

Γεωμετρία

Α' Λυκείου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 2

Βασικά Γεωμετρικά Σχήματασελ. 3

Κεφάλαιο 3

Τρίγωνα.....σελ. 26

Κεφάλαιο 4

Παράλληλες Ευθείες.....σελ. 99

Κεφάλαιο 5

Παραλληλόγραμμα–Τραπεζία.....σελ. 129

Κεφάλαιο 6

Εγγεγραμμένα Σχήματασελ. 192

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Σε κάθε αξιωματικό σύστημα υπάρχουν ορισμένες αρχικές έννοιες που δεν μπορούν να οριστούν. Για τη Γεωμετρία οι έννοιες αυτές είναι: το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στα παρακάτω αξιώματα:

- Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται ακριβώς μία ευθεία.
- Σε κάθε ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία.
- Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία.

2.1 ΣΗΜΕΙΑ, ΓΡΑΜΜΕΣ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Η μύτη μιας καρφίτσας μας δίνει μία εικόνα του σημείου. Ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις. Η πορεία που διαγράφει ένα σημείο που κινείται μας δίνει την εικόνα της γραμμής. Η γραμμή έχει μία διάσταση. Το σύνολο των σημείων που χωρίζουν ένα στερεό σώμα από το περιβάλλον του είναι μία επιφάνεια. Η επιφάνεια έχει δύο διαστάσεις.

2.2 ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η επιφάνεια του πίνακα ή η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου μας δίνουν την εικόνα του επιπέδου. Τα σχήματα τα οποία περιέχονται σε ένα επίπεδο λέγονται επίπεδα σχήματα.

2.3 Η ΕΥΘΕΙΑ

Μία τεντωμένη κλωστή μας δίνει την εικόνα της ευθείας γραμμής. Μία ευθεία πρέπει πάντα να τη φανταζόμαστε απεριόριστη και προς τις δύο κατευθύνσεις. Για την ευθεία ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

- Για οποιαδήποτε δύο σημεία A και B μιας ευθείας, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Γ της ευθείας που βρίσκεται μεταξύ των A και B .
- Για οποιαδήποτε τρία σημεία μιας ευθείας, ένα και μόνο ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

Δύο διαφορετικές ευθείες του επιπέδου μπορούν να έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε τέμνονται, ή κανένα κοινό σημείο οπότε είναι παράλληλες. Αν τρία ή περισσότερα σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία, λέγονται **συνευθειακά**. Τρεις ή περισσότερες ευθείες που τέμνονται στο ίδιο σημείο λέμε ότι **συντρέχουν**.

2.4 Η ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω σε μία ευθεία τη χωρίζει σε δύο μέρη που λέγονται **ημιευθείες**. Κάθε ημιευθεία έχει μία αρχή αλλά δεν έχει τέλος. Δύο ημιευθείες που έχουν φορέα την ίδια ευθεία, έχουν κοινή αρχή και δεν έχουν άλλα κοινά σημεία λέγονται **αντικείμενες**.

2.5 ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Αν πάνω σε μία ευθεία ε πάρουμε δύο σημεία A και B , τότε το σύνολο των σημείων της ε που βρίσκονται ανάμεσα στα A και B , μαζί με τα σημεία A και B ονομάζεται **ευθύγραμμο τμήμα** και συμβολίζεται AB ή BA . Τα σημεία A και B λέγονται **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος. Αν τα άκρα ταυτίζονται, τότε το ευθύγραμμο τμήμα λέγεται **μηδενικό**.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

2.4 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

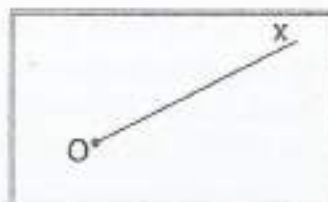
- α. Από δύο σημεία περνούν περισσότερες από μία ευθείες.
- β. Από ένα σημείο περνούν άπειρες ευθείες.
- γ. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει άπειρα σημεία.
- δ. Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή λέγονται αντικείμενες.

Σ	Λ
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

2.5 Δύο διαφορετικές ευθείες μπορούν να έχουν:

- α. Δύο κοινά σημεία.
- β. Το πολύ ένα κοινό σημείο.
- γ. Τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.
- δ. Άπειρα κοινά σημεία.

2.6 Σχεδιάστε την αντικείμενη ημιευθεία της Οκ.



2.7 Πότε δύο ευθείες ονομάζονται παράλληλες;

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

2.8 Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται από 4 διαφορετικά σημεία;

2.9 Πόσες ημιευθείες ορίζουν 5 διαφορετικά συνευθειακά σημεία;

2.6 ΜΕΤΑΤΟΠΙΖΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Κάθε επίπεδο σχήμα μπορεί να μετακινηθεί από την αρχική του θέση σε οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμείνει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος του.

2.7 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετακίνηση συμπίπτουν.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι **μικρότερο** από ένα άλλο, όταν με κατάλληλη μετακίνηση ταυτίζεται με ένα μέρος του δεύτερου.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι **μεγαλύτερο** από ένα άλλο, όταν το δεύτερο με κατάλληλη μετακίνηση ταυτίζεται με ένα μέρος του πρώτου.

Για τα ευθύγραμμα τμήματα ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

- Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και ημιευθεία Gx υπάρχει μοναδικό σημείο Δ της Gx τέτοιο, ώστε $G\Delta = AB$.
- Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με ένα τρίτο, τότε είναι και αυτά ίσα.
- Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB υπάρχει ένα μοναδικό σημείο M , τέτοιο ώστε $AM = MB$. Το M ονομάζεται **μέσο** του AB .

2.8 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Αν A, B, Γ είναι τα διαδοχικά σημεία μιας ευθείας ϵ , τότε το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ ονομάζεται **άθροισμα** των AB και $B\Gamma$. Τότε γράφουμε $AB + B\Gamma = A\Gamma$. Γενικότερα αν $AB, \Gamma\Delta$ και EZ είναι τρία ευθύγραμμα τμήματα, ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = EZ$, αν υπάρχει ευθεία ϵ και σημεία H, Θ, I πάνω σε αυτήν, ώστε $AB = H\Theta, \Gamma\Delta = \Theta I$ και $EZ = HI$.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα EZ ονομάζεται **διαφορά** των ευθύγραμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, και συμβολίζεται $EZ = AB - \Gamma\Delta$, αν και μόνο αν $EZ + \Gamma\Delta = AB$.

Για κάθε φυσικό αριθμό n , το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ ονομάζεται **γινόμενο** του ευθύγραμμου τμήματος AB επί το φυσικό αριθμό n και συμβολίζεται $\Gamma\Delta = nAB$, αν

2.9 ΜΗΚΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Για οποιαδήποτε ευθύγραμμο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα ρητός), έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \rho AB$. Ο αριθμός ρ ονομάζεται μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$, με μονάδα μέτρησης το AB . Από όλες τις γραμμές που έχουν άκρα τα σημεία Γ και Δ , το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ έχει το μικρότερο μήκος. Γι' αυτό το μήκος του $\Gamma\Delta$ ονομάζεται απόσταση των σημείων Γ και Δ .

2. 10 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟ

Αν A , A' και O τρία σημεία του επιπέδου, τότε τα A και A' ονομάζονται συμμετρικά ως προς το κέντρο O αν και μόνο αν το O είναι το μέσο του AA' .

Μεθοδολογία

1. Για να προσθέσω δύο ευθύγραμμο τμήματα, πρέπει αυτά να ανήκουν στην ίδια ευθεία και να είναι διαδοχικά.
2. Για να αφαιρέσω δύο ευθύγραμμο τμήματα πρέπει, το μικρότερο να ταυτίζεται με ένα μέρος του μεγαλύτερου.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

2.16 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

- α. Αν $MA = MB$, τότε το M είναι το μέσο του AB . ☐ ☐
- β. Για να προσθέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα
αρκεί να είναι διαδοχικά. ☐ ☐
- γ. Αν $AB = \frac{\mu}{\nu} \Gamma\Delta$, τότε $\Gamma\Delta = \frac{\nu}{\mu} AB$. ☐ ☐
- δ. Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι πάντοτε
ίδιο ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησης. ☐ ☐
- ε. Αν A, B, Γ διαδοχικά σημεία μιας ευθείας,
τότε $B\Gamma = A\Gamma - AB$ ☐ ☐
- ζ. Δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη
αν μετρηθούν με την ίδια μονάδα μέτρησης. ☐ ☐
- η. Αν το A είναι συμμετρικό του B ως προς το κέντρο O , τότε
και το B είναι συμμετρικό του A ως προς το ίδιο κέντρο. ☐ ☐

2.17 Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

- α. Αν $AB + \Gamma\Delta = EZ$, τότε:
Α. $AB > EZ$ Β. $\Gamma\Delta > EZ$
Γ. $AB < EZ$ Δ. $AB \leq EZ$
- β. Αν $A\Gamma + \Gamma B = AB$, τότε:
Α. $\Gamma B = A\Gamma - AB$ Β. $A\Gamma = AB - \Gamma B$
Γ. $A\Gamma = \Gamma B + AB$ Δ. $\Gamma B = AB + A\Gamma$
- γ. Αν $AB = \frac{\mu}{\nu} \Gamma\Delta$, τότε το μήκος του $\Gamma\Delta$ με μονάδα μέτρησης AB είναι:
Α. $\frac{\mu}{\nu}$ Β. μ Γ. $\frac{\nu}{\mu}$ Δ. ν

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

2.11 ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΑ

Κάθε ευθεία ε του επιπέδου το χωρίζει σε δύο μέρη. Κάθε ένα από αυτά τα μέρη μαζί με την ευθεία ε το ονομάζουμε ημιεπίπεδο. Αν δύο σημεία A, B βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε η ευθεία ε δεν τέμνει το AB . Αν δύο σημεία Γ, Δ βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο, τότε η ευθεία ε τέμνει το $\Gamma\Delta$.

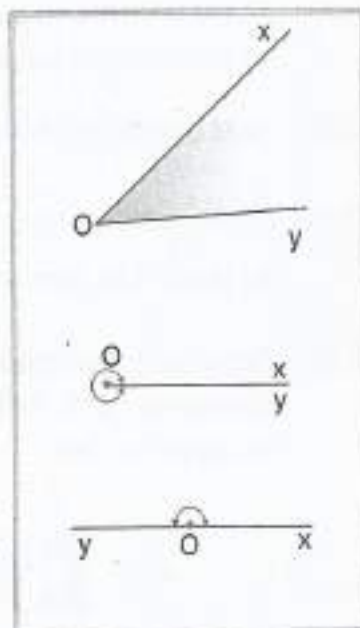
2.12 Η ΓΩΝΙΑ

Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή Ox, Oy χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη. Το μικρότερο από αυτά ονομάζεται κυρτή γωνία με κορυφή O και πλευρές Ox, Oy .

Το μεγαλύτερο μέρος ονομάζεται μη κυρτή γωνία με την ίδια κορυφή και τις ίδιες πλευρές.

Στην ειδική περίπτωση που οι δύο ημιευθείες ταυτίζονται, τότε η κυρτή γωνία που σχηματίζουν ονομάζεται μηδενική και η μη κυρτή πλήρης.

Αν οι ημιευθείες Ox, Oy είναι αντικείμενες, τότε κάθε μία από τις δύο γωνίες που σχηματίζουν ονομάζεται ευθεία γωνία.



2.13 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΓΩΝΙΩΝ

Δύο γωνίες είναι ίσες αν με κατάλληλη μετακίνηση μπορούν να ταυτιστούν. Μία γωνία $\widehat{xOy}$ είναι μικρότερη από μία άλλη $\widehat{x'O'y'}$, αν με κατάλληλη μετακίνηση η Ox ταυτίζεται με την $O'x'$ και η Oy βρίσκεται στο εσωτερικό της $\widehat{x'O'y'}$. Μία γωνία $\widehat{xOy}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{x'O'y'}$, αν η $\widehat{x'O'y'}$ είναι μικρότερη από την $\widehat{xOy}$.

Διχοτόμος μιας γωνίας $\widehat{xOy}$ ονομάζεται η ημιευθεία $O\delta$ που την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

Η γωνία που είναι ίση με το μισό της ευθείας γωνίας ονομάζεται ορθή.

Εάν δύο ευθείες τεμνόμενες σχηματίζουν μία ορθή γωνία λέγονται κάθετες. Μία γωνία μικρότερη από ορθή λέγεται οξεία, ενώ μία κυρτή γωνία μεγαλύτερη από ορθή λέγεται αμβλεία.

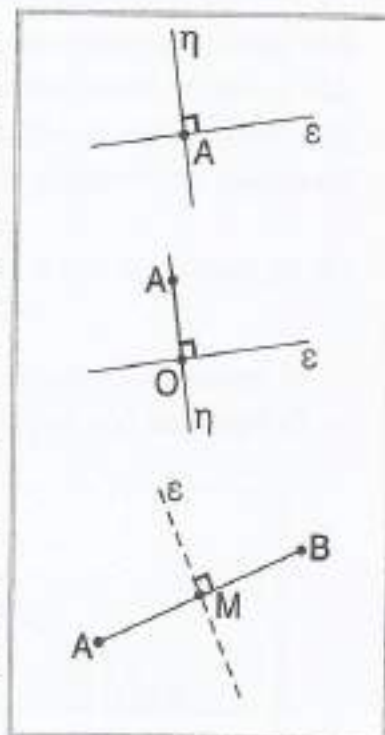
2.14 ΚΑΘΕΤΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

Από ένα σημείο A που βρίσκεται πάνω σε μία ευθεία ε μπορούμε να φτιάξουμε μία μοναδική ευθεία η , που να είναι κάθετη στην ε . Το ίδιο συμβαίνει αν το σημείο A βρίσκεται εκτός της ευθείας ε .

Στην περίπτωση αυτή, το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AO από το A προς την ευθεία ε λέγεται *απόσταση* του σημείου A από την ευθεία ε και το O είναι η *προβολή* του A στην ε .

Η ευθεία που περνάει από το μέσο M ενός ευθύγραμμου AB τμήματος και είναι κάθετη σ' αυτό ονομάζεται *μεσοκάθετος* του AB .

Δύο διαφορετικά σημεία A και B λέγονται *συμμετρικά* ως προς ευθεία ε , αν και μόνο αν η ε είναι μεσοκάθετος του AB . Αν ένα σημείο A ανήκει στην ευθεία ε , τότε θεωρούμε ότι το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ε είναι το ίδιο το A .



2.15 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΓΩΝΙΩΝ

Δύο γωνίες λέγονται *εφεξής* αν έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.

Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}G$ ονομάζεται η γωνία $\hat{A}\hat{O}G$ που ορίζεται από τις μη κοινές πλευρές τους και περιέχει την OB . Τότε γράφουμε $\hat{A}\hat{O}G = \hat{A}\hat{O}B + \hat{B}\hat{O}G$.

Μία γωνία $\hat{A}\hat{O}B$ ονομάζεται *διαφορά* των γωνιών $\hat{A}\hat{O}G$ και $\hat{B}\hat{O}G$ και συμβολίζεται $\hat{A}\hat{O}B = \hat{A}\hat{O}G - \hat{B}\hat{O}G$, αν και μόνο αν $\hat{A}\hat{O}B + \hat{B}\hat{O}G = \hat{A}\hat{O}G$.

Για κάθε φυσικό αριθμό n , η γωνία $\hat{\varphi}$ ονομάζεται *γινόμενο* του αριθμού n επί τη γωνία $\hat{\omega}$ και συμβολίζεται $\hat{\varphi} = n\hat{\omega}$, αν και μόνο αν $\hat{\varphi} = \hat{\omega} + \hat{\omega} + \dots + \hat{\omega}$ (n φορές).

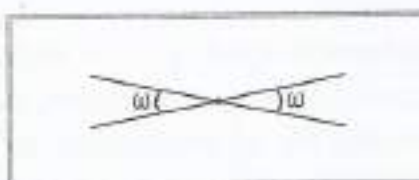
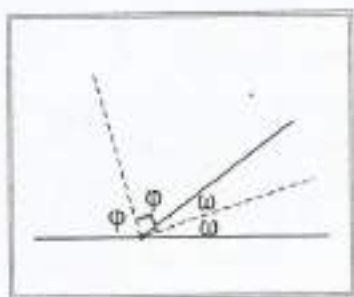
Τότε $\hat{\omega} = \frac{1}{n}\hat{\varphi}$ ή $\hat{\omega} = \frac{\hat{\varphi}}{n}$. Επίσης για κάθε ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$ ορίζουμε $\frac{\mu}{\nu}\hat{\varphi} = \mu \cdot \frac{\hat{\varphi}}{\nu}$.

2.16 ΑΠΛΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία.
Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία.
Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν αν οι πλευρές της μίας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.

Για τις γωνίες ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.



Μεθοδολογία

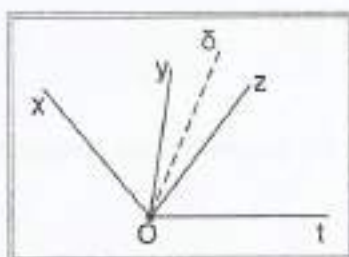
1. Για να προσθέσω δύο γωνίες πρέπει να είναι εφεξής.
2. Για να αφαιρέσω δύο γωνίες πρέπει να τις τοποθετήσω έτσι ώστε να έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και η μία να βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.30 Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOt}$ ώστε $\widehat{xOy} = \widehat{zOt}$. Δείξτε ότι:

α. $\widehat{xOz} = \widehat{yOt}$,

β. οι γωνίες $\widehat{xOt}$ και $\widehat{yOz}$ έχουν κοινή διχοτόμο.



Δ	$\widehat{xOy} = \widehat{zOt}$
Z	$\widehat{xOz} = \widehat{yOt}$ $\widehat{xOt}$ και $\widehat{yOz}$ έχουν κοινή διχοτόμο

Σκέψη

i. Πρέπει να δείξουμε ότι οι ζητούμενες γωνίες αποτελούνται από ίσα μέρη.

Λύση

$$\widehat{xOz} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{zOt} + \widehat{yOz} = \widehat{yOt}.$$

Σκέψη

ii. Πρέπει να υποθέσουμε ότι η $O\delta$ είναι διχοτόμος της μίας (π.χ. της $\widehat{yOz}$) και μετά να δείξουμε ότι είναι διχοτόμος της άλλης.

Λύση

Έστω $O\delta$ διχοτόμος της $\widehat{yOz}$.

$$\widehat{xO\delta} = \widehat{xOy} + \widehat{yO\delta} = \widehat{zOt} + \widehat{\delta Oz} = \widehat{\delta Ot}$$

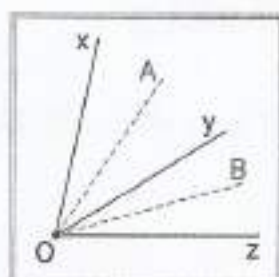
άρα $O\delta$ διχοτόμος της $\widehat{xOt}$.

Σχόλιο

Επιτρέπεται να ξαναδιατυπώσουμε το ερώτημα της άσκησης με διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο τρόπο που να μας διευκολύνει.

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

2.31 Παίρνουμε διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{yOz}$. Αν OA και OB είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{xOy}$ και $\widehat{yOz}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι $\widehat{AOB} = \frac{\widehat{xOz}}{2}$.



Δ	$\widehat{xOA} = \widehat{AOy}$ $\widehat{yOB} = \widehat{BOz}$
z	$\widehat{AOB} = \frac{\widehat{xOz}}{2}$

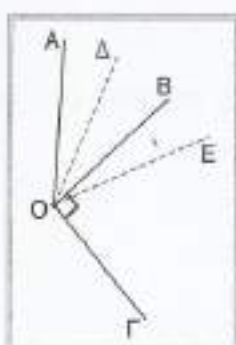
Σκέψη

Πρέπει να αναλύσουμε τη γωνία $\widehat{AOB}$ και να εμφανίσουμε κλάσματα με παρονομαστή 2.

Λύση

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOy} + \widehat{yOB} = \frac{\widehat{xOy}}{2} + \frac{\widehat{yOz}}{2} = \frac{\widehat{xOz}}{2}.$$

2.32 Παίρνουμε διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BO\Gamma}$ έτσι ώστε η $\widehat{BO\Gamma}$ να είναι ορθή. Αν OD , OE οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{AO\Gamma}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι $\widehat{DOE} = \frac{1}{2}L$.



Δ	$\widehat{BO\Gamma} = 1L$ $\widehat{AOD} = \widehat{DOB}$ $\widehat{AOE} = \widehat{EO\Gamma}$
z	$\widehat{DOE} = \frac{1}{2}L$

Σκέψη

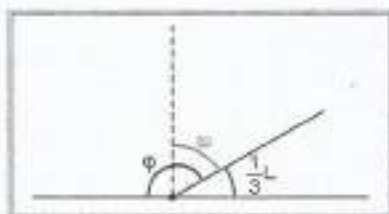
Πρέπει να αναλύσουμε την $\widehat{DOE}$ και να την εκφράσουμε συναρτήσει της ορθής.

Λύση

$$\widehat{DOE} = \widehat{AOE} - \widehat{AOD} = \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} - \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = \frac{1}{2}L$$

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

- 2.33 Μία γωνία είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της ορθής. Να βρείτε τη συμπληρωματική και την παραπληρωματική της.



Λύση

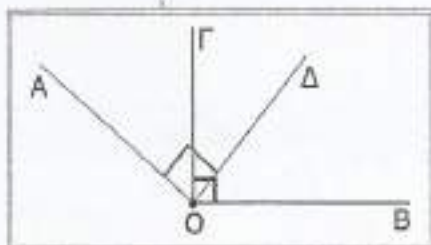
Η συμπληρωματική της είναι η γωνία ω και ισχύει

$$\omega + \frac{1}{3}L = 1L \Leftrightarrow \omega = 1L - \frac{1}{3}L = \frac{2}{3}L.$$

Η παραπληρωματική της είναι η γωνία φ και ισχύει

$$\varphi + \frac{1}{3}L = 2L \Leftrightarrow \varphi = 2L - \frac{1}{3}L = \frac{5}{3}L.$$

- 2.34 Παίρνουμε μία αμβλεία γωνία $\widehat{AOB}$ και στο εσωτερικό της δύο ημιευθείες OG, OD ώστε $OG \perp OB$ και $OD \perp OA$. Δείξτε ότι οι $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GOD}$ είναι παραπληρωματικές.



Δ	$\widehat{AOD} = 1L$ $\widehat{GOB} = 1L$
Σ	$\widehat{AOB} + \widehat{GOD} = 2L$

Λύση

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} + \widehat{GOD} &= \widehat{AOD} + \widehat{DOB} + \widehat{GOD} = \\ &= \widehat{AOD} + \widehat{GOB} = \\ &= 1L + 1L = 2L.\end{aligned}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

- 2.37 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ
- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| α. Μία μη κυρτή γωνία είναι μεγαλύτερη από την ευθεία. | ☐ | ☐ |
| β. Μία κυρτή γωνία είναι μικρότερη από την ορθή. | ☐ | ☐ |
| γ. Η ορθή γωνία είναι ίση με το μισό της ευθείας. | ☐ | ☐ |
| δ. Κάθε γωνία έχει ακριβώς μία διχοτόμο. | ☐ | ☐ |
| ε. Από ένα σημείο Α μπορούμε να φέρουμε πολλές κάθετες ως προς μία ευθεία ε. | ☐ | ☐ |
| ζ. Απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ όταν το Β ανήκει στην ε. | ☐ | ☐ |
| η. Όταν το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ε, τότε και το Β είναι συμμετρικό του Α ως προς την ίδια ευθεία. | ☐ | ☐ |
| θ. Για να αφαιρέσουμε δύο γωνίες πρέπει να είναι εφεξής. | ☐ | ☐ |
| ι. Μία αμβλεία γωνία δεν έχει συμπληρωματική. | ☐ | ☐ |
| κ. Δύο γωνίες με κοινή κορυφή λέγονται κατακορυφήν. | ☐ | ☐ |
| λ. Σε δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες. | ☐ | ☐ |

2.38 Να βρείτε μία γωνία που να είναι ίση με την παραπληρωματική της.

