

Το παρόν εγχειρίδιο αποτελεί πόνημα φροντίδας και πολυετούς εμπειρίας της συγγραφικής ομάδας. Η φιλοδοξία μας, είναι να αποτελέσει βιβλίο βάσης και χρήσιμο φροντιστηριακό βοήθημα τόσο για το μαθητή, όσο και για τους εκπαιδευτικούς του ομίλου μας.

Προσπάθειά μας, είναι να οργανώσουμε και να κατηγοριοποιήσουμε τις ασκήσεις που πλαισιώνουν κάθε ενότητα, με στόχο την εξάσκηση, αλλά και την καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών των μαθηματικών από τους υποψηφίους.

Ευχαριστώ τους εξαίρετους μαθηματικούς και συναδέλφους Αγοργιανίτη Ιωάννη, Βερέμη Δημήτριο, Δελενίκα Μαρία, Ζαφείρη Βασίλειο, Κανελλόπουλο Γεώργιο, Κουτσοθανάση Μαρία, Μπαρπαρή Νεφέλη, καθώς επίσης και τον ταλαντούχο συνάδελφο Θανόπουλο Γεώργιο για την οργάνωση του υλικού, αλλά και την επεξεργασία, διαμόρφωση και ολοκλήρωση της μορφής του βιβλίου.

ΤΣΙΜΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Ακαδημαϊκός υπεύθυνος

Θετικών Σπουδών Ομίλου Φροντιστηρίων ΝΕΟ.

Περιεχόμενα:

Η έννοια της παραγώγου	5
Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτησης – Κανόνες παραγωγίσισης	23
Ρυθμός μεταβολής	31
Θεώρημα μέσης τιμής	37
Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής – Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	63
Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης	103
Ασύμπτωτες – Κανόνες DE L' HOSPITAL	107
Μελέτη συνάρτησης	111
Ορισμοί – Αντιπαραδείγματα – Αποδείξεις.....	113

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθεί (αν υπάρχει) η παράγωγος της συνάρτησης f στο αναγραφόμενο x_0 .

i. $f(x) = x^2 + 3x, x_0 = 1$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 12}, x_0 = 2$

iii. $f(x) = x \cdot |2x - 1|, x_0 = 0$

iv. $f(x) = x \cdot |x - 1|, x_0 = 1$

v. $f(x) = (x^3 - 4x) \cdot |x - 2|, x_0 = 2$

vi. $f(x) = \sqrt{x - 2}, x_0 = 2$

vii. $f(x) = x - 3 + \sqrt{3 - x}, x_0 = 3$

viii. $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3|x|}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

ix. $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu^2 \frac{1}{x} - x^2 \cdot \eta\mu \frac{2}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu^3 \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

x. $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

ix. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - x}, & x \leq 5 \\ \eta\mu(x - 5), & x > 5 \end{cases}, x_0 = 5$

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , όταν:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x + 3} + x - 2, & x > 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$

ii. $f(x) = 2x + \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}$ και $x_0 = 2$

iii. $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

iv. $f(x) = |x^2 - 4| + x - 2$ και $x_0 = 2$

v. $f(x) = \sqrt{x - 1} + 2x - 1$ και $x_0 = 1$

3. Αν $x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 2$

ii. $f'(0) = 1$

4. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $|xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. $f'(0) = 1$

5. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$2 \cdot \sqrt{x^2 + 3} - 4 \leq f(x) \leq 3 \cdot \sqrt{x^2 + 8} - 9. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1.$$

6. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = x\eta\mu 2x$, να αποδείξετε ότι:

$$[f'(0)]^2 + [g'(0)]^2 = 2$$

7. Αν $g(x) = \begin{cases} f(x) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $f(0) = f'(0) = 0$, να δείξετε ότι $g'(0) = 0$.

8. Έστω παραγωγίσιμη στο 1 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = f'(1) = 0$ και

$$\text{η συνάρτηση } g \text{ με } g(x) = \begin{cases} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ii. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x-1} - \alpha \cdot \eta\mu(\pi x)}{x-1 + \eta\mu(\pi x)} = \pi$$

9. Έστω ότι συνάρτηση f είναι συνεχής στο a . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = (x^2 - a^2) \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο a .

10. Έστω ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο a . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = 1 + (x-a)^2 \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο a .
11. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν $g(x) = f(|x|)|\eta\mu x|$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν και μόνο αν $f(0) = 0$.
12. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$, $f(1) - g(1) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq g(x) + x^2$, να αποδείξετε ότι $f'(1) - g'(1) = 2$.
13. Αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ ισχύει
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 2h} = 1,$$
 να αποδείξετε ότι $f'(1) = 2$.
14. Αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 4,$$
 να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 2$.
15. Αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ ισχύει
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1+h)}{h} = 4$$
 να αποδείξετε ότι $f'(1) = 2$.
16. Έστω f συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να ισχύει: $f(1+h) = -h^3 + 3h^2 - 3h + 3$. Να βρεθεί το $f'(1)$.
17. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 5h)}{h}$$

$$\text{ii} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 - 2h) - f^2(x_0 + 5h)}{h}$$

$$\text{iii. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) + f(x_0 + 5h) - 2f(x_0)}{h}$$

18. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(1) = f'(1) = 2$.

i. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$

ii. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x \cdot f(x) - 2}$

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 7$, να αποδειχτεί ότι:

i. $f(1) = 0$

ii. $f'(1) = 7$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - h}{h^2 + \eta \mu h} = 6$

20. Αν η f είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2 \cdot \eta \mu \frac{1}{x}}{x^3} = 7$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

21. Αν η f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^3}{x - 1} = 3$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

22. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \cdot \eta \mu x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ να δείξετε ότι $f'(0) = 0$.

23. Αν η συνάρτηση $f: (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f(0) = 0$, να

δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{2} \cdot f\left(\frac{2}{x}\right) \right] = f'(0)$.

24. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{x - x_0} = g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x \cdot f(x_0) - x_0 \cdot f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(x_0)}{x - x_0} = x_0^2 \cdot f'(x_0) - 2x_0 \cdot f(x_0)$$

25. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x \cdot f(x_0) - x_0 \cdot f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(x_0)}{x - x_0} = x_0^2 \cdot f'(x_0) - 2x_0 \cdot f(x_0)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{x - x_0} = g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

26. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο 1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 3f(x)}$, να βρείτε τον αριθμό $g'(1)$.

27. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 5$. Να βρείτε:

i. Την τιμή $f(2)$.

ii. Την παράγωγο της f στο $x_0 = 2$.

iii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3x - 6}{x^2 - 4}$

28. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

29. Έστω συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 3f(x) - 2}{x^2 + x - 2}.$$

30. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο a , να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a} = a^2 f'(a) - 2af(a).$$

31. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 > 0$. Να

αποδείξετε ότι:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x}f(x) - \sqrt{x_0}f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x_0 f'(x_0) + f(x_0)}{2\sqrt{x_0}}.$$

32. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x - 1} = 2$, να αποδείξετε ότι $f'(1) = 5$.

33. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{3h - \eta \mu 2h}.$$

34. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}.$$

35. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) \neq 0$. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(8x) - f(9x)}{f(10x) - f(11x)} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1)f(3x)}{x^2}$$

36. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \kappa x + \lambda, & x < 2 \\ \sqrt{x+2} - 2, & x \geq 2 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2.$$

37. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 + 5}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{να είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2.$$

38. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ x + \beta, & x < 1 \end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

39. Έστω παραγωγίσιμη στο 1 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $f'(1) = 2$. Να

προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} f^2(x), & x < 1 \\ \alpha x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$ να

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

40. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta\sqrt{x+3} + 6, & x < 1 \\ x^2 + (\alpha + \beta)x - 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1.$$

41. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x-1}, & x > 1 \\ x^2 + 2\alpha x - \alpha, & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{να είναι παραγωγίσιμη στο } 1.$$

42. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $f^3(x) - 2xf^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \cdot \eta\mu 2x$. Να αποδείξετε ότι: $f'(0) = 2$.

43. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
45. Έστω f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε x . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να δειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
46. Αν $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και υπάρχει συνάρτηση g με $f(x) = xg(x) + 1$ για κάθε $x \neq 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f'(x_0) = f(x_0)$.
47. Αν $f(xy) = f(x) + f(y)$ και $f(x) + g(x) = x^2 g(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
48. Αν $f(x-y) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu y - f(y) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και υπάρχει η $f'(0)$, να δειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
49. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$.
50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e \cdot x + (x-e) \cdot \ln x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0 = 1$ και $x_1 = e$.
51. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

52. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + 2, & x < 2 \\ \gamma x^2 + x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f έχει στο σημείο $A(2, f(2))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία

$$x - 3y + 2 = 0.$$

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x}$ και η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B . Να αποδείξετε ότι:

- Το σημείο M είναι μέσο του AB .
- Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M .

54. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + (1 - \lambda)x + 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ διέρχονται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

55. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(a - x) = f(a + x) + 2x, \text{ να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο της } (\alpha, f(\alpha)) \text{ είναι κάθετη στην ευθεία } y = x.$$

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε:

- Την εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.
- Την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

57. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \ln x - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- Να αποδείξετε ότι η $C_{f'}$ διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = 0$.

- iii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_1 = 1$ και τους αξόνες $x'x$ και $y'y$.

58. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$ και το σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M έχει με τη C_f και άλλο κοινό σημείο, το N .
- ii. Η κλίση της C_f στο σημείο N είναι τετραπλάσια της κλίσης της C_f στο M .

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x$. Να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία της f η οποία:

- i. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii. Σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- iii. Είναι παράλληλη με την ευθεία $\delta: x - 2y + 6 = 0$.

61. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχει, σημείο της C_f , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο αυτό:

- i. Να είναι παράλληλη προς την ευθεία $2x - y + 3 = 0$.
- ii. Να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.
- iii. Να σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \left(\frac{a^2 + 1}{4}\right) \cdot x^2$, $a \neq 0$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία όπου οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες της C_f με τον άξονα $x'x$ να είναι παραπληρωματικές.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:
- Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 2008$
 - Είναι κάθετη στην ευθεία $x + 8y + 1 = 2009$
 - Διέρχεται από το σημείο $A(6, -2)$.
64. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 2x \cdot \sin \alpha + 1 - \eta \mu \alpha$ με $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει τον άξονα $x'x$ ως εφαπτομένη.
65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + \lambda x + 1, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x - a \cdot x, a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες ευθείες της C_f είναι παράλληλες προς την εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $x_0 = 1$.
68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - x \ln x$.
- Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- ii. Να βρεθούν οι θέσεις στις οποίες οι εφαπτόμενες ευθείες της C_f σχηματίζουν οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

69. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4$ στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^5$;

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

71. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x) \leq x^2 + x \leq f(x-1) + 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i. Τον τύπο της f .
- ii. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f , οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(2,5)$.

72. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{16}{9}$ τ.μ.

73. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $M(\lambda, -2)$ άγονται κάθετες εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{8}x^2$.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -3x - 1$ είναι εφαπτόμενη της C_f .
- ii. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\delta: y = ax + 3$ να εφάπτεται της C_f .

75. Αν $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot \ln x$ να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - \frac{4}{3} - 4 \cdot \ln 2$ εφάπτεται της C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.
76. Αν $f(x) = (x-3)^2$ να βρείτε την τιμή του a ώστε η ευθεία $y = ax + 3a - 1$ να εφάπτεται της C_f .
77. Έστω ότι η ευθεία $\varepsilon: y+1=x$ εφάπτεται της C_f μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ στο $x_0 = 3$. Αν $g(x) = f(2^x + x^2)$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(1, g(1))$.
78. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η εφαπτόμενη της C_g στο σημείο της $A(-1, g(-1))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$. Αν $f(x) = g[e^{x-2} - 2\sin(\pi x)]$ να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $B(2, f(2))$.
79. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (a+1)x - \beta$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = 2x + 3$ να εφάπτεται της C_f , στο σημείο $M(-1, 1)$.
80. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + \lambda}{x-1}$ να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
81. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + 2$ και $g(x) = x^2 + 4x - 1$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ εφάπτεται και στην C_g .
82. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax + \frac{x-1}{x}$ στο σημείο της $A(1, 1)$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2 + (4\alpha + \beta)x + \alpha$.

83. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 4x$ και $g(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$. Να βρείτε για ποια τιμή του a η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(1,3)$ εφάπτεται και στη C_g .
84. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g .
 - Να αποδείξετε ότι στο κοινό τους σημείο οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη.
85. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ και $g(x) = 2x^2 + x + \beta$, να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο $x_0 = 1$.
86. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) \neq 0$, $g(x) = f(x)h(x)$ και $h^2(x) = 1 - [h'(x)]^2$, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν στα κοινά τους σημεία κοινή εφαπτόμενη.
87. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^3$ και $g(x) = -x^2 + 5x - 3$. Να αποδείξετε ότι σε κοινό σημείο των C_f, C_g υπάρχει κοινή εφαπτόμενη ευθεία.
88. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \alpha x^2 - \beta x + 9$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Να βρείτε τα α, β ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 2.
89. Δίνεται η $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^*$ παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινές εφαπτομένες στα κοινά τους σημεία.

90. Αν $f(x) = \ln(1+2x)$, $g(x) = 2x - 2x^2$ και $\varphi(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3}$ να δείξετε ότι οι C_f, C_g, C_φ έχουν κοινή εφαπτομένη στο μοναδικό κοινό τους σημείο.

91. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.

92. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 + 4x + 10$ και $g(x) = x^2 - 4x + 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ευθεία ε η οποία εφάπτεται συγχρόνως στις C_f, C_g .

93. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 5$ και $g(x) = x^2 - 5x + 8$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = (\lambda - 3) \cdot x + 4$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g .

94. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$ και $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g και να βρεθεί.

95. i. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $(x+1)^2 = 4e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, -1)$

ii. Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^{-x}$ να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$. Να δείξετε ότι από οποιοδήποτε σημείο του $\gamma\gamma'$ εκτός του $(0,0)$ διέρχεται μόνο μία εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της f .

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x$. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο $A(a,0)$ με $-\frac{1}{2} < a < 0$, του άξονα $x\chi'$ διέρχεται μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f .

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + e^x$. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο $A(a, 0)$ του άξονα xx' διέρχεται ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f .
99. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $M(\lambda, -2)$ άγονται κάθετες εφαπτομένες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2$.
100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
 - Δεδομένου ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$.
101. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = 4x + 2 + e^x$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε το $(f^{-1})'(3)$.
102. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = e^{x+1} + x - e$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε το $(f^{-1})'(0)$.
103. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει:
 $f(\eta\mu x) = x - \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
 - Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη $\frac{1}{4}$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f'(x) - \eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$.

104. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ και $g(x) = -3 \cdot \sqrt{x}$.

