

Μαθηματικά Γ ΕΠΑΛ

Θεωρία



νέο φροντιστήριο

...και πέτυχες!

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση και ποιές συναρτήσεις ονομάζονται πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής ή απλώς συναρτήσεις;

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B . Αν το A είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το $\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις αυτές λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς συναρτήσεις.

2. Πώς ορίζεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $f(x)$ όταν αυτή εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο;

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

3. Πότε δύο συναρτήσεις είναι ίσες;

Δύο συναρτήσεις είναι ίσες όταν έχουν τον ίδιο τύπο και το ίδιο πεδίο ορισμού.

4. Έστω συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα σύνολο A . Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$S = f + g$$

$$D = f - g$$

$$P = f \cdot g$$

$$R = f / g$$

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

Το άθροισμα $S = f + g$ με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$

Η διαφορά $D = f - g$ με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$

Το γινόμενο $P = f \cdot g$ με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$

Το πηλίκο $R = f / g$ με $R(x) = f(x) / g(x)$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

5. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της συνάρτησης f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy ;

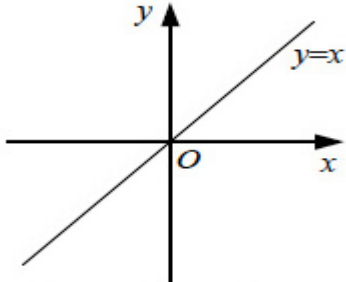
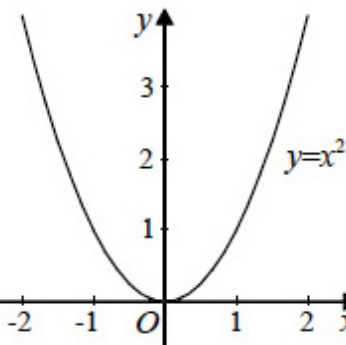
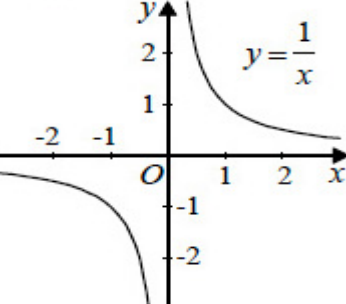
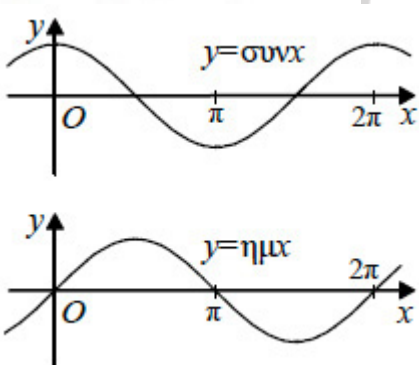
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

**6. Τι ονομάζουμε εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ;
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των εξής βασικών συναρτήσεων.**

α. $y = x$, β. $y = x^2$, γ. $y = \frac{1}{x}$, δ. $y = \sin x$, ε. $y = \eta\mu x$

Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f , μόνο όταν $y=f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

Οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων απεικονίζονται παρακάτω:

	Η καμπύλη της συνάρτησης είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.
	Η καμπύλη της συνάρτησης είναι μια παραβολή.
	Η καμπύλη της συνάρτησης είναι μια υπερβολή.
	Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

7. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

8. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

9. Πότε μία συνάρτηση ονομάζεται γνησίως μονότονη;

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

10. Πότε μία συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

11. Τι ονομάζουμε ακρότατα μίας συνάρτησης;

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης.

12. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g οι οποίες έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω να διατυπώσετε όλες τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης.

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμών, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = kl_1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1 \ell_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell_1^v$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\ell_1}$$

13. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

14. Τι ονομάζουμε παράγωγο μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

15. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

16. Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_0 ($f'(x_0)$);

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$ και το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

17. Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$;

Ονομάζεται η παράγωγος της f στο x_0 , δηλαδή $f'(x_0)$.

18. Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$;

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

19. Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης $f(x)$ της οποίας δεν ορίζεται η παράγωγος σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Ως παράδειγμα μπορεί να αναφερθεί η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x=0$. Διότι όταν $h < 0$, έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

ενώ όταν $h > 0$, έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

20. Τι ονομάζουμε παράγωγο της συνάρτησης f ;

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f' .

21. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f ;

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' .

22. Να αποδείξετε ότι: $(c)' = 0$

Έχουμε $f(x + h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Άρα, $(c)' = 0$.