2.39 Πότε δύο σημεία λέγονται συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε;

2.40 Τι ονομάζουμε απόσταση σημείου από μία ευθεία;

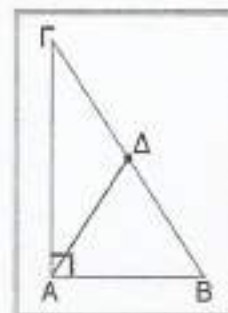
2.41 Τι ονομάζουμε προβολή ενός σημείου σε μία ευθεία;

2.42 Να σχεδιάσετε μία κυρτή και μία μη κυρτή γωνία.

2.43 Να σχεδιάσετε το συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς την ευθεία ε.

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

- 2.44 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε ένα ζευγάρι συμπληρωματικών και ένα ζευγάρι παραπληρωματικών γωνιών.



ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

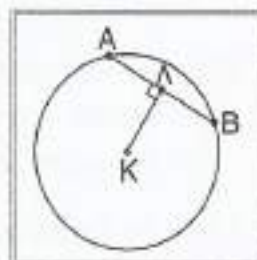
- 2.45 Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{GO\Delta}$ ώστε $OA \perp OG$ και $OB \perp OD$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GO\Delta}$ είναι κάθετες.
- 2.46 Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και συμπληρωματικών γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το μισό της ορθής.
- 2.47 Θεωρούμε διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{GO\Delta}$, ώστε οι OA και OD να είναι αντικείμενες και η $\widehat{BO\Gamma}$ ορθή. Αν Ox , Oy οι διχοτόμοι των $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GO\Delta}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι:
- $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GO\Delta}$ είναι συμπληρωματικές,
 - $\angle xOy = \frac{3}{2}L$.
- 2.48 Θεωρούμε δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ και OD τη διχοτόμο της $\widehat{AOB}$. Αν OE ημιευθεία στο εσωτερικό της $\widehat{BO\Gamma}$ ώστε $OE \perp OD$, να δείξετε ότι η OE είναι διχοτόμος της $\widehat{BO\Gamma}$.
- 2.49 Θεωρούμε διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{GOA}$ ώστε $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma}$. Να δείξετε ότι η προέκταση της OB είναι διχοτόμος της $\widehat{AOG}$.
- 2.50 Θεωρούμε διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{GO\Delta}$, ώστε οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GO\Delta}$ να είναι κάθετες. Να δείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{AOD}$ και $\widehat{BO\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές.
- 2.51 Η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι τετραπλάσια από την συμπληρωματική της. Να βρείτε τη γωνία.

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

2.17 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα, του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το K απόσταση ίση με ρ . Αν σε ένα κύκλο θεωρήσουμε δύο σημεία A, B , τότε αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη που λέγονται τόξα. Το ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται χορδή του τόξου. Το ευθύγραμμο τμήμα KL που είναι κάθετο στη χορδή λέγεται απόστημα της χορδής. Μία χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου λέγεται διάμετρος και τα άκρα της αντιδιαμετρικά σημεία.

Δύο κύκλοι είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

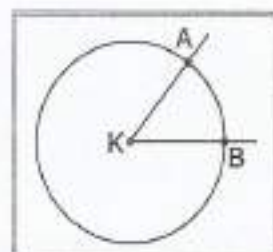


2.18 ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ

Μία γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου λέγεται επίκεντρη γωνία. Το τόξο του κύκλου που περιέχεται στο εσωτερικό της λέγεται αντίστοιχο τόξο. Λέμε επίσης ότι η γωνία *βαίνει* στο τόξο αυτό ή *βλέπει* το τόξο αυτό. Ένα τόξο λέγεται *κυρτό* (ή μη κυρτό), αν η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι κυρτή (ή μη κυρτή).

Δύο τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων λέγονται ίσα, αν με κατάλληλη μετατόπιση μπορούν να ταυτιστούν.

Επίσης για δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ του ίδιου ή ίσων κύκλων λέμε ότι το $\widehat{AB}$ είναι μικρότερο του $\widehat{\Gamma\Delta}$ (ή το $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι μεγαλύτερο του $\widehat{AB}$), αν με κατάλληλη μετατόπιση το $\widehat{AB}$ μπορεί να ταυτιστεί με ένα μέρος του $\widehat{\Gamma\Delta}$.



Σημείο

Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τόξα που ανήκουν σε άνισους κύκλους.

Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- Δύο τόξα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες.
- Δύο τόξα είναι άνισα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ομοιότροπα άνισες.

Αν $\widehat{AB}$ τόξο κύκλου, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο M του τόξου $\widehat{AB}$ τέτοιο ώστε $\widehat{AM} = \widehat{MB}$. Το σημείο αυτό καλείται μέσο του $\widehat{AB}$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



- 2.61 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ
- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| α. Όλες οι ακτίνες του κύκλου είναι ίσες. | ☐ | ☐ |
| β. Μία διάμετρος είναι ίση με δύο ακτίνες. | ☐ | ☐ |
| γ. Δύο σημεία A, B ενός κύκλου (O,ρ) τον χωρίζουν σε δύο ίσα τόξα. | ☐ | ☐ |
| δ. Μία διάμετρος χωρίζει έναν κύκλο σε δύο ίσα τόξα. | ☐ | ☐ |
| ε. Στο μικρότερο τόξο αντιστοιχεί μεγαλύτερη επίκεντρη γωνία. | ☐ | ☐ |
| ζ. Αν M μέσο τόξου $\widehat{AB}$ κύκλου (O,ρ), τότε η OM είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$. | ☐ | ☐ |
| η. Ένα κυρτό τόξο είναι μικρότερο από το ημικόκλιο. | ☐ | ☐ |
| θ. Υπάρχει χορδή του κύκλου μεγαλύτερη από τη διάμετρο. | ☐ | ☐ |
- 2.62 Τι ονομάζεται τόξο ενός κύκλου, τι ονομάζεται χορδή του τόξου και τι ονομάζεται απόστημα μιας χορδής;
- 2.63 Ποια σχέση συνδέει τις επίκεντρες γωνίες με τα αντίστοιχα τόξα τους;
- 2.64 Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (O,ρ), ένα τόξο AB, τη χορδή και το απόστημα της χορδής.
- 2.65 Να χωρίσετε έναν κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 2.66 Θεωρούμε κύκλο (O,ρ) και δύο διαμέτρους AB, ΓΔ. Να δείξετε ότι $\widehat{AG} = \widehat{BD}$.
- 2.67 Σε έναν κύκλο (O,ρ) παίρνουμε ένα τόξο $\widehat{AB}$ και το μέσο του M. Αν A', B', M' είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των A, B, M αντίστοιχα, δείξτε ότι M' μέσο του $\widehat{A'B'}$.
- 2.68 Θεωρούμε δύο διαμέτρους AA' και BB' ενός κύκλου (O,ρ). Αν M και M' είναι τα μέσα των τόξων $\widehat{AB}$ και $\widehat{A'B'}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι MM' διάμετρος.
- 2.69 Δύο σημεία A, B ισαπέχουν από ένα τρίτο σημείο K που δεν ανήκει στην ευθεία AB. Αν Γ, Δ είναι τα συμμετρικά ως προς K των A, B αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα A, B, Γ, Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

2.19 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΞΩΝ – ΜΕΤΡΟ ΤΟΞΟΥ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΣ

Δύο τόξα ενός κύκλου λέγονται *διαδοχικά* αν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι εφεξής.

Αν $\widehat{AB}$ και $\widehat{BG}$ δύο διαδοχικά τόξα, τότε το τόξο $\widehat{ABG}$ ονομάζεται *άθροισμα* των $\widehat{AB}$ και $\widehat{BG}$ και συμβολίζεται $\widehat{ABG} = \widehat{AB} + \widehat{BG}$.

Το τόξο $\widehat{AB}$ ονομάζεται *διαφορά* των τόξων $\widehat{AG}$ και $\widehat{BG}$ και συμβολίζεται με $\widehat{AB} = \widehat{AG} - \widehat{BG}$, αν και μόνο αν $\widehat{AB} + \widehat{BG} = \widehat{AG}$.

Για κάθε φυσικό αριθμό n , το τόξο $\widehat{AD}$ ονομάζεται *γινόμενο* του τόξου $\widehat{AB}$ επί τον αριθμό n και συμβολίζεται με $\widehat{AD} = n\widehat{AB}$, αν και μόνο αν $\widehat{AD} = \widehat{AB} + \widehat{AB} + \dots + \widehat{AB}$ (n φορές). Τότε ορίζουμε $\widehat{AB} = \frac{1}{n}\widehat{AD}$ και για κάθε θετικό ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$ ορίζουμε

$$\frac{\mu}{\nu}\widehat{AB} = \mu \cdot \frac{1}{\nu}\widehat{AB}.$$

Αν το τόξο $\widehat{AB}$ είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου ολόκληρου κύκλου, λέμε ότι είναι *μία μοίρα* και το συμβολίζουμε με 1° . Αν στη συνέχεια έχουμε $\widehat{AD} = \mu\widehat{AB}$, τότε λέμε ότι το *μέτρο* του $\widehat{AD}$ είναι μ μοίρες και γράφουμε $\widehat{AD} = \mu^\circ$. Τέλος ορίζουμε μέτρο μιας γωνίας $\chi\hat{O}\gamma$ το μέτρο του τόξου που της αντιστοιχεί σε ένα κύκλο με κέντρο την κορυφή της O .

Μεθοδολογία

1. Κάνουμε πράξεις με τόξα με όμοιο τρόπο, όπως με τα ευθύγραμμα τμήματα.
2. Το μέτρο του αθροίσματος δύο τόξων ή γωνιών είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους. Το αντίστοιχο συμβαίνει με τη διαφορά και με το γινόμενο με αριθμό.

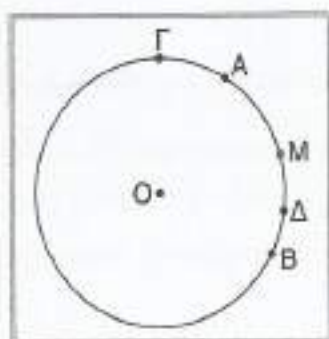
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.70 Σε κύκλο (O, ρ) θεωρούμε τόξο AB και M το μέσο του.

α. Αν Γ είναι ένα σημείο του κύκλου που δεν ανήκει στο $\widehat{AB}$,

δείξτε ότι $\widehat{\Gamma M} = \frac{\widehat{\Gamma A} + \widehat{\Gamma B}}{2}$.

β. Αν Δ είναι σημείο του $\widehat{MB}$, δείξτε ότι $\widehat{\Delta M} = \frac{\widehat{\Delta A} - \widehat{\Delta B}}{2}$.



Δ	$\widehat{AM} = \widehat{MB}$
Z	$\widehat{\Gamma M} = \frac{\widehat{\Gamma A} + \widehat{\Gamma B}}{2}$ $\widehat{\Delta M} = \frac{\widehat{\Delta A} - \widehat{\Delta B}}{2}$

Σκέψη

Πρέπει να αναλύσουμε τα $\widehat{\Gamma M}$ και $\widehat{\Delta M}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανιστούν κλάσματα με παρονομαστή 2.

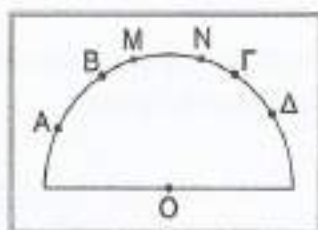
✍ Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. \quad \widehat{\Gamma M} &= \widehat{\Gamma A} + \widehat{AM} = \widehat{\Gamma A} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \\ &= \frac{2\widehat{\Gamma A} + \widehat{AB}}{2} = \frac{2\widehat{\Gamma A} + \widehat{\Gamma B} - \widehat{\Gamma A}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma A} + \widehat{\Gamma B}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. \quad \widehat{\Delta M} &= \widehat{\Delta A} - \widehat{AM} = \widehat{\Delta A} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \\ &= \frac{2\widehat{\Delta A} - \widehat{AB}}{2} = \frac{2\widehat{\Delta A} - \widehat{\Delta A} - \widehat{\Delta B}}{2} = \frac{\widehat{\Delta A} - \widehat{\Delta B}}{2}. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

2.71 Σε ένα ημικύκλιο θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν Μ και Ν τα μέσα των $\widehat{ΑΓ}$ και $\widehat{ΒΔ}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\widehat{ΜΝ} = \frac{\widehat{ΑΒ} + \widehat{ΓΔ}}{2}$.



Δ	$\widehat{ΑΜ} = \widehat{ΜΓ}$ $\widehat{ΒΝ} = \widehat{ΝΔ}$
Ζ	$\widehat{ΜΝ} = \frac{\widehat{ΑΒ} + \widehat{ΓΔ}}{2}$

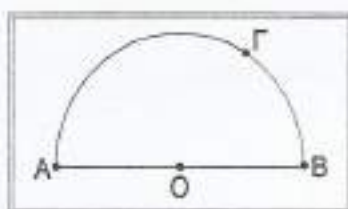
Σκέψη

Πρέπει να αναλύσουμε το $\widehat{ΜΝ}$ ώστε να εμφανιστούν κλάσματα με παρονομαστή το 2. Πρέπει να προσέχουμε τις σχετικές θέσεις των σημείων.

Λύση

$$\begin{aligned}\widehat{ΜΝ} &= \widehat{ΑΔ} - \widehat{ΑΜ} - \widehat{ΝΔ} = \widehat{ΑΔ} - \frac{\widehat{ΑΓ}}{2} - \frac{\widehat{ΒΔ}}{2} = \\ &= \frac{2\widehat{ΑΔ} - \widehat{ΑΓ} - \widehat{ΒΔ}}{2} = \frac{\widehat{ΑΔ} - \widehat{ΒΔ} + \widehat{ΑΔ} - \widehat{ΑΓ}}{2} = \frac{\widehat{ΑΒ} + \widehat{ΓΔ}}{2}.\end{aligned}$$

2.72 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε το σημείο Γ ώστε $\widehat{ΑΓ} - \widehat{ΒΓ} = 70^\circ$. Να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\widehat{ΑΓ}$ και $\widehat{ΒΓ}$.



Δ	$\widehat{ΑΓ} - \widehat{ΒΓ} = 70^\circ$
Ζ	$\widehat{ΑΓ} = ;$ $\widehat{ΒΓ} = ;$

Σκέψη

Επειδή τα άγνωστα τόξα είναι δύο, χρειαζόμαστε και δύο εξισώσεις. Η δεύτερη προέρχεται από το ίδιο το ημικύκλιο.

Λύση

$$\left. \begin{aligned}\widehat{ΑΓ} - \widehat{ΒΓ} &= 70^\circ \\ \widehat{ΑΓ} + \widehat{ΒΓ} &= 180^\circ\end{aligned} \right\} \text{ με πρόσθεση κατά μέλη θα πάρουμε}$$

$$\begin{aligned}2\widehat{ΑΓ} &= 250^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΑΓ} = 125^\circ \text{ και συνεπώς} \\ \widehat{ΒΓ} &= 180^\circ - \widehat{ΑΓ} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.\end{aligned}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



2.81 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

Σ Λ

- | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| α. Ισχύει πάντα $\widehat{AB} + \widehat{BF} = \widehat{AF}$. | ☐ | ☐ |
| β. Μία μοίρα είναι ίση με το $\frac{1}{90}$ της ορθής. | ☐ | ☐ |
| γ. Μία ευθεία γωνία είναι ίση με 180° . | ☐ | ☐ |
| δ. Δύο τόξα με το ίδιο μέτρο είναι ίσα. | ☐ | ☐ |
| ε. Δύο γωνίες με το ίδιο μέτρο είναι ίσες. | ☐ | ☐ |
| ζ. Ένα τόξο είναι τόσες μοίρες, όσες η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία. | ☐ | ☐ |
| η. Μία γωνία είναι επίκεντρη, αν οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο. | ☐ | ☐ |

2.82 Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

- α. Η συμπληρωματική μιας γωνίας 50° είναι:
Α. 40° Β. 90°
Γ. 130° Δ. 310°
- β. Η παραπληρωματική μιας γωνίας 70° είναι:
Α. 20° Β. 110°
Γ. 180° Δ. 290°
- γ. Τα $\frac{2}{3}$ μιας ορθής γωνίας είναι:
Α. 15° Β. 30°
Γ. 60° Δ. 120°
- δ. Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι:
Α. $90^\circ - \omega$ Β. $180^\circ - \omega$
Γ. $90^\circ + \omega$ Δ. $180^\circ + \omega$
- ε. Η διαφορά της συμπληρωματικής από την παραπληρωματική μιας γωνίας φ είναι:
Α. 90° Β. 180°
Γ. 45° Δ. 60°

Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

ζ. Ένα σημείο M βρίσκεται έξω από έναν κύκλο με κέντρο O αν:

- A. $OM < \rho$ B. $OM = \rho$
Γ. $OM > \rho$ Δ. $OM = 0$

2.83 Πώς ορίζεται η μία μοίρα;

2.84 Πώς ορίζουμε το μέτρο μιας γωνίας;

2.85 Όταν ένα τόξο $\widehat{AB}$ είναι διπλάσιο από ένα άλλο $\widehat{\Gamma\Delta}$, ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους;

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

2.86 Σε έναν κύκλο θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$. Αν M , N είναι τα μέσα των $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι $\widehat{MN} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{B\Gamma}}{2}$.

2.87 Σε έναν κύκλο θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$. Αν Δ το μέσο του $\widehat{AB}$ και E το μέσο του $\widehat{A\Gamma}$, δείξτε ότι $\widehat{DE} = \frac{\widehat{B\Gamma}}{2}$.

2.88 Σε ένα ημικύκλιο με διάμετρο AB θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta B}$. Αν M , N τα μέσα των $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{B\Delta}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι $\widehat{MN} = 90^\circ + \frac{\widehat{\Gamma\Delta}}{2}$.

2.89 Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας που η συμπληρωματική της είναι τα $\frac{2}{11}$ της παραπληρωματικής της.

2.90 Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας που είναι ίση με το άθροισμα της συμπληρωματικής της και του μισού της παραπληρωματικής της.

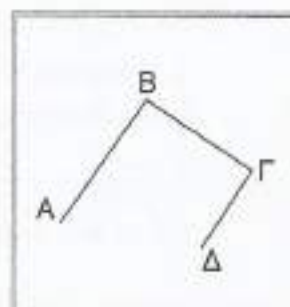
2.91 Δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και ϕ ικανοποιούν τη σχέση $\omega - 2\phi = 30^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες ω και ϕ .

2.92 Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες που έχουν μέτρα $4x + 30^\circ$ και $3x + 10^\circ$.

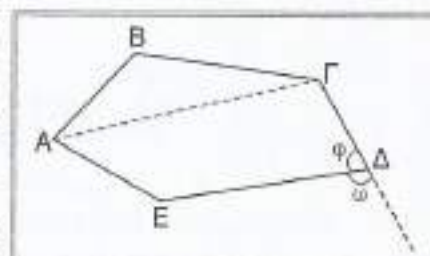
Κεφάλαιο 2 – Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

2.20 ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ – ΠΟΛΥΓΩΝΟ

Η γραμμή που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα λέγεται **τεθλασμένη γραμμή**. Τα ευθύγραμμα τμήματα από τα οποία αποτελείται λέγονται **πλευρές** της τεθλασμένης και τα άκρα της **κορυφές** της τεθλασμένης. Μία τεθλασμένη λέγεται **απλή**, όταν δύο οποιεσδήποτε πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο και κάθε κορυφή είναι άκρο δύο μόνο πλευρών. Μία τεθλασμένη γραμμή λέγεται **κυρτή**, αν ο φορέας της κάθε πλευράς αφήνει όλες τις κορυφές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Μία τεθλασμένη λέγεται **κλειστή** αν τα άκρα της ταυτίζονται. Μία κλειστή απλή τεθλασμένη γραμμή λέγεται **πολύγωνο**, π.χ. το ΑΒΓΔΕ.



Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές λέγεται **διαγώνιος** του πολυγώνου, π.χ. η ΑΓ. Γωνίες του κυρτού πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές, π.χ. η φ. **Εξωτερική γωνία** του κυρτού πολυγώνου ονομάζεται η γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική με μία γωνία του πολυγώνου, π.χ. η ω.



Σημείωση:

Το πλήθος των διαγωνίων ενός n -γώνου είναι $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

- 2.104** Σε πόσα τρίγωνα χωρίζεται ένα n -γωνο αν φέρουμε όλες τις διαγώνιες από μία συγκεκριμένη κορυφή;
- 2.105** Υπάρχει πολύγωνο που δεν έχει διαγώνιες;
- 2.106** Οι γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου είναι όλες κυρτές;
- 2.107** Αντιστοιχίστε τις τεθλασμένες γραμμές της στήλης Α με τους χαρακτηρισμούς της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	κυρτό πολύγωνο
	μη κυρτό πολύγωνο
	απλή ανοικτή κυρτή
	μη απλή ανοικτή
	απλή ανοικτή μη κυρτή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

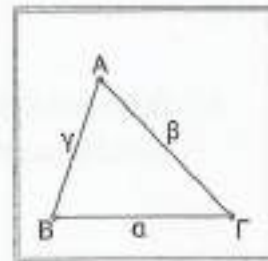
ΤΡΙΓΩΝΑ

3.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Έστω τρία διαφορετικά, μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ .

Το επίπεδο σχήμα που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ ονομάζεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

Τα σημεία A, B και Γ ονομάζονται κορυφές του τριγώνου.

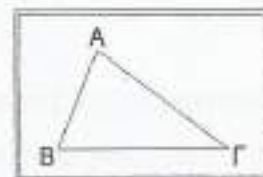


ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

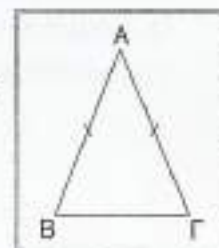
- Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ ονομάζονται πλευρές του τριγώνου (συμβολίζονται γ, α και β αντίστοιχα).
- Οι γωνίες $\widehat{B\hat{A}\Gamma}, \widehat{A\hat{B}\Gamma}$ και $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ ονομάζονται γωνίες του τριγώνου (συμβολίζονται $\hat{A}, \hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα).

Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις των πλευρών του ονομάζεται:

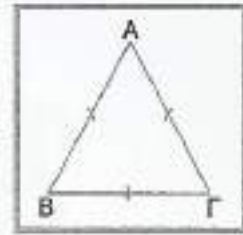
- Σκαληνό, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.



- Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.
(Π.χ. $AB = A\Gamma$, η $B\Gamma$ ονομάζεται βάση και το A κορυφή του.)

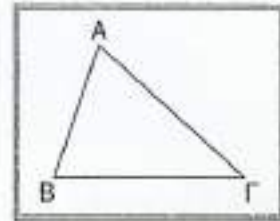


- Ισοπλευρο, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:

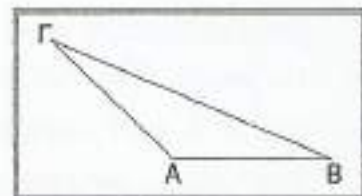
- Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.



