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c \xRightarrow{x=0} \frac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

$$\text{Έτσι έχουμε } f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$2f'(x)f(x) - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) - e^{2x})' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - e^{2x} = c_1 \xRightarrow{x=0} f^2(0) - 1 = c_1 \Leftrightarrow 1 - 1 = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$f^2(x) - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}} \text{ και } \boxed{g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}.$$

1336. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi(x) = f(x) - x \Leftrightarrow \varphi'(x) = f'(x) - 1$ και

$$h(x) = g(x) - x \Leftrightarrow h'(x) = g'(x) - 1, \text{ οπότε οι δοθείσες σχέσεις γίνονται :}$$

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{g(x) - x} \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{x}{h(x)} \Leftrightarrow \varphi'(x)h(x) = x \text{ και}$$

$$g'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{x}{\varphi(x)} \Leftrightarrow h'(x)\varphi(x) = x.$$

Παρατηρούμε πως είναι $\varphi'(x)h(x) = h'(x)\varphi(x)$, οπότε έχουμε :

$$\varphi'(x)h(x) = h'(x)\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} h(x) \neq 0 \\ \varphi(x) \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} \Leftrightarrow (\ln \varphi(x))' = (\ln h(x))' \Leftrightarrow$$

$$\ln \varphi(x) = \ln h(x) + c \xRightarrow{x=0} \ln \varphi(0) = \ln h(0) + c \Leftrightarrow \ln(f(0) - 0) = \ln(g(0) - 0) + c \Leftrightarrow$$

$$\ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα $\ln \varphi(x) = \ln h(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = h(x) \Leftrightarrow f(x) - x = g(x) - x \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, και αφού έχουν και το ίδιο πεδίο ορισμού, θα είναι και $f=g$. Είναι :

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{g(x) - x} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x} \Leftrightarrow (f'(x) - 1)(f(x) - x) = x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x} \Leftrightarrow f'(x)f(x) - xf'(x) - f(x) + x = x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(x) - (xf'(x) + x'f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x) - xf(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}f^2(x) - xf(x) = c_1 \xrightarrow{x=0} \frac{1}{2}f^2(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}. \text{ Άρα}$$

$$\frac{1}{2}f^2(x) - xf(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 = 1 + x^2 \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής, άρα και η $f(x) - x$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, και ισχύει $f(x) - x \neq 0$, άρα η $f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) - 0 = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{1+x^2} + x, x \in \mathbb{R}}.$$

1337. Έχουμε : $f'(x) + f^2(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)g(x) + f^2(x)g^2(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(x)g(x) = -f^2(x)g^2(x) \text{ και}$$

$$g'(x) + g^2(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x)f(x) + g^2(x)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g'(x)f(x) = -f^2(x)g^2(x).$$

Παρατηρούμε ότι :

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x)g(x) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c \xrightarrow{x=0} \frac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow$$

$$c = 1. \text{ Οπότε } \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x). \text{ Έχουμε :}$$

$$f'(x) + f^2(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f^2(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f^3(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f^{-3}(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f^{-2}(x)}{-2} + x \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f^{-2}(x)}{-2} + x = c_1 \xrightarrow{x=0}$$

$$\frac{f^{-2}(0)}{-2} = c_1 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{2}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$-\frac{f^{-2}(x)}{2} + x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -f^{-2}(x) + 2x = -1 \Leftrightarrow f^{-2}(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f^2(x)} = 2x+1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, +\infty)$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε

$$x \in [0, +\infty). \text{ Συνεπώς } \boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x \geq 0} \text{ και } \boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x \geq 0}.$$

Εύρεση συνάρτησης από την f''

1338. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + f(1) \text{ η οποία είναι ισοδύναμη με την } y = 3x - 2, \text{ άρα } \underline{\underline{f'(1) = 3}} \text{ και } -f'(1) + f(1) = -2 \Leftrightarrow -3 + f(1) = -2 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(1) = 1}}.$$

Έχουμε :

$$f''(2x-1) = 12x-6 \Leftrightarrow f''(2x-1) \cdot (2x-1)' = (12x-6) \cdot (2x-1)' \Leftrightarrow$$

$$f''(2x-1) \cdot (2x-1)' = 2(12x-6) \Leftrightarrow f''(2x-1) \cdot (2x-1)' = 24x-12 \Leftrightarrow$$

$$(f'(2x-1))' = (12x^2 - 12x)' \Leftrightarrow f'(2x-1) = 12x^2 - 12x + c_1 \xrightarrow{x=1}$$

$$f'(1) = 12 - 12 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 3.$$

Έτσι είναι :

$$f'(2x-1) = 12x^2 - 12x + 3 \Leftrightarrow f'(2x-1)(2x-1)' = (12x^2 - 12x + 3)(2x-1)' \Leftrightarrow$$

$$f'(2x-1)(2x-1)' = 2(12x^2 - 12x + 3) \Leftrightarrow f'(2x-1)(2x-1)' = 24x^2 - 24x + 6 \Leftrightarrow$$

$$(f(2x-1))' = (8x^3 - 12x^2 + 6x)' \Leftrightarrow f(2x-1) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + c_2 \xrightarrow{x=1}$$

$$f(1) = 8 - 12 + 6 + c_2 \Leftrightarrow 1 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1.$$

$$\text{Άρα } f(2x-1) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.$$

Τέλος θέτοντας $y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$ έχουμε :

$$f(y) = 8 \frac{(y+1)^3}{2^3} - 12 \frac{(y+1)^2}{2^2} + 6 \frac{(y+1)}{2} - 1 = (y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3(y+1) - 1 =$$

$$= (y+1)^2(y+1-3) + 3(y+1) - 1 = (y+1)^2(y-2) + 3(y+1) - 1 =$$

$$= (y^2 + 2y + 1)(y-2) + 3y + 3 - 1 = y^3 - 2y^2 + 2y^2 - 4y + y - 2 + 3y + 2 = y^3.$$

Οπότε $\boxed{f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}}.$

1339. Έχουμε : $x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f''(x) = x f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$

$$f''(x) = \frac{x f'(x) - x f(x)}{x^2} \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(\frac{f(x)}{x} \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} + c_1 \xrightarrow{x=1}$$

$$f'(1) = f(1) + c_1 \Leftrightarrow 2 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1. \text{ Έτσι είναι :}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) + x \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

$$\frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x + c_2 \quad x=1 \Rightarrow$$

$$f(1) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x)}{x} = \ln x + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x \ln x + x, x > 0}.$$

1340. Έχουμε :

$$xf'(x) + x^2 f''(x) = 2 \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad f'(x) + xf''(x) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \quad x f'(x) + x(f'(x))' = \frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$(xf'(x))' = (2 \ln x)' \Leftrightarrow xf'(x) = 2 \ln x + c_1 \xRightarrow{x=1} f'(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2.$$

Έτσι είναι :

$$xf'(x) = 2 \ln x + 2 \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad f'(x) = 2 \frac{1}{x} \ln x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 2(\ln x)' \ln x + 2(\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln^2 x + 2 \ln x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x + c_2 \xRightarrow{x=1} f(1) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x, x > 0}.$$

1341. Έχουμε :

$$f(x) + (x-2)f'(x) = xf''(x) \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) - 2f'(x) = xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) - f'(x) = xf''(x) + f'(x) \Leftrightarrow f(x) + f'(x)(x-1) = xf''(x) + f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(x-1)'f(x) + (x-1)f'(x) = (f'(x))'x + f'(x)x' \Leftrightarrow ((x-1)f(x))' = (xf'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(x-1)f(x) = xf'(x) + c_1 \xRightarrow{x=1} 0 = f'(1) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Έτσι είναι :

$$(x-1)f(x) = xf'(x) \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad f'(x) = \frac{x-1}{x} f(x) \Leftrightarrow f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + (\ln x - x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) e^{\ln x - x} + e^{\ln x - x} (\ln x - x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) e^{\ln x - x})' = 0 \Leftrightarrow f(x) e^{\ln x - x} = c_2 \xRightarrow{x=1} f(1) e^{-1} = c_2 \Leftrightarrow c_2 = e \cdot e^{-1} \Leftrightarrow c_2 = 1$$

.

$$\text{Άρα } f(x) e^{\ln x - x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0}.$$

1342. Είναι :

$$(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 - 2f'(x) + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f'(x) - 1)^2 + \frac{1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow (f'(x) - 1)^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Θέτουμε $g(x) = f'(x) - 1$ οπότε έχουμε $g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Παρατηρούμε πως για $x \neq 0$ είναι $\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$.

Επιπλέον η g είναι συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, και ισχύει :

$$\begin{aligned} - \quad g(-1) &= f'(-1) - 1 < 0 \text{ άρα και } g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0), \text{ δηλαδή} \\ g(x) &= -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow \\ f'(x) &= 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ για } x < 0. \\ - \quad g(1) &= f'(1) - 1 > 0 \text{ άρα και } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty), \text{ δηλαδή} \\ g(x) &= \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow \\ f'(x) &= 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ για } x > 0. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Για $x=0$ είναι :

$$(f'(0))^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f'(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1.$$

Οπότε έχουμε :

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow (f(x))' = (x + \sqrt{x^2+1})' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + c \xrightarrow{x=0} f(0) = 1 + c \Leftrightarrow \lambda = \lambda + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Συνεπώς $\boxed{f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}}$.

1343. Έχουμε :

$$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)f'(x) + f(x)f''(x) = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$(f(x)f'(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow f(x)f'(x) = e^{2x} + c \xrightarrow{x=0} f(0)f'(0) = 1 + c \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \lambda + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Έτσι είναι :}$$

$$f(x)f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = e^{2x} + c_1 \xrightarrow{x=0} f^2(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow \lambda = \lambda + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Είναι τελικά $f^2(x) = e^{2x} \neq 0$. Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς $\boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}$.

1344. Έχουμε :

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)f''(x) &= 2(1 - xf'(x)) \Leftrightarrow x^2 f''(x) + f''(x) - 2 + 2xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 (f'(x))' + (x^2)' f'(x) + f''(x) - 2 &= 0 \Leftrightarrow (x^2 f'(x) + f'(x) - 2x)' = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 f'(x) + f'(x) - 2x &= c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f'(0) = c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Έτσι είναι :} \\ x^2 f'(x) + f'(x) - 2x &= 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) = 2x \stackrel{x^2+1 \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \\ f'(x) &= (\ln(x^2 + 1))' \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2 + 1) + c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0. \\ \text{Άρα } \boxed{f(x) = \ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

1345. i. Η $f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και

η $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Αποδείξαμε λοιπόν πως η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έχουμε :

$$\begin{aligned} f''(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \\ f''(x) &= \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}, x > 0 \end{aligned}$$

αφού από την αρχική σχέση έχουμε $f'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{x=\frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x).$

ii. Έχουμε :

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{xf'(x) - x^2 f'(x)}{x^2} \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = f(1) + c \Leftrightarrow \cancel{f'(1)} = \cancel{f(1)} + c \Leftrightarrow c = 0,$$

όπου $f'(1) = 1 \cdot f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1).$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{f(x)}{x} \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - x^2 f'(x) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{xf'(x) - x^2 f'(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

Οπότε $\frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x, x > 0}.$

1346. Έχουμε :

$$f''(x) = e^{2f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)e^{2f(x)} \Leftrightarrow \left[(f'(x))^2 \right]' = (e^{2f(x)})' \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 = e^{2f(x)} + c_1 \xrightarrow{x=1} (f'(1))^2 = e^{2f(1)} + c_1 \Leftrightarrow (-1)^2 = e^0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Άρα $(f'(x))^2 = e^{2f(x)} \neq 0$.

Η f' είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) \neq 0$, άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού έχουμε και $f'(1) = -1 < 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.
Συνεπώς $f'(x) = -e^{f(x)}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = -e^{f(x)} \Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{-f(x)})' = x' \Leftrightarrow e^{-f(x)} = x + c_2 \xrightarrow{x=1} e^{-f(1)} = 1 + c_2 \Leftrightarrow e^0 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

Άρα $e^{-f(x)} = x \Leftrightarrow -f(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -\ln x, x > 0}$.

1347. Έχουμε : $f''(x) = f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) \Leftrightarrow$

$$(f(x) + f'(x))' = f(x) + f'(x) \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = c_1 e^x \xrightarrow{x=0} f(0) + f'(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2. \text{ Άρα :}$$

$$f(x) + f'(x) = 2e^x \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = e^{2x} + c_2 \xrightarrow{x=0} f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

Άρα $e^x f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}$.

1348. i. Έχουμε :

$$f''(x) - f(x) = (4x + 2)e^x \Leftrightarrow f''(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 4x + 2 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} + f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 4x + 2 \Leftrightarrow$$

$$(f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x})' = (2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} = 2x^2 + 2x + c_1 \xrightarrow{x=0} f'(0) + f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0. \text{ Άρα } f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} = 2x^2 + 2x. \text{ Έτσι είναι :}$$

$$f'(x)e^x + f(x)e^x = 2x^2 e^{2x} + 2xe^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (x^2 e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x = x^2 e^{2x} + c_2 \xrightarrow{x=0} f(0) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

Άρα $f(x)e^x = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^2 e^x, x \in \mathbb{R}}$.

ii. Είναι $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$, οπότε $f'(-1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -\frac{1}{e}$, $f'(0) = 0$ και

$$f'(1) = 2e + e = 3e.$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f' στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

— Η f' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(0) - f'(-1)}{0 - (-1)} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{e}\right)}{1} = \frac{1}{e}.$$

– Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = \frac{3e - 0}{1} = 3e.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = \frac{1}{e} \cdot 3e \neq 3 \Leftrightarrow f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 3.$$

1349. i. Έστω ότι υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$.

$$4f''(\rho)(f(\rho))^3 = -1 \Leftrightarrow 4f''(\rho) \cdot 0^3 = -1 \Leftrightarrow 0 = -1.$$

Άτοπο, άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.

ii. Έχουμε :

$$4f''(x)(f(x))^3 = -1 \Leftrightarrow 4f''(x)(f(x))^3 \cdot f'(x) = -f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4f''(x)f'(x) = -f'(x)(f(x))^{-3} \Leftrightarrow \left[2(f'(x))^2\right]' = \left[-\frac{(f(x))^{-2}}{-2}\right]' \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x))^2 = -\frac{(f(x))^{-2}}{-2} + c_1 \xrightarrow{x=1} 2(f'(1))^2 = \frac{(f(1))^{-2}}{2} + c_1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^{-2}}{2} + c_1 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

$$\text{Άρα } 2(f'(x))^2 = \frac{(f(x))^{-2}}{2} \Leftrightarrow 4f^2(x)(f'(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (2f(x)f'(x))^2 = 1.$$

iii. Οι συναρτήσεις f και f' είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς, συνεπώς και η $2f(x)f'(x)$ είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Ισχύει $2f(x)f'(x) \neq 0$ για $x > 0$, άρα η $2f(x)f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού

$$\text{έχουμε και } 2f(1)f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 > 0 \text{ συμπεραίνουμε ότι } 2f(x)f'(x) > 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in (0, +\infty)$. Έτσι έχουμε :

$$2f(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^2(x))' = x' \Leftrightarrow f^2(x) = x + c_1 \xrightarrow{x=1} f^2(1) = 1 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0. \text{ Άρα } f^2(x) = x \neq 0, \text{ αφού } x > 0.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και αφού έχουμε και $f(1) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε

$$x \in (0, +\infty). \text{ Συνεπώς } \boxed{f(x) = \sqrt{x}, x > 0}.$$

1350. Είναι :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f'(x-h) + f'(x)}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x-h) - f'(x)}{2h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} f''(x) - \left(-\frac{1}{2} f''(x) \right) = f''(x),\end{aligned}$$

αφού :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{2h} \stackrel{u=-h}{\underset{u \rightarrow 0}{=}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{-2u} = -\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{u} = -\frac{1}{2} f''(x)$$

Έτσι έχουμε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = 4 \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow f''(x) = 4 \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' = \left(4 \frac{\ln x}{x} + 2x \right)' \Leftrightarrow f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x + c_1 \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 2 + c_1 \Leftrightarrow c = -2$$

Έτσι είναι :

$$f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = 4(\ln x)' \ln x + 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$(f(x))' = (2 \ln^2 x + x^2 - 2x)' \Leftrightarrow f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x + c_2 \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f(1) = 1 - 2 + c_2 \Leftrightarrow -1 = -1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

$$\text{Άρα } \boxed{f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x, x > 0}.$$

1351. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$f'''(x) = \frac{2-x}{x^3} \Leftrightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'''(x) = 2x^{-3} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(f''(x))' = \left(-x^{-2} + \frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow f''(x) = -x^{-2} + \frac{1}{x} + c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f''(1) = -1 + 1 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 = 0.$$

Οπότε έχουμε :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + \ln x + c_2 \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f'(1) = 1 + c_2 \Leftrightarrow 2 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Έτσι παίρνουμε :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln x + 1 \Leftrightarrow (f(x))' = (\ln x + x \ln x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln x + x \ln x + c_3 \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f(1) = c_3 \Leftrightarrow c_3 = 0.$$

Άρα

$$f(x) = \ln x + x \ln x \Leftrightarrow f(x) = (x+1) \ln x, x > 0.$$

Μορφή $\frac{0}{0}$

1352. i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{4e^{4x}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4e^0}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{4}{1} = 4.$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\eta\mu^2 x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x} = \frac{e^0}{2\sigma\upsilon\nu^2 0 - 2\eta\mu^2 0} = \frac{1}{2}.$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}{2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - 1 - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{e^x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} = \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{e^0} = 1.$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + e^{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x}{\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + e^{\eta\mu x} \cdot 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x + e^{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} =$
 $= \frac{e^0 - e^{\eta\mu 0} \cdot \sigma\upsilon\nu^3 0 - e^{\eta\mu 0} \cdot 2\sigma\upsilon\nu 0 \cdot \eta\mu 0 + e^{\eta\mu 0} \cdot \eta\mu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 + e^{\eta\mu 0} \cdot \sigma\upsilon\nu 0}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1' - 1' + 1}{1} = 1.$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\eta\mu x - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right)}{x\eta\mu x - x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\eta\mu x + x}{\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}}}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - 2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x + x}{\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right)(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-\eta\mu x + x}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - 2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x + x}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - 2x} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4},$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0 + \frac{0^2}{2}} = 1 \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x + x}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - 2x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-\sigma\upsilon\nu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{-2\eta\mu x - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{-3\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{-3\frac{\eta\mu x}{x} - \sigma\upsilon\nu x} = \\ &= \frac{1}{-3 \cdot 1 - 1} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ix. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^3 \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^4 \frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^4} = 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^4} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-xe^{\frac{1}{2}x^2} + \eta\mu x}{4x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-e^{\frac{1}{2}x^2} + x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} + \sigma\upsilon\nu x}{12x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-\frac{1}{2}x^2} + 2xe^{-\frac{1}{2}x^2} - x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} - \eta\mu x}{24x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xe^{-\frac{1}{2}x^2} - x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} - \eta\mu x}{24x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{\eta\mu x}{x}}{24} = \frac{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - 1}{24} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{1353. i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right) = 1 + 1 + 1^2 = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \eta\mu^3 x}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)(x^2 + x\eta\mu x + \eta\mu^2 x)}{x^5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \cdot \frac{x^2 + x\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right) = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right) = 1 + 1 + 1^2 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

$$\textbf{1354. i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = \mathbf{0}.$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{e^{x^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x^2}} = \frac{2}{+\infty} = \mathbf{0},$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \stackrel{u=x^2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty.$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{2x + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \mathbf{1}.$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \stackrel{e^x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = \mathbf{1}.$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{+\infty} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{vi. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+e^{-x})} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot (-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1-x}{e^{-x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^{-x}}{e^{-x}(1-x)} \stackrel{e^x}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{1-x} = \frac{0+1}{1-(-\infty)} = \frac{1}{+\infty} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x \ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)} = \lim_{x \rightarrow 2} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)} = e^2 \cdot 1 = \mathbf{e^2}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 2} e^x = e^2$$

$$\begin{aligned} \text{και } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)} &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{1}{e^x - e^2} e^x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{e^x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{e^x}(1 - e^{2-x})}{\cancel{e^x}(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - e^{2-x}}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 2} \frac{e^{2-x}}{1} = e^0 = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu 3x)}{\ln(\eta\mu 5x)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3\sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu 3x}}{\frac{5\sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu 5x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sigma\upsilon\nu 3x \cdot \eta\mu 5x}{5\sigma\upsilon\nu 5x \cdot \eta\mu 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sigma\upsilon\nu 3x}{5\sigma\upsilon\nu 5x} \cdot \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma \nu 3x}{\sigma \nu 5x} \cdot \frac{5 \frac{\eta \mu 5x}{5x}}{3 \frac{\eta \mu 3x}{3x}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} = 1,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu 5x}{5x} \stackrel{u=5x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{\eta \mu u}{u} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu 3x}{3x} \stackrel{u=3x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{\eta \mu u}{u} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{ix. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\varepsilon \varphi x)}{\ln(\eta \mu x)} &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{1}{\varepsilon \varphi x} \cdot \frac{1}{\sigma \nu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\sigma \nu x} \cdot 1}{\eta \mu x \cdot \cancel{\sigma \nu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\eta \mu x}}{\cancel{\eta \mu x} \cdot \sigma \nu^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma \nu^2 x} = \frac{1}{\sigma \nu^2 0} = 1. \end{aligned}$$