23. Να αποδείξετε ότι: $(x)' = 1$

Έχουμε $f(x + h) - f(x) = (x + h) - x = h$, και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Άρα, $(x)' = 1$.

24. Να αποδείξετε ότι: $(x^2)' = 2x$

Έχουμε $f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x + h)h$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x + h.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Άρα, $(x^2)' = 2x$

25. Να αποδείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$.

Έχουμε

$F(x + h) - F(x) = cf(x + h) - cf(x) = c(f(x + h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x).$$

Άρα, $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

26. Να αποδείξετε ότι: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)), \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα, $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

27. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ
$(c)' = 0$	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
$(x)' = 1$	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(x^\rho)' = \rho \cdot x^{\rho-1}$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	
$\left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = ((x)^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$	

28. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την μονοτονία.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

29. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τα ακρότατα.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

νέο φροντιστήριο

1. Τι είναι η στατιστική;

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

2. Τι είναι η δημοσκόπηση;

Οι έρευνες των ανθρώπινων πληθυσμών αναφέρονται και ως δημοσκοπήσεις.

3. Τι ονομάζεται πληθυσμός;

Σε κάθε περίπτωση που έχουμε ένα σύνολο και θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά του ονομάζουμε αυτό το σύνολο πληθυσμό. Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού.

4. Τι ονομάζεται μεταβλητή ενός πληθυσμού και τι τιμές μιας μεταβλητής;

Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε έναν πληθυσμό ονομάζεται μεταβλητή και συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαίο γράμμα. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται τιμές της μεταβλητής.

5. Πότε μια μεταβλητή ονομάζεται ποιοτική ή κατηγορική και πότε ποσοτική; Πόσα και ποια είδη ποσοτικών μεταβλητών υπάρχουν;

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

- 1) Σε ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος με τιμές A, B, AB, O, το φύλο με τιμές αγόρι, κορίτσι, καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό κτλ.
- 2) Σε ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
 - (a) Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,...), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,...,6) κτλ.
 - (b) Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α , β). Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ' Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

6. Τι είναι η απογραφή;

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται απογραφή.

7. Τι ονομάζουμε δείγμα και πότε ένα δείγμα χαρακτηρίζεται ως αντιπροσωπευτικό;

Όπου η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή οικονομικά και χρονικά ασύμφορη, ο ερευνητής μαζεύει πληροφορίες από κάποια μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται δείγμα. Κάνει τις παρατηρήσεις του στο δείγμα αυτό και μετά γενικεύει τα συμπεράσματά του για ολόκληρο τον πληθυσμό. Τα συμπεράσματα όμως που θα προκύψουν από τη μελέτη του δείγματος θα είναι αξιόπιστα, θα ισχύουν δηλαδή με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό, αν η επιλογή του δείγματος γίνει με σωστό τρόπο, ώστε το δείγμα να είναι, όπως λέμε, αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Στην πράξη, ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

8. Τι είναι στατιστικοί πίνακες και σε τι διακρίνονται;

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών πινάκων ή γραφικών παραστάσεων, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων σε πίνακες γίνεται με την κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, με τρόπο που να διευκολύνεται η σύγκριση των στοιχείων και η καλύτερη ενημέρωση του αναγνώστη σχετικά με τη δομή του πληθυσμού που ερευνάμε.

Οι στατιστικοί πίνακες διακρίνονται στους:

- (a) γενικούς πίνακες, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,
- (b) ειδικούς πίνακες, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

9. Τι περιέχει ένας στατιστικός πίνακας;

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

- (a) τον τίτλο, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,
- (b) τις επικεφαλίδες των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,
- (c) το κύριο σώμα (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,
- (d) την πηγή, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ'αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

10. Τι ονομάζεται συχνότητα ν_i μιας τιμής x_i μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n ;

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα ν_i , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων. Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή: $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$

11. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n ;

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , δηλαδή: $f_i = \frac{\nu_i}{n}, i = 1, 2, \dots, k$

12. Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τη σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n ; Να γίνουν οι αποδείξεις.

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$ αφού $0 \leq \nu_i \leq n$.

ii. $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$, αφού

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n} + \dots + \frac{\nu_k}{n} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

13. Τι είναι ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n ;

Οι ποσότητες x_i, ν_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων ή απλά πίνακας συχνοτήτων.

14. Τι ονομάζουμε κατανομή συχνοτήτων και τι κατανομή σχετικών συχνοτήτων;

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, ν_i) λέμε ότι αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) , ή των ζευγών $(x_i, f_i \%)$, την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.