- Να δείξετε ότι οι f, g είναι 1-1 και να ορίσετε τις συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1} .
- Έστω M το κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ που είναι διαφορετικό από το $(0, 0)$. Να βρείτε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα στο M .
- Έστω B το σημείο τομής της ε_1 με την $C_{g^{-1}}$ και Γ το σημείο τομής της ε_2 με την C_g . Να δείξετε ότι η ευθεία $B\Gamma$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_g και $C_{g^{-1}}$.

105. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \neq \pm 1$. Αν A, B τα σημεία τομής της C_f με τον $\chi\chi'$ τότε:

- να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- να βρείτε τα σημεία A και B
- να δείξετε ότι η εξίσωση της (ε) παίρνει την μορφή: $y = \frac{4x_0 \cdot x - 4}{f(x_0)}$
- Έστω Γ και Δ τα σημεία της (ε) που έχουν την ίδια τετμημένη με τα σημεία A, B αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το γινόμενο $A\Gamma \cdot B\Delta$ είναι σταθερό δηλαδή ανεξάρτητο από την επιλογή του x_0 .

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ –
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$i. f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 7$$

$$vi. f(x) = x \cdot \ln x$$

$$ii. f(x) = e^x + 2x^3 - \ln x$$

$$vii. f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)e^x$$

$$iii. f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + \frac{x^3}{3}$$

$$viii. f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$$

$$iv. f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{x} - 4\sqrt{x}$$

$$ix. f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$v. f(x) = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x$$

$$x. f(x) = \frac{x \cdot \eta\mu x}{e^\pi}$$

2. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$i. f(x) = 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{12}$$

$$iv. f(x) = -\frac{6}{\sqrt[4]{x}}$$

$$ii. f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2$$

$$v. f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$$

$$iii. f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

$$vi. f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$i. f(x) = \frac{2}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

$$iii. f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$$

$$ii. f(x) = x^3 \ln x - x^2 e^x$$

$$iv. f(x) = \frac{x\eta\mu x}{x^2 + 1}$$

4. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$i. f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

$$ii. f(x) = 2x + |x^2 - 5x + 6| - 6$$

5. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$

iii. $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

iv. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

6. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = (x^2 - x) \cdot |x|$

ii. $f(x) = (x^3 - x) \cdot |x - 1|$

iii. $f(x) = |x| \cdot \eta\mu x$

iv. $f(x) = |x| \cdot \sigma\upsilon\nu x$

7. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^5$

iv. $f(x) = \sqrt{1 + x^4 + \sigma\upsilon\nu^2 x}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} \cdot \ln 2x$

v. $f(x) = 5^{3x-4} + (3x - 4)^5$

iii. $f(x) = e^{2x-5} \cdot \eta\mu^3 x$

vi. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

8. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) - \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

vi. $f(x) = \frac{\ln^2 2x}{e^x + e^{-x}}$

ii. $f(x) = \frac{1}{4} \sigma\upsilon\nu^3(3x - 2)$

vii. $f(x) = (x^2 + 1)^{\sqrt{x}}, x > 0$

iii. $f(x) = \left(\frac{3x - 1}{x - 2}\right)^3$

viii. $f(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$

iv. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot \eta\mu x$

ix. $f(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^x, x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = \ln(e^{\eta\mu x} + \sigma\upsilon\nu^2 x)$

x. $f(x) = \sqrt[4]{2x - 6}$

9. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = \sqrt{x+5}$

v. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

ii. $f(x) = \sqrt{7-x}$

vi. $f(x) = \sqrt{\eta\mu^4 x + \eta\mu^2 x + 2}$

iii. $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$

vii. $f(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$

iv. $f(x) = \sqrt{(2-x)^5}$

10. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = |x-1| \cdot \eta\mu(x-1)$

v. $f(x) = x + \sqrt{x}$

ii. $f(x) = |x-2| \cdot \eta\mu(x^2 - 4)$

vi. $f(x) = (x^2 - x) \cdot \sqrt{x}$

iii. $f(x) = |x-3| + \eta\mu(x-3)$

vii. $f(x) = \sqrt{|x-5|} \cdot \eta\mu(x^2 - 25)$

iv. $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \sigma\upsilon\nu x$

viii. $f(x) = \sqrt{|x+2|} + \eta\mu(x+2)$

11. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = x^{\eta\mu x}$

iii. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

ii. $f(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}, x \in (0, \pi)$

iv. $f(x) = x^{x^x}$

12. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης φ με $\varphi(x) = (f(x))^{\eta\mu x}$.

13. Έστω συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall x \in (1, +\infty)$ να ισχύει

$x^{f(x)} = e^{x-f(x)}$. Να βρεθεί η f' .

14. Έστω συνάρτηση f με $D_f = (e, +\infty)$ τέτοια ώστε $\forall x \in (e, +\infty)$ να ισχύει

$x^{f(x)-x^2} = e^{x^2+f(x)}$. Να βρεθεί η f' .

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την f' .

ii. Να μελετηθεί η f' ως προς την συνέχεια στο 0.

16. Αν $f(x) = e^{ax} \eta\mu(\beta x)$, να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) - 2\alpha f'(x) + (a^2 + \beta^2)f(x) = 0.$$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\lambda x}$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$f''(x) + 3f'(x) = 4f(x).$$

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

19. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την g' όταν:

i. $g(x) = \ln(1 + f^2(x))$

ii. $g(x) = e^{\sqrt{1+f^4(x)}}$

iii. $g(x) = f^2(\sqrt{x^2 + 1})$

iv. $g(x) = x^{f(x)}, x > 0$

20. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(1) = 1, g(1) = 2, f'(1) = 4, f'(2) = 8$ και $g'(1) = 3$, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$ στο σημείο 1.

21. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x + f(xe^x) = e^x. \text{ Να υπολογίσετε τον αριθμό } f'(e).$$

22. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x^3) = 3x^4 + 1. \text{ Να υπολογίσετε τους αριθμούς } f'(1) \text{ και } f'(0).$$

23. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$i. f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

$$ii. f(x) = \sqrt[5]{x^2}$$

$$iii. f(x) = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$$

$$iv. f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu x + \sigma \nu \nu x, & x < 0 \\ x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

24. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3, & x < 1 \\ x^4 + 5x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

25. Να εξετάσετε αν η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 8, & x \leq 2 \\ x^3 - 4x^2 + 9x, & x > 2 \end{cases}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

26. Έστω συνάρτηση φ με $D_\varphi = \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - 5}{x} = 4$.

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = (x^2 + 2x + 6) \cdot \varphi(x)$. Να βρεθεί αν ορίζεται ο αριθμός $f'(0)$.

27. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε: $P(0) = 3$ και

$$[P'(x)]^2 \cdot P''(x) = 32 \cdot [P(x) - 3] \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

28. Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $P(x)$ έτσι ώστε: $(e^{-x} \cdot P(x))' = e^{-x} \cdot x \cdot (x - 2)$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

29. Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $P(x)$ έτσι ώστε : $(P'(x))^2 = P(x)$
30. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, ώστε: $[e^x \cdot P(x)]' = e^x \cdot x \cdot (x+2)$.
31. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους με $g(x_0) \neq 0$ και $g'(x_0) \neq 0$. Αν για τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ισχύει ότι $h'(x_0) = 0$, να δείξετε ότι $h(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
32. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι η f' είναι περιττή.
 - Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η f' είναι άρτια.
33. i. Να αποδείξετε ότι μία πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$, αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα των $P(x)$ και $P'(x)$.
- ii. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x + 2$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.
34. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να εκφράσετε την $f''(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.
 - Αν ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $2f'(x) < 1$.
35. Έστω f, g ορισμένες στο $\mathfrak{H}$ και δύο φορές παραγωγίσιμες τέτοιες ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathfrak{H}$, g περιττή και $f(x) = e^{g(x)+x}$ για κάθε $x \in \mathfrak{H}$. Να δείξετε ότι:
- $g(0) = g''(0) = 0$

$$\text{ii. } \frac{f''(0)}{f'(0)} = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

36. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και περιττή και ισχύει: $g(x) = e^{f(x)-x}$, να δείξετε ότι:

$$\text{i. } f(0) = f'(0) = 0$$

$$\text{ii. } g''(0) = [g'(0)]^2$$

37. Αν η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$f(x) = (x-3)^2 \cdot g(2x-1)$ με $g(5) = 5$, να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την $f''(3)$.

38. Η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - \sqrt{x^2 + 3}}{x-1} = 2$ να

$$\text{αποδείξετε ότι } f'(1) = \frac{5}{2}.$$

39. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = 4x + 2 + e^x$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε το $(f^{-1})'(3)$.

40. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = e^{x+1} + x - e$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε το $(f^{-1})'(0)$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Δεδομένου ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Δεδομένου ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$.

43. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) - f(y), \text{ να βρείτε το } f'(0).$$

44. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy) = yf(x) + xf(y) \text{ για κάθε } x, y > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι } f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1) \text{ για κάθε } x > 0.$$

45. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(2x+3y) = 2f(x) - 3f(y), \text{ τότε:}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

46. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 1$ και

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$

ii. Να αποδειχτεί ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Αν $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$, να αποδειχτεί ότι $g'(x) = 0$.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7$
 - i. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , στο σημείο $x_0 = 1$.
 - ii. Να βρείτε τις τιμές του x , που ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι θετικός.
 - iii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της f ως προς x , στο σημείο $x_0 = 3$.
2. Η πλευρά ενός τετραγώνου σε cm, που αυξάνει, δίνεται από τον τύπο $a = 5t + 1$, όπου t ο χρόνος σε sec.
 - i. Να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του τετραγώνου, ισχύει ότι $E = E(t) = (5t + 1)^2$.
 - ii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τετραγώνου, όταν $t = 2$ sec.
 - iii. Να βρείτε την χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι ίσος με $510 \text{ cm}^2/\text{sec}$.
3. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνει με την ακτίνα του r να αυξάνει, σύμφωνα με την σχέση $r^2 = 1 + e^t$, όπου t ο χρόνος σε sec. Την χρονική στιγμή $t = \ln 8$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
 - i. της επιφάνειας του μπαλονιού
 - ii. του όγκου του μπαλονιού.
4. Το εμβαδόν της επιφάνειας μίας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $3 \text{ cm}^2/\text{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας, την χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι 6 cm .
5. Η ακμή ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ cm}/\text{sec}$. Την χρονική στιγμή που η ακμή της είναι 6 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
 - i. του όγκου του κύβου
 - ii. του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας του κύβου.
6. Η εξίσωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός σώματος είναι $x(t) = t^3 + 2t$, όπου t ο χρόνος σε sec και x , η μετατόπιση σε μέτρα. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος 2 sec μετά την εκκίνηση του, καθώς και το συνολικό διάστημα που διάνυσε μέσα σε αυτόν τον χρόνο.

7. Αεροπλάνο ταξιδεύει σε ύψος 3 Km, παράλληλα προς το οριζόντιο έδαφος, με σταθερή ταχύτητα 500 Km/ h. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στο έδαφος και την χρονική στιγμή t_0 απέχει 4 Km από την προβολή της θέσης του αεροπλάνου στο έδαφος. Το αεροσκάφος απομακρύνεται από τον παρατηρητή. Να βρείτε εκείνη την χρονική στιγμή:
- τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του παρατηρητή από το έδαφος,
 - τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας υπό την οποία βλέπει ο παρατηρητής το αεροσκάφος.
8. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, r) . Το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στους δύο κύκλους (κυκλικός δακτύλιος) είναι πάντα $9\pi \text{ cm}^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγάλου κύκλου είναι $10\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιφέρειας του μικρού κύκλου, όταν αυτός έχει εμβαδόν $16\pi \text{ cm}^2$.
9. Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s , ενώ η πλευρά $B\Gamma$ ελαττώνεται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε:
- Το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου.
 - Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν $AB = 10 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 6 \text{ cm}$.
10. Οι δύο παράλληλες πλευρές ενός ορθογωνίου αυξάνονται με ρυθμό 2 cm/sec , ενώ οι άλλες δύο μειώνονται έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι σταθερό και ίσο με 50 cm^2 . Να βρείτε:
- Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου, όταν το μήκος της αυξανόμενης πλευράς είναι 5 cm.
 - Τις διαστάσεις του ορθογωνίου την στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου είναι μηδέν.
11. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 cm, του οποίου τα άκρα ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $x(t) = v \cdot t$, $t \in [0, 5]$, t σε sec.
- Να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση με τον χρόνο.
 - Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής τους εμβαδού $E(t)$ την στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6 m.

12. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 60 m/sec νότια προς μία διασταύρωση. Την χρονική στιγμή $t = 0$ που απέχει 120 m από την διασταύρωση διέρχεται από την διασταύρωση, και κινείται ανατολικά ένα φορτηγό με ταχύτητα 40 m/sec. Αν η θέση του αυτοκινήτου δίνεται από την συνάρτηση $y(t) = 60t + c_1$ και του φορτηγού $x(t) = 40t + c_2$, όπου c_1, c_2 σταθερές και t σε sec. Να βρείτε:
- τις σταθερές c_1, c_2
 - την απόσταση των δύο οχημάτων ως συνάρτηση του χρόνου t που πέρασε μετά την διέλευση του φορτηγού από την διασταύρωση.
 - τον ρυθμό μεταβολής με τον οποίο απομακρύνονται τα δύο οχήματα, 2 sec μετά την χρονική στιγμή που το φορτηγό πέρασε την διασταύρωση.
13. Μία δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και η βάση της έχει πλάτος 2 cm και μήκος 3 cm. Η δεξαμενή είναι γεμάτη με νερό και αδειάζει με ρυθμό 0,24 m³/sec.
- Να βρείτε τον τύπο που περιγράφει τον όγκο $V(t)$ του νερού που υπάρχει στη δεξαμενή την χρονική στιγμή t .
 - Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο κατεβαίνει η στάθμη του νερού.
14. Ένα αντεστραμμένο κωνικό δοχείο ύψους 8 cm και ακτίνας βάσης 4 cm είναι γεμάτο με νερό. Στον πυθμένα του δοχείου, που είναι η κορυφή του κώνου, ανοίγουμε μία οπή, από την οποία ρέει νερό με ρυθμό 12cm³/sec.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος που περιγράφει τον όγκο $V(t)$ του νερού που υπάρχει στην δεξαμενή την χρονική στιγμή t είναι: $V(t) = \frac{1}{12}\pi h^3(t)$, όπου $h(t)$ το ύψος του νερού την χρονική στιγμή t .
 - Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο κατεβαίνει η στάθμη του νερού την χρονική στιγμή κατά την οποία το ύψος του νερού είναι 6 cm.
15. Ένα αντεστραμμένο κωνικό δοχείο ύψους 10 cm και ακτίνας βάσης 5 cm είναι γεμάτη με νερό. Στον πυθμένα του δοχείου, που είναι η κορυφή του κώνου, υπάρχει μία τρύπα από όπου βγαίνει νερό με ρυθμό 50 cm³/sec, το οποίο πέφτει μέσα σε κυλινδρικό δοχείο με διάμετρο βάσης 10 cm. Την χρονική στιγμή που το ύψος του νερού στο κωνικό δοχείο είναι 4 cm, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους της στάθμης του νερού:
- στο κωνικό δοχείο
 - στο κυλινδρικό δοχείο.