Μ ο ρ φ ή 0 · ∞

$$\text{1355. i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (2 - x^2) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^2}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{-2x}{-e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{-2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x) = -2 \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x &\stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{3x^2}{-e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{6x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{6}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-6e^x) = \\ &= (-6) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varepsilon \varphi x \cdot \ln x) &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\varepsilon \varphi x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sigma \varphi x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\eta \mu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\eta \mu^2 x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \eta \mu x \right) = -1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta \mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\eta \mu x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-\sigma \nu x}{\eta \mu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \eta \mu^2 x}{x^2 \cdot \sigma \nu x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sigma \nu x} \cdot \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\sigma \nu x} \cdot \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = (+\infty) \cdot \frac{1}{1} \cdot 1^2 = +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{v. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{2} \ln x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\frac{-1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{2 \ln x}{\frac{-1}{x}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0.$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0^+}} e^u = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x \cdot \ln x) &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta \mu x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu^2 x}{-x \sigma \upsilon \nu x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \varepsilon \varphi x \right) = -1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) &\stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x \cdot \ln^2 x}{x+1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x+1} \cdot x \cdot \ln^2 x \right) = -\frac{1}{1} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\text{DLH}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0. \end{aligned}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{-\frac{1}{x^4} \cdot 2x}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{x^4} \cdot 2x \right)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{u = \frac{1}{x^2}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty.$$

$$\begin{aligned}
 \text{x i. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(e^{x-1} - 1) \cdot \ln(x-1) \right] & \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{e^{x-1} - 1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{e^{x-1} - 1}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{(e^{x-1} - 1)^2}{(x-1)e^{x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{e^{x-1}} \cdot \frac{(e^{x-1} - 1)^2}{x-1} \right) = -\frac{1}{1} \cdot 0 = 0, \\
 \text{όπου } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(e^{x-1} - 1)^2}{x-1} & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(e^{x-1} - 1)e^{x-1}}{1} = 2 \cdot (e^0 - 1) \cdot e^0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{x i i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \ln x \right] & \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2}{-\cancel{x} \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot e^{\frac{1}{x}}} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \right) \cdot x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2 = -1 \cdot 0 = 0,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 0}} e^u = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2 & \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \left(-e^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \left(-\cancel{\frac{1}{x^2}} \right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \left(-e^{\frac{1}{x}} \right) = 2 \cdot (1-1) \cdot (-1) = 0.
 \end{aligned}$$

Μορφή $\infty - \infty$

$$\begin{aligned}
 \text{1356. i. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) & \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{x \ln x + x-1}{\cancel{x}}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{0+1+1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{1}{x-e} - \frac{1}{\ln x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x - 1 - x + e}{(x-e)(\ln x - 1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x - 1 + (x-e) \frac{1}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x \ln x - x + x - e}{x}} = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1-x}{x \ln x - e} \stackrel{\left(\frac{1-e}{0^+}\right)}{1-e < 0} = -\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x} = \\
 &= \frac{0}{1+1} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 \eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)(x + \eta\mu x)}{x^2 \eta\mu^2 x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x^2 \eta\mu x} \cdot \frac{x + \eta\mu x}{\eta\mu x} \right) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^2 \eta\mu x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{2x\eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x + 2x\sigma\upsilon\nu x - x^2 \eta\mu x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2\eta\mu x + 4x\sigma\upsilon\nu x - x^2 \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{2\frac{\eta\mu x}{x} + 4\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 \ln x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{1+0}{0^+}\right)}{=} +\infty$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^4}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{1+0}{0^+}\right)}{=} +\infty,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} =$$

$$= \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - e - x + 1}{(x-1)(e^x - e)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{e^x - e + e^x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{\cancel{e^x} - e + xe^x - \cancel{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{-e + xe^x} \stackrel{\left(\frac{e-1}{0^+}\right)}{e-1 > 0} = +\infty.$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1 - \sigma \nu x} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1 + \sigma \nu x}{x(1 - \sigma \nu x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \eta \mu x}{1 - \sigma \nu x + x \eta \mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}}$$

$$(\alpha \phi \acute{o} \upsilon \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - \sigma \nu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta \mu x} = +\infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sigma \nu x}{\eta \mu x + \eta \mu x + x \sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sigma \nu x}{2 \eta \mu x + x \sigma \nu x} \stackrel{\left(\frac{2-1}{0^+}\right)}{=} +\infty.$$

$$\mathbf{1357.} \quad \text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) = (+\infty)(1-0) = +\infty,$$

$$\acute{o} \pi \nu \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{2}{+\infty}\right)}{=} 0.$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - e^x) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right) = (+\infty)(0-1) = -\infty,$$

$$\acute{o} \pi \nu \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} \stackrel{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0.$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2 + 1)) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \right) = (-\infty)(1+0) = -\infty,$$

$$\acute{o} \pi \nu \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^{x+1}) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+1} \left(\frac{e^{2x}}{e^{x+1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+1} (e^{x-1} - 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\acute{o} \pi \nu \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+1} \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$$

$$\text{και} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - 1) \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (e^u - 1) = (+\infty) - 1 = +\infty.$$

$$\text{v.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 1) - e^{x^2+1}) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+1} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{e^{x^2+1}} - 1 \right) = (+\infty) \cdot (0 - 1) = -\infty,$$

$$\text{όπου} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+1} \stackrel{u=x^2+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$$

$$\text{και} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{e^{x^2+1}} \stackrel{u=x^2+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{\ln u}{e^u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{ue^u} \stackrel{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0.$$

$$\text{vi.} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - \ln x^2) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (1 - e^x \ln x^2) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty,$$

$$\text{όπου} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$$

$$\text{και} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln x^2 \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{xe^{-x}} \right) = -\frac{2}{-\infty} = 0,$$

$$\text{αφού} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (-ue^u) = -(+\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

$$\text{vii.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} \ln(1 + e^u) = \ln(1 + 0) = 0.$$

$$\text{viii.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) \stackrel{u=-2x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} \ln(1 + e^u) = \ln(1 + 0) = 0.$$

$$\text{ix.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e - x \ln(x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - e^{1-x} - \frac{x \ln(x-1)}{e^x} \right) = (+\infty) \cdot (1 - 0 - 0) = +\infty,$$

$$\text{όπου} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x-1)}{e^x} &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1) + \frac{x}{x-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1) + \frac{x-1+1}{x-1}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1) + 1 + \frac{1}{x-1}}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1-1}{(x-1)^2}}{e^x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{e^x (x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x (x-1)^2 + 2e^x (x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 e^x - 2x e^x + e^x + 2x e^x - 2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 e^x - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0 \cdot 0 = 0, \\
&\quad (\alpha\text{φού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0).
\end{aligned}$$

1358. i. Η συνάρτηση $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{e^{\sqrt{\beta}} - e^{\sqrt{a}}}{\beta - a}.$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{e^x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^{\sqrt{x^2+1}-x} - 1) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^{f(x^2+1)-f(x^2)} - 1).
\end{aligned}$$

Θα βρούμε τη μονοτονία της f . Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow e^{\sqrt{x_1}} < e^{\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Έτσι έχουμε : Για κάθε $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
\text{είναι } x^2 < x^2 + 1 &\stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x^2) < f(x^2 + 1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) - f(x^2) > 0 \Leftrightarrow \\
e^{f(x^2+1)-f(x^2)} &> e^0 \Leftrightarrow e^{f(x^2+1)-f(x^2)} - 1 > 0 \text{ δηλαδή είναι θετική μη μηδενική ποσότητα.}
\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^{f(x^2+1)-f(x^2)} - 1) &= (+\infty) \cdot (\text{θετική ποσότητα}) = +\infty, \text{ οπότε και} \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x) &= +\infty.
\end{aligned}$$

1359. i. Στη σχέση $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1$ βάζουμε όπου $x=y=1$:

$$f(1) = f(1) + f(1) - 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow f(1) = 1. \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1 - x + 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 1} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 1}.$$

ii. Τη δοθείσα σχέση $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1$ την παραγωγίζουμε ως προς y και παίρνουμε $xf'(xy) = 2yf(x) + x^2 f'(y) - 2y$, κι έπειτα θέτουμε όπου $y=1$

$$xf'(x) = 2f(x) + x^2 f'(1) - 2 \Leftrightarrow xf'(x) = 2f(x) + x^2 - 2 \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2.$$

iii. Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^3 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{x^3 - 2x}{x^4} \Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - (x^2)' f(x)}{x^4} = \frac{1}{x} - 2x^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = (\ln|x| + x^{-2})' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| + x^{-2} + c \xrightarrow{x=1} f(1) = 1 + c \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| + x^{-2} \Leftrightarrow f(x) = x^2 \ln|x| + 1.$$

Επιπλέον αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχουμε: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln|x| + 1) = 1.$

$$\text{Έτσι βρήκαμε } f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Συνέχεια, παραγωγισιμότητα & DeL' Hospital

1360. Για να είναι συνεχής η f αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$

Έτσι έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1-\sin x} + x) = e^{1-1} + 0 = 1, f(0) = e^0 + 0 = 1$ και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{e^x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + xe^x}{e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) = 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$. Έχουμε την f συνεχή αριστερά και δεξιά του μηδενός ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και αποδείξαμε πως είναι συνεχής και στο 0, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1361. i. Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $x_0 = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1.$$

Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1^-} \frac{2 - 2x}{1} = 2 - 2 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

ii. Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $x_0 = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(0) = 1 + 0 - 0^2 = 1.$$

Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + x - x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + x^2 - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x) = e^0 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1.$$

iii. Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $x_0 = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(1) = 0. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu^2(\pi x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu^2(\pi x)}{(x - 1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\eta\mu(\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \pi}{2(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi^2 \sigma\upsilon\nu^2(\pi x) - \pi^2 \eta\mu^2(\pi x)}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\pi^2 \sigma\upsilon\nu^2(\pi x) - \pi^2 \eta\mu^2(\pi x)) = \pi^2 \sigma\upsilon\nu^2 \pi - \pi^2 \eta\mu^2 \pi = \pi^2 \cdot 1^2 - \pi^2 \cdot 0^2 = \pi^2. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \pi^2 \Leftrightarrow f'(1) = \pi^2$.

1362. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τα $f(1)$ και $f'(1)$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |f(x) - \ln x| &\leq (x - 1)^2 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 \leq f(x) - \ln x \leq (x - 1)^2 \Leftrightarrow \\ &-(x - 1)^2 + \ln x \leq f(x) \leq (x - 1)^2 + \ln x. \end{aligned}$$

Για $x=1$ παίρνουμε $0 \leq f(1) \leq 0$, δηλαδή $f(1) = 0$.

Τη σχέση $-(x - 1)^2 + \ln x \leq f(x) \leq (x - 1)^2 + \ln x$ θα τη διαιρέσουμε με $x - 1$, έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

– Για $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ είναι :

$$\frac{-(x-1)^2 + \ln x}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{(x-1)^2 + \ln x}{x-1} \Leftrightarrow -(x-1) + \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq x-1 + \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-(x-1) + \frac{\ln x}{x-1} \right) = -0 + 1 = 1, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1,$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x-1 + \frac{\ln x}{x-1} \right) = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$\text{άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 1.$$

– Για $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0$ είναι :

$$\frac{-(x-1)^2 + \ln x}{x-1} \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq \frac{(x-1)^2 + \ln x}{x-1} \Leftrightarrow -(x-1) + \frac{\ln x}{x-1} \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq x-1 + \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-(x-1) + \frac{\ln x}{x-1} \right) = -0 + 1 = 1, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1,$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x-1 + \frac{\ln x}{x-1} \right) = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$\text{άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 1.$$

$$\text{Έτσι βρήκαμε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(1) = 1}}.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη λοιπόν είναι η $\boxed{y = x - 1}$.

$$\mathbf{1363.} \text{ Έχουμε : } xf(x) + e^{\eta_{\mu x}} = f(x)\eta_{\mu x} + e^x \Leftrightarrow xf(x) - f(x)\eta_{\mu x} = e^x - e^{\eta_{\mu x}} \Leftrightarrow$$

$$(x - \eta_{\mu x})f(x) = e^x - e^{\eta_{\mu x}}. \text{ Για } x \neq 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}}}{x - \eta_{\mu x}}.$$

Μένει να βρούμε το $f(0)$. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε είναι και στο 0, οπότε :

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}}}{x - \eta_{\mu x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}} \cdot \sigma_{\nu\eta x}}{1 - \sigma_{\nu\eta x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}} \cdot \sigma_{\nu\eta}^2 x + e^{\eta_{\mu x}} \cdot \eta_{\mu x}}{\eta_{\mu x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}} \cdot \sigma_{\nu\eta}^3 x + 2e^{\eta_{\mu x}} \cdot \sigma_{\nu\eta x} \cdot \eta_{\mu x} + e^{\eta_{\mu x}} \cdot \eta_{\mu x} \cdot \sigma_{\nu\eta x} + e^{\eta_{\mu x}} \cdot \sigma_{\nu\eta x}}{\sigma_{\nu\eta x}} = \\ &= \frac{e^0 - e^{\eta_{\mu 0}} \cdot \sigma_{\nu\eta}^3 0 + 2e^{\eta_{\mu 0}} \cdot \sigma_{\nu\eta 0} \cdot \eta_{\mu 0} + e^{\eta_{\mu 0}} \cdot \eta_{\mu 0} \cdot \sigma_{\nu\eta 0} + e^{\eta_{\mu 0}} \cdot \sigma_{\nu\eta 0}}{\sigma_{\nu\eta 0}} = \\ &= \frac{1 - 1 + 1}{1} = 1. \text{ Έτσι είναι } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}}}{x - \eta_{\mu x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

1364. i. Θετούμε $g(x) = \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$. Οπότε :

$$g(x) = \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} \Leftrightarrow \eta\mu 2x \cdot g(x) = f(x) - e^{2x} + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x)\eta\mu 2x + e^{2x} - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x)\eta\mu 2x + e^{2x} - 1) = 5 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$$

Αφού λοιπόν η f είναι συνεχής, τότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 0}$.

ii. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\eta\mu 2x + e^{2x} - 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)\eta\mu 2x + e^{2x} - 1}{x} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\eta\mu 2x + e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)\eta\mu 2x}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2g(x) \frac{\eta\mu 2x}{2x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2 = 12 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{u=2x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 \cdot e^0 = 2.$$

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

iii. Για να δείξουμε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0) = h'(0)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έτσι έχουμε : $h(x) = e^{-x}f(x) \Rightarrow h'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)$.

Για $x=0$ είναι $h'(0) = -e^0 f(0) + e^0 f'(0) \Leftrightarrow h'(0) = f'(0)$, άρα οι εφαπτομένες των C_f και C_h στα σημεία A και B αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Εύρεση παραμέτρων

1365. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ και

$$\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \beta}{x} \text{ αφού}$$

$$f(0) = \beta + \ln(1 + 0^4) = \beta. \text{ Έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \beta}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta + \ln(1 + x^4) - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + x^4)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4x^3}{1+x^4}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{0}{1} = 0, \text{ και} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta}{x}.$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta}{x}$ πρέπει να είναι

πραγματικός αριθμός, και αφού το $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ τότε πρέπει να είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta) = 0 \text{ γιατί διαφορετικά θα είχαμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta}{x} = \pm \infty, \text{ πράγμα άτοπο. Οπότε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta) = 0 \Leftrightarrow 2 - \beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2}. \text{ Επιπλέον έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \beta}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x + 2 - \beta}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \alpha x - \eta \mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 + \alpha - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow 0 + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}.$$

1366. i. Αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - \alpha) + \beta e^x - 1}{x^2}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ τότε

πρέπει να είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} (x(e^x - \alpha) + \beta e^x - 1) = 0$ γιατί διαφορετικά θα είχαμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - \alpha) + \beta e^x - 1}{x^2} = \pm \infty, \text{ πράγμα άτοπο.}$$

Έτσι έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} (x(e^x - \alpha) + \beta e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$. Συνεπώς :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - \alpha) + \beta e^x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - \alpha) + e^x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \alpha + x e^x + e^x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - \alpha + x e^x}{2x}. \end{aligned}$$

Για άλλη μία φορά, αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - \alpha + x e^x}{2x}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι και

$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ τότε πρέπει να είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - \alpha + x e^x) = 0$ γιατί διαφορετικά θα

είχαμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - \alpha + x e^x}{2x} = \pm \infty$, άτοπο.

Έτσι έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - \alpha + x e^x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$.

ii. Αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι και

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = 0$ τότε πρέπει να είναι και $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4) = 0$ γιατί

διαφορετικά θα είχαμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1} = \pm \infty$, άτοπο.

$$\text{Έτσι έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = -5 - \alpha}}.$$

Συνεπώς :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} + (-5 - \alpha)x + 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} - 5x - \alpha x + 4}{x^2 - 2x + 1} = \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - \alpha e^{1-x} - 5 - \alpha}{2x - 2}. \end{aligned}$$

Για άλλη μία φορά, αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - \alpha e^{1-x} - 5 - \alpha}{2x - 2}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 2) = 0 \text{ τότε πρέπει να είναι και } \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - \alpha e^{1-x} - 5 - \alpha) = 0 \text{ γιατί}$$

διαφορετικά θα είχαμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - \alpha e^{1-x} - 5 - \alpha}{2x - 2} = \pm\infty$, άτοπο.

$$\text{Έτσι έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - \alpha e^{1-x} - 5 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha - 5 - \alpha = 0 \Leftrightarrow -2\alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha = -1} \text{ και } \beta = -5 - \alpha \Leftrightarrow \beta = -5 + 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -4}.$$

1367. i. Αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin x + \beta \sin 2x - 1}{x^2}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

τότε πρέπει να είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha \sin x + \beta \sin 2x - 1) = 0$ γιατί διαφορετικά θα είχαμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin x + \beta \sin 2x - 1}{x^2} = \pm\infty, \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha \sin x + \beta \sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 1 - \alpha}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin x + \beta \sin 2x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin x + (1 - \alpha) \sin 2x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\alpha \eta \mu x - 2(1 - \alpha) \eta \mu 2x}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\alpha \sin x - 4(1 - \alpha) \sin 2x}{2} = \frac{-\alpha - 4(1 - \alpha)}{2} = \\ &= \frac{-\alpha - 4 + 4\alpha}{2} = \frac{3\alpha - 4}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin x + \beta \sin 2x - 1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{3\alpha - 4}{2} = 4 \Leftrightarrow 3\alpha - 4 = 8 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 4}, \text{ και}$$

$$\beta = 1 - \alpha \Leftrightarrow \beta = 1 - 4 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -3}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\alpha}{e^x - 1} - \frac{\beta}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x(e^x - 1) - 2\alpha x - \beta x(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x(e^x - 1) + 2e^x \cdot e^x - 2\alpha - \beta(e^x - 1) - \beta x e^x}{2(e^x - 1) + 2x e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{2x} - 2e^x + 2e^{2x} - 2\alpha - \beta e^x + \beta - \beta x e^x}{2e^x - 2 + 2x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4e^{2x} - 2e^x - 2\alpha - \beta e^x + \beta - \beta x e^x}{2e^x - 2 + 2x e^x}. \end{aligned}$$

Αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\alpha}{e^x - 1} - \frac{\beta}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4e^{2x} - 2e^x - 2\alpha - \beta e^x + \beta - \beta x e^x}{2e^x - 2 + 2x e^x}$ υπάρχει

στο $\mathbb{R}$ και είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^x - 2 + 2x e^x) = 0$ τότε πρέπει να είναι και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4e^{2x} - 2e^x - 2\alpha - \beta e^x + \beta - \beta x e^x) = 0$ γιατί διαφορετικά θα είχαμε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\alpha}{e^x - 1} - \frac{\beta}{2} \right) = \pm \infty$, άτοπο. Έτσι έχουμε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4e^{2x} - 2e^x - 2\alpha - \beta e^x + \beta - \beta x e^x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2 - 2\alpha - \beta + \beta = 0 \Leftrightarrow$

$2\alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$. Συνεπώς :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4e^{2x} - 2e^x - 2\alpha - \beta e^x + \beta - \beta x e^x}{2e^x - 2 + 2x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4e^{2x} - 2e^x - 2 - \beta e^x + \beta - \beta x e^x}{2e^x - 2 + 2x e^x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8e^{2x} - 2e^x - \beta e^x - \beta e^x - \beta x e^x}{2e^x + 2e^x + 2x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8e^{2x} - 2e^x - 2\beta e^x - \beta x e^x}{4e^x + 2x e^x} \stackrel{e^x}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8e^x - 2 - 2\beta - \beta x}{4 + 2x} = \frac{8 - 2 - 2\beta}{4} = \frac{6 - 2\beta}{4} = \frac{3 - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\alpha}{e^x - 1} - \frac{\beta}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 - \beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 3}$.

1368. i. Είναι : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{-x+1} = 1$.

ii. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

Βρίσκουμε : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + \alpha) = 1 + \alpha = f(1)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(1 - e^{-x+1}) \ln(x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1} \cdot (x - 1) \ln(x - 1) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \ln(x - 1) = 1 \cdot 0 = 0, \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \ln(x - 1) \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x - 1)}{\frac{1}{x - 1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x - 1}}{\frac{-1}{(x - 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^2}{-(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0.$$

Έτσι έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$.

iii. Για $\alpha = -1$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x - 1), & x \in (1, 2] \end{cases}$

Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο $A(\xi, f(\xi))$, όπου $\xi \in (1, 2)$, είναι παράλληλη στον $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\xi) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f(1) = 0 = f(2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

1369. α. Είναι : $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $z(x) = f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ με

$$z'(x) = f''(x) \cdot \eta\mu x + \cancel{f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \cancel{f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x} + f(x) \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$z'(x) = f''(x) \cdot \eta\mu x + f(x) \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow z'(x) = \eta\mu x (f''(x) + f(x)) \Leftrightarrow z'(x) = 0,$$

οπότε θα είναι

$$z(x) = c \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} z\left(\frac{\pi}{2}\right) = c \Leftrightarrow \cancel{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}} = c \Leftrightarrow c = 0.$$

Βρήκαμε λοιπόν πως $z(x) = 0$ άρα και $g'(x) = 0$, συνεπώς η g είναι σταθερή.