- Ορθογώνιο, όταν έχει μία γωνία ορθή (π.χ. $\hat{A} = 90^\circ$, η BΓ ονομάζεται υποτείνουσα και οι AB και AΓ κάθετες πλευρές).



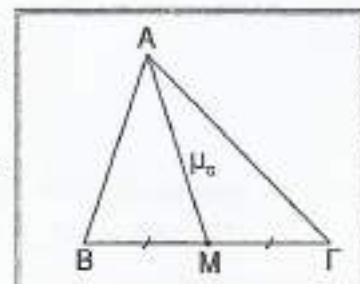
- Αμβλυγώνιο, όταν έχει μία γωνία αμβλεία.



ΥΠΕΡΕΥΘΥΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.

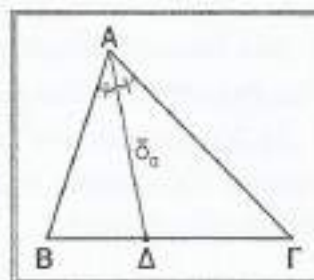
Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α , β , και γ συμβολίζονται με μ_α , μ_β και μ_γ αντίστοιχα.



Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

- Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας του, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.

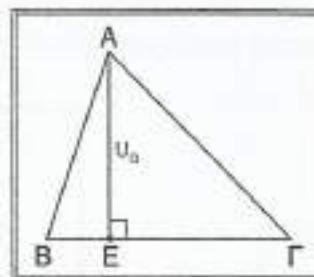
Οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{C}$ συμβολίζονται με δ_a , δ_b και δ_c αντίστοιχα.



- Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή προς την απέναντι πλευρά.

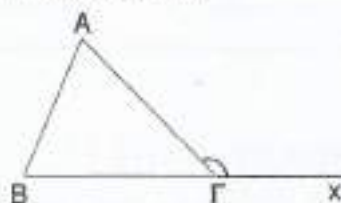
Τα ύψη που φέρουμε από τις κορυφές A, B και C συμβολίζονται με u_a , u_b και u_c αντίστοιχα.

Το σημείο E στο διπλανό σχήμα ονομάζεται προβολή του A πάνω στη BΓ.



Παρατηρήσεις:

- Οι γωνίες ενός τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς του ονομάζονται προσκείμενες σ' αυτήν την πλευρά γωνίες (π.χ. οι $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι γωνίες προσκείμενες στην πλευρά AB).



- Η γωνία που έχει πλευρές τις δύο πλευρές ενός τριγώνου ονομάζεται περιεχόμενη σ' αυτές τις πλευρές γωνία (π.χ. η $\hat{A}$ είναι περιεχόμενη γωνία των AB και AC).
- Η γωνία που είναι περιεχόμενη σε δύο πλευρές ονομάζεται απέναντι γωνία της τρίτης πλευράς του τριγώνου (π.χ. η $\hat{A}$ είναι απέναντι γωνία της BΓ).
- Η εφεξής και παραπληρωματική μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται εξωτερική γωνία του τριγώνου (π.χ. στο παραπάνω σχήμα η γωνία $A\hat{C}X$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ABC και συμβολίζεται με $\hat{C}_{εξ}$).

3.2 – 3.3 – 3.4 ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο τρίγωνα ονομάζονται ίσα όταν ύστερα από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται, δηλαδή όταν έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα. Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες ονομάζονται αντίστοιχες ή ομόλογες.

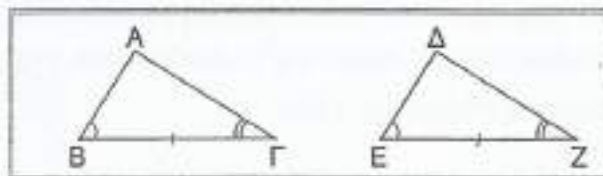
1^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (Π – Γ – Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



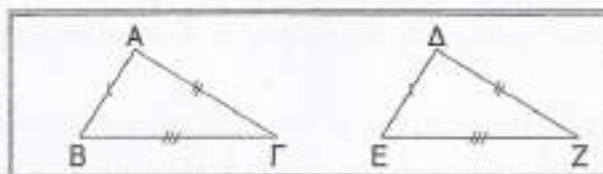
2^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (Γ – Π – Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



3^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (Π – Π – Π)

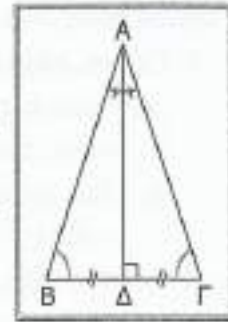
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.



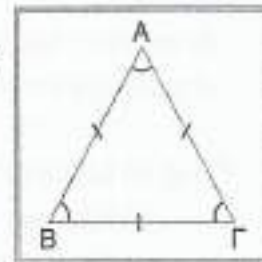
Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

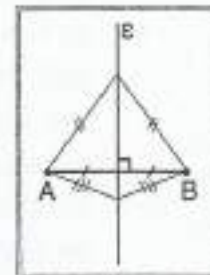
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
 - I. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
 - II. Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
 - III. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.



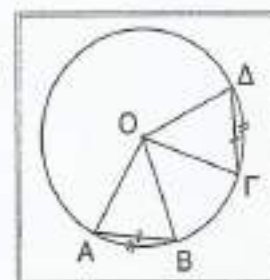
- Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους.



- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.



- Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.



Μεθοδολογία

- Για να δείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, πρέπει να δείξουμε ότι τρία στοιχεία είναι ίσα, εκ των οποίων το ένα πάντα να είναι πλευρά. Συγκεκριμένα:
 - i. Να έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία.
 - ii. Να έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.
 - iii. Να έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία.

Σημείωση:

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι για το τρίτο κριτήριο οι δύο γωνίες δεν είναι απαραίτητο να είναι προσκείμενες αλλά οποιεσδήποτε.

- Για να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνίες είναι ίσες:

Βρίσκουμε δύο τρίγωνα που έχουν αυτά τα τμήματα σαν πλευρές ή τις γωνίες σαν γωνίες τριγώνου και δείχνουμε ότι είναι ίσα χρησιμοποιώντας κατάλληλο κριτήριο ισότητας.

Αν δεν αρκούν τα στοιχεία που ξέρουμε από την υπόθεση για την ισότητα των τριγώνων, προσπαθούμε από άλλη ισότητα να αντλήσουμε στοιχεία που είναι ίσα. Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε τα δεδομένα πάνω στο σχήμα ώστε να βλέπουμε από εκεί τα ίσα στοιχεία ή τις ισότητες τριγώνων. Τέλος, μετά από κάθε απόδειξη της ισότητας τριγώνων καλό είναι να γράψουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία που είναι ίσα γιατί μπορεί να φανούν χρήσιμα στη συνέχεια της άσκησης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 3.1 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και AG ενός ισοσκελούς τριγώνου παίρνουμε ίσα τμήματα AD και AE αντίστοιχα. Αν M το μέσο της $BΓ$, να δειχθεί ότι το τρίγωνο $MEΔ$ είναι ισοσκελές.



	$AB = AG$
Δ	$AD = AE$
	M μέσο του $BΓ$
Z	$MEΔ$ ισοσκελές

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το $MEΔ$ είναι ισοσκελές, αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο πλευρές ίσες. Είναι σημαντικό να μη σχεδιάσουμε το σχήμα με στοιχεία που δεν υπάρχουν στα δεδομένα (π.χ. $AD = AB = AG = AE$) ώστε να καταλάβουμε από το σχήμα ποιες είναι οι ίσες πλευρές. Εδώ καταλαβαίνουμε ότι οι ίσες πλευρές του $MEΔ$ πρέπει να είναι οι ME και MD . Θα συγκρίνουμε, λοιπόν, τρίγωνα που έχουν ως πλευρές τα ζητούμενα ευθύγραμμα τμήματα. Δηλαδή τα $ΓΕΜ$ και $ΔΒΜ$, αφού γι' αυτά τα τρίγωνα γνωρίζουμε κι άλλα στοιχεία (πλευρές και γωνίες).

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΓΕΜ$ και $ΔΒΜ$:

Έχουν $ΓΜ = ΜΒ$ (M μέσο $BΓ$).

$ΓΕ = ΒΔ$ (αθροίσματα των ίσων τμημάτων $AG = AB$ και $AE = AD$).

$\hat{B} = \hat{Γ}$ (ως προσκείμενες στη βάση γωνίας ισοσκελούς τριγώνου).

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις προσκείμενες γωνίες ίσες ($\Pi - \Gamma - \Pi$), άρα είναι ίσα και έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα.

Οπότε $ME = MD$.

Συνεπώς το τρίγωνο $MEΔ$ είναι ισοσκελές.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.2 Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.



Δ	$AB = AG$ BE διχοτόμος $\hat{B}$ GD διχοτόμος $\hat{G}$
Σ	$BE = GD$

Σκέψη

Αρκεί να βρούμε ίσα τρίγωνα που έχουν τις διχοτόμους των δύο γωνιών. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον τέτοιες επιλογές. Τα $A\hat{B}E$ και $A\hat{G}D$ έχουν ίσες τις πλευρές AB και AG και τις προσκείμενες γωνίες ίσες, ενώ τα $B\hat{D}G$ και $B\hat{E}G$ έχουν τη BG κοινή και τις προσκείμενες σ' αυτή γωνίες ίσες. Δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος να προτιμήσουμε μία από τις δύο λύσεις.

1^η Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\hat{D}G$ και $B\hat{E}G$:

Έχουν τη BG κοινή.

$\hat{B} = \hat{G}$ (ως προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου).

$\hat{G}_1 = \hat{B}_1$ (ως μισά ίσων γωνιών).

Αφού τα τρίγωνα έχουν από μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτή γωνία μία προς μία ($G - \Pi - G$), τα τρίγωνα $B\hat{D}G$ και $B\hat{E}G$ είναι ίσα.

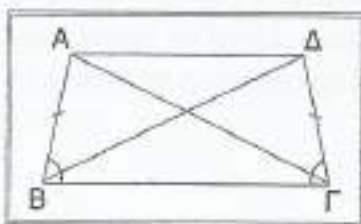
Συνεπώς έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα, δηλαδή $GD = BE$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AG \\ \hat{A} \text{ κοινή} \\ \hat{B}_2 = \hat{G}_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Γ-Π-Γ)} \\ \Rightarrow A\hat{B}E = A\hat{G}D. \end{array}$$

Εναλλακτικά:

3.3 Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABGD$ με $AB = GD$ και $\hat{B} = \hat{G}$.

Να αποδειχθεί ότι $\hat{A} = \hat{D}$.



Δ	$AB = GD$ $\hat{B} = \hat{G}$
Σ	$\hat{A} = \hat{D}$

Σχέση

Επειδή στο αρχικό σχήμα δεν υπάρχουν τρίγωνα που να έχουν τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{D}$, φέρνουμε τις διαγώνιους $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου. Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{D}$ που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ίσες βρίσκονται στα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$, για τα οποία γνωρίζουμε δύο στοιχεία ($A\Delta$ κοινή και $AB = \Delta\Gamma$). Χρειαζόμαστε άλλο ένα στοιχείο σύμφωνα με τα κριτήρια. Ή την περιεχόμενη γωνία των πλευρών αυτών, το οποίο όμως είναι το ζητούμενο $\hat{A} = \hat{D}$, ή την τρίτη πλευρά $A\Gamma$ και $B\Delta$. Άρα πρέπει πάλι να συγκρίνουμε τρίγωνα με αυτές τις πλευρές. Από τα δεδομένα καταλαβαίνουμε ότι τα τρίγωνα αυτά θα είναι τα $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$, αφού αυτά έχουν και πλευρές τις $A\Gamma$ και $B\Delta$ που ζητάμε, αλλά και τις $AB = \Delta\Gamma$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ που δίνονται.

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$:

Έχουν τη $B\Gamma$ κοινή.

$$AB = \Delta\Gamma \quad (\text{από την υπόθεση}).$$

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \quad (\text{από την υπόθεση}).$$

Αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία ίση ($\Pi - \Gamma - \Pi$), τότε είναι ίσα και έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή $A\Gamma = B\Delta$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Delta$:

Έχουν την $A\Delta$ κοινή.

$$AB = \Delta\Gamma \quad (\text{από την υπόθεση}).$$

$$B\Delta = A\Gamma \quad (\text{από την προηγούμενη σύγκριση}).$$

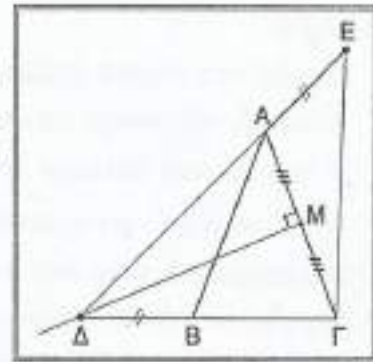
Αφού έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία ($\Pi - \Pi - \Pi$), τότε είναι ίσα και έχουν τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Συνεπώς $\hat{A} = \hat{D}$.

Σχόλιο

Από τις προηγούμενες ασκήσεις βλέπουμε ότι για να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνίες είναι ίσες, αρκεί να συγκρίνουμε κατάλληλα τρίγωνα που περιέχουν τις γωνίες αυτές ή τα ευθύγραμμα τμήματα και να δείξουμε ότι είναι ίσα.

- 3.4 Σε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ (με $AB = A\Gamma$) φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς $A\Gamma$, η οποία τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο Δ . Προεκτείνουμε τη ΔA προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = B\Delta$. Να αποδειχθεί ότι:
- Το $\triangle \hat{A}\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 - Το $\triangle \hat{A}E$ είναι ισοσκελές.



Σκέψη

Για το τρίγωνο $\triangle \hat{A}\Gamma$ θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μεσοκάθετου. Για το $\triangle \hat{A}E$, επειδή δεν είναι άμεσα φανερό από το σχήμα, ψάχνουμε να βρούμε ποιες πιθανόν είναι ίσες πλευρές: από το ισοσκελές $\triangle \hat{A}B$ έχουμε $\Gamma\hat{A} = \Delta A$, άρα αποκλείεται η $\Gamma\hat{A}$ να είναι ίση με την $E\hat{A}$, άρα μας μένει να εξετάσουμε την περίπτωση $\Gamma E = \Delta A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma E = \Delta A$.

Λύση

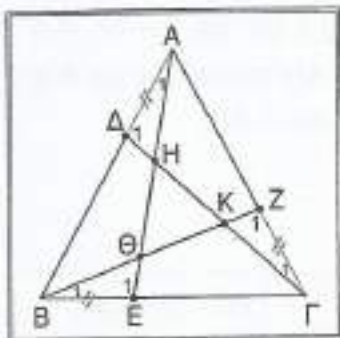
- Το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$, άρα ισαπέχει από τα A και Γ . Οπότε $\Delta A = \Delta\Gamma \Rightarrow \triangle \hat{A}\Gamma$ ισοσκελές.
- Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1)
 ως προσκείμενες στη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.
 Για τον ίδιο λόγο στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle \hat{A}\Delta$ είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$ (2).
 Οπότε ισχύει από τις (1), (2) ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B}$ (3).
 Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle \hat{A}B$ και $\triangle \hat{A}E$:
 Έχουμε $B\hat{A} = A\hat{E}$ (από την υπόθεση).
 $AB = A\Gamma$ (ως πλευρές ισοσκελούς).
 $\hat{A}B\hat{A} = \hat{A}\Gamma\hat{A}$ (ως παραπληρωματικές (ίσων γωνιών) (3).
 Άρα από $\Pi - \Gamma - \Pi$ θα είναι ίσα,
 οπότε $A\hat{B} = E\hat{\Gamma}$.
 Όμως από το (i) ερώτημα έχουμε $A\hat{B} = \Delta\hat{\Gamma}$.
 Οπότε τελικά $E\hat{\Gamma} = \Delta\hat{\Gamma}$,
 δηλαδή το $\triangle \hat{A}E$ είναι ισοσκελές.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.5 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E και Z στις πλευρές AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = BE = \Gamma Z$.

i. Να αποδειχθεί ότι $AE = \Gamma\Delta = BZ$.

ii. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα AE , $\Gamma\Delta$ και BZ τέμνονται ανά δύο στα σημεία H , Θ και K , να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $H\Theta K$ είναι ισόπλευρο.



Δ	$AB = \Gamma\Delta = B\Gamma$ $A\Delta = BE = \Gamma Z$
Z	i. $AE = \Gamma\Delta = BZ$ ii. $H\Theta K$ ισόπλευρο

Σκέψη

- Ζητάμε να συγκρίνουμε τρία τρίγωνα που να έχουν μία πλευρά από τις AE , $\Gamma\Delta$ και BZ . Τα $A\hat{B}E$, $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}Z$ ικανοποιούν το ζητούμενο και έχουν κάποια ίσα στοιχεία από τα δεδομένα της άσκησης.
- Επειδή τα τμήματα $H\Theta$, ΘK και KH δεν είναι πλευρές τριγώνου όπως φαίνεται από το σχήμα, θα δείξουμε ότι είναι διαφορά ίσων τμημάτων χρησιμοποιώντας και το συμπέρασμα του πρώτου ερωτήματος.

Λύση

i. Τα τρίγωνα $A\hat{B}E$, $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}Z$:

Έχουν: $AB = A\Gamma = B\Gamma$ (ως πλευρές ισόπλευρου τριγώνου).

$BE = A\Delta = \Gamma Z$ (από την υπόθεση).

$\hat{B} = \hat{A} = \hat{\Gamma}$ (ως γωνίες ισόπλευρου τριγώνου).

Συνεπώς από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή $AE = BZ = \Gamma\Delta$.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}H$, $B\hat{\Theta}E$ και $Z\hat{K}\Gamma$:

Έχουν: $A\Delta = BE = \Gamma Z$ (από την υπόθεση).

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (ως γωνίες των ίσων τριγώνων του πρώτου ερωτήματος).

$\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ (ως γωνίες των ίσων τριγώνων του πρώτου ερωτήματος).

Άρα από το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα, συνεπώς ισχύει:

$$AH = B\Theta = \Gamma K \quad (1), \text{ και } \quad \Theta E = KZ = \Delta H \quad (2).$$

Αν αφαιρέσουμε τις ισότητες (1) και (2) από αυτήν του πρώτου ερωτήματος παίρνουμε:

$$AE - AH - \Theta E = BZ - B\Theta - K\Gamma = \Gamma\Delta - \Gamma K - \Delta H \Rightarrow$$

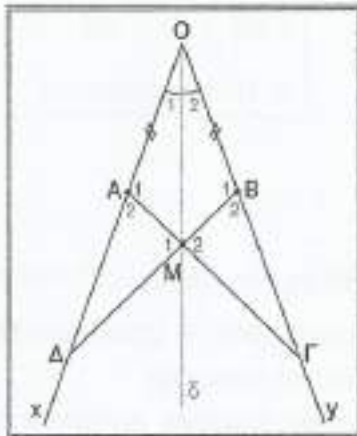
$$\Rightarrow H\Theta = \Theta K = KH \Rightarrow \text{το } H\Theta K \text{ είναι ισοσκελές.}$$

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

Σκέψη

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ίσες τρεις ή περισσότερες πλευρές ή γωνίες που βρίσκονται σε ίσα τρίγωνα, τότε μπορούμε για συντομία να τα συγκρίνουμε ταυτόχρονα και όχι ανά δύο.

- 3.6 Στις πλευρές Ox και Oy μιας κυρτής γωνίας $\widehat{xOy}$ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία A και B ώστε $OA = OB$. Στη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας $\widehat{xOy}$ παίρνουμε τυχαίο σημείο M . Αν η προέκταση της AM τέμνει την Oy στο Γ και της BM τέμνει την Ox στο Δ , να αποδειχθεί ότι $AD = BG$.



Δ	Οδ διχοτόμος $OA = OB$
Σ	$AD = BG$

Σκέψη

Τα τμήματα AD και BG ανήκουν στα τρίγωνα $\triangle AM\Delta$ και $\triangle BM\Gamma$, για τα οποία έχουμε μόνο ένα στοιχείο, ότι $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. Για να βρούμε κι άλλα στοιχεία θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle OAM$ και $\triangle OBM$, ώστε να χρησιμοποιήσουμε και το δεδομένο της διχοτόμου.

* Λύση

Για τα τρίγωνα $\triangle OAM$ και $\triangle OBM$ έχουμε:

OM κοινή

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (αφού $O\delta$ διχοτόμος).

$OA = OB$ (από την υπόθεση).

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ είναι ίσα, επομένως $AM = MB$ και $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Για τα τρίγωνα $\triangle AM\Delta$ και $\triangle BM\Gamma$ τώρα έχουμε:

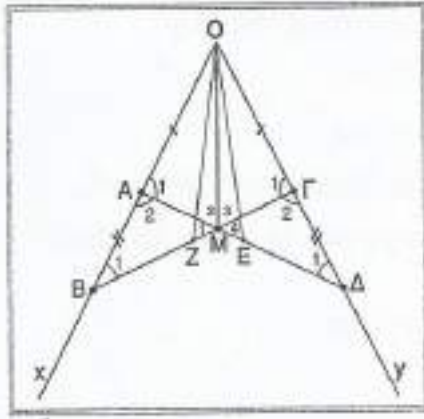
$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (ως κατακορυφήν).

$AM = MB$ (από την προηγούμενη σύγκριση).

$\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}_1$ και $\widehat{A}_1$ της προηγούμενης σύγκρισης).

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ είναι ίσα, οπότε $AD = BG$.

- 3.7 Στις πλευρές Ox και Oy μιας κυρτής γωνίας $\widehat{xOy}$, παίρνουμε τα σημεία A , B και Γ , Δ αντίστοιχα ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Αν E και Z είναι τα μέσα των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι οι γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{EOZ}$ έχουν κοινή διχοτόμο.



Δ	$OA = O\Gamma$ $OB = O\Delta$ Z μέσο $B\Gamma$ E μέσο $A\Delta$
Σ	$\widehat{xOy}$ και $\widehat{EOZ}$ έχουν κοινή διχοτόμο

Σκέψη

Θα βρούμε τη διχοτόμο μιας από τις δύο γωνίες και θα δείξουμε ότι διχοτομεί και την άλλη γωνία. Από το σχήμα, η διχοτόμος της $\widehat{xOy}$ φαίνεται να είναι η OM , όπου M το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$. Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τρίγωνα για τα οποία γνωρίζουμε στοιχεία από τα δεδομένα, όπως τα $\triangle O\hat{B}\Gamma$ και $\triangle O\hat{A}\Delta$. Από αυτά τα τρίγωνα θα πάρουμε τη γνώση για τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{\Gamma}_1, \hat{B}_1, \hat{\Delta}_1$ και με τη βοήθεια αυτών θα συγκρίνουμε άλλα τρίγωνα μέχρι να δείξουμε ότι $\triangle B\hat{O}M = \triangle M\hat{O}\Delta$. Τέλος θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle Z\hat{O}M$ και $\triangle M\hat{O}E$, ώστε να δείξουμε ότι η OM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ZOE}$.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Τα τρίγωνα $\triangle O\hat{B}\Gamma$ και $\triangle O\hat{A}\Delta$ είναι ίσα από $\Pi - \Gamma - \Pi$,

αφού έχουν: $O\hat{\Gamma} = O\hat{A}$ (από την υπόθεση),

$O\hat{B} = O\hat{\Delta}$ (από υπόθεση)

$\hat{O}$ κοινή,

επομένως $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ και $A\Delta = B\Gamma$.

