

Επιμέλεια – Συντονισμός

Κουντούπης Ηλίας

Συγγραφική Ομάδα

Κουντούπης Ηλίας

Αγγελίδης Κωνσταντίνος

Λουκάς Θάνος

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε με σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές για την αρτιότερη και πληρέστερη προετοιμασία τους για της πανελλήνιες εξετάσεις. Για αυτό το λόγο η δομή του βιβλίου περιλαμβάνει όλη την εξεταζόμενη θεωρία με μορφή ερωτήσεων απαντήσεων, μεθοδολογίες και αντίστοιχα λυμένα παραδείγματα που καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης καθώς και πλήθος ασκήσεων για το σπίτι που στόχο έχουν την εμβάθυνση και πλήρη κατανόηση από την πλευρά του μαθητή του συνόλου της εξεταζόμενης ύλης.

Ηλίας Κουντούπης

Περιεχόμενα

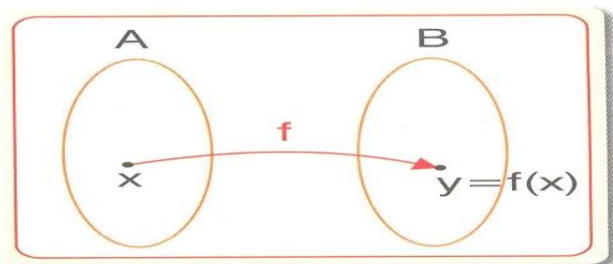
Παράγραφος	Σελ
Συναρτήσεις	4
Μονοτονία – Ακρότατα	7
Ασκήσεις	12
Όρια – Συνέχεια	17
Ασκήσεις	22
Παράγωγος	31
Ασκήσεις	34
Κανόνες Παραγωγής	36
Ασκήσεις	40
Εξίσωση εφαπτομένης	44
Ασκήσεις	46
Ρυθμός Μεταβολής	51
Ασκήσεις	53
Μονοτονία – Ακρότατα	55
Ασκήσεις	60
Ερωτήσεις Θεωρίας	72
Στατιστική Βασικές Έννοιες	74
Ασκήσεις	76
Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων	78
Ασκήσεις	87
Μέτρα Θέσης – Μέτρα Διασποράς	105
Ασκήσεις	118
Κανονική Κατανομή	136
Ασκήσεις	136
Ερωτήσεις Θεωρίας	140
Θέματα Πανελληνίων	150

Κεφάλαιο 1^ο : Συναρτήσεις – Όρια – Παράγωγοι

1.1 Συναρτήσεις

Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού** A μία διαδικασία f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.



Σημειώσεις:

- Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με A ή D_f .
- Το σύνολο στο οποίο πηγαίνουν οι τιμές της συνάρτησης f , λέγεται **πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών** της συνάρτησης και συμβολίζεται με B ή $f(A)$ ή R_f . Δηλαδή ορίζεται ως εξής: $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}$.
- Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το D_f και πεδίο τιμών το R_f συμβολίζεται $f : D_f \rightarrow R_f$. Αν δεν γνωρίζουμε το σύνολο τιμών της τότε $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$.
- Μία συνάρτηση καθορίζεται πλήρως όταν γνωρίζουμε τον τύπο της (τη διαδικασία $f(x)$) και το πεδίο ορισμού της. Αν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού της τότε θεωρούμε ότι είναι το μεγαλύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για τα στοιχεία του οποίου έχει νόημα η διαδικασία $f(x)$.

Πεδίο ορισμού:

- Κλάσμα:

ο παρανομαστής διάφορος του μηδέν ($\neq 0$)

- Ρίζα:

Η υπόριξη ποσότητα μη αρνητική (≥ 0)

- Εφαπτομένη (εφ):

Η ποσότητα μέσα στην εφαπτομένη διάφορη του $(k\pi + \pi/2)$ με $k \in \mathbb{Z}$

- Συνεφαπτομένη (σφ):

Η ποσότητα μέσα στη συνεφαπτομένη διάφορη του (κπ) με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Παραδείγματα

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{x-3} - \sqrt{x+1}$$

Πρέπει και αρκεί: $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

και $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$, οπότε:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \text{ και } x \neq 3\} = [-1, 3) \cup (3, +\infty).$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

Πρέπει και αρκεί: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

και $\sqrt{2x-1} \neq 0 \Rightarrow 2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$, οπότε:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2} \text{ και } x \neq \frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(iii) \quad f(x) = \frac{\sqrt{4-|x|}}{|x+2|-2}$$

Πρέπει και αρκεί: $|x+2|-2 \neq 0 \Rightarrow |x+2| \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2 \neq 2 \Rightarrow x \neq 0 \\ x+2 \neq -2 \Rightarrow x \neq -4 \end{cases}$

και $4-|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$, οπότε:

$$A = (-4, 0) \cup (0, 4]$$

$$(iv) \quad f(x) = \ln(x^2-1)$$

Πρέπει και αρκεί: $x^2-1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ ή } x < -1$, οπότε:

$$A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης $f(x)$:

Είναι όλα τα σημεία του επιπέδου τα οποία έχουν τετμημένη x και τεταγμένη $f(x)$ με $x \in A$ και συμβολίζεται με C_f , δηλαδή $C_f = \{M(x, f(x)) | x \in D_f\}$.

Πότε ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f ;

Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f , μόνο όταν $y_0 = f(x_0)$.

Παράδειγμα

Το σημείο $(2,6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + k$.

Υπολογίστε το k .

Είναι: $(2,6) \in C_f \Leftrightarrow f(2) = 6 \Leftrightarrow 6 = 2^2 + k \Leftrightarrow k = 2$

Σημεία τομής C_f με άξονες

- Άξονας $x'x$: Πρέπει $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ και βρίσκω το x .
- Άξονας $y'y$: Πρέπει $x = 0$ και βρίσκω $f(0)$.

Παράδειγμα

Βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f(x) = x - 4$, με τους άξονες.

- Άξονας $x'x$: Πρέπει $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Άρα το ζητούμενο σημείο A είναι το $(4,0)$.

- Άξονας $y'y$: Πρέπει $x = 0$ οπότε $f(0) = 0 - 4 = -4$.

Άρα το ζητούμενο σημείο B είναι το $(0, -4)$.

Σχετική θέση γραφικών παραστάσεων

- C_f πάνω από $x'x$: Λύνω την ανίσωση $f(x) > 0$
- C_f κάτω από $x'x$: Λύνω την ανίσωση $f(x) < 0$
- C_f πάνω από C_g : Λύνω την ανίσωση $f(x) > g(x)$
- C_f κάτω από C_g : Λύνω την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

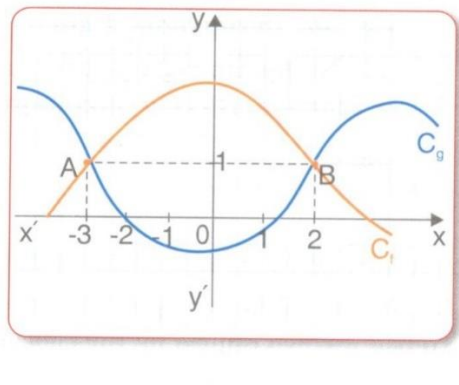
Παραδείγματα

1) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x - 4$, βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x . Είναι: $f(x) > 0 \Rightarrow x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$.

2) Να βρεθούν τα διαστήματα που η C_f είναι πάνω από την C_g όπου $f(x) = x - 4$ και $g(x) = 2$.

Είναι: $f(x) > g(x) \Rightarrow x - 4 > 2 \Rightarrow x > 6$.

3) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g .



α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > g(x)$.

α) Ψάχνουμε τα σημεία τομής f, g που είναι τα σημεία $A(-3, 1)$ και $B(2, 1)$

β) Ψάχνουμε τότε η κόκκινη γραμμή είναι πάνω από την μπλε που είναι στο διάστημα $(-3, 2)$.

Μονοτονία – Ακρότατα

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα ;

- **Γνησίως αύξουσα :** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα :** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται γνησίως μονότονη;

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της λέγεται γνησίως μονότονη.

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ και πότε τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 , και
- τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 .

Όταν οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in A$ λέμε ότι η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** ή **ολικό ελάχιστο**, αντίστοιχα, στο $x_0 \in A$.

Παρατηρήσεις – Σχόλια στη μονοτονία και τα ακρότατα

- 1) Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο ή και τα δυο, όπως για παράδειγμα οι $f(x) = \frac{a}{x}$, $f(x) = a \cdot x^3, \dots$
- 2) Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο, αν υπάρχουν, λέγονται ολικά ακρότατα.
- 3) Τα ολικά ακρότατα είναι και τοπικά ακρότατα, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.
- 4) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ένα ή περισσότερα τοπικά μέγιστα (ή ελάχιστα) χωρίς να έχει ολικό μέγιστο (ή ελάχιστο).
- 5) Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- 6) Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, $a > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.
- 7) Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, $a < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.
- 8) Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Έχει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.
- 9) Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$. Έχει ολικό ελάχιστο στο $x = -\frac{\beta}{2a}$ το $-\frac{\Delta}{4a}$.
- 10) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Μεθοδολογίες στην εύρεση της μονοτονίας

1. Ξεκινάω πάντα με $x_1 < x_2$
2. Όσα x έχω τόσες ανισότητες δημιουργώ
3. Τις ανισότητες μπορώ μόνο να τις προσθέσω ή να τις πολλαπλασιάσω κατά μέλη εφόσον έχουν την ίδια φορά. ΔΕΝ ΜΠΟΡΩ ΠΟΤΕ(!!!!!!) να τις αφαιρέσω ή να τις διαιρέσω κατά μέλη.
4. Οι ανισότητες ΑΛΛΑΖΟΥΝ φορά όταν :
 - Τις πολλαπλασιάσω με αρνητικό αριθμό
 - Τις αντιστρέψω
5. Όταν έχω γνησίως αύξουσα συνάρτηση και μπει ή βγει από ανίσωση ΔΕΝ αλλάζει η φορά.
6. Όταν έχω γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και μπει ή βγει από ανίσωση αλλάζει η φορά.
7. Οι συναρτήσεις που έχουν x^2 , x^4 , και γενικά x^{2n} δεν είναι γνησίως μονότονες αλλά μόνο κατά διαστήματα γιατί

$$-3 < -2$$

$$2 < 3$$

$$-2 < 1$$

$$-2 < 3$$

$$-2 < 2$$

$$(-3)^2 > (-2)^2$$

$$2^2 < 3^2$$

$$(-2)^2 > 1^2$$

$$(-2)^2 < 3^2$$

$$(-2)^2 = 2^2$$

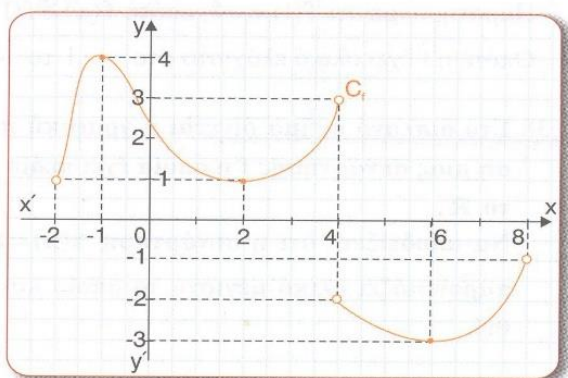
Όταν x_1, x_2 αρνητικοί και υψωθούν στο τετράγωνο αλλάζει η φορά

Όταν x_1, x_2 θετικοί και υψωθούν στο τετράγωνο, δεν αλλάζει η φορά

Όταν ένα από τα x_1, x_2 είναι αρνητικός και το άλλο θετικός δεν μπορώ να ξέρω με σιγουριά την φορά της ανίσωσης.

Παραδείγματα

1. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της $\rightarrow (-2, 4) \cup (4, 8)$

β) Το σύνολο τιμών της $\rightarrow (-3, -1) \cup (1, 4)$

γ) Τα ακρότατα, τοπικά και ολικά .

➤ Μέγιστα : στο $x_1 = -1$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο με τιμή $f(-1) = 4$.

➤ Ελάχιστα : στο $x_2 = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(2) = 1$ και στο $x_3 = 6$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με τιμή $f(6) = -3$.

δ) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα $\rightarrow [-1, 2] \cup (4, 6]$

2. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις :

i) $f(x) = x^3 + 5x - 7$

ii) $g(x) = \frac{5-3x}{x+7}$

iii) $k(x) = x^2 + 1, x < 0$

Απαντήσεις :

$$i) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 - 7 < 5x_2 - 7$$

$$\Rightarrow x_1^3 + 5x_1 - 7 < x_2^3 + 5x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow$$

$$ii) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 5 - 3x_1 > 5 - 3x_2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 7 < x_2 + 7 \Rightarrow \frac{1}{x_1 + 7} > \frac{1}{x_2 + 7}$$

$$\Rightarrow \frac{5 - 3x_1}{x_1 + 7} > \frac{5 - 3x_2}{x_2 + 7} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \downarrow$$

iii) Αφού είμαστε στους αρνητικούς αριθμούς όταν υψωθεί στο τετράγωνο το x θα αλλάξει η φορά

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1 \Rightarrow k(x_1) > k(x_2) \Rightarrow k \downarrow$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x - 3}}$

- 1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
- 2) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία
- 3) Να βρεθούν τα ακρότατα της
- 4) Να εξεταστεί αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(12, 1)$
- 5) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x) \geq 1$

Απαντήσεις:

1) Πρέπει :

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$4 - \sqrt{x - 3} \geq 0 \Rightarrow 4 \geq \sqrt{x - 3} \Rightarrow 4^2 \geq \sqrt{x - 3}^2 \Rightarrow 16 \geq x - 3 \Rightarrow x \leq 19$$

$$\text{Άρα } A = [3, 19]$$

$$2) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 3} < \sqrt{x_2 - 3} \Rightarrow -\sqrt{x_1 - 3} > -\sqrt{x_2 - 3} \\ \Rightarrow 4 - \sqrt{x_1 - 3} > 4 - \sqrt{x_2 - 3} \Rightarrow \sqrt{4 - \sqrt{x_1 - 3}} > \sqrt{4 - \sqrt{x_2 - 3}} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow$$

$$3) \quad 3 \leq x \leq 19 \xrightarrow{f \downarrow} f(3) \geq f(x) \geq f(19) \Rightarrow 2 \geq f(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1 = 19$ το 0 και ολικό μέγιστο στο $x_2 = 3$ το 2.

4) Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $M(12,1)$ πρέπει να ισχύει

$$f(12) = 1 \Rightarrow \sqrt{4 - \sqrt{12 - 3}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4 - 3} = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1 \text{ που ισχύει.}$$

$$5) f(x^2 + x) \geq 1 \Rightarrow f(x^2 + x) \geq f(12) \overset{f \downarrow}{\Rightarrow} x^2 + x \leq 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-12) = 49$$

$$x_1 = -4, x_2 = 3$$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x^2 + x - 12$		+	-	+

$$x \in [-4, 3]$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-9}$

ii) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

iii) $g(x) = \frac{2x+3}{x^2+x}$

iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$

v) $h(x) = \sqrt{x-1}$,

vi) $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$

vii) $f(x) = \frac{x+5}{(4x+1)(x^2-4)}$

viii) $g(x) = \sqrt{x^3(3-x)}$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1}{x}$

β) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

γ) $f(x) = \frac{x^2}{3x-2(x+1)}$

δ) $f(x) = (x+2)^{-2}$

ε) $f(x) = (2x+3)x^{-1}$

στ) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$

ζ) $f(x) = \frac{x}{x^3+8}$

η) $f(x) = \frac{x+3}{3x^3+x}$

θ) $f(x) = \frac{x+1}{x^3-8} + \frac{x-2}{x^2-1}$

ι) $f(x) = \frac{x-2}{x^3+x^4} + \frac{1}{x-2}$

κ) $f(x) = \frac{x^3-2x+5}{x^3+3x^2-4}$

λ) $f(x) = \frac{x^3+2x-3}{x^3+2x-3}$

3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|-3}$

β) $f(x) = \frac{2x-1}{|x-1|-4}$

γ) $f(x) = \frac{|x|}{|x-1|-|2-3x|}$

δ) $f(x) = \frac{|2x-3|-x}{|x^2-1|}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$

β) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

γ) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

δ) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

ε) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

στ) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-5}}$

ζ) $f(x) = \sqrt{1 - 3\sqrt{x}}$

η) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x) = \frac{x^2}{2\eta\mu\chi + 1}$

β) $f(x) = \chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi$

γ) $f(x) = \frac{\eta\mu\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi}$

δ) $f(x) = \frac{x + \eta\mu\chi}{\epsilon\phi\chi}$

ε) $f(x) = \frac{\epsilon\phi\chi}{\chi^2}$

7. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η C_f βρίσκεται πάνω απ' τον άξονα $x'x$;

i) $f(x) = x^2 - 7x + 12$,

ii) $f(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$,

iii) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$.

8. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η C_f βρίσκεται κάτω απ' την C_g ;

i) $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = 3x + 4$,

ii) $f(x) = 1 - x^2$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$,

iii) $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = x^2 + x - 2$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ όπου $a \in \mathbb{R}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

10. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = a\sqrt{x} + \beta$ με $x \geq 0$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία: $A(1, 3)$ και $B(4, 4)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{a|x-1| + \beta|\chi+1|}{\chi}$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική

παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(-1, -1)$ τότε:

α) να βρείτε τις τιμές των α και β ,

β) να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

12. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$.

α) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

β) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$

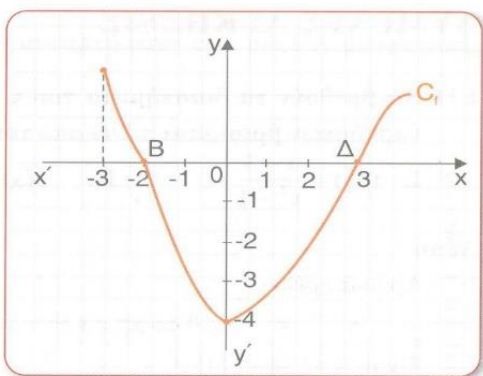
γ) $f(x) = x^3 - 5x + 4$

13. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g όταν :

α) $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + 9x$

β) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 9$ και $g(x) = 8x - 9$

14. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

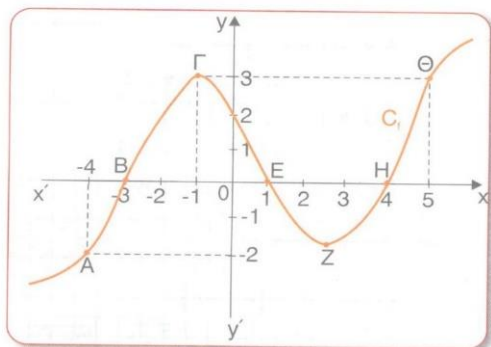
β) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γρ. παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$

γ) Να υπολογιστεί το $f(0)$.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

ε) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

15. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να λυθούν :

α) Οι εξισώσεις $f(x) = 0$ και $f(x) = 3$

β) Οι ανισώσεις $f(x) > 3$, $f(x) < -2$ και $0 < f(x) < 3$.

16. Να εξεταστούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

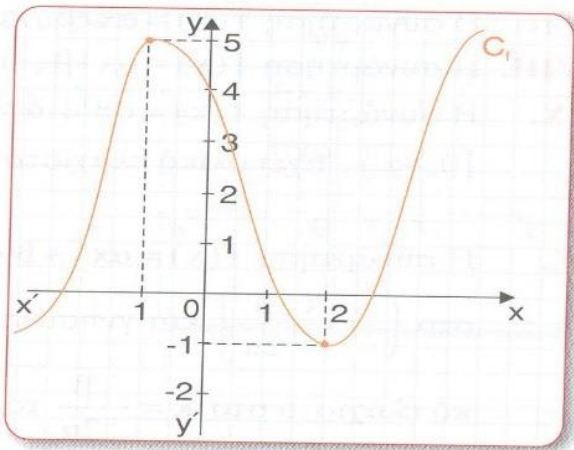
i) $f(x) = x^2 - 1$ $x \geq 0$,

ii) $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$,

iii) $f(x) = x^3 + 1$,

iv) $f(x) = \sqrt{x-3}$.

17. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να βρεθούν :

α) Το πεδίο ορισμού της

β) Τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ) Τα ακρότατα της f .

18. Ένα λύκειο σχεδιάζει να πραγματοποιήσει μια εκδρομή. Αν δηλώσουν συμμετοχή μέχρι 100 μαθητές, η τιμή του εισιτηρίου θα είναι 200 €. Αν η συμμετοχή είναι μεγαλύτερη, δηλαδή πάνω από 100 άτομα, θα γίνει έκπτωση 1 € στο εισιτήριο για κάθε επιπλέον μαθητή.

α) Να εκφραστεί το κόστος της εκδρομής ως συνάρτηση του αριθμού των επιπλέον μαθητών, δηλαδή πάνω από τους 100, που θα συμμετάσχουν.

β) Ποιο θα είναι το κόστος της εκδρομής, αν σε αυτή λάβουν μέρος 200 μαθητές

γ) Υπάρχει περίπτωση το κόστος για τη πραγματοποίηση της εκδρομής να είναι μεγαλύτερο από το ποσό των 22.500 € ;

19. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα (..πάλι ;;) μήκους 100 m μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x , να εκφραστεί το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x .

20. Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Αν το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι η απόσταση του από την αρχή των αξόνων δίνεται από τη σχέση $(OM) = \sqrt{2x^2 - 4}$.

21. Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 10 cm και μία από τις κάθετες πλευρές του μήκος x cm .
- α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου αυτού ως συνάρτηση του x .
 - β) Να εκφράσετε το ύψος προς την υποτείνουσα ως συνάρτηση του x .
22. Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση f , η οποία έχει τύπο :
- $$f(x) = x^3 - 6,5x^2 + 115x + 60 \text{ σε χιλιάδες ευρώ}$$
- α) Να υπολογίσετε το κόστος παραγωγής 20 μονάδων του προϊόντος .
 - β) Να βρείτε και να ερμηνεύσετε την τιμή $f(0)$.

1.2 Όρια – Συνέχεια

Τι ονομάζεται όριο;

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν όσο το x πλησιάζει (τείνει) στο x_0 , χωρίς να παίρνει αυτή την τιμή, τόσο η τιμή της f (το $f(x)$) πλησιάζει, όσο εμείς θέλουμε, σε μία τιμή $\ell \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι **η f έχει όριο στο x_0 την τιμή ℓ** και συμβολίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Να γράψετε τις ιδιότητες ορίων και πότε ισχύουν αυτές;

a) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, όπου $\ell, m \in \mathbb{R}$, τότε:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + m,$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \ell \quad (c \in \mathbb{R}),$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m,$

iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}, \quad m \neq 0.$

b) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $v \in \mathbb{N}^*$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f^v(x) = \ell^v.$

c) Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$

d) Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι δύο πολυώνυμα με $Q(x_0) \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$

e) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|.$

f) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[k]{\ell}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ (θα πρέπει όμως $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$).

g) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}.$

h) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0.$

i) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$

j) i) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \epsilon\phi x_0.$

ii) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\phi x = \sigma\phi x_0$

Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ποιες συνεχείς συναρτήσεις γνωρίζετε;

Οι πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις/μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Μεθοδολογίες υπολογισμού ορίου

1^η περίπτωση : Για να υπολογίσουμε ένα όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αντικαθιστούμε στον τύπο της f , όπου x την τιμή x_0 . Εφόσον το αποτέλεσμα είναι πραγματικός αριθμός, αυτό είναι το όριο της f στο x_0 .

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5-3x}{x+7} = \frac{5-3}{1+7} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x+11} = \sqrt{2(-1)+11} = \sqrt{-2+11} = \sqrt{9} = 3$$

2^η περίπτωση : Θεωρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ με f και g πολυώνυμα. Εφόσον με αντικατάσταση του x με x_0 προκύπτει η μη επιτρεπτή πράξη $\frac{0}{0}$, πρέπει να παραγοντοποιήσουμε συνήθως με Horner ή χρήση ταυτοτήτων τα πολυώνυμα f και g , ώστε να απλοποιήσουμε τον όρο $(x - x_0)$. Μετά την απλοποίηση αντικαθιστούμε όπου x το x_0 .

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = 2-3 = -1$$

1	-5	6	2
	2	6	
1	-3	0	

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x) \cdot (1+x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (1-x) = 1 - (-1) = 2$$

3^η περίπτωση : Θεωρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου τουλάχιστον ένας από τους όρους $f(x)$ και $g(x)$ περιέχει ριζικά. Εφόσον με αντικατάσταση του x με x_0 προκύπτει η μη επιτρεπτή πράξη $\frac{0}{0}$, πολλαπλασιάζουμε και τους δυο όρους του πηλίκου $\frac{f(x)}{g(x)}$ με τη συζυγή παράσταση του όρου που περιέχει το ριζικό. Μετά τις πράξεις θα απλοποιήσουμε τον όρο $(x - x_0)$ και αντικαθιστούμε όπου x το x_0 .

Μεθοδολογία εύρεσης συζυγούς

Αρχική	Συζυγής	Αποτέλεσμα
$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}^2 - \sqrt{\beta}^2$
$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}^2 - \sqrt{\beta}^2$
$\alpha - \sqrt{\beta}$	$\alpha + \sqrt{\beta}$	$\alpha^2 - \sqrt{\beta}^2$
$\alpha + \sqrt{\beta}$	$\alpha - \sqrt{\beta}$	$\alpha^2 - \sqrt{\beta}^2$

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9) \cdot (\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9) \cdot (\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}^2 - 3^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9) \cdot (\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+(-x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}-(-x+1))}{(\sqrt{x+1}+(-x+1))(\sqrt{x+1}-(-x+1))} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}-(-x+1))}{(\sqrt{x+1}^2 - (-x+1)^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}-(-x+1))}{x+1-x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}-(-x+1))}{-x^2+3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}-(-x+1))}{-x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-(-x+1))}{-x} = \\ &= \frac{2-(-2)}{-3} = \frac{4}{-3} \end{aligned}$$

4^η περίπτωση: Όταν γνωρίζω την τιμή του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και ψάχνω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ όπου η $g(x)$ γράφεται ως συνάρτηση της $f(x)$ τότε κάνω απλή αντικατάσταση

Παραδείγματα

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ όταν:

i) $g(x) = 2f(x) - 1$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} 2f(x) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

ii) $g(x) = |(f(x) - 1)(f(x) + 2)|$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} |(f(x) - 1)(f(x) + 2)| = |(2 - 1)(2 + 2)| = |1 \cdot 4| = 4$$

5η περίπτωση: Όταν δεν γνωρίζω την τιμή του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και ψάχνω να το υπολογίσω αλλά γνωρίζω την τιμή ενός ορίου που περιέχει και την $f(x)$ τότε θέτω ότι έχω μέσα στο γνωστό όριο ως $g(x)$, λύνω ως προς $f(x)$ και στην συνέχεια παίρνω όρια.

Παραδείγματα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 2$

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - x}{x - 1} \Rightarrow f(x) = g(x)(x - 1) + x$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x - 1) + x = 2(1 - 1) + 1 = 1$$

Παραδείγματα στην συνέχεια

1. Έστω η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}, & x \neq -5 \\ a^2 + a - 9, & x = -5 \end{cases}$.

Υπολογίστε το a , ώστε η f συνεχής στο -5 .

Πρέπει και αρκεί: $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5)$ (1).

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5) \cdot (x - 2)}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x - 2) = -5 - 2 = -7,$$

$$\text{οπότε από: } (1) \Rightarrow a^2 + a - 9 = -7 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ ή } \mathbf{a = 1}.$$

2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$(\sqrt{x+2}-3) \cdot f(x) = x-7, \forall x (1).$$

Βρείτε την τιμή $f(7)$.

Επειδή f συνεχής στο $7 \Leftrightarrow f(7) = \lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ (2).

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3} \quad \Big|_{\forall x \neq 7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7) \cdot (\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt{x+2}-3) \cdot (\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7) \cdot (\sqrt{x+2}+3)}{\sqrt{x+2}^2 - 3^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7) \cdot (\sqrt{x+2}+3)}{x+2-9} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7) \cdot (\sqrt{x+2}+3)}{x-7} = \lim_{x \rightarrow 7} (\sqrt{x+2}+3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \sqrt{7+2}+3 = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6, \text{ οπότε λόγω (2)} \Rightarrow f(7) = 6.$$

Ασκήσεις

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ όταν :

i) $g(x) = 2 - 3f(x)$

ii) $g(x) = [f(x)]^2$,

iii) $g(x) = \sqrt{4f(x) + 7}$,

iv) $g(x) = |f(x)|$,

v) $g(x) = \frac{3f(x)-1}{2f(x)+5}$

vi) $g(x) = \sqrt{|f(x) - 3|}$

2. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x + \sqrt{x^2 - 1})$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{25}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - |x^2 - 1|)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^v + 1)$

3. Να υπολογιστούν τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^4 + 2x - 3}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{20 - x} + 3)$

στ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x+1}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sin x}$

η) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x+2}}$

θ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

ι) $\lim_{x \rightarrow \pi} (2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$

κ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\epsilon\phi x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x)$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

στ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 3x}$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x^2 - 9}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 1}{x^3 + x + 2}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + x}{x}$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{4x}{x^2-4} \right)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{3}{x^2+x} \right)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+2}{x+3} + \frac{4x+7}{x^2+x-6} \right)$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{4x^2+1}{x^2+3x-4} \right)$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

7. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

8. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της f ,

β) Τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ για τις οποίες ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2)f(x)] = k^2 - 4k$$

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x-1) \frac{f(x)}{x-2} \right].$$

10. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha + \beta + 5 = 0$. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^3 + \beta x^4 + 5}{x - 1}$$

11. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 9} = 2$

12. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να ισχύει:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (\alpha - 2)x - 2\alpha}{x^2 - 4} = 2$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + \alpha x^2 - 9x - 9\alpha}{x^2 - 2x - 3} = 12$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \alpha x - \alpha - 1}{\sqrt{10 - x^2} - 3} = 6$$

13. Να βρείτε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{2x + 6}}{1 - \sqrt{x + 2}}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$$

$$v. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$vi. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$$

$$vii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{2x}$$

$$viii. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$$

$$ix. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} - 1}$$

$$x. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$$

14. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 25}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 7x + 6}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{x - 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x^2 - 2x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{x - 1}$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3x}{x^2 + x - 2}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3}}{x^2 - 4}$$

$$\nu) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{5x}$$

15. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + x^2 - 5x + 3) = 4. \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 1} = 2. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια :}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{x^2 - 1}$$

17. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - x}{x^2 + x}$$

18. Σε καθεμία από τις περιπτώσεις να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ όταν :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{f(x) - 2} = 3 \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{f(x) + 3} + x \right) = 4$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 f(x) - 8}{x + 2} = -4 \qquad \delta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} f(x) - \sqrt{6}}{x^2 - 4} = -1$$

19. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} - 5}{x^2 - 25}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} - 1}{x^2 - 3x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2-3} - 4}{x - 2}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15} - \sqrt{x^2+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 2\alpha - 4}{x^2 - 4}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2. \text{ Να βρείτε:}$$

(i) Το πεδίο ορισμού της f

(ii) Τον αριθμό α

(iii) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(\sqrt{x+2} - 2) f(x) \right]$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 3\alpha - 9}{x^2 - 3x}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{\alpha - 2}{3}. \text{ Να βρείτε:}$$

(i) Το πεδίο ορισμού της f

(ii) Τον αριθμό α

(iii) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(\sqrt{x+4} - 2) f(x) \right]$

(iv) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$

22. Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 4} = 7$. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x^2 + x - 6}$

23. Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = 4$. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

24. Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) \neq 5$ και $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - x}{x^2 - 5x} = 6$. Να

βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - x^2 + 20}{x^2 - 3x - 10}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f^2(x) - 7f(x) + 10}{f^3(x) - 5f^2(x) + 2f(x) - 10}$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(-1, -9)$ και

$N(-5, 7)$. Να βρείτε:

(i) Τους αριθμούς a, b

(ii) Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

(iii) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(x)}{\sqrt{x+3} - 2}$

(iv) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+1) - f(4)}{f(x) - f(3)}$

26. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο σημείο 4 την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases}$$

27. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 1, & x = -1 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = -1$$

28. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο που δίνεται :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-2}, & x \neq 2 \\ -1, & x = 2 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x^2+x-2}, & x \neq 1 \\ \frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & -1 \leq x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}, & 2 < x \neq 4 \\ \frac{1}{8}, & x = 4 \end{cases}$$

$$\zeta) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$\eta) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x^2-1}, & -1 < x \neq 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{6}, & x = 1 \end{cases}$$

29. Να βρείτε τις παραμέτρους (δηλ. τα α, β) ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο σημείο που αλλάζουν μορφή.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} 3x^2-2x-1, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \frac{2x-18}{\sqrt{x-3}}, & x \neq 9 \\ \alpha x+3, & x = 9 \end{cases}$$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x-7}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha-2, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{vi. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}, & x \neq 3 \\ \alpha, & x = 3 \end{cases}$$

$$\text{vii. } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2-1, & x = 1 \\ x+2, & x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{viii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-3}, & x \neq 3 \\ \alpha^2 x^2+3\alpha x+1, & x = 3 \end{cases}$$

30. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - \beta, & x \neq 2 \\ \beta + 2, & x = 2 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών

αριθμών α και β για τις οποίες η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, -7)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση :
$$f(x) = \begin{cases} 2a-1, & x=1 \\ \frac{x^2-4x+3}{x-1}, & x \neq 1 \end{cases} \text{ όπου } a \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η f είναι συνεχής στο σημείο $A(1, f(1))$.