β. Έχουμε :

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot h(x) = h'(x) \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{h(x)} \right)' = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$, $x \in (0, \pi)$.

Αφού η g σταθερή τότε θα είναι $g(x) = c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = c \Leftrightarrow f(x) = c\eta\mu x$.

Η H είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $H'(x) = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$ και

$$H(0) = \frac{f(0)}{h(0)} = \frac{c\eta\mu 0}{h(0)} = 0, \quad H(\pi) = \frac{f(\pi)}{h(\pi)} = \frac{c\eta\mu \pi}{h(\pi)} = 0.$$

Έχουμε λοιπόν και

$H(0) = H(\pi)$ οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (0, \pi) \text{ τέτοιο ώστε } H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(\xi)}{h(\xi)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

γ. i. Είναι $f(x) = c\eta\mu x$ με $f(0) = 0$ με $f'(x) = c\sigma\upsilon\nu x$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \lambda x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + \lambda}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x + \lambda}{3x^2}.$$

Αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \lambda x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x + \lambda}{3x^2}$ υπάρχει και είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$ τότε

πρέπει να είναι και $\lim_{x \rightarrow 1} (\csc x + \lambda) = 0$ γιατί διαφορετικά θα είχαμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \lambda x}{x^3} = \pm \infty, \text{ άτοπο.}$$

Έτσι έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} (\csc x + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \csc + \lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = -\csc}}$. Οπότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \lambda x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \csc}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-\csc x}{6x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-\csc x}{6} = \frac{-\csc 0}{6} = -\frac{\csc}{6} \Leftrightarrow \\ &-\frac{1}{6} = -\frac{\csc}{6} \Leftrightarrow \csc = 1. \text{ Άρα } \boxed{f(x) = \eta \mu x, x \in (0, \pi)}. \end{aligned}$$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\chi \eta \mu x - 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, \pi)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \chi \eta \mu x - 1$ η οποία είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $\varphi(0) = 0 \cdot \eta \mu 0^0 - 1 = -1 < 0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} > 0$ και

$$\varphi(\pi) = \pi \cdot \eta \mu \pi^0 - 1 = -1 < 0.$$

– Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_1) = 0.$$

– Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και ισχύει $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \varphi(\pi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_2) = 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{x}$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, \pi)$. Μένει να δείξουμε ότι οι δύο αυτές λύσεις είναι μοναδικές.

Η εξίσωση $\chi \eta \mu x - 1 = 0$ γράφεται και $\eta \mu x - \frac{1}{x} = 0$.

Θεωρούμε την εξίσωση $\Phi(x) = \eta \mu x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, \pi)$.

Έστω ότι η Φ έχει τρεις ρίζες στο $(0, \pi)$, τις ρ_1, ρ_2 και ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Έτσι θα είναι $\Phi(\rho_1) = \Phi(\rho_2) = \Phi(\rho_3) = 0$.

– Η Φ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως αποτέλεσμα

πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\Phi'(x) = \sin x + \frac{1}{x^2}$ και

$\Phi(\rho_1) = \Phi(\rho_2)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\Phi'(\xi_1) = 0$.

– Η Φ είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) ως αποτέλεσμα

πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\Phi'(x) = \sin x + \frac{1}{x^2}$ και

$\Phi(\rho_2) = \Phi(\rho_3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3) \subseteq (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\Phi'(\xi_2) = 0$.

Έπειτα εφαρμόζουμε ξανά Rolle για την Φ' :

Η Φ' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\Phi''(x) = -\eta \mu x - \frac{2}{x^3}$ και $\Phi'(\xi_1) = \Phi'(\xi_2)$, οπότε

σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0, \pi)$

τέτοιο ώστε $\Phi''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\eta \mu x_0 - \frac{2}{x_0^3} = 0$, άτοπο αφού $-\eta \mu x_0 - \frac{2}{x_0^3} < 0$ για

κάθε $x \in (0, \pi)$.

Επομένως η εξίσωση $\eta \mu x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = \frac{1}{x}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, \pi)$,

δηλαδή η C_f και η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία στο διάστημα $(0, \pi)$.

Όταν δεν γνωρίζουμε αν είναι συνεχείς οι $f'(x), f''(x)$

1370. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{f(-x)}{-x}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{f'(0) - (-f'(0))}{1} = f'(0) + f'(0) = 2f'(0),$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-\frac{f(u)}{u} \right) = -f'(0)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

1371. i. Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-1}{x^2}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4$. Οπότε :

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \cdot g(x) = f(x)-1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 \cdot g(x) + 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot g(x) + 1) = 0 \cdot 4 + 1 = 1.$$

Αφού λοιπόν η f είναι συνεχής, τότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(0)=1}$.

ii. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \text{ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot g(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = x^2 \cdot g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x} = xg(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} xg(x) = 0 \cdot 4 = 0 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

iii. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x - e^x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot g(x) + 1 + x - e^x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + \frac{1+x-e^x}{x^2}}{\frac{1 - \sin x}{x^2}} = \frac{4 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{7}{\frac{1}{2}} = 7, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} = \frac{1}{2}.$$

1372. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε :

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{1 - \sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2x}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x} + 2}{\frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{f''(0) + 2}{1} = 1 + 2 = 3.$$

1373. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε :

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 1}{x}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x + 1}{1 - \sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 1}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x) + 1}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{f''(0)}{1} = 2.$$

1374. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε :

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \eta \mu x - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x}}{\frac{e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x - 1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{e^x \sigma \upsilon \nu x - 1}{x}} = \frac{f''(0)}{1 \cdot 1 + 1} = \frac{2016}{2} = 1008,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{e^x \sigma \upsilon \nu x - e^x \eta \mu x}{1} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1.$$

1375. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Επιπλέον η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε :

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}. \text{ Έτσι παίρνουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x + f(x)}{f'(x) \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta \mu^2 x}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)}{x} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^2 + \frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)}{x} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x}} = \frac{1^2 + 1}{f''(0) \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x)}{x} = \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

1376. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε θα είναι $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$.

Έτσι παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f'(x-h) + f'(x)}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x-h) - f'(x)}{2h} \right) = \frac{1}{2} f''(x) - \left(-\frac{1}{2} f''(x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{2} f''(x) = f''(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{2h} &\stackrel{u=-h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{-2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x+u) - f'(x)}{u} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} f''(x). \end{aligned}$$

1377. i. Αφού η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε θα είναι :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \stackrel{u=-h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f'(x-u) - f'(x)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-u)}{u},$$

$$\text{δηλαδή } f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}.$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6h^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{12h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f'(x-h) + f'(x)}{12h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{1}{12} \cdot \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right) = \frac{1}{12} f''(x) + \frac{1}{12} f''(x) = \frac{1}{6} f''(x), \end{aligned}$$

οπότε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6h^2} = x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{6} f''(x) = x+2 \Leftrightarrow f''(x) = 6x+12 \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' = (3x^2 + 12x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = 3 + 12 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$10 = 15 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -5. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 5 \Leftrightarrow (f(x))' = (x^3 + 6x^2 - 5x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + c_2 \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f(1) = 1 + 6 - 5 + c_2 \Leftrightarrow 10 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 8.$$

$$\text{Βρήκαμε λοιπόν } \boxed{f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + 8}.$$

1378. Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ τότε είναι $f(1)=2$. Είναι :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3xt+x) + f(x-xt) - 2f(x) - 2xt}{2t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3xt+x) - f(x) + f(x-xt) - f(x) - 2xt}{2t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(3xt+x) - f(x)}{2t} + \frac{f(x-xt) - f(x)}{2t} - x \right) = \frac{3x}{2} f'(x) - \frac{x}{2} f'(x) - x =$$

$$= xf'(x) - x,$$

$$\text{όπου } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+3xt) - f(x)}{2t} \stackrel{u=3xt}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \frac{u}{3x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3x}{2} \cdot \frac{f(x+u) - f(x)}{u} =$$

$$= \frac{3x}{2} f'(x),$$

$$\begin{aligned} \text{και} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-xt) - f(x)}{2t} &\stackrel{u=-xt}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{2\left(-\frac{u}{x}\right)} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \right) = \\ &= -\frac{x}{2} f'(x). \end{aligned}$$

$$\text{Είναι} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3xt+x) + f(x-xt) - 2f(x) - 2xt}{2t} = f(x) \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) - x = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x' = x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow}$$

$$f(1) = c \Leftrightarrow c = 2. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{x} = \ln x + 2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x \ln x + 2x, x > 0}.$$

1379. Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε θα είναι $f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$.

Έτσι παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+2h) + 5f(x-2h) - 3f(x-3h) - 5f(x+h)}{h^3} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6f'(x+2h) - 10f'(x-2h) + 9f'(x-3h) - 5f'(x+h)}{3h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12f''(x+2h) + 20f''(x-2h) - 27f''(x-3h) - 5f''(x+h)}{6h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{12f''(x+2h) - 12f''(x)}{6h} + \frac{20f''(x-2h) - 20f''(x)}{6h} + \frac{-27f''(x-3h) + 27f''(x)}{6h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-5f''(x+h) + 5f''(x)}{6h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[2 \frac{f''(x+2h) - f''(x)}{h} + \frac{10}{3} \cdot \frac{f''(x-2h) - f''(x)}{h} - \frac{9}{2} \frac{f''(x-3h) - f''(x)}{h} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{6} \cdot \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} \right] = \\ &= 2 \cdot 2f'''(x) + \frac{10}{3} \cdot (-2f'''(x)) - \frac{9}{2} \cdot (-3f'''(x)) - \frac{5}{6} f'''(x) = \\ &= 4f'''(x) + \frac{-40+81-5}{6} f'''(x) = 4f'''(x) + \frac{36}{6} f'''(x) = 10f'''(x), \\ \text{όπου} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+2h) - f''(x)}{h} &\stackrel{u=2h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f''(x+u) - f''(x)}{\frac{1}{2}u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(2 \frac{f''(x+u) - f''(x)}{u} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2f'''(x), \\
\text{και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x-2h) - f''(x)}{h} &\stackrel{u=-2h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f''(x+u) - f''(x)}{-\frac{1}{2}u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-2 \frac{f''(x+u) - f''(x)}{u} \right) = \\
&= -2f'''(x), \\
\text{και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x-3h) - f''(x)}{h} &\stackrel{u=-3h}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f''(x+u) - f''(x)}{-\frac{1}{3}u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-3 \frac{f''(x+u) - f''(x)}{u} \right) = \\
&= -3f'''(x).
\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1380. Θετούμε $g(x) = \frac{f(x)f(x+2)+x}{x-1}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{f(x)f(x+2)+x}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)g(x) = f(x)f(x+2)+x \Leftrightarrow \\
\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)f(x+2)+x] \Leftrightarrow 0 = f(1)f(3)+1 \Leftrightarrow \\
f(1)f(3)+1 &= 0. \text{ Έτσι έχουμε :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f(x+2)+x}{x-1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1} \frac{f'(x)f(x+2)+f(x)f'(x+2)+1}{1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (f'(x)f(x+2)+f(x)f'(x+2)+1) = f'(1)f(3)+f(1)f'(3)+1.
\end{aligned}$$

Και εφόσον είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f(x+2)+x}{x-1} = 1$ τότε θα είναι και

$$\begin{aligned}
f'(1)f(3)+f(1)f'(3)+1 &= 1 \Leftrightarrow \frac{f'(1)f(3)+f(1)f'(3)}{f(1)f(3)} = 0 \Leftrightarrow \\
\frac{f'(1)}{f(1)} + \frac{f'(3)}{f(3)} &= 0.
\end{aligned}$$

1381. Έχουμε :

$$f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x - \eta\mu x \Leftrightarrow f(x)(f^4(x) + f^2(x) + 1) = x - \eta\mu x.$$

Στην παραπάνω σχέση για $x=0$ παίρνουμε :

$$f(0)(f^4(0) + f^2(0) + 1) = 0 \stackrel{f^4(0)+f^2(0)+1 > 0}{\Leftrightarrow} f(0) = 0. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f(x) = (x - \eta\mu x) \cdot \frac{1}{f^4(x) + f^2(x) + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^3} = \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \cdot \frac{1}{f^4(x) + f^2(x) + 1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x^3} \cdot \frac{1}{f^4(x) + f^2(x) + 1} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{f^4(0) + f^2(0) + 1} \stackrel{f(0)=0}{=} \frac{1}{6},$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \nu \eta x}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

1382. Έχουμε :

$$e^{f(x)} + f(x) = \eta \mu x - x \Rightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + f'(x) = \sigma \nu \eta x - 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} + 1)f'(x) = \sigma \nu \eta x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sigma \nu \eta x - 1}{e^{f(x)} + 1}. \text{ Είναι :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sigma \nu \eta x - 1}{e^{f(x)} + 1}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \cdot \frac{\sigma \nu \eta x - 1}{x^4} = (\text{θετική ποσότητα}) \cdot (-\infty) = -\infty,$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \eta x - 1}{x^4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-\eta \mu x}{4x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{-\sigma \nu \eta x}{12x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{f(x)} + 1} = \frac{1}{e^{f(0)} + 1} > 0 (\neq 0).$$

1383. Έχουμε : $\ln(f(x)) + e^{f(x)} = e(e^x - x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + e^{f(x)} \cdot f'(x) = e(e^x - 1) \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)} \right) f'(x) = e(e^x - 1) \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e(e^x - 1)}{1 + f(x)e^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{e(e^x - 1)f(x)}{1 + f(x)e^{f(x)}}.$$

Η f είναι συνεχής οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e(e^x - 1)f(x)}{1 + f(x)e^{f(x)}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x - 1)f(x)}{2x(1 + f(x)e^{f(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{ef(x)}{2(1 + f(x)e^{f(x)})} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ef(x)}{2(1 + f(x)e^{f(x)})} = \\ &= 1 \cdot \frac{ef(0)}{2(1 + f(0)e^{f(0)})} = \frac{e}{2(1 + e)} = \frac{e}{2 + 2e}, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1. \end{aligned}$$

1384. i. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + xf'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x)) = 2017.$$

ii. Θέτουμε $g(x) = f(x) + xf'(x)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2017$. Οπότε :

$$g(x) = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) = g(x) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - f(x)) = 2017 - 2017 = 0.$$

1385. α. i. Στη δοθείσα σχέση βάζουμε όπου x το $\frac{\pi}{4}$ και παίρνουμε :

$$f\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Αν τώρα βάλουμε όπου x το 0, παίρνουμε : $f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$

ii. Έστω $g(x) = f(x) + x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα

πράξεων συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1)$, δηλαδή

$$g(0) \cdot g(1) = (f(0) - 1) \cdot f(1) = (f(0) - 1) \cdot (1 - f(0)) = -(1 - f(0))^2 \leq 0.$$

– Αν $g(0) \cdot g(1) < 0$ τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1$.

– Αν $g(0) \cdot g(1) = 0$ τότε, είτε θα είναι $g(0) = 0$ δηλαδή το $x = 0$ θα είναι ρίζα της g , είτε θα είναι $g(1) = 0$ δηλαδή το $x = 1$ θα είναι ρίζα της g .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1.$$

β. i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε έχουμε :

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{\frac{2x - \sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{2f(x) - 1}{2}}{\frac{2x - \sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2f(x) - 1}{2x - \sqrt{2}}.$$

Έχουμε την ανίσωση :

$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) \geq 2\sqrt{2}x - 1 \Leftrightarrow 2f(x) - 1 \geq 2\sqrt{2}x - 2 \Leftrightarrow$$

$$2f(x) - 1 \geq 2(\sqrt{2}x - 1). \text{ Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :}$$

– $2x - \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Έτσι έχουμε :

$$2f(x) - 1 \geq 2(\sqrt{2}x - 1) \Leftrightarrow \frac{2f(x) - 1}{2x - \sqrt{2}} \geq \frac{2(\sqrt{2}x - 1)}{2x - \sqrt{2}}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{2(\sqrt{2}x - 1)}{2x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{2(\cancel{\sqrt{2}x - 1})}{\sqrt{2}(\cancel{\sqrt{2}x - 1})} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ άρα και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{2f(x) - 1}{2x - \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$- \quad 2x - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$2f(x) - 1 \leq 2(\sqrt{2}x - 1) \Leftrightarrow \frac{2f(x) - 1}{2x - \sqrt{2}} \leq \frac{2(\sqrt{2}x - 1)}{2x - \sqrt{2}}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2(\sqrt{2}x - 1)}{2x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2(\cancel{\sqrt{2}x - 1})}{\sqrt{2}(\cancel{\sqrt{2}x - 1})} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ άρα και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2f(x) - 1}{2x - \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν σε κάθε περίπτωση πως είναι :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2f(x) - 1}{2x - \sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι η :

$$y = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt{2}x - 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}}.$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{cases} f(0) + f(1) = 1 \\ f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 \end{cases} \stackrel{(-)}{\Leftrightarrow} f(0) + f(1) - f(\eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$$

$f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x) = f(\eta\mu x) - f(0)$. Έτσι παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x} \stackrel{u = \eta\mu x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u) - f(0)}{u} = f'(0).$$

Μένει να βρούμε το $f'(0)$. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση :

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0.$$

Βάζοντας όπου x το 0 έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(\eta\mu 0) - \eta\mu 0 \cdot f'(\sigma\upsilon\nu 0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} = 0.$$

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας

- 1386. i.** Η $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}} \text{ ή } \underline{\underline{x = 1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$		+	⊖	+	
$f(x)$		↗	↘	↗	

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 1]$.

- ii.** Η $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$.

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	⊖	+	
$f(x)$		↗	↘	↗	

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- iii.** Η $f(x) = x^4 - 2x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ ή } \underline{\underline{x = \pm 1}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x		-		⊖		+	
$x^2 - 1$		+	⊖	-	⊖	+	
$f'(x)$		-	⊖	+	⊖	+	
$f(x)$		↘	↗	↘	↗	↘	

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0, 1]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[1, +\infty)$.

- iv.** Η $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 + 12x - 12 = 12(x^3 - x^2 + x - 1) = 12[x^2(x-1) + (x-1)] = \\ &= 12(x-1)(x^2 + 1). \text{ Έτσι έχουμε :} \end{aligned}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12(x-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$ ή $x^2=-1$ (άτοπο), οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	$\bigcirc$	+
x^2+1	+		+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

v. Η $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - \cancel{x} + \cancel{1} - x^2 + \cancel{x} - \cancel{1}}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=2}, \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$(x-1)^2$	+		+		+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, 2]$.

vi. Η $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{5\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-5) - (x^2 - 5x + 4)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x - \cancel{5x} + 25 - x^2 + \cancel{5x} - 4}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2} = \frac{(x-7)(x-3)}{(x-5)^2}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-7)(x-3)}{(x-5)^2}=0 \Leftrightarrow (x-7)(x-3)=0 \Leftrightarrow \underline{x=7} \text{ ή } \underline{x=3},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$	
$x^2-10x+21$	+	$\ominus$	-	-	$\ominus$	+
$(x-5)^2$	+		+	+		+
$f'(x)$	+	$\ominus$	-	-	$\ominus$	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 3]$ και $[7, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[3, 5)$ και $(5, 7]$.

vii. Για την $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ πρέπει $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, άρα έχει πεδίο ορισμού το $A = [-2, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(4-x^2) - 2x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{8-2x^2-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2(2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \pm\sqrt{2}}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2			
$4-2x^2$		-	$\ominus$	+	$\ominus$	-	
$f'(x)$		-	$\ominus$	+	$\ominus$	-	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2, -\sqrt{2}]$ και $[\sqrt{2}, 2]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

viii. Για την $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)$ πρέπει $x^2 - 6x + 8 > 0$. Έτσι έχουμε

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4 \text{ και κάνουμε πίνακα}$$

προσήμων :

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
x^2-6x+8	+	$\ominus$	-	$\ominus$	+

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{2x-6}{x^2-6x+8} = \frac{2(x-3)}{x^2-6x+8}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{x^2-6x+8} = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
$2x-6$	-	-	Φ	+	+
x^2-6x+8	+	-	-	+	+
$f'(x)$	-			+	+
$f(x)$					

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2)$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(4, +\infty)$.

ix. Η $f(x) = 2e^x - x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2e^x - 1$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln 2}}. \text{ Επιπλέον είναι}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2 \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\ln 2, \text{ οπότε κάνουμε}$$

τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	Φ	+
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\ln 2]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\ln 2, +\infty)$.

x. Η $f(x) = x(3 - 2\ln x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3 - 2\ln x + x \left(-\frac{2}{x} \right) = 3 - 2\ln x - 2 = 1 - 2\ln x. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{e}}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e} \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		Φ	-
$f(x)$			

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \sqrt{e}]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\sqrt{e}, +\infty)$.

xii. Η $f(x) = (x-2)e^x - \frac{x^2}{2} + x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (x-2)e^x - x + 1 = e^x + xe^x - 2e^x - x + 1 = xe^x - e^x - x + 1 = \\ &= e^x(x-1) - (x-1) = (e^x - 1)(x-1). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}) \text{ ή } \underline{\underline{x=1}}.$

Επιπλέον είναι :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας}$$

της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$e^x - 1$	-	$\bigcirc$	+	+
$x - 1$	-		$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$.

xiii. Η $f(x) = x^2(2\ln x - 1) - 8x(\ln x - 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2\ln x - 1) + x^2 \frac{2}{x} - 8(\ln x - 1) - 8 \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \\ &= 4x \ln x - 2\cancel{x} + 2\cancel{x} - 8 \ln x + \cancel{8} - \cancel{8} = 4x \ln x - 8 \ln x = 4 \ln x(x-2). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \ln x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}) \text{ ή } \underline{\underline{x=2}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	0	1	2	$+\infty$
$\ln x$		$-$	$\bigcirc$	$+$
$x - 2$		$-$	$\bigcirc$	$+$
$f'(x)$		$+$	$\bigcirc$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[2, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$.

xiii. Η $f(x) = 2^x + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1$. Έτσι έχουμε :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 1 = 0$ αδύνατη, αφού $2^x \ln 2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

xiv. Η $f(x) = e^x + x + \sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = e^x + 1 - \eta\mu x$. Έτσι έχουμε :

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\eta\mu x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$e^x \leq e^x + 1 - \eta\mu x \leq 2 + e^x \Leftrightarrow e^x \leq f'(x) \leq 2 + e^x, \text{ δηλαδή } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς : Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

xv. Η $f(x) = 2xe^{-x} + (x-1)^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2(x-1) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2x - 2 = \\ &= 2e^{-x}(1-x) - 2(1-x) = (1-x)(2e^{-x} - 2) = 2(1-x)(e^{-x} - 1). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1-x)(e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } (e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}).$$

Επιπλέον είναι :

$$e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} > e^0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ και}$$

$$e^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+		+	⊖
$e^{-x} - 1$	+	⊖	−	−
$f'(x)$	+	⊖	−	⊖
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$.

xvi. Η $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 5$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} - 2x = 2x \ln x + x - 2x = 2x \ln x - x = x(2 \ln x - 1).$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \overset{x \neq 0}{\ln x = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{e}}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e},$$

$$2\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
x			
$2\ln x - 1$		+	+
$f'(x)$		+	+
$f(x)$		↘	↗

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \sqrt{e})$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\sqrt{e}, +\infty)$.

xvii. Η $f(x) = x \ln^2 x - 3x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - 3 = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 = (\ln x + 3)(\ln x - 1).$$

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x + 3)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = -3 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-3}}}) \text{ ή } (\ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}})$. Επιπλέον είναι :

- $\ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -3 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-3} \Leftrightarrow x > e^{-3}$ και
- $\ln x + 3 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -3 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-3} \Leftrightarrow x < e^{-3}$.
- ο $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$ και
- ο $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$.