15. Τι ονομάζεται αθροιστική συχνότητα N_i και τι αθροιστική σχετική συχνότητα F_i μιας τιμής x_i μιας μεταβλητής X και τι εκφράζουν οι ποσότητες αυτές;

Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i , οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

16. Τι είναι το ραβδόγραμμα και για τη γραφική παράσταση ποιών μεταβλητών χρησιμοποιείται;

Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

17. Τι είναι το διάγραμμα συχνοτήτων, τι το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, για τη γραφική παράσταση ποιών μεταβλητών χρησιμοποιούνται και τι είναι τα πολύγωνα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων;

Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων. Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < \dots < x_k$) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων ν_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i , οπότε έχουμε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Ενώνοντας τα σημεία (x_i, ν_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε.

18. Τι είναι το κυκλικό διάγραμμα και για τη γραφική παράσταση ποιών μεταβλητών χρησιμοποιείται;

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό

διάγραμμα συχνοτήτων, τότε: $\alpha_i = \nu_i \frac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ \cdot f_i$ για $i=1,2,\dots,k$.

19. Τι είναι το σημειόγραμμα;

Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το σημειόγραμμα, στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα.

20. Τι είναι το χρονόγραμμα;

Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.

21. Να δοθούν οι ορισμοί για τις κλάσεις, το εύρος του δείγματος, τις κεντρικές τιμές, τα όρια των κλάσεων και το πλάτος της κλάσης.

Οι πίνακες συχνοτήτων και κατ' αναλογία τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι δύσκολο να κατασκευαστούν, όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε στην περίπτωση μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και κλάσεις, έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται όρια των κλάσεων. Συνήθως υιοθετούμε την περίπτωση που μια κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά) αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή που οι κλάσεις είναι της μορφής $[,)$. Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να "αντιπροσωπευθούν" από τις κεντρικές τιμές, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.

Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος. Φυσικά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου επιβάλλεται οι κλάσεις να έχουν άνισο πλάτος, όπως, για παράδειγμα, στις κατανομές εισοδήματος, ημερών απεργίας κτλ. Για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις, χρησιμοποιούμε το εύρος R του δείγματος, δηλαδή τη διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος.

22. Πώς γίνεται η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων;

Το πρώτο βήμα στην ομαδοποίηση των δεδομένων είναι η εκλογή του αριθμού k των ομάδων ή κλάσεων. Ο αριθμός αυτός συνήθως ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός ο παρακάτω πίνακας:

Μέγεθος δείγματος N	Αριθμός κλάσεων K	Μέγεθος δείγματος N	Αριθμός κλάσεων K
<20	5	200-400	9
20-50	6	400-700	10
50-100	7	700-1000	11
100-200	8	≥ 1000	12

Το δεύτερο βήμα είναι ο προσδιορισμός του πλάτους των κλάσεων. Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος. Φυσικά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου επιβάλλεται οι κλάσεις να έχουν άνισο πλάτος, όπως, για παράδειγμα, στις κατανομές εισοδήματος, ημερών απεργίας κτλ. Για να κατασκευάσουμε ισοπλάτεις κλάσεις, χρησιμοποιούμε το εύρος R του δείγματος, δηλαδή τη διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος. Τότε υπολογίζουμε το πλάτος c των κλάσεων διαιρώντας το εύρος R διά του αριθμού των κλάσεων K , στρογγυλεύοντας, αν χρειαστεί για λόγους διευκόλυνσης, πάντα προς τα πάνω.

Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή των κλάσεων. Ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση, ή για πρακτικούς λόγους λίγο πιο κάτω από την μικρότερη παρατήρηση, και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος c δημιουργούμε τις K κλάσεις. Αυτονόητο είναι ότι η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα (πρέπει να) ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση.

Τέλος, γίνεται η διαλογή των παρατηρήσεων. Το πλήθος των παρατηρήσεων n_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i καλείται συχνότητα της κλάσης αυτής ή συχνότητα της κεντρικής τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, K$.

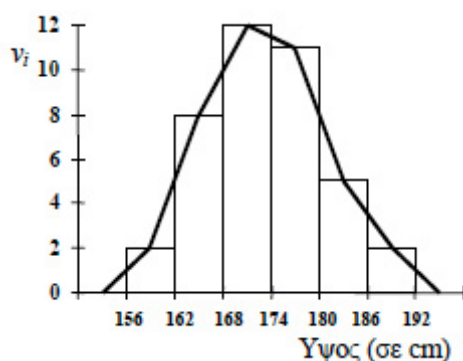
23. Τι είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων και πως κατασκευάζεται;

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο ιστόγραμμα συχνοτήτων. Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.