32. Δίνεται η συνάρτηση :
$$f(x) = \begin{cases} \lambda - 2, & x=1 \\ \frac{x^2+6x-7}{x-1}, & x \neq 1 \end{cases} \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$

β) Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+6x-7}{x-1}$

γ) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

33. Δίνεται η συνάρτηση :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \lambda^2, & x = 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

34. Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} a^2 - 10a + 21, & x=1 \\ \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, & x \neq 1 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στο σημείο } x_0 = 1.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}, & x \neq -5 \\ a^2 + a - 9, & x = -5 \end{cases}$$

Να βρεθεί ο a , ώστε η f να είναι συνεχής στο -5 .

36. Να υπολογίσετε το a , ώστε να είναι συνεχής στο x_0 η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ a, & x = -2 \end{cases} \text{ και } x_0 = -2$$

37. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} = 1$ και η f είναι συνεχής στο 2, να βρεις:

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(ii) $f(2)$

38. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 7, & x = 4 \end{cases}$$
. Να βρείτε:

(i) Το πεδίο ορισμού της

(ii) Το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(iii) Να εξετάσεις αν η f είναι συνεχής στα σημεία 5 και 4

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \neq 1 \\ 1 - \lambda, & x = 1 \end{cases}$

(i) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής για $x \neq 1$

(ii) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν η f είναι συνεχής στο 1

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 4, & x \neq -1 \\ \lambda + 2, & x = -1 \end{cases}$. Να βρείτε:

(i) Το πεδίο ορισμού της

(ii) Το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(iii) Το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x}, & x \neq 0 \\ 3a\sqrt{3}, & x = 0 \end{cases}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να βρείτε την τιμή

του a .

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a^2 - a + 5, & x = 2 \end{cases}$. Αν η f είναι συνεχής στο 2, να βρείτε την τιμή

του a .

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 1$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 18$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ τότε να δείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = -1$

44. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x - \ln x^2}{x^2 - 4}, & 0 < x \neq 2 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

45. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(x-3)f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} . \text{ Να βρείτε το } f(3) .$$

46. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{x} = 2 . \text{ Να αποδείξετε ότι } f(0) = 1 .$$

47. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και ικανοποιεί τη σχέση :

$$(\sqrt{x+1} - 2)f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{για κάθε } x \geq -1 . \text{ Να υπολογίσετε το } f(3) .$$

48. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, +\infty)$ και ικανοποιεί τη σχέση :

$$(x-2)f(x) = \sqrt{x+2} - 2 \quad \text{για κάθε } x \geq -2. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f$$

49. θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f , η οποία για κάθε $x \geq 0$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$4f(x) + 4 = \sqrt{x+12} + 2\sqrt{x}f(x)$$

Να υπολογίσετε :

α) το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - 4}{2 - \sqrt{x}}$

β) την τιμή $f(4)$.

50. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 1}{f(x) - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+2} - 2}{f^2(x) - f(x) - 2}$

51. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$.

Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)(x^2 - x)}{\sqrt{x+3} - 2}$

1.3 Παράγωγος

Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 ;

Το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 . Είναι λοιπόν: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$;

Η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 .

Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_0 . Δώστε μερικά παραδείγματα.

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

Παραδείγματα:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.
- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

Τι ονομάζουμε (πρώτη) παράγωγο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A ;

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f' ;

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' .

Τι γνωρίζετε για τη ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως

Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $u(t) = x'(t)$.

Αν η συνάρτηση u είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $a(t) = u'(t)$ ή ισοδύναμα $a(t) = x''(t)$.

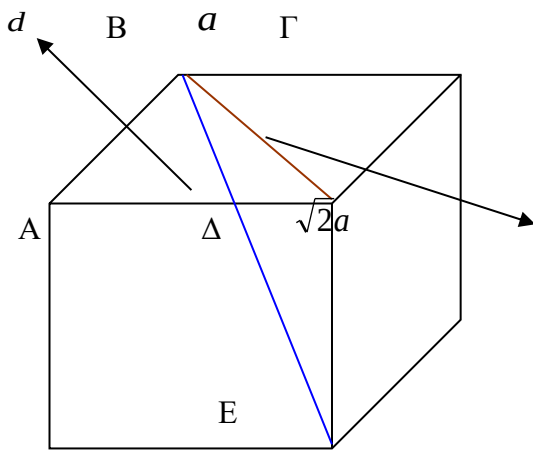
Παράδειγματα :

1. (η παράγωγος ως **ρυθμός μεταβολής**) : Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου ενός κύβου, του οποίου η πλευρά $a = a(t)$ μεγαλώνει με ρυθμό $\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{cm}{sec}$.

Το δεδομένο μεταφράζεται ως εξής: $a'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{h} = + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{cm}{sec}$.

(+, διότι σύμφωνα με τα δεδομένα η πλευρά μεγαλώνει – σε αντίθετη περίπτωση θα θέταμε –)

Αν με $d = d(t)$, συμβολίσουμε τη διαγώνιο του κύβου, τότε το ζητούμενο είναι η: $d'(t)$. (αν μας ζητούσαν το ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου π.χ. την χρονική στιγμή $t = \alpha \text{ sec}$, τότε το ζητούμενο θα ήταν το: $d'(\alpha)$)



Είναι: $B\Gamma = \Gamma\Delta = a = \Delta E$, οπότε: $B\Delta^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow B\Delta = \sqrt{2}a$

(από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$), και

$$d^2 = BE^2 = B\Delta^2 + \Delta E^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow d = \sqrt{3}a$$

(από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Delta$), οπότε:

$$d'(t) = (\sqrt{3}a(t))' = \sqrt{3} \cdot a'(t) = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}^2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2 \frac{cm}{sec}.$$

2. (εύρεση **παραγώγου με** τη βοήθεια του **ορισμού**) : Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \text{ στο } x = 1.$$

$$\text{Είναι: } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h+1} - \frac{1}{1+1}}{h} = \frac{\frac{1}{h+2} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{-\frac{h}{2(2+h)}}{h} = -\frac{1}{2(2+h)},$$

και το: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(2+h)} \right) = -\frac{1}{4} = f'(1).$

3. Να εξετάσεις εάν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ είναι παραγωγίσιμη σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο x_0 (δηλαδή εάν είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της)

- $f(x_0) = x_0^2 - 1$

- $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 - 1 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 1$

- $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 1) - (x_0^2 - 1)}{h} =$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 1 - x_0^2 + 1}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = \frac{h(2x_0 + h)}{h} = 2x_0 + h$$

- $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 + 0 = 2x_0$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη για οποιοδήποτε x_0 με $f'(x_0) = 2x_0$.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τη παράγωγο των συναρτήσεων στο σημείο που δίνεται κάθε φορά

- α) $f(x) = 2x + 4$ στο $x_0 = 2$ β) $f(x) = x^2 + 1$ στο $x_0 = 1$
 γ) $f(x) = x^2 - x$ στο $x_0 = -2$ δ) $f(x) = x(x-1) + 2$ στο $x_0 = 1$
 ε) $f(x) = x^2 - x + 1$ στο $x_0 = 0$ στ) $f(x) = x^3 - 1$ στο $x_0 = 1$
 ζ) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ στο $x_0 = 2$ η) $f(x) = \sqrt{x}$ στο $x_0 = 4$
 θ) $f(x) = x + \sqrt{x-1}$ στο $x_0 = 5$ ι) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ στο $x_0 = 0$

2. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση :

$$f(2+h) = h^3 + h^2 - h + 1 \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(2) = 1$ β) $f'(2) = -1$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ . Να αποδείξετε ότι } f'(0) = \frac{1}{2}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{1+t}$ με $t \neq -1$

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{1}{2(h+2)}$ με h κοντά στο 0.

β) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $t=1$.

5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{x^2} = 4$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(0) = 0$ β) $f'(0) = 2$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 + x} = 2$

6. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f'(0) = 1$ β) η f' είναι παραγωγίσιμη στο 0

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & x \in [-3, 1) \cup (1, +\infty] \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

α) Να βρεις τον a

β) Να βρεις $f'(1)$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & , x \neq 1 \\ \alpha & , x = 1 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = 1$

Γράψτε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και τους κανόνες παραγώγισης.

$$\text{I)} \quad (c)' = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{II)} \quad (\alpha x)' = \alpha \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{III)} \quad (x^v)' = v \cdot x^{v-1} \quad v \text{ ακέραιος} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{αν } v > 0 \\ x \in \mathbb{R}^* & \text{αν } v < 0 \end{cases}$$

$$\text{IV)} \quad (x^a)' = a \cdot x^{a-1} \quad a \text{ ρητός (κλάσμα)} \quad x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{V)} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{VI)} \quad (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{VII)} \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \quad x \in \mathbb{R}$$

Κανόνες Παραγώγισης

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες τότε:

$$\text{I)} \quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$\text{II)} \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

πορίσματα:

$$\alpha)(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x),$$

$$\beta)(f^v(x))' = v \cdot f^{v-1}(x) \cdot f'(x),$$

$$\text{III)} \quad \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{και} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

πόρισμα:

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \text{και} \quad (\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

$$\text{IV)} \quad (f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

πορίσματα:

$$\alpha) \left(f^a(x) \right)' = a \cdot f^{a-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$\beta) \left(\sqrt{f(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\gamma) \left(\eta\mu f(x) \right)' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$$

$$\delta) \left(\sigma\upsilon\nu f(x) \right)' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$$

Αποδείξεις

- **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$.**

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

Άρα $(c)' = 0$

- **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$**

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = x+h-x = h$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$

Άρα $(x)' = 1$

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$**

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h(2x+h)$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$.

Οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$.

Άρα $(x^2)' = 2x$

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$.

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$

και για $h \neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} = c \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] = cf'(x)$.

Άρα $(cf(x))' = cf'(x)$

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } F(x+h) - F(x) &= [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)] = \\ &= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)] \end{aligned}$$

$$\text{και για } h \neq 0, \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

$$\text{Άρα } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων

- Αν $f(x) = x^3$, τότε $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$
- Αν $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, τότε $f'(x) = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-3-1} = -3 \cdot x^{-4} = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}$
- Αν $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, τότε $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$
- $(x^9)' = 9x^8$,
- $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$,
- $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$,
- $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} =$
 $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$
- $(3\ln x)' = 3(\ln x)' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$
- $(\eta\mu x(1-\sigma\nu x))' = \eta\mu x'(1-\sigma\nu x) + \eta\mu x(1-\sigma\nu x)' =$
 $\sigma\nu x(1-\sigma\nu x) + \eta\mu x \cdot \eta\mu x = \sigma\nu x - \sigma\nu^2 x + \eta\mu^2 x$
 $= \sigma\nu x - \sigma\nu^2 x$
- $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

- $(\ln(x^2 + 3))' = \frac{1}{x^2 + 3} (x^2 + 3)' = \frac{2x}{x^2 + 3},$
- $(\eta\mu x^3)' = \sigma\nu\nu x^3 \cdot (x^3)' = 3x^2 \cdot \sigma\nu\nu x^3,$
- $(\eta\mu^3 x)' = 3\eta\mu^2 x \cdot (\eta\mu x)' = 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu\nu x,$
- $(\eta\mu^2 3x)' = 2\eta\mu 3x \cdot (\eta\mu 3x)' = 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\nu\nu 3x \cdot (3x)' =$
 $= 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\nu\nu 3x \cdot 3 \cdot 1 = 3\eta\mu 6x$
- $\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
- Av $f(x) = 4x^2$, τότε $f'(x) = (4x^2)' = 4 \cdot (x^2)' = 4 \cdot 2x = 8x$
- Av $f(x) = 5x^2 + 7x - 6$, τότε $f'(x) = (5x^2 + 7x - 6)' = (5x^2)' + (7x)' - (6)' = 5(x^2)' + 7(x)' - 0 =$
 $= 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = 10x + 7$
- Av $f(x) = 2x^5 - 2e^x + \ln x - \sqrt{2}$, τότε
 $f'(x) = (2x^5 - 2e^x + \ln x - \sqrt{2})' = (2x^5)' - (2e^x)' + (\ln x)' - (\sqrt{2})' =$
 $= 2 \cdot 5x^4 - 2e^x + \frac{1}{x} - 0 = 10x^4 - 2e^x + \frac{1}{x}$
- Av $f(x) = (x-1) \cdot \ln x$, τότε $f'(x) = [(x-1) \cdot \ln x]' = (x-1)' \cdot \ln x + (x-1) \cdot (\ln x)' =$
 $= (1-0) \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$
- Av $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, τότε $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$
- Av $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$, τότε $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^3}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot x^3 - (x-1) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{(0-1) \cdot x^3 - (x-1) \cdot 3x^2}{x^6} =$
 $= \frac{x^3 - 3x^3 + 2x^3}{x^6} = \frac{3x^2 - 2x^3}{x^6} = \frac{x^2(3-2x)}{x^6} = \frac{3-2x}{x^4}$
- Av $f(x) = \ln(x^3 - 2)$, τότε $f'(x) = [\ln(x^3 - 2)]' = \ln'(x^3 - 2) \cdot (x^3 - 2)' = \frac{1}{x^3 - 2} \cdot (3x^2 - 0) = \frac{3x^2}{x^3 - 2}$
- Av $f(x) = (x-1)^3$, τότε $f'(x) = [(x-1)^3]' = 3(x-1)^2 \cdot (x-1)' = 3(x-1)^2 \cdot (1-0) = 3(x-1)^2$
- Av $f(x) = 5x^4 - 3x^2$, τότε η πρώτη παράγωγος είναι η
 $f'(x) = (5x^4 - 3x^2)' = (5x^4)' - (3x^2)' = 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 2x = 20x^3 - 6x$ η δεύτερη παράγωγος είναι η
 $(f')'(x) = (20x^3 - 6x)' = (20x^3)' - (6x)' = 20 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 1 = 60x^2 - 6$ και η τρίτη παράγωγος είναι η
 $(f'')'(x) = (60x^2 - 6)' = (60x^2)' - (6)' = 60 \cdot 2x - 0 = 120x$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = x + 2$

β) $f(x) = x - 3$

γ) $f(x) = 3x - 4$

δ) $f(x) = -9x + 10$

ε) $f(x) = \frac{2}{3}x - 5$

στ) $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$

ζ) $f(x) = x^2 + 4$

η) $f(x) = x^2 + 6x$

θ) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

η) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 7x - 12$

ι) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$

κ) $f(x) = 4x^3 - 2\sqrt{x}$

λ) $f(x) = 4\sqrt{x} + x^2$

μ) $f(x) = 2x^3 - 5\sqrt{x}$

ν) $f(x) = x^2 - x - \frac{\sqrt{x}}{4} - 3$

ξ) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$

ο) $f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

π) $f(x) = -2x + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$

ρ) $f(x) = -4x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} - 9$

σ) $f(x) = 2\eta\mu\chi - 4\sigma\upsilon\nu\chi$

τ) $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\chi - \pi$

υ) $f(x) = \pi^2 - \eta\mu\chi$

φ) $f(x) = -\pi\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$

ω2) $f(x) = x^{-3} + x$

ω3) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{5}}$

ω4) $f(x) = 4x^{-4} + 3x^{\frac{1}{4}}$

ω5) $f(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}x$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$

β) $f(x) = (x^2 + x)(x^3 - x)$

γ) $f(x) = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$

δ) $f(x) = (x^3 + 3x)(x^2 + x + 2)$

ε) $f(x) = x\sqrt{x}$

στ) $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$

$$\zeta) f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{x} - 3x$$

$$\eta) f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x} - 3x$$

$$\theta) f(x) = \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\iota) f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu\chi$$

$$\kappa) f(x) = (x^2 - 1)\eta\mu\chi$$

$$\lambda) f(x) = x^2 \sigma\upsilon\nu\chi - 2\chi$$

3. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = x \sigma\upsilon\nu\chi \text{ στο } \chi_0 = 0$$

$$\beta) f(x) = (x - 2) \sigma\upsilon\nu\chi \text{ στο } \chi_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = (x^3 - 2) \sigma\upsilon\nu\chi \text{ στο } \chi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\delta) f(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \eta\mu\chi \text{ στο } \chi_0 = \frac{\pi}{6}$$

4. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = \frac{x+3}{x}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x+1}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2+2x}$$

$$\zeta) f(x) = \frac{\eta\mu\chi}{\chi}$$

$$\eta) f(x) = \frac{2-\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$$

$$\theta) f(x) = \frac{1+\eta\mu\chi}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}$$

$$\iota) f(x) = \frac{x+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{\eta\mu\chi}{\chi-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να βρείτε τη πρώτη παράγωγο της f

γ) Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

6. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = (x-2)^2$$

$$\beta) f(x) = (x^2+1)^3$$

$$\gamma) f(x) = (x^2 + x)^2$$

$$\delta) f(x) = (x^3 - 3x)^5$$

$$\varepsilon) f(x) = (x^2 - x + 1)^2$$

$$\sigma\tau) f(x) = (x - \eta\mu^2\chi)^2$$

$$\zeta) f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$\eta) f(x) = \sigma\nu\nu^3\chi$$

$$\theta) f(x) = (x - e^x)^2$$

$$\iota) f(x) = (1 - \sigma\nu\nu^3\chi)^2$$

$$\kappa) f(x) = \sqrt{4x+1}$$

$$\lambda) f(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$\mu) f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$$

$$\nu) f(x) = \sqrt{x^3+3x-5}$$

$$\xi) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\omicron) f(x) = \sqrt{\eta\mu 2\chi}$$

$$\pi) f(x) = \sqrt{xe^x+2}$$

$$\rho) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\sigma) f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\tau) f(x) = -\frac{3}{x^3+1}$$

$$\upsilon) f(x) = \frac{3}{x^2-2x+3}$$

$$\phi) f(x) = \eta\mu(x+1)$$

$$\chi) f(x) = \sigma\nu\nu(\eta\mu\chi)$$

$$\psi) f(x) = \eta\mu(\chi - \eta\mu\chi)$$

$$\omega) f(x) = \sigma\nu\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\omega 1) f(x) = \varepsilon\phi(x + \eta\mu\chi)$$

$$\omega 2) f(x) = \sigma\phi(x + \sqrt{x})$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία ισχύει $f'(a) = 27$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\nu\nu\chi + \eta\mu\chi$ με $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση :

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(ax)$ όπου $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε :

α) τη δεύτερη παράγωγο της f

β) τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει :

$$f''(x) + 4a^2 f(x) = 2$$

10. Να βρείτε πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις :

$$f(2) = -10, \quad f'(1) = f''(2) = 0 \quad \text{και} \quad f'''(1) = 6$$

11. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ τα οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$P(x) = P'(x) \cdot P''(x) .$$

1.4 Εξίσωση εφαπτομένης

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = f'(x_0) \cdot x + \beta$

Συμβουλή : Στόχος μου είναι να υπολογίσω το β και να βρω το σημείο επαφής x_0 και πάντα ελέγχω αν το σημείο που δίνεται ανήκει στην $f(x)$. Αν ανήκει τότε έχουμε το ζητούμενο x_0 , αν όχι πρέπει να το βρω από τα δεδομένα.

Υπενθυμίσεις στις ευθείες

- Εάν είναι παράλληλη στο άξονα $\chi'\chi$. Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$
- Εάν είναι παράλληλη σε ευθεία $y = ax + \beta$. Λύνω την εξίσωση $f'(x) = a$
- Εάν είναι κάθετη σε ευθεία $y = ax + \beta$. Λύνω την εξίσωση $f'(x) \cdot a = -1$
- Εάν σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία ω . Λύνω την εξίσωση $f'(x) = \varepsilon\varphi\omega$
- Εάν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ είναι οξεία. Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0$
- Εάν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ είναι αμβλεία. Λύνω την ανίσωση $f'(x) < 0$
- Εάν διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$. Έχω $\beta = 0$.
- Η διχοτόμος των γωνιών xOy και $x'Oy'$: $y = x$
- Η διχοτόμος των γωνιών yOx' και $y'Ox$: $y = -x$
-

ω	$0^\circ \& 180^\circ$	30°	45°	60°	150°	135°	120°
$\varepsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x) = 2\sqrt{x}$, στο $A(4, f(4))$.

Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: (ε) $y = f'(4)x + b$.

Είναι: $\forall x > 0, f'(x) = (2\sqrt{x})' = 2(\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, οπότε: $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, και επομένως η

ζητούμενη ευθεία έχει την μορφή: $y = \frac{1}{2}x + b$.

Όμως: $A(4, f(4)) \equiv A(4, 4) \in (\varepsilon) \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}4 + b \Rightarrow b = 2$, οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η: $(\varepsilon) y = \frac{1}{2}x + 2$.

2. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x}{x+1}$ που

οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στη διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου.

Η διχοτόμος του 1^{ου} τεταρτημορίου είναι η ευθεία: $(\varepsilon) y = x$ και προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι ίσος με 1. Τα ζητούμενα σημεία είναι εκείνα για τα οποία ισχύει: $f'(x) = 1$

Είναι: $\forall x \neq -1, f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{(x)'(x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$, οπότε:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x+1 = 1 \text{ ή } x+1 = -1$$

$\Rightarrow x = 0$ ή $x = -2$, και τα ζητούμενα σημεία είναι: $A(0, f(0)) \equiv (0, 0)$ και $B(-2, f(-2)) \equiv (-2, 2)$.

Ασκήσεις

1. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

α) $f(x) = 2x^2$ στο σημείο $A(1, f(1))$

β) $f(x) = \sqrt{x+1}$ στο σημείο $B(3, f(3))$

γ) $f(x) = \frac{2}{x}$ στο σημείο $\Gamma(2, f(2))$

δ) $f(x) = x\eta\mu x$ στο σημείο $K(\pi, f(\pi))$

ε) $f(x) = x^3 + x^2$ στο σημείο $B(1, f(1))$

στ) $f(x) = \sqrt{1+2x^2}$ στο σημείο $X(2, f(2))$

ζ) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο $T(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$

2. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο που δίνεται :

α) $f(x) = x^2$ στο σημείο $x_0 = 1$

β) $f(x) = 2x^3$ στο σημείο $x_0 = -1$

γ) $f(x) = \sqrt{x}$ στο σημείο $x_0 = 4$

δ) $f(x) = \eta\mu x$ στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$

ε) $f(x) = \varepsilon\phi x$ στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$

ζ) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ στο σημείο $x_0 = 1$

η) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ στο σημείο $x_0 = 2$

κ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ στο σημείο $x_0 = 0$

3. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ με $x \neq 1$

Να βρείτε :

α) τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$,

β) την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $\Gamma(2, f(2))$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = 3 - x^2$ και $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$
- α) Να βρείτε τις παραγώγους των f και g
- β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των f και g στα σημεία τους με τετμημένες $x_0 = 1$ είναι παράλληλες .
5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και έχει την ιδιότητα :
- $$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - h^2 - 1}{h} = 2 .$$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = 0$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3$, με $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$ να είναι 54.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta$, με $a \in \mathbb{R}^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε :
- α) τις τιμές των a και β για τις οποίες η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2, 15)$ της γραφικής παράστασης της f είναι 16 ,
- β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A .
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax(2 - x)$, όπου $a \in \mathbb{R}$
- α) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .
- β) Για $a = \frac{1}{2}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$
9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$, με $x \geq 0$.
- Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $k = 2$ και να βρείτε την εξίσωση της .
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$
- Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο αυτό σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$, τότε:
- α) να αποδείξετε ότι $a = -4$ και $\beta = 4$,
- β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$,

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 1$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 + x + 1$ και η ευθεία $(\varepsilon): \psi = 9x - 3$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας (ε) .

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και την ευθεία

$(\varepsilon): \psi = x + 2$. Αν η ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 3$

β) $\alpha = -1$ και $\beta = 3$

14. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f όπου

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda x^2 - (\lambda^2 - \lambda)x, \text{ να μην δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.}$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \frac{\beta}{x}$. Έστω ότι η γραφική παράσταση της F διέρχεται από το

σημείο $A(-2, -5)$ και η εφαπτομένη της f στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε τα a, β .

β) Για $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = 8$, να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της f' στο σημείο

$$B(-1, f'(-1)).$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

της f , η οποία :

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης 2

β) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120°

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία $-3x + y + 4 = 0$

δ) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

17. Αν η ευθεία $y = 2ax - \beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ στο

σημείο $M(1, f(1))$, να βρείτε τους αριθμούς a και β .

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ,

ώστε οι εφαπτόμενες σε αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi = 2\chi$.

19. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$f(x^3 + 1) = x^3 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη :

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης 2

β) είναι παράλληλη στην ευθεία $\chi + \psi + 5 = 0$

γ) είναι κάθετη στην ευθεία $6\chi + 10\psi + 2 = 0$

δ) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{\pi}{3}$.

21. Δίνεται η $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρεις:

(i) την πρώτη παράγωγο της f

(ii) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

(iii) την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $A(2, f(2))$ καθώς και την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

i) την πρώτη παράγωγο της f

ii) Να βρεις τις εξισώσεις της εφαπτομένης της καμπύλης της f που είναι παράλληλες στον άξονα $\chi'\chi$

23. Δίνεται η $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2, x \in \mathbb{R}^*$

(i) την πρώτη παράγωγο της f

(ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται απ' το $A(1, 5)$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο A είναι 4 να βρεις τα α και β .

(iii) Να βρεις την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

24. Δίνονται οι $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 2$ και το $A(1, \psi_0)$ που είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f και g .

(i) την πρώτη παράγωγο της f και της g

(ii) Να βρεις τα α, β για τα οποία οι f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο A .

(iii) Να βρεις την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

25. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3$. Να βρεις:

(i) την πρώτη παράγωγο της f

(ii) Τους α, β για τις οποίες η εφαπτομένη της f στο $A(-1, 1)$ έχει κλίση ίση με 8.

26. Δίνεται η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + x + \beta$

- (i) την πρώτη παράγωγο της f
- (ii) Το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο $A(1,3)$
- (iii) Τους α, β αν η ευθεία $\psi=2\chi+1$ είναι η εφαπτομένη της καμπύλης f στο A .

27. Δίνεται η $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

- (i) Να βρεις το πεδίο ορισμού της f
- (ii) Να υπολογίσεις το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- (iii) την πρώτη παράγωγο της f
- (iv) Να βρεις τις εφαπτόμενες της f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: \psi=2\chi+5$

1.5 Ρυθμός Μεταβολής

Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$;

Η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 .

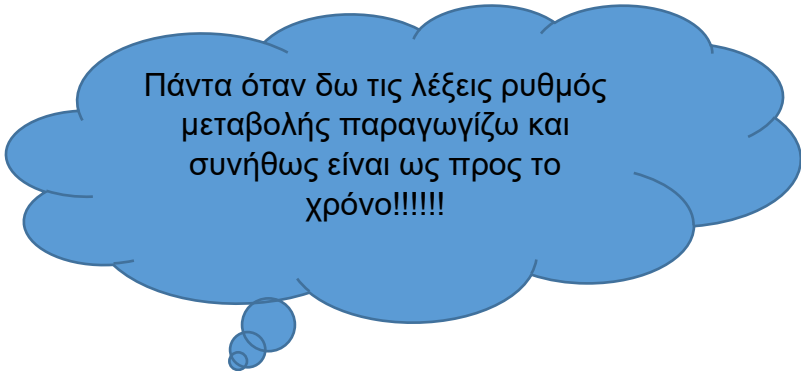
Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_0 . Δώστε μερικά παραδείγματα.

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

Τι γνωρίζετε για τη ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως

Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $u(t) = x'(t)$.

Αν η συνάρτηση u είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $a(t) = u'(t)$ ή ισοδύναμα $a(t) = x''(t)$.



Πάντα όταν δω τις λέξεις ρυθμός μεταβολής παραγωγίζω και συνήθως είναι ως προς το χρόνο!!!!!!

Παραδείγματα

1. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται από την συνάρτηση $x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$, $t \geq 0$, όπου το t μετριέται σε δεύτερα και το x σε μέτρα.

α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου τη χρονική στιγμή t .

β) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

γ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση;

δ) Ποια η αρχική ταχύτητα και ποια η ταχύτητα τη χρονική στιγμή: $t = \frac{3}{2}$ sec.

ε) Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 4 sec.

α) Είναι: $v(t) = x'(t) = (2t^3 - 9t^2 + 12t - 4)' = 6t^2 - 18t + 12 \left(\frac{m}{sec} \right)$ και

$a(t) = v'(t) = (6t^2 - 18t + 12)' = 12t - 18 \left(\frac{m}{sec^2} \right)$.

β) Το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν:

$v(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ ή $t = 1$.

γ) Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν:

$v(t) > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 > 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) > 0 \Rightarrow t < 1$ ή $t > 2$.

δ) Αρχική ταχύτητα είναι το: $v(0) = 6 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 12 = 12 \frac{m}{sec}$, και η ταχύτητα

τη χρονική στιγμή $t = \frac{3}{2} sec$, είναι το: $v\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \frac{9}{4} - 18 \cdot \frac{3}{2} + 12 = -\frac{3}{2} \frac{m}{sec}$

ε) Το ολικό διάστημα $S_{ολ}$ που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 4 sec, είναι:

• στη διάρκεια του 1^{ου} δευτερολέπτου: $S_1 = |x(1) - x(0)| = |1 + 4| = 5$,

• από $t = 1$ έως $t = 2$: $S_2 = |x(2) - x(1)| = |0 - 1| = 1$,

• από $t = 2$ έως $t = 4$: $S_3 = |x(4) - x(2)| = |28 - 0| = 28$, οπότε:

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 = 5 + 1 + 28 = 34 m.$$

2. Η αξία ενός P/C, t χρόνια μετά την αγορά του, δίνεται, κατά προσέγγιση, από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{3}{10} + \frac{3}{t} \text{ (σε χιλ. €), όπου } t \geq 1.$$

α) Ποια η αξία του υπολογιστή:

1) 1 χρόνο, 2) 18 μήνες και 3) 5 χρόνια, από το έτος της αγοράς;

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του υπολογιστή μετά από 5 χρόνια;

α) 1) Είναι: $f(1) = \frac{3}{10} + \frac{3}{1} = 0,3 + 3 = 3,3$ χιλ. €, ήτοι 3.300 €.

2) 18 μήνες = 1,5 έτη, και το ζητούμενο είναι: $f(1,5) = \frac{3}{10} + \frac{3}{1,5} = 2,3$ χιλ. €, ήτοι 2.300 €.

3) Είναι: $f(5) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} = 0,3 + 0,6 = 0,9$ χιλ. €, ήτοι 900 €.

β) Είναι: $f'(t) = \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{t}\right)' = -\frac{3}{t^2}$, οπότε $f'(5) = -\frac{3}{5^2} = -0,12$ χιλ. €/έτος, ήτοι η αξία του υπολογιστή μειώνεται με ρυθμό 120 € ανά έτος.

3. Ένα εργοστάσιο για την κατασκευή x χιλιάδων μονάδων ενός προϊόντος έχει κόστος που δίνεται από τη

σχέση: $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 60x^2 + 100x + 4$ χιλ. ευρώ. Τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος

δίνονται από τη σχέση $E(x) = -x^3 + 30x^2 - 1700x - 2$ χιλ. ευρώ. Να βρεθεί η ποσότητα που πρέπει να παραχθεί, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της επιχείρησης να είναι θετικός.

Το κέρδος δίνεται από την σχέση $P(x) = E(x) - K(x)$.