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	e^{-3}	e	$+\infty$
$\ln x + 3$		-	+	+
$\ln x - 1$		-	-	+
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		↗	↘	↗

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, e^{-3})$ και $[e, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e^{-3}, e]$.

xviii. Για την $f(x) = \ln(e^x - 1) - 2x + 1$ πρέπει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ άρα η } f \text{ έχει πεδίο ορισμού το}$$

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 2 = \frac{e^x - 2e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{-e^x + 2}{e^x - 1}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-e^x + 2}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow -e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln 2}}.$$

Επιπλέον είναι :

- $-e^x + 2 > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$ και
- $-e^x + 2 < 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.
- ο $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$-e^x + 2$		+	⊖
$e^x - 1$		+	+
$f'(x)$		+	⊖
$f(x)$		↗	↘

Συμπεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \ln 2]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\ln 2, +\infty)$.

xix. Η $f(x) = (x^2 - x) \ln x + \frac{x^2}{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 1) \ln x + (x^2 - x) \cdot \frac{1}{x} + x = (2x - 1) \ln x + x - 1 + x = (2x - 1) \ln x + 2x - 1 = \\ &= (2x - 1) \ln x + (2x - 1) = (2x - 1)(\ln x + 1). \text{ Έτσι έχουμε :} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}} \text{ ή}$$

$$(\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-1}}}).$$

Επιπλέον ισχύει :

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \text{ και}$$

$$\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$		-	⊖	+
$\ln x + 1$		⊖	+	+
$f'(x)$		+	⊖	+
$f(x)$		↗	↘	↗

Συμπεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right]$.

xx. Η $f(x) = \frac{x^2}{2} - x \sin x + \eta \mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = x - \cancel{\sin x} + x \eta \mu x + \cancel{\cos x} = x + x \eta \mu x = x(1 + \eta \mu x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 + \eta \mu x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0} \text{ ή } 1 + \eta \mu x = 0.$$

Γνωρίζουμε πως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \eta \mu x \Leftrightarrow 1 + \eta \mu x \geq 0$, οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	$\bigcirc$	+
$1 + \eta \mu x$	+		+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

1387. i. Η $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x - 3)(x - 1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 3} \text{ ή } \underline{x = 1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'(x)	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
f(x)					
		T.E.	T.M.		

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$ και
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = -2$.
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3) = 2$.

ii. Η $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0} \text{ ή } \underline{x = 1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$12x^2$	+	$\bigcirc$	+	+
$x-1$	-		$\bigcirc$	+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+
$f(x)$				

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = 0$.

iii. Η $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2 - 3)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}} \text{ ή } \underline{\underline{x=3}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$(x - 2)^2$	+		+	+		+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$						

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[1, 2)$ και $(2, 3]$ και
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = 2$.
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3) = 6$.

iv. Η $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{10\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{(2x-7)(x-10) - (x^2 - 7x + 6)}{(x-10)^2} = \frac{2x^2 - 20x - 7x + 70 - x^2 + 7x - 6}{(x-10)^2} = \frac{x^2 - 20x + 64}{(x-10)^2} = \frac{(x-4)(x-16)}{(x-10)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-16)}{(x-10)^2}=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-16)=0 \Leftrightarrow \underline{x=4} \text{ ή } \underline{x=16},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	4	10	16	$+\infty$	
$x^2 - 20x + 64$	+	$\ominus$	-	-	$\ominus$	+
$(x - 10)^2$	+		+	+		+
$f'(x)$	+	$\ominus$	-	-	$\ominus$	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$
	T.M.			T.E.		

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 4]$ και $[16, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[4, 10]$ και $(10, 16]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 4$ το $f(4) = 1$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 16$ το $f(16) = 25$.

v. Η $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 1 - \cancel{2} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow \underline{x=2}$$

, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	1	2	$+\infty$
$\sqrt{x-1}-1$		⊖	+
$f'(x)$		⊖	+
$f(x)$		↘	↗

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ το $f(2) = 0$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = 1$.

vi. Για την $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ πρέπει $(x-2 \geq 0 \text{ και } 4-x \geq 0) \Leftrightarrow$

$(x \geq 2 \text{ και } x \leq 4)$, άρα έχει πεδίο ορισμού το $A = [2, 4]$ και είναι παραγωγίσιμη

$$(\text{άρα και συνεχής}) \text{ με παράγωγο : } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{4-x-(x-2)}{2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4-x} \cdot (\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2})} = \frac{4-x-x+2}{2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4-x} \cdot (\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2})} =$$

$$= \frac{-2x+6}{2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4-x} \cdot (\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2})}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4-x} \cdot (\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2})} = 0 \Leftrightarrow -2x+6=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	2	3	4
$-2x+6$		+	⊖
$f'(x)$		+	⊖
$f(x)$		↗	↘
	T.E.	T.M.	T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,3]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3,4]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ το $f(2) = \sqrt{2}$, και στο $x_2 = 4$ το $f(4) = \sqrt{2}$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 3$ το $f(3) = 2$.

vii. Για την $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ πρέπει $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $A = [-1,1]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με

$$\text{παράγωγο : } f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	-1	0	1
$-x$		+	⊖
$f'(x)$		+	⊖
$f(x)$		↗	↘
	T.E.	T.M.	T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,0]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = 0$ και στο $x_2 = 1$ το $f(1) = 0$.

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 0$ το $f(0) = 1$.

viii. Για την $f(x) = x^2 + 2\sqrt{4-x^2}$ πρέπει $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-2, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \cancel{x} \frac{-2x}{\cancel{x}\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x(\sqrt{4-x^2} - 1)}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{2x(4-x^2-1)}{\sqrt{4-x^2} \cdot (\sqrt{4-x^2} + 1)} = \frac{2x(3-x^2)}{\sqrt{4-x^2} \cdot (\sqrt{4-x^2} + 1)}. \text{ Έτσι έχουμε :} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(3-x^2)}{\sqrt{4-x^2} \cdot (\sqrt{4-x^2} + 1)} = 0 \Leftrightarrow 2x(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή}$$

($x^2 = 3 \Leftrightarrow \underline{x = \sqrt{3}}$ ή $\underline{x = -\sqrt{3}}$), και κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	-2	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	2
2x		-	-	+	+
3-x ²		-	+	+	-
f'(x)		+	-	+	-
f(x)		↗	↘	↗	↘
	T.E.	T.M.	T.E.	T.M.	T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, -\sqrt{3}]$ και $[0, \sqrt{3}]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{3}, 0]$ και $[\sqrt{3}, 2]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -\sqrt{3}$ το $f(-\sqrt{3}) = 5$ και στο $x_2 = \sqrt{3}$ το $f(\sqrt{3}) = 5$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = -2$ το $f(-2) = 4$, στο $x_4 = 0$ το $f(0) = 4$ και στο $x_5 = 2$ το $f(2) = 4$.

ix. Η $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \cancel{x} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x}^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \frac{xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-		$\emptyset$	+
x	-	+		+
$f'(x)$	+	-	$\emptyset$	+
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = e$.

x. Η $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot x^2 - e^{x^2} \cdot 2x}{x^4} = 2e^{x^2} \frac{x^3 - x}{x^4} = 2e^{x^2} \frac{x^2 - 1}{x^3}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x^2} \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \pm 1}}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
x^2-1	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$	+
x^3	-		-	+		+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

T.E.

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $(0, 1]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 0)$ και $[1, +\infty)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = e$ και στο $x_2 = 1$ το $f(1) = e$.

xi. Για την $f(x) = \ln(8x - x^2)$ πρέπει $8x - x^2 > 0$. Έτσι έχουμε :

$$8x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(8 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 8, \text{ και κάνουμε πίνακα προσήμων :}$$

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$	
$8x - x^2$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 8)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής)

με παράγωγο : $f'(x) = \frac{8-2x}{8x-x^2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{8-2x}{8x-x^2}=0 \Leftrightarrow 8-2x=0 \Leftrightarrow \underline{x=4}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	4	8
$8-2x$	+	⊖	-
$8x-x^2$	+		+
$f'(x)$	+	⊖	-
$f(x)$		↗	↘

T.M.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4,8)$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 4$ το $f(4) = 4 \ln 2$.

xii. Για την $f(x) = \ln(x^2 - 8x)$ πρέπει $x^2 - 8x > 0$. Έτσι έχουμε :

$$x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 8, \text{ και κάνουμε πίνακα προσήμων :}$$

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
$x^2 - 8x$	+	⊖	⊖	+

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{2x-8}{x^2-8x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x-8}{x^2-8x}=0 \Leftrightarrow 2x-8=0 \Leftrightarrow \underline{x=4}, \text{ και κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	4	8	$+\infty$
$2x-8$	-				+
x^2-8x	+				+
$f'(x)$	-				+
$f(x)$		↘			↗

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(8, +\infty)$.

και

- ο Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

xiii. Η $f(x) = x^2 \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \overset{x \neq 0}{2 \ln x + 1 = 0} \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{x = e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ και}$$

$$2\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}}, \text{ οπότε κάνουμε τον}$$

πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
x			
$2\ln x + 1$		$\ominus$	$+$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ και
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

xiv. Η $f(x) = x \ln^2 x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}) \text{ ή}$$

$$(\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow \underline{x=e^{-2}}).$$

Επιπλέον είναι :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$.
- ο $\ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-2} \Leftrightarrow x > e^{-2}$ και
- ο $\ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -2 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-2} \Leftrightarrow x < e^{-2}$.

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$
$\ln x$		$-$	$-$	$+$
$\ln x + 2$		$\ominus$	$+$	$+$
$f'(x)$		$\ominus$	$\ominus$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{e^2}$ το $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = 0$.

xv. Η $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ έχει πεδίο ορισμού το $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$f'(x) = -2\eta\mu x + 2\eta\mu 2x = -2\eta\mu x + 2 \cdot 2\eta\mu x \sin x = -2\eta\mu x(1 - 2\sin x)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}) \text{ ή } \left(\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{3}}} \right).$$

- Για το πρόσημο του $-2\eta\mu x$ ισχύει :

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow[\text{στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]]{\eta\mu x \text{ γν. αυξ.}} \eta\mu 0 \leq \eta\mu x < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\eta\mu x < 0,$$

δηλαδή είναι $-2\eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Η συνάρτηση $\varphi(x) = 1 - 2\sin x$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και μηδενίζεται στο $\frac{\pi}{3}$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι έχουμε :

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin \frac{\pi}{6} = 1 - \sqrt{3} < 0, \text{ άρα } \varphi(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ και}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2\sin \frac{\pi}{2} = 1 - 2 < 0, \text{ άρα } \varphi(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$-2\eta\mu x$		–	–
$1 - 2\sin x$		⊖	+
$f'(x)$		⊖	–
$f(x)$		↗	↘

T.E.

T.M.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ το $f(0) = 1$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = \frac{\pi}{3}$ το $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

xvi. Η $f(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, \pi]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x (2\eta\mu x - 1)$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x (2\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}} \right) \text{ ή } \left(\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{6}}} \text{ ή } \underline{\underline{x = \frac{5\pi}{6}}} \right).$$

- Η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $[0, \pi)$ και μηδενίζεται στο $\frac{\pi}{2}$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Έτσι έχουμε :

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \text{ άρα } \varphi(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και}$$

$$\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0, \text{ άρα } \varphi(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

- Η συνάρτηση $g(x) = 2\eta\mu x - 1$ είναι συνεχής στο $[0, \pi)$ και μηδενίζεται στα $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{5\pi}{6}$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$. Έτσι έχουμε :

$$g(0) = 2\eta\mu 0 - 1 = -1 < 0, \text{ άρα } g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\eta\mu \frac{\pi}{2} - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0, \text{ άρα } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ και}$$

$$g(\pi) = 2\eta\mu \pi - 1 = -1 < 0, \text{ άρα } g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right).$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
συνx		+	+	⊖	-
2ημx - 1		-	⊖	+	⊖
f'(x)		-	⊖	+	⊖
f(x)		↘	↗	↘	↗
		T.E.	T.M.	T.E.	T.M.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ και $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

και

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = \frac{\pi}{6}$ το $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$ και στο $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ το $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$.
- ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = \frac{\pi}{2}$ το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και στο $x_4 = \pi$ το $f(\pi) = 0$.

1388. i. Η $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 30$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 6(x-2)(x-3). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=2}$ ή $\underline{x=3}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
f'(x)		+	⊖	-
f(x)		↗	↘	↗
		T.M.	T.E.	

Συνεπώς :

ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$ το $f(2) = -2$.

ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3) = -3$.

ii. Έστω $A(2, f(2)) = (2, -2)$ και $B(3, f(3)) = (3, -3)$ τα σημεία.

Έχουμε $\lambda_{AO} = \frac{0 - (-2)}{0 - 2} = -1$ και $\lambda_{BO} = \frac{0 - (-3)}{0 - 3} = -1$, άρα $\lambda_{AO} = \lambda_{BO}$, και αφού

υπάρχει κοινό σημείο τότε τα A, B, O είναι συνευθειακά.

1389. Η $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a^2 - a$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$ ή $\underline{x=3}$, και κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
f(x)	$\nearrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		T.M.	T.E.		

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

- ο $H f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = 4 + \alpha^2 - \alpha$.
- ο $H f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3) = \alpha^2 - \alpha$.

Τα δύο ακρότατα θα είναι αντίθετα άρα :

$$f(1) + f(3) = 0 \Leftrightarrow 4 + \alpha^2 - \alpha + \alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + 2 = 0$$

Όμως είναι $\Delta = -7 < 0$, άρα δεν υπάρχει τέτοιο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει δύο αντίθετα ακρότατα.

1390. Η $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x - 3) = -3(x+3)(x-1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=-3}$ ή $\underline{x=1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
x^2+2x-3	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3, 1]$.

Όμοια η $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f''(x) = -6x - 6$. Έτσι έχουμε :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \underline{x=-1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f' :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς :

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$.
- Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

1391. i. Η $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + \cancel{x} - 1 - x^2 - \cancel{x} - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 3$ ή $x = -1$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
x^2-2x-3	+	$\ominus$	-	$\ominus$	+
$(x-1)^2$	+		+		+
$f'(x)$	+	$\ominus$	-	$\ominus$	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 1)$ και $(1, 3]$.

ii. Όμοια η $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^3} = \\ &= \frac{\cancel{2x} - \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x} + 4\cancel{x} + 6}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f' :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^3$	-		+
$f''(x)$	-		+
$f'(x)$			

Συνεπώς :

– Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$.

– Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

1392. i. Η $f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και

είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{2}(2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot \frac{2}{x} - 2(\ln x - 1) - 2\cancel{x} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= x \ln x - \frac{\cancel{x}}{2} + \frac{\cancel{x}}{2} - 2\ln x + \cancel{2} - \cancel{2} = x \ln x - 2\ln x = (x-2)\ln x. \end{aligned}$$

ii. Έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=2}$ ή $(\ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1})$.

Επιπλέον είναι :

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	0	1	2	$+\infty$
$\ln x$		$\ominus$	$+$	$+$
$x-2$		$-$	$\ominus$	$+$
$f'(x)$		$\ominus$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0,1]$ και $[2,+\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2]$.

και

ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = \frac{7}{4}$.

ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$ το $f(2) = -2\ln 2 + 3$.

1393. A. Για την $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$ πρέπει $9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-3, 3]$.

B. α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$. Έτσι για κάθε $x \in (-3, 3)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{9-x^2} + (x+3) \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{2(9-x^2) - 2x(x+3)}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{18-2x^2-2x^2-6x}{2\sqrt{9-x^2}} = \\ &= \frac{-4x^2-6x+18}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}}} \end{aligned}$$

β. Στο $x_0 = -3$ έχουμε :

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(-3) = 0}$$

$$\text{όπου } f(-3) = (-3+3)\sqrt{9-9} = 0.$$

Γ. Έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2-3x+9 = 0, \text{ όπου } \Delta = 81 \text{ και}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	-3	$\frac{3}{2}$	3
$-2x^2 - 3x + 9$		+	⊖
$f'(x)$		+	⊖
$f(x)$		↗	↘
	T.E.	T.M.	T.E.

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

Δ. Επιπλέον :

ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -3$ το $f(-3) = 0$ και στο $x_2 = 3$ το $f(3) = 0$.

ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = \frac{3}{2}$ το $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

1394. i. Η $f(x) = -x - 2\sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, \pi]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = -1 + 2\eta\mu x$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{6}.$$

Η συνάρτηση $f'(x) = -1 + 2\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και μηδενίζεται στα $\frac{\pi}{6}$

και $\frac{5\pi}{6}$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ και

$\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(0) = -1 + 2\eta\mu 0^0 = -1 < 0, \text{ άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2\eta\mu \frac{\pi}{2} = -1 + 2 \cdot 1 = 1 > 0, \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ και}$$

$$f'(\pi) = -1 + 2\eta\mu \pi^0 = -1 < 0, \text{ άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right).$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f'(x)$		⊖	+	⊖
$f(x)$		↘	↗	↘

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ και $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

ii. Η $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, \pi]$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}.$$

Η συνάρτηση $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και μηδενίζεται στο $\frac{3\pi}{4}$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Έτσι έχουμε

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cancel{\sigma\upsilon\nu}^0 \frac{\pi}{2} + \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 > 0, \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right), \text{ και}$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} + \eta\mu \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0, \text{ άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε}$$

$$x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right).$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$		+	⊖
$f(x)$		↗	↘

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

iii. Η $f(x) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2x - 2\eta\mu x = 2(x - \eta\mu x)$.

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = x \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$.

Η συνάρτηση $f'(x) = 2(x - \eta\mu x)$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και μηδενίζεται στο

0. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι έχουμε :

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{6} - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\pi}{6} + \eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{3-\pi}{3} < 0, \text{ άρα}$$

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ και}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{6} - \eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\pi-3}{3} > 0, \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$\ominus$	$\oplus$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

$$- \text{ Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

$$- \text{ Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

iv. Η $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = x^2 + 1 - \sigma\upsilon\nu x$.