Επίσης από το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ είναι $\triangle A\hat{M}B = \triangle \Gamma\hat{M}\Delta$,

αφού $A\hat{B} = \Gamma\hat{\Delta}$ (ως διαφορά ίσων τμημάτων),

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (από την προηγούμενη σύγκριση),

$\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$).

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

Επομένως $AM = M\Gamma$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_4$.

Τελικά, σύμφωνα με το κριτήριο Π - Γ - Π είναι $O\hat{A}M = O\hat{\Gamma}M$,

αφού $OA = O\Gamma$ (από την υπόθεση),

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (από την προηγούμενη σύγκριση),

$AM = M\Gamma$ (από την προηγούμενη σύγκριση),

Συνεπώς $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$ και $A\hat{O}M = \Gamma\hat{O}M \Rightarrow OM$ διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

Τέλος θα δείξουμε ότι η OM διχοτομεί και την $Z\hat{O}E$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π - Γ - Π είναι $Z\hat{O}M = E\hat{O}M$,

αφού $ZM = ZE$ (ως διαφορά ίσων ευθύγραμμων τμημάτων),

$Z\hat{M}O = E\hat{M}O$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{M}_4 + \hat{M}_3$),

OM κοινή.

Άρα $Z\hat{O}M = E\hat{O}M \Rightarrow OM$ διχοτόμος της $Z\hat{O}E$.

2^{ος} τρόπος

Από το Π - Γ - Π είναι $O\hat{B}\Gamma = O\hat{A}\Delta$,

αφού $OA = O\Gamma$ (από την υπόθεση)

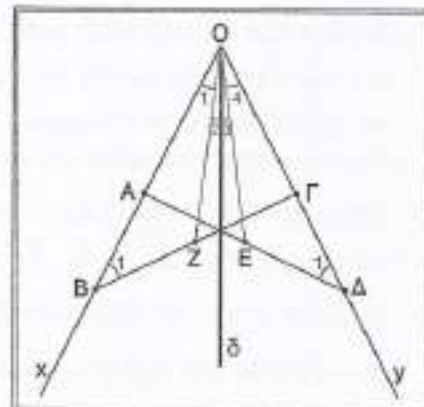
$OB = OD$ (από την υπόθεση),

$\hat{O}$ κοινή,

άρα $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ και $B\Gamma = A\Delta$.

Όμως επειδή Z και E μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$,

θα έχουμε ότι $BZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2} = ED$.



$OB = OD$ (από την υπόθεση)

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ (από τη προηγούμενη σύγκριση)

$BZ = ED$ (μισά ίσων τμημάτων)

$$\left. \begin{array}{l} OB = OD \text{ (από την υπόθεση)} \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \text{ (από τη προηγούμενη σύγκριση)} \\ BZ = ED \text{ (μισά ίσων τμημάτων)} \end{array} \right\} \Rightarrow O\hat{B}Z = O\hat{E}\Delta \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_4 \quad (1).$$

Έστω $O\delta$ η διχοτόμος της $Z\hat{O}E$,

άρα $\hat{O}_2 = \hat{O}_3$ (2).

Οπότε $(1) + (2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_4 + \hat{O}_3 \Rightarrow$$

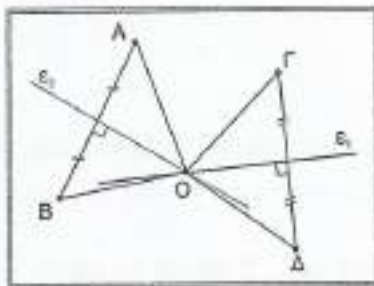
$$\Rightarrow x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O\delta \text{ διχοτόμος της } x\hat{O}y.$$

Παρατηρήσεις:

Ενώ με τον 1^ο τρόπο χρειάστηκαν τέσσερις συγκρίσεις τριγώνων, με το 2^ο χρειάστηκαν μόνο δύο. Αυτό συνέβη επειδή στον 1^ο τρόπο βρήκαμε, ή μάλλον «μαντέψαμε», ποια είναι η πραγματική διχοτόμος (το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ), ενώ στο 2^ο τρόπο δείξαμε ότι η γωνία ΖΟΕ απλώς «ανοίγει» και απ' τις δύο πλευρές της κατά ίσες γωνίες για να φτάσει τη $\chi\hat{O}\psi$.

3.8 Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο μη παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα που δεν έχουν τον ίδιο φορέα. Οι μεσοκάθετές τους τέμνονται στο Ο. Αν είναι $OB = OG$, να δείξετε ότι $OA = OD$.



Δ	ϵ_1 μεσοκάθετος ΑΒ
	ϵ_2 μεσοκάθετος ΓΔ
	$OB = OG$
Ζ	$OA = OD$

Σκέψη

Από τα δεδομένα της άσκησης είναι προφανές ότι θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μεσοκαθέτου.

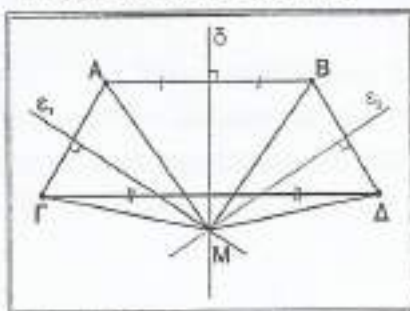
Λύση

Επειδή το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, θα ισχύει $OA = OB$ (1).

Όμως το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ, οπότε $OD = OG$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) και επειδή $OB = OG$, θα είναι $OA = OD$.

3.9 Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ, μη ανήκοντα στην ίδια ευθεία, έχουν κοινή μεσοκάθετο δ, να δείξετε ότι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των ΑΓ και ΒΔ βρίσκεται πάνω στη δ.



Δ	δ μεσοκάθετος ΑΒ
	δ μεσοκάθετος ΓΔ
	ϵ_1 μεσοκάθετος ΑΓ
	ϵ_2 μεσοκάθετος ΒΔ
Ζ	$\epsilon_1, \epsilon_2, \delta$ διέρχονται από το Μ

Σκέψη

Θα δείξουμε ότι το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων ε_1 και δ ανήκει στην τρίτη μεσοκάθετο ε_2 .

Λύση

Έστω M το σημείο τομής των μεσοκαθέτων ε_1 και δ .

Επειδή το M ανήκει στη μεσοκάθετο ε_1 του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΓ$,

$$\text{θα είναι } MA = MG \quad (1).$$

Όμοια, αφού το M ανήκει στη δ , τη μεσοκάθετο του AB ,

$$\text{θα είναι } MA = MB \quad (2).$$

$$\text{Από (1), (2) } \Rightarrow MB = MG \quad (3).$$

Η δ όμως είναι μεσοκάθετος του $\Gamma\Delta$,

$$\text{άρα } MG = MD \quad (4).$$

$$\text{Οπότε (3), (4) } \Rightarrow MB = MD,$$

δηλαδή το M ισαπέχει από τα B και Δ , συνεπώς ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$, την ε_2 .

Επομένως και οι τρεις μεσοκάθετοι ε_1 , ε_2 και δ διέρχονται από το ίδιο σημείο M .

3.10 Σε κύκλο (O, ρ) παίρνουμε ίσα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{AG}$. Έστω Δ το μέσο του τόξου $\widehat{BG}$. Να δείξετε ότι τα σημεία A , O και Δ είναι συνευθειακά.



Δ	$\widehat{AB} = \widehat{AG}$ Δ μέσο $\widehat{BG}$
Σ	A, O, Δ συνευθειακά

Λύση

Επειδή τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{AG}$ είναι ίσα από την υπόθεση, θα είναι ίσες και οι χορδές $AB = AG$, οπότε το A ισαπέχει από τα B και Γ , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$. Δηλαδή ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$.

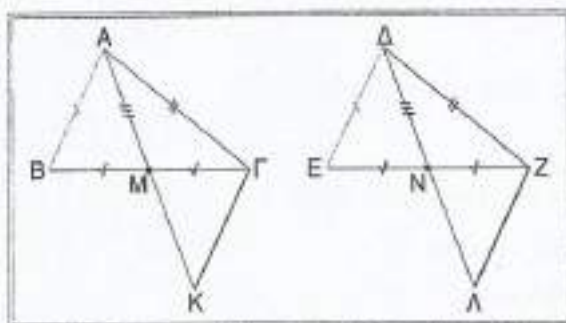
Όμοια και για το Δ συμπεραίνουμε ότι ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$.

Το O ως κέντρο του κύκλου απέχει από κάθε σημείο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα, οπότε το O ισαπέχει από τα B και Γ , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Επομένως, αφού τα A , O και Δ ανήκουν και τα τρία στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$ είναι συνευθειακά.

Σκόλο

Όταν η δικαιολόγηση είναι ακριβώς η ίδια για κάποιο στοιχείο της άσκησης με κάποια προηγούμενη δικαιολόγηση, τότε δεν την ξαναγράφουμε. Όπως έγινε στην προηγούμενη άσκηση με τα σημεία Α και Δ.

3.11 Δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη διάμεσο ίσες μία προς μία. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



	$AB = ΔΕ,$ $AΓ = ΔΖ$
Δ	AM διάμεσος, ΔN διάμεσος $AM = \Delta N$
Z	$A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$

Σκέψη

Όταν δεν έχουμε στοιχεία για να συγκρίνουμε τρίγωνα σύμφωνα με τα γνωστά κριτήρια, τότε μία τεχνική είναι να προεκτείνουμε τη διάμεσο κατά ίσο τμήμα (όμοια για τα ύψη ή τις διχοτόμους ενός τριγώνου).

Λύση

Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΚ = ΑΜ
και τη διάμεσο ΔΝ κατά τμήμα ΝΛ = ΔΝ.

Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} AM = MK \quad (\text{από την κατασκευή}) \\ BM = M\Gamma \quad (M \text{ μέσο } B\Gamma) \\ \hat{A}\hat{M}B = \hat{G}\hat{M}K \quad (\text{ως κατακορυφήν}) \end{array} \right\} \Rightarrow A\hat{B}M = M\hat{\Gamma}K \Rightarrow AB = \Gamma K \quad (1).$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε ότι } \Delta\hat{E}N = N\hat{Z}\Lambda \Rightarrow \Delta E = Z\Lambda \quad (2).$$

$$\text{Όμως από την υπόθεση } AB = \Delta E \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Gamma K = Z\Lambda \quad (3).$$

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΓΚ και ΔΖΛ:

Έχουν $A\Gamma = \Delta Z$ (από την υπόθεση),
 $AK = \Delta\Lambda$ (από υπόθεση και κατασκευή),
 $\Gamma K = Z\Lambda$ (η σχέση (3)).

Επομένως από Π - Π - Π είναι ίσα, άρα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα.

$$\text{Συνεπώς και οι διάμεσοι τους } \Gamma M = ZN \Rightarrow \frac{B\Gamma}{2} = \frac{EZ}{2} \Rightarrow B\Gamma = EZ$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$,
αφού τρεις πλευρές είναι ίσες μία προς μία.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

3.12 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

Σ

Λ

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές και μία αντίστοιχη γωνία ίσες.
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν όλες τις πλευρές και τις γωνίες ίσες.
- Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μία οξεία γωνία.
- Δύο τόξα είναι ίσα όταν έχουν ίσες χορδές.
- Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι και ύψος και διχοτόμος.

☐ ☐
☐ ☐
☐ ☐
☐ ☐
☐ ☐

3.13 Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

- Σε δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle \acute{E}Z$ ισχύουν $AB = \Delta E$ και $B\Gamma = EZ$. Τα τρίγωνα είναι ίσα όταν:

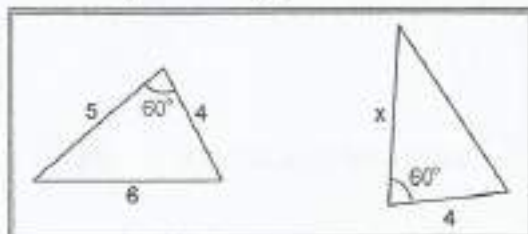
α. $\hat{B} = \hat{E}$

β. $\hat{A} = \hat{\Delta}$

γ. $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

δ. $\hat{B} = \hat{Z}$

- Τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα. Πόσο είναι η πλευρά x ;



α. 4

β. 5

γ. 6

δ. δε γνωρίζουμε

3.14 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- Ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει οξείες γωνίες.
- Η εφεξής και παραπληρωματική μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται γωνία τριγώνου.
- Το τρίγωνο που έχει άνισες πλευρές ονομάζεται
- Κάθε σημείο της ενός ευθυγράμμου τμήματος από τα άκρα του.

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 3.15 Δύο ευθείες e_1 και e_2 τέμνονται σε σημείο O . Πάνω στην e_1 παίρνουμε δύο τμήματα $AO = OB$ και πάνω στην e_2 δύο τμήματα $GO = OD$.
Να αποδειχθεί ότι:
i. $AG = BD$.
ii. $\widehat{AOD} = \widehat{BOG}$.
- 3.16 Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- 3.17 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου της γωνίας της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχει από τα άκρα της βάσης του.
- 3.18 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα δύο σημεία Δ και E με $B\Delta = \Gamma E$.
Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές.
- 3.19 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα παίρνουμε σημεία Δ και E ώστε $B\Delta = \Gamma E$.
Να αποδειχθεί ότι $\Delta\Gamma = BE$.
- 3.20 Να αποδειχθεί ότι οι διάμεσοι ισοσκελούς τριγώνου οι οποίες αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσες.
- 3.21 Στις πλευρές AB , $B\Gamma$ και ΓA ενός ισόπλευρου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ισόπλευρο.
- 3.22 Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου, είναι ισοσκελές.
- 3.23 Δύο ισοσκελή τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A\Delta E$ έχουν την κορυφή A κοινή και τις γωνίες της κορυφής ίσες. Να αποδειχθεί ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- 3.24 Αν οι πλευρές ενός πενταγώνου είναι ίσες μεταξύ τους και οι γωνίες του είναι επίσης ίσες μεταξύ τους (κανονικό πεντάγωνο), να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοί του είναι ίσες μεταξύ τους.

- 3.25 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($\hat{AB} = \hat{A\Gamma}$). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές $\hat{AB}$ και $\hat{A\Gamma}$ προς το μέρος της κορυφής και παίρνουμε αντίστοιχα σημεία $\hat{E}$ και $\hat{Z}$ ώστε $\hat{AE} = \hat{AZ}$. Φέρνουμε το ύψος από την κορυφή $\hat{A\Delta}$.
Να αποδειχθεί ότι:
I. $\hat{E\Delta} = \hat{Z\Delta}$.
II. τα τρίγωνα $\hat{E\hat{B}\hat{\Delta}}$ και $\hat{Z\hat{\Gamma}\hat{\Delta}}$ είναι ίσα.
- 3.26 Σε ισοπλευρο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές $\hat{AB}$, $\hat{B\Gamma}$ και $\hat{\Gamma A}$ και παίρνουμε αντίστοιχα σημεία $\hat{B'}$, $\hat{\Gamma'}$ και $\hat{A'}$, ώστε $\hat{BB'} = \hat{\Gamma\Gamma'} = \hat{AA'}$.
Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $\hat{A'\hat{B'}\hat{\Gamma'}}$ είναι ισοπλευρο.
- 3.27 Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$. Φέρουμε $Oz \perp Ox$, ώστε η Oy να βρίσκεται στο εσωτερικό της ορθής γωνίας, και $O\delta \perp Oy$ ώστε η Ox να βρίσκεται εντός της ορθής γωνίας. Στις Ox και Oz παίρνουμε σημεία M και N αντίστοιχα ώστε $OM = ON$. Στις $O\delta$ και Oy παίρνουμε σημεία Σ και P αντίστοιχα ώστε $OP = O\Sigma$.
Να αποδειχθεί ότι $O\hat{P}N = O\hat{\Sigma}M$.
- 3.28 Αν δύο κυρτά τετράπλευρα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και μία γωνία που περιέχεται μεταξύ ίσων πλευρών ίση, τότε να αποδειχθεί ότι τα τετράπλευρα είναι ίσα.

3.5 – 3.6 ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

- Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

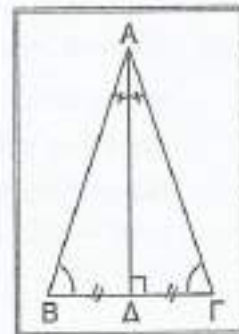
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν

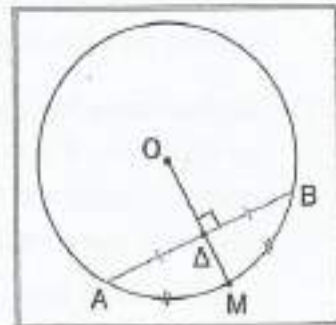
- δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία
ή
- μία πλευρά ίση και την προσκείμενη σ' αυτή οξεία γωνία ίση.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

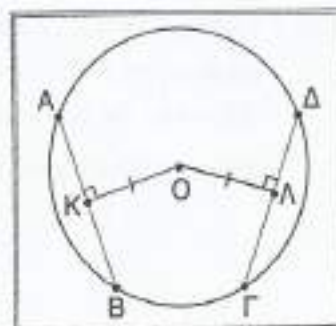
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διχοτόμος και διάμεσος.



- Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μία χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

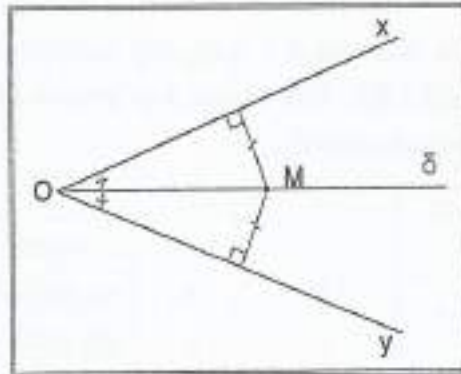


- Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν τα αποστήματα τους είναι ίσα και αντίστροφα.



Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και, αντίστροφα, κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στη διχοτόμο της.



Μεθοδολογία

- Για να δείξουμε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα θα πρέπει, αφού βεβαιώσουμε από τα δεδομένα ότι έχουν μία ορθή γωνία, να βρούμε ότι έχουν δύο στοιχεία ίσα από τα οποία το ένα να είναι πλευρά.

Ειδικότερα:

- i. να έχουν δύο πλευρές (ομόλογες) μία προς μία ίσες,
- ii. μία πλευρά (ομόλογη) και μία προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

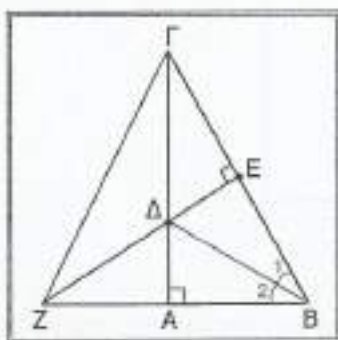
Σημείωση

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι για το πρώτο κριτήριο οι πλευρές δε χρειάζεται να είναι ομόλογες αλλά οποιεσδήποτε, και για το δεύτερο κριτήριο ότι η οξεία γωνία δε χρειάζεται να είναι η προσκείμενη.

- Για να δείξουμε ότι μία ευθεία είναι μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, αρκεί να δείξουμε ένα από τα παρακάτω:
 - Ικανοποιεί τον ορισμό, δηλαδή διέρχεται από το μέσο του τμήματος και είναι κάθετη σ' αυτό.
 - Δύο σημεία της ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.
 - Είναι διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου και το ευθύγραμμο τμήμα η βάση του.
 - Είναι ο φορέας αποστήματος μιας χορδής κύκλου (όπου η χορδή είναι το ευθύγραμμο τμήμα).
 - Διέρχεται από τα μέσα δύο τόξων με χορδή το ευθύγραμμο τμήμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.34 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 1L$ (ορθή) παίρνουμε τη διχοτόμο $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την ευθεία AB στο Z . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.



Δ	$\hat{A} = \text{ορθή}$ $B\Delta$ διχοτόμος $\Delta E \perp B\Gamma$
Z	$B\hat{\Gamma}Z$ ισοσκελές

Σκέψη

Πρέπει να δείξουμε ότι $B\Gamma = BZ$. Γι' αυτό θα συγκρίνουμε τρίγωνα που έχουν αυτές τις πλευρές. Κατάλληλα τρίγωνα είναι τα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle Z\hat{E}B$. Επίσης κατάλληλα είναι τα $\triangle B\hat{\Delta}\Gamma$ και $\triangle Z\hat{\Delta}B$. Μία τρίτη επιλογή είναι να συγκρίνουμε τα $\triangle \hat{E}B$ και $\triangle \hat{A}B$ ώστε να βρούμε ότι $EB = AB$, και επίσης τα $\triangle \hat{A}Z$ και $\triangle \hat{E}\Gamma$ ώστε να βρούμε ότι $\Gamma E = ZA$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη να προκύψει το ζητούμενο.

Θα γράψουμε αναλυτικά μία από τις παραπάνω λύσεις.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle \hat{A}B$ και $\triangle \hat{E}B$ είναι ίσα αφού έχουν μία πλευρά ίση ($B\Delta$ κοινή) και μία προσκείμενη οξεία γωνία ίση ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, αφού $B\Delta$ διχοτόμος),

άρα $E\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}B$ (1).

Επίσης $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}Z$ (2) ως κατακορυφήν.

Έτσι για τα τρίγωνα $\triangle Z\hat{\Delta}B$ και $\triangle \Gamma\hat{\Delta}B$ έχουμε:

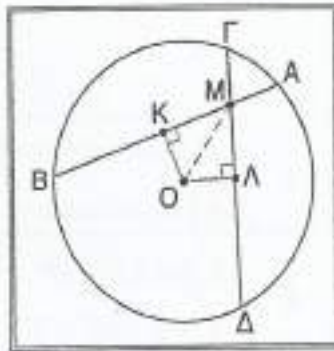
ΔB κοινή $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ ($B\Delta$ διχοτόμος) $Z\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}B$ (αθροίζοντας κατά μέλη τις (1) και (2))	}	$\Rightarrow$ Οπότε από $\Gamma - \Pi - \Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα.
--	---	---

Επομένως $BZ = B\Gamma$. Άρα το τρίγωνο $B\hat{Z}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.35 Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ μη παράλληλες που τέμνονται στο M . Αν OK και OL τα αποστήματα αντίστοιχα των χορδών αυτών, να δείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $M\hat{O}K$ και $M\hat{O}L$ είναι ίσα. ii. $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$.



Δ	$AB = \Gamma\Delta$ $OK \perp AB$ $OL \perp \Gamma\Delta$
Z	i. $M\hat{O}K = M\hat{O}L$ ii. $MA = M\Gamma$ $MB = M\Delta$

Λύση

1^η περίπτωση

Οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται εντός του κύκλου.

- i. Για τα τρίγωνα $M\hat{O}K$ και $M\hat{O}L$ έχουμε ότι είναι ορθογώνια, αφού $\hat{K} = \hat{L} = 1L$, έχουν τη MO κοινή και, επίσης, $OK = OL$ ως απόστημα ίσων χορδών. Συνεπώς είναι ορθογώνια με δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

- ii. Από το (i) ερώτημα συμπεραίνουμε ότι

$$MK = ML \quad (1),$$

$$\text{όμως} \quad AK = \Gamma L \quad (2)$$

ως μισά ίσων χορδών αφού το απόστημα τέμνει τη χορδή στο μέσο της, οπότε και $BK = L\Delta$ (3).

$$\text{Επομένως} \quad (2) - (1) \Rightarrow AK - KM = \Gamma L - LM \Rightarrow AM = \Gamma M,$$

$$\text{και} \quad (3) + (1) \Rightarrow BK + KM = L\Delta + LM \Rightarrow BM = M\Delta.$$

2^η περίπτωση

Οι χορδές τέμνονται εκτός κύκλου.