Εφόσον θέλουμε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της επιχείρησης να είναι θετικός θα πρέπει

$$P'(x) > 0 \Rightarrow -4x^2 + 180x - 1800 > 0 \Rightarrow x \in [15, 30]$$

4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(1,0)$ και $B(x+2, x)$ ως προς x , όταν $x=3$.

$$AB(x) = \frac{x-0}{x+2-1} = \frac{x}{x+1}$$

$$AB'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$AB'(3) = \frac{1}{(3+1)^2} = \frac{1}{16}$$

Ασκήσεις

1. Η θέση ενός σώματος πάνω σε έναν άξονα δίνεται από τη σχέση :
 $x(t) = t^3 - 3t + 2$ όπου t ο χρόνος σε s και x σε m .
 - α) Ποια είναι η θέση του σώματος τη στιγμή που ξεκινάει η κίνησή του ;
 - β) Με τι ταχύτητα ξεκινάει το σώμα την κίνησή του ;
 - γ) Ποια είναι η θέση του σώματος τη στιγμή που η ταχύτητα είναι $9 \frac{m}{s}$;
 - δ) Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που είναι ακίνητο
2. Δυο σωματίδια A, B κινούνται σε άξονα και οι θέσεις τους συναρτήσει του χρόνου δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις : $x_A(t) = t^3 + 3t$ και $x_B(t) = 4t^2$. Να βρείτε :
 - α) τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τα σωματίδια συγκρούονται ,
 - β) τις ταχύτητες των σωματιδίων όταν συγκρούονται .
3. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε ένα κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $y(t) = A\eta\mu\omega t$ όπου t ο χρόνος και A, ω θετικές σταθερές .
 - α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t .
 - β) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y .
 - γ) Όταν η επιτάχυνση είναι μηδέν, να αποδείξετε ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο .
4. Η θέση ενός κινητού πάνω σε άξονα τη στιγμή $t \geq 0$ δίνεται από τη σχέση : $x(t) = e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}$ όπου $\lambda > 0$, σταθερά.
 - α) Να βρείτε την επιτάχυνση του κινητού τη στιγμή t .
 - β) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης του κινητού .
5. Ένα σώμα κινείται στον άξονα $x'x$ ώστε τη στιγμή $t \geq 0$ (σε s) η θέση του να δίνεται από τη σχέση :
 $s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ (σε m)
 - α) Πότε αυξάνεται και πότε μειώνεται η ταχύτητα του σώματος ;
 - β) Πότε αλλάζει η φορά της κίνησής του ;
 - γ) Να βρείτε το διάστημα που διανύει το σώμα στα τρία πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του .
6. Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο
 $x(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 1$, όπου t ο χρόνος σε s με $t \in [0, 6]$
 - α) Να βρείτε τη θέση του κινητού τη στιγμή κατά την οποία ξεκινά να κινείται .
 - β) Να βρείτε τη ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 1s$
 - γ) Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά ;
 - δ) Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό ;
 - ε) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του κινητού .
7. Η θέση ενός υλικού σημείου , που κινείται σε κατακόρυφο άξονα , δίνεται από τον τύπο
 $y(t) = 6\eta\mu 3t + 8\sigma\upsilon\nu 3t$ όπου t ο χρόνος .
 - α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου τη χρονική στιγμή t
 - β) Να δειχθεί ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης
 - γ) Αν t_1 η χρονική στιγμή που το σημείο δεν κινείται και t_2 η χρονική στιγμή που μηδενίζεται η επιτάχυνση , να δείξετε ότι : $\epsilon\phi 3t_1 \cdot \epsilon\phi 3t_2 = -1$
8. Δυο σημεία A και B κινούνται πάνω στους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ αντίστοιχα και οι θέσεις τους δίνονται κάθε χρονική στιγμή από τις συναρτήσεις $x(t) = 3t$ για το A και $\psi(t) = -2t + 1$ για το B .
Να βρείτε :
 - α) Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης AB τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ sec}$. Αυξάνεται ή μειώνεται η απόσταση AB ;
9. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις x και ψ και περίμετρο 20 m
 - α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση :
 $E(x) = -x^2 + 10x$,
 - β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 4 \text{ m}$

10. Ένα παγάκι έχει σχήμα κύβου και η πλευρά του χ μειώνεται με ρυθμό :

$x'(t) = -0,01 \text{ cm/s}$. Τη στιγμή t_0 που η πλευρά του έχει μήκος $x(t_0) = 2 \text{ cm}$ να βρείτε το ρυθμό μείωσης του όγκου του .

11. Η θερμοκρασία θ μιας περιοχής δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τη σχέση :

$$\theta(t) = 20 + \frac{\ln(t+1)}{1+t} \quad (\text{σε } ^\circ\text{C})$$

Να εξετάσετε αν τη στιγμή $t = 2$ η θερμοκρασία ανεβαίνει ή πέφτει .

12. Στο καρτεσιανό επίπεδο , θεωρούμε τα σημεία :

$$A(2t-1, t+2) \text{ και } B(t+2, 2t+1) \text{ όπου } t \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση d των σημείων A, B δίνεται από τη σχέση :

$$d(t) = \sqrt{2t^2 - 8t + 10}$$

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A, B όταν $t = 3$.

γ) Να εξετάσετε αν η απόσταση AB αυξάνεται ή μειώνεται όταν $t = 1$.

13. Η τιμή πώλησης και το κόστος παραγωγής χ μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία δίνονται αντίστοιχα από τις συναρτήσεις :

$$\Pi(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 50 \text{ και } K(x) = x^2$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $E(x)$ που δίνει το κέρδος της βιοτεχνίας .

β) Πόσες τουλάχιστον μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παραχθούν , ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να είναι θετικός ;

14. Ένα κουτί έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς χ και ύψους ψ σε cm .

Οι διαστάσεις του κουτιού μεταβάλλονται με σταθερούς ρυθμούς , ώστε η πλευρά χ να αυξάνεται με ρυθμό

$$x'(t) = 2 \text{ cm/s} \text{ και η πλευρά } y \text{ να ελαττώνεται με ρυθμό : } y'(t) = -1 \text{ cm/s}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου $V(t)$ του κουτιού δίνεται από τη σχέση :

$$V'(t) = 4x(t)y(t) - x^2(t)$$

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας $E(t)$ του κουτιού δίνεται από τη σχέση :

$$E'(t) = 4x(t) + 8y(t)$$

γ) τη στιγμή t_0 που το κουτί γίνει κύβος να εξετάσετε αν ο όγκος του κουτιού αυξάνεται ή ελαττώνεται

δ) αν το εμβαδόν της επιφάνειας του κουτιού αυξάνεται ή ελαττώνεται .

1.6 Μονοτονία – Ακρότατα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε τι συμπεραίνουμε για τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε τι συμπεραίνουμε για τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε τι συμπεραίνουμε για τα ακρότατα της f στο (α, β) ;

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε τι συμπεραίνουμε για τα ακρότατα της f στο (α, β) ;

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Μεθοδολογία εύρεσης μονοτονίας – ακροτάτων

1^ο βήμα : Βρίσκω πεδίο ορισμού της f

2^ο βήμα : Βρίσκω f'

3^ο βήμα : Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$

4^ο βήμα : Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0$

(το παραπάνω βήμα είναι προαιρετικό)

5^ο βήμα : Κάνω το ακόλουθο πίνακάκι

x	
f'	
f	

Παραδείγματα

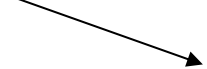
Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

1. $f(x) = -x^2 + 4x$

Είναι: $A_f = \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = (-x^2 + 4x)' = -2x + 4$, οπότε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Έτσι ο πίνακας έχει ως εξής:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	+		-
		0	
f(x)		τ.μ. f(2) = 4	

$$(f'(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0, \text{ και } f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0)$$

Από τον πίνακα προκύπτουν τα εξής:

η f είναι γν.αύξουσα στο $(-\infty, 2]$, γν.φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό μέγιστο, με τιμή $f(2) = 4$ (αυτή είναι και η μέγιστη τιμή της f).

Σημείωση : Όταν η πρώτη παράγωγος είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού και ο συν/τής του x θετικός, τότε θέτουμε στο πρόσημο + στο δεξί διάστημα και - στο αριστερό, και το αντίθετο πράττουμε όταν ο συν/τής είναι αρνητικός.

$$2. \quad f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x$$

Είναι: $A_f = \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = (2x^3 + 9x^2 - 24x)' = 6x^2 + 18x - 24$, οπότε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 18x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -4.$$

Έτσι ο πίνακας έχει ως εξής:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
f'(x)	+			+
		0	0	
f(x)	 αύξουσα	τ.μ.	 φθίνουσα	τ.ε.  αύξουσα

Από τον πίνακα προκύπτουν τα εξής:

η f είναι γν.αύξουσα στο $(-\infty, -4]$, γν.φθίνουσα στο $[-4, 1]$, γν.αύξουσα στο $[1, +\infty)$, και παρουσιάζει στο $x_0 = -4$ τοπικό μέγιστο, με τιμή $f(-4) = 112$, ενώ στο $x_0 = 1$ τοπικό ελάχιστο, με τιμή $f(1) = -13$.

Σημείωση : Όταν η πρώτη παράγωγος είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, με δύο ρίζες άνισες, το πρόσημο συμπληρώνεται ως εξής: **θέτουμε στο δεξί διάστημα το πρόσημο του συν/τή του x² και πηγαίνοντας αριστερά εναλλάσσουμε τα πρόσημα.** Εάν η πρώτη παράγωγος είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, με τρεις ρίζες άνισες, (ή 4^{ου}, με τέσσερις διαφορετικές ρίζες, κ.ο.κ) **θέτουμε στο δεξί διάστημα το πρόσημο του συν/τή του μεγιστοβάθμιου όρου και πηγαίνοντας αριστερά εναλλάσσουμε τα πρόσημα.** Αν κάποια ρίζα είναι διπλή, τότε **το πρόσημο παραμένει το ίδιο** κατά το πέρασμα της ρίζας προς τα αριστερά (συνεχίζοντας όμως με εναλλαγή στην περίπτωση που η επόμενη ρίζα είναι μονή, κ.ο.κ.).

Σημείωση : Στην περίπτωση κατά την οποία η πρώτη παράγωγος είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, η εξίσωση: $f'(x) = 0$ πιθανότατα θα επιλύεται με παραγοντοποίηση (δηλ. βγάζοντας κοινό παράγοντα το x (ή κάποια δύναμη του) αφού δεν θα υπάρχει τουλάχιστον ο σταθερός όρος).

3. $f(x) = \frac{4-x}{x-1}$

Είναι: $A_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \{1\}$ και $\forall x \in A_f$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{4-x}{x-1} \right)' = \frac{(4-x)' \cdot (x-1) - (4-x) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1 \cdot (x-1) - (4-x) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-x+1-4+x}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in A_f, \text{ οπότε η } f$$

είναι γν.φθίνουσα τόσο στο $(-\infty, 1)$, όσο και στο $(1, +\infty)$, και δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

4. $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$

Είναι: $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ και έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x} \right)' = \frac{(x^2+4)' \cdot x - (x^2+4) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2+4) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}, \text{ οπότε:}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=-2.$$

Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου καθορίζεται από την ποσότητα:

$$x^2-4, \text{ αφού } x^2 > 0,$$

Έτσι ο πίνακας έχει ως εξής:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-		-	0	+	
f(x)		↗	τ.μ.	↘		↘	τ.ε.	↗	
		αύξουσα		φθίνουσα		φθίνουσα		αύξουσα	

Από τον πίνακα προκύπτουν τα εξής:

η f είναι γν.αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, γν.φθίνουσα στα $[-2, 0)$ και $(0, 2]$ και παρουσιάζει στο $x_1 = -2$ τοπικό μέγιστο, με τιμή $f(-2) = -4$ και στο $x_2 = 2$ τοπικό ελάχιστο, με τιμή $f(2) = 4$.

5. Το κόστος υλοτομίας x στρεμμάτων ξυλείας δίνεται από τη συνάρτηση: $K(x) = 5x + 100$, σε χιλιάδες €. Η εισπραξη ανά στρέμμα δίνεται από τη συνάρτηση: $E(x) = 30 - x$ €. Να βρεθεί πόσα στρέμματα ξυλείας πρέπει να υλοτομηθούν ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο και να υπολογιστεί το κέρδος αυτό.

Οι συνολικές εισπράξεις για την υλοτόμηση x στρεμμάτων είναι:

$x \cdot E(x) = x(30 - x)$, και το κέρδος προφανώς ισούται με:

$$x(30 - x) - K(x) = x(30 - x) - (5x + 100) = -x^2 + 25x - 100 = P(x), x \geq 0.$$

Το ζητούμενο είναι το μέγιστο της συνάρτησης.

Είναι: $P'(x) = -2x + 25$, και: $P'(x) = 0 \Rightarrow x = 12,5$.

Έτσι ο πίνακας έχει ως εξής:

x	0	12,5	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		τ.μ. (ο.μ.) $f(12,5)$	

Άρα για $x = 12,5$, το κέρδος γίνεται μέγιστο, και το μέγιστο αυτό κέρδος δίνεται από το: $P(12,5) = 56,25$ χιλιάδες €.

σ.σ.: 1) στο 0 η P παρουσιάζει τ.ε. χωρίς όμως να παρουσιάζει ολικό.

2) είναι $P(0) = -100 < 0$, δηλ. από την υλοτόμηση 0 στρεμμάτων ξυλείας η βιομηχανία όχι απλά δεν έχει κέρδος, αλλά 'μπαίνει μέσα', κάτι που είναι απόλυτα λογικό, αφού (στη συνάρτηση κόστους, $K(x)$, προφανώς) συνυπολογίζονται και πάγια έξοδα της βιομηχανίας (όπως ρεύμα, μισθοί κ.λ.π.).

3) αν $K(x)$ η συνάρτηση κόστους από την παραγωγή x προϊόντων ανά τακτό διάστημα, τότε η συνάρτηση: $\frac{K(x)}{x}$ εκφράζει το μέσο κόστος παραγωγής.

6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, με $0 \leq x \leq 5$.

Να βρεθούν τα τοπικά και ολικά ελάχιστα της συνάρτησης.

Είναι: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, και: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Έτσι ο πίνακας έχει ως εξής:

x	0	1	3	5
	+		-	+
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.	τ.μ.

Από τον πίνακα προκύπτουν τα εξής:

για $x = 0$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή: $f(0) = 0$,

για $x = 1$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή: $f(1) = 4/3$,

για $x = 3$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή: $f(3) = 0$,

για $x = 5$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή: $f(5) = 20/3$.

Η f είναι ορισμένη σε **κλειστό** διάστημα – τα ολικά ακρότατα προκύπτουν από τα τοπικά παίρνοντας τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή ως μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης αντιστοίχως.

Είναι επομένως: μέγιστο το $(5, 20/3)$ και ελάχιστο το $(0, 0)$ ή το $(3, 0)$.

Ασκήσεις

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2004$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη πρώτη παράγωγο f' της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3]$.

2) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$,

ii) $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3$,

iii) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$,

iv) $f(x) = (x^2 - 1)^3$,

v) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$,

vi) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^3$,

vii) $f(x) = -x^3 + 3x$,

viii) $f(x) = x^2 (2x - 1)^3$,

ix) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

x) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ($\alpha \neq 0$)

xi) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$,

xii) $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}$,

xiii) $f(x) = \frac{x + 3}{2x - 1}$,

xiv) $f(x) = \frac{(x - 1)^3}{x^2}$,

xv) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$,

xvi) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$,

xvii) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,

xviii) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

xix) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

xx) $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}$,

3) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 - 3x$,

ii) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$,

iii) $f(x) = -2x^4 + 4x^2$,

v) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

4) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x - 5$

ii) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12 + \ln 2$

iii) $f(x) = -3x^2 + 7x - 11$

iv) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

v) $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3}$

vi) $f(x) = 3x - x^3$

vii) $f(x) = 5x^4 - 20x$

viii) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - e$

x) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 1$

xii) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$

xiv) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, x > 3$

xvii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

xix) $f(x) = x^2 - 2x$

xxi) $f(x) = -x^2 + 4x - 10$

xxiii) $f(x) = -x^2 - 2x + \sqrt{7}$

xxv) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + e^2$

ix) $f(t) = t^5 + 4t^3 + 9t$

xi) $f(t) = \frac{t^2-10}{t^2+10}$

xiii) $f(x) = 3 - 10x$

xv) $f(x) = -x^5 - 2x^3 - 5x$

xvi) $f(x) = 6x^7 + 7x$

xviii) $f(x) = x^3 + 5x + 1$

xx) $f(x) = x^2 - 2x$

xxii) $f(x) = -x^2 + 4x - 10$

xxiv) $f(x) = -x^2 - 2x + \sqrt{7}$

xxvi) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + e^3$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

7) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη παράγωγο της f β) Αν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 5$, να βρείτε τις τιμές των a, β γ) Για τις τιμές των a, β που βρήκατε στο ερώτημα (β) να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

9) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (ax^2 - 2ax + 2a)e^x$, με $a \in \mathbb{R}^*$

Να βρείτε :

α) τη παράγωγο της f β) τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + ax^2 - 6x + 2$, όπου $a \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

11) Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - ax^2 + \beta x - 3$ παρουσιάζει

τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2a}{x} + \beta$, η οποία μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει

ακρότατο στο $x_2 = 2$.

- i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 ii) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (\alpha - 1)x^2 + 3x + \alpha^2$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να μην έχει ακρότατα.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$. Αν η f παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό ακρότατο το 1, τότε:

- i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 ii) Να βρείτε τα ακρότατα

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο το 2 και η ευθεία $y = x$ είναι η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + 12x + 10$, με $x \in \mathbb{R}$
 Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$, με $x \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
 β) Να λύσετε την ανίσωση $x^6 + x^2 > 2$.

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, με $x \in \mathbb{R}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x + 1) > 4$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^9 + 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) < 1$.

20) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 3x$, με $x \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να λύσετε την ανίσωση $2[\eta\mu(x^2) - \eta\mu x] > 3(x^2 - x)$

21) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Αν $\beta \geq \alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{\beta^4 - \alpha^4}{4} \geq \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3}$

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{-2010} + x^{-2008} - x + 1$ με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι :

- α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,
 β) $f(3 + \sqrt{2}) < f(2 + \sqrt{3})$.

- 23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 4x + k^2 - 3k + 1$ όπου $k \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε :
 α) τη μέγιστη τιμή της f
 β) τις τιμές του k για τις οποίες η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 1 .
- 24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + (a^3 - 4)x - 2$ με $a \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -1$
 α) Να αποδείξετε ότι $a = 2$
 β) Να βρείτε το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του .
- 25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν είναι $f(0) = 3$ και η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = \frac{1}{3}$, τότε :
 α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 3$,
 β) να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- 26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.
 Να βρείτε :
 α) την παράγωγο της f
 β) τις τιμές του λ για τις οποίες η f έχει
 i) δύο ακρότατα
 ii) μόνο ένα ακρότατο .
- 27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda^3 x^2 - 2\lambda x - \lambda$, με $\lambda > 0$
 Να βρείτε :
 α) την ελάχιστη τιμή της f ,
 β) την τιμή του λ για την οποία η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη .
- 28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
 Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη
- 29) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x - 3}$. Να αποδείξετε ότι δεν έχει ακρότατα .
- 30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 2$, όπου $k \in \mathbb{R}$
 Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$, να αποδείξετε ότι :
 α) $k = -1$
 β) η f δεν έχει ακρότατα.
- 31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$, με $x \neq 1$
 α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
 β) Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{x^3}{27} \geq \frac{x - 1}{4}, \text{ για κάθε } x > 1$$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι :

$$x^2 + x \sigma \upsilon \nu x \geq \eta \mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

33) Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν το $(x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και η συνάρτηση P παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = -3$, τότε :

α) να βρείτε τα α, β και γ

β) να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xP(x) - P(1)}{x^2 - 1}$$

34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 9x^2 + 24x - \beta$ και η ευθεία $y = 9x - 1$, η οποία εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα ,

γ) Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+2} - 2}$$

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Το κλάσμα $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $h \neq 0$, εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
2. Αν η $f'(3)$ υπάρχει, τότε εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $(3, f(3))$.
3. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$$

4. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός και $\sigmaυνx_0 \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \epsilon\phi x_0$.
5. Αν ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή και η θέση του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη

συνάρτηση $x(t)$, τότε το κλάσμα $\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$, $h \in \mathbf{R}$, $h \neq 0$ εκφράζει
Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$
- ☐ β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$
- ☐ γ) τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$
- ☐ δ) τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$
- ☐ ε) τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$.

6. Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 1$, τότε ένας τύπος της f είναι ο:
Επιλογή μίας απάντησης.

- ☒ α) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$
- ☐ β) $f(x) = x^2 - 2$
- ☐ γ) $f(x) = 2x - 1$
- ☐ δ) $f(x) = x^2 - 1$
- ☐ ε) $f(x) = x^2 - x + 2$

7. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) $A = (0, +\infty)$
- ☐ β) $A = [0, +\infty)$
- ☐ γ) $A = \mathbf{R}$
- ☐ δ) $A = \mathbf{R} - \{0\}$
- ☐ ε) κανένα από τα προηγούμενα

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\sqrt{x} + 2x$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $x_0 = 2$ είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) 6
- ☐ β) $\ln 4$
- ☐ γ) $\frac{9}{4}$
- ☐ δ) 4
- ☐ ε) κανένα από τα προηγούμενα

9. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x - 5$ αν:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) $f'(2) = 5$
- ☐ β) $f'(2) = -5$
- ☐ γ) $f'(2) = -3$
- ☐ δ) $f'(2) = 3$
- ☐ ε) $f'(2) = 2$

10. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 10$ είναι ίση με:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) 50
- ☐ β) 5
- ☐ γ) $\frac{1}{50}$
- ☐ δ) 0
- ☐ ε) 1

11. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ τότε $f''(x)$ είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) $-4\eta\mu x$
- ☐ β) $4\sigma\upsilon\nu 2x$
- ☐ γ) $4\eta\mu 2x$
- ☐ δ) $-4\sigma\upsilon\nu 2x$
- ☐ ε) κανένα από τα προηγούμενα

12. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $g(x) = 3\ln x + 3$, $x > 0$, για $x_0 = 1$. Ισούται με:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ α) 1
- ☐ β) 0
- ☐ γ) $\frac{1}{3}$
- ☐ δ) 3
- ☐ ε) κανένα από τα προηγούμενα

13. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α
1. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot \ln x)$

Στήλη Β
α) 2
β) 0
γ) 5
δ) 1

14. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

15. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

16. Αν $x \neq 0$, τότε $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

17. Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

18. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

19. $(e^3)' = 3 \cdot e^2$

20. Έστω ότι για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ισχύει $f'(x_0) = 0$.
 Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχά τους στη στήλη Β.

Στήλη Α
1. $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b)
2. $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, b)
3. $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b)
4. $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, b)

Στήλη Β
α) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 .
β) Η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
γ) Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με το πεδίο ορισμού της από τη στήλη Β. Στήλη Α
1. $\frac{1}{x-1}$
2. $\sqrt{x-1}$
3. $\ln(x-1)$
4. e^{x-1}
5. $(x-1)^2$

Στήλη Β
α) $(1, +\infty)$
β) $\mathbb{R}$
γ) $\mathbb{R} - \{1\}$
δ) $[1, +\infty)$

21. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση.
22. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
23. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$.
24. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
25. Αν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, τότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 .
26. $(\sin x)' = \cos x$.
27. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:
- $f'(x_0) = 0$, για $x_0 \in (\alpha, \beta)$

- $f'(x) > 0$, στο (α, x_0)
- $f'(x) < 0$, στο (x_0, β)

Τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

28. Ισχύει $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

29. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

30. Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(x) = f(g(x))$ είναι ίση με $h'(x) = f'(g(x))$.

31. Αν η παράγωγος f' , μιας συνάρτησης f είναι συνεχής τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda$, όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

32. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, A , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το $\{x \in A / g(x) \neq 0\}$.

33. Η αναζήτηση του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ γίνεται μόνο όταν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

34. Αν ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

35. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 , τότε η f έχει μέγιστο για $x = x_0$.

36. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 > x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

37. Για τη συνάρτηση $f(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbf{R}$ ισχύει $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

38. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 , ισούται με τη στιγμιαία επιτάχυνσή του την ίδια χρονική στιγμή.

39. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

40. Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

41. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

42. Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

43. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

44. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

45. Αν $x > 0$ τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

46. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

47. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

48. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

☐ Α. $\frac{1 - \ln x}{x}$

☐ Β. $\frac{1 - \ln x}{x^2}$

☐ Γ. $\frac{x - \ln x}{x^2}$

☐ Δ. $\frac{x - \ln x}{x}$

☐ Ε. $\frac{\ln x - 1}{x^2}$

49. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f'(x_0) = 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

50. Αν $f'(x) = x^4 + e^x, x \in \mathbf{R}$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.

51. Αν $f'(x) = x(x-2)^2(x-3)$, τότε το $f(2)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

52. Το 2 είναι μέγιστο της $f(x) = 2 - x^2$.

53. Αν $f(x) = \sin x$, τότε $f''(x) = -f(x)$.

54. Αν $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^2$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$.

55. Av $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ τότε $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Κεφάλαιο 2^ο : Στατιστική

Η λέξη «Στατιστική» προέρχεται από τη λατινική λέξη «status» (που σημαίνει κράτος) και δηλώνει αρχικά τη συλλογή στοιχείων για τις κρατικές ανάγκες (έκταση , παραγωγή , πληθυσμός , κ.α). Έχει εξακριβωθεί ότι η πρώτη απογραφή πληθυσμού έγινε στη Κίνα από τον αυτοκράτορα Υ-αο το έτος 2238 π.Χ , ενώ στους Ρωμαίους η πρώτη απογραφή πληθυσμού έγινε επί Ρωμύλου (753 – 717 π.Χ) .

Το 1853 γράφεται από το Fr . Sansonino το πρώτο βιβλίο στατιστικού περιεχομένου και, λίγο αργότερα, εισάγεται από το Korning η στατιστική στην ανώτερη παιδεία ...

2.1 Βασικές Έννοιες

Τι ονομάζεται Στατιστική;

Η στατιστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών, ο οποίος βασίζεται σε ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δειγμάτων,
- την συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση δεδομένων,
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Τι ονομάζουμε πληθυσμό;

Ένα σύνολο που θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους λέγεται πληθυσμός.

Τι ονομάζουμε μονάδες ή άτομα πληθυσμού;

Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού.

Τι ονομάζουμε απογραφή;

Απογραφή λέγεται η εξέταση όλων των ατόμων του πληθυσμού.

Τι ονομάζουμε δείγμα:

Το μέρος του πληθυσμού του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία του (άτομα) ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά καλείται δείγμα. Ένα δείγμα πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό δηλαδή η επιλογή του να γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να δίνει ακριβή αποτελέσματα ή αλλιώς κάθε άτομο του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα.

Όσο πιο μεγάλο είναι ένα δείγμα τόσο πιο αντιπροσωπευτικό είναι;

Όχι. Μία “προσεκτική” επιλογή μικρότερου δείγματος είναι δυνατόν να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από ένα μεγαλύτερο δείγμα που δεν έχει εκλεγεί κατάλληλα.

Τι ονομάζουμε μεταβλητές στη στατιστική;

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \dots$

Τι ονομάζουμε τιμές μεταβλητής;

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται τιμές της μεταβλητής.

Τι ονομάζουμε παρατηρήσεις ή στατιστικά δεδομένα; Οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους;

Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις. Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά.

Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι μεταβλητές; Να δώσετε μερικά παραδείγματα σε κάθε κατηγορία.

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

- ✓ Σε **ποιοτικές** ή κατηγορικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, η ομάδα αίματος (με τιμές A, B, AB, O), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.
- ✓ Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
 - i) Σε **διακριτές μεταβλητές**, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,...), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,...,6) κτλ.
 - ii) Σε **συνεχείς μεταβλητές**, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) . Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ' Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές. Στη συνέχεια να διακρίνετε τις ποσοτικές σε διακριτές και σε συνεχείς.

- i) ύψος κτηρίου
- ii) χρώμα ματιών μαθητών ενός σχολείου
- iii) κατάσταση υγείας γυναικών ηλικίας 40-50 ετών
- iv) ο αριθμός των ποταμών της χώρας μας
- v) θρήσκευμα
- vi) ο αριθμός των κοριτσιών σε μία οικογένεια
- vii) το σκορ στο τάβλι

2. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθούν μερικές από τις μεταβλητές που μπορεί να μας ενδιαφέρουν, να γίνει η διάκριση τους σε ποιοτικές και ποσοτικές και να αναφερθούν μερικές δυνατές τιμές τους.

- i) Εξετάζουμε ένα δείγμα ψηφοφόρων.
- ii) Εξετάζουμε ένα δείγμα φοιτητών.
- iii) Εξετάζουμε ένα δείγμα οικογενειών μιας πόλης.

3. Για να εξετάσουμε το επίπεδο γνώσης ξένων γλωσσών των Ελλήνων ηλικίας 30-40 ετών, αποφασίσαμε να πάρουμε δείγμα 1000 ατόμων. Με ποιόν τρόπο θα πάρουμε το αντιπροσωπευτικότερο δείγμα; Αν πάρουμε:

A: μόνο άνδρες

B: μόνο γυναίκες

Γ: μόνο άτομα από τις μεγάλες πόλεις

Δ: μόνο άτομα από την επαρχία

Ε: άνδρες και γυναίκες από διάφορες περιοχές της χώρας

4. Να εξετάσετε αν είναι αντιπροσωπευτικά τα παρακάτω δείγματα:

- i) Για να εξετάσουμε το επίπεδο μόρφωσης των υπαλλήλων μιας εταιρίας, ρωτήσαμε τους άνδρες εργαζόμενους.
- ii) Για να βρούμε τις μουσικές προτιμήσεις των της χώρας μας, ρωτήσαμε κάποιους μαθητές από διάφορα σχολεία της Αθήνας.
- iii) Για να εκτιμήσουμε το οικογενειακό εισόδημα των κατοίκων μιας πόλης, επιλέξαμε οικογένειες από διάφορες περιοχές της πόλης.
- iv) Για να εκτιμήσουμε το βάρος των παιδιών ηλικίας 7–9 ετών, επιλέξαμε τους μαθητές ενός δημοτικού σχολείου.
- v) Για να εκτιμήσουμε την ακροαματικότητα μιας ραδιοφωνικής εκπομπής, επιλέξαμε άτομα και των δύο φύλων, από διάφορες ηλικίες και περιοχές.

5. Στο σύνολο των μαθητών της Γ΄ Λυκείου ενός σχολείου θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στη στατιστική στο τέλος του α΄ τετραμήνου. Πήραμε τις επόμενες βαθμολογίες:

15 11 10 10 14 16 19 18 13 17

Να βρεθούν:

- i. Ο πληθυσμός και το δείγμα
- ii. Τα άτομα
- iii. Η μεταβλητή και το είδος της
- iv. Οι παρατηρήσεις

6. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα για το βάρος των εμπορευμάτων μιας αποθήκης φρούτων βρέθηκαν 10 κιβώτια με τα εξής κιλά:

15 23 30 15 14 10 18 10 9 20

Να βρείτε :

- i. Ποιος είναι ο πληθυσμός
- ii. Ποια είναι η μεταβλητή και το είδος της
- iii. Ποιες είναι οι παρατηρήσεις

Ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής.

2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων

Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι στατιστικοί πίνακες; Και τι γνωρίζετε για αυτές;

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

α) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,

β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Στα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Τι πρέπει να περιέχει ένας πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά;

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

α) τον τίτλο, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,

β) τις επικεφαλίδες των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,

γ) το κύριο σώμα (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,

δ) την πηγή, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ' αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Συχνότητες:

Έστω ότι έχω ένα δείγμα μεγέθους n , από ένα πληθυσμό και το εξετάζω ως προς το χαρακτηριστικό X του πληθυσμού. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις διακεκριμένες παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($1 \leq k \leq n$). Τότε για την x_i ($1 \leq i \leq k$) παρατήρηση λέμε ότι έχει:

α) συχνότητα v_i η οποία μας δείχνει πόσες φορές η x_i εμφανίζεται στο δείγμα και ισχύει

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n.$$

β) σχετική συχνότητα f_i με $f_i = \frac{v_i}{n}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ και ισχύει

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

γ) σχετική συχνότητα επί τοις εκατό $f_i\%$ με $f_i\% = 100 \cdot f_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Η $f_i\%$ μας δείχνει το ποσοστό επί τοις εκατό το οποίο καταλαμβάνει η παρατήρηση x_i στο δείγμα.

δ) αθροιστική συχνότητα N_i (μόνο για ποσοτικές μεταβλητές)

$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ και ισχύει

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_{i-1} + v_i = N_{i-1} + v_i \Rightarrow \begin{cases} v_1 = N_1 \\ v_i = N_i - N_{i-1} \text{ για } i = 2, \dots, k \end{cases}.$$

ε) **αθροιστική σχετική συχνότητα F_i** (μόνο για ποσοτικές μεταβλητές)

$$F_i = f_1 + \dots + f_i = \frac{v_1}{v} + \dots + \frac{v_i}{v} = \frac{v_1 + \dots + v_i}{v} = \frac{N_i}{v} \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, \kappa.$$

στ) **αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις εκατό $F_i\%$** $F_i\% = 100 \cdot F_i$.

ΔΟΜΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (όλες οι περιπτώσεις)

Παρ/σεις x_i	Συχ/τα v_i	Σχ. συχ. f_i	Σχ. συχ. % $f_i\%$	Αθ. συχ. N_i	Αθ. σχ. συχ. F_i	Α.σ.σ. $F_i\%$
Σύνολο:	v	1	100			

Τι εκφράζουν οι αθροιστικές συχνότητες N_i και τι οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες F_i της τιμής x_i ;

Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες v_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i , οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη με τι ισούται **αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i και με τι η αθροιστική σχετική συχνότητα;**

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι $N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$. Όμοια, η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$, για $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

Μεθοδολογία συμπλήρωσης πίνακα

Στόχος μου είναι να βρω το μέγεθος του δείγματος v .

Βασική σχέση που χρησιμοποιώ είναι η $f_i = \frac{v_i}{v}$

Για να συμπληρώσω τα αθροιστικά N_i , F_i γράφω το 1^ο κεφαλαίο και το 1^ο μικρό είναι ΠΑΝΤΑ ίδια και στην συνέχεια κάνω τριγωνάκια μεταξύ κεφαλαίων και μικρών για να συμπληρωθούν τα υπόλοιπα.

Παραδείγματα

- 1) Να συμπληρώσεις τον πίνακα

Κλάσεις	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1			10	
2		11		
3				57,5
4				
5	8			
Σύνολο	v=40		100	

$$F_1 \% = f_1 \% = 10$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow 0.1 = \frac{v_1}{40} \Rightarrow v_1 = 4$$

$$N_1 = v_1 = 4$$

$$N_2 = N_1 + v_2 \Rightarrow 11 = 4 + v_2 \Rightarrow v_2 = 7$$

$$f_2 \% = \frac{v_2}{v} 100 = \frac{7}{40} 100 = 17.5$$

$$F_2 \% = F_1 \% + f_2 \% = 27.5$$

$$F_3 \% = F_2 \% + f_3 \% \Rightarrow 57.5 = 27.5 + f_3 \% \Rightarrow f_3 \% = 30$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0.3 = \frac{v_3}{40} \Rightarrow v_3 = 12$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 11 + 12 = 23$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Rightarrow 4 + 7 + 12 + v_4 + 8 = 40 \Rightarrow v_4 = 9$$

$$f_4 \% = \frac{v_4}{v} 100 = \frac{9}{40} 100 = 22.5$$

$$F_4 \% = F_3 \% + f_4 \% = 57.5 + 22.5 = 80$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 23 + 9 = 32$$

$$f_5 \% = \frac{v_5}{v} 100 = \frac{8}{40} 100 = 20$$

$$F_5 \% = 100$$

$$N_5 = 40$$

2) Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i \%$
2					
3	3	0,15	4		
4				0,45	
5					20
6					
Σύνολο					

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0.15 = \frac{3}{v} \Rightarrow v = 20$$

$$N_2 = N_1 + v_2 \Rightarrow 4 = N_1 + 3 \Rightarrow N_1 = 1$$

$$N_1 = v_1 = 1$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$F_1 = f_1 = 0.05$$

$$f_1 \% = f_1 100 = 5\%$$

$$F_2 = F_1 + f_2 = 0.20$$

$$f_2 \% = f_2 100 = 15\%$$

$$F_3 = F_2 + f_3 \Rightarrow 0.45 = 0.20 + f_3 \Rightarrow f_3 = 0.25$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0.25 = \frac{v_3}{20} \Rightarrow v_3 = 5$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 4 + 5 = 9$$

$$f_3 \% = f_3 100 = 25\%$$

$$f_4 \% = f_4 100 \Rightarrow f_4 = 0.20$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow 0.20 = \frac{v_4}{20} \Rightarrow v_4 = 4$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 9 + 4 = 13$$

$$F_4 = F_3 + f_4 = 0.45 + 0.20 = 0.65$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Rightarrow v_5 = 7$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{7}{20} = 0.35$$

$$N_5 = 20$$

$$F_5 = 1$$

$$f_5 \% = 35\%$$

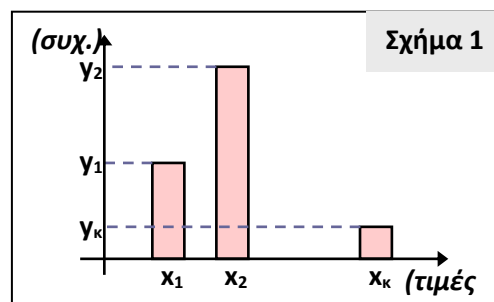
Γραφική παράσταση στατιστικών δεδομένων

Πότε χρησιμοποιείται το ραβδόγραμμα;

Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

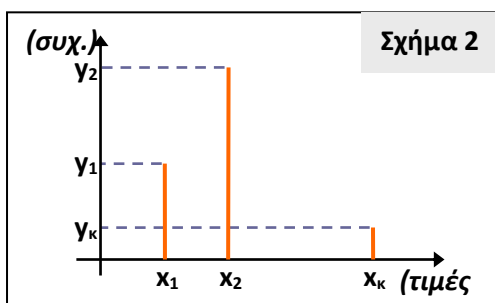
Κατασκευή

- τοποθετούμε στον x' άξονα τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_k$,
- δημιουργούμε κάθετους ράβδους (κ το πλήθος ίσων μηκών) έναν για κάθε παρατήρηση,
- το ύψος των ράβδων διαφέρει και είναι ίσο με y_i . (όπου y_i μπορεί να είναι $n_i, f_i, f_i \%, N_i, F_i, F_i \%$ ανάλογα τι ζητείται).



Πότε χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων;

Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων

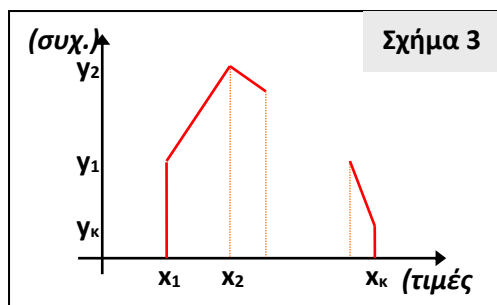


Τι ονομάζουμε πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τι μας δίνουν αυτά;

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, n_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε.

Κατασκευή

Αν ενώσουμε τις κορυφές των γραμμών και παραλείψουμε τις γραμμές, εκτός της 1^{ης} και της τελευταίας, παίρνουμε το πολύγωνο συχνοτήτων (βλέπε σχήμα 3, στο οποίο οι διακεκομμένες κάθετες γραμμές είναι αυτές που παραλείπονται).



Πότε χρησιμοποιούμε κυκλικό διάγραμμα;

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

Τι είναι κυκλικό διάγραμμα;

Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες n_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

Πως υπολογίζουμε το αντίστοιχο τόξο α_i ενός κυκλικού τμήματος

Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων,

$$\text{Τότε } \alpha_i = \frac{V_i}{V} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ, \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa)$$

Τι είναι το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα;

Είναι το διάγραμμα μίας μεταβλητής που οι τιμές που παίρνει είναι χρονικές στιγμές.

Πότε κάνουμε ομαδοποίηση των δεδομένων;

Αυτό μπορεί να συμβεί είτε στην περίπτωση μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της.

Τι ονομάζουμε κλάσεις;

Οι κλάσεις είναι διαστήματα της μορφής $[a, \beta)$ στα οποία ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) τα δεδομένα.

Τι ονομάζουμε όρια κλάσεων;

Τα άκρα των κλάσεων καλούνται όρια των κλάσεων. Δηλαδή τα άκρα a, β των διαστημάτων $[a, \beta)$.

Τι ονομάζεται πλάτος κλάσης;

Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Δηλαδή ο αριθμός β-α.

Τι ονομάζουμε κεντρική τιμή κλάσης;

Είναι το κέντρο της κλάσης δηλαδή το $x_i = \frac{\alpha + \beta}{2} \left(= \frac{R_i + L_i}{2} \right)$.

Τι είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων; Πως κατασκευάζεται;

Ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα. Κατασκευάζεται ως εξής: Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, σχηματίζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.

Πως κατασκευάζετε το πολύγωνο συχνοτήτων και πως το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων; Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα και με τι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ;

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με **το μέγεθος του δείγματος n**. Όμοια το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων με **εμβαδόν ίσο με 1**.

Παράδειγμα

Δίνονται τα δεδομένα του πίνακα να γίνουν τα ιστογράμματα των v_i , F_i και τα πολύγωνα αυτών.

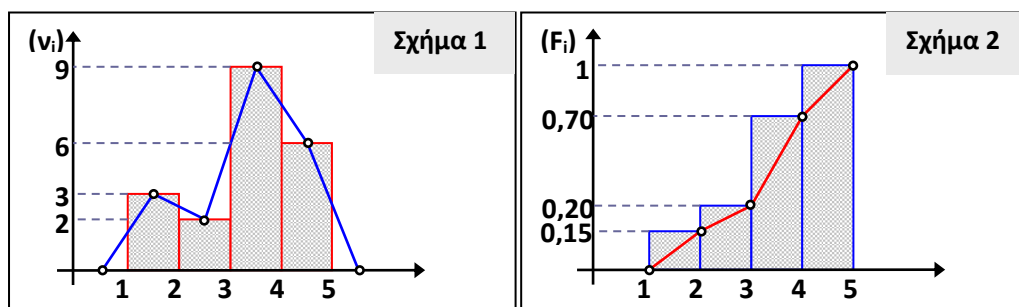
Φτιάχνουμε τον πίνακα κατανομών όλων των συχνοτήτων που μας ζητούνται

Κλάση I	Κεν. Τιμή x_i	Συχ. v_i	Αθ. σχ. N_i	Α.σ.σ. F_i
[10, 20)	15	3	3	0,15
[20, 30)	25	2	5	0,20
[30, 40)	35	9	14	0,70
[40, 50)	45	6	20	1
Σύνολο:		20		

Κλάση	Συχνότητα
[10, 20)	3
[20, 30)	2
[30, 40)	9
[40, 50)	6

Και έχουμε τα

διαγράμματα:



Με ανάλογο τρόπο δημιουργούμε τα ιστογράμματα των f_i , $f_i\%$, N_i , $F_i\%$ καθώς και τα πολύγωνα αυτών.

Μεθοδολογία ομαδοποίησης

i) Εκλέγουμε τον αριθμό των κλάσεων κ .

ii) Προσδιορίζουμε το πλάτος των κλάσεων $c = \frac{R}{\kappa}$.

(Αν δεν είναι ακέραιος στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω).

iii) Κατασκευάζουμε τις κλάσεις ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση ίσως και λίγο πιο κάτω. Προσοχή πρέπει όλες οι παρατηρήσεις να ανήκουν σε μία κλάση και κάθε παρατήρηση να ανήκει ακριβώς σε μία κλάση.

iv) Κάνουμε την διαλογή των παρατηρήσεων. Δηλαδή βρίσκουμε το πλήθος των παρατηρήσεων που ανήκουν σε κάθε κλάση (συχνότητα της κλάσης).

Μεθοδολογία εύρεσης άκρων κλάσεων

Η 1^η κλάση θα έχει άκρα $[a, a + c)$

Η 2^η κλάση θα έχει άκρα $[a + c, a + 2c)$

Και προκύπτει ένα σύστημα με αγνώστους τα a , c .

Κλάσεις $[-)$	x_i
... - ...	
... - ...	11
... - ...	
17 - ...	



Κλάσεις $[-)$	x_i
$a - a + c$	
$a + c - a + 2c$	11
$a + 2c - a + 3c$	
$a + 3c - a + 4c$	

Οπότε προκύπτει

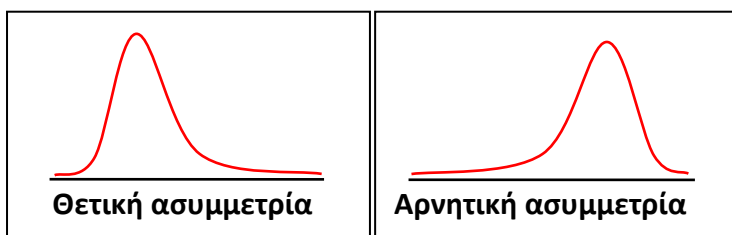
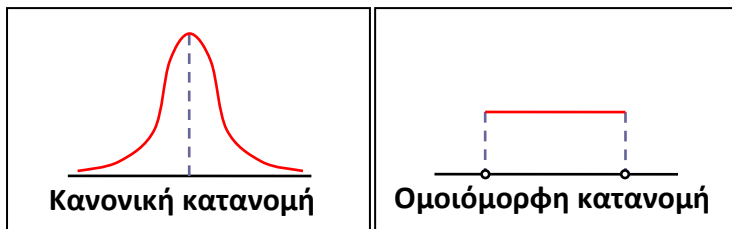
$$a + 3c = 17$$

$$11 = \frac{a + c + a + 2c}{2} \Rightarrow 2a + 3c = 22$$

Και λύνοντας το σύστημα προκύπτει $a = 5$ και $c = 4$

Ποιες χαρακτηριστικές κατανομές συχνοτήτων γνωρίζετε;

Όταν οι παρατηρήσεις “κατανέμονται” ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[a, b]$, η κατανομή λέγεται ομοιόμορφη. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική ασύμμετρία ή αρνητική ασύμμετρία. Η κατανομή με κωνοειδή μορφή λέγεται κανονική κατανομή.



$$\delta < \bar{X}$$

$$\delta > \bar{X}$$

1. Να συμπληρώσεις τον πίνακα

Κλάσεις	x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
[0, 2)				10	
[2, 4)			11		
[4, 6)	5				57,5
[6, 8)					
[8, 10)		8			
Σύνολο		$v=40$		100	

2. Σε μια εκλογική αναμέτρηση, η κατανομή των ψήφων που πήραν οι 4 συνδικαλιστικές παρατάξεις ενός κλάδου, είναι στον επόμενο πίνακα. Να συμπληρώσεις τον πίνακα και να κατασκευάσεις το ραβδόγραμμα συχνοτήτων $f_i \%$

Παρατάξεις	Ψήφοι v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
A	340			
B				62
Γ	544	16		
Δ				
Σύνολο		100		

3. Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i \%$
2					
3	3	0,15	4		
4				0,45	
5					20
6					
Σύνολο					

4. Οι απουσίες των μαθητών ενός μικρού επαρχιακού Γυμνασίου κατά τον μήνα Σεπτέμβριο ήταν:
2, 1, 0, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 0, 5, 6, 7, 4, 5, 3, 2, 7, 2, 1, 0, 1, 2, 2, 0

α) Να κατασκευάσεις πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Πόσοι μαθητές είχαν: (i) το πολύ 4 απουσίες;

(ii) 3 έως 6 απουσίες;

(iii) τουλάχιστον 2 απουσίες;

γ) Ποιό ποσοστό των μαθητών: (i) δεν απουσίασε καθόλου;

(ii) είχε 5 απουσίες;

(iii) είχε τουλάχιστον 2 απουσίες;

5. Ρωτήσαμε 30 νέους σε μια παραθαλάσσια κατασκήνωση πόσα μηνύματα έστειλαν από το κινητό τους από το πρωί. Πήραμε τις εξής απαντήσεις:

	5	3	4	3	5	6	4	5	5	5	5	3	4
4	5	4	5	4	4	6	4	3	5	3	4	4	6
3	4	4											

α) Κατασκευάστε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

β) Πόσοι από τους νέους έστειλαν:

(i) τουλάχιστον 4 μηνύματα;

(ii) το πολύ 5 μηνύματα;

(iii) ακριβώς 3 μηνύματα;

γ) Ποιό ποσοστό των νέων αυτών έστειλε:

(i) τουλάχιστον 4 μηνύματα;

(ii) 4 ή 6 μηνύματα;

6.

x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
10		7		
11		14		
12		46		
13		50		

α) Συμπληρώστε τον παραπάνω πίνακα.

β) ποιό ποσοστό των παρατηρήσεων είναι:

(i) τουλάχιστον 12;

(ii) τουλάχιστον 10;

7. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες

i)

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1						10
2	4	0,20	6			
3				0,60		
4					25	
5	2					
6						

ii)

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
18			20	
22	12	20		
26				62,5
30				
34				
	$v = 40$			

iii)

x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2				
2		8			
3	8			40	
4					

iv)

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
2			10	
6		15		
10				60
14				
18	15			
	$v = 50$			

v)

x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
105	18		
115			50
125		26	
135			
	50		

vi)

x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1			
4	12	3	50
7			

vii)

x_i	v_i	$f_i\%$
1	6	
2		5
3	8	
4	8	
5	10	25
6		

viii)

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1					0,1	
2		0,1		8		
3						50
4						

ix)

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$
1	1		
2			20
3		6	
4			
	10		

x)

$[-)$	O_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i v_i$
			5			
2 - 4		8				
4 - 6		7				
		10		20		
						54
		5				

xi)

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	

xii)

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
1	60			
2				68
3			180	
4				
	200			

8. Δίνεται ο διπλανός κατανομής συχνοτήτων μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

- Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος n .
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τη στήλη:

α) των f_i και $f_i \%$,

β) της αθροιστικής συχνότητας N_i ,

γ) των F_i και $F_i \%$.

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i
8	9
14	15
16	6

9. Για ένα δείγμα 20-οικογενειών μιας πολυκατοικίας έχουμε τα παρακάτω δεδομένα για τη μεταβλητή X :
« αριθμός δωματίων διαμερίσματος »

1 2 3 4 2 1 3 2 3 3 4 5 4 3 3 2 3 4 3 2

- Να κάνετε την διαλογή των τιμών της μεταβλητής.
- Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων για την μεταβλητή X και να τον συμπληρώσετε με τις στήλες των αθροιστικών συχνοτήτων N_i και των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων $F_i \%$.
- Να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν:
 - τουλάχιστον 3 δωμάτια, β) το πολύ 4 δωμάτια.
- Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν διαμερίσματα με τουλάχιστον 2 δωμάτια και το πολύ 4 δωμάτια.

10. Οι ομάδες αίματος που προέκυψαν από την εξέταση n ατόμων είναι οι επόμενες:

A	B	B	AB	O	O	O	B	AB	BB	B	O
A	ABAB	A	O	B	A						

- i) Να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος.
 ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
 iii) Ποιο είναι το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που έχει:

α) ομάδα αίματος A, β) ομάδα αίματος AB

- iv) Στο παραπάνω δείγμα ποια ομάδα αίματος είναι:

α) πιο συχνή, β) πιο σπάνια;

- v) Πως ονομάζεται η γραφική παράσταση με την οποία παρουσιάζουμε τα παραπάνω δεδομένα; Να σχεδιαστεί αυτή για τις συχνότητες v_i , $i = 1, \dots, 4$.

11. Οι αποστάσεις σε km 26 χωριών ενός νομού από το πλησιέστερο κέντρο υγείας είναι οι παρακάτω:

5	10	8	8	13	10	4	2	0	16	5	15	9
6	4	7	5	4	6	7	7	5	8	10	3	9

- i) Να κατασκευάσετε πίνακα ο οποίος να περιέχει τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες των παραπάνω παρατηρήσεων.
 ii) Πόσα χωριά του νομού απέχουν από το πλησιέστερο κέντρο υγείας ακριβώς 7 km;
 iii) Πόσα χωριά απέχουν από το πλησιέστερο κέντρο υγείας περισσότερο από 9 km;
 iv) Ποιο το ποσοστό των χωριών που απέχουν τουλάχιστον 5 km και το πολύ 10 km;

12. Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η παραγωγή (σε τόνους) μιας περιοχής της χώρας μας το 1997. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα.

Προϊόν	Παραγωγή v_i
Σιτάρι	282
Βαμβάκι	1078
Καπνός	112
Καλαμπόκι	21
Σύνολο:	1493

13. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα του βάρους των μαθητών μιας τάξης ενός δημοτικού σχολείου 15 μαθητές είχαν τα παρακάτω βάρη:

23 25 26 25 30 27 29 28 24 28 27 23 26 26 30

- Για τα δεδομένα αυτά να κατασκευάσετε πίνακα ο οποίος να περιέχει τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες.
- Πόσοι μαθητές έχουν βάρος μικρότερο από 25 κιλά;
- Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον 25 κιλά.

14. Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή του αριθμού των παιδιών 50 οικογενειών. Να βρείτε:

- τις συχνότητες των τιμών της μεταβλητής X : “αριθμός παιδιών στην οικογένεια”
- πόσες οικογένειες έχουν:
 - 1 τουλάχιστον παιδί
 - ακριβώς 6 παιδιά
 - πάνω από 3 παιδιά
 - το πολύ 6 παιδιά
 - από 3 ως 5 παιδιά.

Αριθμός Παιδιών x_i	Αθρ. συχν. N_i
0	5
1	15
2	30
3	38
4	43
5	47
6	50

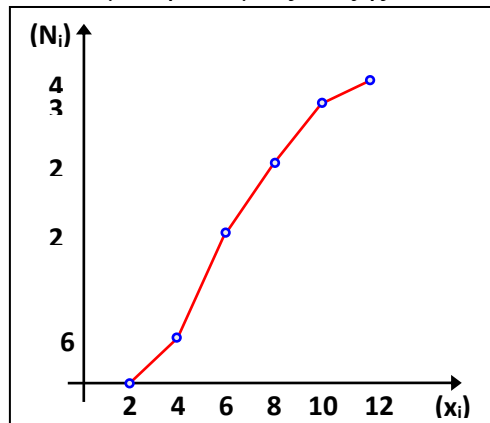
15. Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της διάρκειας ζωής 400 λαμπτήρων. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- ποιο είναι το κάτω όριο της 8^{ης} κλάσης;
- ποιο είναι το άνω όριο της 5^{ης} κλάσης;
- ποιο είναι το κέντρο της 7^{ης} κλάσης;
- ποιο είναι το πλάτος κάθε κλάσης;
- ποια είναι η συχνότητα της 4^{ης} κλάσης και τι εκφράζει ο αριθμός αυτός;
- ποια είναι η σχετική συχνότητα της 6^{ης} κλάσης;
- ποιο είναι το ποσοστό των λαμπτήρων με διάρκεια ζωής μικρότερη από 600 ώρες;
- ποιο είναι το ποσοστό των λαμπτήρων με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη ή ίση των 900 ωρών;
- ποιο είναι το ποσοστό των λαμπτήρων με διάρκεια ζωής τουλάχιστον 500 ώρες και το πολύ 1000 ώρες;

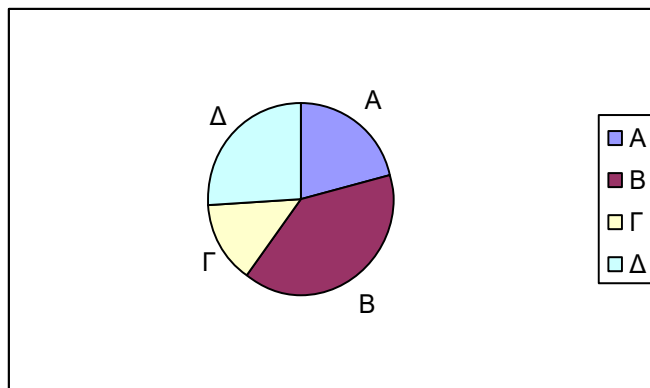
Διάρκεια ζωής λαμπτήρων σε ώρες	Συχνότητα n_i
[300, 400)	14
[400, 500)	46
[500, 600)	58
[600, 700)	76
[700, 800)	68
[800, 900)	62
[900, 1000)	48
[1000, 1100)	22
[1100, 1200)	6
Σύνολο:	400

16. Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων δείχνει τη βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα

- Πόσους μαθητές έχει η τάξη;
- Να γίνει ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.
- Να σχεδιαστεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.



17. Το κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τις προτιμήσεις 720 ατόμων σε



τέσσερα τηλεοπτικά κανάλια.

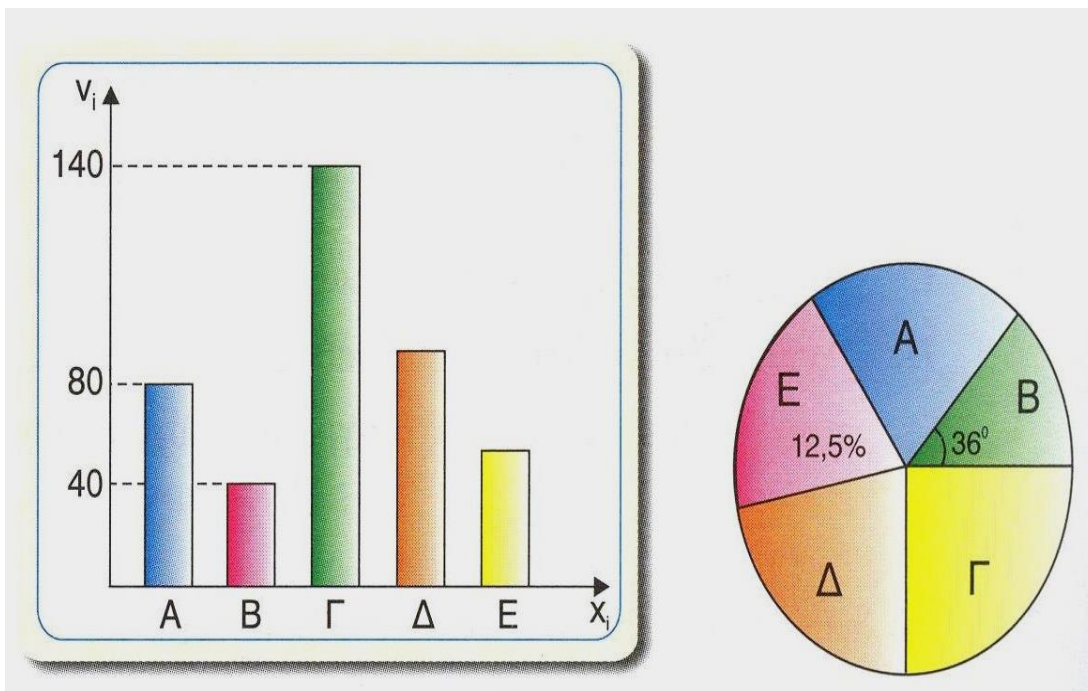
Αν $A:(\alpha + \beta)^\circ$, $B:(2\alpha + 42)^\circ$, $\Gamma:(3\beta - 15)^\circ$, $\Delta:\beta^\circ$ είναι οι γωνίες είναι οι γωνίες των κυκλικών τομέων του διαγράμματος και $\alpha + \beta = 81$ τότε:

- Να βρείτε τα α , β
- Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, καθώς και το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

18. Σ' ένα κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται οι παραβάσεις του κώδικα οδικής κυκλοφορίας. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους «οδηγούς που παραβιάζουν το κόκκινο» είναι 120° . Η γωνία του κυκλικού τομέα «υπερβολική ταχύτητα» είναι τα $\frac{2}{3}$ της προηγούμενης και η γωνία για το «παράνομο παρκάρισμα» είναι 60° . Τέλος στο κυκλικό τομέα «παράνομη προσπέραση» αντιστοιχούν 35 άτομα.

- Να βρείτε το σύνολο των παραβατών.
- Να κατασκευάσετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων.
- Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

19. Κατά την εκτύπωση μιας στατιστικής μελέτης δεν τυπώθηκαν κάποια στοιχεία. Εμφανίζονται μόνο τα 3 από τα 5 ορθογώνια του ραβδογράμματος συχνοτήτων, μια γωνία 36° και ένα ποσοστό 12,5%.



Να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν.

20. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.

A': Κατηγορία απόφοιτοι Γυμνασίου

B': Κατηγορία απόφοιτοι Λυκείου

Γ': Κατηγορία Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης

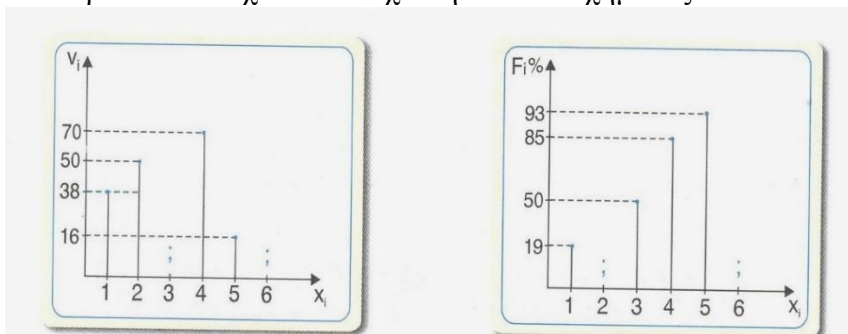
Δ': Κατηγορία Μεταπτυχιακού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μια μόνο από τις κατηγορίες αυτές.

Στην A' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' Κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της B' Κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' Κατηγορίας.

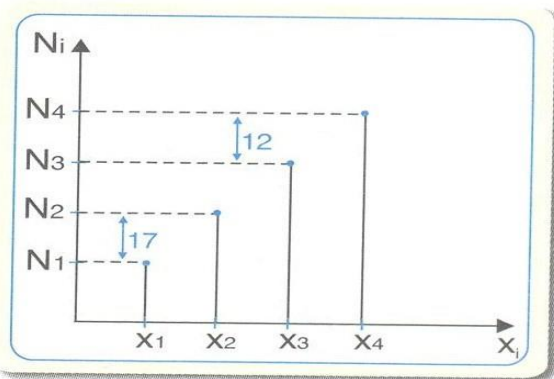
- Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.
- Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων

21. Έστω ότι σε μια μεταβλητή X με τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6 αντιστοιχούν τα διαγράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του σχήματος.



Να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν από τα διαγράμματα και να κατασκευάσετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

22. Στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων μιας μεταβλητής X ενός δείγματος με τιμές x_1, x_2, x_3, x_4 και μέγεθος $n=50$



Αν ισχύει $\frac{v_1}{v_4} = \frac{1}{4}$, να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

23. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα που ακολουθεί, να κατασκευάσετε χρονόγραμμα που να δείχνει την εξέλιξη του ποσοστού των υποψηφίων της Α΄ Δέσμης, των οποίων η επίδοση στα μαθήματα των μαθηματικών και της χημείας κατά τα έτη 1995, 1996, 1997, 1998 και 1999 ήταν κάτω από τη βάση.

Μάθημα	1995	1996	1997	1998	1999
Μαθηματικά	60,18	66,48	66,91	72,84	55,64
Χημεία	63,37	56,4	57,9	59,04	60,44

Τι συμπεράσματα βγαίνουν από το χρονόγραμμα;

24. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X .

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$F_i\%$
[1, 5)				20
[5, 9)				50
[9, 13)				85
[13, 17)				95
[17, 21)		2		
Σύνολο			1	

α) Να γράψετε στο τετράδιο σας συμπληρωμένο τον πίνακα.

β) Να γίνει το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και το αντίστοιχο πολύγωνο.

25. Στα σχολεία ενός δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνια υπηρεσίας	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[0, 5)	10
[5, 10)	15
[10,15)	12
[15, 20)	15
[20, 25)	18
[25, 30)	18
[30, 35)	12

ι) Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

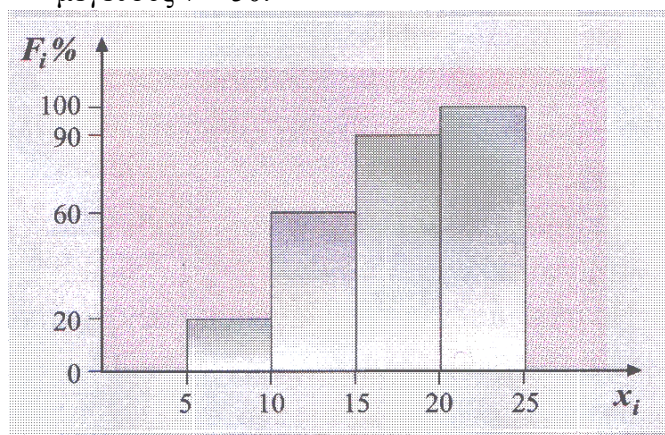
ιι) Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του δήμου να παραμένει ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

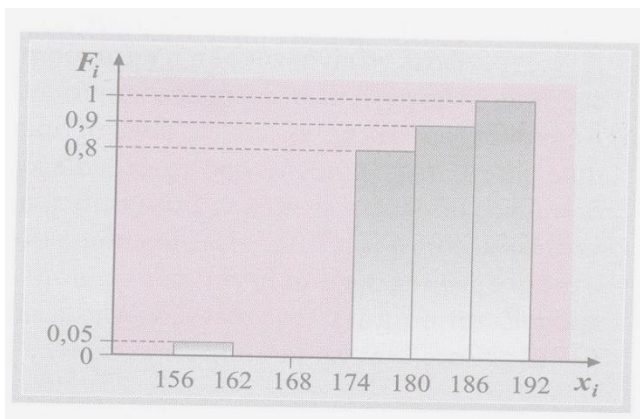
(Εξετάσεις 2000)

26. Δίνεται το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$ μιας κατανομής ενός δείγματος μεγέθους $n = 50$.