16. Ένα σημείο M κινείται πάνω στην υπερβολή με εξίσωση $x^2 - 2y^2 = 1$, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες ανά sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή που αυτό διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$.
17. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ και η τετμημένη του σημείου κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 2t^2 - t, t \in [0,10].$$
 Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή, πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό της κίνησης, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M γίνεται ίσος με 5 m/min .
18. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln^2(x+1)$, $x \geq 0$. Όταν το M διέρχεται από το σημείο A που έχει τεταγμένη 1 η ταχύτητα απομάκρυνσής του από τον άξονα $x'x$ είναι 3 cm/s . Να βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσής του από τον άξονα $y'y$ όταν το M διέρχεται από το σημείο A .
19. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x-1}$, ώστε η απόστασή του από το $O(0,0)$ να αυξάνει με ρυθμό 5 cm/sec . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M , όταν $x = 10$.
20. Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $O(0,0)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3 + x$, $x \leq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M είναι τετραπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης x , αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$, $x \leq 0$.
 i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$, $a < 0$ και την τετμημένη του σημείου P που η εφαπτομένη τέμνει τον xx' .
 ii. Έστω ότι το σημείο m κινείται κατά μήκος της C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $\alpha(t)$ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -3\alpha(t)$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου P του προηγούμενου ερωτήματος την χρονική στιγμή που το σημείο M έχει τετμημένη -5 .
22. Ένα σώμα κινείται στην περιφέρεια κύκλου με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα 3. Την χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(1, -\sqrt{8})$, η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2 m/sec . Να βρείτε εκείνη την χρονική στιγμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του καθώς και την φορά της κίνησής του.

23. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x$.
- Να βρείτε το σημείο τομής A της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$ με τον xx' .
 - Έστω ότι ένα κινητό κινείται κατά μήκος της C_f . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης α του M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$, να βρείτε:
 - τον ρυθμό μεταβολής στο σημείο A της εφαπτομένης της C_f στο M με τον xx' , την χρονική στιγμή που το M έχει τετμημένη e .
 - τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον xx' , την ίδια χρονική στιγμή με το i. ερώτημα.
24. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^3$. Η τετμημένη του M κινείται με σταθερό ρυθμό 1 m/s πάνω στον θετικό ημιάξονα Ox . Να βρείτε:
- Μια σχέση που να συνδέει τη γωνία θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$ και την τετμημένη x του σημείου M .
 - Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη της C_f στο M είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x$.
25. Ένα κινητό κινείται στην καμπύλη $y = \ln x$, καθώς περνάει από το σημείο $A(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = M\hat{O}x$ την χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από A .
26. Ένα σώμα (Σ) κινείται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$. Την χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 1)$ η τετμημένη του σώματος μειώνεται με ρυθμό 4 μονάδες/sec. Την χρονική στιγμή αυτή βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\Sigma\hat{O}x$.
27. Σημείο κινείται στην παραβολή $y = 2x^2, x > 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 3 cm/sec .
- A) Την στιγμή που η απόσταση OM του σημείου από την αρχή των αξόνων $\sqrt{68} \text{ cm}$, να βρείτε:
- τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.
 - τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο OM .
 - τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = M\hat{O}x$.
- B) το σημείο όπου οι ρυθμοί μεταβολής του M είναι ίσοι.

28. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln(x - 1), x > 1$. Ένα σημείο $A(a, f(a)), a > 1$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2m/sec . Έστω M το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A τέμνει τον yy' . Την χρονική στιγμή που η τεταγμένη του A είναι ίση με 1, να υπολογίσετε:
- i. την ταχύτητα με την οποία το M απομακρύνεται από το O .
 - ii. τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης OA .
 - iii. τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{O}B$, όπου B η προβολή του A στον xx' .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ:

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}, x \in [0, 3]$

ii. $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in [2, 4]$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 9}, x \in [-3, 0]$

iv. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x^4 + 1, & x > 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

v. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 0 \\ -x^3 - 4, & x > 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

vi. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x, & x \leq 2 \\ x^2 + x - 10, & x > 2 \end{cases}, x \in [1, 3]$

vii. $f(x) = |x + 2|, x \in [-4, 0]$

viii. $f(x) = 4^{\eta \mu x}, x \in [0, \pi]$

ix. $f(x) = \sqrt[5]{(x + 2)^4}, x \in [-3, -1]$

2. Να εξετάσετε αν για τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο αντίστοιχο διάστημα και αν ναι, να το εφαρμόσετε.

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ -x^3 - 2x, & x < 0 \end{cases}, [-1, 1]$

iii. $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ e^x - 1, & x < 1 \end{cases}, [1, 2]$

ii. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ xe^x - ex, & x < 1 \end{cases}, [0, 1]$

iv. $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}, [-1, 0]$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{3\kappa-x}, \kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου κ , ώστε να ισχύει για την f το Θ. Rolle στο διάστημα $[3, 6]$ και στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό ξ του θεωρήματος.

4. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in [-1, 0] \\ \gamma x^2 + 6x + 3, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad \text{να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο } [-1, 1].$$

5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \alpha, & x \leq 0 \\ \gamma x^2 + 4x + 4, & x > 0 \end{cases}, \text{ στο διάστημα } [-1, 1].$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 9 - \kappa x, & x \in [-3, 1) \\ 2x^2 - \lambda x + \mu, & x \in [1, 5] \end{cases}$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει για την f το Θ. Rolle στο διάστημα $[-3, 5]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \eta \mu(\pi x) + \beta, & x \leq 0 \\ x^3 + \gamma + \alpha + 3, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για τις οποίες εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

8. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x(x^2 - 1)\eta \mu x$, με τετμημένη $\xi \in (-1, 1)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

10. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $10f(x) \leq 6f(5) + 4f(3)$ για κάθε x , να δείξετε ότι υπάρχει ξ ώστε $f'(\xi) = 0$.

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x^2) \geq \frac{1+f^2(x)}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της } C_f \text{ στο οποίο η εφαπτομένη της } C_f \text{ σε αυτό να είναι παράλληλη στον άξονα } x'x.$$

12. Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x = 0, \nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ έχει θετική ρίζα x_0 να δειχτεί ότι η εξίσωση $\nu \alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1) \alpha_{\nu-1} x^{\nu-2} + \dots + 2 \alpha_2 x + \alpha_1 = 0$ έχει θετική ρίζα μικρότερη του x_0 .
13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.
14. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $5\xi^4 + 8\xi^3 = 12\xi^2 - 1$.
15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 3ex^2 + 6x = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4 - 8x^3 - 2ax + 2a = 0, a \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.
17. Να δείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \beta + \gamma + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 - \frac{2}{3}\beta x = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
19. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
 $\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \sin 2x + \gamma \cdot \sin 3x = 0$ έχει ρίζα στο $(0, \pi)$.
20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ax^\nu + \beta x^\mu + \gamma x^\rho$, όπου $\nu, \mu, \rho \in \mathbb{N}^*, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
 Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \frac{\alpha}{\nu+1} + \frac{\beta}{\mu+1} + \frac{\gamma}{\rho+1}$.
21. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$:
- $5x^4 - 4x^3 - 2x + 1 = 0$
 - $(2x - 1)\eta\mu x = (x - x^2)\sigma\upsilon\nu x$

iii. $e^{1-x}(1-x) + 2x = 1$

iv. $\eta\mu x + (x-1)\sigma\upsilon\nu x = 0$

22. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} + 2(\alpha + \beta)x = \alpha + \beta + \ln 2$ με

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

23. Αν $\alpha + 2\beta = 1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 + 4\beta x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

24. Αν $\frac{\alpha}{\nu+1} + \frac{\beta}{\mu+1} + \frac{\gamma}{\rho+1} + \delta = 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^\nu + \beta x^\mu + \gamma x^\rho + \delta = 0$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

25. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + 5\beta + 10\gamma = 0$ να αποδειχτεί ότι η εξίσωση

$\alpha x^4 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

26. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $16\beta\pi^2 = 27\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$x_0 \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ τέτοιος ώστε $\alpha \cdot \eta\mu x_0 = 2\beta x_0$.

27. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

ii. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

28. Έστω η ορισμένη στο διάστημα Δ συνάρτηση f και $\Delta_{\varepsilon\sigma.}$ το εσωτερικό του Δ (το διάστημα που αποτελείται από τα εσωτερικά σημεία του Δ). Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο $\Delta_{\varepsilon\sigma.}$ με $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Delta_{\varepsilon\sigma.}$.
Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι 1-1 στο Δ

ii. Η εξίσωση $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ σταθερά) έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ .

29. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = 2 - x$, έχει το πολύ μία ρίζα.
30. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 21x^2 + 18x + 6\mu = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, έχει μία το πολύ ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.
31. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 6x^2 = x + 1$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
32. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 10 = 0$, $\alpha > 0$, δεν μπορεί να έχει παραπάνω από δύο πραγματικές ρίζες.
33. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους.
34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^3 + \frac{\lambda^2}{8}x^2 - 6\lambda^3x + 2$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 4 πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι $|\lambda| < \sqrt{3}$.
35. Έστω η συνεχής στο $[0,1]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) \neq 6 \quad \forall x \in (0,1)$ και $f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας και μοναδικός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 6\xi - 3$.
36. Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύει $f(0) - f(1) = -e$ και $f''(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = e^\xi + 1$.
37. Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύει $f(0) - f(1) = 2 - e$ και $f''(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g , όπου $g(x) = e^x - x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.
38. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = e^\alpha$, $f(\beta) = e^\beta$. Να αποδείξετε ότι:
- i. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

39. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ με $3f(2) = 2f(3)$. Να αποδείξετε ότι:

i. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[2,3]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

40. Αν f συνεχής στο $[0, \alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ και $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i. Για την συνάρτηση $g(x) = (x - \alpha)f(x)$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[0, \alpha]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = (\alpha - \xi)f'(\xi)$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(\alpha) = h(\beta) = 0$ και $f(x)g(x)h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

i. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται για τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)g(x)h(x)$ το Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} + \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = 0$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να αποδείξετε ότι:

i. Για τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}(x - \alpha)(x - \beta)$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$.

43. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma \varphi \frac{1}{\xi} = 2\xi$.

44. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:
- Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, $c \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $g'(x_0) = 0$.
 - Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.
45. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι:
- Η συνάρτηση f με $f(x) = (x-\alpha)^\mu \cdot (x-\beta)^\nu$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.
 - Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $\frac{x_0 - \alpha}{\beta - x_0} = \frac{\mu}{\nu}$.
46. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) = 4$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi - 2$.
47. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(2) = f(1) + 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε:
 $f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi + 2$.
48. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f(1) - f(0) = 5$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 5$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.
49. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία $\frac{\pi}{4}$.
50. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ και $f(3) - f(2) = \ln 3 - \ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$.

51. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύουν $f(0)=1$ και $f(1)=3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε: $f'(\xi) = \pi \cdot \eta\mu(\pi\xi)$
52. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta)$ και $g(\alpha) = g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = g'(x_0)$.
53. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) - f(\beta) = 2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.
54. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) - f(\beta) = \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = \sigma\upsilon\nu\xi$.
55. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και ισχύει $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:
- $g(\alpha) \neq g(\beta)$
 - Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:
$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
56. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη έτσι ώστε: $f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε: $f(c) \cdot f'(c) = c$.
57. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Αν $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot (2f(\xi) + 1) = 2$.

58. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε:
- i. $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$
 - ii. $f'(\xi)\eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0$
 - iii. $\xi^\nu f'(\xi) + \nu \xi^{\nu-1} f(\xi) = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$
 - iv. $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi - f(\xi)\eta\mu\xi = 0$
59. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = (1-\xi) \cdot f'(\xi)$.
60. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $[0,1]$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f(x) \cdot g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0,1)$ και $f(0) = g(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.
61. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $(x_0 - 1)(x_0 - 2)f'(x_0) = (3 - 2x_0) \cdot f(x_0)$
62. Έστω f συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Αν $f(0) = 5f(2)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$
63. Έστω συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \left(\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1+\xi}\right) \cdot f(\xi)$.

64. Έστω συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$. Ναδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = -f(x_0) \cdot \sigma\phi x_0$.
65. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = \frac{2\gamma \cdot f(\gamma)}{1 - \gamma^2}$.
66. Έστω μια συνάρτηση f με $f(1) = 1$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2 - \frac{f(x_0)}{x_0}$.
67. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(1) - f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\theta) = 2 - 2\theta$.
 - Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(\xi)}{\xi - 1}$.
68. Έστω παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ συνάρτηση f με $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι:
- $f(1-x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$
 - Υπάρχει $c \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε: $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$
69. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε: $f(\gamma) \cdot f''(\gamma) = -(f'(\gamma))^2$.
70. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{\alpha - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}$.

71. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2000, 2001]$, παραγωγίσιμη στο $(2000, 2001)$ και $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (2000, 2001)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$$\xi \in (2000, 2001) \text{ τέτοιος ώστε: } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{2000 - \xi} + \frac{1}{2001 - \xi}$$

72. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και

$$f(2) = 2f(1), \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

73. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathfrak{N}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε

$$g'(x) \cdot g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{N} \text{ και } f(2000) \cdot g(3000) = f(3000) \cdot g(2000). \text{ Να αποδείξετε}$$

$$\text{ότι υπάρχει } x_0 \in (2000, 3000) \text{ τέτοιος ώστε: } \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

74. Έστω f συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$. Ακόμα η C_f δεν

τέμνει τον άξονα xx' . Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) \cdot \sigma\upsilon\nu\xi = f'(\xi) \cdot \eta\mu\xi$

75. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f'(\beta) = f(\beta) \cdot f'(\alpha)$. Να αποδειχτεί ότι:

i. Η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) \cdot f''(x_0) = (f'(x_0))^2$.

76. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi f'(\xi)$.

77. Έστω $0 < \alpha < \beta$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $x \cdot f'(x) = f(x)$ έχει μία και μοναδική ρίζα x_0 στο (α, β) .