Γνωρίζουμε πως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0$ και $(\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x \geq 0)$,
οπότε προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε $x^2 + 1 - \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$,
δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

1395. i. Η $f(x) = \frac{7}{2}e^{\frac{-x+5}{14}} - \frac{7}{4}e^{\frac{-x}{7}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{7}{2}e^{\frac{-x+5}{14}} \cdot \left(-\frac{1}{14}\right) - \frac{7}{4}e^{\frac{-x}{7}} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{4}e^{\frac{-x+5}{14}} + \frac{1}{4}e^{\frac{-x}{7}} = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{-x+5}{14}} - e^{\frac{-x}{7}}\right).$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{-x+5}{14}} - e^{\frac{-x}{7}}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{-x+5}{14}} = e^{\frac{-x}{7}} \Leftrightarrow \frac{-x+5}{14} = -\frac{x}{7} \Leftrightarrow$$

$$x+5 = 2x \Leftrightarrow \underline{x=5}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$e^{\frac{-x+5}{14}} - e^{\frac{-x}{7}} > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{-x+5}{14}} > e^{\frac{-x}{7}} \Leftrightarrow -\frac{x+5}{14} > -\frac{x}{7} \Leftrightarrow -(x+5) > -2x \Leftrightarrow$$

$$-x-5 > -2x \Leftrightarrow x > 5 \text{ και}$$

$$e^{\frac{-x+5}{14}} - e^{\frac{-x}{7}} < 0 \Leftrightarrow e^{\frac{-x+5}{14}} < e^{\frac{-x}{7}} \Leftrightarrow -\frac{x+5}{14} < -\frac{x}{7} \Leftrightarrow -(x+5) < -2x \Leftrightarrow$$

$$-x-5 < -2x \Leftrightarrow x < 5.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$e^{\frac{x+5}{14}} - e^{-\frac{x}{7}}$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 5]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[5, +\infty)$.

ii. Η $f(x) = \frac{e^{-x+3}}{(1+e^{-x+3})^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-e^{-x+3} \cdot (1+e^{-x+3})^2 - e^{-x+3} \cdot 2(1+e^{-x+3}) \cdot e^{-x+3} \cdot (-1)}{(1+e^{-x+3})^4} = \\
 &= \frac{-e^{-x+3} \cdot (1+e^{-x+3}) + 2e^{-2x+6}}{(1+e^{-x+3})^3} = \frac{-e^{-x+3} - e^{-2x+6} + 2e^{-2x+6}}{(1+e^{-x+3})^3} = \frac{e^{-2x+6} - e^{-x+3}}{(1+e^{-x+3})^3} = \\
 &= \frac{e^{-x+3}(e^{-x+3} - 1)}{(1+e^{-x+3})^3}. \text{ Έτσι έχουμε :}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x+3}(e^{-x+3} - 1)}{(1+e^{-x+3})^3} = 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} = 1 \Leftrightarrow e^{-x+3} = e^0 \Leftrightarrow -x+3 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 3$. Επιπλέον είναι :

$$e^{-x+3} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} > 1 \Leftrightarrow e^{-x+3} > e^0 \Leftrightarrow -x+3 > 0 \Leftrightarrow x < 3 \text{ και}$$

$$e^{-x+3} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} < 1 \Leftrightarrow e^{-x+3} < e^0 \Leftrightarrow -x+3 < 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$e^{-x+3} - 1$	+	$\bigcirc$	-
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$			

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

iii. Η $f(x) = e^{-2x} - e^{-ax}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = -2e^{-2x} + ae^{-ax}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + ae^{-ax} = 0 \Leftrightarrow ae^{-ax} = 2e^{-2x} \Leftrightarrow \ln(ae^{-ax}) = \ln(2e^{-2x}) \Leftrightarrow$$

$$\ln a + \ln e^{-ax} = \ln 2 + \ln e^{-2x} \Leftrightarrow \ln a - ax = \ln 2 - 2x \Leftrightarrow 2x - ax = \ln 2 - \ln a \Leftrightarrow$$

$$(2-\alpha)x = \ln 2 - \ln \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2-\alpha}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$-2e^{-2x} + \alpha e^{-\alpha x} > 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha x} > 2e^{-2x} \Leftrightarrow \ln(\alpha e^{-\alpha x}) > \ln(2e^{-2x}) \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha - \alpha x > \ln 2 - 2x \Leftrightarrow (2-\alpha)x > \ln 2 - \ln \alpha \stackrel{2-\alpha < 0}{\Leftrightarrow} x < \frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2-\alpha} \text{ και}$$

$$-2e^{-2x} + \alpha e^{-\alpha x} < 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha x} < 2e^{-2x} \Leftrightarrow \ln(\alpha e^{-\alpha x}) < \ln(2e^{-2x}) \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha - \alpha x < \ln 2 - 2x \Leftrightarrow (2-\alpha)x < \ln 2 - \ln \alpha \stackrel{2-\alpha < 0}{\Leftrightarrow} x > \frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2-\alpha}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2-\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\oplus$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

$$- \text{ Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα } \left(-\infty, \frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2-\alpha}\right].$$

$$- \text{ Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } \left[\frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2-\alpha}, +\infty\right).$$

iv. Η $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{ax} \cdot a \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x \ln(ax)}{2x\sqrt{x}}}{x} = \\ &= \frac{2 - \ln(ax)}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln(ax)}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln(ax)}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(ax) = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(ax) = \ln e^2 \Leftrightarrow ax = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{\alpha}.$$

Επιπλέον είναι :

$$2 - \ln(ax) > 0 \Leftrightarrow \ln(ax) < 2 \Leftrightarrow \ln(ax) < \ln e^2 \Leftrightarrow ax < e^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x < \frac{e^2}{\alpha} \text{ και}$$

$$2 - \ln(ax) < 0 \Leftrightarrow \ln(ax) > 2 \Leftrightarrow \ln(ax) > \ln e^2 \Leftrightarrow ax > e^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x > \frac{e^2}{\alpha}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{e^2}{a}$	$+\infty$
$2 - \ln(ax)$		+	-
x		+	+
$f'(x)$		+	-
f(x)			

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{e^2}{a}\right]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{e^2}{a}, +\infty\right)$.

1396. i. Η $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (2, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-1} \ln x - \frac{1}{x} \ln(x-1)}{\ln^2 x} = \frac{\frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1)}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1) \ln^2 x}.$$

Για το πρόσημο της f' ισχύει :

$$- \quad x > x-1 \Leftrightarrow \ln x > \ln(x-1).$$

Οι όροι των ανισοτήτων $x > x-1$ και $\ln x > \ln(x-1)$ είναι θετικές ποσότητες (αφού $x > 2$), οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και παίρνουμε :

$$x \ln x > (x-1) \ln(x-1) \Leftrightarrow x \ln x - (x-1) \ln(x-1) > 0.$$

$$- \quad x > 2 \Leftrightarrow x-1 > 1, \text{ δηλαδή } x > 0 \text{ και } x-1 > 0.$$

$$- \quad \ln^2 x > 0.$$

Έτσι παίρνουμε $f'(x) > 0$. Συνεπώς η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

ii. Η $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+2)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} \ln x}{\ln^2(x+2)} = \frac{\frac{(x+2) \ln(x+2) - x \ln x}{x(x+2)}}{\ln^2(x+2)} = \frac{(x+2) \ln(x+2) - x \ln x}{x(x+2) \ln^2(x+2)}.$$

Για το πρόσημο της f' ισχύει :

$$- \quad x+2 > x \Leftrightarrow \ln(x+2) > \ln x.$$

Οι όροι των ανισοτήτων $x+2 > x$ και $\ln(x+2) > \ln x$ είναι θετικές ποσότητες (αφού $x > 0$), οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και παίρνουμε :

- $(x+2)\ln(x+2) > x \ln x \Leftrightarrow (x+2)\ln(x+2) - x \ln x > 0.$
 - $x > 0 \Leftrightarrow x+2 > 2$, δηλαδή $x > 0$ και $x+2 > 0$.
 - $\ln^2(x+2) > 0$.

Έτσι παίρνουμε $f'(x) > 0$. Συνεπώς η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

iii. Η $f(x) = \sqrt{x^2+1} - e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - e^x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - e^x$.

- Αν $x \leq 0$ τότε $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 0$ και $(e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x < 0)$, οπότε προσθέτοντας

κατά μέλη τις ανισώσεις έχουμε $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - e^x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

- Αν $x > 0$ τότε :

$$\bullet \quad x^2 + 1 \geq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+1} \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \text{ και}$$

$$\bullet \quad x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow -e^x < -1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισώσεις έχουμε :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - e^x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0. \text{ Αποδείξαμε λοιπόν πως για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$f'(x) < 0$. Συνεπώς η f θα είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

iv. Η $f(x) = \ln(x^2+1) - e^{-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + e^{-x} = \frac{x^2+1+2x-(x^2+1)}{x^2+1} + e^{-x} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 + e^{-x}.$$

- Αν $x \geq 0$ τότε $\frac{2x}{x^2+1} > 0$ και $e^{-x} > 0$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις

ανισώσεις έχουμε $\frac{2x}{x^2+1} + e^{-x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

- Αν $x < 0$ τότε

$$\bullet \quad x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e^0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 > 0 \text{ και}$$

$$\bullet \quad \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισώσεις έχουμε :

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 + e^{-x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$.

Συνεπώς η f θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

1397. i. Η $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 3 \\ 2x - 3, & x > 3 \end{cases}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$ ως

πολυωνυμική σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x) = 3 = f(3) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 3) = 3.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και άρα

σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x < 3 \\ 2, & x > 3 \end{cases}$. Έτσι έχουμε :

$$\text{Για } x < 3 \text{ είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$2x - 2$	-	$\emptyset$	+	
2				+
f(x)				

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ii. Η $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως

πολυωνυμική σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3 - x^2) = -1 = f(2) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 3) = -1.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και άρα

σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$. Έτσι έχουμε :

$$\text{Για } x < 2 \text{ είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0},$$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-2x$	+	$\emptyset$	-	
1				+
f(x)				

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

iii. Για την $f(x) = |x-1|$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- για $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ είναι $f(x) = |x-1| = x-1$ και
- για $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι $f(x) = |x-1| = -x+1$.

Έτσι έχουμε $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$

και $(1, +\infty)$ ως πολωνυμική σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 = f(1).$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και άρα σε

$$\text{όλο το } \mathbb{R}. \text{ Έχουμε : } f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε :

Για $x < 1$ είναι $f'(x) = -1 < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) = 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

iv. Για την $f(x) = |x^2 - 4|$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- για $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ ή } x \leq -2$ είναι
 $f(x) = |x^2 - 4| = x^2 - 4$ και
- για $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ είναι
 $f(x) = |x^2 - 4| = -x^2 + 4$.

Έτσι έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \\ -x^2 + 4, & -2 < x < 2 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στα

διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πολωνυμική σε καθένα από αυτά.

Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στα σημεία $x_0 = -2$ και $x_1 = 2$. Έχουμε :

$$- \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 0 = f(-2) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2 + 4) = 0.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

$$- \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 4) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0 = f(2).$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Συνεπώς η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -2 \text{ ή } x > 2 \\ -2x, & -2 < x < 2 \end{cases}$.

Έτσι έχουμε :

Για $x < -2$ ή $x > 2$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

και για $-2 < x < 2$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$2x$	$-$		$\oplus$		$+$
$-2x$		$+$	$\oplus$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Συνεπώς :

- $H f$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, 2]$.
- $H f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[2, +\infty)$.

1398. i. $H f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και

$(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x - 3) = 2 = f(1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 6x + 7) = 2.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και άρα σε

όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 1 \\ 2x - 6, & x > 1 \end{cases}$. Έτσι έχουμε :

Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -2}$, και

για $x > 1$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 3}$,

οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$2x + 4$	$-$	$\oplus$	$+$		
$2x - 6$				$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$
		T.E.	T.M.	T.E.	

Συνεπώς :

- ο $H f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -2$ το $f(-2) = -7$ και στο $x_2 = 3$ το $f(3) = -2$.
- ο $H f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 1$ το $f(1) = 2$.

ii. Για την $f(x) = x^3 - 3x|x|$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- για $x \geq 0$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2$ και
- για $x < 0$ είναι $f(x) = x^3 - 3x \cdot (-x) = x^3 + 3x^2$.

Έτσι έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2, & x \geq 0 \\ x^3 + 3x^2, & x < 0 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στα διαστήματα

$(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 3x^2) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2) = 0 = f(0).$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και άρα

$$\text{σε όλο το } \mathbb{R}. \text{ Έχουμε: } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & , x > 0 \\ 3x^2 + 6x & , x < 0 \end{cases}. \text{ Έτσι έχουμε:}$$

$$\text{Για } x < 0 \text{ είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=-2},$$

$$\text{και για } x > 0 \text{ είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=2}$$

, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$3x^2 - 6x$			○	○	
$3x^2 + 6x$		○	○		
f(x)					

T.M.

T.E.

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ το $f(-2) = 4$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$ το $f(2) = -4$.

$$\text{iii. Η } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , x \leq 2 \\ \ln(x-1) & , x > 2 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στα διαστήματα } (-\infty, 2) \text{ και}$$

$(2, +\infty)$ ως πολωνυμική στο πρώτο και λογαριθμική στο δεύτερο. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x) = 0 = f(2) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln(x-1)) = 0.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και άρα

$$\text{σε όλο το } \mathbb{R}. \text{ Έχουμε: } f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , x < 2 \\ \frac{1}{x-1} & , x > 2 \end{cases}. \text{ Έτσι έχουμε:}$$

Για $x < 2$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$, οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$2x - 2$		○		
$\frac{1}{x-1}$				+
f(x)				

T.E.

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = -1$.

- 1399.** Η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έτσι έχουμε :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x^2 g(x) \Rightarrow f'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x).$$

Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει :

$$f'(x) < 2xg(x) \Leftrightarrow \cancel{2xg(x)} + x^2 g'(x) < \cancel{2xg(x)} \Leftrightarrow x^2 g'(x) < 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} g'(x) < 0$$

δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

- 1400.** Έχουμε :

$$f(x) + \frac{1}{3}(f(x))^3 = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) + (f(x))^2 f'(x) = e^x + (x-1)e^x - x \Leftrightarrow$$

$$(1+f^2(x))f'(x) = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} - x \Leftrightarrow (1+f^2(x))f'(x) = xe^x - x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x(e^x - 1)}{1+f^2(x)}. \text{ Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :}$$

- Αν $x \leq 0$ τότε :

$$x \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq e^0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0, \text{ δηλαδή } x(e^x - 1) \geq 0, \text{ οπότε θα είναι } f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \leq 0.$$

- Αν $x > 0$ τότε :

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0, \text{ δηλαδή } x(e^x - 1) > 0, \text{ οπότε θα είναι } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- 1401.** i. Βρίσκουμε την παράγωγο της g :

$$g'(x) = f''(x)(x-\alpha) + \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} \Leftrightarrow g'(x) = f''(x)(x-\alpha).$$

Έτσι έχουμε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x)(x-\alpha) \stackrel{f''(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x = \alpha}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονotonίας της } g :$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$x-\alpha$	-	$\bigcirc$	+
$g'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς :

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$.

- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$.

και

- ο Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = \alpha$ το $g(\alpha) = 0$.

ii. Βρίσκουμε την παράγωγο της h : $h'(x) = f'(x+1) - f'(x)$.

Γνωρίζουμε πως είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν :

$$x+1 > x \quad \overset{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0,$$

δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1402. Έχουμε : $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow$

$$6f^2(x)f'(x) - 6f(x)f'(x) + 6f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$6f'(x)(f^2(x) - f(x) + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{6(f^2(x) - f(x) + 1)}.$$

Το τριώνυμο $f^2(x) - f(x) + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) - f(x) + 1 > 0$.

Έτσι έχουμε : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$.

Επιπλέον είναι :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	$\emptyset$	+
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

T.E.

Συμπεπώς :

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ το $f(0) = 0$.

Αν στην αρχική σχέση βάλουμε $x=0$ έχουμε :

$$2f^3(0) - 3f^2(0) + 6f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(2f^2(0) - 3f(0) + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{f(0)=0}} \text{ ή} \\ 2f^2(0) - 3f(0) + 6 = 0 \text{ με } \Delta < 0. \text{ Αδύνατη} \end{cases}.$$

1403. i. Έχουμε :

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x^2 + 1)'f(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$[(x^2 + 1)f(x)]' = (e^x)' \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = e^x + c \xrightarrow{x=0} f(0) = 1 + c \xrightarrow{f(0)=1} c = 0.$$

Άρα $(x^2 + 1)f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

ii. Είναι :

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2e^x + e^x - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x-1)^2e^x}{(x^2 + 1)^2} \geq 0,$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1404. i. Έχουμε : $h(0) = e^{-4 \cdot 0} - e^{-\alpha \cdot 0} = 1 - 1 = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x} - e^{-\alpha x}) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} (e^{4u} - e^{\alpha u}) \stackrel{\alpha > 4}{=} 0 - 0 = 0 = h(0).$$

ii. Η $h(x) = e^{-4x} - e^{-\alpha x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και παράγωγο :

$$h'(x) = -4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x}.$$

Έτσι έχουμε :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x} = 0 \Leftrightarrow 4e^{-4x} = \alpha e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \ln(4e^{-4x}) = \ln(\alpha e^{-\alpha x}) \Leftrightarrow$$

$$\ln 4 + \ln e^{-4x} = \ln \alpha + \ln e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \ln 4 - 4x = \ln \alpha - \alpha x \Leftrightarrow \alpha x - 4x = \ln \alpha - \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 4)x = \ln \alpha - \ln 4 \Leftrightarrow x = \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}.$$

Επιπλέον είναι :

- $-4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x} > 0 \Leftrightarrow 4e^{-4x} < \alpha e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \ln(4e^{-4x}) < \ln(\alpha e^{-\alpha x}) \Leftrightarrow$
 $\ln 4 + \ln e^{-4x} < \ln \alpha + \ln e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \ln 4 - 4x < \ln \alpha - \alpha x \Leftrightarrow$
 $\alpha x - 4x < \ln \alpha - \ln 4 \Leftrightarrow (\alpha - 4)x < \ln \alpha - \ln 4 \stackrel{\alpha - 4 > 0}{\Leftrightarrow} x < \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4} \text{ και}$
- $-4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x} < 0 \Leftrightarrow 4e^{-4x} > \alpha e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \ln(4e^{-4x}) > \ln(\alpha e^{-\alpha x}) \Leftrightarrow$
 $\ln 4 + \ln e^{-4x} > \ln \alpha + \ln e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \ln 4 - 4x > \ln \alpha - \alpha x \Leftrightarrow$
 $\alpha x - 4x > \ln \alpha - \ln 4 \Leftrightarrow (\alpha - 4)x > \ln \alpha - \ln 4 \stackrel{\alpha - 4 > 0}{\Leftrightarrow} x > \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}.$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}$	$+\infty$
$h'(x)$		+	⊖
$h(x)$		↗	↘
	T.E.	T.M.	

Συνεπώς :

- Η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ το $h(0) = 0$.
- Η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}$ το

$$h\left(\frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}\right) = e^{-4 \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}} - e^{-\alpha \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}}.$$

iii. Αφού x_1 είναι η ρίζα της παραγώγου τότε θα είναι $x_1 = \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4}$.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο :

$$h''(x) = 16e^{-4x} - \alpha^2 e^{-\alpha x} \text{ και τη μηδενίζουμε :}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4x} - \alpha^2 e^{-\alpha x} = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4x} = \alpha^2 e^{-\alpha x} \Leftrightarrow$$

$$\ln(16e^{-4x}) = \ln(\alpha^2 e^{-\alpha x}) \Leftrightarrow \ln 16 + \ln e^{-4x} = \ln \alpha^2 + \ln e^{-\alpha x} \Leftrightarrow$$

$$\ln 2^4 - 4x = 2 \ln \alpha - \alpha x \Leftrightarrow \alpha x - 4x = 2 \ln \alpha - 4 \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 4)x = 2(\ln \alpha - \ln 4) \Leftrightarrow x = \frac{2(\ln \alpha - \ln 4)}{\alpha - 4}.$$

Αφού λοιπόν x_2 είναι η ρίζα της δεύτερης παραγώγου τότε θα είναι :

$$x_2 = \frac{2(\ln \alpha - \ln 4)}{\alpha - 4} = 2 \frac{\ln \alpha - \ln 4}{\alpha - 4} = 2x_1 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 2x_1}.$$

1405. i. Είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}(x^2 + 4) - 2xe^{2x}}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2e^{2x} + 8e^{2x} - 2xe^{2x}}{(x^2 + 4)^2} = \frac{(2x^2 - 2x + 8)e^{2x}}{(x^2 + 4)^2} = \\ &= \frac{2(x^2 - x + 4)e^{2x}}{(x^2 + 4)^2} > 0, \end{aligned}$$

αφού είναι $e^{2x} > 0$, $(x^2 + 4)^2 > 0$ και για το τριώνυμο $x^2 - x + 4$ είναι $\Delta = -15 < 0$,

οπότε είναι $x^2 - x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γίνεται :

$$4e^{2x} \geq x^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{x^2 + 4} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(x) \geq f(0). \text{ Έχουμε :}$$

$$x \geq 0 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow 4e^{2x} \geq x^2 + 4 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

1406. i. Η $f(x) = x \ln x - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \ln x + \cancel{x} - \cancel{x} = \ln x$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f :$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ii. Είναι $\beta > \alpha > e > 1$, άρα βρισκόμαστε στο διάστημα $[1, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε :

$$\alpha < \beta \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - \alpha < \beta \ln \beta - \beta \Leftrightarrow \alpha(\ln \alpha - 1) < \beta(\ln \beta - 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \alpha - 1}{\ln \beta - 1} < \frac{\beta}{\alpha}, \text{ αφού } \alpha > 0 \text{ και } \beta > e \Leftrightarrow \ln \beta > \ln e \Leftrightarrow \ln \beta > 1 \Leftrightarrow \ln \beta - 1 > 0.$$

1407. i. Η $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{e^{x-1}(x-1) - e^{x-1}}{(x-1)^2} = \frac{e^{x-1}(x-2)}{(x-1)^2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x-1}(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow \underline{x=2}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	$\emptyset$	+
$f'(x)$	-	-	$\emptyset$	+
$f(x)$				

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, 2]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ii. Είναι $\alpha < \beta < 1$, άρα βρισκόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 1)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι έχουμε :

$$\alpha < \beta \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{e^{\alpha-1}}{\alpha-1} > \frac{e^{\beta-1}}{\beta-1} \stackrel{\alpha-1 < 0}{\Leftrightarrow} e^{\alpha-1} < e^{\beta-1} \frac{\alpha-1}{\beta-1} \stackrel{e^{\beta-1} > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{e^{\alpha-1}}{e^{\beta-1}} < \frac{\alpha-1}{\beta-1} \Leftrightarrow e^{\alpha-1-(\beta-1)} < \frac{\alpha-1}{\beta-1} \Leftrightarrow e^{\alpha-\beta} < \frac{\alpha-1}{\beta-1}.$$

1408. i. Η $f(x) = (x-1000)^{100} + x^{100}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 100(x-1000)^{99} + 100x^{99}$.