- Ποιό το πλάτος κάθε κλάσης;
- Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$ κάθε κλάσης.
- Να βρείτε τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες κάθε κλάσης.
- Ποια είναι η κεντρική τιμή χ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ κάθε κλάσης;
- Να κατασκευάσετε πίνακα με όλες τις παραπάνω πληροφορίες.
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

27. Από το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων να υπολογίσετε:

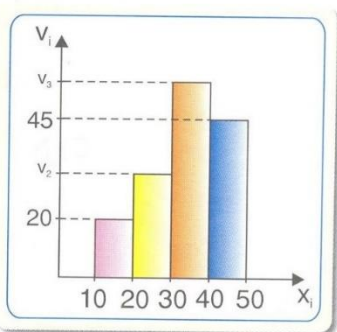


α) Τη σχετική συχνότητα της κλάσης $[162, 168)$, όταν το 25% των παρατηρήσεων έχει τιμή μικρότερη από 168,

β) Τη σχετική συχνότητα της κλάσης $[168, 174)$, όταν το 35% των παρατηρήσεων έχει τιμή μέχρι και 170.

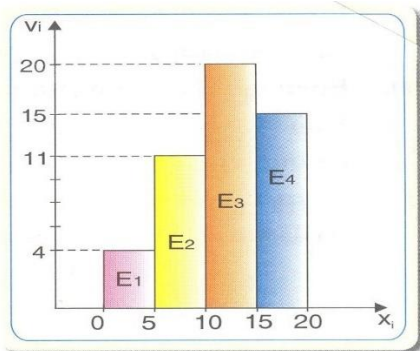
28. Οι επιδόσεις των μαθητών μιας τάξης της Γ' Λυκείου στο μάθημα της ιστορίας κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 100)$. Γνωρίζουμε ότι το 10% των μαθητών της τάξης, που είναι 2 μαθητές, έγραψε βαθμό κάτω από 25, ενώ 8 μαθητές έγραψαν κάτω από 50 και 4 μαθητές έγραψαν πάνω από 75.

- Να βρείτε το πλήθος των μαθητών της τάξης.
 - Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων θεωρώντας τέσσερις ισοπλατείς κλάσεις και να συμπληρώσετε τις στήλες $x_i, v_i, N_i, f_i, f_i\%, F_i\%, x_i v_i$.
- 29.** Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας αεροπορικής εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.
- Να παρασταθούν τα δεδομένα σε ένα πίνακα συχνοτήτων.
 - Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.
 - Να βρεθούν οι γωνίες των αντίστοιχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του προβλήματος.
- 30.** Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων όπου το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι συνολικά 150, το πλάτος της κλάσης $c = 10$. Επίσης, το άθροισμα των συχνοτήτων πρώτης και 3^{ης} κλάσης είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων 2^{ης} και 4^{ης} κλάσης.



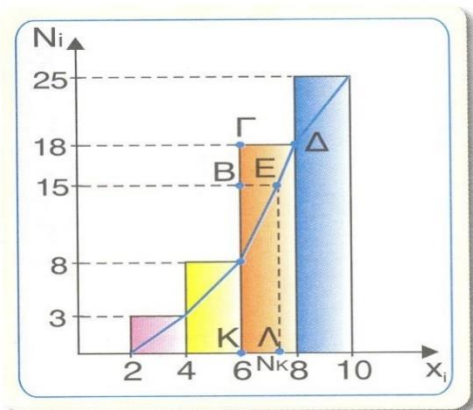
Να βρείτε τις συχνότητες των κλάσεων.

31. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων για τα αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος στο μάθημα της Στατιστικής.



- Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.
- Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν πάνω από τη βάση.
- Αν τα ορθογώνια του ιστογράμματος τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο, τότε το ορθογώνιο που θα σχηματιστεί τι εμβαδόν θα έχει;

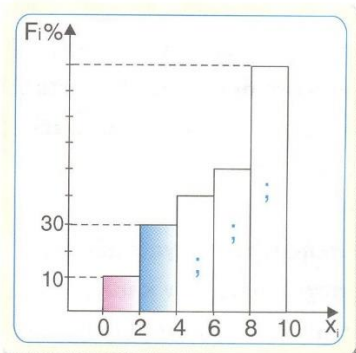
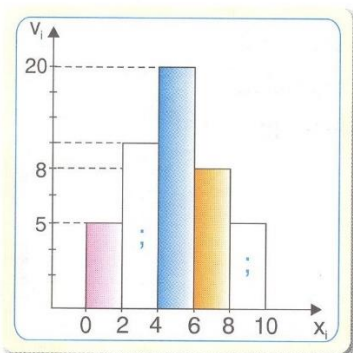
32. Στο παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων δίνονται οι ημέρες των διακοπών των υπαλλήλων μιας εταιρείας κατά το μήνα Ιούνιο. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.



Να βρεθεί:

- Το πλήθος των εργαζομένων.
- Οι συχνότητες των κλάσεων.
- Η τιμή x_k της μεταβλητής που έχει αθροιστική συχνότητα $N_k = 15$.

33. Δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της ίδιας μεταβλητής που αναφέρεται στους βαθμούς 50 φοιτητών στο μάθημα « Πραγματική ανάλυση ».



- Να κατασκευαστεί πίνακας αθροιστικών συχνοτήτων.
- Να κατασκευαστεί το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Πόσοι φοιτητές πέρασαν το μάθημα; (βάση το 5).

34. Η βαθμολογία 30 μαθητών σε ένα διαγώνισμα φαίνεται παρακάτω :

95	10	24	30	60	64
40	32	51	63	49	59
70	72	79	82	10	70
100	70	20	100	98	95
20	50	60	71	79	84

α) Ποιο είναι το εύρος του δείγματος ;

β) Σε πόσες κλάσεις θα ταξινομηθούν οι βαθμοί ;

γ) Να ομαδοποιήσετε τους βαθμούς των μαθητών και να βρείτε τη συχνότητα κάθε κλάσης

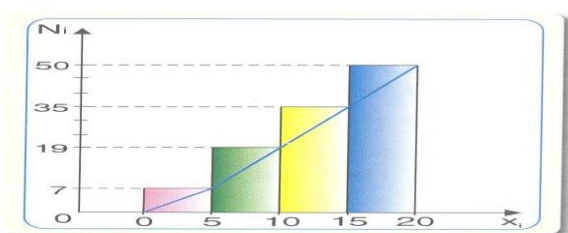
35. χρόνος που χρειάστηκαν οι οδηγοί της φόρμουλα 1 μιας ομάδας για να κάνουν ένα γύρο της πίστας είναι από 100 ως 200 δευτερόλεπτα χωρισμένοι σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

- ❖ Το πολύγωνο συχνοτήτων του δείγματος με μεταβλητή «χρόνος γύρου» έχει εμβαδόν 80.
- ❖ Η σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στη κλάση με κεντρική τιμή 190 είναι 0,1.
- ❖ Η σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στη κλάση [140,160] είναι 0,2
- ❖ Οι οδηγοί που έκαναν από 160 ως 180 δευτερόλεπτα είναι διπλάσιοι από τους οδηγούς που έκαναν από 100 ως 120 δευτερόλεπτα.
- ❖ 48 οδηγοί έκαναν χρόνο κάτω από 160 δευτερόλεπτα.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων n_i , N_i , f_i , $f_i\%$, F_i , $F_i\%$

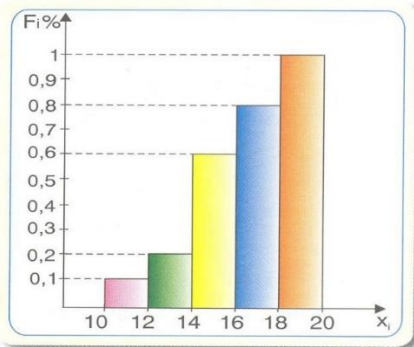
β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

36. Από τη βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα, προέκυψε το ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

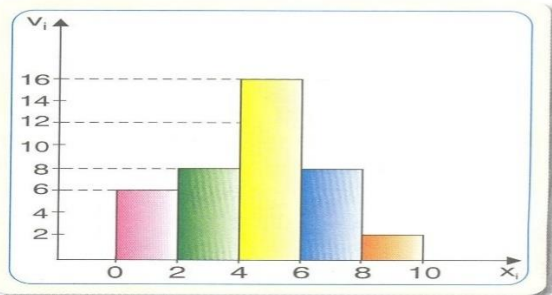


- i. Πόσοι είναι οι μαθητές της τάξης;
- ii. Πόσοι μαθητές έγραψαν κάτω από τη βάση;
- iii. Πόσοι μαθητές έγραψαν «Άριστα» (πάνω από 18);
- iv. Να σχεδιάσετε τον πίνακα συχνοτήτων n_i , N_i , $f_i\%$, $F_i\%$

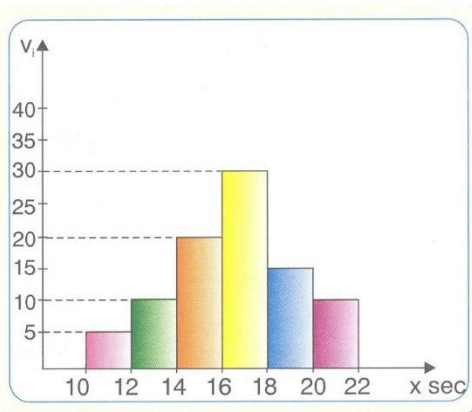
37. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων των βαθμών πρόσβασης 200 μαθητών της Γ' Λυκείου, μιας μικρής επαρχιακής πόλης.



- Na βρείτε το πλήθος των μαθητών κάθε κλάσης.
 - Na υπολογίσετε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό πρόσβασης πάνω από 17.
 - Na προσδιορίσετε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό πρόσβασης από 13 έως 16.
38. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα της βαθμολογίας φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος στο μάθημα της Στατιστικής.



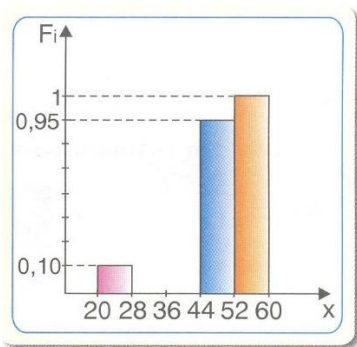
- Na βρείτε το μέγεθος του δείγματος.
 - Na εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών που « πέρασαν » το μάθημα (έγραψαν ≥ 5).
 - Πόσοι μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 7;
 - Αν τα ορθογώνια του ιστογράμματος τα τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο, το ορθογώνιο που θα προκύψει τι εμβαδόν θα έχει;
39. Το ιστόγραμμα αναφέρεται στη κατανομή συχνοτήτων του χρόνου σε sec που έκαναν μαθητές σε σχολικούς αγώνες των 100 m.



- Na κατασκευάσετε πίνακα με στήλες v_i , N_i , f_i , $f_i\%$, F_i , $F_i\%$
- Na βρείτε το ποσοστό των μαθητών με χρόνο μικρότερο των 16 sec.
- Na βρείτε το ποσοστό των μαθητών με χρόνο μεταξύ 12 και 18 sec.

iv. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών με χρόνο μικρότερο των 15 sec.

40. Στο ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων,



να υπολογίσετε:

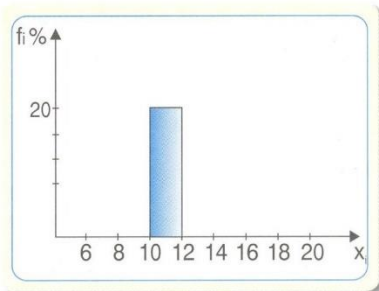
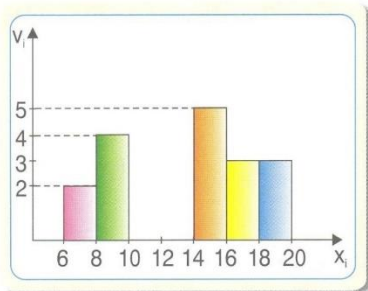
- Τη σχετική συχνότητα της κλάσης $[28, 36)$, όταν το 35% των παρατηρήσεων έχει τιμή μικρότερη από 36.
- Τη σχετική συχνότητα της κλάσης $[36, 44)$, όταν το 65% των παρατηρήσεων έχει τιμή μέχρι 42.

41. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η ημερήσια δαπάνη 100 μαθητών σε ευρώ:

Δαπάνη σε ευρώ	Μαθητές
$[5, 10)$	20
$[10, 15)$	30
$[15, 20)$	25
$[20, 25)$	10
$[25, 30)$	10
$[30, 35)$	5
Σύνολο	100

- Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων με τις στήλες $\chi_i, v_i, N_i, f_i\%, F_i\%$.
- Ποιο ποσοστό μαθητών ξοδεύει τουλάχιστον 20 ευρώ την ημέρα;
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων καθώς και το πολύγωνο συχνοτήτων.
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των αθροιστικών επί τοις εκατό συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο.
- Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο πολύγωνο συχνοτήτων και στον οριζόντιο άξονα.

42. Τα αποτελέσματα ενός τεστ στο μάθημα της Στατιστικής σε μια τάξη 25 μαθητών παρουσιάζονται στα παρακάτω ελλιπή ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.



- Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων απολύτων, σχετικών, αθροιστικών.
- Να συμπληρώσετε τους ιστούς που λείπουν και να κατασκευάσετε τα πολύγωνα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

43.

- Να συμπληρώσετε το πίνακα με τις στήλες των κεντρικών τιμών, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Κλάσεις	v_i
20 – 28	7
28 – 36	13
36 – 44	16
44 – 52	14

- Να κάνετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 38.

- Να βρείτε τη τιμή χ κάτω από την οποία βρίσκεται το 52% των παρατηρήσεων.

44. Οι επόμενοι αριθμοί παριστάνουν τις καθυστερήσεις (σε λεπτά) τριάντα δρομολογίων ενός λεωφορείου :

5	12	0	4	14	6	24	1	18	14
5	13	21	17	2	9	12	11	19	2
13	14	16	1	17	10	12	2	15	8

Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες, σχετικές συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες.

45. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα βάρη (σε γραμμάρια) 25 βρεφών σε ένα μαιευτήριο.

2.700	2.500	3.040	4.200	2.600
4.070	4.100	2.800	2.850	3.350
3.200	2.000	3.100	3.850	3.450
3.150	2.850	2.950	3.550	2.050
3.540	1.900	3.470	2.800	3.300

α) Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων .

46. Στο παρακάτω πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί οι χρόνοι καθυστέρησης 20 τρένων

Χρόνοι καθυστέρησης σε min $[-)$	Συχνότητα v_i
0 – 2	3
2 – 4	5
4 – 6	8
6 – 8	4
Σύνολο	$v = 20$

Να κατασκευαστεί :

α) το ιστόγραμμα συχνοτήτων ,

β) το πολύγωνο συχνοτήτων

47. Τρία δείγματα τα έχουμε ομαδοποιήσει σε κλάσεις ίσου πλάτους όπως φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

Να τους συμπληρώσετε :

i)

Κλάσεις $[-)$	x_i
... - ...	
... - ...	11
... - ...	
17 - ...	

ii)

Κλάσεις $[-)$	x_i
5 - ...	...
... - ...	...
... - 23	...
... - ...	...

iii)

Κλάσεις $[-)$	x_i
... - ...	6
... - ...	
... - ...	
... - ...	18

2.3 Μέτρα Θέσης – Μέτρα Διασποράς

Τι ονομάζουμε μέτρα θέσης και τι μέτρα διασποράς;

Για να ορίσουμε δηλαδή κάποια μέτρα (αριθμητικά μεγέθη), που να μας δίνουν

α) τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και

β) τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το “κέντρο” τους.

Τα πρώτα τα καλούμε μέτρα θέσης της κατανομής, ενώ τα δεύτερα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας.

Τι ονομάζουμε μέτρα ασυμμετρίας;

Ο προσδιορισμός κάποιων άλλων μέτρων, που καθορίζουν τη μορφή της κατανομής κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ή όχι ως προς την ευθεία $x = x_0$, για δεδομένο σημείο x_0 του άξονα $0x$. Τα μέτρα αυτά, που συνήθως εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς, καλούνται μέτρα ασυμμετρίας

Ποια είναι τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσης;

Ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή, η διάμεσος και η κορυφή ή επικρατούσα τιμή.

Πως ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων;

Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους

$$\text{των παρατηρήσεων. Δηλαδή } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού της μέσης τιμής.

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους n οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε η μέση τιμή

$$\text{συμβολίζεται με } \bar{x} \text{ και δίνεται από τη σχέση: } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i \text{ όπου } f_i \text{ οι σχετικές συχνότητες. Τον 2º τύπο τον}$$

χρησιμοποιούμε όταν τα δεδομένα είναι σε πίνακα.

Παραδείγματα

Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων

i)

1, 1, 2, 3, 4, 4, 6

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+3+4+4+6}{7} = 3$$

ii)

x_i	v_i	$x_i v_i$
1	2	2
2	3	6
3	5	15
4	4	16
Σύνολο	14	39

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{39}{14}$$

Προσοχή !!!!!: Λάθος που ενδεχομένως θα κάνεις είναι αντί να διαιρέσεις με το πλήθος που είναι 14 να διαιρέσεις με το 4.

iii)

Κλάσεις	x_i	f_i	$x_i f_i$
[0 , 2)	1	0.2	0.2
[2 , 4)	3	0.3	0.9
[4 , 6)	5	0.15	0.75
[6 , 8)	7	0.35	2.45
	Σύνολο	1	4.3

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^v x_i f_i = 4.3$$

Πως υπολογίζουμε τον σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_v$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_v$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_k w_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i w_i}{\sum_{i=1}^k w_i}.$$

Παράδειγμα

Η βαθμολογία ενός μαθητή σε 3 τεστ και ένα διαγώνισμα ήταν 55 , 70, 67 , 82 με αντίστοιχους συντελεστές βαρύτητας 0,2 , 0,4 , 0,8, 1. Να υπολογιστεί η μέση επίδοση του μαθητή.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i w_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = \frac{55*0,2+70*0,4+67*0,8+82*1}{0,2+0,4+0,8+1} = \frac{174,6}{2,4} = 72,75$$

Προσοχή !!!!!: Λάθος που ενδεχομένως θα κάνεις είναι αντί να διαιρέσεις με το πλήθος που είναι 2,4 να διαιρέσεις με το 4.

Τι ονομάζεται διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

Ποιο μέτρο θέσης επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις η μέση τιμή ή η διάμεσος.

Η μέση τιμή επηρεάζεται ενώ η διάμεσος δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

Σημαντική παρατήρηση

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Μεθοδολογίες εύρεσης της διαμέσου

- Όταν έχουμε «χύμα» δεδομένα τα διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά και παίρνουμε την μεσαία παρατήρηση αν n περιττός ή το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων όταν n άρτιος.
- Όταν έχουμε τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων εργαζόμαστε όπως και προηγουμένως χρησιμοποιώντας την στήλη των N_i .
- Όταν έχουμε τα δεδομένα σε πίνακα σχετικών συχνοτήτων τότε ψάχνουμε να βρούμε που $F_i = 50\%$.
1^η περίπτωση: Αν στην στήλη των F_i εμφανίζεται η τιμή 50% τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα αυτής και της επόμενης παρατήρησης.
2^η περίπτωση: Αν στην στήλη των F_i δεν εμφανίζεται η τιμή 50% τότε η διάμεσος είναι η παρατήρηση στην οποία το F_i παίρνει την τιμή 50%.
- Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα τότε πάντα ψάχνουμε να βρούμε που $F_i = 50\%$.
1^η περίπτωση: Αν στην στήλη των F_i εμφανίζεται η τιμή 50% τότε η διάμεσος είναι το άνω άκρο αυτής της κλάσης.
2^η περίπτωση: Αν στην στήλη των F_i δεν εμφανίζεται η τιμή 50% τότε η διάμεσος υπολογίζεται από την σχέση
$$\frac{\beta - \alpha}{\delta - \alpha} = \frac{f_i(\text{της κλάσης})}{50 - F_{i-1}}$$
 ή με δημιουργία δύο όμοιων τριγώνων στο ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

Παραδείγματα

Να βρεθεί η διάμεσος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις

α) 5, 6, 7, 3, 3, 2, 3, -1, 2, 12, 2, 3, 3

1^ο βήμα : Διατάσσω σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις

-1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 7, 12

2^ο βήμα :

$$\frac{n}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ Άρα } \delta = 7^{\text{η}} \text{ παρατήρηση} = 3$$

β) 4, -3, 6, 5, 6, 7, 18, -9

1^ο βήμα : Διατάσσω σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις

-9, -3, 4, 5, 6, 6, 7, 18

2^ο βήμα :

$$\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ Άρα } \delta = \frac{4\eta + 5\eta \text{ παρατήρηση}}{2} = \frac{5+6}{2} = 5,5$$

γ)

Παρατηρήσεις	Συχνότητα	N _i
0	20	20
1	25	45
2	15	60
3	20	80

$\frac{v}{2} = \frac{80}{2} = 40$ οπότε ψάχνουμε στην στήλη N_i την 40^η και την 41^η παρατήρηση όπου βλέπω ότι και οι δυο

είναι ο αριθμός 1 άρα $\delta = \frac{1+1}{2} = 1$

δ)

Παρατηρήσεις	Σχετική συχνότητα %	F _i %
2	20	20
3	30	50
4	40	90
5	10	100

Παρατηρούμε ότι F_i = 50% όταν x₂ = 3 άρα $\delta = \frac{3+4}{2} = 3,5$

ε)

Παρατηρήσεις	Σχετική συχνότητα %	F _i %
3	15	15
4	45	60
5	10	70
6	30	100

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει F_i που να γίνεται 50% αλλά παρατηρούμε ότι 15% πάμε στο 60% άρα και το 50% είναι στο F₂ οπότε $\delta = 4$

στ)

Κλάσεις [–)	f _i %	F _i %
5 – 10	15	15
10 – 15	35	50
15 – 20	30	80
20 – 25	20	100
Σύνολο		

Παρατηρούμε ότι F₂ = 50% άρα $\delta = 15$

ζ)

Κλάσεις [–)	v _i	f _i %	F _i %
5 – 10	30	15	15
10 – 15	30	15	30
15 – 20	100	50	80
20 – 25	40	20	100
Σύνολο	200		

Το 50% θα βρίσκεται στην κλάση 15 – 20 οπότε

$$\frac{20-15}{\delta-15} = \frac{50}{20} \Rightarrow \frac{5}{\delta-15} = \frac{5}{2} \Rightarrow \delta-15=2 \Rightarrow \delta=17$$

Τι ονομάζονται μέτρα διασποράς; Ποια είναι τα σπουδαιότερα;

Εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Τι ονομάζετε εύρος ή κύμανση;

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το εύρος ή κύμανση (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

Εύρος $R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{Μικρότερη παρατήρηση}$

Το εύρος είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς;

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που υπολογίζεται εύκολα δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.

Πως ορίζεται η διακύμανση ή διασπορά των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ μιας μεταβλητής X

Ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των x_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο διασποράς αυτό καλείται διακύμανση ή διασπορά και ορίζεται από τη σχέση

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\}$$

Πως ορίζεται η διακύμανση σε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i \right)^2}{n} \right\} \quad \text{όπου } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα}$$

των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Τι ονομάζεται τυπική απόκλιση;

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, λέγεται τυπική απόκλιση, συμβολίζεται με s και δίνεται από τη σχέση: $s = \sqrt{s^2}$.

Με τι εκφράζεται η τυπική απόκλιση;

Εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού.

Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας

Ορίζεται από το λόγο:

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|} \quad \text{ή} \quad cv = \frac{s}{|\bar{x}|} * 100\%$$

Πότε ένα δείγμα είναι ομοιογενές

Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%. Δηλαδή $CV \leq 10\%$.

Πως συγκρίνεται η ομοιογένεια δύο δειγμάτων A , B ;

Συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής των A , B . Μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει εκείνο το δείγμα με μικρότερο συντελεστή μεταβολής.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ (ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ)

- Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές.
- Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων
- Είναι εύκολα κατανοητή.
- Έχει μεγαλύτερη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
- Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

- Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές
- Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.
- Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η X είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος.
- Είναι δύσκολος ο υπολογισμός σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες κλάσεις.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ (ΔΙΑΜΕΣΟΣ)

- Είναι εύκολα κατανοητή
- Δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές.
- Υπολογίζεται και στη περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές.
- Ο υπολογισμός της είναι απλός.
- Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

- Δεν χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της.
- Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
- Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΡΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ (ΕΥΡΟΣ)

- Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό.
- Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

- Δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις ακραίες παρατηρήσεις.
- Δεν χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ (ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ)

- Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις.
- Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία.
- Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα διαστήματα $\bar{X} \pm s$, $\bar{X} \pm 2s$ και $\bar{X} \pm 3s$ αντίστοιχα.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

- Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης.
- Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ)

- Είναι καθαρός αριθμός.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ

- Δεν ενδείκνυται στη περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.

Ιδιότητα

Αν $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X τότε ο μέσος όρος των αποκλίσεων

των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$ είναι 0 δηλαδή
$$\frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v} = 0.$$

Απόδειξη

$$\frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v} = \frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Μεταβολές μέτρων θέσεις και διασποράς όταν μεταβάλλονται οι τιμές των παρατηρήσεων.

Έστω $Y = \alpha X + \beta$ η καινούργια τιμές των παρατηρήσεων τότε

- ✓ $\delta_y = \alpha \delta_x + \beta$
- ✓ $\bar{Y} = \alpha \bar{X} + \beta$
- ✓ $s_y^2 = \alpha^2 s_x^2$
- ✓ $s_y = |\alpha| s_x$

Παραδείγματα

1. Στο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 80$ και η μέση τιμή είναι $\bar{X} = 2,6$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\mu = 33$ και $\lambda = 10$.

β) Να υπολογιστεί η διάμεσος του δείγματος.

γ) Να υπολογιστεί η διακύμανση του δείγματος.

x_i	v_i
1	12
2	μ
3	λ
4	25
Σύνολο	

ΛΥΣΗ

α) Είναι $12 + \mu + \lambda + 25 = 80$ άρα $\mu + \lambda = 43$ (1)

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot 12 + 2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda + 4 \cdot 25}{80} = 2,6 \Leftrightarrow 2\mu + 3\lambda + 112 = 208$$

$$\Leftrightarrow 2\mu + 3\lambda = 96 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\mu = 33$ και $\lambda = 10$.

β) Για τη διάμεσο d ισχύει: $d = \frac{x_{40} + x_{41}}{2}$, όπου x_{40} και x_{41} είναι η 40^η και η 41^η παρατήρηση, αν το δείγμα τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά.

$$\text{Δηλαδή } d = \frac{x_{40} + x_{41}}{2} = 2.$$

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο
$$S^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{n} \right)$$

για το λόγο αυτό συμπληρώνουμε τον αρχικό πίνακα.

$$\text{Είναι } S^2 = \frac{1}{80} \cdot (634 - \frac{208^2}{80}) \Leftrightarrow S^2 = 1,165.$$

x_i	v_i	x_i^2	$x_i^2 \cdot v_i$	$x_i \cdot v_i$
1	12	1	12	12
2	33	4	132	66
3	10	9	90	30
4	25	16	400	100
Σύνολο	80		634	208

2. Δυο τραπεζικοί οργανισμοί Α και Β, που ο καθένας αποτελείται από 5 υποκαταστήματα, είχαν ετήσιες δαπάνες (σε εκατοντάδες ευρώ) για το οικονομικό έτος 1998 τα ποσά που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

Τραπεζικός Οργ. Α	250	200	300	350	300
Τραπεζικός Οργ. Β	5000	5150	5100	5050	5100

α) Να βρεθεί το εύρος, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τραπεζικών οργανισμών Α και Β.

β) Να βρεθεί το λάθος στον ισχυρισμό: «Εφόσον οι τραπεζικοί οργανισμοί Α και Β έχουν την ίδια τυπική απόκλιση, οι δαπάνες τους έχουν την ίδια μεταβλητότητα».

γ) Να υπολογιστούν οι συντελεστές μεταβολής CV_A και CV_B των οργανισμών Α και Β αντίστοιχα.

δ) Με τη βοήθεια των τιμών CV_A και CV_B , τι συμπέρασμα προκύπτει για τις τιμές της μεταβλητής «ετήσιες δαπάνες» για τους οργανισμούς Α και Β;

ΛΥΣΗ

α) Είναι $R_A = 350 - 200 = 150$ εκατοντάδες ευρώ και $R_B = 5150 - 5000 = 150$ εκατοντάδες ευρώ

$$\bar{X}_A = \frac{250 + 200 + 300 + 350 + 300}{5} = 280 \text{ εκατοντάδες ευρώ και}$$

$$\bar{X}_B = \frac{5000 + 5150 + 5100 + 5050 + 5100}{5} = 5080 \text{ εκατοντάδες ευρώ}$$

$$S_A^2 = \frac{(250 - 280)^2 + (200 - 280)^2 + \dots + (300 - 280)^2}{5} = 2600 \text{ και}$$

$$S_B^2 = \frac{(5000-5080)^2 + (5150-5080)^2 + \dots + (5100-5080)^2}{5} = 2600$$

άρα $S_A = S_B$

β) Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος, γιατί η σχέση των τιμών της μεταβλητής « ετήσιες δαπάνες » με την τιμή της απόκλισης είναι διαφορετική για τους δύο τραπεζικούς οργανισμούς, αφού η βαρύτητα που έχουν τα 5100 € στη μέση τιμή των ετήσιων δαπανών $\bar{X}_A = 28000\text{€}$ είναι διαφορετική από αυτή που έχουν στη μέση τιμή ετήσιων δαπανών $\bar{X}_B = 508000\text{€}$.

γ) Είναι $CV_A = \frac{S_A}{|\bar{X}_A|} = \frac{51}{280} \approx 18,21\%$

Και $CV_B = \frac{S_B}{|\bar{X}_B|} = \frac{51}{5080} \approx 1,00\%$

δ) Είναι $CV_B < CV_A$, οπότε η διασπορά των δαπανών σε σχέση με το μέσο όρο στον οργανισμό Α είναι πολύμεγαλύτερη από την αντίστοιχη διασπορά στον οργανισμό Β. Άρα υπάρχει μεγαλύτερη ομοιογένεια στις δαπάνες του οργανισμού Β.

3. Ένας πωλητής μεταχειρισμένων αυτοκινήτων αγόρασε 10 μηχανές που κόστισαν 5 3 2 6 7 2 3 9 3 4 χιλιάδες ευρώ αντίστοιχα.

α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος του κόστους των μηχανών.

β) Πώς μεταβάλλονται η μέση τιμή και η διάμεσος, αν ο πωλητής πουλήσει τα αυτοκίνητα αυξάνοντας την τιμή τους κατά 20% ;

γ) Αν ο κάθε αγοραστής πληρώσει επιπλέον 50 € για τα έξοδα μεταβίβασης, πώς διαμορφώνονται οι απαντήσεις του ερωτήματος (β) ;

ΛΥΣΗ

α) Τοποθετούμε τις τιμές των μηχανών σε αύξουσα σειρά

2 2 3 3 3 4 5 6 7 9

για τη μέση τιμή του κόστους των μηχανών έχουμε:

$$\bar{X} = \frac{2+2+3+3+3+\dots+9}{10} = 4,4 \text{ χιλιάδες ευρώ}$$

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10, δηλαδή άρτιος αριθμός, η διάμεσος θα ισούται με το

ημιάθροισμα της 5^{ης} και της 6^{ης} παρατήρησης. Επομένως, η διάμεσος θα είναι: $\delta = \frac{3+4}{2} = 4,4$ χιλιάδες ευρώ.

β) Αν προσθέσουμε σε κάθε τιμή 20% αυτής, τότε η μέση τιμή θα αυξηθεί κατά 20%. Δηλαδή η μέση αξία των μηχανών θα γίνει:

$$\bar{X}' = \bar{X} + \frac{20}{100} \bar{X} = 4,4 + 0,2 \cdot 4,4 = 5,28 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

Ανάλογα η νέα διάμεσος θα είναι η αρχική διάμεσος αυξημένη κατά 20% δηλαδή $\delta' = \delta + 20/100 \delta = 3,5 + 0,2 \cdot 3,5 = 4,2$ χιλιάδες ευρώ.