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

78. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f(\alpha) = 3\alpha$ και $f(\beta) = 3\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.
79. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta > 0$, με $f(\alpha) = \alpha^2\beta$ και $f(\beta) = \alpha\beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
80. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ με $f(1) = 2$ και $f(4) = 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο x_0 να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
81. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha \cdot f(\beta) = \beta \cdot f(\alpha)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο x_0 να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
82. Δίνεται συνάρτηση f , άρτια και παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο ώστε:
- | | |
|--|---|
| i. $f'(\xi) + \eta\mu\xi = 8\xi$ | iv. $\sqrt{\xi^2 + 1} \cdot f'(\xi) = \xi$ |
| ii. $f'(\xi) = 2\xi e^{\xi^2}$ | v. $f'(\xi) = 2\xi - 4\xi^3$ |
| iii. $f'(\xi) - \eta\mu\xi - \xi \sigma\upsilon\nu\xi = 0$ | vi. $f'(\xi) \sigma\upsilon\nu f(\xi) + \eta\mu\xi = 0$ |
83. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(-1) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε:
- | |
|---|
| i. $f'(\xi) = 2\xi f^2(\xi)$ |
| ii. $f'(\xi) = 8\xi^3 \sqrt{f(\xi)}$ |
| iii. $f'(\xi) = 6\xi^5 e^{-f(\xi)}$ |
| iv. $f'(\xi) = \frac{2\xi}{3f^2(\xi)}$ |
| v. $f'(\xi) \sigma\upsilon\nu f(\xi) = 2\xi^3$ |
| vi. $f'(\xi) e^{f^2(\xi)} = \frac{\xi}{f(\xi)}$ |

84. Έστω η συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (1, 2)$ και $f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in (1, 2)$ τέτοιος

$$\text{ώστε: } \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)} + \lambda \cdot \ln \lambda = 0$$

85. Έστω $\beta > 1$ και η συνεχής στο $[1, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, \beta)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) \cdot \sin(f(x)) \neq 0 \quad \forall x \in (1, \beta)$ και $f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε

$$\text{ότι υπάρχει } x_0 \in (1, \beta) \text{ τέτοιος ώστε: } \frac{\exp(f(x_0))}{f'(x_0)} = x_0 \cdot \ln \frac{1}{x_0}.$$

86. Έστω η συνεχής στο $[e, e^2]$ και παραγωγίσιμη στο (e, e^2) συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(e^2) = 2 \cdot f(e)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi) \cdot \ln \xi^3 = f(\xi)$$

87. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$. Αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, να δείξετε ότι υπάρχει

$$\text{ένα τουλάχιστον } \xi \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε: } 3 \cdot f'(\xi) = \frac{4}{1 + f^2(\xi)}$$

88. Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Αν ισχύει

$$\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)} = 1 \text{ και } f(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1], \text{ να δειχτεί ότι υπάρχει ένα}$$

$$\text{τουλάχιστον } x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(x_0) = 2x_0 \cdot f^2(x_0).$$

89. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με συνεχή

$$\text{παράγωγο στο } [0, 1] \text{ και ισχύουν οι σχέσεις } f(1) = f(0) + \frac{1}{2}, \quad f'(0) > 0 \text{ και}$$

$$f'(1) < 2. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$\text{i. Υπάρχει } \alpha \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\alpha) = \alpha.$$

$$\text{ii. Υπάρχει } \beta \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\beta) = 2\beta.$$

90. Αν f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι:

i. Οι f, g είναι 1-1 στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\alpha)-f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\beta)-g(\xi)} = 1$.

91. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

i. $f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$

ii. $f'(\xi) = 5f(\xi)$

iii. $f'(\xi) + 3 \cdot \xi f(\xi) = 0$

iv. $f'(\xi) = f(\xi) \sin \xi$

92. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και για τις οποίες ισχύει: $f(\alpha) = f(\beta) \cdot e^{g(\beta)-g(\alpha)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 0$.

93. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) + g'(\xi) \cdot f(\xi) = 0$.

94. Δίνονται συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και για τις οποίες ισχύει: $f(\alpha)e^{g(\beta)} = f(\beta)e^{g(\alpha)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = g'(x_0) \cdot f(x_0)$

95. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g'(x) \neq f'(x)g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\rho_1 < \rho_2$ είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i. Τα ρ_1, ρ_2 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

96. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f'(\beta) = f(\beta)f'(\alpha)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) \cdot f''(\xi) > 0$
97. Αν $\alpha < \beta$ και $\sin \alpha + \frac{\alpha^2}{2} = \sin \beta + \frac{\beta^2}{2}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta < 0$.
98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$.
- Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-2, 4]$.
 - Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-2, 4]$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
99. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x) = |2x - 1|$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$. Όπου εφαρμόζεται, να βρεθεί ο αριθμός ξ του θεωρήματος.
100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \geq 1 \\ -5x^2 + 7x, & x < 1 \end{cases}$
- Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-1, 2]$.
 - Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $[-1, 2]$ η οποία είναι παράλληλη με την τέμνουσα της C_f που διέρχεται από τα σημεία , με τετμημένες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.
101. Να αποδείξετε ότι ισχύει το Θ.Μ.Τ. για τις επόμενες συναρτήσεις στο αντίστοιχο διάστημα και στη συνέχεια να βρείτε τα ξ για τα οποία ισχύει το θεώρημα:
- $f(x) = x - x^2, x \in [1, 2]$
 - $f(x) = e^x, x \in [0, 1]$
 - $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2, & x > 1 \end{cases}, x \in [0, 2]$

102. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2, & x \leq 1 \\ x^3 + 5x, & x > 1 \end{cases}$ και τα σημεία $A(0,2), B(2,18)$.
Να βρείτε σημείο της C_f , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f σε αυτό το σημείο να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .
103. Η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = \sqrt{3} \cdot \beta$ και $f(\beta) = \sqrt{3} \cdot \alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία $\omega = \frac{2\pi}{3}$.
104. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, για την οποία ισχύει:
 $f(3) = 12$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x - 2$.
105. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x - 2y + 3 = 0$.
106. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[-2,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2,2)$, $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$.
i. Να εφαρμόσετε για την f το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$.
ii. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
107. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(x) > 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος
ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}{\alpha - \beta}$.
108. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

109. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και η συνεχής στο $[\alpha, \alpha + 2001]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \alpha + 2001)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(\alpha) = 2000$ και $f(\alpha + 2001) = 2001$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \alpha + 2001)$ τέτοιος ώστε:

$$2001 \cdot f'(x_0) = \frac{2^{2001} - 2^{2000}}{2^{f(x_0)} \cdot \ln 2}.$$

110. Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f^2(1) - f^2(0) > 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)f'(x_0) > \frac{1}{2}$.

111. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)f'(\beta) = f'(\alpha)f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$: $[f'(\xi_1)]^2 = f(\xi_1)f''(\xi_1)$.
- ii. Υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi_2)(\alpha - \beta) = f(\xi_2) \ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$.

112. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, $f(0) = 2$ και $3 \leq f'(x) \leq 6$ για κάθε $x \in (0, 3)$, να αποδείξετε ότι: $11 \leq f(3) \leq 20$.

113. Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν $f(1) = 5$, να αποδείξετε ότι $3 \leq f(2) \leq 7$.

114. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$ με $f(1) = 2$ και $2 < f'(x) < 4$ για κάθε $x \in (1, 3)$. Να αποδείξετε ότι $|f(3) - 8| < 2$.

115. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $-2 < f'(x) < 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι $|f(5) - f(3)| < 4$
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $-2(\beta - \alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq 2(\beta - \alpha)$

116. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [1,3]$, να ισχύει $2 < f'(x) < 4$. Να αποδείξετε ότι:
- Αν είναι $f(1)=1$, τότε $5 < f(3) < 9$
 - Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $1 < \beta - \alpha < 3$ ισχύει: $2 < f(\beta) - f(\alpha) < 12$
117. Αν $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ και $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in (-1,1)$, να βρείτε το $f(0)$.
118. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) < x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(4) < 8 + f(2)$.
119. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x-1 < f'(x) < x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(6) + 15 < f(9) < 243 + f(6)$.
120. Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ συνάρτηση f τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq \kappa \quad \forall x \in \Delta$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}^*$ (σταθερός). Να αποδείξετε ότι:
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \kappa |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \Delta$.
121. Να αποδείξετε ότι: $|\eta \mu x_2 - \eta \mu x_1| \leq |x_2 - x_1|$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
122. Αν $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι: $|\beta \sigma \nu \beta - \alpha \sigma \nu \alpha| \leq \pi(\beta - \alpha)$.
123. Να αποδείξετε ότι: $|x \cdot \sigma \nu \nu x - y \cdot \sigma \nu \nu y| \leq 2|x - y| \quad \forall x, y \in (0,1)$.
124. Να δείξετε ότι: $\left| \ln \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} \right| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
125. Να δείξετε ότι: $\frac{\beta - \alpha}{\sigma \nu \nu^2 \alpha} < \varepsilon \varphi \beta - \varepsilon \varphi \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sigma \nu \nu^2 \beta}, 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

126. Να δείξετε ότι: $\sigma\varphi\beta < \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha)}{\beta - \alpha} < \sigma\varphi\alpha$, αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

127. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\alpha < \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta - \alpha} < \varepsilon\varphi\beta$, $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

128. Να αποδείξετε ότι: $1 - \frac{x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - 1$, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$.

129. Να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, για κάθε $x > 0$.

130. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

131. Να αποδείξετε ότι:

i. $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$, για κάθε $x < 0$.

ii. $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, για κάθε $x > 0$.

iii. $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

iv. $\frac{2}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < \frac{2}{x-1}$, για κάθε $x > 1$.

132. Να αποδείξετε ότι:

i. $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{18} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$.

iv. $\eta\mu \frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}\pi}{20}$

ii. $\alpha e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta e$, $0 < \alpha < \beta$.

v. $\eta\mu \frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{72}$

iii. $\eta\mu \frac{7\pi}{18} < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{36}$.

133. Να αποδείξετε ότι: $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$.

134. Να αποδείξετε ότι: $\frac{6-e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}$.

135. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f'(x) \leq M < 0$, να δείξετε ότι:

i. $f(x) \leq xM + f(0)$ για κάθε $x > 0$

ii. $f(x) \geq xM + f(0)$ για κάθε $x < 0$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

136. Έστω $\lambda > 0$ και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) \geq \lambda e^{\lambda x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i. i. $f(x) \geq e^{\lambda x} \quad \forall x \in (0, +\infty)$

ii. $f(x) \leq e^{\lambda x} \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

137. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) \leq \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \leq \eta \mu x \quad \forall x \in (0, +\infty)$

ii. $f(x) \geq \eta \mu x \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

138. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f'(x) \geq g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in (x_0, +\infty)$

ii. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (-\infty, x_0)$

139. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[0, 20]$ με $f(0) = 0$ και $f(20) = 10$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 20)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 5$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 20)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 4$.

140. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.
 - Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.
141. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, $f(-1) = 1$ και $f(1) = 5$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.
 - $f(0) > 3$.
142. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[2,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,10)$ με $f(2) = 3$ και $f(10) = 15$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (2,10)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 5$ και $f(x_2) = 9$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (2,10)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = 4$.
143. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $4f(x_0) = f(\alpha) + 3f(\beta)$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{4}{f'(\xi)}$.
144. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = 3\beta$ και $f(\beta) = 3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -6$.
145. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) = -2\beta$ και $f(\beta) = -2\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$.

146. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ τέτοια ώστε:
 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6$.
147. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta): f(\gamma) = \gamma$.
 - Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta): f'(\kappa)f'(\lambda) = 1$.
148. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$.
149. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta)$ και $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'''(\xi) = 0$.
150. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και οι αριθμοί $f(\alpha), f(\frac{\alpha+\beta}{2}), f(\beta)$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f''(x_0) = 0$.
151. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 11f(10) - 10f(11)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,11)$ με $f''(\xi) = 0$.
152. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ και $[f(\gamma) - f(\alpha)] \cdot [f(\beta) - f(\gamma)] < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

153. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(\alpha) < 0$, $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και $f(\gamma) < 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f , δέχεται εφαιπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

154. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$i) \beta + \delta - \alpha - \gamma < 0$$

$$ii) \delta > 0$$

$$iii) \alpha + \beta + \gamma + \delta < 0$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες

$$ii. \beta^2 \geq 3\alpha\gamma$$

155. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και η 4 φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \delta]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, $f(\gamma) < 0$, $f(\delta) > 0$ και $f'(\alpha) = f'(\delta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (\alpha, \delta)$ τέτοιος ώστε $f^4(\rho) = 0$.

156. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(1) = 1$, $f(2) > 2$, $f(3) < 3$ και $f(4) = 4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (1, 4)$ τέτοιος ώστε $f''(\theta) = 0$.

157. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση C_f έχει τρία τουλάχιστον σημεία πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

158. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στην C_f .

159. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία έχει με τη C_f δύο τουλάχιστον κοινά σημεία, να αποδείξετε ότι:

i. $H f'$ δεν είναι $1-1$.

ii. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

160. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$ και $f(\gamma) = \gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιοι ώστε $f'(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{\kappa}$ και $f'(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$.

ii. Αν τα σημεία $A(\kappa, f(\kappa))$, $B(\lambda, f(\lambda))$ και $O(0,0)$ είναι ομοευθειακά τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$.

161. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β)

και $\begin{cases} f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) > 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) > 0$.

162. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, με $f(0) > 0$ και $f(1) = f'(1) = 0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

163. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή f''

τέτοια ώστε $\begin{cases} f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases}$ και $f'(\alpha) = 0 = f'(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f''(x_0) = 0$.

164. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) < 0$.

165. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν για κάποιο $\gamma \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(\gamma) > 0$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) < 0$.

166. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) \geq x$ και $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

167. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $f(0) = f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε: $f'(x_1) - f'(x_2) = 2f(1)$.

ii. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $|f''(\xi)| \geq |f(1)|$.

168. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει $f(-1) + f(1) > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f' δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) > \frac{f(-1) + f(1)}{2}$.

169. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = t^x, x \in \mathbb{R}$.

i. Να εφαρμόσετε για την f το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[3, 4]$ και $[5, 6]$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$.

170. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την f' να είναι $1 - 1$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(4x - 3) = f(2x - 1) + f(3x - 2), x \in \mathbb{R}$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ – ΤΟΠΙΚΑ
ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι σταθερή και να βρείτε τη σταθερή τιμή της.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x + 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$ είναι σταθερή.
3. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g με $f'(x) = 2g(x), g'(x) = -2f(x)$.
 - i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)\eta\mu 2x + g(x)\sigma\upsilon\nu 2x + 1$, είναι σταθερή.
 - ii. Αν $g(0) = 0$, να βρείτε την h .
4. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $h(x) = f^2(x) + (f'(x))^2, x \in \mathbb{R}$, τότε:
 - i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι σταθερή.
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(1)=f'(1)=0$.
5. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = -g^2(x), g'(x) = f^2(x)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση: $h(x) = f^3(x) + g^3(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
6. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)f(-x)$ είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.
7. Έστω οι οριμένες σε διάστημα Δ συναρτήσεις f και g . Υποθέτουμε ότι:
 - i. Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ
 - ii. $\forall x \in \Delta$ είναι $f'x=gx$ και $g'x=fx$
 - iii. $0 \in \Delta$ και $f(0)=0, g(0)=1$Να αποδείξετε ότι $g^2(x) = 1 + f^2(x) \forall x \in \Delta$
8. Έστω οι οριμένες σε διάστημα Δ συναρτήσεις f και g . Υποθέτουμε ότι:
 - i. Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ
 - ii. $\forall x \in \Delta$ είναι $f'x=gx$ και $g'x=-fx$
 - iii. $0 \in \Delta$ και $f(0)=0, g(0)=1$Να αποδείξετε ότι $g^2(x) = 1 + f(x)g'(x) \forall x \in \Delta$

9. Έστω οι ορισμένες σε διάστημα Δ συναρτήσεις f και g . Υποθέτουμε ότι:
- $g(x) \neq 0 \forall x \in \Delta$
 - Οι f και g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
 - $f''xg(x) = g''xf(x) \forall x \in \Delta$
 - Υπάρχει $x_0 \in \Delta$ τέτοιος ώστε $f'(x_0)g(x_0) = g'(x_0)f(x_0)$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = \alpha g(x) \forall x \in \Delta$
10. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g . Αν ισχύει $f(x)f'(x) - g(x)f'(x) = f(x)g'(x) - g(x)g'(x) \forall x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = g(x_0)$ δείξτε ότι $f = g$
11. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(x) = xf'(x) + 2$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.
12. Δίνεται συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $2f(x) = xf'(x) - x$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f'' είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.
13. Μια παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι:
- Η συνάρτηση $Gx = \ln f(x) - 2x$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$
 - $f(x) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
14. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $\ln[f(x)]^{f(x)} = f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = e$
- Να δείξετε ότι η $g(x) = \frac{\ln f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$
 - Να βρεθεί ο τύπος της f
15. Έστω συνάρτηση f που ισχύει $f(x) + 2f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = f(x)\sqrt{e^x}$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της f
16. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g με $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$. Αν ισχύει $f'(x) = g(x)$ και $f(x) + g'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
- Η συνάρτηση $\varphi(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - $f^2(x) + g^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Η συνάρτηση $h(x) = (f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$ είναι σταθερή.
 - $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

17. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:
 $f(0) = f'(0) = 0$ και $(f(x) - f'(x))^2 = 2f'(x)f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = [f^2(x) + (f'(x))^2]e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
18. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(0) = 1$ και $g(0) = 0$ να αποδείξετε ότι:
 i. Οι συναρτήσεις $h(x) = (f(x) + g(x))e^{-x}$ και $k(x) = (f(x) - g(x))e^x$
 ii. Να βρείτε τους τύπους των f, g
19. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.
20. Δίνεται η συνάρτηση με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^4$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
21. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
22. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - f(y) \geq (x - y)^8$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
23. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| + \sin(x - y) \leq 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.
24. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 2$ για κάθε $x > 0$.
25. Έστω συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0) = 2$ και
26. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
 i. $f'(x) = \sin x + 2x, f(0) = 1$.
 ii. $f'(x) = 16x^3 + 6x, f(0) = 2$.
 iii. $f'(x) = \sin 2x + \eta \mu 3x, f(0) = 1$.

- iv. $f'(x) = 2e^{2x} + \sqrt{x}, x > 0, f(1) = e^2.$
- v. $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}, x > 0, f(1) = 0.$
- vi. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, f(0) = 0.$
- vii. $f'(x) = 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- viii. $f'(x) = 12\eta\mu^2 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x, f(0) = 0.$
- ix. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, f(1) = 1.$
- x. $f'(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 4)^2, f(0) = 16.$

27. Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu 2x - e^{-x},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 5.$
- ii. $f'(x) = \frac{2}{x},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(1) = f(-1) = 3.$
- iii. $\sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x) + \eta\mu x \cdot f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x,$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 2.$
- iv. $f'(x) = x(2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x),$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1.$
- v. $f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x},$ κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2.$
- vi. $x^3 f(x) f'(x) + 1 = 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(1) = f(-1) = 1.$

28. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

- i. $f'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$ και $f(1) = -1$
- ii. $f'(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2}$ και $f(1) = e$
- iii. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ και $f(1) = 1$
- iv. $f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$ και $f(1) = 0$
- v. $f'(x) = \frac{4(\ln x + 1)^3}{x}$ και $f(1) = 0$

29. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

- i. $f'(x) = (x + 1)e^x$ και $f(0) = 1$
- ii. $f'(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ και $f(0) = 1$
- iii. $f'(x) = e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$ και $f(0) = 0$

30. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο

$(-1, +\infty)$ με $(x + 1)^2 f'(x) = e^{x^2}(2x^2 + 2x - 1),$ για κάθε $x > -1$ και

$f(0) = 1.$ Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x+1}, x > -1.$

31. Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f παραγωγίσιμης στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

- i. $f(x) + x f'(x) = 3x^2 + 1, f(1) = 2.$
- ii. $x f'(x) + f(x) = e^x, f(1) = e + 1.$

iii. $xf'(x) + x^2 = f(x) + x^2e^x, f(1) = e - 1.$

iv. $f'(x) = 3x - \frac{1+f(x)}{x}, f(1) = 1.$

32. Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = 2xe^{-f(x)},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0.$

ii. $f'(x) = 2f(x)$ και $f(x) > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1.$

iii. $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$ και $f(x) > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 4.$

iv. $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 2e^{2x},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 1.$

v. $f'(x) = x + \frac{2f(x)}{x},$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 0.$

vi. $f(x) + \ln f'(x) = x + 1,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1.$

33. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι:

i. $f'(4x - 3) = 2x + 5$ και $f(-3) = 1, x \in \mathbb{R}.$

ii. $f'(x^2) = 3x - 9$ και $f(0) = 0, x > 0.$

iii. $f'(x^3) = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ και $f(1) = 7, x > 0.$

iv. $f'(3x - 1) = 2x + 1,$ και $f(2) = 5, x \in \mathbb{R}.$

34. Να βρείτε τον τύπο της f ορισμένης στο Δ αν:

i. $f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x, \Delta = \mathbb{R}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ii. $f'(x) = 3x^2\sigma\upsilon\nu x - x^3\eta\mu x, \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

iii. $f'(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x), \Delta = \mathbb{R}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

iv. $f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}, \Delta = (0, +\infty)$ και $f(\pi) = 1$

v. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$

vi. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$

vii. $f'(x) = \frac{1}{x\ln x}, \Delta = (1, +\infty)$ και $f(e^2) = -\ln 2$

viii. $f'(e^x) = x + 1, \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 2$

ix. $xf'(\ln x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = \pi$

35. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f'\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = x$ για κάθε

$x > 0$ και $f(0) = \frac{1}{\ln a} (0 < a \neq 1).$ Να βρείτε την $f.$

36. Να βρείτε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

i. $f''(x) = 6x, f'(0) = f(0) = 2.$

ii. $f''(x) = 12x^2 - 9, f'(0) = 4f(0) = 4.$

iii. $f''(x) = 4e^{2x}, f'(0) = f(0) = 3.$

iv. $f''(x) = -9\eta\mu 3x, f'(0) = f(0) = 1.$

37. Αν $f''(3x - 1) = 18x, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -1, f'(1) = 10$ να βρείτε την f .
38. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(2x - 1) = 12x - 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f έχει στο σημείο $M(1, f(1))$ εφαπτομένη με εξίσωση $y = 3x - 2$, να βρείτε τον τύπο της f .
39. Να βρεθεί η 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι $f^{(3)}(x) = 12 \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = -1, f(-1) = -5$ και $f(1) = 3$
40. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
- $f'(x) + f(x) = 0$
 - $2f'(x) + 3f(x) = 0$
 - $7f'(x) + 11f(x) = 0$
 - $f'(x) = 2f(x)$
 - $5f'(x) = 9f(x)$
 - $4f'(x) = 15f(x)$
41. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθούν οι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ συναρτήσεις f αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:
- $f'(x) + 2xf(x) = 0, \Delta = \mathbb{R}$
 - $\sqrt{x}f'(x) = \frac{f(x)}{2}, \Delta = (0, +\infty)$
 - $f'(x) = f(x)\sin x, \Delta = \mathbb{R}$
 - $f'(x) = f(x)\eta\mu x, \Delta = \mathbb{R}$
 - $f'(x) = f(x) + 1^x, \Delta = \mathbb{R}$
 - $f'(x) = 2x(f(x) + 1), \Delta = \mathbb{R}$
 - $e^{-x}f'(x) + f(x) = 1, \Delta = \mathbb{R}$
 - $f'(x) = (1 - f(x))\sin x, \Delta = \mathbb{R}$
42. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $2x[f'(x) + f(x)] = e^{-x}$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = \frac{1}{e}$. Να βρείτε την f .
43. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι $x(f'(x) + 5) = 2(f'(x) + x^2 + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 7$
44. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι $x(f'(x) - 2x + 1) = f'(x) - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-1) = 2$
45. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα:
 $f'(x) = x(4 - f''(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $xf'(x) = 2x^2, x \in \mathbb{R}$.
 ii. $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.
46. Να βρεθεί η άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι $xf'(x) = 4x^4 + 2f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 3$
47. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
 $f(2) = \ln 4$ και $f'(x) = \frac{f(x)}{x \ln x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι
 $f(x) = 2 \ln x, x \in (1, +\infty)$.
48. Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = 1$ για κάθε $x > 1$. Αν στο σημείο $M(e, f(e))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη, να βρείτε τον τύπο της f .
49. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0$, για κάθε $x > 1$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 3 = 0$.
50. Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(0) = 2$ και $f'(x)f(x) = e^x(e^x + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = (e^x + 1)^2$.
 ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
51. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\frac{f'(x)f(x)}{e^x} = \sqrt{1 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \sqrt{3}$
 i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{1 + f^2(x)} = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
52. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 i. $f'(x) = \frac{x - e^{-x}}{f(x)}, f(0) = 2, f(x) \neq 0$.
 ii. $f'(x) = \frac{2x^3 + e^x}{f(x)}, f(0) = \sqrt{2}, f(x) \neq 0$.
 iii. $2f'(x) = e^{x-f(x)}, f(0) = 0$.
 iv. $f'(x) = 2x \ln(x^2 + 1)f(x), f(x) > 0, f(0) = 1$.
 v. $f(x) = \frac{-xf'(x) \ln x}{2}, f(e) = 1, x > 1$.
 vi. $f'(x) = \frac{4x^3 + 2x}{3f^2(x)}, f(1) = 2, x > 1, f(x) > 0$.
 vii. $f'(x) = 2xf^2(x), f(0) = -1, f(x) \neq 0$.
 viii. $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}, f(0) = 1, f(x) > 0$.

53. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g με
 $f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = g(0)$, να δείξετε ότι
 $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
54. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = e$ και
 $x(f'(x) - f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \geq 0$.
 i. Να βρείτε το $f(0)$.
 ii. Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x > 0$.
 iii. Να βρείτε τον τύπο της f .
55. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με
 $xf'(x) = (x+1)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύουν $f(1) = e, f(-1) = e^{-1}$
 Να βρείτε τον τύπο της f .
56. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, έχει την ιδιότητα
 $f(x)f'(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 i. $f'(x)f(-x) = f(x)f'(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Η συνάρτηση $g(x) = f(x)f(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Ποια είναι η τιμή της
 g ;
 iii. $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιος είναι ο τύπος της f ;
57. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει
 $f'(x)\sin x = f(x)(\sin x - \eta\mu x)$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι
 $f(x) = e^x \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
58. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) > 0$
 και $f'(x) = f(x) \ln f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f δεν είναι 1-1, να αποδείξετε
 ότι $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.
59. Να βρείτε τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όταν $f''(x) =$
 $f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 1$.
60. Να βρεθεί οι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε
 ότι $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2, f'(0) = 0$
61. Να βρεθεί οι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε
 ότι $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0, f(1) = e - \frac{1}{e}$

62. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f'(0) = 5$ και $f(0) = 3$, να βρείτε τον τύπο της f .
63. i. Έστω $k \in \mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ συνάρτηση f . Να αποδειχθεί η ισοδυναμία: $f' = kf \Leftrightarrow f(x) = ce^{kx}$, όπου $c \in \mathbb{R}$
 ii. Έστω οι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g . Υποθέτουμε ότι $f''(x) + g'(x) = f'(x) + g''(x) \forall x \in \mathbb{R}$ και ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$. Να αποδείξετε ότι $f = g$.
 iv. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $h: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $h'(x)\eta\mu x - h(x)\sigma\upsilon\nu x = h(x)\eta\mu(-x) \forall x \in (0, \pi)$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi e^{-\frac{\pi}{2}}$
64. i. Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ συνάρτηση f . Να αποδειχθεί η ισοδυναμία: $f'(x) = f(x) + e^x \Leftrightarrow f(x) = (x + c)e^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$
 iii. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι $\frac{g(x) + x \ln x g'(x) - x e^x}{x} = g(x) \ln x, \forall x \in (1, +\infty)$ και $g(e) = 0$
65. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f(x - 7)f'(7 - x) = 7 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)f(-x) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
66. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) + f''(4 - x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 1$. Να αποδείξετε ότι:
 i. $f'(x) - f'(4 - x) = 2x - 4, x \in \mathbb{R}$
 ii. $f(x) + f(4 - x) = x^2 - 4x + 6, x \in \mathbb{R}$
67. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f(1) = f'(1) = 1$ και $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x) + x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ έχει σταθερή παράγωγο
 ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f
68. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν οι σχέσεις: $f'(x) = e^{g(x)}$ και $g'(x) = e^{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = g(0)$, να δείξετε ότι: $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
69. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύουν $f(a) = f'(a) = 1$ και $f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο α
 - ii. Να βρεθεί ο τύπος της f
70. Έστω συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 2, f(2) = -7$ και $f(x+y) = f(x) + axy - 3y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ (σταθερός)
- i. Να βρεθεί ο a
 - ii. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη
 - iii. Να βρεθεί ο τύπος της f
71. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 4, f(2) = -8$ και $f(x+y) = f(x) + kxy - 4y^2, (k \in \mathbb{R})$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- i. Να βρεθεί ο k
 - ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
 - iii. Να βρεθεί η f
72. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0, f'(0) = 2$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση
- $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
73. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 2$ και ισχύει
- $$f(\alpha + \beta) = e^\alpha f(\beta) + e^\beta f(\alpha), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
- i. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη
 - ii. Να βρεθεί ο τύπος της f
74. Έστω συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ και ότι υπάρχει συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$ τέτοια ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) = 1 + xg(x)$ (1)
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
 - ii. Να βρεθεί ο τύπος της f
 - iii. Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις g που ικανοποιούν την (1).
75. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 1$ και ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y) \forall x, y \in (0, +\infty)$
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη
 - ii. Να βρεθεί ο τύπος της f
76. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 5$ και ισχύει $f(xy) = xf(y) + yf(x) \forall x, y \in (0, +\infty)$
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη
 - ii. Να βρεθεί ο τύπος της f

77. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = e^x + 5x$

ii. $f(x) = \ln x + 2x^2$

iii. $f(x) = \sqrt{x-3}$

iv. $f(x) = \sqrt{5-x}$

v. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

vi. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

vii. $f(x) = \frac{3^{x^3+x} \cdot 2^{x^3+x}}{5^{x^3+x}}$

viii. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^3$

ix. $f(x) = a^x + x, a > 1$

x. $f(x) = 2^x - \left(\frac{3}{4}\right)^x$

xi. $f(x) = e^x + x - \eta \mu x$

xii. $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$

xiii. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$

xiv. $f(x) = 7x^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

xv. $f(x) = \frac{1-x \ln x}{\ln x}$

xvi. $f(x) = \frac{3x-2}{5x+7}$

78. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

ii. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{2}{3}$

iii. $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x}$

iv. $f(x) = \ln x - e^{-2x} - 3$

v. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

vi. $f(x) = (2x - x^2)e^x$

79. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = (x-1)e^x - (x+1)e^{-x}$

ii. $f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$

iii. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$

iv. $f(x) = x \eta \mu x + \sigma \nu \nu x, x \in (0, 2\pi)$

v. $f(x) = 2xe^x - e(x+1)^2$

vi. $f(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + 1}$

80. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

ii. $f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$

81. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

ii. $f(x) = x(\ln x - 1 - e) + e^e$

iii. $f(x) = xe^x$

iv. $f(x) = x^2 e^{2x}$

v. $f(x) = x^2 \ln(2x)$

vi. $f(x) = \ln x \cdot (\ln(\ln x) - 1)$

vii. $f(x) = a^{\sqrt{x^2+1}}, 0 < a < 1$

viii. $f(x) = 9^x - 8^x$

ix. $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$

x. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

xi. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

xii. $f(x) = \ln|x+1|$

xiii. $f(x) = \ln|x^2 - 4|$

xiv. $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-3|$

xv. $f(x) = \ln(x-2)^4$

82. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

ii. $f(x) = (x^2)^x$

iii. $f(x) = x^x e^{2-x}$

83. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

ii. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x$

iii. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x$

iv. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

84. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$i. f(x) = (x-1-e)e^x + \frac{2ex-x^2}{2e}$$

$$ii. f(x) = x^2 \ln x - 2x \ln x + x$$

$$iii. f(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x - \frac{ex^3}{3} + 4ex$$

$$iv. f(x) = (x^2 - 3)x \ln x + \frac{2x(6-x^2)}{3}$$

$$v. f(x) = x \ln^2 x - 4x \ln x - 4x$$

85. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$i. f(x) = e^x - x + \frac{x^2}{2}$$

$$ii. f(x) = 2x \ln x - 4x + x^2 - 7$$

$$iii. f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 5 - x^2, x \in (-\pi, \pi)$$

$$iv. f(x) = \pi x - x^2 + 2\eta\mu x - 9, x \in (0, \pi)$$

86. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$i. f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$$

$$ii. f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x, x \in (0, 2\pi)$$

$$iii. f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$iv. f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$$

$$v. f(x) = x \cdot \ln(1+x^2)$$

$$vi. f(x) = 6x - 3\eta\mu 2x - 4x^3 + 7$$

87. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$i. f(x) = 2 + |x^2 - 1|$$

$$ii. f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 2x$$

$$\text{iii. } f(x) = |\eta\mu x|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{iv. } f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x - \frac{x}{2}, -\pi < x \leq 0 \\ \sqrt{3} \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \frac{x}{2} - 1), 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{vi. } f(x) = \begin{cases} x^2 e^x - e, x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x}, x > 1 \end{cases}$$

$$\text{vii. } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x < 0 \\ e^x - x, x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{viii. } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, x \leq 1 \\ \ln \frac{1}{x}, x > 1 \end{cases}$$

88. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\text{i. } f(x) = x e^{-x}, x \in [0, +\infty)$$

$$\text{ii. } f(x) = x^2 \ln x, x \in [1, e]$$

$$\text{iii. } f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x - x\sqrt{3}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{iv. } f(x) = \eta\mu 2x - x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{v. } f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2} \cdot \eta\mu x + 2\sqrt{2}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{vi. } f(x) = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{vii. } f(x) = \sqrt{2}\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$$

$$\text{viii. } f(x) = \frac{13\sqrt{3}}{4} - 3\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\text{ix. } f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$$

$$\text{x. } f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$$

89. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = \sqrt{x-2}$

ii. $f(x) = \sqrt{7-x}$

iii. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

iv. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

v. $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2-x-2}$

vi. $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

vii. $f(x) = \sqrt{|2x^2-3x-5|}$

90. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ -\eta\mu x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1} - x}{e}, & -2 \leq x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

91. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, τις συνάρτησεις:

i. $f(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 1$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

iii. $f(x) = \ln x - x$

iv. $f(x) = x^x$

92. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, τις συνάρτησεις:

i. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

ii. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

iii. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

$$iv. f(x) = 2x^3 - \lambda x^2 + 1, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$v. f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30, & x < 1 \\ x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x - 20, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$vi. f(x) = |x^2 - 1| + 2$$

93. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$$i. f(x) = x(\ln^2 x - 3 \ln x + 3)$$

$$ii. f(x) = e^{2x} - 6e^x + 4x + 1$$

$$iii. f(x) = 6xe^{-x} + 12e^{-x} - x^3 + 6x + 1$$

$$iv. f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu x + 2\sqrt{2}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

94. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$i. f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$ii. f(x) = \sqrt{4 - x}$$

$$iii. f(x) = \begin{cases} e^x + x + 1, & x \leq 0 \\ 2 + \ln(x + 1), & x > 0 \end{cases}$$

$$iv. f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{x} - x, & x > 1 \\ \sqrt{1 - x} - 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$v. f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

$$vi. f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

95. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$i. f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

$$ii. f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$$

96. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$, $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) + \gamma \ln \gamma = \gamma$.

97. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \ln \sqrt{x} = \frac{x}{2} - \ln \sqrt{x}$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

98. Έστω $0 < a < e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln \frac{1}{x} = ax$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(\frac{1}{e}, 1)$.

99. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \ln x = 1$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $[1, e]$.

100. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\eta\mu 7x - 11x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

101. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν μία και μόνο πραγματική ρίζα:

i. $e^x = 1 - x$

ii. $5e^x = 5 - 3x^3$

iii. $7 \ln x = 2 - 2x$

iv. $e^{x-1} = 2 - x$

v. $\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = 0$

102. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $9e^x = 9 - 3x$

ii. $8 \ln x = 5 - 5x^2$

iii. $\ln x = e + 1 - x$

iv. $e^x(x+1+\ln(x^2+1))=1$

v. $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$

vi. $(x+1)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 = 1$

103. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία και μοναδική πραγματική ρίζα

i. $x^{2001} + 276x^{1567} + 57x^{763} = 13569 - x^{325}$

ii. $e^x = -x$

iii. $\ln \frac{1}{x} = x$

iv. $c_1^2(a_1 - x) + c_2^2(a_2 - x) + \dots + c_\nu^2(a_\nu - x) = x + x^3 + \dots + x^{2\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}^*, c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_\nu \in \mathbb{R}$

v. $(\frac{2}{3})^x = 2x + 2367$

104. Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

i. $x^4 + 32x + 49 = 0$

ii. $2(x-1)e^x + 3 = 0$

iii. $3e^x = 3ex - 1$

iv. $e^x = \ln(x+1)$

105. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

i. $xe^x + 1 = e^x$

ii. $x = \ln(1+x)$

iii. $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$

iv. $e^x = 1 + \ln(x+1)$

106. Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

i. $x^4 + 32x + 16 = 0$

ii. $e^x = x + 2$

iii. $x^2 = x \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$

iv. $x \cdot 5^x = 3567$

107. Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

i. $2x^3 + 24x + 7 = 15x^2$

ii. $2x^3 + 24x = 15x^2 + 13$

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

109. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - x^2$ και $g(x) = xe^x + 1$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

111. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^3 - 3x^2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

112. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^3 - 9x^2 + 24x = \lambda$ να έχει τρεις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

113. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 4x + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του α για την οποία η εξίσωση $f(x) = 2\alpha - 7$ έχει πραγματική ρίζα.

114. Να αποδείξετε ότι:

i. $e^x - x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μία λύση.

115. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$3x + \sqrt{2} \cdot \eta\mu \frac{a-x}{\sqrt{2}} - \sqrt{3} = 3a - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x-a}{\sqrt{3}}$$

έχει μία και μοναδική πραγματική ρίζα.

116. Έστω $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ τέτοιοι ώστε $\alpha\beta + 1 > \alpha + \beta$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha^x - \sqrt[13]{a} = \sqrt[53]{\beta^4} - \beta^x$$

έχει μία και μοναδική πραγματική ρίζα.

117. i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x + 2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x = 2(x-1)$ έχει μία και μοναδική πραγματική ρίζα.

118. Έστω α το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου και β, γ τα μήκη των κάθετων πλευρών του.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f με

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1.$$

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $a^x = \beta^x + \gamma^x$ έχει μία και μοναδική πραγματική ρίζα.

119. Α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x$.

Β. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $3^{4x-x^2} - x^2 = 3^{8-2x} - 6x + 8$

ii. $f(7 \cdot 5^x) + f(4 \cdot 3^x) = f(3 \cdot 4^x) + f(5 \cdot 7^x)$

120. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i. \varepsilon\varphi x = \frac{1+e^{-\sigma\nu\nu x}}{1+e^{-\eta\mu x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$ii. 3^{x^2-x-2} = \frac{1+2^{x^2}}{1+4 \cdot 2^x}$$

121. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$i. 2x^2 \ln x = e$$

$$ii. x^x = 2^{x+4}$$

122. Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες:

$$i. x^x \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad ii. e^x \geq ex \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$iii. xe^x \geq e^x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad iv. x^2 + x\eta\mu x + \sigma\nu\nu x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$v. x^e e^{\frac{1}{x}} \geq 1 \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad vi. e^x \leq (1+x)^{1+x} \quad \forall x \in (-1, +\infty)$$

123. Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες:

$$i. x\eta\mu x + \sigma\nu\nu x > 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$ii. \frac{1}{3} \varepsilon\varphi x + \frac{2}{3} \eta\mu x > x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$iii. e^x - \eta\mu x > 1 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$v. \alpha e^{-\beta x} - \beta e^{-\alpha x} > \alpha - \beta \quad \forall x \in (0, +\infty), \text{ όπου } 0 < \alpha < \beta$$

124. Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες:

$$i. 2x^2 \ln x > 3x^2 - 2e^2 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$ii. \frac{1}{x^2} > \ln \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$iii. 2e^x + x^2 > 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$iv. e^{\alpha x} > \frac{\beta(\alpha x + 1)}{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha > \beta > 0$$

$$v. 4x - x^2 - 4 < 2x \ln x \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

125. Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες:

$$i. e^x > -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ii. \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

126. i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$i. e^\pi > \pi^e$$

$$ii. 100^{101} > 101^{100}$$

$$iii. \forall \alpha, \beta \in (0, e] \text{ με } \alpha < \beta \text{ ισχύει } \alpha^\beta < \beta^\alpha$$

$$iv. \forall \alpha \in [e, +\infty) \text{ ισχύει } \alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha$$

$$v. \forall x \in (0, +\infty) \text{ ισχύει } e^x \geq x^e \text{ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για } x = e.$$

$$vi. \text{ Να λυθεί η εξίσωση: } \left(e^{\frac{3713}{e}}\right)^x = x^{3713}$$

127. i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$$

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$a. 100^{101} \cdot e^2 > 101^{100}$$

$$b. \ln x \leq ex - 2 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

128. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$,

$$x \in (0, 2\pi) - \{\pi\}.$$

$$ii. \text{ Αν } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \alpha > \beta, \text{ να αποδείξετε ότι: } \frac{\eta\mu^2 \alpha}{\eta\mu^2 \beta} > \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \beta}.$$

129. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+a^2}{e^{ax}}$, $a > 1$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. $e^{2a} > \frac{a^2+4}{a^2}$.

130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x > 2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x-1)\ln(x+1) < \ln^2 x$, $x > 2$.

131. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$\alpha. e^x > x^2 + 1 \forall x \in (0, +\infty)$

$\beta. e^x < x^2 + 1 \forall x \in (-\infty, 0)$

132. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$ για $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι: $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$, για $x \in (0, +\infty)$.

133. i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

ii. Να αποδείξετε ότι $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}$.

134. i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x}} - 5^{\frac{1}{x+1}}.$$

ii. Να συγκριθούν οι αριθμοί $A = \sqrt{5} + \sqrt[5]{5}$ και $B = \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{5}$.

135. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln x \geq x - x^2$

136. i. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x + 4^x - 2, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$f \uparrow \mathbb{R}.$$

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $4^x + 12^x > 2 \cdot 3^x$

137. i. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + \lambda x + 3, \lambda > 1$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq \lambda - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $xe^x + \lambda x > 2(e^x - 1)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση: $e + (x-1)e^x = \lambda(1-x) + e^x$

138. i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = e^x + x$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $e^{x^2+2} - e^{2x+5} < 2x + 3 - x^2$

139. i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = a^x - x$, όπου $0 < a < 1$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $a^{x^2-4} - a^{x-2} = x^2 - x - 2 (0 < a < 1)$.

140. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(3^x + 4^x)^3 - 5^x \leq 5^{3x} - 3^x - 4^x$

ii. $a^{x^2-2x} - a^{x-2} \leq -x^2 + 3x - 2, a > 1$.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $x(\ln x + 1) > 1$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln \left(\frac{x^4+1}{x^2+1} \right) = \frac{x^2-x^4}{(x^2+1)(x^4+1)}$.

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $2 \ln x = \frac{x^2-1}{x}$.

iii. Αν $0 < x \neq 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x \ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

143. Έστω παραγωγίσιμες στο $\mathfrak{H}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $\forall x \in \mathfrak{H}$ να ισχύουν $g(x) \neq 0$ και $f'(x) \cdot g(x) > g'(x) \cdot f(x)$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(0) \cdot g(\eta\mu x) - g(0) \cdot f(\eta\mu x) = 0$$

144. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{H}$ συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x < f(x) \cdot \eta\mu x \quad \forall x \in \mathfrak{H}. \text{ Να λυθεί η ανίσωση:}$$

$$f(x) \geq \frac{2f(x) - f(789\pi)}{2 + \sigma\upsilon\nu x}.$$

145. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 6]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 6)$ και ισχύουν $f'(x) > x \quad \forall x \in (0, 6)$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(6) > 19$.