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100(x-1000)^{99} + 100x^{99} = 0 \Leftrightarrow (x-1000)^{99} + x^{99} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1000)^{99} = -x^{99} \Leftrightarrow (x-1000)^{99} = (-x)^{99} \Leftrightarrow x-1000 = -x \Leftrightarrow$$

$$2x = 1000 \Leftrightarrow \underline{x=500}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και μηδενίζεται στο $x = 500$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 500)$ και $(500, +\infty)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(0) = 100(-1000)^{99} = -100 \cdot 1000^{99} < 0, \text{ άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 500) \text{ και}$$

$$f'(1000) = 100 \cdot 1000^{99} > 0, \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (500, +\infty).$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	500	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$			

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 500]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[500, +\infty)$.

ii. Είναι $0 < 100 < 500$, άρα βρισκόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 500]$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι έχουμε :

$$0 < 100 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(0) > f(100) \Leftrightarrow (-1000)^{100} > (100 - 1000)^{100} + 100^{100} \Leftrightarrow 1000^{100} > (-900)^{100} + 100^{100} \Leftrightarrow 1000^{100} > 900^{100} + 100^{100}.$$

1409. i. Η $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{1}{x}(\ln 1 - \ln x)} = e^{-\frac{1}{x} \ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x} \ln x} (\ln x - 1). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x} \ln x} (\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e \text{ και}$$

$$\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	e	$+\infty$
$\ln x - 1$		–	+
$f'(x)$		–	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, e]$.

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$.

ii. Αφού είναι $v \geq 3$ τότε βρισκόμαστε στο διάστημα $[e, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε :

$$v < v+1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(v) < f(v+1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{v}} < \left(\frac{1}{v+1}\right)^{\frac{1}{v+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{v^{\frac{1}{v}}} < \frac{1}{(v+1)^{\frac{1}{v+1}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[v]{v}} < \frac{1}{\sqrt[v+1]{v+1}} \Leftrightarrow \sqrt[v]{v} > \sqrt[v+1]{v+1}.$$

1410. i. Η $f(x) = x^{\frac{1}{2x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{2x}}} = e^{\frac{1}{2x} \ln x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{2x} \ln x} \cdot \left(-\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2x^2} e^{\frac{1}{2x} \ln x} (1 - \ln x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2} e^{\frac{1}{2x} \ln x} (1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e \text{ και}$$

$$1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		$\oplus$	$-$
$f'(x)$		$\oplus$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

T.M.

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$.

και

ο Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = e$ το $f(e) = e^{\frac{1}{2e}}$.

ii. Αφού είναι $6 > 5 > 3 > e$ τότε βρίσκουμε στο διάστημα $[e, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι έχουμε :

$$6 > 5 > 3 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(6) < f(5) < f(3) \Leftrightarrow 6^{\frac{1}{12}} < 5^{\frac{1}{10}} < 3^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow \sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}.$$

1411. i. Είναι $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\ln x^x}} = e^{\frac{1}{x \ln x}}$.

$$H \ f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } (0, +\infty) \text{ ως αποτέλεσμα}$$

πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x \ln x}} \stackrel{u = \frac{1}{x \ln x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0 = f(0),$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και συνεπώς είναι

συνεχής στο $[0, +\infty)$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και παράγωγο :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x \ln x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x \ln x}} (1 - \ln x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x \ln x}} (1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e \text{ και}$$

$$1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	-
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, e]$.

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$.

ii. Το 2 και το 3 βρίσκονται εκατέρωθεν του e οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f . Έτσι έχουμε :

$$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{4}.$$

Είναι $4 > 3 > e$ άρα βρίσκμαστε στο διάστημα $[e, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι έχουμε :

$$4 > 3 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(4) < f(3) \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}.$$

1412. i. Η $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \ln x}{\ln^2(x+1)} = \frac{(x+1) \ln(x+1) - x \ln x}{x(x+1) \ln^2(x+1)} = \frac{(x+1) \ln(x+1) - x \ln x}{x(x+1) \ln^2(x+1)}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

– Αν $0 < x < 1$ τότε :

$$\bullet \begin{cases} x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x \ln x < 0 \Leftrightarrow \underline{-x \ln x > 0} \\ x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0 \stackrel{x+1 > 0}{\Leftrightarrow} \underline{(x+1) \ln(x+1) > 0} \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } \underline{(x+1) \ln(x+1) - x \ln x > 0}.$$

$$\bullet \quad x > 0 \text{ και } x+1 > 1 > 0 \text{ και } \ln^2(x+1) > 0, \text{ άρα } \underline{\underline{x(x+1) \ln^2(x+1) > 0}}.$$

$$\text{Άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1).$$

– Αν $x \geq 1$ τότε :

$$\bullet \quad x < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln(x+1) \text{ και}$$

$$\bullet \quad x < x+1,$$

Αφού οι ανισώσεις αποτελούνται από θετικούς όρους, μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και παίρνουμε :

$$x \ln x < (x+1) \ln(x+1) \Leftrightarrow (x+1) \ln(x+1) - x \ln x > 0.$$

$$\text{Επιπλέον είναι και } x(x+1) \ln^2(x+1) > 0 \text{ οπότε } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$.

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$x < x+1 \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln(x+1)} < \frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\ln x \cdot \ln(x+2) < \ln^2(x+1), \text{ αφού}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0 \text{ και}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x+2 > 2 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+2) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x+2) > 0.$$

1413. i. Είναι :

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h-1} \stackrel{u=\frac{x}{h}}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 1 \\ u \rightarrow x}} \frac{f(u) - f(x)}{\frac{x}{u} - 1} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{\frac{x-u}{u}} = \lim_{u \rightarrow x} \left(-u \frac{f(u) - f(x)}{u-x} \right) =$$

$$= -xf'(x). \text{ Έχουμε λοιπόν :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h-1} = \frac{1}{x} + x - 2 \Leftrightarrow -xf'(x) = \frac{1}{x} + x - 2 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + 2\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - x + 2\ln x \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} - x + 2\ln x + c \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = 1 - 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}, x > 0.$$

ii. Η $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2} = -\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

iii. Είναι :

$$\alpha < \beta \stackrel{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\beta} < 1 \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > f(1) \Leftrightarrow 2\ln \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} > 2\ln 1 - 1 + \frac{1}{1} \Leftrightarrow$$

$$2\ln \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow 2\ln \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 2(\ln \alpha - \ln \beta) > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha - \ln \beta > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}.$$

1414. α. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $(2, 3) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2).$$

Είναι $f(2) < f'(x) < f(3)$ άρα και :

$$f(2) < f'(\xi) < f(3) \Leftrightarrow f(2) < \frac{f(3)-f(2)}{3-2} < f(3) \Leftrightarrow \cancel{f(3)} - f(2) < \cancel{f(3)} \Leftrightarrow f(2) > 0, \text{ δηλαδή } f'(x) > f(2) > 0, \text{ συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το } \mathbb{R}.$$

β. Εφαρμόζουμε και πάλι **θεώρημα μέσης τιμής** για την f στο $(1, 2) \subseteq \mathbb{R}$. Άρα

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_1 \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1).$$

Είναι $f(2) < f'(x) < f(3)$ άρα και :

$$f(2) < f'(\xi_1) < f(3) \Leftrightarrow \frac{f(2)-f(1)}{2-1} < f(3) \Leftrightarrow \cancel{f(2)} < \cancel{f(2)} - f(1) \Leftrightarrow f(1) < 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και είναι $f(1) \cdot f(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, 2)$.

γ. Θα εφαρμόσουμε το **θεώρημα μέσης τιμής** στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, 3]$ αντίστοιχα.

– Η f είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x_0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{\cancel{f(x_0)}^0 - f(1)}{x_0 - 1} = -\frac{f(1)}{x_0 - 1}.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[x_0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 3)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_0, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - \cancel{f(x_0)}^0}{3 - x_0} = \frac{f(3)}{3 - x_0}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } \frac{f(3)}{f'(\xi_2)} - \frac{f(1)}{f'(\xi_1)} = \frac{\cancel{f(3)}}{\frac{\cancel{f(3)}}{3-x_0}} - \frac{\cancel{f(1)}}{-\frac{\cancel{f(1)}}{x_0-1}} = 3 - \cancel{x_0} + \cancel{x_0} - 1 = 2.$$

δ. i. Αφού είναι $x > 2$, θα εφαρμόσουμε στην f το **θεώρημα μέσης τιμής** στο διάστημα $[2, x]$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $t \in (2, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(t) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 1}{x - 2}.$$

Είναι $f(2) < f'(x) < f(3)$ άρα και :

$$f(2) < f'(t) < f(3) \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)-1}{x-2} < f(3) \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)-1}{x-2} \stackrel{x-2>0}{\Leftrightarrow} \\ x-2 < f(x)-1 \Leftrightarrow f(x) > x-1.$$

ii. Είναι $f(x) > x-1 > 0$ αφού $x > 2$. Οπότε $0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x-1}$ και κατά μείζονα λόγο

$$0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{x-1}. \text{ Για κάθε } x > 2 \text{ είναι } \ln x > 0 \text{ επομένως } 0 \leq \frac{\ln x}{f(x)} \leq \frac{\ln x}{x-1}.$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0, \text{ οπότε σύμφωνα με το}$$

κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0$.

1415. α. i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2016.$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(2x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 2 \cdot 2016 - 2016 = 2016,$

όπου $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{x} \stackrel{u=2x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{f(u)}{\frac{u}{2}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} 2 \frac{f(u)}{u} = 2 \cdot 2016.$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(0)-f(x)+f(0)}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(2x)-f(0)}{x} - \frac{f(x)-f(0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{f(2x)-f(0)}{2x} - \frac{f(x)-f(0)}{x} \right) = 2-1=1,$

όπου $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \stackrel{u=2x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u)-f(0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)-f(0)}{u-0} = f'(0) = 1.$$

β. Η f είναι συνεχής στο $[x, 2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 2x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2x)-f(x)}{2x-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(2x)-f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(\xi) = f(2x)-f(x) \Leftrightarrow \\ f(2x) = f(x) + xf'(\xi).$$

γ. Είναι :

$$g'(x) = \frac{(2f'(2x)-f'(x))x - (f(2x)-f(x))}{x^2} = \frac{2xf'(2x) - xf'(x) - f(2x) + f(x)}{x^2} = \\ = \frac{2xf'(2x) - xf'(x) - \cancel{f(x)} - xf'(\xi) + \cancel{f(x)}}{x^2} = \frac{2xf'(2x) - xf'(x) - xf'(\xi)}{x^2} =$$

$$= \frac{2f'(2x) - f'(x) - f'(\xi)}{x}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\xi < 2x \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(2x) \Leftrightarrow f'(2x) - f'(\xi) > 0 \text{ και}$$

$$x < 2x \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(2x) \Leftrightarrow f'(2x) - f'(x) > 0,$$

οπότε προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$2f'(2x) - f'(x) - f'(\xi) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{2f'(2x) - f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0,$$

Δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

δ. Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$x < 2x \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(2x) \Leftrightarrow \frac{f(2x) - f(x)}{x} < \frac{f(4x) - f(2x)}{2x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$2f(2x) - 2f(x) < f(4x) - f(2x) \Leftrightarrow 2f(x) + f(4x) > 3f(2x).$$

ε. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της g :

$$g((0, +\infty)) \stackrel{g \text{ γν.αύξ.}}{=} \stackrel{g \text{ συνεχής}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right)} = (1, 2016),$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 2016.$$

Άρα θα έχουμε :

$$1 < g(x) < 2016 \Leftrightarrow 1 < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < 2016 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x < f(2x) - f(x) < 2016x \Leftrightarrow$$

$$x + f(x) < f(2x) < 2016x + f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

1416. α. Έχουμε : $f(f(x)) = x - 2 \Rightarrow f'(f(x))f'(x) = 1 \neq 0$.

Δηλαδή $f'(x) \neq 0$ και αφού είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$,

συνεπώς η f' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Βάζοντας στη σχέση

$$f(f(x)) = x - 2 \text{ όπου } x=1 \text{ παίρνουμε : } f(f(1)) = -1 \Rightarrow f(0) = -1.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 > 0.$$

Και επειδή η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Για $x=2$ έχουμε :

$$f(3 \cdot 2) + f(2 + 4) = f(6) + f(2 \cdot 2 + 2) \Leftrightarrow f(6) + f(6) = f(6) + f(6) \text{ που ισχύει.}$$

Το $x=2$ λοιπόν είναι ρίζα της εξίσωσης. Παρατηρούμε ότι :

$$3x - (2x + 2) = 3x - 2x - 2 = x - 2 \text{ και } x + 4 - 6 = x - 2.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

— Αν $x < 2$ τότε $x - 2 < 0$, οπότε :

$$3x - (2x + 2) < 0 \Leftrightarrow 3x < 2x + 2 \stackrel{f \text{ γν.ανξ.}}{\Leftrightarrow} f(3x) < f(2x + 2) \text{ και}$$

$$x + 4 - 6 < 0 \Leftrightarrow x + 4 < 6 \stackrel{f \text{ γν.ανξ.}}{\Leftrightarrow} f(x + 4) < f(6),$$

οπότε προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$f(3x) + f(x + 4) < f(6) + f(2x + 2).$$

Επομένως στο $(-\infty, 2)$ η εξίσωση $f(3x) + f(x + 4) = f(6) + f(2x + 2)$ δεν έχει λύση.

– Αν $x > 2$ τότε $x - 2 > 0$, οπότε :

$$3x - (2x + 2) > 0 \Leftrightarrow 3x > 2x + 2 \stackrel{f \text{ γν.ανξ.}}{\Leftrightarrow} f(3x) > f(2x + 2) \text{ και}$$

$$x + 4 - 6 > 0 \Leftrightarrow x + 4 > 6 \stackrel{f \text{ γν.ανξ.}}{\Leftrightarrow} f(x + 4) > f(6),$$

οπότε προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$f(3x) + f(x + 4) > f(6) + f(2x + 2).$$

Επομένως στο $(2, +\infty)$ η εξίσωση $f(3x) + f(x + 4) = f(6) + f(2x + 2)$ δεν έχει λύση.

Άρα το $x=2$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

γ. Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) \geq \alpha$. Τότε θα έχουμε :

$$f(\alpha) \geq \alpha \stackrel{f \text{ γν.ανξ.}}{\Leftrightarrow} f(f(\alpha)) \geq f(\alpha).$$

Επιπλέον είναι $f(\alpha) \geq \alpha$, άρα $f(f(\alpha)) \geq \alpha \Leftrightarrow \alpha - 2 \geq \alpha \Leftrightarrow -2 \geq 0$, άτοπο.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < x$.

δ. Βάζοντας στη σχέση $f(f(x)) = x - 2$ όπου $x=0$ παίρνουμε :

$$f(f(0)) = -2 \Rightarrow f(-1) = -2. \text{ Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα}$$

διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ αντίστοιχα.

– Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-1 - (-2)}{1} = 1.$$

– Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-(-1)}{1} = 1.$$

Έτσι έχουμε : $(f'(x_1))^{2016} (f'(x_2))^{2017} = 1^{2016} \cdot 1^{2017} = 1$. Επομένως υπάρχουν

$$x_1, x_2 \in (-1, 1) \text{ με } x_1 \neq x_2, \text{ τέτοια ώστε } (f'(x_1))^{2016} (f'(x_2))^{2017} = 1.$$

ε. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq x_0 - 1$.

Τότε θα είναι :

$$- \quad f(x_0) < x_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) + 1 < x_0 \stackrel{f \text{ γν.ανξ}}{\Leftrightarrow} f(f(x_0) + 1) < f(x_0) \stackrel{f(x+1)=f(x)+1}{\Leftrightarrow} \\ f(f(x_0)) + 1 < f(x_0) \Leftrightarrow x_0 - 2 + 1 < f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) > x_0 - 1, \text{ άτοπο.}$$

ή

$$- \quad f(x_0) > x_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) + 1 > x_0 \stackrel{f \text{ γν.ανξ}}{\Leftrightarrow} f(f(x_0) + 1) > f(x_0) \stackrel{f(x+1)=f(x)+1}{\Leftrightarrow} \\ f(f(x_0)) + 1 > f(x_0) \Leftrightarrow x_0 - 2 + 1 > f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) < x_0 - 1, \text{ άτοπο.}$$

Άρα είναι $f(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1417. α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - 1 + 4x$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, και

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} - 1 + 4 \cdot \frac{1}{e} = -2 + \frac{4}{e} = \frac{4-2e}{e} < 0 \text{ και } g(1) = -1 + 4 = 3 > 0.$$

Έτσι έχουμε $g\left(\frac{1}{e}\right) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 - 4x_0$.

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα

$x_1 > 0$ (έστω $x_1 < x_0$) της $g(x) = 0$, οπότε θα έχουμε :

Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_0]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_0) με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 4 \text{ και } g(x_1) = 0 = g(x_0), \text{ οπότε σύμφωνα με το } \textbf{θεώρημα Rolle} \text{ υπάρχει}$$

τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_0)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} + 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\frac{1}{4}$.

Άτοπο αφού $\xi \in (x_1, x_0) \subseteq (0, +\infty)$. Άρα η $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 - 4x$ έχει μοναδική ρίζα.

β. Η $f(x) = 2x^2 - 2x + x \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 4x - 2 + \ln x + 1 = \ln x - 1 + 2x = g(x). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = x_0}}.$$

Για την g έχουμε $g'(x) = \frac{1}{x} + 4 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η g μηδενίζεται στο x_0 , και είναι γνησίως αύξουσα, άρα θα είναι αρνητική αριστερά του x_0 και θετική δεξιά του x_0 .

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	x_0	$+\infty$
g(x)		$\ominus$	+
f'(x)		$\ominus$	+
f(x)		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, x_0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$.

1418. α. Η $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}, & x \neq 1 \\ f'(1), & x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής για $x \neq 1$ ως αποτέλεσμα πράξεων

συνεχών συναρτήσεων. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = g(1).$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$, δηλαδή η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και συνεπώς είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β. Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot (x-1) - (f(x)-f(1))}{(x-1)^2}$.

Για την f διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για $x < 1$ και μία για $x > 1$. Έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, 1]$ και $[1, x]$ αντίστοιχα.

- Η f είναι συνεχής στο $[x, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

$$\text{Άρα : } x < \xi < 1 \stackrel{f''(x) > 0}{\Leftrightarrow}_{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x) < f'(\xi) < f'(1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \stackrel{x < 1}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-1)f'(x) > f(x)-f(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) - (f(x)-f(1)) > 0.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

$$\text{Άρα : } 1 < \xi < x \stackrel{f''(x) > 0}{\Leftrightarrow}_{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(1) < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \stackrel{x > 1}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) - f(1) < (x-1)f'(x) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) - (f(x) - f(1)) > 0.$$

Και στις δύο περιπτώσεις αποδείξαμε ότι $(x-1)f'(x) - (f(x) - f(1)) > 0$ δηλαδή $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση τιμών παραμέτρων

1419. Η $f(x) = 4x^3 - 3ax^2 + 12x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 12x^2 - 6ax + 12$.

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6ax + 12 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - ax + 2 > 0.$$

Για το τριώνυμο $2x^2 - ax + 2$ έχουμε $\Delta = a^2 - 16$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

– Για $\Delta > 0$ το τριώνυμο θα έχει δύο άνισες ρίζες, έστω ρ_1, ρ_2 , με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$. Δηλαδή η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Καταλήγουμε σε άτοπο αφού θέλουμε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

– Για $\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow a^2 < 16 \Leftrightarrow |a| < 4 \Leftrightarrow \boxed{-4 < a < 4}$, το τριώνυμο δεν έχει καμία ρίζα, και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

– Για $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4$ έχουμε :

- Για $\boxed{a = 4}$ είναι

$$f'(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x^2 - 2x + 1) = 12(x-1)^2 \geq 0, \text{ και αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και στο } 1, \text{ η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το } \mathbb{R}.$$

- Για $\boxed{a = -4}$ είναι

$$f'(x) = 12x^2 + 24x + 12 = 12(x^2 + 2x + 1) = 12(x+1)^2 \geq 0, \text{ και αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και στο } -1, \text{ η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το } \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $a \in [-4, 4]$.

1420. Η $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

$$\text{συνεχής) με παράγωγο : } f'(x) = \frac{\lambda e^{\lambda x} (x^2 + \lambda^2) - 2x e^{\lambda x}}{(x^2 + \lambda^2)^2} = \frac{e^{\lambda x} (\lambda x^2 - 2x + \lambda^3)}{(x^2 + \lambda^2)^2}.$$

Είναι $e^{\lambda x} > 0$ και $(x^2 + \lambda^2)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι $\lambda x^2 - 2x + \lambda^3 > 0$.

Για το τριώνυμο $\lambda x^2 - 2x + \lambda^3$ έχουμε $\Delta = 4 - 4\lambda^4 = 4(1 - \lambda^4) = 4(1 + \lambda^2)(1 - \lambda^2)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Για $\Delta > 0$ το τριώνυμο θα έχει δύο άνισες ρίζες, έστω ρ_1, ρ_2 , με
 $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$ αν $\lambda > 0$ και
 $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$ αν $\lambda < 0$.
 Δηλαδή θα υπάρχουν διαστήματα στα οποία η f θα είναι γνησίως φθίνουσα.
 Καταλήγουμε σε άτοπο αφού θέλουμε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Για $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(1+\lambda^2)(1-\lambda^2) < 0 \stackrel{1+\lambda^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1-\lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \Leftrightarrow$
 $\lambda < -1$ ή $\lambda > 1$, το τριώνυμο δεν έχει καμία ρίζα, και είναι
 $f'(x) > 0$ αν $\lambda > 0$, δηλαδή η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε
 δεχόμαστε το $\boxed{\lambda > 1}$, και
 $f'(x) < 0$ αν $\lambda < 0$, δηλαδή η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε
 απορρίπτουμε το $\lambda < -1$.
- Για $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(1+\lambda^2)(1-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$
 έχουμε :
 - Για $\boxed{\lambda = 1}$ είναι $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$, και αφού η f
 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 1, η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο
 το $\mathbb{R}$.
 - Για $\lambda = -1$ είναι $f'(x) = \frac{e^{-x}(-x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(x+1)^2}{e^x(x^2 + 1)^2} \leq 0$, και
 απορρίπτεται.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\lambda \geq 1$.