γ) Εάν προσθέσουμε επιπλέον 50 € για τα έξοδα μεταβίβασης, τότε η μέση τιμή και η διάμεσος θα αυξηθούν κατά 50 € ή 0,05 χιλιάδες ευρώ.

Άρα $\bar{X}'' = \bar{X}' + 0,05 = 5,28 + 0,05 = 5,33$ δηλαδή 5330 €

και $\delta'' = \delta' + 0,05 = 4,2 + 0,05 = 4,25$ δηλαδή 4250 €.

4. Σε μια εταιρεία ο μηνιαίος μισθός των εργατών είναι 750 € και ο μηνιαίος μισθός των στελεχών είναι 1100 €. Ο αριθμός των εργατών που απασχολεί η εταιρεία είναι τετραπλάσιος από τον αριθμό των στελεχών.

α) Να βρείτε το μέσο μισθό όλων των υπαλλήλων της εταιρείας (εργατών και στελεχών).

β) Θεωρούμε ότι η εταιρεία έχει v υπαλλήλους με μισθούς x_i , $i = 1, 2, \dots, v$. Η τυπική απόκλιση των μισθών είναι 140 € και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι $346 \cdot 105$ €

i) Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που απασχολεί η εταιρεία.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομοιογένεια στους μισθούς των υπαλλήλων.

iii) Η εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει κατά a ευρώ τους μισθούς των εργατών έτσι, ώστε ο νέος μισθός των υπαλλήλων να μην υπερβαίνει τα 900 €. Να βρείτε τη μέγιστη αύξηση που μπορεί να κάνει η εταιρεία.

ΛΥΣΗ

α) Έστω x ο αριθμός των στελεχών της εταιρείας. Τότε ο αριθμός των εργατών θα είναι $4x$ και το σύνολο των υπαλλήλων της εταιρείας θα είναι $5x$.

Αν $\bar{X}$ είναι ο μέσος μισθός, όλων των υπαλλήλων της εταιρείας, τότε:

$$\bar{X} = \frac{4x \cdot 750 + x \cdot 1100}{5x} = \frac{3000 + 1100}{5} = 820 \text{ €}$$

β)i) Είναι

$$S^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^v x_i)^2}{v} \right] = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{1}{v} (\sum_{i=1}^v x_i)^2 \quad \square$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v X_i^2}{v} - (\bar{X})^2 \Leftrightarrow s^2 + (\bar{X})^2 = \frac{\sum_{i=1}^v X_i^2}{v} \Leftrightarrow$$

$$19600 + 672400 = \frac{34600000}{v} \Leftrightarrow v = 50$$

Άρα η εταιρεία έχει 50 υπαλλήλους

ii) Είναι $CV = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{140}{820} \approx 0,17 = 17\% > 10\%$. Άρα δεν υπάρχει ομοιογένεια στους μισθούς των υπαλλήλων.

iii) Η εταιρεία, σύμφωνα με τα παραπάνω, απασχολεί 40 εργάτες και 10 στελέχη. Αν ο μισθός των εργατών αυξηθεί κατά a ευρώ, τότε ο νέος μισθός των υπαλλήλων θα είναι ίσος με

$$\bar{X}' = \frac{10 \cdot 1100 + 40(750 + \alpha)}{50} \Leftrightarrow \bar{X}' = 220 + 0,8(750 + \alpha) \Leftrightarrow \bar{X} = 820 + 0,8\alpha$$

Πρέπει:

$$\bar{X} \leq 900 \Leftrightarrow 820 + 0,8\alpha \leq 900 \Leftrightarrow \alpha \leq 100$$

αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του α είναι το 100, άρα η εταιρεία μπορεί να αυξήσει το μισθό του κάθε εργάτη μέχρι 100 €.

5. Μια αυτοκινητοβιομηχανία κατασκευάζει τέσσερα διαφορετικά μοντέλα αυτοκινήτων Α, Β, Γ και Δ με κόστος κατασκευής 5, 4, 3 και 2 χιλιάδες ευρώ αντίστοιχα και με συχνότητες 10%, 20%, 30% και 40% αντίστοιχα.

α) Να κατασκευάσετε ένα πίνακα συχνοτήτων για τη μεταβλητή X : « κόστος κατασκευής» που να περιέχει τις στήλες χ_i , χ_i^2 , $f_i\%$, f_i , $x_i f_i$, $x_i^2 f_i$, όπου $i = 1, 2, 3, 4$.

β) Να υπολογίσετε το μέσο κόστος κατασκευής.

γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

δ) Να εξετάσετε αν το κόστος κατασκευής των αυτοκινήτων είναι ομοιογενές.

ε) Έστω ότι αυξάνουμε κατά α χιλιάδες ευρώ το κόστος κατασκευής κάθε μοντέλου, ώστε το κόστος κατασκευής των τεσσάρων μοντέλων να είναι ομοιογενές. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α .

στ) Αν ελαττωθεί το κόστος κατασκευής κάθε μοντέλου κατά 10% και στη συνέχεια γίνει αύξηση κατασκευής κατά 0,3 χιλιάδες ευρώ ανά αυτοκίνητο, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής CV.

ΛΥΣΗ

α) Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Μοντέλα	Κόστος κατασκευής χ_i	χ_i^2	$f_i\%$	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
A	5	25	10	0,1	0,5	2,5
B	4	16	20	0,2	0,8	3,2
Γ	3	9	30	0,3	0,9	2,7
Δ	2	4	40	0,4	0,8	1,6
Σύνολο		54	100	1,0	3,0	10,0

β) Είναι:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 X_i \cdot \nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^4 X_i \cdot \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^4 X_i f_i = 3$$

γ) Θα υπολογίσουμε τη διασπορά s_x^2 και στη συνέχεια την τυπική απόκλιση. Είναι:

$$s_x^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^4 X_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^4 X_i v_i)^2}{v} \right] = \frac{\sum_{i=1}^4 X_i^2 v_i}{v} - \frac{(\sum_{i=1}^4 X_i v_i)^2}{v^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^4 X_i^2 \frac{v_i}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i v_i}{v} \right)^2 = \sum_{i=1}^4 X_i^2 f_i - (\bar{X})^2 = 10 - 3^2 = 1$$

δηλαδή $s_x^2 = 1$, οπότε $s_x = 1$.

δ) Είναι $CV = \frac{S_X}{\bar{X}} = \frac{1}{3} \approx 0,333 = 33,3\% > 10\%$, οπότε το κόστος κατασκευής δεν είναι ομοιογενές.

ε) Έστω Y_i οι νέες τιμές του κόστους κατασκευής των αυτοκινήτων. Τότε ισχύει $Y_i = x_i + a$, οπότε η μέση τιμή $\bar{Y}$ είναι ίση με

$$\bar{Y} = \bar{X} + a = 3 + a$$

η τυπική απόκλιση των τιμών Y_i δεν μεταβάλλεται, δηλαδή $s_x = s_y = 1$.

Εφόσον το κόστος κατασκευής είναι ομοιογενές, πρέπει

$$CV \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S_Y}{\bar{Y}} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{10}{3+a} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 7$$

άρα η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το a είναι το 7.

Επομένως το κόστος κατασκευής κάθε προϊόντος πρέπει να αυξηθεί κατά 7 χιλιάδες ευρώ, ώστε το κόστος κατασκευής των τεσσάρων μοντέλων να είναι ομοιογενές.

στ) Έστω Y_i το νέο κόστος κατασκευής του i μοντέλου, όπου $i = 1, 2, 3, 4$ είναι:

$$y_i = x_i - \frac{10}{100} x_i + 0,3 = \frac{90}{100} x_i + 0,3 = 0,9x_i + 0,3$$

άρα η νέα μέση τιμή $\bar{Y}$ είναι ίση με

$$\bar{Y} = 0,9\bar{X} + 0,3 = 0,9 \cdot 3 + 0,3 = 3$$

και η νέα τυπική απόκλιση

$$s_y = |0,9| \cdot s_x = 0,9 \cdot 1 = 0,9$$

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής CV είναι ίσος με

$$CV = \frac{S_Y}{\bar{Y}} = \frac{0,9}{3} = 0,3 = 30\%$$

6. Σε μια έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- α) Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και τη τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.
 β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
 γ) Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά;
 δ) Μια ημέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής CV.

ΛΥΣΗ

α) Αφού το 50 % των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά για να πάει από το σπίτι στο σχολείο, το υπόλοιπο 50% χρειάζεται λιγότερο από 12 λεπτά και έτσι μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι $\bar{X} = 12$.

Αφού το 16 % των μαθητών χρειάζεται χρόνο λιγότερο από 10 λεπτά και $16\% = 0,15\% + 2,35\% + 13,5\%$ συμπεραίνουμε ότι $\bar{X} - s = 10 \Leftrightarrow 12 - s = 10 \Leftrightarrow s = 2$

β) Είναι $CV = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{2}{12} \approx 0,167 = 16,7\% > 10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

γ) Σύμφωνα με το διάγραμμα, το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται από 14 έως 16 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι ίσο με 13,5%.

Αρα $\frac{13,5}{100} \cdot 4000 = 540$ μαθητές.

δ) Έστω s_y η νέα τυπική απόκλιση και $\bar{Y}$ η νέα μέση τιμή. Τότε

$$\bar{Y} = \bar{X} + 5 = 12 + 5 = 17 \text{ και } s_y = s = 2$$

άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής CV είναι ίσος με

$$CV_Y = \frac{S_Y}{\bar{Y}} = \frac{2}{17} \approx 0,118 = 11,8\%$$

Επομένως ο αρχικός συντελεστής μεταβολής μειώνεται κατά 4,9%.

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα δεδομένα:

χ_i	0	3	5	6	10
ν_i	4	6	3	5	2

Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

2. Να υπολογίσετε την μέση και την διάμεσο τιμή των αριθμών

- i) 8 7 6 -3 2 9 10 33
ii) 3 4 5 6 4 8 10 8 6
iii) 25 27 26 26 29 30 27 26 25 60 62
iv) -5, 2, 0, 3, -2, 1, 1

3. Η βαθμολογία 40 φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στον επόμενο πίνακα. Να βρεθεί ο μέσος βαθμός των φοιτητών καθώς και η διάμεσος .

Βαθμός	Πλήθος φοιτητών
4	5
5	8
6	16
7	6
8	5
Σύνολο	40

4. Η επίδοση ενός μαθητή σε 5 μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14

α) Να βρεθεί η μέση επίδοση .

β) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3 αντίστοιχα , ποια θα ήταν η μέση επίδοση ;

5. Στο διπλανό πίνακα φαίνεται ο αριθμός των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά τη διάρκεια ενός έτους . Να υπολογιστεί ο μέσος όρος των επισκέψεων, καθώς και η διάμεσος.

Επισκέψεις [–)	Πλήθος μαθητών
0 – 2	8
2 – 4	12
4 – 6	10
6 – 8	6
8 – 10	4

6. Το Υπουργείο παιδείας επεξεργάζεται ένα νέο σύστημα εισαγωγής στα ΑΕΙ. Σύμφωνα με αυτό , ο υποψήφιος εξετάζεται μόνο σε τέσσερα μαθήματα από τα οποία , το βασικό μάθημα έχει συντελεστή βαρύτητας 1,15 , ενώ καθένα από τα υπόλοιπα τρία μαθήματα έχει συντελεστή βαρύτητας 0,95. Αν κάποιος υποψήφιος έχει σταθμικό μέσο μεγαλύτερο από τον αριθμητικό μέσο , να αποδείξετε ότι ο βαθμός , στο βασικό μάθημα , είναι μεγαλύτερος από το μέσο βαθμό των τριών άλλων μαθημάτων.
7. Η επίδοση ενός μαθητή σε έξι μαθήματα είναι:

11 12 13 16 17 15

- i) Να βρείτε την μέση επίδοση του μαθητή.
- ii) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές βαρύτητας 3, 2, 1, 1, 1 και 3 αντίστοιχα, να βρείτε την μέση επίδοση. Σε ποια μαθήματα πρέπει να δώσει βαρύτητα;

8. Το μέσο ύψος 9 παικτών μιας ομάδας μπάσκετ είναι 207 cm.
- Για να «ψηλώσει» η ομάδα ο προπονητής πήρε, έναν ακόμη παίκτη ύψους 215cm. Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της ομάδας;
 - Πόσο ύψος πρέπει να έχει ένας ακόμη παίκτης που πρέπει να πάρει ο προπονητής, ώστε η ομάδα να ψηλώσει κατά 2 cm;
9. Η μέση επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών 17 μαθητών και 13 μαθητριών μιας τάξης είναι 16,8. Αν η μέση επίδοση των μαθητριών είναι 15,6 να βρείτε την μέση επίδοση των μαθητών.
10. Το μέσο ύψος των 65 μαθητών μιας τάξης είναι 175cm. Ποιο θα είναι αυτό αν:
- φύγει ένας μαθητής ύψους 185cm,
 - έρθει μια μαθήτρια με ύψος 175cm,
 - φύγει ένας μαθητής με ύψος 185cm και έρθει μία μαθήτρια με ύψος 175cm,
 - φύγουν δύο μαθητές με ύψος 190cm, ο καθένας, και έρθουν τρεις μαθήτριες με ύψος 180cm η κάθε μία;
11. Στον δίπλα πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητες τους.

Τιμές	Συχνότητα
x_i	n_i
5	3
6	5
7	12
8	9
9	
10	3

- Αν $\bar{x} = 7,5$ να συμπληρώσετε την 5^η συχνότητα.
 - Να υπολογίσετε τη διάμεσο.
12. Η μεταβλητή X παρουσίασε σε ένα δείγμα τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 7 με συχνότητες 15, 34, 27, 14, 16, 4 αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διάμεσος δ του δείγματος.
13. Εξετάστηκε ένα δείγμα 400 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα n_i	f_i	$f_i\%$	$n_i x_i$
0	135			
1	220			
2	8			
3	15			
4	12			
5	10			
Σύνολο	400			

- Να συμπληρώσετε το πίνακα
- Να παραστήσετε την κατανομή με διάγραμμα
- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

14. Στο πίνακα που ακολουθεί δίνεται η κατανομή των μηνιαίων μισθών των 160 υπαλλήλων μιας εταιρείας. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 1150 €, να βρεθούν οι συχνότητες v_2 , v_3 .

Μηνιαίος μισθός	Υπάλληλοι
[600, 800)	10
[800, 1000)	
[1000, 1200)	
[1200, 1400)	40
[1400, 1600)	20

15. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις εισπράξεις σε (δεκ. χιλ. €) που έγιναν από τους αντιπροσώπους μιας εταιρείας αυτοκινήτων κατά τη διάρκεια ενός έτους:

Κλάσεις	[1, 3)	[3, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)
Αριθμ. Αντιπρ.	14	6	12	10	8

α) Να συμπληρώσετε το πίνακα συχνοτήτων απολύτων και σχετικών

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{X}$ και τη διάμεσο δ .

16. Οι τιμές 1, 3, 5, 7 έχουν συχνότητες χ , 5, ψ και 15 αντίστοιχα. Αν η μέση τιμή είναι 3, 8 και το μέγεθος του δείγματος είναι 50, να βρείτε:

α) τις συχνότητες χ , ψ

β) τη διάμεσο δ του δείγματος.

17. Για τον έλεγχο κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων Α και Β μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το Α και σε πέντε για το Β. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανα 100 χιλ.) για το αυτοκίνητο Α ήταν 9, 6, 7, 9, 9, 8 ενώ η κατανάλωσης στις πέντε διαδρομές για το Β ήταν 8, 10, 7, 8, 12.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Α.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Β.

γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα, για να πείσει ένα υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Α και όχι το Β, ποιο μέτρο θέσης θα χρησιμοποιούσε;

Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Β και όχι το Α, ποιο μέτρο θέσης θα χρησιμοποιούσε;

18. Μια τάξη έχει 75 μαθητές. Η βαθμολογία τους στα Μαθηματικά κυμαίνεται από 10 – 20. Από αυτούς 39 μαθητές έχουν βαθμολογία κάτω από 14, 15 μαθητές κάτω από 12, 9 μαθητές πάνω από 18 και 21 μαθητές πάνω από 16.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή

γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο

δ) Να βρεθεί πάνω από ποια βαθμολογία βρίσκεται το 20% των μαθητών.

19. Στο πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς κελσίου

α) Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4 °C ένα βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C και να υπολογίσετε την διάμεσο θερμοκρασία.

β) Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 24,5 °C, να βρείτε πόσες μέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C.

Τιμές θερμοκρασίας χ_i	Πλήθος ημερών v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

20. Η βαθμολογία 50 μαθητών το μάθημα της Γεωμετρίας σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό ήταν η παρακάτω:

11 15 17 19 15 19 15 15 15 15 15 11 17 19 11 17 19 17 19 13 13 15
13 15 15 11 13 11 13 13 13 15 15 15 17 15 17 15 17 15 13 17 17 15
13 13 17 15 15 15

α) Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε 5 κλάσεις πλάτους 2.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων με τις στήλες των χ_i , v_i , N_i , $f_i\%$, $F_i\%$, $\chi_i v_i$.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο.

δ) Αν για την επόμενη φάση του διαγωνισμού προκρίνεται το 30% των μαθητών, ποια είναι η ελάχιστη βαθμολογία που πρέπει να γράψει ένας μαθητής ώστε να προκριθεί;

ε) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που έγραψαν μέχρι 15.

στ) Να υπολογίσετε τη μέση βαθμολογία των μαθητών.

ζ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και να υπολογίσετε τη διάμεση βαθμολογία.

21. Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής X των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες ευρώ) ενός δείγματος εργαζομένων μιας εταιρείας, ομαδοποιημένων σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

$A(20, 0)$ $B(40, 5)$ $\Gamma(60, 10)$ $\Delta(80, 20)$
 $E(100, 30)$ $Z(120, v_5)$ $H(140, 10)$ $\Theta(160, 0)$

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $\chi = 100$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και το οριζόντιο άξονα σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

α) Να αποδείξετε ότι $v_5 = 25$.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής X .

γ) Να κατασκευάσετε το πίνακα συχνοτήτων με στήλες χ_i , v_i , N_i , $f_i\%$, $F_i\%$, $\chi_i v_i$.

δ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

ε) Να βρείτε το ποσοστό των εργαζομένων που έχουν ετήσιο μισθό το πολύ 7200 €.

22. Τα ημερομίσθια (σε ευρώ) 15 εργαζομένων σε μια επιχείρηση είναι : 40, 37, 39, 41, 37, 36, 37, 34, 39, 41, 40, 41, 35, 38, 35

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο

β) Αν από τους παραπάνω εργαζόμενους εξαιρέσουμε τους 3 με τη μεγαλύτερη αμοιβή και στη θέση τους θεωρήσουμε 4 εργαζόμενους με ημερομίσθιο 34 ευρώ, να υπολογίσετε τη μεταβολή της μέσης τιμής και της διαμέσου.

23. Ένας μαθητής βαθμολογήθηκε σε τρία διαγωνίσματα με βαθμούς 18, 18 και 20. Τα δυο πρώτα διαγωνίσματα έχουν συντελεστές βαρύτητας 2 και 3 αντίστοιχα και ο μέσος βαθμός του μαθητή ήταν 19. Να βρείτε το συντελεστή βαρύτητας του τρίτου μαθήματος.

24. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

a.

x_i	-1	0	1	2
$f_i\%$	10	20	30	40

b.

x_i	0	2	4	5
$f_i\%$	10	40	20	30

c.

x_i	1	2	3	4
f_i	0,1	0,3	0,4	0,2

d.

x_i	2	4	6	8
f_i	0,15	0,35	0,4	0,1

25. Εξετάστηκε ένα δείγμα 400 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας :

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών n_i	f_i	$f_i\%$	$n_i x_i$
0	135			
1	220			
2	8			
3	15			
4	12			
5	10			
Σύνολο	400			

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα .

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο της κατανομής .

26. Η εξέταση ενός δείγματος 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης, ως προς τον αριθμό των ημερών που αυτοί απουσίασαν κατά το μήνα Δεκέμβριο του 2002, έδωσε τις εξής παρατηρήσεις : 0 , 1 , 1 , 3, 0, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2 , 0, 1 , 3, 0, 0, 0, 0, 0

Ημέρες απουσίας x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
0				
1				
2				
3				
4				
Σύνολο				

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία που λείπουν .

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων .

γ) Να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων .

27. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες τους .

Τιμές x_i	$f_i\%$
3	20
6	30
8	40
10	10

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{X}$.

β) Αν ισχύει $\sum_{i=1}^4 X_i v_i = 1.320$, να βρείτε τις συχνότητες των τιμών της μεταβλητής .

28. Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν , συντάχθηκε ο πίνακας :

Αριθμός βιβλίων x_i	Αριθμός μαθητών v_i
0	$\alpha+4$
1	$5\alpha+8$
2	4α
3	$\alpha-1$
4	2α
Σύνολο	50

Να βρεθεί η διάμεσος των παρατηρήσεων .

29. Ερευνήσαμε τα διαμερίσματα μιας πολυκατοικίας ως προς το πλήθος των δωματίων τους και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω ελλιπή πίνακα

Αριθμός δωματίων x_i	$f_i\%$
1	16
2	
3	
4	26
Σύνολο	100

Αν τα διαμερίσματα έχουν κατά μέσο όρο 2,63 δωμάτια , τότε :

α) να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες των τιμών $x_2=2$ και $x_3=3$,

β) να βρείτε τη διάμεσο .

30. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις συχνότητες των τιμών της μεταβλητής X . Αν για τη μέση τιμή των δεδομένων ισχύει $\bar{X} \leq 2$ και η διάμεσος είναι $\delta = 2$, να υπολογίσετε τη τέταρτη συχνότητα κ .

χ_i	ν_i
1	120
2	51
3	20
4	κ

31. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας 43 παρατηρήσεων με τιμές χ_i και οι αντίστοιχες συχνότητες τους ν_i .

χ_i	ν_i
1	10
2	κ
3	λ
4	μ
5	5
Σύνολο	43

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{X} = \frac{116}{43}$, η διάμεσος είναι $\delta = 3$ και ισχύει $\kappa > 10$. Να υπολογίσετε τα κ , λ , μ .

32. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την κατανομή της ωριαίας αμοιβής (σε ευρώ) των 80 εργατών μιας επιχείρησης.

Κλάσεις	ν_i
[0,2)	5
[2,4)	10
[4,6)	5
[6,8)	20
[8,10)	25
[10,12)	15

- Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων (απόλυτων, σχετικών και αθροιστικών)
- Ποιο το ποσοστό των εργατών των οποίων η αμοιβή είναι τουλάχιστον 8 €
- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της ωριαίας αμοιβής των εργατών.
- Να υπολογίσετε τη διάμεσο τιμή του δείγματος.
- Η εταιρεία θέλει να προσλάβει κάποιους ειδικευμένους εργάτες με ωριαία αμοιβή μεγαλύτερη ή ίση των 12 € και μικρότερη των 14 €. Πόσους τέτοιους εργάτες πρέπει να προσλάβει ώστε το μέσο ωρομίσθιο να διαμορφωθεί στα 8 €;

33. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι κεντρικές τιμές χ_i των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους a , καθώς και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i των κλάσεων. Αν οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στις κλάσεις, να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Κλάσεις	χ_i	v_i
$[...,...)$	14	3
$[...,...)$	χ_2	4
$[...,...)$	χ_3	3
$[...,...)$	20	10
Σύνολο		20

34. Μεταξύ 50 δρομέων 400 μέτρων οι 12 έκαναν χρόνο κάτω από 51 sec, οι 20 έκαναν χρόνο κάτω από 52 sec, οι 30 έκαναν χρόνο κάτω από 53 sec και οι 44 έκαναν χρόνο κάτω από 54 sec. Αν οι χρόνοι των αθλητών κυμάνθηκαν από 50 έως 55 sec, τότε :

- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με μορφή πίνακα ,
- να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο ,
- αν προκρίνεται το 16 % των αθλητών, τότε ποιο χρόνο το πολύ πρέπει να έχει ένας δρομέας ώστε να προκριθεί ;

35. Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις .

Δίνεται ότι :

- Η μικρότερη παρατήρηση είναι 50.
- Η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$.
- Η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης .
- Η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$.

- Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$.

- Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές	Σχετική συχνότητα
$[.,.)$		
$[.,.)$		
$[.,.)$		
$[.,.)$		
Σύνολο		

γ) Δίνεται ότι $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων , που είναι μικρότερες του 80 , είναι $\frac{200}{3}$.

36. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της ευθείας

$$\varepsilon : y = x + 1 \text{ των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή } \bar{y} = 31$$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ αυξάνεται κατά 3 , οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Να βρείτε το λ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 .

37. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \{0, 1, 2\}$ ώστε οι αριθμοί:

$$a - 2, \quad a + 1, \quad a^2 - 1, \quad a^3 + 1, \text{ να έχουν διάμεσο } \delta > 1.$$

38. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \{0, 1, 2\}$ ώστε η διάμεσος των αριθμών :

$$k, \quad 2k - 1, \quad k^2 - 1, \quad 3k, \text{ να είναι μικρότερη από τη μέση τιμή αυτών.}$$

39. Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 5. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 1, 6, 10. Να βρείτε τους άλλους δύο.

40. Αν η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου δ και οι τέσσερις από αυτούς είναι: 0, 1, 5, 21, να βρείτε τον άλλον αριθμό.

41. Στο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Να βρείτε το a αν η διάμεσος είναι 5.

x_i	v_i
2	7
3	8
4	9
6	a
9	8

42. Στο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες. Αν η διάμεσος είναι 6,5, να βρείτε τις τιμές των α, β .

x_i	$f_i \%$
2	10
3	α
6	25
7	30
10	β

43. Στο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνότητες. Αν η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή 5,5, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

x_i	$F_i \%$
2	10
3	30
5	α
7	β
9	γ

44. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων: 1, 4, 7, 12, α , 2α , $\alpha - 2$

είναι $\bar{x} = 6$. Να βρείτε

α) τον αριθμό α ,

β) τη διάμεσο των παραπάνω παρατηρήσεων.

45. Η μέση τιμή 6 διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 9. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς αυτούς.

β) τη διάμεσο των αριθμών αυτών

46. Οι αριθμοί: α , $\alpha^2 + 4$, α^2 , $2\alpha + 1$, $\alpha - 1$, έχουν μέση τιμή ίση με 4.

α) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού α ,

β) Για καθεμία από τις παραπάνω τιμές, να βρείτε τη διάμεσο.

47. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα μαθήματα είναι: α , 12, 16, 14. Η μέση τιμή των παραπάνω βαθμών είναι 15. Αν τα μαθήματα έχουν συντελεστές βαρύτητας 3, 2, 2, 1 αντίστοιχα, τότε ο σταθμικός μέσος των βαθμών είναι 14,5. Να βρείτε τους βαθμούς α και β των δύο πρώτων μαθημάτων.

48. Δίνεται ο πίνακας με τις τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X και τις αντίστοιχες συχνότητες. Αν η μέση τιμή του διπλανού δείγματος είναι 3, να βρείτε:

α) τον φυσικό αριθμό α ,

β) τη διάμεσο.

x_i	v_i
1	12
2	8
3	α
4	18
5	$\alpha + 2$
Σύνολο	

49. Ρωτήσαμε 25 άτομα πόσες τηλεοράσεις έχουν στο σπίτι τους. Οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στον πίνακα. Η μέση τιμή του αριθμού των τηλεοράσεων είναι 2,4. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β ,

β) τη διάμεσο του διπλανού δείγματος.

Αριθμός τηλεοράσεων x_i	Αριθμός ατόμων v_i
1	α
2	11
3	β
4	4
Σύνολο	25

50. Να υπολογίσετε τα μέτρα διασποράς των παρακάτω παρατηρήσεων :

- α) 1, 3, 4, 5, 7 β) 10, 7, 9, 6, 8

51. Δίνονται οι παρατηρήσεις $\chi - 4$, $\chi + 3$, $\chi + 4$, $\chi + 13$. Να βρεθεί η τυπική τους απόκλιση .

52. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις να βρεθεί το εύρος R του δείγματος, η διακύμανση, η τυπική απόκλιση και να εξεταστεί εάν το δείγμα είναι ομοιογενές:

- i) 2, 4, 3, 1, 5, 2, 6, 8

ii)

χ_i	v_i
2	3
4	5
6	4
8	3

iii)

Κλάσεις $[-)$	v_i
1 – 3	2
3 – 5	4
5 – 7	3
7 – 9	6

53. Δίνονται οι παρατηρήσεις 3, 9, 12, 15 και 21 μιας μεταβλητής X. Να υπολογιστεί η διασπορά των παρατηρήσεων αυτών, η τυπική απόκλιση και να εξεταστεί εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

54. Στο πίνακα φαίνονται οι απουσίες που έκαναν οι μαθητές μιας τάξης κατά τη διάρκεια μίας εβδομάδας . Να υπολογιστεί η διακύμανση της κατανομής αυτής και να εξεταστεί εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Απουσίες χ_i	Πλήθος μαθητών v_i
1	2
2	3
3	4
4	1
σύνολο	10

55. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων 6, 8, 9, 10 και 12.

56. Στο παρακάτω πίνακα φαίνονται τα φάουλ που έκαναν δυο παίκτες μπάσκετ σε τέσσερις αγώνες.

Παίκτης A	0	1	2	3
Παίκτης B	1	2	4	5

Να βρείτε ποιος παίκτης έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια στα φάουλ.

57. Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς 11, 3, 7, 5, 16, 14, 11, 10, 11, 12

Να βρείτε :

- α) τη διάμεσο
β) τη μέση τιμή
γ) το εύρος
δ) τη διακύμανση της παραπάνω βαθμολογίας .

58. Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14 , ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών .

β) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5.000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής CV.

59. Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) ενός δείγματος δεκα υποκαταστημάτων μιας εμπορικής επιχείρησης , κατά το μήνα Απρίλιο του 2004, ήταν :

50 , 15 , 15 , 20 , 15 , 30 , 15 , 20 , 50 , 50

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{X}$ των εισπράξεων .

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του .

Εισπράξ εις (σε χιλιάδες ευρώ) x_i	v_i	f_i	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})^2 \cdot v_i$
15					
20					
30					
50					
Σύνολο					

γ) θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος :

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot v_i$$

να υπολογίσετε :

ι) τη διακύμανση των εισπράξεων ,

ιι) την τυπική απόκλιση .

60. Αφού συμπληρώσετε το παρακάτω πίνακα να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές .

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1				10
2	4	6	20	
3				60
4			25	
5	2			
6				
Σύνολο				

61. Να βρείτε τα μέτρα διασποράς σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

a)

Κλάσεις $[-)$	$F_i\%$
0 – 2	10
2 – 4	60
4 – 6	100

β)

Κλάσεις $[-)$	N_i
0 – 2	4
2 – 4	9
4 – 6	11
6 – 8	16
8 – 10	20

62. Ο επόμενος πίνακας εμφανίζει τις μηνιαίες δαπάνες (σε δεκάδες €) 100 οικογενειών για έξοδα σούπερ μάρκετ .

Έξοδα $[-)$	Συχνότητα
0 – 10	3
10 – 20	12
20 – 30	15
30 – 40	6
40 – 50	30
50 – 60	10
60 – 70	9
70 – 80	15
Σύνολο	100

α) Να βρείτε το μέσο μηνιαίο κόστος .

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές ως προς τα έξοδα της κάθε οικογένειας .

63. Οι μηνιαίες αποδοχές 200 υπαλλήλων σε μια εταιρεία δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Αποδοχές σε εκατοντάδες ευρώ	v_i	$F_i\%$
6	K	
8		30
9	40	
10		
Σύνολο	200	

Η μέση τιμή των αποδοχών των 200 υπαλλήλων είναι 900 € .

α) Να βρείτε την τιμή του κ

β) Να βρείτε τη διασπορά S^2 του παραπάνω δείγματος .

γ) Πόσοι υπάλληλοι έχουν μηνιαίες αποδοχές από 800 € και πάνω

δ) Αν 60 από τους υπαλλήλους είναι γυναίκες με μέση τιμή μηνιαίων αποδοχών 800 €, να βρείτε τη μέση τιμή των μηνιαίων αποδοχών των ανδρών .

64. Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές:

5, 3, 3ω , 3, 2ω , 3, 3ω , ω με $\omega > 0$

α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{X} = 4$, να αποδείξετε ότι $\omega = 2$.

β) Για $\omega = 2$ να βρείτε το εύρος των τιμών , τη διάμεσο , τη τυπική απόκλιση.

65. Οι βαθμοί μιας ομάδας φοιτητών σε ένα εργαστήριο είναι οι εξής:

5, 8, 6, 9, 7, 8, 6, 7, 9, 5.