146. Έστω η παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) + f(x) > 1$ $\forall x \in [0, 1]$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(0) < 1$.

147. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $xf(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

148. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ για την οποία ισχύει: $xf'(x) + 1 < xe^{x-1}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) < e^{x-1} - \ln x$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

149. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει $f(x) \cdot \eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x (e^x \sigma\upsilon\nu x - f'(x))$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) < e^x \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

150. Έστω παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f'(x) > g'(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν $h > 0$ να αποδείξετε ότι $f(x+h) - f(x) > g(x+h) - g(x)$.

151. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(0) = 0$
και $f'(x) > 3x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

152. Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο
 $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν: $f(0) < 0$ και $f'(x) \geq 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε: $f(\alpha) = 0$.

153. Έστω ότι η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$,
παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύουν $f'(x) > e^x \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και $f(0) < 0$.
Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) > e^x + f(0) - 1 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

ii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

154. Έστω ότι η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$,
παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύουν $f'(x) \geq e^x \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και $f(0) < 0$.
Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \geq e^x + f(0) - 1 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

ii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

155. Έστω ότι η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$,
παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και ισχύουν $f'(x) > \frac{1}{x} \quad \forall x \in (1, +\infty)$ και $f(1) < 0$. Να
αποδείξετε ότι:

i. $f(x) > f(1) + \ln x \quad \forall x \in (1, +\infty)$

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$.

156. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και ισχύουν $f'(x) \geq \frac{1}{x} \quad \forall x \in (1, +\infty)$ και $f(1) < 0$. Να αποδείξετε ότι:
- $f(x) \geq f(1) + \ln x \quad \forall x \in (1, +\infty)$
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$.
157. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.
158. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .
159. Έστω $a > 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ είναι γνησίως αύξουσα.
160. i. Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$. Να αποδείξετε ότι $f \downarrow (1, +\infty)$.
- ii. Έστω $1 < a \leq \beta$. Να αποδείξετε ότι: $\beta^{a-1} \leq a^{\beta-1}$
161. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty), (g'(x))^2 > g(x) \cdot g''(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και $g(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι:
- $\ln g(x) < g'(0) \cdot x \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

162. Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες:

i. $\frac{\eta\mu x}{x} > \frac{2}{\pi} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

ii. $e^x > 1 + \ln(x+1) \quad \forall x \in (0, +\infty)$

iii. $ax^2 + \eta\mu x > x \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad a > \frac{1}{2}$

163. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i. $\eta\mu x < 2x, x > 0.$

ii. $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}, x > 0.$

164. Να αποδείξετε ότι:

i. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

ii. $6x^2 \ln x < 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1,$ για κάθε $x > 1.$

iii. $24 - 12x^2 + x^4 > 24 \sin x,$ για κάθε $x > 0.$

165. Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq x^2 + 1$ για κάθε $x \geq 0$

166. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2 - \sin 2x + 1.$

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0.$

167. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 - (1 - x)(\ln x - 2).$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2 = (1 - x)(\ln x - 2).$

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f.$

iv. Να αποδείξετε ότι: $(1 - x)(\ln x - 2) \leq x^2 - 1,$ για κάθε $x > 0.$

168. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{1}{x^2} + 2 \ln x \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

ii. $e^x \geq x^2 + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

iii. $x^e e^{\frac{1}{x}} \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

169. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) συνάρτηση f και $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Υποθέτουμε ότι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 (θεωρούμε $D_f = (\alpha, \beta)$).

170. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

171. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ και $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$.

172. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, $f'(\alpha) = 0$ και $f(\alpha) = 1$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (f(x))^{f(x)}$.

α. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία

β. Έστω $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa < \lambda$. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(\kappa)}{f(\lambda)} < \frac{\ln f(\lambda)}{\ln f(\kappa)}$.

173. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$. Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x) + x^2 - 2(\alpha + \beta)x \text{ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο } \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ να}$$

$$\text{δείξετε ότι } f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\beta) > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}.$$

174. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0) = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

ii. Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

175. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και f' γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x > 1 \\ f'(1), & x = 1 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα.

176. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f με

$$f(x) = 3x^2 + \alpha x + \beta \text{ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο } -\frac{2}{3} \text{ το } -\frac{10}{3}.$$

177. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda - 1)x^2 + 6\lambda^2x + 1$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο.

178. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -2 .

179. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1 \text{ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία } x_1 = 1 \text{ και } x_2 = -2.$$

180. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = x^2 + \alpha \ln x - \beta x + 4 \text{ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις } x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 2.$$

181. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2(\lambda + 1)x^2 + 3x + 5$. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

182. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \mu x^3 + 6x^2 + 2\mu x + \mu^2 + 1$, όπου $\mu \in \mathbb{R}^*$. Να προσδιοριστεί ο μ ώστε $f \uparrow \mathbb{R}$.
183. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \lambda x^3 + 2\lambda x^2 + 4(\lambda + 1)x + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε $f \uparrow \mathbb{R}$.
184. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (\lambda - 3)x^3 - 6x^2 + 3\lambda x + 6$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε $f \downarrow \mathbb{R}$.
185. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο αν και μόνο αν $\alpha^2 \leq 3\beta$.
186. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 3x + 4\alpha$ να μην παρουσιάζει ακρότατα.
187. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 3(\lambda + 1)x^2 + (3\lambda + 3)x + 6$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
188. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 < 4(\beta - 1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta) \cdot e^x$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.
189. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν $f'(x) > 0$ και $\sqrt{f'(x)} + \ln f(x) = 4\alpha x^3 + 6x^2 \eta \mu \alpha + 3\alpha x$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.
190. Δίνεται μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

191. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3 + e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημό της.

192. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$2f^3(x) + 12x^3 + 6f(x) = 3f^2(x) + 6e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } f \downarrow \mathbb{R}.$$

193. Έστω $a \in \mathbb{R}^*$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f^3(x) - x^3 + 3\eta\mu a \cdot f^2(x) = 6x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 a + 9e^x - 3(1+a^2)f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } f \uparrow \mathbb{R}.$$

194. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

ii. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty). \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty).$$

195. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x - x + \frac{x^2}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο.

ii. Να εξετάσετε αν το κρίσιμο σημείο της f είναι και θέση τοπικού ακροτάτου της.

196. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αλλά όχι αντιστρέψιμη, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

197. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$ τέτοιοι ώστε $\alpha f'(\alpha) + \beta f'(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$.

198. Έστω $a > 0$ τέτοιος ώστε $a^x \geq 3x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $a = e^3$.
199. Έστω $a > 0, \kappa \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $a^x \geq \kappa x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $a = e^\kappa$.
200. Αν $a^x + \beta^x \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta = 1 (\alpha, \beta > 0)$.
201. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $a_1, a_2, \dots, a_\nu \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ τέτοιοι ώστε $a_1^x + a_2^x + \dots + a_\nu^x \geq \nu$
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_\nu = 1$.
202. Αν για κάθε $x > 0$ είναι $a^x \geq x^a$, να αποδείξετε ότι: $a = e (0 < a \neq 1)$.
203. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(e, +\infty)$. Αν ισχύουν $f(e^2) = 0$ και
 $f(x) \leq \ln x - 2$, για κάθε $x \in (e, +\infty)$ να δείξετε ότι $e^2 \cdot f'(e^2) - 1 = 0$.
204. Αν $a > 0$ και για κάθε $x > -1$ ισχύει: $a^x \geq 1 + \ln(x+1)$, να δείξετε ότι $a = e$.
205. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $x \cdot f(x) + 1 \leq e^x + \eta \mu 2x$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 3$.
206. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι
 $(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x$, να δειχτεί ότι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι
γεωμετρικής προόδου.
207. Αν είναι $a^x \geq a + e \ln x$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.
208. Να προσδιοριστεί ο $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ αν γνωρίζουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $(\eta \mu a)^x + (\sigma \upsilon \nu a)^x + (4 \epsilon \varphi a)^x \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

209. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+1 \geq x^2 + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x\chi'$.
210. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, για την οποία ισχύουν:
 $f(-1) = -6$ και $e^{x+1}f(x) \leq -6$, για κάθε $x < 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$.
211. Έστω οι ορισμένες στο (α, β) και παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη x_0 .
212. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ δύο φορές και $f(x) \geq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ τότε να δείξετε ότι:
 i. $f(\alpha) = f(\beta)$
 ii. $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$
 iii. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.
213. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 3^x - 6^x, x \in \mathbb{R}$.
 i. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι το μέγιστο της f .
 ii. Αν $2^x + 3^x + \alpha^x \leq 1 + 5^x + 6^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in (0, +\infty)$.
214. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu} e^x$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.
 i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
 ii. Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq \left(\frac{ex}{\nu}\right)^\nu$, για κάθε $x > 0$.
 iii. Αν $\alpha > 0$ και $\alpha^x \geq \left(\frac{\alpha x}{\nu}\right)^\nu$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha = e$.

215. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3x^4 - 4x^3 + \alpha \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
216. Να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^x \geq \kappa x^2$ $\forall x \in (0, +\infty)$.
217. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^a \cdot e^{2a-x}$, όπου $a \in \mathbb{R}_+$. Να βρεθεί για ποια τιμή του a έχουμε την μικρότερη μέγιστη τιμή στην f .
218. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \lambda^x - x + 1$, όπου $\lambda > 1$. Να βρεθεί για ποια τιμή του λ έχουμε την μεγαλύτερη ελάχιστη τιμή στην f .
219. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2(1-a)x - a = 0$ (1), όπου $a \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $\forall a \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δύο άνισες ρίζες.
 - Να βρεθεί για ποια τιμή του a το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της (1) γίνεται ελάχιστο.
220. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (a-2)x - 3 = 0$ έχει για οποιαδήποτε τιμή του $a \in \mathbb{R}$ δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 .
- ii. Να βρεθεί για ποια τιμή του a η παράσταση $\frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2}$ γίνεται ελάχιστη.
221. Δίνεται ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + ax + \beta}{x^2 + x + 1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{1\}$ έχει δύο διακεκριμένες και αντίστροφες θέσεις τοπικών ακροτάτων x_1, x_2 . Να αποδείξετε ότι $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{3}$.
222. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η f να έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων.

ii. Αν η f έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων x_1, x_2 να αποδείξετε ότι

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = \frac{e^2}{4}.$$

223. Έστω ότι η συνάρτηση f με $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^*$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων x_1, x_2 και τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ ορίζουν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι:

i. $\beta^2 > 3\alpha\gamma$

ii. $\beta\gamma = 9\alpha\delta$

224. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ να αποδείξετε ότι:

i. $a^2 > 3\beta$

ii. Η f έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων x_1, x_2

iii. $(f''(x_1))^2 + (f''(x_2))^2 = 8a^2 - 24\beta$

iv. $(f''(x_1))^3 + (f''(x_2))^3 = 0$

225. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 2]$. Αν $f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = 1$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

ii. Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

226. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) < f(1) < f(5) < f(4)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 5)$.

227. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = [2, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με: $f(2) = f(4) = 2$ και $f(3) = -1$. Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 3$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $(2, 3)$.

ii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2,4)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -9$.

228. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x+1) = f(3-x)$ και $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

ii. Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο $[0,3]$ και ισχύει $f(0) < f(1)$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ολικών ακροτάτων της στο $[0,3]$.

229. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) > 0$

$\forall x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(\alpha) > 0$

ii. $f'(\beta) \geq 0$

230. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f'(x) - 3f(x)) \in \mathbb{R}_+^*$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει διάστημα της μορφής

$(\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$ στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ είναι γνησίως

αύξουσα.

231. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

διάστημα μορφής $(-\infty, a)$ στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

232. Έστω η ορισμένη σε διάστημα Δ συνάρτηση f και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ετερόσημοι

πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .

233. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
234. Αν για τους θετικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $x^3 \cdot y = 27$ δείξτε ότι $x \geq 4 - y$.
235. Αν για τους θετικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $3x + 2y = 10$ να δείξετε ότι $x^3 y^2 \leq 32$.
236. Αν οι αριθμοί x, y είναι τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $\sqrt{5}$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $2x + y$.
237. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του.
238. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η f έχει τη μικρότερη κλίση.
239. Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μια θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 600x$. (υποθέτουμε ότι $0 < x < 300$).
 - Να υπολογίσετε την τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ της περιοχής να γίνει μέγιστο.
 - Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.
240. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-1}$ που είναι πλησιέστερο στο $A(2,0)$.

241. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{e^{a\sqrt{3}}}{\sigma\upsilon\nu\alpha}x + e^{a\sqrt{3}}$, όπου $a \in (0, \frac{\pi}{2})$. Να βρεθεί για ποια τιμή του α το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες γίνεται μέγιστο.
242. Ένας εκδότης θέλει σε κάθε σελίδα του νέου βιβλίου Μαθηματικών που εκδίδει, το κείμενο να καλύπτει συνολικά 360 cm^2 . Τα περιθώρια της σελίδας θέλει να είναι 5 cm επάνω και κάτω και 2 cm αριστερά και δεξιά. Να βρείτε:
- Τις διαστάσεις της σελίδας ως συνάρτηση των διαστάσεων του κειμένου.
 - Μια συνάρτηση η οποία να δίνει την επιφάνεια της σελίδας ως συνάρτηση του πλάτους του κειμένου.
 - Τις διαστάσεις της σελίδας, έτσι ώστε αυτή να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.
243. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$, όπου α σταθερά με $x \in (0, +\infty)$ και $\alpha \in [\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση:
- $$E(x) = x^2, x \in (0, +\infty)$$
- και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση
- $$P(x) = E(x) - K(x), x \in (0, +\infty).$$
- Να βρείτε:
- Την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.
 - Την τιμή του α για την οποία το κέρδος $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.
244. Ο πληθυσμός μιας κοινωνίας μικροβίων, σε δεκάδες μικρόβια, δίνεται από τον τύπο: $P(t) = e^{7-2t} - e^{t-5}$, $t \geq 0$ ο χρόνος σε ώρες.
- Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω πληθυσμός συνεχώς ελαττώνεται.
 - Να βρείτε σε πόσες ώρες ο παραπάνω πληθυσμός θα έχει αφανιστεί.
 - Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μείωσης του πληθυσμού είναι μέγιστος.
245. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου A ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ από την πώληση των βιβλίων που

εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από την συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι, ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