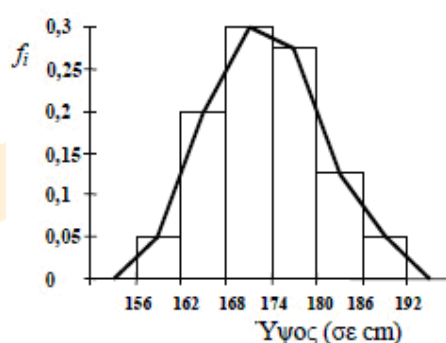
24. Πώς κατασκευάζονται το πολύγωνο συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων για κλάσεις ίσου πλάτους;

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζεται

το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος n . Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων με εμβαδόν ίσο με 1.



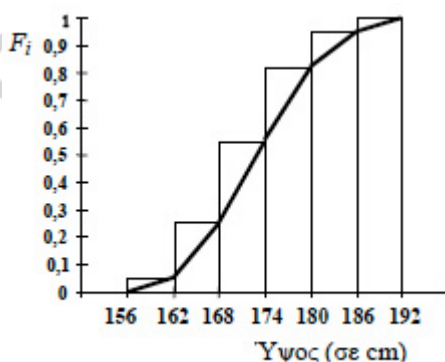
(α)



(β)

25. Πώς κατασκευάζονται το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων, το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και πώς το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων;

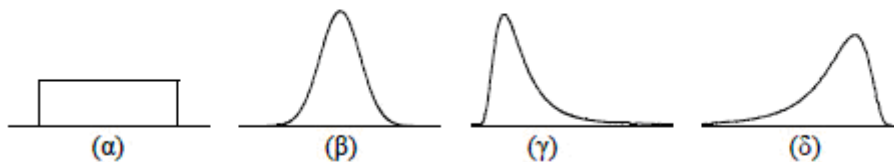
Όπως κατασκευάζονται το πολύγωνο συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων για κλάσεις ίσου πλάτους με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα δεξιά άκρα (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων της κατανομής.



26. Τι είναι οι καμπύλες συχνοτήτων; Αναφέρατε τις πιο χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων.

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων.

Η μορφή μιας κατανομής συχνοτήτων εξαρτάται από το πώς είναι κατανεμημένες οι παρατηρήσεις σε όλη την έκταση του εύρους τους. Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων που συναντάμε συχνά στις εφαρμογές δίνονται στο παρακάτω σχήμα. Η κατανομή (β), με "κωδωνοειδή" μορφή λέγεται κανονική κατανομή και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική. Όταν οι παρατηρήσεις "κατανέμονται" ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[a, b]$, όπως στην κατανομή (α), η κατανομή λέγεται ομοιόμορφη. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική ασύμμετρία όπως στην κατανομή (γ) ή αρνητική ασύμμετρία όπως στην κατανομή (δ).



Μερικές χαρακτηριστικές κατανομές συχνοτήτων

27. Τι εννοούμε με τον όρο μέτρα μιας κατανομής; Πόσων ειδών και ποια μέτρα μιας κατανομής γνωρίζετε;

Εκτός από τους στατιστικούς πίνακες και τα διαγράμματα υπάρχουν και αριθμητικά μέτρα με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε με συντομία μια κατανομή συχνοτήτων. Οι έννοιες "κεντρική τιμή" και "διασπορά των παρατηρήσεων" μας δίνουν το ερέθισμα για έναν ακόμα πιο σύντομο τρόπο περιγραφής της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων. Για να ορίσουμε δηλαδή κάποια μέτρα (αριθμητικά μεγέθη), που να μας δίνουν α) τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και β) τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους. Τα πρώτα τα καλούμε μέτρα θέσης της κατανομής, ενώ τα δεύτερα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας.

28. Τι εκφράζουν τα μέτρα θέσης και ποια είναι τα πιο συνηθισμένα από αυτά;

Τα μέτρα θέσης εκφράζουν τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα Ox . Τα πιο συνηθισμένα μέτρα που χρησιμοποιούνται εκφράζοντας την "κατά μέσο όρο" απόστασή τους από την αρχή των αξόνων, είναι ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή, η διάμεσος και η κορυφή ή επικρατούσα τιμή.

29. Τι εκφράζουν τα μέτρα διασποράς και ποια είναι τα πιο συνηθισμένα από αυτά;

Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους (ή τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης). Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η διακύμανση, η τυπική απόκλιση και η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση.