α) Ποια είναι η μέση τιμή των βαθμών αυτών;

β) Ποια είναι η διακύμανση των τιμών αυτών;

γ) Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές με 12 και στη συνέχεια προσθέσουμε σ' αυτές τον αριθμό 16, ποια θα είναι η μέση τιμή και η διακύμανση των τιμών που θα προκύψουν;

66. α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
Σύνολο	$v=50$	1	100				

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

γ) Να αποδείξετε ότι η διακύμανση είναι ίση με $s^2 = 0,49$. Δίνεται ότι

$$S^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i)^2}{v} \right)$$

67. Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δυο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν:

Πόλη Α: 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Πόλη Β: 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.

β) Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι $S_A = 2,66$ και $S_B = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δυο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στη πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Θ.Ε 2000)

68. Μια επιχείρηση έχει προς ενοικίαση αυτοκίνητα για τα οποία ο μέσος χρόνος λειτουργίας τους πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης είναι 12 μήνες με τυπική απόκλιση 3 μήνες.

α) Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Αν η επιχείρηση έχει φροντίσει (βελτιώνοντας τη συντήρηση κ.τ.λ) να μεγαλώσει το χρόνο λειτουργίας κάθε αυτοκινήτου πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης κατά c μήνες, να βρείτε την ελάχιστη τιμή c για την οποία το δείγμα θα ήταν ομοιογενές.

69. Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 μαθητών.

β) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής CV.

70. Αν σε ένα δείγμα μεγέθους $n = 50$ ισχύουν

$$\sum_{i=1}^{50} t_i = 2500 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{50} (t_i - \bar{X})^2 = 8450 \quad \text{να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομογενές.}$$

71. Η μέση τιμή και η διακύμανση των βαθμών που πήραν 6 μαθητές στην ιστορία είναι $\bar{X} = 12$ και

$$s^2 = 10 \quad \text{αντίστοιχα. Για τους βαθμούς των πέντε μαθητών ισχύει} \quad \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2 = 11. \quad \text{Να βρεθεί}$$

ο βαθμός του έκτου μαθητή, αν γνωρίζουμε ότι αυτός είναι ο μεγαλύτερος από το 10.

72. Στο παρακάτω πίνακα συχνοτήτων έχουν χαθεί δυο συχνότητες.

X_i	V_i
$x_1 = 1$	5
$x_2 = 2$	
$x_3 = 3$	3
$x_4 = 4$	2
$x_5 = 5$	

Γνωρίζουμε όμως ότι οι παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\bar{X} = \frac{7}{3}$ και τυπική απόκλιση $S = \frac{\sqrt{14}}{3}$. Να

βρείτε τις συχνότητες που έχουν χαθεί. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομογενές.

73. Σε ένα διαγωνισμό στατιστικής της Γ' Λυκείου ο μέσος όρος βαθμολογίας ήταν 9. Έτσι ο καθηγητής κάνει 2 σκέψεις:

A: Να προσθέσει το 2 στο βαθμό κάθε γραπτού.

B: Να αυξήσει τη βαθμολογία κάθε γραπτού κατά 20 %.

Μετα τις σκέψεις αυτές, προκύπτουν στον καθηγητή τα εξής ερωτήματα:

α) Πόσο θα επιδράσουν σε κάθε περίπτωση οι σκέψεις A, B στη μέση τιμή της βαθμολογίας και πως

στην τυπική απόκλιση της βαθμολογίας;

β) Προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές, ποια σκέψη πρέπει να ακολουθήσει ο καθηγητής;

74. Οι τιμές μιας μεταβλητής X είναι 0, 2, 5 με συχνότητες αντίστοιχα v_1, v_2, v_3 . Αν η μέση τιμή είναι 1,5

η τυπική απόκλιση $\sqrt{4,5}$ και $v_1 + v_2 + v_3 = 80$, να υπολογιστούν: οι συχνότητες v_1, v_2, v_3 και η διάμεσος.

75. Δίνονται οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ της μεταβλητής X με διακύμανση s^2 .

α) Να αποδείξετε ότι $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2$.

β) Αν $n = 20$ και $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 340s^2$, τότε να υπολογίσετε τη μέση τιμή ως συνάρτηση της τυπικής

απόκλισης s , αν $\bar{X} > 0$, και να βρείτε το συντελεστή μεταβολής.

76. Έστω ένα δείγμα 50 παρατηρήσεων με τιμές $x_1, x_2, \dots, x_{50}$, με συντελεστή μεταβολής $CV = 75\%$ και

$$\sum_{i=1}^{50} X_i^2 = 1250$$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{X}$ και τη τυπική απόκλιση s_X του παραπάνω δείγματος. β) Αν καθεμιά από τις παρατηρήσεις του παραπάνω δείγματος αυξηθεί κατά 25% και στη συνέχεια ελαττωθεί κατά 2, τότε

να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{Y}$ των νέων παρατηρήσεων και τη τυπική απόκλιση s_Y των νέων παρατηρήσεων.

77. Έστω ένα δείγμα θετικών παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_{2009}$ και η συνάρτηση f με παράγωγο

$$f'(x) = (x - s)(x - CV)$$

, όπου s, CV η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής αντίστοιχα του παραπάνω δείγματος με $s \neq 5$. Η μικρότερη παρατήρηση του παραπάνω δείγματος είναι μεγαλύτερη του 1 και η θέση τοπικού μεγίστου είναι ίση με το μισό της θέσης τοπικού ελαχίστου.

α) Να δείξετε ότι $\bar{x} = 2$

β) Εάν η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 1$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 3

ι) να δείξετε ότι $s = 4$

ιι) να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2009}, y_{2009})$ της εφαπτομένης (ε)

ιιι) να βρείτε τη μέση τιμή των τετραγώνων των τετμημένων των παραπάνων σημείων.

78. Αν $\bar{x} = 5$, να βρείτε την μέση τιμή των μεταβλητών:

i) $y = 2x$,

ii) $y = 3x - 2$

52. Αν $y = \frac{5x-2}{3}$ και $\bar{y} = 10$, να βρεθεί το $\bar{x}$.

53. Να βρείτε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση των δεδομένων του πίνακα.

Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	4	5	6
Οικογένειες	5	7	10	4	3	2	1

54. Αν η S^2 ν παρατηρήσεων είναι μηδέν, τι προκύπτει για τις παρατηρήσεις:

55. Έστω $\bar{x}$ και S^2 η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των k παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_k$. Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

(Οι γιλέγονται τυποποιημένες παρατηρήσεις).

56. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή των ηλικιών των 100 κατοίκων μιας μικρής κοινότητας.

Ηλικία	[1,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[50,60)	[60,70)	[70,80)
Συχνότητα	14	18	...	...	8	4	7

Αν η μέση ηλικία των κατοίκων είναι 33 χρόνια, να βρείτε:

- Τις συχνότητες που έχουν σβηστεί.
- Την τυπική απόκλιση των ηλικιών.

57. Αν $\bar{x}$ και S η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $x_1, \dots, x_n$, να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων:

$$\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma}, \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma}, \dots, \frac{\alpha x_n + \beta}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ σταθεροί και } \gamma \neq 0).$$

β) Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $y = \frac{x - 1000}{150}$, να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των δεδομένων του πίνακα:

x_i	850	1000	1150	1450	1750	1900	2200
v_i	5	7	11	12	3	2	6

58. α) Ένα πλήθος v_1 παρατηρήσεων έχουν μέση τιμή $\bar{x}_1$, ένα πλήθος v_2 παρατηρήσεων έχουν μέση τιμή $\bar{x}_2$ και ένα πλήθος v_3 παρατηρήσεων έχουν μέση τιμή $\bar{x}_3$. Να αποδείξετε ότι οι $v_1 + v_2 + v_3$ παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{v_1 \bar{x}_1 + v_2 \bar{x}_2 + v_3 \bar{x}_3}{v_1 + v_2 + v_3}$$

β) Οι 83 μαθητές της 1^{ης} τάξης ενός Λυκείου έχουν μέση ηλικία 15,4 χρόνια, οι 79 μαθητές της 2^{ης} τάξης έχουν μέση ηλικία 16,2 χρόνια και οι 75 μαθητές της 3^{ης} τάξης έχουν μέση ηλικία 17,3 χρόνια. Να βρείτε την μέση ηλικία όλων των μαθητών του Λυκείου αυτού.

59. α) Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακεραίων είναι 7,5. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

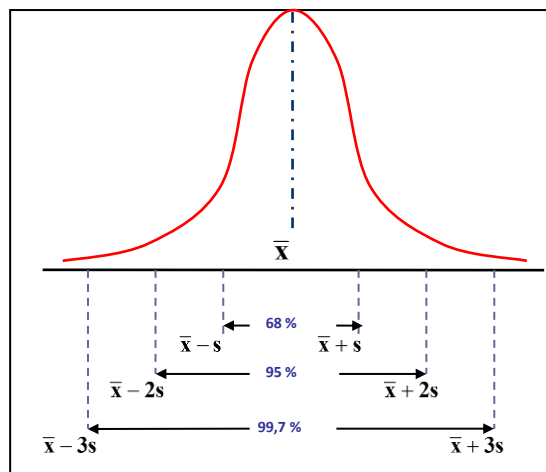
β) Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντα $\sqrt{2}$.

2.4 Κανονική Κατανομή

Τι γνωρίζετε για την κανονική κατανομή;

Αν η καμπύλη συχνοτήτων μιας συνεχούς μεταβλητής είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- i) Το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
- ii) Το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$.
- iii) Το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.
- iv) Το εύρος R είναι περίπου ίσο με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.



Παράδειγμα

Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε το πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο είναι 10 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρεθεί κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται :

- α) κάτω από 8 λεπτά β) πάνω από 14 λεπτά ,
 - γ) το πολύ 10 λεπτά , δ) από 6 έως 12 λεπτά ,
- για να πάνε στο σχολείο τους .

α) κάτω από 8 λεπτά $\rightarrow 0.15\% + 2.35\% + 13.5\% = 16\%$

β) πάνω από 14 λεπτά $\rightarrow 0.15\% + 2.35\% = 2.5\%$

γ) το πολύ 10 λεπτά $\rightarrow 50\%$

δ) από 6 έως 12 λεπτά $\rightarrow 13.5\% + 68\% = 81.5\%$

Ασκήσεις

1. Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή 30 και τυπική απόκλιση 5.

α) Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται στα διαστήματα:

- i) (25 , 35) ii) (30 , 35) iii) (20 , 40)
iv) (20 , 30) v) (15 , 45)

β) Είναι το δείγμα ομοιογενές ;

2. Οι θερμοκρασίες σε μια πόλη ήταν πάντα πάνω από 0°C και ακολουθούσαν την κανονική κατανομή με μέση θερμοκρασία 20°C και με συντελεστή μεταβολής 15 %. Να βρείτε το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία ήταν κάτω από 14°C .

3. Σε μια έρευνα που έγινε σχετικά με το ύψος των μισθών των υπαλλήλων μιας επιχείρησης , διαπιστώθηκε ότι το 50 % των μισθών υπερβαίνει τις 3.000 €, ενώ το 16% είναι χαμηλότερο από τις 2.500 €. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των μισθών είναι περίπου κανονική .

α) Να βρείτε το μέσο μισθό των υπαλλήλων και την τυπική απόκλιση του μισθού τους.

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Αν οι υπάλληλοι είναι 3.000 πόσοι από αυτούς παίρνουν μισθό από 3.500 € έως 4.000 € ;

4. Η ηλικία των κατοίκων μιας πόλης , που είναι μεταξύ 1 και 91 ετών ,ακολουθεί την κανονική κατανομή.

α) Να βρείτε τη μέση ηλικία του πληθυσμού καθώς και την τυπική της απόκλιση.

β) Αν ο πληθυσμός της πόλης είναι 8.000 , να εκτιμήσετε πόσοι κάτοικοι έχουν ηλικία από 31 έως 76 έτη .

5. Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί κανονική κατανομή , με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό .

α) Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο :

- i) από 4 έως 6 λεπτά , ii) από 3 έως 6 λεπτά.

β) Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών .

γ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής .

6. Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών μιας τάξης ενός λυκείου ακολουθούν κανονική κατανομή. Το 50% των μαθητών έγραψε τουλάχιστον 13, ενώ το 34% από 13 έως 14.

α) Να βρείτε τη διάμεσο δ , τη μέση τιμή $\bar{X}$ και την τυπική απόκλιση s των βαθμών των μαθητών .

β) Αν 95 μαθητές της τάξης έγραψαν από 11 έως 13 , τότε :

- i) να βρείτε το πλήθος των μαθητών της τάξης ,
ii) να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έγραψαν από 14 έως 15 στο διαγώνισμα αυτό .

7. Μια επιχείρηση αμείβει τους εργαζόμενούς της με σχεδόν κανονική κατανομή και οι μισοί περίπου έχουν ημερομίσθιο μεγαλύτερο των 45 €, ενώ το 16 % έχουν ημερομίσθιο μικρότερο των 40 €.

α) Να βρείτε το μέσο ημερομίσθιο των υπαλλήλων και την τυπική απόκλιση του ημερομισθίου τους .

β) Αν υπάρχουν 47 υπάλληλοι που αμείβονται με ημερομίσθιο που κυμαίνεται από 55 € έως 60 €, να βρείτε το σύνολο των υπαλλήλων της επιχείρησης .

γ) Πόσοι υπάλληλοι αμείβονται με περισσότερα από 50 € ημερομίσθιο ;

δ) Να βρείτε τη διάμεσο και το συντελεστή μεταβολής της κατανομής. Είναι ομοιογενές το δείγμα ;

ε) Λόγω κερδών η διεύθυνση αποφασίζει για το επόμενο έτος την αύξηση του ημερομισθίου για όλους τους υπαλλήλους κατά 20 %. Ποιο θα είναι το νέο μέσο ημερομίσθιο και ποια η τυπική απόκλιση ;

8. Σε ένα δείγμα κανονικής κατανομής συχνοτήτων το 49,85% των τιμών βρίσκεται στο διάστημα (30 , 39). Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

9. Ένα δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή. Το 81,5% των τιμών του δείγματος βρίσκονται στο διάστημα (17, 29), όπου τα άκρα του διαστήματος είναι κάποια από τις χαρακτηριστικές τιμές

$$\bar{X} - 3s, \bar{X} - 2s, \bar{X} - s, \bar{X} + s, \bar{X} + 2s, \bar{X} + 3s.$$

Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.

10. Η μέση βαθμολογία που πέτυχαν οι φοιτητές ενός τμήματος στις τελικές εξετάσεις ήταν 6, με τυπική απόκλιση 1. Αν υποθέσουμε ότι η βαθμολογία των φοιτητών ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή , να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των φοιτητών :

α) που δεν «πέρασαν» το μάθημα ,

β) που έγραψαν άνω του 8 ,

γ) που έγραψαν τουλάχιστον 6 ,

δ) που έγραψαν μεταξύ 4 και 7 .

11. Οι τιμές μιας μεταβλητής ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το εύρος των τιμών της μεταβλητής είναι μικρότερο από το 60% της μέσης τιμής τους, να αποδείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές .

12. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή . Στο διάστημα (20, 30) βρίσκεται περίπου το 13,5 % των παρατηρήσεων και είναι $s < \bar{X}$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

β) Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής CV.

γ) Να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος R.

δ) Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (20, 40);

ε) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 100, να βρείτε το άθροισμα $\sum_{i=1}^n x_i^2 v_i$.

στ) Αν όλες οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 10 , να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής CV .

13. Έστω οι θετικές παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ μιας μεταβλητής X της οποίας η κατανομή είναι περίπου κανονική. Αν $\bar{X}$ η μέση τιμή και $s > 0$ η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων x_i , τότε :

α) να αποδείξετε ότι ο συντελεστής μεταβολής των τιμών :

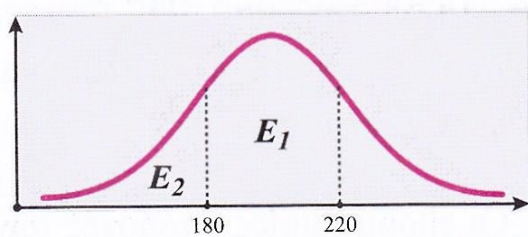
$$y_i = \frac{nx_i - (n+1)\bar{x}}{s} \text{ όπου } n > 0, \text{ δίνεται από τη σχέση : } CV_y = nCV_x.$$

β) αν για τις τιμές χι ισχύουν $R = 12$ και $CV_x = 0,20$, να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τιμών x_i και το συντελεστή μεταβολής των τιμών y_i .

14. Σε ένα δείγμα με κανονική καμπύλη συχνοτήτων, το 83,85% των τιμών βρίσκεται στο διάστημα (15 , 27). Να βρείτε :

- α) τη μέση τιμή, τη τυπική απόκλιση, το συντελεστή μεταβολής και το εύρος του δείγματος,
- β) το ποσοστό των τιμών που είναι πάνω από 27.

15. Μια βιομηχανία κατασκευάζει λαμπτήρες των οποίων ο μέσος χρόνος ζωής είναι 200 ώρες και η τυπική απόκλιση είναι 10 ώρες. Η κατανομή των λαμπτήρων ως προς τον χρόνο ζωής είναι σχεδόν κανονική και παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{E_1}{E_2}$ και $\frac{E_{ολ}}{E_2}$, όπου $E_{ολ}$ είναι το ολικό εμβαδόν που περικλείεται από την

καμπύλη συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα.

β) Αν το δείγμα αποτελείται από 10.000 λαμπτήρες, τότε να βρείτε :

- ι) πόσοι λαμπτήρες έχουν χρόνο ζωής τουλάχιστον 230 ώρες,
- ιι) πόσοι λαμπτήρες έχουν χρόνο ζωής άνω των 190 ωρών,
- ιιι) πόσοι λαμπτήρες έχουν χρόνο ζωής από 170 έως 210 ώρες.

16. Σε μια εταιρεία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι στο διοικητικό ή στο τεχνικό τμήμα. Από αυτούς, οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα εργάζονται στο διοικητικό τμήμα, ενώ 10 γυναίκες εργάζονται στο τεχνικό τμήμα. Η μέση ηλικία τόσο των ανδρών όσο και των γυναικών είναι 40 χρόνια.

α) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρεία. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

A: « Το άτομο είναι άνδρας που εργάζεται στο τεχνικό τμήμα »

B: « Το άτομο είναι άνδρας ή εργάζεται στο διοικητικό τμήμα »

β) Κάποιοι υπάλληλοι αποχώρησαν από την εταιρεία η οποία κάλυψε το κενό τους προσλαμβάνοντας για κάθε άτομο που αποχώρησε, ένα νεότερο κατά 4 χρόνια. Αν η νέα μέση ηλικία των υπαλλήλων της

εταιρείας είναι 39,6 χρόνια , να βρείτε πόσοι υπάλληλοι αποχώρησαν .

γ) Αν είναι γνωστό ότι η κατανομή των 100 αρχικών ηλικιών είναι περίπου κανονική κατανομή και το 2,5% των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια , να βρείτε πόσοι υπάλληλοι της εταιρείας έχουν ηλικία μικρότερη από 33 χρόνια .

δ) Αν ισχύει : $100 \sum_{i=1}^{100} x_i^2 v_i - \left(\sum_{i=1}^{100} x_i v_i \right)^2 = 250.000$ μετά τη πρόσληψη των νεότερων ατόμων και η

κατανομή εξακολουθεί να είναι κανονική , να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος της κατανομής των ηλικιών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το χρόνο (σε λεπτά) παραμονής 60 αυτοκινήτων σε ιδιωτικό πάρκινγκ.

Χρόνος σε λεπτά	Συχνότητα ν_i
$[0, 20)$	
$[20, 40)$	
$[40, 60)$	9
$[60, 80)$	12
$[80, 100)$	10
$[100, 120)$	13

Αν η συχνότητα της πέμπτης κλάσης είναι διπλάσια από αυτή της πρώτης κλάσης τότε η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. 5
- ☐ Β. 10
- ☐ Γ. 11
- ☐ Δ. 15
- ☐ Ε. 20

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Στα σχολεία ενός δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί.

Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνια υπηρεσίας x_i	Συχνότητα ν_i
$[0, 8)$	25
$[8, 16)$	27
$[16, 24)$	36
$[24, 30)$	12

Οι εκπαιδευτικοί που υπηρετούν τουλάχιστον 20 χρόνια είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ A. 48
- ☐ B. 25
- ☐ Γ. 27
- ☐ Δ. 30
- ☐ E. 48

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων σε κλάσεις ίσου πλάτους, αν R είναι το εύρος του δείγματος και κ ο αριθμός των κλάσεων, το πλάτος των κλάσεων c είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ A. $c = \frac{\kappa}{R}$
- ☐ B. $c = \frac{R}{\kappa}$
- ☐ Γ. $c = \kappa \cdot R$
- ☐ Δ. $c = R - \kappa$
- ☐ E. $c = \kappa - R$

4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Αν ένα δείγμα μεγέθους N χωρίστηκε σε κ κλάσεις ίσου πλάτους και οι $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X , τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, f_3, \dots, f_\kappa$ ισχύει η σχέση:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ A. $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\kappa = 100$
- ☐ B. $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\kappa = \kappa$
- ☐ Γ. $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\kappa = \kappa^2$
- ☐ Δ. $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\kappa = 100\kappa$

○ Ε. $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1$

5. Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται το άθροισμα του κατώτερου και του ανώτερου ορίου της κλάσης.
6. Η κεντρική τιμή κάθε κλάσης ισούται με το ημιάθροισμα των άκρων της.
7. Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο διασποράς.
8. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.
9. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο των ποιοτικών μεταβλητών.
10. Σε μια κανονική κατανομή το εύρος R των τιμών ισούται περίπου με $6 \cdot s$, όπου s η τυπική απόκλιση των τιμών.
11. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος τιμών εκφράζονται με τις ίδιες μονάδες.
12. Μεταξύ δυο δειγμάτων τιμών μιας μεταβλητής, αυτό που έχει μεγαλύτερο μέγεθος είναι περισσότερο αντιπροσωπευτικό.
13. Έστω ότι οι τιμές ενός δείγματος τιμών ακολουθούν την κανονική κατανομή. Να αντιστοιχίσετε τα διαστήματα τιμών της στήλης Α με τα ποσοστά των παρατηρήσεων που βρίσκονται στα διαστήματα αυτά της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(\bar{x}, \bar{x} + 2s)$	α) 81, 5%
2. $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$	β) 13, 5%
3. $(\bar{x} + s, \bar{x} + 2s)$	γ) 47, 5%
4. $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$	δ) 95%

Από δυο δείγματα τιμών μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει αυτό που έχει το μεγαλύτερο συντελεστή μεταβολής.

14. Η διάμεσος ενός δείγματος τιμών δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές του δείγματος.
15. Το εύρος ή κύμανση R ενός δείγματος τιμών είναι μέτρο θέσης.

16. Στην κανονική κατανομή η διάμεσος δ και η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι ίσες.

17. Αν x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ οι τιμές ενός δείγματος τιμών μεγέθους ν , ν_i , $i = 1, 2, \dots, k$ οι (απόλυτες) συχνότητες, f_i , $i = 1, 2, \dots, k$ οι σχετικές συχνότητες και $\bar{x}$ η μέση τιμή των τιμών, τότε η διασπορά s^2 δίνεται από τον τύπο:

Επιλογή μίας απάντησης.

☐ α. $s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \cdot f_i$

☐ β. $s^2 = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$

☐ γ. $s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$

☐ δ. $s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$

18. Η αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής x_i της μεταβλητής X εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από x_i .

19. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

20. Το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$) και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 100.

21. Σ' ένα δείγμα n παρατηρήσεων η διάμεσος επηρεάζεται από τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

22. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι πάντοτε ίση με μία από τις παρατηρήσεις του δείγματος.

23. Η μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή. Σε καθένα από τα διαστήματα της Α στήλης να αντιστοιχίσετε ένα από τα ποσοστά της στήλης Β.

Διάστημα

Ποσοστό

A. $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$	1. 2, 35%
B. $(\bar{x} + 2s, \bar{x} + 3s)$	2. 50%
Γ. $(\bar{x} - s, \bar{x} + 2s)$	3. 68%
	4. 95%
	5. 81, 5%

24. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή πάνω από x_i ισούται με $F_i\%$.
25. Στα ομαδοποιημένα δεδομένα η διαφορά των κεντρικών τιμών δύο διαδοχικών κλάσεων είναι ίση με το πλάτος των κλάσεων.
26. Όταν η κατανομή έχει αρνητική ασυμμετρία τότε ισχύει $\bar{x} > \delta$ (όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και δ η διάμεσος του δείγματος).
27. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός τότε η διάμεσος ισούται με κάποια παρατήρηση.
28. Ένα δείγμα είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής του υπερβαίνει το 10%.
29. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .
30. Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.
31. Σε μια κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\bar{x}$.
32. Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο διασποράς.
33. Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ είναι πάντοτε ίση με μία από τις παρατηρήσεις αυτές.
34. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

35. Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός.
36. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.
37. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του ανώτερου ορίου της τελευταίας κλάσης από το κατώτερο όριο της πρώτης κλάσης.
38. Σε ένα δείγμα τιμών μιας οποιασδήποτε μεταβλητής X , το εύρος R θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.
39. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι μη αρνητικός αριθμός.
40. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το 1.
41. Οι μέσες τιμές του ίδιου συνόλου δεδομένων που υπολογίζονται με ομαδοποίηση και χωρίς ομαδοποίηση είναι πάντα ίσες.
42. Η διάμεσος δ ενός δείγματος του οποίου οι παρατηρήσεις έχουν τοποθετηθεί με σειρά τάξης μεγέθους, είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.
43. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς μεταβλητές.
44. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας, δεν ξεπερνά το 10%.
45. Αν $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x και $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ επί μία σταθερά c , τότε $\bar{y} = c\bar{x}$ και $s_y = |c| s_x$.
46. Όταν προσθέσουμε μία σταθερά στις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξάνουν κατά τη σταθερά αυτή.
47. Η μέση τιμή των ν παρατηρήσεων ενός δείγματος, δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές.
48. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και σε ποιοτικές μεταβλητές.
49. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων ενός δείγματος, αντιστοιχεί πάντα σε κάποια παρατήρησή του.
50. Αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές των παρατηρήσεων ενός δείγματος με μία σταθερά c , τότε και η μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών, πολλαπλασιάζεται επί c .
51. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων, επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.
52. Για να προσδιορίσουμε τη διάμεσο δ , ενός πλήθους ν παρατηρήσεων:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. Διατάσσουμε προηγουμένως τις παρατηρήσεις σε φθίνουσα σειρά
- ☐ Β. Παίρνουμε τις παρατηρήσεις με τη σειρά που μας έχουν δοθεί.
- ☐ Γ. Διατάσσουμε προηγουμένως τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

53. Αν η διάμεσος δ , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά, είναι ίση με $\frac{x_{13}+x_{14}}{2}$, τότε το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι ίσο με:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. 25
- ☐ Β. 27
- ☐ Γ. 28
- ☐ Δ. 26

54. Έστω ένα δείγμα ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, μιας μεταβλητής X . Τότε το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i \bar{x}, \text{ είναι ίσο με:}$$

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. $\nu \bar{x}$
- ☐ Β. $\nu (\bar{x})^2$
- ☐ Γ. $\nu^2 \bar{x}$

55. Έστω ένα δείγμα ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$, μιας μεταβλητής X . Τότε η μέση τιμή $\bar{x}$, των παρατηρήσεων αυτών δίνεται από τον τύπο:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu^2}$

☐ B. $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$

☐ Γ. $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu}$

56. Η διάμεσος και η μέση τιμή ενός πλήθους ν παρατηρήσεων, δεν είναι μέτρα διασποράς.
57. Αν σε ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 40$ η μέση τιμή είναι 100, τότε το άθροισμα των τιμών όλων των παρατηρήσεων είναι ίσο με 4000 .
58. Η διάμεσος δ των παρατηρήσεων ενός δείγματος, που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, αντιστοιχεί πάντα σε κάποια παρατήρησή του δείγματος αυτού.
59. Δεν υπολογίζεται διάμεσος σε ποιοτικές μεταβλητές.
60. Αν προσθέσουμε στις τιμές των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ενός δείγματος μία σταθερά c , τότε και η μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών $\bar{x}$, μεταβάλλεται κατά c .
61. Αν $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , ενός δείγματος μεγέθους ν , με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$, τότε η μέση τιμή του δείγματος ορίζεται από τον τύπο:

Επιλογή μίας απάντησης.

☐ A. $\bar{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i$

☐ B. $\bar{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i$

☐ Γ. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i}$

62. Αν η διάμεσος δ , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά, είναι ίση με την τιμή της παρατήρησης x_{15} , τότε το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι ίσο με:

Επιλογή μίας απάντησης.

☐ A. 29

☐ B. 30

☐ Γ. 28

☐ Δ. 15

63. Έστω ένα δείγμα ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$, μιας μεταβλητής X , με μέση τιμή $\bar{x}$. Τότε το

άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} \nu t_i$, είναι ίσο με:

Επιλογή μίας απάντησης.

☐ A. $\nu \bar{x}$

☐ B. $\frac{\nu^2}{\bar{x}}$

☐ Γ. $\nu^2 \bar{x}$

64. Αν $w_1, w_2, \dots, w_\nu$, είναι οι συντελεστές βαρύτητας, ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως:

Επιλογή μίας απάντησης.

☐ A. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

☐ B. $\bar{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i$

☐ Γ. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i}$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

- A.1** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 6,5

- A.2** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α. $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$ όταν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

β. $P(A') = \dots\dots\dots$, όπου A' είναι το συμπληρωματικό του A.

Μονάδες 6

- B.** Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης με:

$$P(\omega_2) = \frac{1}{4}, \quad P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24} \quad \text{και} \quad P(\omega_5) = \frac{1}{2}$$

- α.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι:

$$A : \frac{1}{2} \quad B : \frac{1}{6} \quad \Gamma : \frac{1}{3} \quad \Delta : \frac{1}{12} \quad E : \frac{1}{8}$$

Μονάδες 6,5

- β.** Δίνονται τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ του δειγματικού χώρου Ω .

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A \cup B)$	1. $\frac{1}{4}$
β. $P(A \cap B)$	2. $\frac{7}{24}$
γ. $P(A')$	3. $\frac{23}{24}$
	4. $\frac{1}{6}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$,
όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0.
Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.

Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην Α' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας.

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

Μονάδες 20

β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν :

Πόλη Α: 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Πόλη Β: 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

- α. Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.

Μονάδες 9

- β. Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι $s_A = 2,66$ και $s_B = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

Μονάδες 6

- γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς.
Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

- Α.α) Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 8

- β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$, όπου c πραγματική σταθερά.

Μονάδες 4,5

- Β. α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β πρώτη παράγωγος
α. x^2+3	1-ημx
β. $x+\sin x$	$3x^2-8x$
γ. $x\eta\mu x$	$2x+3$
δ. x^3-4x^2	$\eta\mu x-x\sin x$
	$2x$

	$3x^2-4x$
	$\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

- β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \text{ είναι:}$$

A: e^x , B: $\frac{e^x - xe^x}{x^2}$,

Γ: $\frac{e^x x + e^x}{x^2}$, Δ: $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$,

E: $\frac{xe^x - e^x}{x}$

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

- A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητή ς							
X_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$X_i v_i$	X_i^2	$X_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100				

Μονάδες 16

- B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

- Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2=0,49$.

Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

- A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 8
- B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 8
- Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0- 5	10
5-10	15
10-15	12
15-20	15
20-25	18
25-30	18
30-35	12

- A. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας; Μονάδες 5
- B. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:
- α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 10
- β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε να αποδείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6,5

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$, $(g(x) \neq 0)$

δ. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, p ρητός, $x > 0$

ε. $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$

στ. $(\sigma \upsilon \nu x)' = \eta \mu x$

Μονάδες 6

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α Συνάρτηση f	Στήλη Β Πρώτη παράγωγος της f
α. $2\sqrt{x} + \ln 2$, $x > 0$	1. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$
β. $\frac{\eta \mu x}{x}$, $x \neq 0$	2. $3\sigma \upsilon \nu 3x$
γ. $\eta \mu 3x$	3. $\frac{\eta \mu x - x\sigma \upsilon \nu x}{x^2}$
	4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

	5. $\frac{\chi \sigma \upsilon \nu \chi - \eta \mu \chi}{\chi^2}$
	6. $-3\sigma \upsilon \nu 3\chi$

Μονάδες 7,5

- B.2.** Αν $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4$ και $f'(a) = 27$, όπου a πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$).

A. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι $24,4^{\circ}\text{C}$, τότε:

α. να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και πόσες 25°C

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος ως Ημερών v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

Μονάδες 10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 5

- B.** Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι $24,5^{\circ}\text{C}$, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και πόσες 25°C .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 10

β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

Μονάδες 7

γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος.

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι:

$$P(\Gamma - A) \leq \frac{3}{5}$$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.

Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

Μονάδες 7

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 8,5

A.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=$, $\leq$, $\geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \dots 1 - P(A)$

Μονάδες 2

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \dots P(A)$.

Μονάδες 2

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$.

β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$.

Μονάδες 4

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

α. $\frac{1}{4}$ β. $\frac{5}{12}$ γ. $\frac{2}{3}$ δ. $\frac{1}{6}$.

Μονάδες 2,5

B.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης A** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης B**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι $P(A)$

$= \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Στήλη A	Στήλη B
α. $P(A-B)$	1. $\frac{1}{20}$
β. $P((B-A)')$	2. $\frac{2}{15}$
γ. $P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

- A. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.
Μονάδες 8
- B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.
Μονάδες 8
- Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [–)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

- A. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.
Μονάδες 8
- B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.
Μονάδες 9
- Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.
α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.
Μονάδες 4
β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.
Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- A.** Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.
Μονάδες 6
- B.** Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
Μονάδες 6
- Γ.** Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.
Μονάδες 6
- Δ.** Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).
Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

- A1.** Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;
Μονάδες 4
- A2.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;
Μονάδες 4
- A3.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.
Μονάδες 10
- B1.** Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2, \dots, x_k$ με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.
Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{X}$;
Μονάδες 4
- B2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_n$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον μέσο ή μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{X} = \dots\dots\dots$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax(2-x)$, $a \in \mathbb{R}$

- A.** Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Μονάδες 10

- B.** Για $a=1/2$, να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.

Μονάδες 5

β. τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

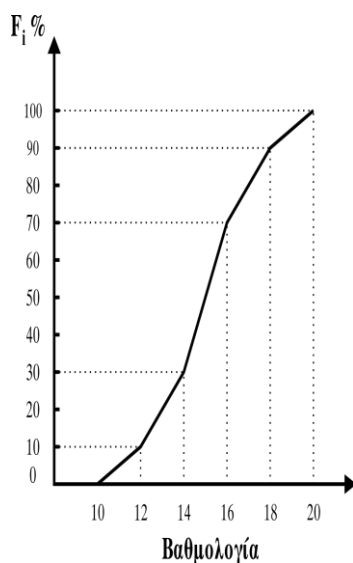
Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.

- α.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

- β.** Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5



- γ.** Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

- δ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

- A. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω .

$$\text{i) } P(k) = \frac{1}{k}, \quad \text{ii) } P(k) = \frac{1}{2^k}, \quad \text{iii) } P(k) = \frac{1}{2k}$$

Μονάδες 8

- B. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες:

1, 1, 7, k , k , 3, 3, 3

όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω , με πιθανότητα $P(k) = \frac{1}{2k}$. Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B του

δειγματικού χώρου Ω , όπου $A = \{k \in \Omega : \text{η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής } X \text{ είναι } M_0 = 3\}$ και $B = \{k \in \Omega : \text{η μέση τιμή } \bar{X} = 2,5\}$.

- α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα A και B .

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Μονάδες 9

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

- α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i , που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

- β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

- γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } 0 \leq f_i \leq 1 \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k$$

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1.$

Μονάδες 4

B.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

Μονάδες 8

B.2. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ ii) $P(\emptyset).$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}.$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5.$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:
 8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B).$

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x = \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 9

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$

γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(h)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.

Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

- α. το εύρος
- β. η διάμεσος
- γ. η διακύμανση
- δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x=3$, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 10

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν A', B' είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A και B αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. $P(A)$, $P(B)$

Μονάδες 6

β. $P(A \cup B)$

Μονάδες 6

γ. $P(A \cup B')$

Μονάδες 6

δ. $P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.

Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 6

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Μονάδες 6

δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 7

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.

Μονάδες 8

B. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος

Μονάδες 5

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος

Μονάδες 5

γ. άνδρας και φιλόλογος

Μονάδες 7

δ. άνδρας ή φιλόλογος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. $\mathbb{R}$ β. $(-1, 1)$ γ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ δ. $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

Μονάδες 6

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

Μονάδες 5

- γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Μονάδες 8

- δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

- Α. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$.

Μονάδες 7

- Β. α. Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;
β. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

Μονάδες 6

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

- α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 l_2$

- β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

- γ. Ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

- δ. Ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$.

- ε. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.

- στ. Το μέτρο διασποράς **εύρος** ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

Μονάδες 12

β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2 \text{ όπου } k \in \Omega.$$

Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$.

Μονάδες 8

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B , όπου
 A : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»
 B : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

Μονάδες 8

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ , όπου
 Γ : «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Ω ».

Μονάδες 9

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2004
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
 ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι ίση με 0.

Μονάδες 8

- B.** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.
- β.** Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.
- γ.** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα n_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη Ι** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη ΙΙ** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη Ι		Στήλη ΙΙ
α	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β	πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη **Στήλη ΙΙ** περισεύει μία σχέση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

- A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

- B.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα n_i σε χιλ. μονάδες	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i σε χιλ. μονάδες	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5 , 15)		60			

[15 , 25)					68
[25 , 35)				180	
[35 , 45)					
Σύνολο		200			

A. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

B. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα ($x_i, f_i\%$) και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για

$P(A \cap B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A \cap B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P[(A \cap B)']$

iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$.

Μονάδες 16

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $F(x)$, $f(x)$ και $g(x)$ με $F(x) = f(x) + g(x)$.

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 9

A.2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x , αν $\bar{X} > 0$ και πώς, αν $\bar{X} < 0$;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 2

β. Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Μονάδες 2

γ. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και n_i , χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i , N_i .

Μονάδες 2

δ. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.

Μονάδες 2

ε. Αν για τα ενδεχόμενα A , B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει $P(A) = P(B)$, τότε είναι πάντοτε $N(A) = N(B)$.

Μονάδες 2

στ. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα α και β , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι $y = 3x - 2$.

Μονάδες 10

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (f'(x) \cdot x^3)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(16, 22)$ με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{X} \pm 3s$, $\bar{X} \pm 2s$, $\bar{X} \pm s$, $\bar{X}$.

α. Να δείξετε ότι $\bar{X}=20$ και $s = 2$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{X} - \alpha \cdot s, \bar{X} + \alpha \cdot s)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{X} + 4)x + 9s.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ του Ω είναι

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$, $A - B = \{2, 6\}$ και

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ .

Μονάδες 3

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ .

Μονάδες 3

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Delta = \{\lambda \in \Omega / s^2 > 24\}$.

Μονάδες 10

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 10

B. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

Μονάδες 3

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

β. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 2

- γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

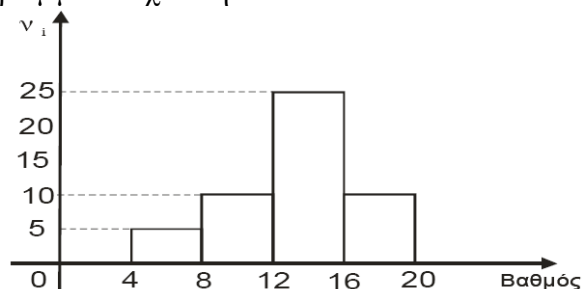
Μονάδες 2

- δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



- α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθ/γίας ()	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4 , 8)					
[8 , 12)					
[12 , 16)					
[16 , 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 11

- β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

- γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν:

- (i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$.

(ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$, όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}.$$

α. Να βρεθεί το k .

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A .

Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και yy' , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α)

έχουν μέση τιμή $\bar{X} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{Y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 9

B.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

B.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B.

Μονάδες 2

β. Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

γ. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

Μονάδες 2

δ. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 2

ε. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Τότε ισχύει: $P(\emptyset) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$.

Μονάδες 2**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x (ax^2 + \beta x + 9)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, e^2)$ είναι $y = -e^2 x + 3e^2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -6$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 13**ΘΕΜΑ 3ο**

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ 4ο**

Οι απουσίες των μαθητών της Γ' τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε

τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετική συχνότητα f_i
[... – ...)	...	0,1
[... – 7)	...	...
[... – ...)	...	0,3
[... – ...)	10	...
Σύνολο	////////////////////	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2^{ης} κλάσης f_2 , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.

Μονάδες 10

β. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{X}$.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s .

Δίνεται ο τύπος:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

Μονάδες 6

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 10

B.α. Πότε δύο ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Μονάδες 2

- β. Αν το ενδεχόμενο A' , συμπληρωματικό του ενδεχομένου A , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A .

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

Μονάδες 2

- δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών v_i
0	$\alpha + 4$
1	$5\alpha + 8$
2	4α
3	$\alpha - 1$
4	2α
Σύνολο	50

- α. Να υπολογίσετε την τιμή του α .

Μονάδες 3

Στη συνέχεια να βρείτε:

- β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

- γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

- δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

- α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

Μονάδες 7

- β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

Μονάδες 8

- γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$.

- α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $k=2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 5

- β. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{X} = f(1)$ και τυπική απόκλιση

$s = -\frac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

- (i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$.

Μονάδες 10

- (ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.

Μονάδες 8

- B. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 4

- β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

- i) $P(\Omega)$ ii) $P(\emptyset)$.

Μονάδες 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και ότι f_i , $i=1,2,\dots,\kappa$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν a_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε: $a_i=360f_i$, για $i=1,2,\dots,\kappa$.

Μονάδες 2

β. Αν f , g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Μονάδες 2

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = e^x \quad \text{όπου } x \text{ πραγματικός.}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \quad \text{όπου } x \neq 0.$$

$$f_3(x) = \eta \mu x \quad \text{όπου } x \text{ πραγματικός.}$$

$$f_4(x) = c, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός και } c \text{ σταθερά.}$$

Μονάδες 4**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Μονάδες 8

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

Μονάδες 12**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A , B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\},$$

$$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}.$$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(B \cup A')$.

Μονάδες 8

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

Μονάδες 7

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις: 7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3, όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{X} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$.

Μονάδες 8

β. Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, ναδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση

με $s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

γ. Έστω $y_1, y_2, \dots, y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2 . Αν $\bar{Y} = 9$ και $s_y = 2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2 .

Μονάδες 9

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8

Β.α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Μονάδες 2

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Μονάδες 2

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x)>0$ στο (a, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = x^v, \text{ όπου } v \text{ φυσικός}$$

$$f_2(x) = \ln x, \text{ όπου } x > 0$$

$$f_3(x) = \sqrt{x}, \text{ όπου } x > 0$$

$$f_4(x) = \sin x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός.}$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5).$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, \quad B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$

όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$.

Μονάδες 7

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$.

Μονάδες 8

γ. Για $x=-1$ ναδειχθεί ότι:

$$P(A)=\frac{5}{11}, P(B)=\frac{7}{11}, P(A \cap B)=\frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(A \cup B')$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A: 12, 18, t_3 , t_4 , ..., t_{25}

Δείγμα B: 16, 14, t_3 , t_4 , ..., t_{25} .

Δίνεται ότι $t_3+t_4+\dots+t_{25}=345$.

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{X}_A$ και $\bar{X}_B$ των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι $\bar{X}_A = \bar{X}_B = 15$.

Μονάδες 7

β. Αν S_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και S_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος B, να αποδείξετε

$$\text{ότι } S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25}.$$

Μονάδες 8

γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CVA = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CVB του δείγματος B.

Μονάδες 10

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Μονάδες 9

B. α. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_3$ μιας μεταβλητής X.

Μονάδες 3

β. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1 , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \ell_1^n$ (n θετικός ακέραιος).

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108° .

α. Να δείξετε ότι $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$, $f_3 = \frac{5}{10}$, $f_4 = \frac{3}{10}$.

Μονάδες 10

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

ι. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

- ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

Μονάδες 5

- iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}$.

- α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$.

Μονάδες 9

- β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$.

Μονάδες 8

- γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x .



- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$.

Μονάδες 6

- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

Μονάδες 7

- γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$.

Μονάδες 5

- δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$ και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c , όπου $c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c , έτσι ώστε να ισχύει $CV' = 2CV$.

Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$.

Μονάδες 8

B. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{X} > 0$ και πώς, αν $\bar{X} < 0$; **Μονάδες 7**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 2

δ. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$$

Μονάδες 2

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9**ΘΕΜΑ 3ο**

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

Μονάδες 5

- β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Μονάδες 5

- γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

Μονάδες 7

- δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι $\sqrt{11} \approx 3,3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα β και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

- α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

- β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο Β: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β». Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

Μονάδες 9

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και Β το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου, ισχύει

$$P(A')=1-P(A)$$

Μονάδες 9

B. α. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 3

β. Αν $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X σε δείγμα μεγέθους v , να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε για κάθε

φυσικό αριθμό v μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = v\ell^{v-1}$

Μονάδες 2

β. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = e^x$

Μονάδες 2

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Μονάδες 2

δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R , τότε ισχύει $s \approx 6R$

Μονάδες 2

ε. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Μονάδες 2**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 8$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$, να βρεθεί η τιμή του a

Μονάδες 5

β. Έστω $a=1$

i. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$

Μονάδες 10

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0
 $= 2$

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους $n=72$ με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4 , όπου $v_4 = 3v_3$. Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα 50° και 30° .

α. Να βρεθούν οι συχνότητες v_i , $i=1,2,3,4$

Μονάδες 10

β. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x_3 και x_4

Μονάδες 8

γ. Δίνεται ότι $x_1 < -7$, $x_2 = -7$, $x_3 = 3$, και $x_4 > 3$. Ναδειχθεί ότι

$$10R + 72\bar{x} = 52\delta$$

όπου R , $\bar{x}$, δ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = v^3x + \frac{4}{x^2}$, $x \in (0,1)$, όπου v ακέραιος αριθμός με $v > 2$

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 8

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 3v^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

Μονάδες 5

B. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, \dots, v\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, A για το οποίο ισχύει

$$v^3P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3v^2 \quad \text{και} \quad N(A) = v^2 - 9v - 8$$

όπου $P(A)$ είναι η πιθανότητα του A και $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων του A

α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{5}$

Μονάδες 7

β. Αν επιπλέον B είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η

πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$

Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΔΕΥΤΕΡΑ 18 ΜΑΪΟΥ 2009 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Μονάδες 10

B. Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n ($k \leq n$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1,2,\dots,k$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$$

Μονάδες 2

β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

Μονάδες 2

γ. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ισχύει ότι

$$(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$$

Μονάδες 2

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές $x_i, i=1,2,3,4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $v_i, i=1,2,3,4$. Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2=3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{X} = 4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $v_2=7$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

Μονάδες 9

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, x \in R$

α. Να δείξετε ότι $a=9$

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$, $x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 6

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(3)$ και $f(5)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, ναδειχθεί ότι

$$R = 3 + \ln \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

Μονάδες 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$$

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$, $x \in \Delta$.

Μονάδες 9

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο

ορισμού το A

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x) = \sin x_0$

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.

ε) Αν P(A) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \neq \emptyset$ τότε $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144°.
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $f_i \%$
ΣΥΝΟΛΟ				

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{X}$ της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14.

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_4\}$

Αν είναι $P(A-B) = \frac{v+1}{v+4}$ και $P(B-A) = \frac{v-1}{2v}$ όπου v θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A)$ και $P(B-A) = P(B)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $v=4$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A' \cup B'$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{X}$ και τυπική απόκλιση s .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{300s^2} (t - \bar{X})^3$ $t \in \mathbb{R}$ και $s \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{X}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$.

Μονάδες 6

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{X}$

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{X}, t_2 - \bar{X}, \dots, t_n - \bar{X}$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν

Μονάδες 7

A2. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ	ΣΥΧΝΟΤ ΗΤΑ
ΣΕ ΚΙΛΑ	x_i	v_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{X}$ και την τυπική απόκλιση S

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

$$\Deltaίνεται\ ο\ τύπος\ s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_o) = 0$, να

$$\text{αποδείξετε ότι: } P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B.

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι: $P(A \cup B) = P(A) \square P(B) \square P(A \cap B)$.

Μονάδες 7

- A2.** Έστω ένας δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Μονάδες 4

- A3.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

a) Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- b) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

- c) Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

- d) Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{X} - s, \bar{X} + s)$, όπου $\bar{X}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

- e) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $t \in (0, 24]$ ο χρόνος σε ώρες.

- B1.** Να αποδείξετε ότι για $t \in (0, 4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

- B2.** Να υπολογίσετε την τιμή του a, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C .

Μονάδες 6

- B3.** Για $a=3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C .

Μονάδες 5

- B4.** Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta(t)}{t^2 - 16}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$v_i \cdot x_i$
[25,)			x			
[,)			$x+20$			
[,)			$2x$			
[,)			x^2-6x			
ΣΥΝΟΛΟ						

C1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες $f_i\%$ $i=1,2,3,4$

Μονάδες 6

C2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι $\delta=50$ χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι $c=10$.

Μονάδες 8

C3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{X}$ των ηλικιών.

Μονάδες 6

C4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Εξακόσιοι απόφοιτοι Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα, υποβάλλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρείες Α και Β.

Δίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από αυτούς:

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{\lambda+1}{3\lambda}$, $\lambda \neq 0$
- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{3\lambda-1}{3\lambda}$, $\lambda \neq 0$
- να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμμία από τις δύο εταιρείες είναι $\frac{1}{\lambda-2}$, $\lambda \neq 2$

D1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=4$.

Μονάδες 8

D2. Από τους 600 αποφοίτους που υπέβαλαν αίτηση πρόσληψης στις εταιρείες Α και Β, η εταιρεία Α έκρινε κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους έκρινε η εταιρεία Β.

- a)** Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Α, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Β και πόσοι απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν;

Μονάδες 7

b) Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, από τις εταιρείες Α ή Β.

Μονάδες 6

D3. Στους αποφοίτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη δίνεται η δυνατότητα παρακολούθησης προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, θα βρουν εργασία.

Μονάδες 4

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ Α

B1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:

$$P(A-B)=P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 7

B2. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

B3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα $f_{\text{μιας παρατήρησης χιενός δείγματος}}$.

Μονάδες 4

B4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

f) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

g) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6 \bar{X}$.

Μονάδες 2

h) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Μονάδες 2

i) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

j) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

A. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$

Μονάδες 6

B. Να υπολογιστεί η τιμή του λ

Μονάδες 8

C. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

D. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

$A(8, 0)$ $B(10, 10)$ $\Gamma(12, 20)$ $\Delta(14, y_\Delta)$

$E(16, y_E)$ $Z(18, 10)$ $H(20, 0)$

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και E του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZH$.

A. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και E , αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 7

B. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 3

C. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

D. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

E. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})}$, $x \in \mathbb{R}$

A. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

B. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ΑΟΕΒ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

C. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})}$, $x \in \mathbb{R}$

a) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

Μονάδες 3

b) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1$, $i=1,2,3$ οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι $(c)' = 0$

Μονάδες 7

A2. Αν $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{X}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

A3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

a) Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X , τότε ισχύει: $0 \leq f_i \leq 1$

b) Αν x_i είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i

c) Αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

d) $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$

e) Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι ημέρες αδειας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ημερών (αδειας)	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
[6,...)		16			
[...,...)					
[...,...)					
[...,...)					
[...,26)					
Σύνολο					

Αν ισχύει ότι:

- στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδειας το τόξο α_1 του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι 72° , και
- $3f_2=3f_5=f_3=f_4$, τότε:

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.

Μονάδες 8

B2. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Μονάδες 4

Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{X}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

B3. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδειας και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{25,6} \cong 5,06$)

Μονάδες 8

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ δύο ενδεχόμενα του Ω , με $P(A) = \frac{1}{2}$. Αν είναι $P(\omega_1) = \alpha$, $P(\omega_2) = \beta$, με $26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0$, $P(\omega_3) = \gamma$ και η συνάρτηση $g(x) = P(\omega_4)x^3$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

C1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \frac{1}{5}$ και $\gamma = \frac{1}{10}$

Μονάδες 9

C2. Να βρείτε το $P(\omega_4)$, αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g , στο σημείο $(1, g(1))$, είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = x$, και στη συνέχεια να βρείτε το $P(\omega_5)$

Μονάδες 6

C3. Αν είναι $P(\omega_4) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_5) = \frac{1}{6}$ τότε να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων K , Λ , όπου:

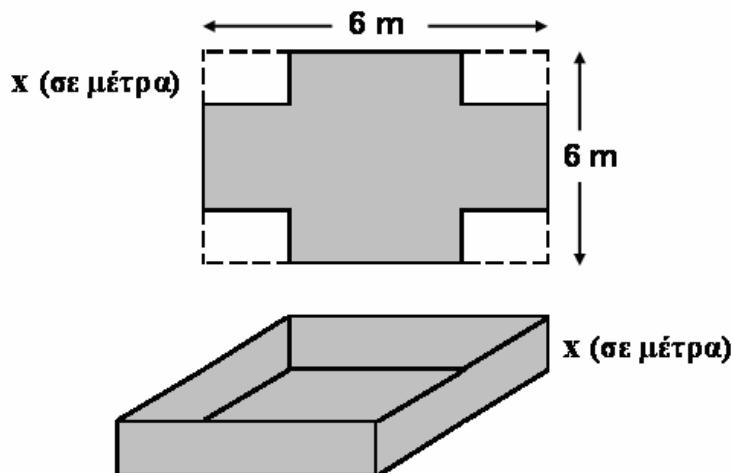
K : «ένα μόνο από τα A και B να πραγματοποιείται»

Λ : «να πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B ».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0 < x < 3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



D1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x) = 4x(3-x)^2, \quad 0 < x < 3$$

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου διαστάσεων α, β, γ είναι $V = \alpha\beta\gamma$).

Μονάδες 4

D2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Μονάδες 6

D3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x}$

Μονάδες 4

D4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = f(x_i)$, $i=1,2,3,4,5$ με $1=x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5=2$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y}=12$, τυπική απόκλιση $s_y=2$ και συντελεστή μεταβολής CV_y .

Να βρείτε το εύρος R των τιμών y_i , $i=1,2,3,4,5$. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ με $-12 < \alpha < 0$ ο οποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i , προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε

$$CV = 2CV_y + \frac{R}{12}$$

Μονάδες 6

D5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ και $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{P(A)}{P(B)} \leq \left(\frac{3 - P(B)}{3 - P(A)} \right)^2$$

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ Α

B1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

B2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A

Μονάδες 4

B3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{X} > 0$ και πώς, αν $\bar{X} < 0$;

Μονάδες 4

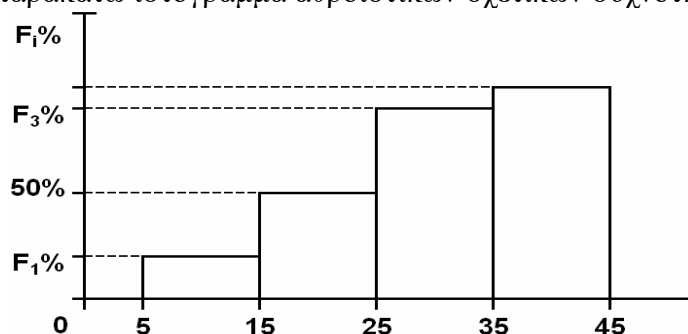
B4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- f) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).
- g) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$ (μονάδες 2).
- h) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2).
- i) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).
- j) $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45]$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



D1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

E2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5, \cdot)$		$\alpha + 4$			
$[\cdot, \cdot)$		$3\alpha - 6$			
$[\cdot, \cdot)$		$2\alpha + 8$			
$[\cdot, 45)$		$\alpha - 2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

E3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{X}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

C4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3n}{n^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{n+2}{n^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{n+1}{n^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

E1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

F2. Να αποδείξετε ότι $n = 3$

Μονάδες 6

F3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

D4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x}$, $x > 0$

G1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

G2. Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKML$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

G3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 10$ της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{X} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

E5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

C1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 7

C2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

C3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

C4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

k) $\lim_{x \rightarrow x_0} \text{συν} x = \text{συν} x_0.$

(μονάδες 2)

l) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

(μονάδες 2)

m) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.
(μονάδες 2)

n) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

(μονάδες 2)

ο) Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \emptyset$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x - 3)$, $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = x_1 \text{ και } P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

F1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

H2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$.

Μονάδες 6

H3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

Μονάδες 5

και

B4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' \cap B') \leq \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n ως προς μία ποσοτική μεταβλητή X και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους c , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
$[a, \cdot)$				λ
$[\cdot, \cdot)$				$3\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:
 $5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

G1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$

Μονάδες 8

I2. Να αποδείξετε ότι $f_1 = 10\%$, $f_2 = 30\%$, $f_3 = 20\%$, $f_4 = 30\%$ και $f_5 = 10\%$

Μονάδες 5

I3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι $a = 10$ και $c = 4$

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

C4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \frac{1}{3}$, όπου $i = 1, 2$

και $P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$

J1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A , B και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$A = \{\omega \in \Omega / f'(\omega) \leq 0\}$, $B = \{\omega \in \Omega / f(\omega) > 1\}$ και

$\Gamma = \{\omega \in \Omega / x^2 + \omega x \geq -\frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$ και $P(A-B)$

(μονάδες 8)

Μονάδες 16

J2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f , η οποία σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 45°

Μονάδες 4

J3. Αν $M_\kappa(\omega_\kappa, y_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y = x + 1$ με

$$2\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa} \text{ και } R_{y_\kappa} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τα ω_3 και ω_4 του δειγματικού χώρου Ω , όπου

δ_{ω_κ} : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_κ ,

δ_{y_k} : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων M_k και

R_{y_k} : το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_k

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

D1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

D2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

D3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

D4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων

p) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

(μονάδες 2)

q) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι
 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(μονάδες 2)

r) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.
(μονάδες 2)

s) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.
(μονάδες 2)

t) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$
(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \text{ και } B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2}$

- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x , όταν $x=1$, όπου

$$f(x) = \frac{x}{3} \ln x, \quad x > 0$$

H1. $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.

Μονάδες 10

K2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του A .

Μονάδες 7

K3. Αν $P(A') = \frac{3}{4}$ να βρεθεί τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B) \cup (B-A)]$ και $P(A' \cap B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του B .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
 - η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
 - η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
 - η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$
- και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{X} = 74$

I1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$.

Μονάδες 4

L2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
Σύνολο		

Μονάδες 8

L3. Δίνεται ότι $f_1=0,1$, $f_2=0,3$, $f_3=0,2$, $f_4=0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 7

D4. Επιλέγουμε k παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $k < n$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x + k$, $x > 0$, όπου k ακέραιος με $k > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E , με $E < 2$

M1. Να αποδείξετε ότι $k=2$.

Μονάδες 5

M2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 31$

- Να αποδείξετε ότι $\bar{X} = 30$ (μονάδες 2)
- Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι:
Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

M3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$, $f(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, όπου $f(x) = x \ln x + 2$

Μονάδες 7

F5. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{t_n, n=1,2,3, \dots, 30 : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \dots < t_{30} = 1\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A = \{t \in \Omega : \text{η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της } f \text{ στο σημείο } (t, f(t)), \text{ να σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ οξεία γωνία}\}$,

$B = \{t \in \Omega : f(t) > f'(t) + 1\}$,

όπου $f(t) = t \ln t + 2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

a) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A (μονάδες 3)

b) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι $(cf(x))' = cf'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, για $x \in (\alpha, \beta)$, και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο

διάστημα αυτό.

Μονάδες 2

β) Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 2

γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{X} - s, \bar{X} + s)$, όπου $\bar{X}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Μονάδες 2

δ) Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i

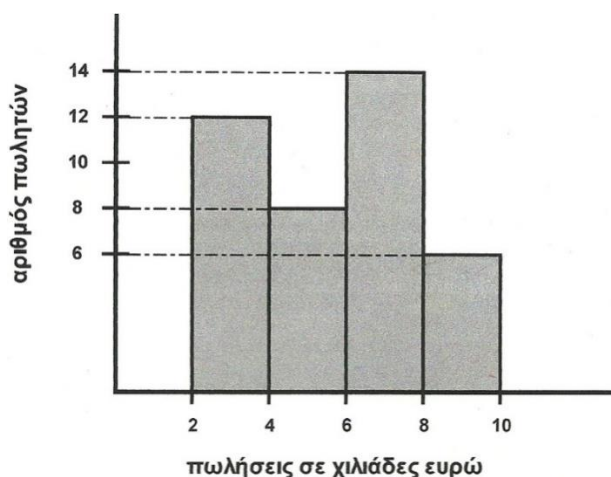
Μονάδες 2

ε) Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες n_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



B1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

Μονάδες 5

B2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες

f_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[-, \cdot)$			
$[-, \cdot)$			
$[-, \cdot)$			
$[-, \cdot)$			
Σύνολο			

Μονάδες 8

B3.α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

(μονάδες 6)

β) Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες) (μονάδες 6)

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι $P(K) = x_1$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(A) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με } x_1 < x_2$$

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(K)$, $P(A)$ και $P(\Pi)$, όπου $P(\Pi)$ η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

Μονάδες 10

Γ2. Αν $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»

Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»

Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

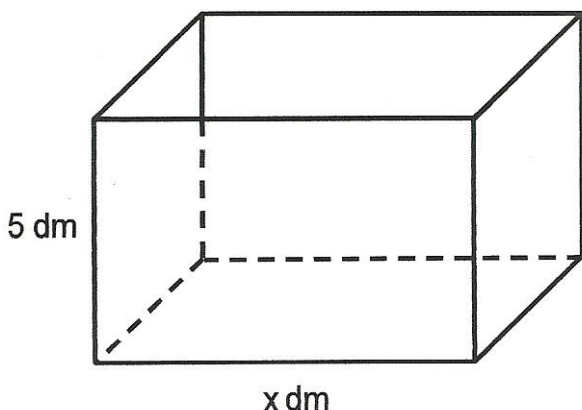
Μονάδες 9

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.

Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$

κουτιού ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$$

και να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$, όπου $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 15$ με

$$5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων x_i , $i = 1, 2, \dots, 15$ των παραπάνω σημείων $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\bar{x} = 8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε $2s^2 - 5s + 2 = 0$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $s = 2$ (μονάδες 4)

β) να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2 , με $i = 1, 2, \dots, 15$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δ3. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, 15$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$B = \{ A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 15 \text{ τέτοια, ώστε } y_i > -4x_i + 9R + 1 \},$$

όπου R είναι το εύρος των $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 15$

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε

$$\text{ότι } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

A3. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{X} - 2s, \bar{X} + 2s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)

β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα. (μονάδες 2)

γ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 . Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$ (μονάδες 2)

δ) Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B (μονάδες 2)

ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο διασποράς. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα $[10, 20)$ και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
$[10, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, 20)$					
Σύνολο					

Μονάδες 12

B2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία $\bar{X}$ των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών τους.

Μονάδες 8

B3. Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

(Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών

ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση $P(\kappa) = \frac{\alpha}{\kappa^2 + 1}$ $\kappa \in \Omega$, με $\alpha > 0$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A , B του Ω με

$$A = \{\kappa \in \Omega / \kappa^2 > 1\}$$

$$B = \{\kappa \in \Omega (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0\}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{5}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{11}$, $P(B) = \frac{6}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ : «να πραγματοποιείται το B και όχι το A »

Δ : «να μην πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B ».

Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \Omega$ και το ενδεχόμενο

$E = \{\kappa \in \Omega \text{ η συνάρτηση } f \text{ να είναι γνησίως αύξουσα}\}.$

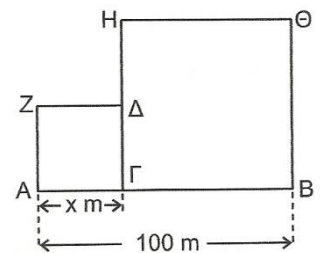
Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο E είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 100 m. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του AB τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος $A\Gamma$ να είναι x m.

Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $A\Gamma\Delta Z$ και $\Gamma B\Theta H$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο

τετραγώνων, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x) = 2x^2 - 200x + 10000$, $x \in (0, 100)$

(μονάδες 3)

i) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για $x = 50$, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ σε n διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ με αντίστοιχα μήκη x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Αν η μέση τιμή των μηκών x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι $\bar{x} = 2$ και η τυπική τους απόκλιση είναι $s = 0,2$ τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι $n = 25$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα ℓ_i με αντίστοιχα μήκη x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, 25$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

Μονάδες 6

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i , $i = 1, 2, \dots, 25$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\Lambda = \{ \ell_i, i = 1, 2, \dots, 25 \text{ τέτοιο, ώστε ο δείκτης } i \text{ να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή πολλαπλάσιο του 4} \}.$$

Μονάδες 6