1421. Η $f(x) = \ln(x^2 + \alpha^2) + \alpha x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη
 (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + \alpha^2} + \alpha = \frac{2x + \alpha x^2 + \alpha^3}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha x^2 + 2x + \alpha^3}{x^2 + \alpha^2}.$$

Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι :

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha x^2 + 2x + \alpha^3}{x^2 + \alpha^2} < 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + 2x + \alpha^3 < 0.$$

Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + 2x + \alpha^3$ έχουμε $\Delta = 4 - 4\alpha^4 = 4(1 - \alpha^4) = 4(1 + \alpha^2)(1 - \alpha^2)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Για $\Delta > 0$ το τριώνυμο θα έχει δύο άνισες ρίζες, έστω ρ_1, ρ_2 , με
 $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$ αν $\alpha > 0$ και
 $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$ αν $\alpha < 0$.
 Δηλαδή θα υπάρχουν διαστήματα στα οποία η f θα είναι γνησίως αύξουσα.
 Καταλήξαμε σε άτοπο αφού θέλουμε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

– Για

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(1+\alpha^2)(1-\alpha^2) < 0 \stackrel{1+\alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1-\alpha^2 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 1 \Leftrightarrow |\alpha| > 1 \Leftrightarrow$$

$\alpha < -1$ ή $\alpha > 1$, το τριώνυμο δεν έχει καμία ρίζα, και είναι

$f'(x) > 0$ αν $\alpha > 0$, δηλαδή η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε

απορρίπτουμε το $\alpha > 1$, και

$f'(x) < 0$ αν $\alpha < 0$, δηλαδή η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε

δεχόμαστε το $\boxed{\alpha < -1}$.

– Για $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(1+\alpha^2)(1-\alpha^2) = 0 \Leftrightarrow 1-\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$
έχουμε :

- Για $\alpha = 1$ είναι $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$, και απορρίπτεται.

- Για $\boxed{\alpha = -1}$ είναι $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} = \frac{-(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 0$, και αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 1, η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\alpha \leq -1$.

1422. Η $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\lambda x^2}{2} + (\lambda^2 - \lambda + 1)x + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = x^2 - \lambda x + (\lambda^2 - \lambda + 1)$.

Για το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 - \lambda + 1)$ έχουμε

$$\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 = -3\lambda^2 + 4\lambda - 4.$$

Η διακρίνουσα του νέου τριωνύμου $-3\lambda^2 + 4\lambda - 4$ είναι $\Delta = -32 < 0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο $-3\lambda^2 + 4\lambda - 4$ είναι παντού αρνητικό, δηλαδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 - \lambda + 1)$ είναι αρνητική.

Οπότε το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 - \lambda + 1)$ είναι πάντοτε θετικό :

$$x^2 - \lambda x + (\lambda^2 - \lambda + 1) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονοτονία & λύση εξισώσεων – ανισώσεων

1423. i. Η $f(x) = 2x + \sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2 - \eta \mu x > 0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε : $2x(x-1) < \sin x - \sin x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x < \sin x - \sin x^2 \Leftrightarrow$

$$2x^2 + \sin x^2 < 2x + \sin x \Leftrightarrow f(x^2) < f(x) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0.$$

Έτσι έχουμε $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$ και κάνουμε πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x^2 - x$	+	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	+

Άρα $\boxed{x \in (0,1)}$.

- 1424. i.** Η $f(x) = x + e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 1 + e^x > 0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3 \Leftrightarrow x^3 + e^{x^3+x} = x + e^{2x} \Leftrightarrow x^3 + x + e^{x^3+x} = 2x + e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$f(x^3+x) = f(2x) \xrightarrow[f \text{ 1-1}]{f \text{ γν.αύξ.}} x^3 + x = 2x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=0} \text{ ή } (x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 1}).$$

iii. Έχουμε :

$$e^{x^2-1} + x^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 + e^{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow f(x^2-1) > f(0) \xrightarrow{f \text{ γν.αύξ.}} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \boxed{x < -1 \text{ ή } x > 1}.$$

- 1425. i.** Η $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Έχουμε :

$$\ln(\varepsilon\phi x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow \ln \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\ln(\eta\mu x) - \ln(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \ln(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x - 1 + \ln(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x) \xrightarrow[f \text{ 1-1}]{f \text{ γν.αύξ.}}$$

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}} \text{ αφού } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- 1426. i.** Η $f(x) = \alpha^x - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1$. Είναι :

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow \ln \alpha < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \alpha < 0 \xrightarrow{\alpha^x > 0} \alpha^x \ln \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha^x \ln \alpha - 1 < -1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) < 0. \text{ Συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε :

$$\alpha^{x^2+4} - \alpha^{5x-2} < x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \alpha^{x^2+4} - x^2 - 4 < \alpha^{5x-2} - 5x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{x^2+4} - (x^2 + 4) < \alpha^{5x-2} - (5x - 2) \Leftrightarrow f(x^2+4) < f(5x-2) \xrightarrow{f \text{ γν.φθ.}}$$

$$x^2 + 4 > 5x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Έτσι έχουμε $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$ και κάνουμε πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

Άρα $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

1427. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f αρχικά στο διάστημα $[a, \beta]$:

– Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Έπειτα εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[a, x]$

– Η f είναι συνεχής στο $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x) , οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\text{Είναι : } \xi < x \stackrel{f' \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

1428. i. Η $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0, \text{ με } f'(-1) = 0 \text{ (η } f' \text{ μηδενίζεται σε}$$

πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε :

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2 + 1) = 4 + \ln(4^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) = f(4) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{x = 4}.$$

$$\text{iii. Έχουμε : } x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4 + 1) - \ln(x^6 + 1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln(x^6 + 1) > x^2 + \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow f(x^3) > f(x^2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0$$

Έτσι έχουμε $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$ και κάνουμε πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	Φ	+	+
$x-1$	-	-	Φ	+

$x^3 - x^2$	$-$	$-$	$+$
-------------	-----	-----	-----

Άρα $x \in (1, +\infty)$.

1429. i. Είναι :

$$f^3(x) + f(x) = e^{1-x} \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = -e^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$(3f^2(x) + 1)f'(x) = -e^{1-x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{e^{1-x}}{3f^2(x) + 1} < 0, \text{ αφού } e^{1-x} > 0 \text{ και}$$

$$3f^2(x) + 1 > 0. \text{ Συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε :

$$f(\eta\mu^2 x) > f(x^2) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*, \text{ αφού για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } |\eta\mu x| \leq |x|.$$

1430. α. Η $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{-x} + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + e^{-x} = \frac{2x + (x^2 + 1)e^{-x}}{x^2 + 1} = e^{-x} \frac{2xe^x + x^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

Είναι $e^{-x} > 0$ και $x^2 + 1 > 0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

– Αν $x < 0$ τότε

$$x < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} xe^x > x \Leftrightarrow 2xe^x > 2x \Leftrightarrow$$

$$2xe^x + x^2 + 1 > 2x + x^2 + 1 \Leftrightarrow 2xe^x + x^2 + 1 > (x + 1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x < 0.$$

– Αν $x > 0$ τότε είναι $2xe^x > 0$ και $x^2 + 1 > 0$, άρα $2xe^x + x^2 + 1 > 0$.

Συνεπώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επίσης είναι και $f'(0) = 1 > 0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. i. Είναι :

$$e^x \ln(x^2 + 1) = 1 - e^x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = e^{-x} - 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(0) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x = 0}.$$

ii. Είναι :

$$\ln \frac{1 + \eta\mu^2 \theta}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 \theta} = e^{-\eta\mu\theta} - e^{-\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \ln(1 + \eta\mu^2 \theta) - \ln(1 + \sigma\upsilon\nu^2 \theta) = e^{-\eta\mu\theta} - e^{-\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow$$

$$\ln(\eta\mu^2 \theta + 1) - e^{-\eta\mu\theta} + 1 = \ln(\sigma\upsilon\nu^2 \theta + 1) - e^{-\sigma\upsilon\nu\theta} + 1 \Leftrightarrow f(\eta\mu\theta) = f(\sigma\upsilon\nu\theta) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}}.$$

γ. Έχουμε : $\ln \frac{1+x^2}{2} < e^{-x} - \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln(1+x^2) - \ln 2 < e^{-x} - e^{-1} \Leftrightarrow$

$$\ln(x^2+1) - e^{-x} + 1 < \ln 2 - e^{-1} + 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x < 1.$$

$$\text{Άρα } \boxed{x \in (-\infty, 1]}.$$

1431. i. Πρέπει η $f'(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή πρέπει $f'(x) > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Στη σχέση $f(f'(x)) + f(x) = 0$ βάζουμε όπου $x=1$ και έχουμε :

$$f(f'(1)) + \cancel{f(1)}^0 = 0 \Leftrightarrow f(f'(1)) = 0 \Leftrightarrow f(f'(1)) = f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\underset{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}} f'(1) = 1.$$

iii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(f'(x)) + f(x) &= 0 \Rightarrow f(f'(f'(x))) + f(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \\ f(f'(f'(x))) &= -f(f'(x)) \stackrel{\text{δοσμένη σχέση}}{\Leftrightarrow} f(f'(f'(x))) = f(x) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\underset{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}} f'(f'(x)) = x. \end{aligned}$$

iv. Είναι :

$$\begin{aligned} f(f'(x)) + f(x) &= 0 \Rightarrow f'(f'(x)) \cdot f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow xf''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ xf''(x) + xf'(x) &= 0 \Leftrightarrow (xf'(x))' = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1. \end{aligned}$$

Άρα :

$$\begin{aligned} xf'(x) = 1 &\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \\ f(1) = c_2 &\Leftrightarrow c_2 = 0. \text{ Δηλαδή } f(x) = \ln x, x > 0. \end{aligned}$$

1432. i. Η $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=\pm 1}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της } f:$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-		-		+
$x^2 - 1$	+		-		+
$f'(x)$	-		+		+
f(x)	↘		↗		↗
		T.E.	T.M.	T.E.	

Αφού λοιπόν θα είναι $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ τα τοπικά ακρότατα με $x_1 < x_2 < x_3$, διαπιστώνουμε πως $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$.

Άρα έχουμε τα σημεία $A(-1, \alpha - 1)$, $B(0, \alpha)$ και $\Gamma(1, \alpha - 1)$.

$$\text{Οπότε } \lambda_{AB} = \frac{\alpha - (\alpha - 1)}{0 - (-1)} = 1 \text{ και } \lambda_{B\Gamma} = \frac{\alpha - 1 - \alpha}{1} = -1.$$

$$\text{Είναι λοιπόν } \lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow AB \perp B\Gamma.$$

ii. Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και είναι $f(-1) \cdot f(0) = (a-1)a < 0$, αφού $a > 0$ και $a < 1$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, άρα και $1-1$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-1, 0)$.

1433. i. Η $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 + 2 - 2\sin 2x = 3x^2 + 2 - 2(1 - 2\eta\mu^2 x) = 3x^2 + \cancel{2} - \cancel{2} + 4\eta\mu^2 x = 3x^2 + 4\eta\mu^2 x \geq 0. \text{ (η } f' \text{ μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της). Συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε : $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 2 - \eta\mu 2 > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, και είναι $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

1434. i. Είναι : $f^3(x) + f(x) = \sin x \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow$

$$(3f^2(x) + 1)f'(x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{3f^2(x) + 1} < 0, \text{ αφού } \eta\mu x > 0 \text{ στο } (0, \pi)$$

και $3f^2(x) + 1 > 0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

ii. Έχουμε :

$$f^3(x) + f(x) = \sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} f^3\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = 0 \quad \left(f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \neq 0\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Το $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$, άρα και $1-1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

1435. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x \ln x - x$.

Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, και

$$g(1) = f(1) - 1 < 0 \text{ (} f(x) < 1 \text{ για κάθε } x \in [1, e]) \text{ και}$$

$$g(e) = f(e) > 0 \text{ (} f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e]).$$

Έτσι έχουμε $g(1) \cdot g(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \ln x_0 - x_0 = 0$.

Επιπλέον είναι : $g'(x) = f'(x) + \ln x + \cancel{x} - \cancel{x} = f'(x) + \ln x$. Έχουμε :

$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \underline{\ln x > 0}$ και $\underline{f'(x) \geq 0}$, άρα θα είναι $g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$.

Συνεπώς η g είναι και 1-1 οπότε το $x_0 \in (1, e)$ είναι η μοναδική λύση της $g(x) = 0$.

1436. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x + e^x$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, και

$g(0) = f(0) + 1 < 0$ ($f(x) < -1$ για κάθε $x \in [0, 1]$) και

$g(1) = f(1) - 1 + e > 0$ ($f(x) > 1 - e$ για κάθε $x \in [0, 1]$).

Έτσι έχουμε $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 - e^{x_0}$.

Επιπλέον είναι : $g'(x) = f'(x) - 1 + e^x$. Έχουμε :

$x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow \underline{e^x - 1 > 0}$ και $\underline{f'(x) \geq 1 > 0}$, άρα θα είναι $g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Συνεπώς η g είναι και 1-1 οπότε το $x_0 \in (0, 1)$ είναι η μοναδική λύση της $g(x) = 0$.

1437. i. Αφού η f' είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) \neq 0$, τότε η f' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και θα είναι $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$. Δηλαδή η f θα είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε : $f(x) = -f(2-x) \xrightarrow{x=1} f(1) = -f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Δηλαδή το $x=1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$, και αφού η f είναι γνησίως μονότονη, άρα και 1-1, τότε αυτή η λύση είναι μοναδική.

iii. Έχουμε : $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \xrightarrow{x=1} g(1) = \frac{f(1)}{f'(1)} \xrightarrow[\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}]{f'(x) \neq 0} g(1) = 0$.

Δηλαδή η C_g τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$. Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned} \epsilon\phi\omega = g'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - \cancel{g(1)}^0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \cdot \frac{1}{f'(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \cdot \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{f'(x)} = \cancel{f'(1)} \cdot \frac{1}{\cancel{f'(1)}} = 1. \end{aligned}$$

Άρα $\epsilon\phi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, 0)$, με τον άξονα $x'x$.

1438. i. Είναι $\lambda = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$. Οπότε :

$$f(x) = \frac{\kappa x - x^2}{4} \Rightarrow f'(x) = \frac{\kappa - 2x}{4} \xrightarrow{x=0} f'(0) = \frac{\kappa}{4} \Leftrightarrow 1 = \frac{\kappa}{4} \Leftrightarrow \kappa = 4.$$

ii. Η $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{4-2x}{4} = \frac{2-x}{2}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\oplus$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

T.M.

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το οποίο είναι και ολικό, στο $x_1 = 2$ το $f(2) = 1$.

iii. Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[2, 4]$.

Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Στο $[2, 4]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1 - 1$, συνεπώς αυτό το $\xi \in (2, 4)$ είναι μοναδικό.

Έχουμε τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(4, 0)$, οπότε θα είναι $\lambda_{AB} = \frac{0 - 1}{4 - 2} = -\frac{1}{2} = f'(\xi)$.

Δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη το ξ (μοναδικό), είναι παράλληλη στην ευθεία AB .

1439. i. Για την $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$ έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) = \ln \frac{1}{e^5} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{e^5}} = \ln e^{-5} + \frac{e^5}{4} = -5 + \frac{e^5}{4} = \frac{e^5 - 20}{4} > 0,$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \ln 1^0 - \ln 4 + 1 = -\ln 4 + \ln e < 0, \text{ αφού } e < 4 \Leftrightarrow \ln e < \ln 4$$

$$\text{και } f(e^5) = \ln e^5 + \frac{1}{4e^5} = 5 + \frac{1}{4e^5} > 0.$$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$, είναι η

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1). \text{ Έτσι έχουμε : } f(x) = \ln x + \frac{1}{4x} \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = \frac{1}{4} \text{ και}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow f'(1) = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Άρα } y - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}}.$$

iii. Η $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x-1}{4x^2}$.

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{4x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x-1=0 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

iv. Είναι :

- $f\left(\frac{1}{e^5}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ με f συνεχή στο $\left[\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right]$ οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα**

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right) \subseteq A$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{4}\right]$, άρα και 1-1, συνεπώς το x_1 είναι η μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $\left(0, \frac{1}{4}\right]$.

- $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f(e^5) < 0$ με f συνεχή στο $\left[\frac{1}{4}, e^5\right]$ οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα**

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left(\frac{1}{4}, e^5\right) \subseteq A$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, άρα και 1-1, συνεπώς το x_2 είναι η μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Άρα η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1440. Α. Η $f(x) = x^3 + 3x + \sin x - 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο :

$$f'(x) = 3x^2 + 3 - \eta\mu x > 0, \text{ αφού } 3x^2 \geq 0 \text{ και } 3 - \eta\mu x > 0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, και $f(0) = \sin 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ και

$$f(\pi) = \pi^3 + 3\pi + \sin \pi - 2 = \pi^3 + 3\pi - 1 - 2 = \pi^3 + 3\pi - 3 = \pi^3 + 3(\pi - 1) > 0.$$

Έτσι έχουμε $f(0) \cdot f(\pi) < 0$, οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, \pi]$, οπότε είναι και 1-1, δηλαδή η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

Γ. Είναι :

$$f(x^2 + 8) = f(6x) \quad \begin{matrix} f \text{ γν.αύξ. στο } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow_{f \text{ 1-1}} \end{matrix} \quad x^2 + 8 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=2 \text{ ή } x=4}.$$

$$\begin{aligned} \Delta. \text{ Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x + \sin x - 2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x + \sin x - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + 3 + \frac{\sin x - 1}{x} \right) = 0 + 3 + 0 = 3. \end{aligned}$$

1441. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + \ln x - 2$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η

$$\text{οποία έχει προφανή ρίζα το } x=1. \text{ Ακόμη έχουμε : } f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x + 1}{x}.$$

Το τριώνυμο $2x^2 + x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα, συνεπώς είναι θετικό για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επιπλέον είναι $x > 0$, οπότε έχουμε $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1. Λύνουμε την εξίσωση :

$$x^2 + x + \ln x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{10-x} - \ln x - 3$ με πεδίο ορισμού το $(0, 10]$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $x=1$. Ακόμη έχουμε :

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{10-x}} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{2\sqrt{10-x}} + \frac{1}{x} \right) < 0, \text{ αφού } x \in (0, 10],$$

δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10]$, άρα και 1-1. Λύνουμε την εξίσωση :

$$\sqrt{10-x} - \ln x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{10-x} - \ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x + x - 1 - e$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $x=1$. Ακόμη έχουμε :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^x + 1 > 0, \text{ αφού } x \in (0, +\infty), \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty), \text{ άρα και 1-1. Λύνουμε την εξίσωση :}$$

$$\ln x + e^x + x = 1 + e \Leftrightarrow \ln x + e^x + x - 1 - e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow \boxed{x=1}.$$

iv. Έχουμε : $x^2 + 3x + 4 = 4e^{-x} \Leftrightarrow x^2 e^x + 3xe^x + 4e^x = 4.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x + 3xe^x + 4e^x - 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $x=0$. Ακόμη έχουμε :

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x + 3e^x + 3xe^x + 4e^x = x^2 e^x + 5xe^x + 7e^x = (x^2 + 5x + 7)e^x.$$

Το τριώνυμο $x^2 + 5x + 7$ έχει αρνητική διακρίνουσα, συνεπώς είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον είναι $e^x > 0$, οπότε έχουμε $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$. Λύνουμε την εξίσωση :

$$x^2 e^x + 3xe^x + 4e^x = 4 \Leftrightarrow x^2 e^x + 3xe^x + 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(0) \Leftrightarrow \boxed{x=0}.$$

v. Έχουμε : $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2x.$

Από εφαρμογή του σχολικού ισχύει $\ln x \leq x - 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Βάζοντας όπου x το e^{2x} έχουμε $\ln e^{2x} \leq e^{2x} - 1 \Leftrightarrow 2x \leq e^{2x} - 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 \geq 2x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}.$

1442. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \ln(x-1) - 8$ με πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$, η

οποία έχει προφανή ρίζα το $x=2$. Ακόμη έχουμε : $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x-1}.$

Είναι $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$, άρα και $\frac{1}{x-1} > 0$. Επιπλέον είναι $3x^2 > 0$, οπότε έχουμε

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Λύνουμε την ανίσωση :

$$x^3 + \ln(x-1) < 8 \Leftrightarrow x^3 + \ln(x-1) - 8 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow$$

$$x < 2, \text{ κι επειδή είναι και } x \in (1, +\infty), \text{ τελικά έχουμε } \boxed{x \in (1, 2)}.$$

ii. Έχουμε : $\ln \frac{1}{x} + 1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln x^{-1} + 1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow -\ln x + 1 > \sqrt{x}.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -\ln x + 1 - \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $x=1$.

Ακόμη έχουμε : $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 0$, αφού $x > 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Λύνουμε την ανίσωση :

$$-\ln x + 1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow -\ln x + 1 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x < 1,$$

κι επειδή είναι και $x \in (0, +\infty)$, τελικά έχουμε $\boxed{x \in (0, 1)}.$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - e$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η

οποία έχει προφανή ρίζα το $x=1$.