- i. Όπως στην πρώτη περίπτωση.

- ii. Από το (i) ερώτημα

$$MK = ML \quad (1)$$

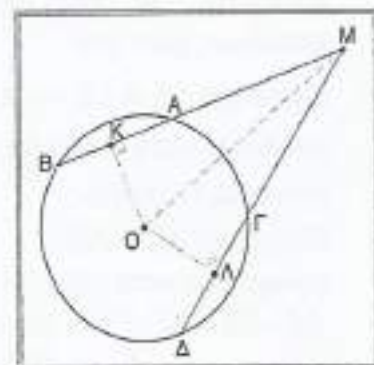
$$\text{και} \quad AK = \Gamma L \quad (2)$$

$$\text{και} \quad KB = L\Delta \quad (3),$$

ως μισά ίσων χορδών. Έτσι είναι

$$(1) - (2) \Rightarrow MK - AK = ML - L\Gamma \Rightarrow AM = \Gamma M$$

$$(1) + (3) \Rightarrow KM + BK = ML + L\Delta \Rightarrow MB = M\Delta.$$

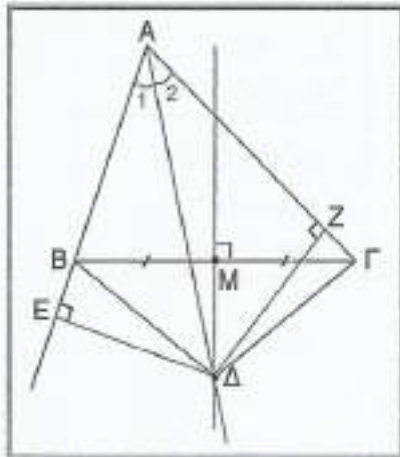


Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.36 Σε τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ (με $AB < A\Gamma$) η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη μεσοκάθετο της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Έστω E και Z οι προβολές του Δ στους φορείς των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{Z}\Gamma$.

ii. Να δείξετε ότι $AB = A\Gamma - 2\Gamma Z$.



Δ	ΔM μεσοκάθετος $B\Gamma$ AD διχοτόμος $\hat{A}$
Z	i. $B\hat{E}\Delta = \Delta\hat{Z}\Gamma$ ii. $AB = A\Gamma - 2\Gamma Z$

Σκέψη

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα.

ii. από το (i) ερώτημα έχουμε ότι $EB = \Gamma Z$. Στο σχήμα υπάρχουν και άλλα δύο ίσα τρίγωνα, τα $A\hat{\Delta}E$ και $A\hat{\Delta}Z$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $AE = AZ$. Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.

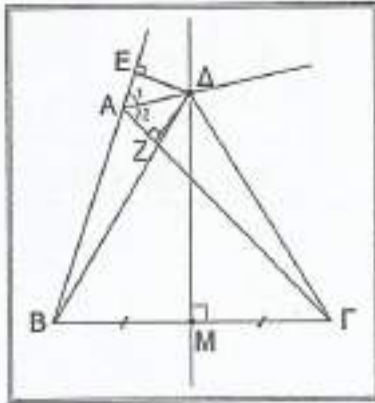
Λύση

- i. Τα τρίγωνα $B\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{Z}\Gamma$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, και έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες, τις $\Delta E = \Delta Z$, αφού η διχοτόμος $A\Delta$ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, και τις $\Delta B = \Delta \Gamma$ αφού το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου της $B\Gamma$, επομένως είναι ίσα.
- ii. Βλέπουμε ότι $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, αφού είναι ορθογώνια $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, και έχουν μία πλευρά $A\Delta$ κοινή και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος. Επομένως $AE = AZ$. Αφαιρούμε κατά μέλη τις $AE = AZ$ και $EB = \Gamma Z$ και έχουμε:
- $$\left. \begin{array}{l} AE - EB = AZ - \Gamma Z \Rightarrow AB = AZ - \Gamma Z \\ \text{όμως } AZ = A\Gamma - \Gamma Z \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A\Gamma - 2\Gamma Z.$$

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.37 Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma$), η διχοτόμος της $\hat{A}_1$ τέμνει τη μεσοκάθετο της πλευράς $B\Gamma$ στο Δ . Αν E και Z οι προβολές του Δ στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ναδειχθεί ότι:

- i. $BE = \Gamma Z$.
- ii. $AB = A\Gamma - 2 \cdot AZ$.



Δ	AD διχοτόμος $\hat{A}_1$ DM μεσοκάθετος $B\Gamma$
Z	$BE = \Gamma Z$ $AB = A\Gamma - 2 \cdot AZ$

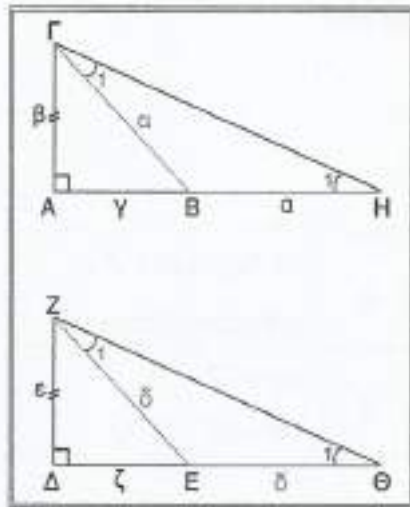
Λύση

- I. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle B\hat{E}\Delta$ και $\triangle \hat{Z}\Delta\Gamma$.
Είναι ορθογώνια αφού $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$,
επίσης $DE = DZ$ αφού το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της $\angle A$,
άρα ισχύει από τις πλευρές,
και $DB = D\Gamma$ αφού το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο της $B\Gamma$.
Άρα είναι ορθογώνια με δύο ομόλογες πλευρές ίσες. Επομένως είναι ίσα,
άρα $BE = \Gamma Z$.
- II. Είναι $\angle A\hat{E}\Delta = \angle A\hat{Z}\Delta$ αφού είναι ορθογώνια και έχουν AD κοινή,
και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού AD διχοτόμος, επομένως $AE = AZ$.
Αυτή τη σχέση την αφαιρούμε κατά μέλη από τη σχέση του (i) ερωτήματος και έχουμε.

$$\begin{aligned}
 BE - AE &= \Gamma Z - AZ \Rightarrow \\
 AB &= \Gamma Z - AZ \\
 \text{όμως } \Gamma Z &= A\Gamma - AZ \Bigg\} \Rightarrow AB = A\Gamma - 2 \cdot AZ.
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.38 Δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και ίσες περιμέτρους. Ναδειχθεί ότι είναι ίσα.



Δ	$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ $\beta = \varepsilon$ $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon + \zeta$
Z	$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$

Σκέψη

Προεκτείνουμε την άλλη κάθετη πλευρά κατά μήκος ίσο με την υποτεινούσα, ώστε να χρησιμοποιήσουμε το δεδομένο των ίσων περιμέτρων σε συνδυασμό με τα άλλα δεδομένα.

Λύση

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΗ = ΓΒ και την ΔΕ κατά τμήμα ΕΘ = ΖΕ.

Έτσι για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΗ και ΔΖΘ έχουμε:

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ.$$

$$ΑΓ = ΔΖ \text{ (από δεδομένο).}$$

$$ΑΗ = γ + α = ζ + δ = ΔΘ.$$

Επομένως έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες άρα είναι ίσα.

Έτσι $\hat{\Gamma}Η = \hat{Z}\Theta$ και $\hat{H}_1 = \hat{\Theta}_1$. Όμως το $\Gamma\hat{B}H$ είναι ισοσκελές από κατασκευή, οπότε $\hat{H}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και όμοια το $E\hat{Z}\Theta$ άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{Z}_1$.

Οπότε από $(\Gamma - \Pi - \Gamma)$ είναι $B\hat{\Gamma}H = E\hat{Z}\Theta$,

αφού $H\hat{\Gamma} = Z\hat{\Theta}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_1$ και $\hat{\Theta}_1 = \hat{H}_1$. Άρα $B\hat{\Gamma} = E\hat{Z} \Rightarrow \alpha = \delta$.

Επομένως για τα αρχικά ορθογώνια τρίγωνα έχουμε

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$$

$$ΑΓ = ΔΖ \text{ (από υπόθεση)}$$

$$B\hat{\Gamma} = E\hat{Z}$$

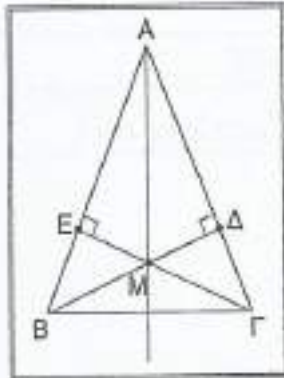
$\Rightarrow$ έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες άρα είναι ίσα.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.39 Σε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE . Αν M το σημείο τομής των υψών, να δείξετε ότι:

i. $BE = \Gamma\Delta$.

ii. Η AM είναι μεσοκάθετος των ΔE και $B\Gamma$.



Δ	$AB = A\Gamma$
	$B\Delta \perp AB$
	$\Gamma E \perp A\Gamma$
Z	i. $BE = \Gamma\Delta$
	ii. AM μεσοκάθετος των ΔE και $B\Gamma$

Σκέψη

- Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα που έχουν πλευρές τις ζητούμενες, όπως τα $\hat{\Gamma}\hat{E}\hat{B}$ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ ή $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E}$, από τα οποία θα πάρουμε $AE = A\Delta$, την οποία θα αφαιρέσουμε από την $AB = A\Gamma$.
- Αρκεί να δείξω ότι η AM είναι διχοτόμος, άρα ύψος και διάμεσος σε ισοσκελή τρίγωνα.

Λύση

- Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, τα οποία είναι ορθογώνια $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και έχουν $B\Gamma$ κοινή και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου. Άρα είναι ίσα επομένως $EB = \Delta\Gamma$.
- Γνωρίζουμε ότι $AB = A\Gamma$ και $EB = \Delta\Gamma$. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $AB - EB = A\Gamma - \Delta\Gamma \Rightarrow AE = A\Delta$.

Έτσι για τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{E}\hat{M}$ και $\hat{A}\hat{M}\hat{\Delta}$ έχουμε:

Είναι ορθογώνια $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.

AM κοινή και $AE = A\Delta$.

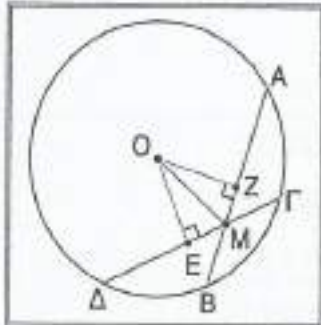
Οπότε είναι ίσα αφού έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες, άρα

$\hat{E}\hat{A}\hat{M} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Delta} \Rightarrow AM$ διχοτόμος της $\hat{A}$.

Συνεπώς η AM είναι διχοτόμος των ισοσκελών τριγώνων $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$, άρα ύψος και διάμεσος της βάσης τους, δηλαδή μεσοκάθετος των $E\Delta$ και $B\Gamma$.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.40 Δύο ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) τέμνονται σε σημείο M εσωτερικό του κύκλου. Να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος μιας γωνίας των χορδών διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.



Δ	$AB = \Gamma Z$
Z	OM διχοτόμος $\Delta \hat{M} A$

Σκέψη

Επειδή μόνο από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ δε δημιουργούνται ίσα τρίγωνα για σύγκριση, θα φέρουμε τα αποστήματα των χορδών τα οποία και αυτά είναι ίσα.

Λύση

Φέρουμε τα αποστήματα OE και OZ των χορδών $\Delta\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Έτσι για τα τρίγωνα $O\hat{E}M$ και $O\hat{M}Z$ έχουμε:

Είναι ορθογώνια $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$,

OM κοινή,

$OE = OZ$ απόστημα ίσων χορδών.

Επομένως $O\hat{E}M = O\hat{M}Z \Rightarrow \hat{E}MO = \hat{Z}MO \Rightarrow MO$ διχοτόμος $\Delta\hat{M}A$.

Η εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι αφού τα OE και OZ είναι ίσα ως αποστήματα ίσων χορδών, το O ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\Delta\hat{M}A$, συνεπώς ανήκει στη διχοτόμο της.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

3.41 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

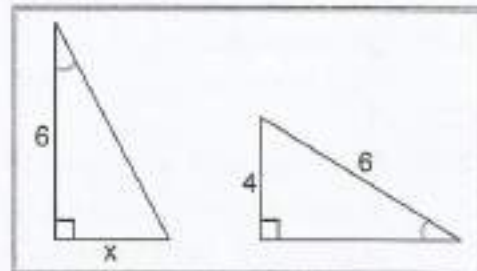
- α. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο οξείες γωνίες ίσες. ☐ ☐
- β. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος του είναι διάμεσος και διχοτόμος. ☐ ☐
- γ. Το απόστημα μιας χορδής ενός κύκλου διχοτομεί το τόξο της χορδής. ☐ ☐
- δ. Από σημείο μιας ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία. ☐ ☐

3.42 Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

I. Τα διπλανά ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν:

- A. $x = 6$
Γ. $x^2 = 20$

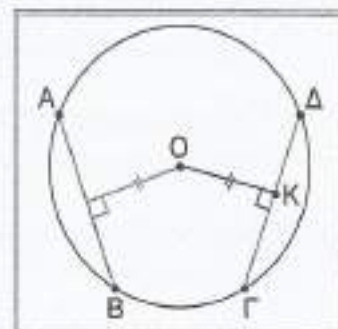
- B. $x = 4$
Δ. ποτέ



II. Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα αν $AB = 8$, τότε το τμήμα ΓΚ ισούται με:

- A. 2
Γ. 8

- B. 4
Δ. Δε γνωρίζουμε



3.43 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μία και μία ίσες.
- β. Το που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και
- γ. Δύο χορδές είναι ίσες αν τα είναι ίσα.
- δ. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας ανήκει στη της.

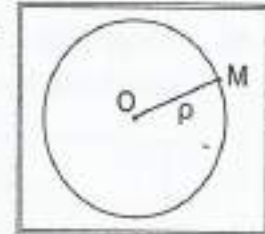
Άλλα Θέματα

- 3.44 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ (με $AB = A\Gamma$). Έστω M και N τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν οι μεσοκάθετες των ίσων πλευρών τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $ML = KN$.
- 3.45 Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.
- 3.46 Να αποδειχθεί ότι το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχει από τις κάθετες πλευρές του.
- 3.47 Από το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ φέρουμε κάθετες προς τις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ που τις τέμνουν αντίστοιχα στα σημεία Δ και E . Να αποδειχθεί ότι:
- i. $DM = ME$.
 - ii. $\widehat{DMA} = \widehat{EMA}$.
- 3.48 Να αποδειχθεί ότι τα άκρα της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τις ίσες πλευρές του.
- 3.49 Να αποδειχθεί ότι οι δύο κορυφές ενός τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο που φέρουμε από την τρίτη κορυφή του.
- 3.50 Να αποδειχθεί ότι αν δύο ύψη ενός τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 3.51 Έστω Δ σημείο της διχοτόμου γωνίας $\chi\hat{O}y$. Από το Δ φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο η οποία τέμνει τις Ox και Oy στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $OB = O\Gamma$ και $\Delta B = \Delta\Gamma$.

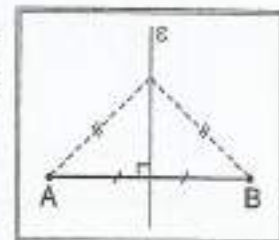
3.7 ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται το σύνολο των σημείων που έχουν μία κοινή ιδιότητα.

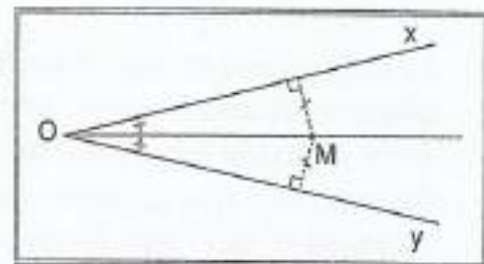
- Ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο.



- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του.



- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της.



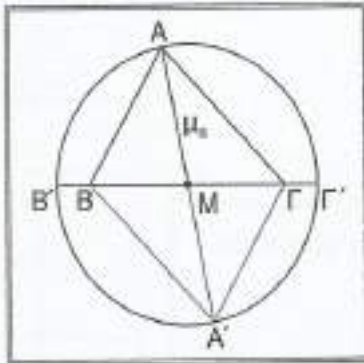
Μεθοδολογία

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα γεωμετρικού τόπου ακολουθούμε τρία στάδια:

- Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και, με βάση τη χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή στην οποία βρίσκεται (χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους βασικούς γεωμετρικούς τόπους που περιγράψαμε).
- Κατασκευάζουμε τη γραμμή που βρήκαμε και εξετάζουμε αν ένα τυχαίο σημείο της γραμμής αυτής ικανοποιεί την ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή που κατασκευάσαμε είναι ο ζητούμενος τόπος.
- Ελέγχουμε αν ο γεωμετρικός τόπος είναι ολόκληρη η γραμμή (ευθεία ή κύκλος) ή μόνο ένα τμήμα της (π.χ. χωρίς κάποια σημεία).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 3.65 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών A των τριγώνων $AB\Gamma$ που έχουν σταθερή την πλευρά $B\Gamma = a$, και τη διάμεσο AM με γνωστό μήκος.

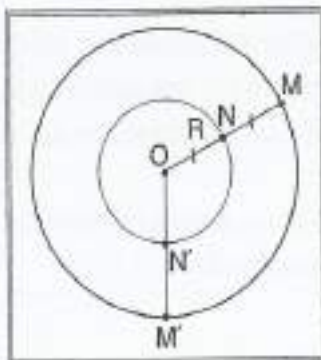


Δ	$B\Gamma = a$ $AM = \mu_a$ διάμεσος
Z	γ. τ. του A

Λύση

- i. Το A απέχει από το μέσο M της $B\Gamma$ σταθερή απόσταση ίση με μ_a , επομένως θα ανήκει στον κύκλο με κέντρο M και ακτίνα μ_a .
- ii. Έστω A' σημείο του κύκλου (M, μ_a) , επομένως στο τρίγωνο $A'B\Gamma$ η $A'M$ είναι διάμεσος και ίση με μ_a , οπότε το A' ανήκει στο ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.
- iii. Τα σημεία B' και Γ' (δηλαδή τα κοινά σημεία της ευθείας $B\Gamma$ και του κύκλου) δε σχηματίζουν τρίγωνο, συνεπώς δεν ανήκουν στο ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία του κύκλου (M, μ_a) , πλην των σημείων B' και Γ' .

- 3.66 Δίνεται κύκλος (O, R) . Αν N τυχαίο σημείο του κύκλου και M σημείο στην προέκταση της ON , ώστε $ON = NM$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M , όταν το N διαγράφει τον κύκλο.



Δ	$ON = NM$
Z	γ. τ. του M

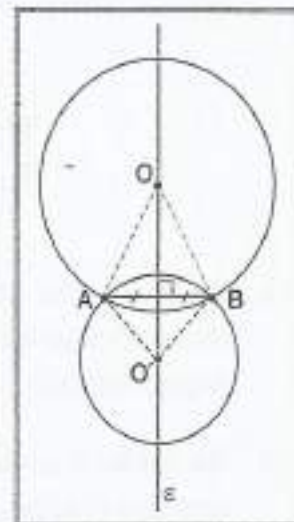
Λύση

- i. Έστω M το σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, τότε το M θα απέχει από το O απόσταση ίση με $OM = ON + NM = 2 \cdot ON = 2 \cdot R$, επομένως θα ανήκει στον κύκλο $(O, 2R)$.
- ii. Έστω M' σημείο του κύκλου $(O, 2R)$, τότε θα είναι:
- $$\begin{aligned} OM' &= 2 \cdot R \Rightarrow \\ \Rightarrow ON' + N'M' &= 2R \Rightarrow \\ \Rightarrow R + N'M' &= 2R \Rightarrow \\ \Rightarrow N'M' &= R \stackrel{ON'=R}{\Rightarrow} N'M' = ON', \end{aligned}$$
- επομένως το M' ανήκει στο ζητούμενο γεωμετρικό τόπο ο οποίος είναι ο κύκλος $(O, 2R)$.

3.67 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B .

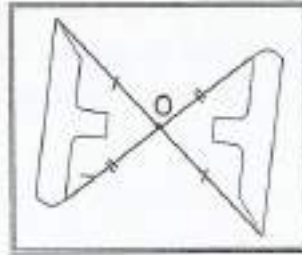
Λύση

- i. Έστω O σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B οπότε ισαπέχει από αυτά, επομένως θα ανήκει στη μεσοκάθετό του.
- ii. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του AB και παίρνουμε O' σημείο της. Επειδή το O' ανήκει στη μεσοκάθετο του AB θα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $O'A = O'B$, επομένως ο κύκλος $(O', O'A)$ διέρχεται από τα A και B , συνεπώς το O' είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή της μεσοκαθέτου ε του AB .



3.8 – 3.9 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

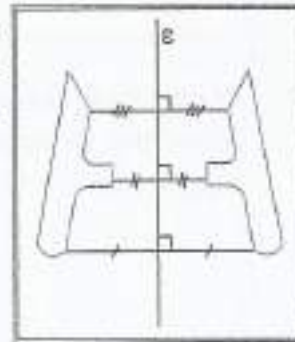
- Δύο σχήματα Σ και Σ' ονομάζονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O , όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου Σ ως προς το O και αντίστροφα.



Ένα σχήμα παρουσιάζει κεντρική συμμετρία, όταν το συμμετρικό του ως προς ένα σημείο O είναι το ίδιο το σχήμα. Το σημείο O ονομάζεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος.



- Δύο σχήματα Σ και Σ' ονομάζονται συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε , όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα.



Ένα σχήμα παρουσιάζει αξονική συμμετρία όταν το συμμετρικό του ως προς μία ευθεία ε είναι το ίδιο το σχήμα. Η ευθεία ε ονομάζεται άξονας συμμετρίας του σχήματος.



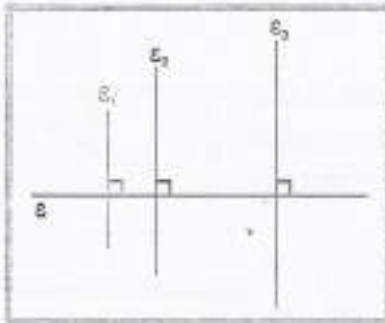
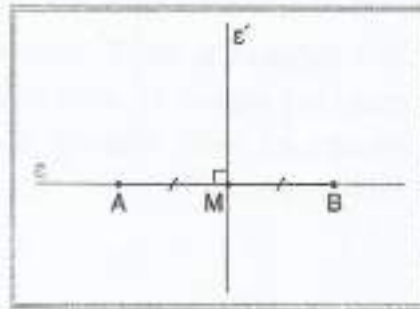
Σχόλιο

Ένα σχήμα που έχει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, έχει και κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των καθέτων.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

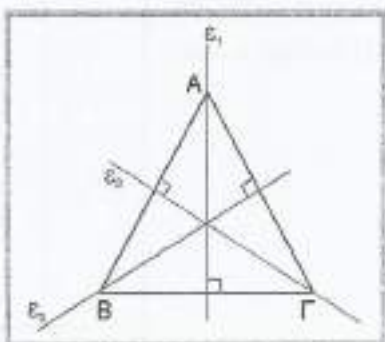
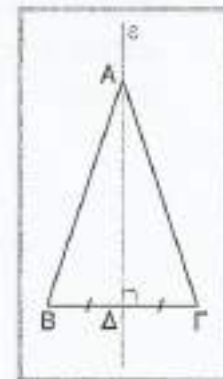
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΕ ΒΑΣΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει άξονες συμμετρίας το φορέα του και τη μεσοκάθετό του και κέντρο συμμετρίας το μέσο του.