246. Μια πολυεθνική εταιρεία εκτιμά ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ από την παραγωγή x μονάδων προϊόντος, ανά εβδομάδα, δίνεται από τη σχέση: $K(x) = 25x + 2000$. Για την τιμή P σε ευρώ της κάθε μονάδας προϊόντος ισχύει η σχέση: $x + 50P = 5000$.
- i. Πόσα τεμάχια πρέπει να παράγονται την εβδομάδα, έτσι ώστε η εταιρεία να έχει το μέγιστο κέρδος;
 - ii. Αν η κυβέρνηση βάζει φόρο 10 ευρώ σε κάθε μονάδα προϊόντος, πόσα τεμάχια πρέπει να παραχθούν, ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος;
 - iii. Να βρείτε το φόρο που πρέπει ναβάλει η κυβέρνηση σε κάθε μονάδα προϊόντος, ώστε εβδομαδιαία να έχει τη μέγιστη είσπραξη φόρων.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:
 - i. $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 3x + 1$
 - ii. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
 - iii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
 - iv. $f(x) = \sin x - x + 2, x \in (0, 2\pi)$
 - v. $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 24x - 2 + 6x^2 \ln x$
 - vi. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
 - vii. $f(x) = x^2 + 2\sin x$
 - viii. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$
2. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$ στα σημεία καμπής της είναι κάθετες μεταξύ τους.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5(x - \lambda)^7$ με $\kappa < \lambda$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ είναι κοίλη στο διάστημα (κ, λ) .
4. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g , τέτοια ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η C_f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.
5. Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > 0$ και $g''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $h = f \circ g$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
6. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $(f'(x))^3 + (f'(x))^2 + f'(x) = e^x + x^2 - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.
7. Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f''(x) > f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
8. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει στο σημείο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής το $(2, -2)$.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2ax^3}{3} + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^3 + 7)x - 5a^2$, $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2x^4}{12} - \frac{(a+1)x^3}{6} + \frac{(2a-1)x^2}{2} + 2x - 1$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε το $x_0 = 1$ να είναι θέση σημείου καμπής της C_f .
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\lambda x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι κυρτή.
12. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(x)f'(x) = \alpha$, $\alpha \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - \lambda)e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η C_f έχει ένα σημείο καμπής, το οποίο να προσδιορίσετε.
 - Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου καμπής της C_f , όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.
14. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$ έχει σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι: $3\alpha^2 > 8\beta$.
15. Έστω η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(1) = 1$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f , στο σημείο $(1, f(1))$.
 - Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\alpha + \beta - 5) + f(\alpha - \beta - 1) = 2\alpha - 4$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f , στο σημείο $M(0, f(0))$.
 - Να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{e^x + 1}{2} \geq \frac{1}{2}x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 - Να αποδείξετε ότι: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.
 - Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3$.

18. Α. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq f(\alpha) + f'(\beta)(x - \alpha), \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$
 Β. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ανισότητας.
19. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta).$$
20. Δίνεται η κοίλη στο διάστημα Δ συνάρτηση f . Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$
21. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει στη θέση $x = 4$ τοπικό ακρότατο και η f' στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0,6]$, να δείξετε ότι:

$$2f'(6) + f'(0) < 0.$$
22. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, καθώς και η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}.$$
 Αν η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι:
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.
 - Αν $x_1 < \alpha < x_2$, τότε: $g(x_1) < g(x_2)$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x-2}$

ii. $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x^2+9}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

iv. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$

2. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $2x + 3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\eta\mu^2x}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\sigma\upsilon\nu^2x}}$.

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1+e^x}$. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f .

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-ax+1}{x-1} - \beta x + 3 \right) = 0$.

6. Αν η ευθεία $y = 4x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1)f(x) - 8x^2 + 2x + \eta\mu x}{f(x) + x[f(x) + 1] - 4x^2 + 3}.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(a-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $x = -2$ και $y = 3$ να είναι ασύμπτωτες της C_f .

8. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2x^2-x-3}{x-1}$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x + a$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική της παράσταση να εφάπτεται στην πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$, όταν $x \rightarrow +\infty$.

10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xf(x) - x^2}{\ln x + x} \right] = 2$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$, είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x - 3$.
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = 4$.
 - Να βρείτε την ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(f(x))$ στο $+\infty$.
12. Να βρείτε τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{e^{x-1} - x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^2 + 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1) \ln x}{e^{2x}}$
13. Να βρείτε τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 1)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\varphi x} \ln x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 \eta\mu \frac{1}{x} - x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{2^{-x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\beta x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
14. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x - a)f'(a)} \right] = -\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

15. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f'' συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ισχύουν $f(0) = 1$ και $f''(0) = 4$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x)}{2x^2 - 1 + f(x)}.$$

16. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} = 2f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = -f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+2h) + 6f(x-h) - 9f(x)}{3h^2} = 3f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{1-x} + x^2 + ax + \beta}{x^2 - 2x + 1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν είναι γνωστό ότι είναι πραγματικός αριθμός.

18. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x - \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right)$

20. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x) - e^x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της $1^{\text{ης}} - 3^{\text{ης}}$ γωνίας, ορθογωνίου συστήματος αξόνων, είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

21. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = e^x - x + 1$
- $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

iv. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}, & x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii. Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
 - i. $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$
 - ii. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
 - iii. $f(x) = x + \frac{2-3x}{x^2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
 - i. Να γίνει μελέτη και χάραξη της γραφικής της παράστασης.
 - ii. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\lambda e^{-\frac{1}{x}} = x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+\sin x}{\eta\mu x}$, $x \in \Delta = (0, \pi)$.
 - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - ii. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
 - iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - iv. Να χαράξετε τη C_f .
 - v. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - \lambda \eta\mu x + \sin x = 0$, όπου $x \in \Delta$.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Να διατυπώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A .

Απάντηση:

Έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f σημείο της A , την ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

2. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , αν και μόνο αν, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$

Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο A ;

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

4. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

5. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f ;

Απάντηση:

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x),$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

7. ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 . Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 ;

Απάντηση:

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

8. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Απάντηση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

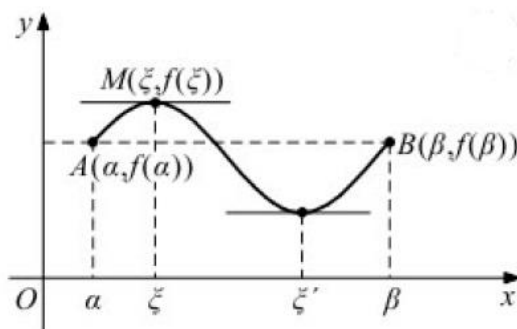
$$f'(\xi) = 0$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

9. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ Θ.ROLLE

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Rolle.

Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



Σχήμα 4: Θ. Rolle

10. Θ.Μ.Τ.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.).

Απάντηση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

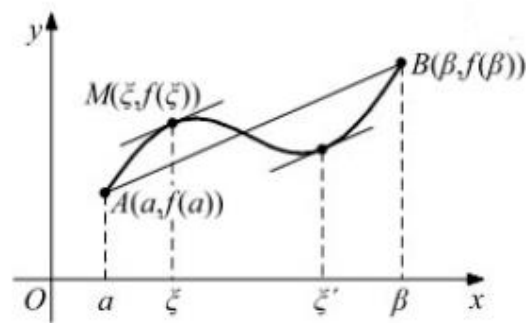
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

11. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ Θ.Μ.Τ

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.

Απάντηση:

Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



Σχήμα 5: Θ.Μ.Τ.

12. ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

Έστω μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

13. ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

14. ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

15. ΠΙΘΑΝΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο Δ ;

Απάντηση:

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

16. ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Απάντηση:

Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

17. ΚΥΡΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Απάντηση:

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

18. ΚΟΙΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Απάντηση:

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

19. ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

20. ΠΙΘΑΝΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της f στο Δ ;

Απάντηση:

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

21. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

22. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $+\infty$; (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Απάντηση:

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (αντιτοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$) τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιτοίχως στο $-\infty$)

23. ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Απάντηση:

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,

αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ - ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Αντιπαράδειγμα 1

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

- Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

i. Ψευδής

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

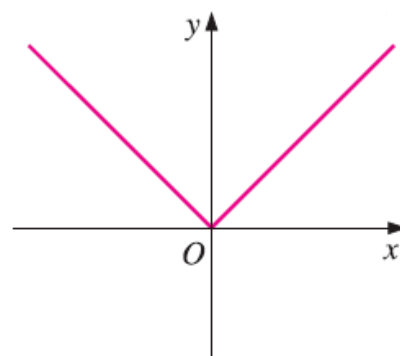
Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Πράγματι,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



Αντιπαράδειγμα 2

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σύνολο A που είναι ένωση διαστημάτων και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο A .

- Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

i. Ψευδής

ii. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Αντιπαράδειγμα 3

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

i. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

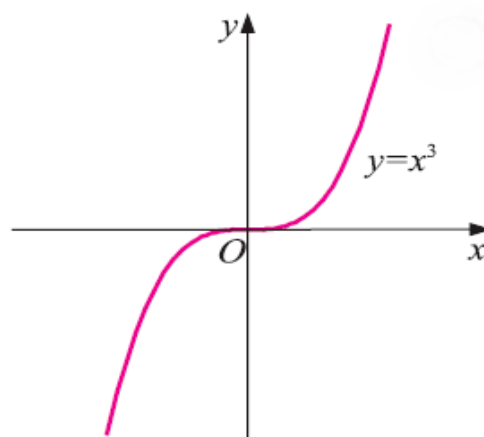
ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

i. Ψευδής

ii. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



Αντιπαράδειγμα 4

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης αποτελεί και το ολικό μέγιστο της συνάρτησης.

i. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

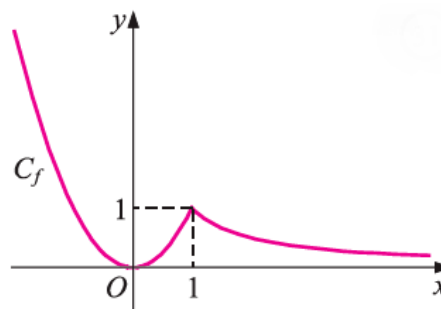
i. Ψευδής

ii. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1/x, & x > 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$, εντούτοις δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Αντιπαράδειγμα 5

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και ισχύει $f'(x) = 0$.

$f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση

τοπικού ακροτάτου της f .

i. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

i. Ψευδής

ii. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

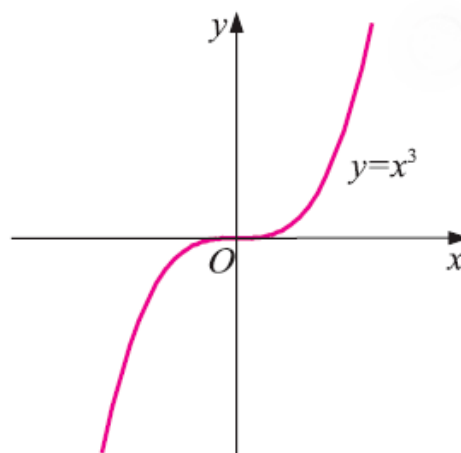
$$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}.$$

Αν και ισχύει $f'(0) = 0$ η f δεν

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

στο $x_0 = 0$, αφού είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



Αντιπαράδειγμα 6

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

i. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

i. Ψευδής

ii. Για παράδειγμα, η συνάρ-

$$τηση f(x) = x^4, x \in \mathbb{R},$$

αν και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,

εντούτοις έχει δεύτερη

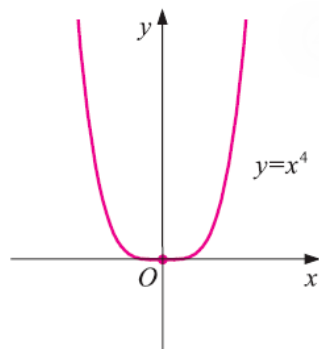
$$παραγώγο f''(x) = 12x^2$$

η οποία δεν είναι θετική

σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού

$$f''(0) = 0. \text{ Ισχύει όμως}$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Αντιπαράδειγμα 7

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 0$ τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f .

i. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i.

Απάντηση:

i. Ψευδής

ii. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε

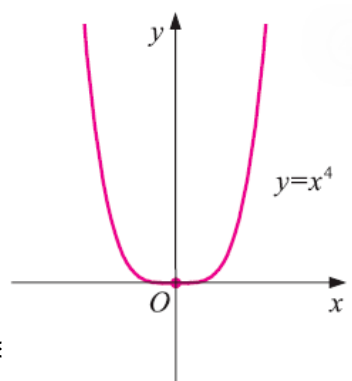
τη συνάρτηση $f(x) = x^4$ $x \in \mathbb{R}$,

ισχύει $f''(0) = 0$. Ωστόσο, το

$x_0 = 0$ δεν είναι θέση σημείου

καμπής, αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η

αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γεγονός που εξασφαλίζει ότι η f ε



ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Θεώρημα 1: Παράγωγος & συνέχεια

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη.

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

Θεώρημα 2

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0$$

Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

δηλαδή:

$$c' = 0$$

Θεώρημα 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = 1$$

Απόδειξη.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

δηλαδή:

$$(x)' = 1$$

Θεώρημα 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} \\ &= x^{v-1} + x^{v-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{v-1}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{v-1}) \\ &= x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = v \cdot x_0^{v-1},\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$(x^v)' = x^{v-1}$$

Θεώρημα 5

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

δηλαδή:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Θεώρημα 6: Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Θεώρημα 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^\nu - 1 \cdot (x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu \cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

δηλαδή:

$$(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

Θεώρημα 8

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x: \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

δηλαδή:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Θεώρημα 9

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

Απόδειξη. Αν $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

δηλαδή:

$$x^a = a \cdot x^{a-1}$$

Θεώρημα 10

Έστω η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Απόδειξη. Αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$

Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

δηλαδή:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Θεώρημα 11

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη.

• Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

• Αν $x < 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln(-x))'$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε

$$y = \ln u.$$

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Θεώρημα 12: Σταθερή συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι,

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.
- Σε κάθε, λοιπόν, περίπτωση είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Πόρισμα 13

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ .

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$$

Θεώρημα 14 :Κριτήριο μονοτονίας

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Απόδειξη.

- Έστω ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Επειδή

$$f'(\xi) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0, \text{ έχουμε } f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ οπότε } f(x_1) < f(x_2)$$

- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , εργαζόμαστε αναλόγως.

Θεώρημα 15 : Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (2)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (2), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (3)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (2), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (4)$$

Έτσι, από τις (3) και (4) έχουμε

$$f'(x_0) = 0$$

Θεώρημα 16: 1ο κριτήριο ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Απόδειξη. Επειδή $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$.

Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (5)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$.

Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in [x_0, \beta) \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

οπότε το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Θεώρημα 17: 2ο κριτήριο ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Απόδειξη: Επειδή $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$.

Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad (7)$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$.

Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in [x_0, \beta) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \quad (8)$$

Από τις (7) και (8) ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

οπότε το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό ελάχιστο αυτής.

Θεώρημα 18: 3ο κριτήριο ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$. Επομένως, για

$$x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Άρα, το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$ και f γν. αύξουσα στο $(a, x_0]$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ και f γν. αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$

Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Στην περίπτωση που ισχύει $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ εργαζόμαστε αναλόγως.