30. Πως ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων και πως όταν έχουμε κατανομή συχνοτήτων;

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους n οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, \dots, t_n$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

όπου f_i οι σχετικές συχνότητες.

31. Πως υπολογίζεται ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος;

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο.

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_n$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_n$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

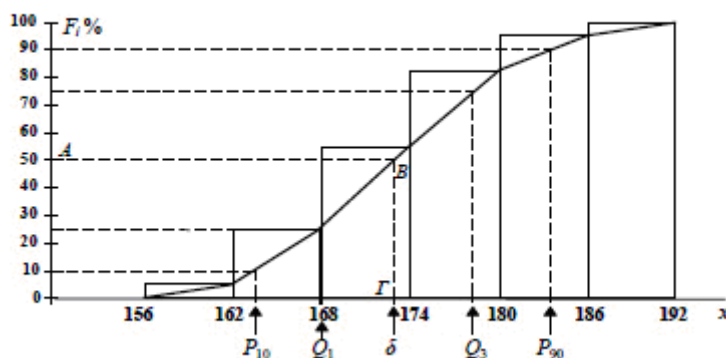
$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

32. Πως ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων;

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

33. Πώς βρίσκουμε τη διάμεσο ομαδοποιημένων παρατηρήσεων;

Η διάμεσος, όπως ορίστηκε, αντιστοιχεί στην τιμή $x = \delta$ της μεταβλητής X (στον οριζόντιο άξονα), έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ . Δηλαδή, η διάμεσος θα έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F = 50\%$. Εφόσον στον κάθετο άξονα έχουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες, από το σημείο A (50% των παρατηρήσεων) φέρουμε την $AB \parallel OX$ και στη συνέχεια τη $B\Gamma \perp OX$. Τότε, στο σημείο Γ αντιστοιχεί η διάμεσος δ των παρατηρήσεων. Στο παρακάτω σχήμα δηλαδή, $\delta \approx 173$.



34. Επηρεάζονται τα μέτρα θέσης από την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων σε ένα δείγμα;

Η μέση τιμή επηρεάζεται από την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων σε ένα δείγμα ενώ η διάμεσος δεν επηρεάζεται.

35. Πώς ορίζεται το εύρος ως μέτρο διασποράς και πώς όταν έχουμε ομαδοποίηση;

Το εύρος R του δείγματος εκφράζει τη διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος. $R = x_{\max} - x_{\min}$

Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης.

36. Πώς ορίζεται η διακύμανση ενός δείγματος n παρατηρήσεων και πως όταν έχουμε κατανομή συχνοτήτων;

Ως ένα μέτρο διασποράς παίρνουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο αυτό καλείται διακύμανση ή διασπορά και ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{n} \right\}$$

η οποία διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς κυρίως όταν η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος αριθμός. Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

ή την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right\}$$

όπου $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$.

37. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγεθούς v , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_v - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v}$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

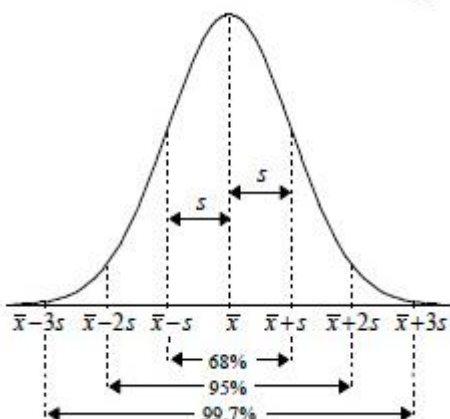
38. Πως ορίζεται η τυπική απόκλιση ενός δείγματος v παρατηρήσεων;

Αν πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού. Η ποσότητα αυτή λέγεται τυπική απόκλιση, συμβολίζεται με s και δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{s^2}$$

39. Αναφέρατε τις ιδιότητες της τυπικής απόκλισης αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική;

Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:



- i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$
- ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$
- iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$
- iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

40. Τι είναι ο συντελεστής μεταβολής;

Ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ο οποίος για $\bar{x} \neq 0$

ορίζεται από το λόγο $CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$.

Αν $\bar{x} < 0$ τότε αντί του $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε το $|\bar{x}|$.

Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται επί τοις εκατό, είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και παριστάνει ένα μέτρο σχετικής διασποράς των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς.

41. Πώς εξετάζεται η ομοιογένεια ενός δείγματος τιμών μιας μεταβλητής;

Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

Μεταξύ δύο δειγμάτων πιο ομοιογενές θεωρείται αυτό με το μικρότερο συντελεστή μεταβολής.

νέο φροντιστήριο