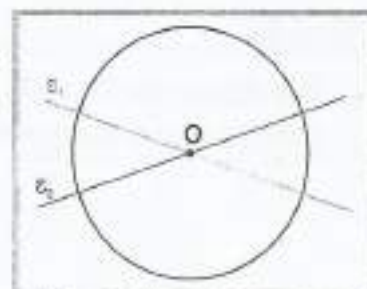
- Η ευθεία έχει άξονες συμμετρίας κάθε ευθεία κάθετη σ' αυτήν, καθώς και την ίδια ευθεία και κέντρο συμμετρίας κάθε σημείο της.

- Το ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας το φορέα του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση του (σημ. δεν έχει κέντρο συμμετρίας).



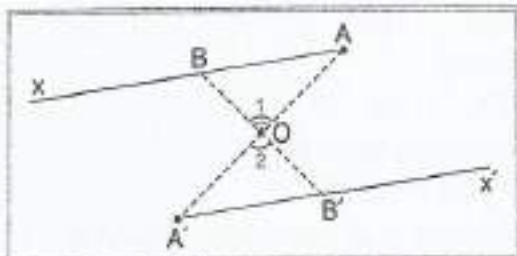
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονες συμμετρίας τους φορείς των υψών του (σημ. δεν έχει κέντρο συμμετρίας).

- Ο κύκλος έχει άξονες συμμετρίας το φορέα κάθε διαμέτρου του και κέντρο συμμετρίας το κέντρο του.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 3.75 Αν δύο ημιευθείες Ax και $A'x'$ είναι συμμετρικές ως προς σημείο O , να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το O και τέμνει την Ax σε σημείο B τέμνει και την $A'x'$ σε σημείο B' ώστε $AB = A'B'$.



Δ	$Ax, A'x'$ συμμετρικές ως προς O
Σ	B' συμμετρικό του B $AB = A'B'$

Σκέψη

Πρέπει να δείξουμε ότι $AB = A'B'$, άρα είναι προφανές ότι αρκεί να συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB και $OA'B'$.

Λύση

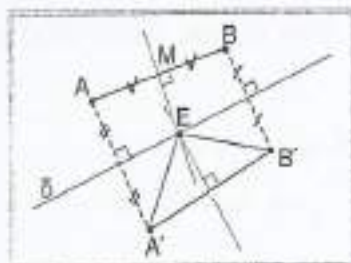
Έστω ε η ευθεία που περνάει από το O μη παράλληλη προς την Ax , ώστε να την τέμνει σε σημείο B . Επειδή Ax και $A'x'$ είναι συμμετρικές ως προς το O , η ευθεία ε θα τέμνει την $A'x'$ στο σημείο B' που είναι το συμμετρικό του B ως προς το O . Τότε $OB = OB'$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα: $O\hat{A}B$ και $O\hat{A}'B'$

Έχουμε: $OA = OA'$ (από συμμετρία),
 $OB = OB'$ (από συμμετρία),
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (κατακορυφήν),

Άρα από (Π - Γ - Π) θα είναι $O\hat{A}B = O\hat{A}'B'$, οπότε $AB = A'B'$

- 3.76 Δίνεται ευθεία δ , δύο σημεία A και B που δεν ανήκουν στην ευθεία και τα συμμετρικά τους A' και B' αντίστοιχα ως προς τη δ . Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει τη δ στο E , να αποδειχθεί ότι το E ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.



Δ	A' συμμετρικό A B' συμμετρικό B EM μεσοκάθετος AB
Σ	E ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$

Σκέψη

Αρκεί να δείξουμε ότι το Ε ισαπέχει από τα Α' και Β'.

Λύση

Επειδή Α και Α' συμμετρικά ως προς τη δ, θα ισχύει από τον ορισμό της αξονικής συμμετρίας ότι η δ είναι μεσοκάθετος του ΑΑ' και επειδή το Ε ανήκει στη δ ισαπέχει από τα Α και Α', οπότε

$$AE = A'E. \quad (1)$$

Τα Β και Β' είναι συμμετρικά ως προς τη δ, άρα

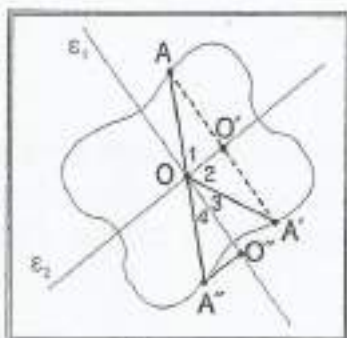
για τον ίδιο λόγο θα έχουμε $BE = B'E. \quad (2)$

Όμως το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ δηλαδή $AE = BE \quad (3).$

Αν (1), (2) και (3), συμπεραίνουμε ότι $A'E = AE = BE = B'E$,

οπότε το Ε ισαπέχει από τα Α' και Β' δηλαδή ανήκει στη μεσοκάθετο του Α'Β'.

3.77 Αν ένα σχήμα έχει δύο άξονες συμμετρίας κάθετους μεταξύ τους, να αποδειχθεί ότι έχει και κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των αξόνων.



	$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
Δ	Α, Α' συμμετρικά ως προς ε_2 Α, Α'' συμμετρικά ως προς ε_1
Ζ	Α, Α'' συμμετρικά ως προς Ο

Σκέψη

Για τυχαίο σημείο Α του σχήματος, θα δείξουμε ότι το συμμετρικό του ως προς το Ο ανήκει στο σχήμα.

Λύση

Έστω Α τυχαίο σημείο του σχήματος.

Βρίσκουμε το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε_2

(το οποίο προφανώς ανήκει στο σχήμα αφού η ε_2 είναι άξονας συμμετρίας του).

Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} \text{ ορθή (λόγω συμμετρίας)} \\ O'A = O'A' \text{ (λόγω συμμετρίας)} \\ OO' \text{ κοινή} \end{array} \right\} \Rightarrow O\hat{A}O' = O\hat{A}'O' \Rightarrow AO = OA' \quad (1)$$

$$\text{και } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (2).$$

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

Όμοια αν A'' το συμμετρικό του A' ως προς την ε_1 , βρίσκουμε ότι το A'' ανήκει στο σχήμα και $OA' = OA''$ (3)

και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ (4),

Άρα από (1), (3) $\Rightarrow OA = OA''$

και από (2), (4) $\Rightarrow \angle OA'' = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2 \cdot \hat{O}_2 + 2 \cdot \hat{O}_3 =$
 $= 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 180^\circ$, αφού $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

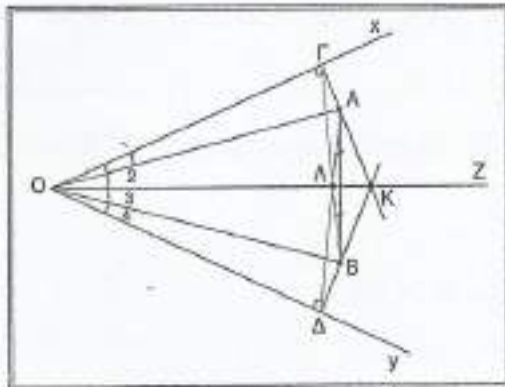
Επομένως το A'' είναι το συμμετρικό του A ως προς το O , το οποίο ανήκει στο σχήμα.

3.78 Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και έστω Oz η διχοτόμος της. Παίρνουμε τυχαίο σημείο A και έστω B το συμμετρικό του ως προς την Oz . Φέρουμε τις κάθετους $AG \perp Ox$ και $BD \perp Oy$. Να αποδειχθεί ότι:

i. $AG = BD$. ii. $AD = BG$.

iii. οι AG και BD (προεκτεινόμενες εν ανάγκη) τέμνονται πάνω στην Oz .

iv. Όμοια με το (iii) και οι AD και BG .



Δ	Oz διχοτόμος $x\hat{O}y$ A, B συμμετρικά ως προς Oz $AG \perp Ox$ $BD \perp Oy$
Z	$AG = BD$ $AD = BG$ K ανήκει στην Oz L ανήκει στην Oz

Σκέψη

Για το (i) και (ii) αρκεί να συγκρίνουμε κατάλληλα τρίγωνα.

Για το (iii) αρκεί να δείξουμε ότι K ισαπέχει από τις πλευρές $x\hat{O}y$, ενώ για

το (iv) αρκεί να δείξουμε ότι ανήκει στη μεσοκάθετο του AB δηλαδή την Oz .

Λύση

- i. Επειδή A και B συμμετρικά ως προς την Oz , αυτή θα είναι μεσοκάθετος του AB , οπότε το O θα ισαπέχει από τα A και B .

δηλαδή το $\triangle OAB$ θα είναι ισοσκελές με Oz διχοτόμο,

άρα $\hat{O}_2 = \hat{O}_3$ (1)

Όμως η Oz διχοτομεί την $x\hat{O}y$,

άρα $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_4$.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

Έτσι θα είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{O} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{O}$ (αφού ορθογώνια με μία πλευρά και μία προσκείμενη οξεία γωνία ίσες).

$$\text{Αφού: } \begin{cases} \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ \text{ (από υπόθεση).} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_4, \\ OA = OB \text{ (Οz μεσοκάθετος AB).} \end{cases} \quad \text{Άρα } A\Gamma = B\Delta.$$

II. Από το $\Pi - \Gamma - \Pi$ θα είναι $\hat{O}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{O}\hat{\Gamma}\hat{B}$, αφού:

$$OA = OB \quad (\text{Οz μεσοκάθετος AB}).$$

$$OD = OG \quad (\text{από το i}).$$

$$\hat{A}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{B} \quad (\hat{O} - \hat{O}_1 = \hat{O} - \hat{O}_4).$$

$$\text{Συνεπώς } A\Delta = B\Gamma.$$

Συμπέρασμα

Προσοχή! Δεν πρέπει να χρησιμοποιηθούν στοιχεία που προϋποθέτουν ότι το K ανήκει στην Oz , όπως π.χ. $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{K} = \hat{K}\hat{O}\hat{\Delta}$ από διχοτόμο Oz ή $KA = KB$ από Oz μεσοκάθετος AB .

III. Έστω K το σημείο τομής των $A\Gamma$ και $B\Delta$. Για τα ορθογώνια τρίγωνα $\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{K}$ και $\hat{O}\hat{K}\hat{\Delta}$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ \\ OG = OD \text{ από το (i)} \\ OK \text{ κοινή} \end{array} \right\} \text{Επομένως είναι ίσα, άρα } K\Gamma = K\Delta,$$

οπότε το K ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\chi\hat{O}y$,

άρα ανήκει στη διχοτόμο Oz .

III. Έστω Λ το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$.

$$\text{Από } (\Pi - \Gamma - \Pi) \text{ έχουμε ότι } \hat{A}\hat{\Lambda}\hat{O} = \hat{O}\hat{\Lambda}\hat{B}.$$

$$\text{Αφού } \begin{cases} OA \text{ κοινή} \\ AO = BO \text{ από (i)} \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_3 \text{ από (1),} \end{cases}$$

$$\text{άρα } A\Lambda = \Lambda B,$$

οπότε το Λ ισαπέχει από τα A και B ,

δηλαδή ανήκει στη μεσοκάθετο του AB την Oz .

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

- 3.79 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Α
- α. Ένα σχήμα με δύο άξονες συμμετρίας έχει πάντοτε και κέντρο συμμετρίας ☐ ☐
- β. Αν δύο σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε, τότε η ε είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. ☐ ☐
- γ. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα κέντρο συμμετρίας. ☐ ☐
- δ. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει έναν άξονα συμμετρίας. ☐ ☐
- ε. Το κέντρο συμμετρίας ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων. ☐ ☐
- 3.80 Να βρείτε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις.
- i. Το πλήθος των αξόνων συμμετρίας ενός κύκλου είναι:
α. 0 β. 1 γ. 2 δ. άπειρο
- ii. Το πλήθος των κέντρων συμμετρίας μιας ευθείας είναι:
α. 0 β. 1 γ. 2 δ. άπειρο
- iii. Δύο συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα είναι:
α. ίσα β. ομόλογα γ. όμοια δ. δε γνωρίζουμε

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

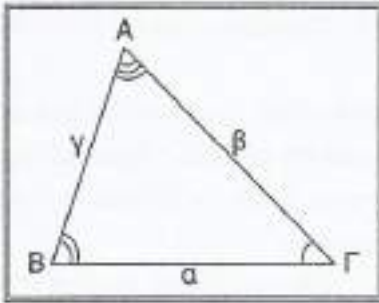
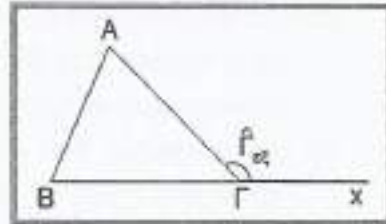
- 3.81 Να αποδειχθεί ότι το μέσο O ενός ευθύγραμμου τμήματος AB είναι κέντρο συμμετρίας του.
- 3.82 Δίνονται δύο σημεία A και A' συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε . Αν B και Γ δύο σημεία της ευθείας ε , να αποδειχθεί ότι $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}'\Gamma$.
- 3.83 Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία δ κάθετη στην ευθεία ε είναι άξονας συμμετρίας της ε .
- 3.84 Έστω μία ευθεία ε και A, B δύο σημεία που δεν ανήκουν στην ε . Έστω K το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του AB με την ε , και A' και B' τα συμμετρικά των A και B αντίστοιχα ως προς την ε . Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (K, KA) διέρχεται από τα σημεία A, B, A' και B' .

ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 3.85 Έστω O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Αν A', B' και Γ' τα συμμετρικά του O ως προς τις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
- 3.86 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και AH το ύψος του. Έστω Δ το συμμετρικό του H ως προς την ευθεία AB και E το συμμετρικό του H ως προς την ευθεία $A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι:
- τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.
 - $B\Delta \parallel \Gamma E$.
 - $A\Delta = AE$.

3.10 – 3.11 – 3.12 ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΑ

- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμιά από τις απέναντι γωνίες του (π.χ. $\hat{\Gamma}_{\alpha} > \hat{A}$ και $\hat{\Gamma}_{\alpha} > \hat{B}$).



- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα (π.χ. $a > \gamma \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{\Gamma}$).

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

- Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους (π.χ. $|\beta - \gamma| < a < \beta + \gamma$).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

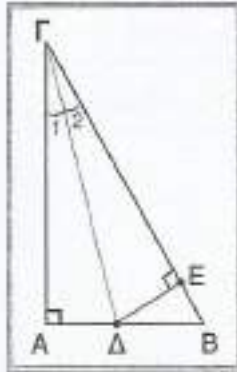
- Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή ή αμβλεία γωνία.
- Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° .
- Απέναντι από ορθή ή αμβλεία γωνία ενός τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του.
- Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.
- Κάθε χορδή ενός κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.
- Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή ενός τριγώνου με την απέναντι πλευρά του είναι:
διάμεσος και διχοτόμος
ή διάμεσος και ύψος
ή διχοτόμος και ύψος,
τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση αυτήν που αντιστοιχεί στο ύψος (ή στη διάμεσο).
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι ομοίως άνισες και αντίστροφα.

Μεθοδολογία

- Για να λύσουμε ασκήσεις που ζητείται να αποδειχθεί μία ανισοτική σχέση, κοιτάμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Έχουμε τρεις περιπτώσεις:
 - i. Αν οι σχέσεις που δίνονται ή ζητούνται περιέχουν μόνο γωνίες, χρησιμοποιούμε το θεώρημα για την εξωτερική γωνία του τριγώνου.
 - ii. Αν οι σχέσεις που δίνονται ή ζητούνται περιέχουν πλευρές και γωνίες, χρησιμοποιούμε το θεώρημα ότι απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα.
 - iii. Αν οι σχέσεις που δίνονται ή ζητούνται περιέχουν μόνο πλευρές, χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα.
 - iv. Αν οι σχέσεις που δίνονται περιέχουν ισότητες δύο πλευρών και μία ανισότητα, χρησιμοποιούμε το πόρισμα που λέει ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και την περιεχόμενη γωνία άνιση, τότε και η τρίτη πλευρά είναι ομοιοτρόπως άνιση και αντίστροφα.
- Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, δείχνουμε ένα από τα παρακάτω:
 - έχει δύο ίσες πλευρές,
 - έχει δύο ίσες γωνίες,
 - ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ταυτόχρονα δύο από τα εξής τρία στοιχεία: ύψος, διάμεσος ή διχοτόμος.
- Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, δείχνουμε ένα από τα παρακάτω:
 - έχει τρεις ίσες πλευρές,
 - έχει τρεις ίσες γωνίες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.87 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδειχθεί ότι $AD < DB$.



$\hat{A}$	$\hat{A} = 90^\circ$
$\hat{\Gamma}$	$\hat{\Gamma}\Delta$ διχοτόμος
Z	$AD < DB$

Σκέψη

Για να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, πρέπει ή να βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο ώστε να συγκρίνουμε τις απέναντι γωνίες ή να βρίσκονται σε διαφορετικά τρίγωνα που όμως έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες τους άνισες σύμφωνα με την εφαρμογή – πόρισμα. Επειδή το τελευταίο δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή, «μεταφέρουμε» την AD σε τρίγωνο που έχει τη DB (π.χ. με τη βοήθεια ίσων τριγώνων). Έτσι πρέπει να φέρουμε βοηθητική γραμμή την $\Delta E \perp BG$.

Λύση

Φέρουμε από το Δ την $\Delta E \perp BG$.

Επειδή το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$, ισπαέχει από τις πλευρές της, άρα $DA = DE$ (1).

(Εναλλακτικά, συγκρίνοντας τα $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{D}\hat{E}\hat{\Gamma}$.)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{D}\hat{E}\hat{B}$, η DB είναι υποτείνουσα, δηλαδή μεγαλύτερη από την κάθετη DE ,

οπότε $DE < DB \Rightarrow DA < DB$.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.88 Σε τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ παίρνουμε O εσωτερικό του σημείο. Έστω Λ και M τα σημεία τομής των BO και GO με τις AG και AB αντίστοιχα. Αν $BO = GO$ και $OL = OM$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές.



Δ	$BO = GO$ $OL = OM$
Z	$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ισοσκελές

Σκέψη

Είναι προφανές από το σχήμα ότι έχουμε ίσα τρίγωνα $\hat{M}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{\Lambda}\hat{O}\hat{\Gamma}$. Θα τα χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι το $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχει δύο γωνίες ίσες.

Λύση

Από (Π – Γ – Π) είναι $\hat{M}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Lambda}\hat{O}\hat{\Gamma}$ αφού,
 $OB = OG$ (από υπόθεση),
 $OM = OL$ (από υπόθεση),
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν).

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$. (1)

Άρα το $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές,

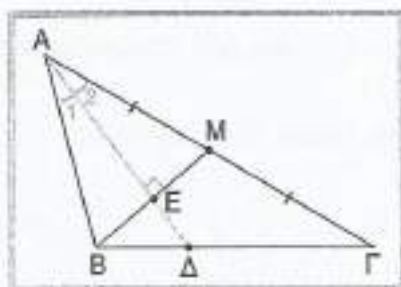
επομένως έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες ίσες, δηλαδή $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) + (2) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$,

άρα το $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχει δύο γωνίες ίσες επομένως είναι ισοσκελές.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

- 3.91 Σε τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ η διχοτόμος $\hat{A}\Delta$ τέμνει κάθετα τη διάμεσο BM . Να αποδειχθεί ότι: i. $A\Gamma = 2 \cdot AB$ ii. $AB < B\Gamma$.



Δ	$\hat{A}\Delta$ διχοτόμος $\hat{A}$ BM διάμεσος $\hat{A}\Delta \perp BM$
Σ	i. $A\Gamma = 2 \cdot AB$ ii. $AB < B\Gamma$

Σκέψη

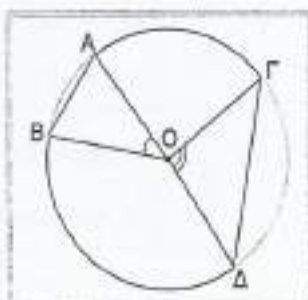
- i. Αρκεί να δείξουμε ότι η AB είναι ίση με το μισό της $A\Gamma$, δηλαδή το AM ή το $M\Gamma$. Μια προσεκτική ματιά στο σχήμα (αφού έχουμε σημειώσει όλα τα δεδομένα) μας οδηγεί στη λύση.
- ii. Επειδή δε γνωρίζουμε κάτι για τις γωνίες του τριγώνου $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ώστε να συμπεράνουμε για τις απέναντι πλευρές, χρησιμοποιούμε το ερώτημα (i) μαζί με την τριγωνική ανισότητα.

Λύση

- i. Στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{M}$ έχουμε AE ύψος και διχοτόμος οπότε, το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = AM$ και αφού $AM = \frac{A\Gamma}{2}$, συμπεραίνουμε ότι $AB = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow A\Gamma = 2 \cdot AB$.
- ii. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχουμε: $A\Gamma < AB + B\Gamma \stackrel{ii}{\Rightarrow} 2AB < AB + B\Gamma \Rightarrow 2AB - AB < B\Gamma \Rightarrow AB < B\Gamma$.

- 3.92 Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

i. Ευθύ



Δ	$\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta}$
Σ	$AB < \Gamma\Delta$

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

✍ Λύση

Έστω ότι $\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta}$, άρα και για τις επίκεντρες γωνίες που έχουν αυτά τα αντίστοιχα τόξα θα έχουμε $\hat{A}\hat{O}\hat{B} < \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$.

Επομένως τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$ έχουν από δύο πλευρές ίσες ως ακτίνες του κύκλου και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες.

Σύμφωνα με την εφαρμογή - πόρισμα θα έχουν τις τρίτες πλευρές άνισες, δηλαδή $AB < \Gamma\Delta$.

ii. Αντίστροφο

Δ	$AB < \Gamma\Delta$
Z	$\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta}$

Σκέψη

Σε τέτοιες περιπτώσεις που ζητείται το αντίστροφο μιας πρότασης είναι συνήθης τακτική να χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, όπως έχουμε περιγράψει σε προηγούμενη άσκηση.

✍ Λύση

Έστω ότι έχουμε $AB < \Gamma\Delta$.

Αν ισχύει $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$, σύμφωνα με την απόδειξη της ευθείας πρότασης (i)

θα πρέπει να είναι και $AB > \Gamma\Delta$, άτοπο.

Αν ισχύει ότι $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, τότε από γνωστή πρόταση θα είναι

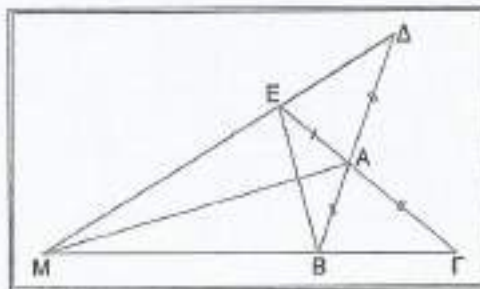
$AB = \Gamma\Delta$ άτοπο.

Επομένως η μόνη περίπτωση είναι να ισχύει $\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta}$.