Ακόμη έχουμε : $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$, αφού $x > 0$ και $e^x > 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Λύνουμε την ανίσωση :

$$e^x + \ln x \geq e \Leftrightarrow e^x + \ln x - e \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \boxed{x \geq 1}.$$

1443. i. Είναι :

$$f^3(x) + f(x) = e^{-x} - 1 \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$(3f^2(x) + 1)f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{e^{-x}}{3f^2(x) + 1} < 0, \text{ αφού } e^{-x} > 0 \text{ και}$$

$$3f^2(x) + 1 > 0. \text{ Συνεπώς η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{ii. Λύνουμε την εξίσωση : } f(\ln x) = f(1-x) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow}_{f \text{ 1-1}} \ln x = 1-x.$$

Ψάχνουμε τις λύσεις της εξίσωσης $\ln x = 1-x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία

έχει προφανή ρίζα το $x=1$. Ακόμη έχουμε : $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1. Λύνουμε την εξίσωση :

$$\ln x = 1-x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(1) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}.$$

1444. Για να δείξουμε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3\ln x = 4x - 3 + \ln x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + 2\ln x = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα.}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^2 - 4x + 3 + 2\ln x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $x=1$. Ακόμη έχουμε :

$$h'(x) = 2x - 4 + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x} = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{x} = \frac{2(x-1)^2}{x} \geq 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in (0, +\infty)$. (η h' μηδενίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της).

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1. Λύνουμε την εξίσωση :

$$x^2 - 4x + 3 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = h(1) \stackrel{h \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1}.$$

Συνεπώς οι C_f και C_g τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο, το $M(1, f(1)) = M(1, 1)$.

$$\text{Για την } f(x) = x^2 + 3\ln x \text{ είναι } f'(x) = 2x + \frac{3}{x}, \text{ άρα } f'(1) = 5.$$

$$\text{Για την } g(x) = 4x - 3 + \ln x \text{ είναι } g'(x) = 4 + \frac{1}{x}, \text{ άρα } g'(1) = 5.$$

Άρα στο σημείο M δέχονται και κοινή εφαπτομένη.

1445. Αφού οι α, β, γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με ορθή τη γωνία $\hat{A}$, τότε ισχύει $\beta < \alpha, \gamma < \alpha$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

i. Είναι :

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1 \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x \cdot \ln \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x \cdot (\ln \beta - \ln \alpha) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x \cdot (\ln \gamma - \ln \alpha).$$

Ισχύει :

$$\begin{cases} \beta < \alpha \Leftrightarrow \ln \beta < \ln \alpha \Leftrightarrow \ln \beta - \ln \alpha < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x (\ln \beta - \ln \alpha) < 0 \\ \gamma < \alpha \Leftrightarrow \ln \gamma < \ln \alpha \Leftrightarrow \ln \gamma - \ln \alpha < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x (\ln \gamma - \ln \alpha) < 0 \end{cases}.$$

Προσθέτοντας λοιπόν τις ανισώσεις κατά μέλη προκύπτει $f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι το $x=2$ αφού $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Λύνουμε λοιπόν την εξίσωση :

$$\alpha^x = \beta^x + \gamma^x \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(2) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow}_{f \text{ 1-1}} \boxed{x=2}.$$

iii. Είναι $13^2 = 169$ και $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, δηλαδή οι αριθμοί 5, 12 και 13 είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, άρα σύμφωνα με το ερώτημα ii. η ρίζα της εξίσωσης $5^x + 12^x = 13^x$ είναι ο αριθμός $x=2$.

1446. i. Είναι : $f(x) = 2e^x - x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2e^x - 2x = 2(e^x - x)$.

Από εφαρμογή του σχολικού ισχύει $\ln x \leq x - 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Βάζοντας όπου x το e^x έχουμε :

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0 \Rightarrow 2(e^x - x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii. Είναι :

$$2(e^{x^2} - e^x) = x^4 - x^2 \Leftrightarrow 2e^{x^2} - 2e^x = x^4 - x^2 \Leftrightarrow 2e^{x^2} - (x^2)^2 = 2e^x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$2e^{x^2} - (x^2)^2 + 1 = 2e^x - x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x^2) = f(x) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow}_{f \text{ 1-1}} x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=0 \text{ ή } x=1}.$$

iii. Αφαιρούμε τις σχέσεις $2e^a = a^2 + \beta$ και $2e^\beta = \beta^2 + \alpha$ κατά μέλη και παίρνουμε :

$$2e^a - 2e^\beta = a^2 - \beta^2 + \beta - \alpha \Leftrightarrow 2e^a - a^2 + \alpha = 2e^\beta - \beta^2 + \beta \Leftrightarrow$$

$$2e^a - a^2 + 1 + \alpha = 2e^\beta - \beta^2 + 1 + \beta \Leftrightarrow f(a) + \alpha = f(\beta) + \beta.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$. Έχουμε :

$$g'(x) = f'(x) + 1 > 0, \text{ αφού } f'(x) > 0.$$

Δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς και 1-1.

Έτσι έχουμε : $f(\alpha) + \alpha = f(\beta) + \beta \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta) \stackrel{g^{-1}}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta$.

1447. i. Είναι :

$$e^{f(x)} + \sqrt{1+f(x)} = 2 \Rightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + \frac{f'(x)}{2\sqrt{1+f(x)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)} + \frac{1}{2\sqrt{1+f(x)}} \right) f'(x) = 0.$$

Είναι $e^{f(x)} + \frac{1}{2\sqrt{1+f(x)}} \neq 0 (> 0)$ άρα $f'(x) = 0$, δηλαδή η f είναι σταθερή.

ii. Αφού η f είναι σταθερή τότε θα είναι $f(x) = c$.

$$\text{Άρα } e^c + \sqrt{1+c} = 2 \Leftrightarrow e^c + \sqrt{1+c} - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(c) = e^c + \sqrt{1+c} - 2$ με πεδίο ορισμού το $(-1, +\infty)$, η οποία έχει προφανή ρίζα την $c=0$. Ακόμη έχουμε :

$$g'(c) = e^c + \frac{1}{2\sqrt{1+c}} > 0 \text{ για κάθε } c \in (-1, +\infty).$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, άρα και 1-1.

Λύνουμε την εξίσωση :

$$e^c + \sqrt{1+c} - 2 = 0 \Leftrightarrow g(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = g(0) \stackrel{g^{-1}}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Οπότε $\boxed{f(x) = 0}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1448. Έχουμε :

$$f^3(x) + \sqrt{f(x)} = 2e^x - x + 1 - \ln 2 \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(3f^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \right) f'(x) = 2e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2e^x - 1}{3f^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}}.$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2e^x - 1}{3f^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}} = 0 \stackrel{3f^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \neq 0}{\Leftrightarrow} 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln 2}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2 \text{ και}$$

$$2e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\ln 2, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$2e^x - 1$	-	$\bigcirc$	+
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$			

T.E.

Συνεπώς :

– Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\ln 2]$.– Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\ln 2, +\infty)$.

και

- ο H f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (το οποίο είναι και ολικό) στο $x_1 = -\ln 2$ το $f(-\ln 2)$.

Για να βρούμε το $f(-\ln 2)$ εργαζόμαστε ως εξής :

$$f^3(-\ln 2) + \sqrt{f(-\ln 2)} = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 + 1 - \ln 2 \Leftrightarrow f^3(-\ln 2) + \sqrt{f(-\ln 2)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$f^3(-\ln 2) + \sqrt{f(-\ln 2)} - 2 = 0 \quad \stackrel{u=f(-\ln 2)}{\Leftrightarrow} \quad u^3 + \sqrt{u} - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u) = u^3 + \sqrt{u} - 2$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $u=1$. Ακόμη έχουμε :

$$g'(u) = 3u^2 + \frac{1}{2\sqrt{u}} > 0 \text{ για κάθε } u \in (0, +\infty).$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

$$\text{Λύνουμε την εξίσωση : } u^3 + \sqrt{u} - 2 = 0 \Leftrightarrow g(u) = 0 \Leftrightarrow g(u) = g(1) \stackrel{g^{1-1}}{\Leftrightarrow} u = 1.$$

Άρα $f(-\ln 2) = 1$.**1449.** Έχουμε :

$$\ln f(x) + e^{f(x)} = 2x \ln x - 3x + 2\sqrt{e} + e \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + e^{f(x)} \cdot f'(x) = 2 \ln x + 2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)} \right) f'(x) = 2 \ln x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)}}. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 1}{\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)}} = 0 \quad \stackrel{\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)} \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{e}}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$2 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e} \text{ και}$$

$$2\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$2\ln x - 1$		$\ominus$	$+$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \sqrt{e}]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\sqrt{e}, +\infty)$ και
 - ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = \sqrt{e}$ το $f(\sqrt{e})$.

Για να βρούμε το $f(\sqrt{e})$ εργαζόμαστε ως εξής :

$$\ln f(\sqrt{e}) + e^{f(\sqrt{e})} = 2\sqrt{e} \ln \sqrt{e} - 3\sqrt{e} + 2\sqrt{e} + e \Leftrightarrow \ln f(\sqrt{e}) + e^{f(\sqrt{e})} = e \Leftrightarrow$$

$$\ln f(\sqrt{e}) + e^{f(\sqrt{e})} - e = 0 \quad \stackrel{u=f(\sqrt{e})}{\Leftrightarrow} \quad \ln u + e^u - e = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u) = \ln u + e^u - e$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία έχει προφανή ρίζα το $u=1$. Ακόμη έχουμε :

$$g'(u) = \frac{1}{u} + e^u > 0 \text{ για κάθε } u \in (0, +\infty).$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και $1-1$.

Λύνουμε την εξίσωση :

$$\ln u + e^u - e = 0 \Leftrightarrow g(u) = 0 \Leftrightarrow g(u) = g(1) \stackrel{g^{1-1}}{\Leftrightarrow} u = 1. \text{ Άρα } f(\sqrt{e}) = 1.$$

1450. i. Η $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και

συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

Οπότε μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x		$\ominus$	$+$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς :

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ii. Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα έχουμε :

$$3 < 5 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} 3x > 5x \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(3x) < f(5x) \text{ και}$$

$$8 < 10 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} 8x > 10x \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(8x) < f(10x).$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$f(3x) + f(8x) < f(5x) + f(10x) \text{ για κάθε } x < 0.$$

iii. Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι το $x=0$.

Παρατηρούμε πως η εξίσωση $f(3x) + f(8x) = f(5x) + f(10x)$ δεν έχει λύση για $x < 0$ αφού ισχύει $f(3x) + f(8x) < f(5x) + f(10x)$.

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχουμε :

$$3 < 5 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 3x < 5x \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(3x) < f(5x) \text{ και}$$

$$8 < 10 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 8x < 10x \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(8x) < f(10x).$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$f(3x) + f(8x) < f(5x) + f(10x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η εξίσωση $f(3x) + f(8x) = f(5x) + f(10x)$ δεν έχει λύση ούτε για $x < 0$.

Η μοναδική λύση λοιπόν της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x=0$.

1451. i. Η $f(x) = 2\ln x + x^2 - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{2}{x} + 2x > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Προφανής ρίζα της $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$ είναι το $x=1$.

– Για $0 < x < 1$ έχουμε :

$$x > x^5 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x^5) \text{ και } x^2 > x^{10} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x^2) > f(x^{10}).$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$f(x) + f(x^2) > f(x^5) + f(x^{10}) \text{ για κάθε } 0 < x < 1.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$ δεν έχει λύση για $0 < x < 1$.

– Για $x > 1$ έχουμε :

$$x < x^5 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^5) \text{ και } x^2 < x^{10} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x^2) < f(x^{10}).$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις κατά μέλη έχουμε :

$$f(x) + f(x^2) < f(x^5) + f(x^{10}) \text{ για κάθε } x > 1.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$ δεν έχει λύση ούτε για $x > 1$.

Συνεπώς η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι το $x=1$.

1452. i. Η $f(x) = \ln x - x + 2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

(άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	1	$+\infty$
x			
$1-x$		⊖	-
$f'(x)$		⊖	-
$f(x)$		↗	↘

T.M.

Συνεπώς :

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το οποίο είναι και ολικό, στο $x_1=1$ το $f(1)=1$.

ii. Είναι :

$$\ln(\alpha\beta\gamma)+3=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow \ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma+3=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow$$

$$\ln\alpha-\alpha+\ln\beta-\beta+\ln\gamma-\gamma+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\alpha-\alpha+2+\ln\beta-\beta+2+\ln\gamma-\gamma+2+3=2+2+2 \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=3.$$

$$\text{Είναι : } \begin{cases} f(\alpha) \leq f(1) \\ f(\beta) \leq f(1) \\ f(\gamma) \leq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 1 \\ f(\beta) \leq 1 \\ f(\gamma) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) \leq 3.$$

Για να ισχύει η ισότητα $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=3$, θα πρέπει η συνάρτηση f να παίρνει τη μέγιστη τιμή της, $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=1$, το οποίο ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

1453. Η $f(x)=\ln(e^x+\lambda e^{-x})$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα

και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x)=\frac{e^x-\lambda e^{-x}}{e^x+\lambda e^{-x}}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x-\lambda e^{-x}}{e^x+\lambda e^{-x}}=0 \Leftrightarrow e^x-\lambda e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}-\lambda=0 \Leftrightarrow e^{2x}=\lambda \Leftrightarrow$$

$$2x=\ln\lambda \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{\ln\lambda}{2}}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$e^x-\lambda e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^{2x}-\lambda>0 \Leftrightarrow e^{2x}>\lambda \Leftrightarrow 2x>\ln\lambda \Leftrightarrow x>\frac{\ln\lambda}{2} \text{ και}$$

$$e^x-\lambda e^{-x}<0 \Leftrightarrow e^{2x}-\lambda<0 \Leftrightarrow e^{2x}<\lambda \Leftrightarrow 2x<\ln\lambda \Leftrightarrow x<\frac{\ln\lambda}{2}, \text{ οπότε}$$

κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln\lambda}{2}$	$+\infty$
$e^x-\lambda e^{-x}$	-	⊖	+
$f'(x)$	-	⊖	+
$f(x)$	↘		↗

T.E.

Συνεπώς :

- ο Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι και ολικό, στο $x_1 = \frac{\ln \lambda}{2}$ το

$$f\left(\frac{\ln \lambda}{2}\right) = \ln(2\sqrt{\lambda}), \text{ όπου}$$

$$f\left(\frac{\ln \lambda}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\ln \lambda}{2}} + \lambda e^{-\frac{\ln \lambda}{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{\lambda} + \lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \ln \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \ln \frac{2\lambda \sqrt{\lambda}}{\lambda} = \ln(2\sqrt{\lambda}).$$

Άρα $A(x_0, f(x_0)) = A\left(\frac{\ln \lambda}{2}, \ln(2\sqrt{\lambda})\right)$. Είναι $x = \frac{\ln \lambda}{2}$ και $y = \ln(2\sqrt{\lambda})$, άρα :

$$y = \ln(2\sqrt{\lambda}) \Leftrightarrow y = \ln 2 + \frac{\ln \lambda}{2} \Leftrightarrow \boxed{y = \ln 2 + x}.$$

Ο γεωμετρικός τύπος του A είναι μία ευθεία.

- 1454.** Η $f(x) = x^3 - ax^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = 3x^2 - 2ax$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2a) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ ή } \underline{\underline{x = \frac{2a}{3}}}.$$

Είτε είναι $a < 0$, είτε $a > 0$, θα έχουμε δύο τοπικά ακρότατα της f :

$$\text{Το } A(0, f(0)) = A(0, 0) \text{ και το } B\left(\frac{2a}{3}, f\left(\frac{2a}{3}\right)\right) = B\left(\frac{2a}{3}, -\frac{4a^3}{27}\right).$$

Για το A είναι $y = -\frac{1}{2}x^3 \xrightarrow{\text{για } x=0} y = -\frac{1}{2}0^3 = 0$, άρα το A επαληθεύει την καμπύλη.

Για το B είναι $y = -\frac{1}{2}x^3 \xrightarrow{\text{για } x=\frac{2a}{3}} y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8a^3}{27} = -\frac{4a^3}{27}$, άρα και το B την επαληθεύει.

- 1455.** Η $f(x) = (x+1)e^{-ax}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = e^{-ax} - a(x+1)e^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax - a)$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-ax}(1 - ax - a) = 0 \xrightarrow{e^{-ax} \neq 0} 1 - ax - a = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1-a}{a}}}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$\frac{1-a}{a}$	$+\infty$
$1 - ax - a$ ($a > 0$)	+	$\bigcirc$	-
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

T.M.

Συνεπώς : Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1-a}{a}$ το

$$f\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} + 1\right) e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha-1}.$$

Θεωρούμε την τιμή του ακρότατου σαν συνάρτηση του α και τη μελετάμε :

$$\text{Έστω } h(\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha-1}. \text{ Είναι } h'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} e^{\alpha-1} = e^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\right) = e^{\alpha-1} \frac{\alpha-1}{\alpha^2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} \frac{\alpha-1}{\alpha^2} = 0 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha-1=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha=1}}.$$

Άρα :

α	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(\alpha)$		$\oplus$	$+$
$h(\alpha)$		$\searrow$	$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς για $\boxed{\alpha=1}$ η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστη και ισούται με $h(1)=1$.

1456. Η $f(x) = e^{\lambda x} - x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με παράγωγο : $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1$. Έτσι έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda x = \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x = \underline{\underline{-\frac{1}{\lambda} \ln \lambda}}.$$

Επιπλέον είναι :

$$\lambda e^{\lambda x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} > \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda x > \ln \frac{1}{\lambda} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} x > -\frac{1}{\lambda} \ln \lambda \text{ και}$$

$$\lambda e^{\lambda x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda x < \ln \frac{1}{\lambda} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} x < -\frac{1}{\lambda} \ln \lambda, \text{ οπότε κάνουμε τον πίνακα}$$

μονοτονίας της f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\lambda} \ln \lambda$	$+\infty$
$f'(x)$		$\oplus$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς : Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln \lambda$ το

$$f\left(-\frac{1}{\lambda} \ln \lambda\right) = e^{\lambda\left(-\frac{1}{\lambda} \ln \lambda\right)} + \frac{1}{\lambda} \ln \lambda = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \ln \lambda = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}. \text{ Θεωρούμε την τιμή του}$$

ακρότατου σαν συνάρτηση του λ και τη μελετάμε. Έστω $h(\lambda) = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}$ με πεδίο

$$\text{ορισμού το σύνολο } A = (0, +\infty). \text{ Είναι } h'(\lambda) = \frac{\frac{1}{\lambda} - (1 + \ln \lambda)}{\lambda^2} = \frac{1 - 1 - \ln \lambda}{\lambda^2} = -\frac{\ln \lambda}{\lambda^2}$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } h'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln \lambda}{\lambda^2} = 0 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln \lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$-\ln \lambda > 0 \Leftrightarrow \ln \lambda < 0 \Leftrightarrow \ln \lambda < \ln 1 \Leftrightarrow \lambda < 1 \text{ και}$$

$$-\ln \lambda < 0 \Leftrightarrow \ln \lambda > 0 \Leftrightarrow \ln \lambda > \ln 1 \Leftrightarrow \lambda > 1.$$

Άρα :

λ	0	1	$+\infty$
λ^2		+	+
$-\ln \lambda$		$\ominus$	-
$h'(\lambda)$		$\ominus$	-
$h(\lambda)$		$\nearrow$	$\searrow$

T.M.

Συνεπώς για $\boxed{\lambda=1}$ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f γίνεται μέγιστη και ισούται με $h(1)=1$

1457. Η $f(x) = x^a e^{2a-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) με παράγωγο :

$$f'(x) = ax^{a-1}e^{2a-x} - x^a e^{2a-x} = e^{2a-x} (ax^{a-1} - x^a) = e^{2a-x} x^a \left(\frac{a}{x} - 1 \right) = e^{2a-x} \cdot x^a \cdot \frac{a-x}{x}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2a-x} \cdot x^a \cdot \frac{a-x}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x^a \neq 0 \\ e^{2a-x} \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow a-x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=a}}.$$

Οπότε κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f :

x	0	a	$+\infty$
$a-x$		+	$\ominus$
x		+	+
$f'(x)$		+	$\ominus$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

T.M.

Συνεπώς : Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = a$ το

$$f(a) = a^a e^a = e^{\ln a^a} \cdot e^a = e^{a \ln a} \cdot e^a = e^{a \ln a + a}.$$

Θεωρούμε την τιμή του ακρότατου σαν συνάρτηση του a και τη μελετάμε :

Έστω $h(a) = e^{a \ln a + a}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(0, +\infty)$. Είναι

$$h'(a) = e^{a \ln a + a} \cdot (\ln a + 1 + 1) = e^{a \ln a + a} \cdot (\ln a + 2). \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$h'(a) = 0 \Leftrightarrow e^{a \ln a + a} \cdot (\ln a + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln a + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln a = -2 \Leftrightarrow$$

$$\ln a = \ln e^{-2} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = e^{-2}}}. \text{ Επιπλέον είναι :}$$

$$\ln a + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln a > -2 \Leftrightarrow \ln a > \ln e^{-2} \Leftrightarrow a > e^{-2} \text{ και}$$

$$\ln a + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln a < -2 \Leftrightarrow \ln a < \ln e^{-2} \Leftrightarrow a < e^{-2}.$$

Άρα :

a	0	e^{-2}	$+\infty$
$\ln a + 2$		$\ominus$	+
$h'(a)$		$\ominus$	+
$h(a)$		$\searrow$	$\nearrow$

T.E.

Συνεπώς για $\boxed{a = e^{-2}}$ η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστη και ισούται με $h(e^{-2}) = e^{e^{-2} \ln e^{-2} + e^{-2}} = e^{-e^{-2}}.$