3.93 Σε τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ (με $AB < A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA προς το μέρος του A κατά τμήματα $AD = A\Gamma$ και $AE = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία DE τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο M . Να αποδειχθεί ότι:

i. Το τρίγωνο $\hat{M}\hat{B}\hat{E}$ είναι ισοσκελές.

ii. Η διχοτόμος της $\hat{B}\hat{M}\hat{E}$ διέρχεται από το A .



Δ	$AE = AB$ $AD = A\Gamma$
Z	i. $\hat{M}\hat{B}\hat{E}$ ισοσκελές ii. AM διχοτόμος $\hat{B}\hat{M}\hat{E}$

Σκέψη

- i. Εφ' όσον δε γνωρίζουμε ότι οι γωνίες $\hat{M}\hat{A}\hat{E}$ και $\hat{M}\hat{A}\hat{B}$ είναι ίσες, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\hat{M}\hat{E}\hat{A}$ και $\hat{M}\hat{A}\hat{B}$ ή τα $\hat{M}\hat{A}\hat{D}$ και $\hat{M}\hat{A}\hat{G}$. Οπότε θα δείξουμε ότι το τρίγωνο $\hat{M}\hat{E}\hat{B}$ έχει δύο γωνίες ίσες.
- ii. Αρκεί να δείξουμε ότι η MA είναι διχοτόμος της $B\hat{M}\hat{E}$, εφ' όσον η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

Λύση

i. Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} AB = AE \quad (\text{από υπόθεση}) \\ AG = AD \quad (\text{από υπόθεση}) \\ \hat{E}\hat{A}\hat{D} = \hat{B}\hat{A}\hat{G} \quad (\text{ως κατακορυφήν}) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{A}\hat{E}\hat{D}.$$

$$\text{Άρα} \quad \hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{A}\hat{E}\hat{D} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A}\hat{B}\hat{G} = 180^\circ - \hat{A}\hat{E}\hat{D} \Rightarrow \hat{M}\hat{B}\hat{A} = \hat{M}\hat{E}\hat{A} \quad (1).$$

Όμως το τρίγωνο $\hat{A}\hat{E}\hat{B}$ είναι ισοσκελές άρα $\hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{A}\hat{E}\hat{B} \quad (2)$.

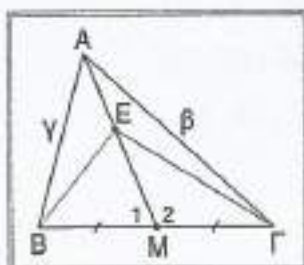
Έτσι αφαιρώντας κατά μέλη

$$\begin{aligned} (1) - (2) &\Rightarrow \hat{M}\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{M}\hat{E}\hat{A} - \hat{A}\hat{E}\hat{B} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{M}\hat{B}\hat{E} = \hat{M}\hat{E}\hat{B}. \end{aligned}$$

Επομένως το τρίγωνο $\hat{M}\hat{E}\hat{B}$ έχει δύο ίσες γωνίες, οπότε είναι ισοσκελές με $MB = ME$.

- ii. Επειδή $AB = AE$ και $MB = ME$, από (i) έχουμε ότι τα A και M ισαπέχουν από τα B και E , οπότε η AM είναι μεσοκάθετος του BE . Έτσι στο ισοσκελές $\hat{M}\hat{B}\hat{E}$, η AM είναι ύψος άρα και διχοτόμος της $B\hat{M}\hat{E}$. Γνωρίζουμε όμως ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική, οπότε η διχοτόμος της $B\hat{M}\hat{E}$ διέρχεται από το A .

3.94 Αν σε τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$ είναι $\beta > \gamma$ και E τυχαίο σημείο της διαμέσου AM , να αποδειχθεί ότι: $EG > EB$.



Δ	$\beta > \gamma$ AM διάμεσος
Z	$EG > EB$

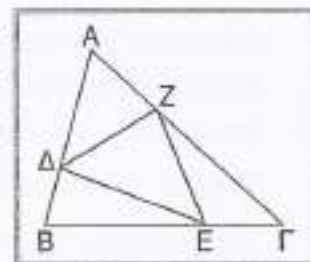
Σκέψη

Επειδή στο τρίγωνο $\triangle E\hat{B}\Gamma$ δεν μπορούμε να βρούμε κάτι για τις γωνίες $\angle E\hat{B}\Gamma$ και $\angle E\hat{\Gamma}B$, αφού το E είναι τυχαίο σημείο, ώστε μετά να συμπεράνουμε για τις απέναντι πλευρές, έτσι θα χρησιμοποιήσουμε την εφαρμογή - πόρισμα για τα τρίγωνα $\triangle E\hat{M}B$ και $\triangle E\hat{M}\Gamma$, που έχουν δύο πλευρές ίσες και οι τρίτες πλευρές είναι οι ζητούμενες. Άρα το πρόβλημα είναι να συγκρίνουμε τις γωνίες $\hat{M}_1$ και $\hat{M}_2$, το οποίο όμως με χρήση του ίδιου πορίσματος και του δεδομένου $\beta > \gamma$ έχει λυθεί αμέσως.

✎ Λύση

Τα τρίγωνα $\triangle A\hat{M}B$ και $\triangle A\hat{M}\Gamma$ έχουν δύο πλευρές ίσες, τις $BM = M\Gamma$, αφού AM διάμεσος, και την AM κοινή.
Οι τρίτες πλευρές είναι άνισες αφού από υπόθεση $\beta > \gamma$, οπότε και οι περιεχόμενες των ίσων πλευρών γωνίες είναι άνισες, δηλαδή $\hat{M}_1 < \hat{M}_2$ (1).
Τα τρίγωνα $\triangle E\hat{M}B$ και $\triangle E\hat{M}\Gamma$ έχουν δύο ίσες πλευρές τις $BM = M\Gamma$ (M μέσο $B\Gamma$) και την EM κοινή και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες άνισες. Οπότε, λόγω της (1) $\Rightarrow EB < E\Gamma$.

3.95 Στις πλευρές AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ τριγώνου $\triangle A\hat{B}\Gamma$, παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ , E και Z . Να αποδειχθεί ότι η περίμετρος του $\triangle E\hat{\Delta}Z$ είναι μικρότερη της περιμέτρου του $\triangle A\hat{B}\Gamma$.



Σκέψη

Επειδή δεν έχουμε δεδομένα για γωνίες και η σχέση που θέλουμε να δείξουμε αποτελείται από πλευρές τριγώνων, γίνεται φανερό ότι θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα.

✎ Λύση

Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\triangle A\hat{\Delta}Z$: $\Delta Z < A\Delta + AZ$ (1).
Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\triangle \hat{B}E\Delta$: $\Delta E < \Delta B + BE$ (2).
Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\triangle Z\hat{E}\Gamma$: $ZE < Z\Gamma + \Gamma E$ (3).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) έχουμε:
 $\Delta Z + \Delta E + ZE < A\Delta + AZ + \Delta B + BE + Z\Gamma \Rightarrow$
 $\Delta Z + \Delta E + ZE < A\Delta + \Delta B + AZ + Z\Gamma + BE + \Gamma E \Rightarrow$
 $\Delta Z + \Delta E + ZE < AB + A\Gamma + B\Gamma.$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

- 3.97** Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ
- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| α. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την εσωτερική του. | ☐ | ☐ |
| β. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία αμβλεία γωνία. | ☐ | ☐ |
| γ. Αν ένα τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες του άνισες μεταξύ τους, τότε είναι σκαληνό. | ☐ | ☐ |
| δ. Όταν το ύψος ενός τριγώνου είναι μεσοκάθετος της αντίστοιχης πλευράς, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. | ☐ | ☐ |
| ε. Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντοτε μικρότερο από 90° . | ☐ | ☐ |
- 3.98** Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:
- Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ τότε:

α. $AB < AG$	β. $AB = AG$	γ. $AB > AG$	δ. $B\Gamma < AB$
--------------	--------------	--------------	-------------------
 - Ποια τριάδα των παρακάτω αριθμών παριστάνει μήκη πλευρών ενός τριγώνου;

α. (2, 7, 9)	β. (4, 10, 5)	γ. (1, 1, 3)	δ. (4, 4, 7)
--------------	---------------	--------------	--------------
- 3.99** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- Η είναι η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου.
 - Αν κάθε διάμεσος ενός τριγώνου είναι και διχοτόμος του, τότε το τρίγωνο είναι
 - Κάθε χορδή ενός κύκλου είναι ή ίση της διαμέτρου.
 - Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από των άλλων δύο πλευρών του.
 - Κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο γωνίες.

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

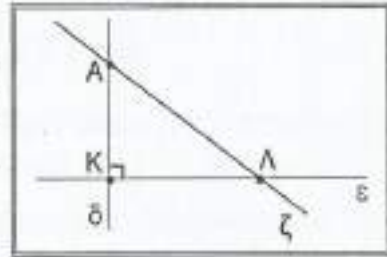
- 3.100 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Από την κορυφή B της βάσης του φέρουμε τυχαία ευθεία $B\Delta$ εντός του τριγώνου, η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδειχθεί ότι $B\Delta > \Delta\Gamma$.
- 3.101 Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου τέμνονται σε σημείο O . Αν $AB > A\Gamma$, να αποδειχθεί ότι $OB > OG$.
- 3.102 Να αποδειχθεί ότι κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από την ημιπερίμετρό του.
- 3.103 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, η AB είναι η μεγαλύτερη και η $\Gamma\Delta$ η μικρότερη πλευρά του. Να αποδειχθεί ότι i. $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} > \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και ii. $B\hat{\Gamma}\hat{\Delta} > B\hat{\Delta}\hat{A}$.
- 3.104 Σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} > \hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι $A\Gamma > B\Delta$.
- 3.105 Να αποδειχθεί ότι αν οι κάθετοι που φέρουμε από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου προς τις άλλες δύο πλευρές είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 3.106 Στις πλευρές AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τυχαία σημεία Δ , E και Z . Να αποδειχθεί ότι η περίμετρος του τριγώνου $\triangle EZ\Delta$ είναι μικρότερη από την περίμετρο του $\triangle AB\Gamma$.
- 3.107 Να αποδειχθεί ότι κάθε διάμεσος ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το ημίθροισμα των δύο πλευρών που περιέχουν τη διάμεσο και μεγαλύτερη από την ημιδιαφορά τους σε απόλυτη τιμή.
- 3.108 Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι:
- $\mu_a > \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.
 - $\mu_a + \mu_b + \mu_\gamma > \tau$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.
- 3.109 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι:
- $U_a > \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.
 - $U_a + U_b + U_\gamma > \tau$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

- 3.110 Να αποδειχθεί ότι η διάμετρος ενός κύκλου είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη χορδή του.
- 3.111 Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο AB και έστω Γ τυχαίο σημείο της ακτίνας OB . Αν M σημείο του κύκλου να αποδειχθεί ότι:
i. $GM < GA$. ii. $GM > GB$.
- 3.112 Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι:
i. $\delta_a > \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$,
ii. $\delta_a + \delta_\beta + \delta_\gamma > \tau$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.
- 3.113 Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και Δ τυχαίο εσωτερικό σημείο της $B\hat{\Gamma}$. Η κάθετη από το Δ στην ευθεία AB την τέμνει στο E , και η κάθετη από το Δ στην ευθεία $A\hat{\Gamma}$ την τέμνει στο Z . Να αποδειχθεί ότι $B\hat{\Gamma} > EZ$.
- 3.114 Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και M τυχαίο εσωτερικό του σημείο. Να αποδειχθεί ότι $\tau < MA + MB + M\hat{\Gamma} < 2\tau$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.
- 3.115 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο που δεν ανήκει στη διχοτόμο μιας γωνίας απέχει άνισα από τις πλευρές της και αντίστροφα.
- 3.116 Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\hat{\Gamma}$ τριγώνου $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $B\Delta = \hat{\Gamma}E$. Να αποδειχθεί ότι: $\Delta E > B\hat{\Gamma}$.
- 3.117 Στην προέκταση διαμέτρου AB ενός κύκλου παίρνουμε σημείο Γ . Αν M τυχαίο σημείο του κύκλου, να αποδειχθεί ότι $GB < GM < GA$.
- 3.118 Σε κυρτό τετράπλευρο $AB\hat{\Gamma}\Delta$ είναι $A\Delta = B\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} > B\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$. Να συγκριθούν οι διαγώνιοι $A\hat{\Gamma}$ και $B\Delta$.
- 3.119 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($AB = A\hat{\Gamma}$) και έστω Δ σημείο της πλευράς $A\hat{\Gamma}$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το A κατά τμήμα $AE = A\Delta$. Να συγκριθούν τα τμήματα $B\Delta$ και $\hat{\Gamma}E$ (για κάθε περίπτωση της γωνίας $\hat{A}$).

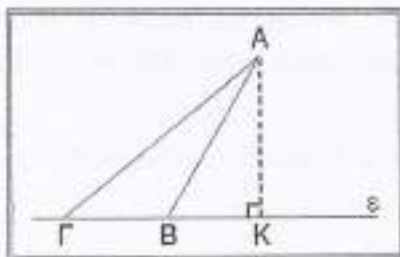
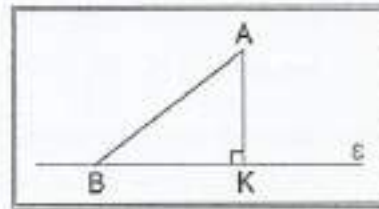
3.13 ΚΑΘΕΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΗΜΜΑΤΑ

Αν από σημείο A , εκτός ευθείας ε , φέρουμε κάθετο δ και πλάγια ζ προς την ε , που την τέμνουν στα K και Λ αντίστοιχα, τότε το K ονομάζεται προβολή του A πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου και το Λ ονομάζεται ίχνος της ζ πάνω στην ε .



- Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.

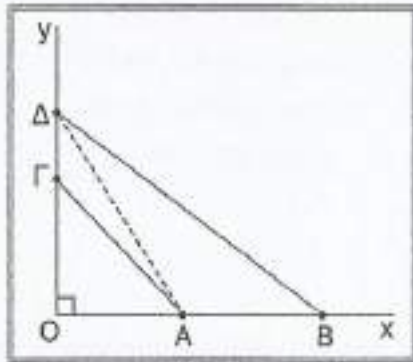
- Αν από σημείο εκτός ευθείας φέρουμε ένα κάθετο και ένα πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα προς την ευθεία, τότε το κάθετο τμήμα είναι πάντοτε μικρότερο από το πλάγιο.



- Αν από σημείο εκτός ευθείας φέρουμε δύο πλάγια προς αυτή τμήματα, τότε αν τα τμήματα είναι άνισα, και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου θα είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.131 Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy}$. Επί της πλευράς Ox παίρνουμε σημεία A και B ώστε $OA < OB$ και επί της Oy σημεία Γ και Δ ώστε $OG < OD$. Να αποδειχθεί ότι $AG < BD$.



	$\widehat{xOy} = 1L$
Δ	$OA < OB$ $OG < OD$
Z	$AG < BD$

Σκέψη

Επειδή τα τμήματα AG και BD που πρέπει να συγκρίνουμε δεν έχουν κοινό άκρο, ώστε να εξεταστούν ως πλάγια τμήματα φερόμενα από ένα σημείο (σύμφωνα με το θεώρημα), θα πρέπει να φέρουμε ως βοηθητικό τμήμα το AD ώστε να υπάρχει κοινό άκρο.

Λύση

Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα AD .

Από το A έχουμε δύο πλάγια τμήματα προς την Oy , τα AD και AG .

Όμως $OG < OD \Rightarrow AG < AD$ (1)

(όπου OG και OD οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος O της καθέτου AO).

Από το Δ έχουμε δύο πλάγια τμήματα προς την Ox , τα AD και DB .

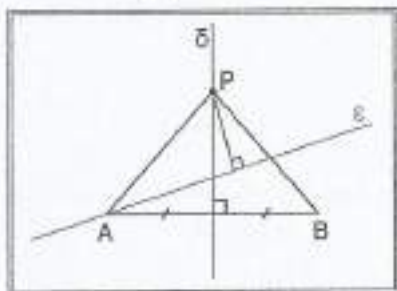
Όμως $OA < OB \Rightarrow AD < DB$ (2)

(όπου OA και OB οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος O της καθέτου ΔO).

Από (1), (2) $\Rightarrow AG < AD < DB$.

3.132 Σε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB φέρνουμε τη μεσοκάθετό του (δ) και έστω P ένα σημείο αυτής. Αν (ε) μία ευθεία που διέρχεται από το A :

- i. Να συγκριθούν οι αποστάσεις του P από το B και από την ευθεία ε .
- ii. Ποια θα είναι η θέση της ευθείας ώστε οι παραπάνω αποστάσεις να είναι ίσες;



Δ	(δ) μεσοκάθετος (AB) (ε) διέρχεται από το A
Z	i. σύγκριση PB και PK ii. ποια η θέση της (ε) ώστε $PB = PK$

Σκέψη

Βλέπουμε ότι από το P έχουμε κάθετο και πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα προς την ευθεία ε , άρα μπορούν να συγκριθούν. Επίσης θα χρειαστεί η ιδιότητα σημείου της μεσοκάθετου.

Λύση

- i. Επειδή το P ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB ισχύει από τα άκρα του.

$$\text{Δηλαδή } PA = PB. (1)$$

Από το P έχουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα PK και ένα πλάγιο προς την ε , το PA ,

$$\text{άρα } PK < PA. (2)$$

$$\text{Έτσι } (2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} PK < PB.$$

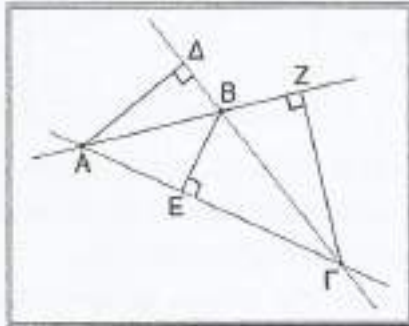
Δηλαδή η απόσταση P από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την απόσταση του από το B .

- ii. Για να είναι ίσες οι παραπάνω αποστάσεις, δηλαδή $PK = PB$, θα πρέπει $PK = PA$, αφού $PA = PB$ σύμφωνα με την (1).

Όμως το PK είναι κάθετο στην ε , συνεπώς θα πρέπει και το PA να είναι κάθετο στην ε .

Αφού όμως το κάθετο τμήμα από σημείο εκτός ευθείας προς αυτήν είναι μοναδικό, θα πρέπει $K \equiv A$ (K ταυτίζεται με το A) δηλαδή $\varepsilon \perp PA$.

3.133 Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ. Φέρουμε τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, και ΓΑ και θεωρούμε τις καθέτους $ΑΔ \perp ΒΓ$, $ΒΕ \perp ΑΓ$, $ΓΖ \perp ΑΒ$, όπου τα Δ, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις ευθείες ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$.



Δ	$ΑΔ \perp ΒΓ$
	$ΒΕ \perp ΑΓ$
	$ΓΖ \perp ΑΒ$
Ζ	$ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$

Σκέψη

Επειδή τα μέλη της προς απόδειξη ανισότητας είναι αθροίσματα, σημαίνει ότι θα χρειαστεί να προσθέσουμε κατά μέλη ανισότητες με τους προσθετέους, π.χ. του πρώτου μέλους.

Λύση

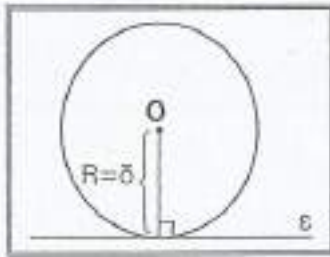
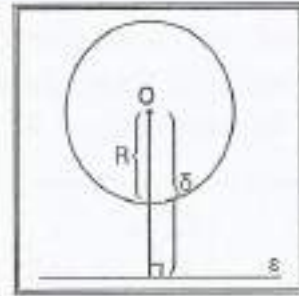
Είναι $ΑΔ < ΑΓ$ ως κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στη ΒΓ έναντι πλάγιου
 και $ΒΕ < ΑΒ$ ως κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στην ΑΓ έναντι πλάγιου
 και $ΓΖ < ΓΒ$ ως κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στην ΑΒ έναντι πλάγιου.
 Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες βρίσκουμε
 $ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$, που είναι το ζητούμενο.

3.14 – 3.15 ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ

Έστω κύκλος (O, R) και μία ευθεία ε .

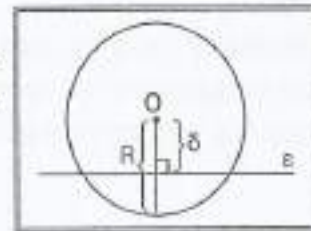
Αν δ η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- i. $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και ονομάζεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.



- ii. $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και ονομάζεται εφαπτομένη του κύκλου. Το κοινό σημείο ονομάζεται σημείο επαφής. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Η εφαπτομένη σε κάθε σημείο του κύκλου είναι μοναδική.

- iii. $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο και ονομάζεται τέμνουσα του κύκλου. Τα κοινά σημεία ονομάζονται σημεία τομής.

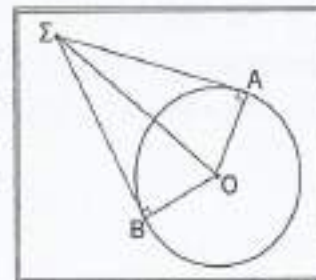


Συνεπώς, μία ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Έστω κύκλος (O, R) και Σ εξωτερικό σημείο του. Μπορούμε να φέρουμε δύο εφαπτομένες του κύκλου. Αν A και B τα σημεία επαφής των δύο εφαπτομένων, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΣA και ΣB ονομάζονται εφαπτόμενα τμήματα.

Η ευθεία ΣO ονομάζεται διακεντρική ευθεία.

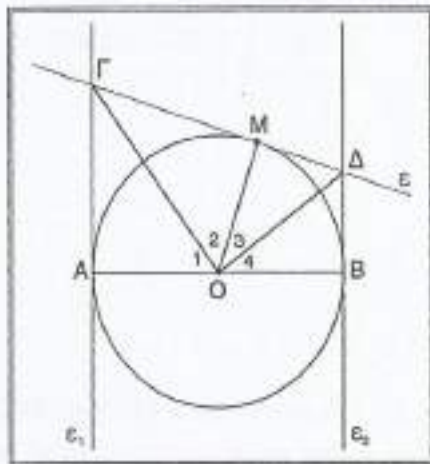


Ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- Τα εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
- Η διακεντρική ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής με άκρα τα σημεία επαφής.
- Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων.
- Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των ακτινών που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 3.134 Δίνεται κύκλος (O, ρ) και έστω ε_1 και ε_2 δύο εφαπτομένες του στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Αν μία τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = 90^\circ$.



Δ	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$ εφαπτομένες AB διάμετρος
Z	$\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = 90^\circ$

Σκέψη

Επειδή έχουμε εφαπτομένες στον κύκλο και δημιουργούνται εφαπτόμενα τμήματα, καταλαβαίνουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα για αυτά, καθώς και για τη διακεντρική ευθεία.

Λύση

Έστω M το σημείο επαφής της ε με τον κύκλο.

Η OG είναι διακεντρική ευθεία των εφαπτομένων τμημάτων AG και GM ,
άρα διχοτομεί τη γωνία των ακτινών OA και OM ,

έτσι $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (1).

Όμοια και η OD για τα εφαπτόμενα τμήματα BD και DM ,

έτσι $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$. (2)

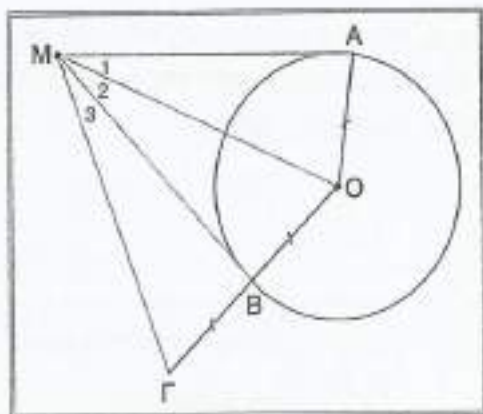
Όμως $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} 2\widehat{O_2} + 2\widehat{O_3} = 180^\circ \Rightarrow$

$$2(\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = 90^\circ.$$

- 3.135 Από εξωτερικό σημείο M κύκλου (O, ρ) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε το OB κατά τμήμα $B\Gamma = OB$.
Να αποδειχθεί ότι $\widehat{AM\Gamma} = 3 \cdot \widehat{BM\Gamma}$.



Δ	MA, MB εφαπτόμενες $OB = O\Gamma$
Z	$\widehat{AM\Gamma} = 3 \cdot \widehat{BM\Gamma}$

Σκέψη

Πολλές φορές όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μία γωνία είναι ίση n -φορές με μία άλλη γωνία, δείχνουμε ότι αποτελείται από n γωνίες ίσες μεταξύ τους και με την άλλη γωνία. Έτσι βλέπουμε από το σχήμα ότι η $\widehat{AM\Gamma}$ αποτελείται από τρεις γωνίες. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι ίσες μεταξύ τους, άρα και με τη $\widehat{BM\Gamma}$.

Λύση

Η OM είναι διακεντρική ευθεία των εφαπτόμενων τμημάτων MA και MB , συνεπώς διχοτομεί τη γωνία τους, δηλαδή έχουμε $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. (1)

Στο τρίγωνο $OM\Gamma$ η MB είναι διάμεσος,

αφού $OB = B\Gamma$, και ύψος, αφού η ακτίνα OB είναι κάθετη στην εφαπτομένη MB .

Συνεπώς το $OM\Gamma$ είναι ισοσκελές

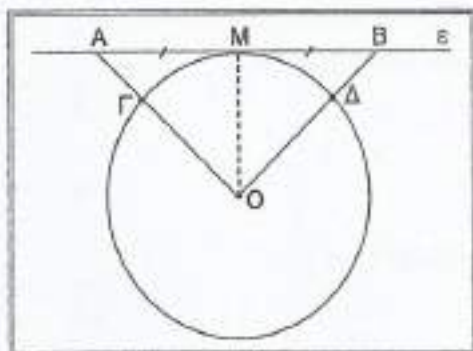
άρα η MB είναι και διχοτόμος.

Δηλαδή $\widehat{M_2} = \widehat{M_3}$. (2)

Έτσι $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} + \widehat{M_3} \stackrel{(1),(2)}{=} 3\widehat{M_2} = 3 \cdot \widehat{BM\Gamma}$.

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

3.136 Δίνεται κύκλος (O, ρ) και έστω ε μία εφαπτομένη του σε σημείο M . Να αποδειχθεί ότι δύο σημεία της ε συμμετρικά ως προς το M ισαπέχουν από τον κύκλο.



Δ	ε εφαπτομένη $AM = MB$
Z	$A\Gamma = B\Delta$

Σκέψη

Απόσταση εξωτερικού σημείου του κύκλου από αυτόν είναι το μήκος της διακεντρικής ευθείας μείον της ακτίνας. Έτσι απόσταση του A από τον κύκλο είναι το μήκος $A\Gamma$, ενώ του B είναι το $B\Delta$.

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $OA = OB$.

Λύση

Έστω A ένα σημείο της ε και B το συμμετρικό του ως προς το M .

Στο τρίγωνο $O\hat{A}B$ η OM είναι ύψος,

αφού η ακτίνα OM είναι κάθετη στην εφαπτομένη AB ,

και διάμεσος, αφού $AM = MB$ λόγω συμμετρίας.

Συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $OA = OB$.

Και επειδή $OG = OD = \rho$,

θα έχουμε ότι $OA - OG = OB - OD \Rightarrow A\Gamma = B\Delta$,

δηλαδή τα A και B έχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

- 3.137 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ
- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| α. Το κέντρο του κύκλου απέχει από την εφαπτομένη απόσταση ίση με την ακτίνα. | ☐ | ☐ |
| β. Μία ευθεία και ένας κύκλος έχουν πάντοτε δύο κοινά σημεία. | ☐ | ☐ |
| γ. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων τμημάτων. | ☐ | ☐ |
| δ. Ένας κύκλος έχει μοναδική εφαπτομένη που διέρχεται από σημείο εξωτερικό αυτού. | ☐ | ☐ |
- 3.138 Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:
- Οι σχετικές θέσεις μίας ευθείας και ενός κύκλου στο επίπεδο είναι:
α. 1 β. 2
γ. 3 δ. καμία
 - Αν d είναι η απόσταση του κέντρου ενός κύκλου (O, ρ) από μία ευθεία που τον τέμνει, τότε:
α. $d < \rho$ β. $d = \rho$
γ. $d > \rho$ δ. $d = 0$
 - Έστω A σημείο ευθείας ε και $(O, 3)$ κύκλος. Αν ισχύει $OA = 3$, τότε η ευθεία ε :
α. Είναι εφαπτομένη του κύκλου.
β. Τέμνει τον κύκλο.
γ. Είναι εξωτερική του κύκλου.
δ. Δε γνωρίζουμε τη σχέση της ε με τον κύκλο.

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 3.139 Έστω K το μέσο της διακέντρου δύο ίσων κύκλων. Ευθεία που διέρχεται από το K τέμνει τους κύκλους στα σημεία A, B και A', B' αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $AB = A'B'$.
- 3.140 Σε μία χορδή AB ενός κύκλου κέντρου O παίρνουμε σημεία Γ και Δ για τα οποία είναι $A\Gamma = B\Delta$. Να αποδειχθεί ότι:
- $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \widehat{B\hat{O}\Delta}$
 - Αν OM το απόστημα της χορδής, τότε η OM είναι διχοτόμος του τριγώνου $O\hat{\Delta}\Gamma$.
- 3.141 Από σημείο A εξωτερικό ενός κύκλου (K, ρ) φέρουμε εφαπτομένη AB στον κύκλο, όπου B το σημείο επαφής. Να συγκριθούν τα ευθύγραμμο τμήματα AB και AK .
- 3.142 Να αποδειχθεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο παράλληλων χορδών διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

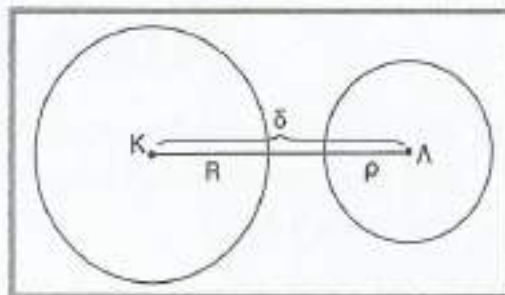
ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 3.143 Να αποδειχθεί ότι δύο σημεία χορδής κύκλου, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το μέσο της χορδής, ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου και αντίστροφα.
- 3.144 Σε κύκλο με κέντρο O παίρνουμε δύο ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$, οι οποίες όταν προεκταθούν τέμνονται σε σημείο M εκτός κύκλου. Να αποδειχθεί ότι:
- Το σημείο M ισαπέχει από τα άκρα των χορδών αυτών.
 - Η OM διχοτομεί τη γωνία $A\hat{M}\Delta$.
- 3.145 Δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο M εντός κύκλου. Να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος της μίας γωνίας των χορδών διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

3.16 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Έστω δύο κύκλοι (K, R) .

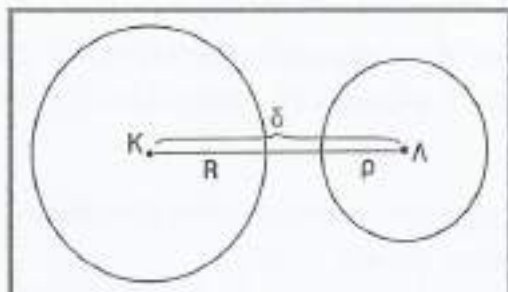
Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα κέντρα δύο κύκλων ονομάζεται διάκεντρος και συμβολίζεται με δ .



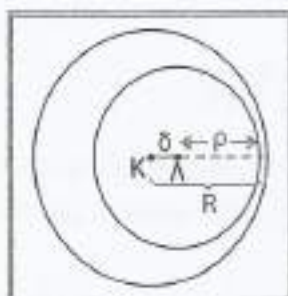
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1^η: ΚΥΚΛΟΙ ΧΩΡΙΣ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ

i. $\delta > R + \rho$, ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.



ii. $\delta < |R - \rho|$, ο ένας κύκλος είναι εσωτερικός του άλλου.



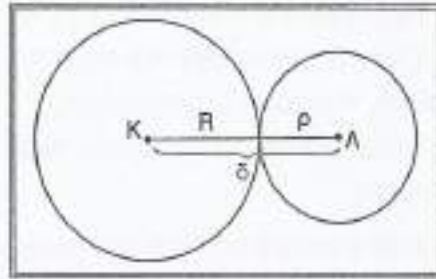
iii. $\delta = 0$, οι κύκλοι είναι ομόκεντροι.



2^η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

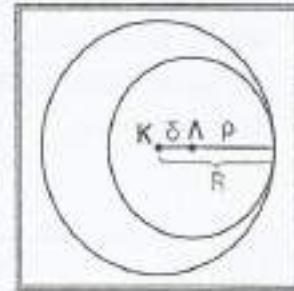
i. $\delta = R + \rho$,

οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



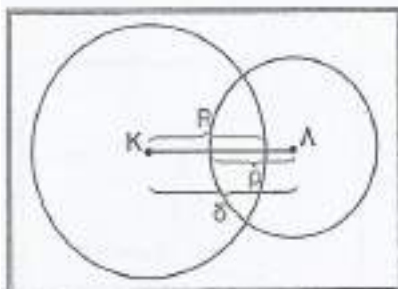
ii. $\delta = |R - \rho|$,

οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



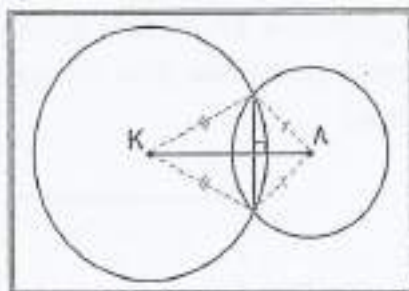
Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων ονομάζεται σημείο επαφής και ανήκει στο φορέα της διακέντρου.

3^η ΤΕΜΝΟΜΕΝΟΙ ΚΥΚΛΟΙ



$|R - \rho| < \delta < R + \rho$, οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία τα οποία ονομάζονται σημεία τομής.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία τομής ονομάζεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.



• Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής.

Σημείωση:

Αν δύο κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

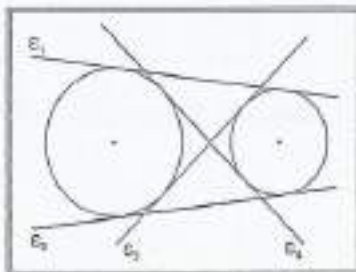
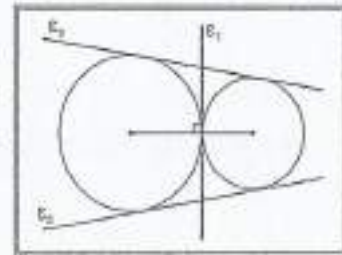
Μία ευθεία που εφάπτεται με δύο κύκλους ονομάζεται κοινή εφαπτομένη.

Όταν οι κύκλοι βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της εφαπτομένης, τότε αυτή ονομάζεται εξωτερική εφαπτομένη.

Όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής, τότε ονομάζεται εσωτερική εφαπτομένη.

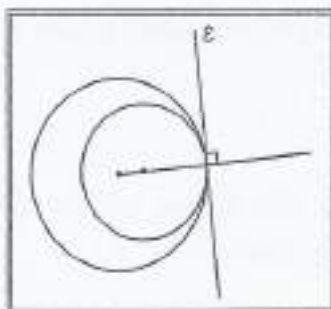
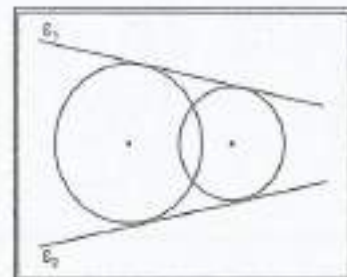
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- i. Όταν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, έχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες (τις ϵ_2 και ϵ_3) και μία κοινή εσωτερική, η οποία είναι κάθετη στη διάκεντρο (την ϵ_1).



- ii. Όταν ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου, έχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες (τις ϵ_1 και ϵ_2) και δύο κοινές εσωτερικές εφαπτομένες (τις ϵ_3 και ϵ_4).

- iii. Όταν δύο κύκλοι τέμνονται, έχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες και καμία εσωτερική.



- iv. Όταν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, έχουν μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη που είναι κάθετη στο φορέα της διακέντρου.

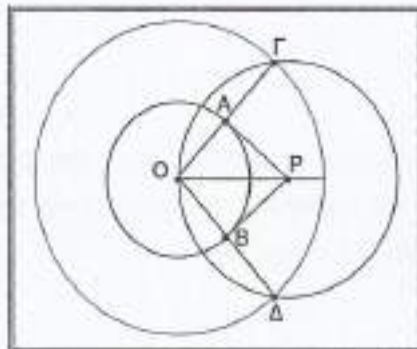
- v. Όταν ο ένας κύκλος είναι εσωτερικός του άλλου, τότε δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.146 Δίνεται κύκλος (O, R) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2R$. Γράψουμε τον κύκλο $(O, 2R)$. Να αποδειχθεί ότι:

- Οι κύκλοι $(O, 2R)$ και (P, PO) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Γ και Δ .
- Τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, R) σε δύο σημεία, έστω A και B αντίστοιχα.
- Τα PA και PB είναι εφαπτόμενα τμήματα του (O, R) .



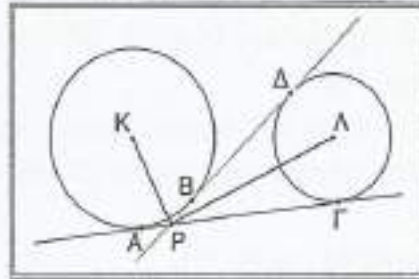
Σκέψη

- Αρκεί να δείξουμε ότι η διάκεντρος OP είναι μεταξύ του αθροίσματος και της διαφοράς των ακτινών των δύο κύκλων.
- Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία Γ και Δ είναι εξωτερικά του κύκλου (O, R) .
- Αρκεί να δείξουμε ότι τα τμήματα είναι κάθετα στις ακτίνες.

Λύση

- Πρέπει να ισχύει $2R - PO < PO < 2R + PO$.
Είναι $2R - PO < PO \Leftrightarrow 2R < 2PO \Leftrightarrow R < PO \Leftrightarrow$
 P εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) που ισχύει.
Προφανώς $OP < 2R + PO$, αφού $2R$ είναι γνήσια θετική ποσότητα. Άρα ισχύουν και οι δύο ανισότητες, δηλαδή οι κύκλοι $(O, 2R)$ και (P, PO) τέμνονται σε δύο σημεία.
- Έχουμε ότι το Γ ανήκει στον κύκλο $(O, 2R)$, οπότε $O\Gamma = 2R > R$ άρα είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) , έτσι η $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο, έστω στο A .
Όμοια το Δ ανήκει στον κύκλο $(O, 2R)$, άρα η $O\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο B .
- Έχουμε $A\Gamma = O\Gamma - OA = 2R - R = R = AO \Rightarrow A$ μέσο $O\Gamma$, οπότε το PA είναι το απόστημα της χορδής $O\Gamma$, άρα $PA \perp O\Gamma \Rightarrow PA$ εφαπτομένη του κύκλου.
Όμοια το B είναι μέσο του $O\Delta$, άρα $PB \perp O\Delta \Rightarrow PB$ εφαπτομένη.

- 3.147 Ένας κύκλος K είναι εξωτερικός ενός άλλου με κέντρο Λ . Μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μία εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο P . Να αποδειχθεί ότι $\widehat{KPL} = 90^\circ$.



Δ	ΑΓ, ΒΔ εφαπτομένες
Z	$\widehat{KPL} = 90^\circ$

Σκέψη

Επειδή τα μόνα δεδομένα είναι οι εφαπτομένες και στα ζητούμενα έχουμε τις διακεντρικές ευθείες ως πλευρές της γωνίας, θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα για τα εφαπτόμενα τμήματα.

Λύση

Το τμήμα KP είναι διακεντρική ευθεία των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB , συνεπώς είναι και διχοτόμος της γωνίας τους $\widehat{APB}$.

Όμοια το LP είναι η διακεντρική ευθεία των εφαπτόμενων τμημάτων PD και PG , συνεπώς είναι διχοτόμος της $\widehat{GPD}$.

Όμως οι γωνίες $\widehat{APB}$ και $\widehat{GPD}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές.

Οπότε οι διχοτόμοι τους KP και LP είναι κάθετες.

Έτσι $\widehat{KPL} = 90^\circ$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

3.148 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

- α. Το κοινό σημείο δύο τεμνόμενων κύκλων ανήκει στη διάκεντρο. ☐ ☐
- β. Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της διακέντρου. ☐ ☐
- γ. Δύο ομόκεντροι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία. ☐ ☐
- δ. Η διάκεντρος δύο ίσων κύκλων είναι πάντοτε μεγαλύτερη της ακτίνας τους. ☐ ☐

3.149 Να βρείτε τις σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

- i. Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων είναι:
- α. 2 β. 4
γ. 6 δ. καμία
- ii. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ, 1) και (Λ, 3). Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε το ΚΛ ισούται με:
- α. 4 β. 2
γ. 0 δ. 3
- iii. Δίνονται δύο κύκλοι (Α, 5) και (Β, 7). Αν $AB = 9$, τότε οι κύκλοι:
- α. εφάπτονται εξωτερικά,
β. τέμνονται,
γ. ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου,
δ. δε γνωρίζουμε.

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 3.150 Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B . Από το μέσο O της AB φέρουμε τυχαία ευθεία ε που τέμνει τον κύκλο με κέντρο K στα Δ και E , και τον κύκλο με κέντρο Λ στα Z και H (το Z σημείο της DE και το E της ZH). Να αποδειχθεί ότι: $OE = OZ$.
- 3.151 Δύο κύκλοι (O, ρ) και (O, R) έχουν $\rho < R$. Από σημείο K εξωτερικό του κύκλου (O, R) φέρουμε κύκλο (K, R) , ο οποίος τέμνει τους δύο άλλους κύκλους στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.
- 3.152 Σε μία ευθεία ε παίρνουμε δύο σημεία A και B , και με διάμετρο $AB = 2\rho$ γράφουμε κύκλο (O, ρ) . Γράφουμε επίσης τους κύκλους (A, ρ) και (B, ρ) .
- Να εξετάσετε αν οι τρεις αυτοί κύκλοι τέμνονται.
 - Έστω Γ και Δ τα σημεία τομής των κύκλων που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ε . Να αποδειχθεί ότι $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$.
- 3.153 Δίνεται κύκλος (K, ρ) και σημείο του Λ . Κατασκευάζουμε κύκλο (Λ, ρ) .
- Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι τέμνονται.
 - Αν A το ένα σημείο τομής των δύο κύκλων και E, Z τα αντιδιαμετρικά του A στους κύκλους (K, ρ) και (Λ, ρ) αντίστοιχα, να βρεθεί το είδος του τριγώνου $A\hat{K}\Lambda$ ως προς τις πλευρές του.
 - Να αποδειχθεί ότι $E\Lambda = KZ$.

ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 3.154 Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$ εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο E . Η ευθεία της διακέντρου $K\Lambda$ τέμνει τον κύκλο (K, R) στο A και τον (Λ, ρ) στο B . Από το μέσο O του τμήματος AB φέρουμε την $ΟΓ$ κάθετη στην AB . Αν η $E\Gamma$ τέμνει το (Λ, ρ) στο Δ , να αποδειχθεί ότι η $ΟΔ$ είναι εφαπτομένη στον κύκλο (Λ, ρ) .
- 3.155 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι $(O, 3)$ και $(O, 1)$ και ένας τρίτος κύκλος (K, ρ) ο οποίος εφάπτεται των δύο πρώτων. Να υπολογιστεί η ακτίνα ρ του τρίτου κύκλου και η απόσταση του κέντρου του από το κέντρο των δύο πρώτων κύκλων.
- 3.156 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι A και B με ακτίνες 1 και 4 αντίστοιχα, και ένας τρίτος κύκλος Γ ακτίνας 2. Πού πρέπει να βρίσκεται το κέντρο του Γ ώστε να τέμνει τους δύο πρώτους;

3.17 – 3.18 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Γεωμετρική κατασκευή εννοούμε την κατασκευή σχημάτων χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα (αβαθμολόγητο χάρακα) και διαβήτη.

Ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής περιλαμβάνει 4 στάδια.

α. Ανάλυση:

Θεωρούμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει κατασκευαστεί και προσπαθούμε να βρούμε χαρακτηριστικές ιδιότητες που ανάγουν την κατασκευή του στις θεμελιώδεις γεωμετρικές κατασκευές (ευθεία και κύκλος).

β. Σύνθεση ή κατασκευή:

Σχεδιάζουμε και περιγράφουμε τις επιμέρους κατασκευές μέχρι να ολοκληρωθεί η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος.

γ. Απόδειξη:

Χρησιμοποιούμε θεωρήματα ή προτάσεις για να δείξουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

δ. Διερεύνηση:

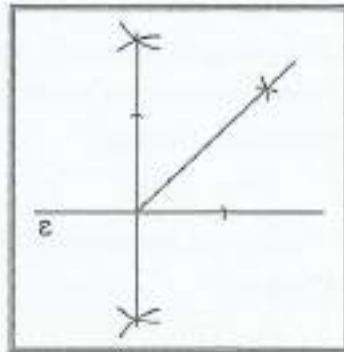
Εξετάζουμε τους περιορισμούς της κατασκευής και το πλήθος των λύσεων που υπάρχουν.

Σημείωση:

Σε απλές γεωμετρικές κατασκευές δε χρειάζονται και τα τέσσερα στάδια αλλά χρησιμοποιούμε μόνο τη σύνθεση (ή κατασκευή).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.157 Να κατασκευαστεί μία γωνία 45° .



Κατασκευή:

Χαράζουμε ευθεία ε . Φέρουμε κάθετη στην ε , οπότε δημιουργείται ορθή γωνία 90° . Σχεδιάζουμε τη διχοτόμο της ορθής γωνίας.

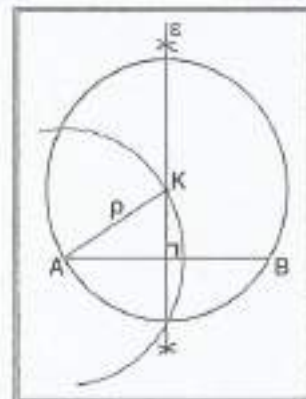
3.158 Να κατασκευαστεί κύκλος με ακτίνα ρ , όταν δίνονται δύο σημεία του A και B .

Ανάλυση:

Έστω ότι κατασκευάστηκε ο κύκλος (K, ρ) . Επειδή η ακτίνα του είναι δοσμένη και ίση με ρ , αρκεί να βρούμε το κέντρο του. Το κέντρο K θα ισαπέχει από τα σημεία του κύκλου A και B , άρα θα ανήκει στη μεσοκάθετο του AB . Επειδή $KA = \rho$ το κέντρο θα ανήκει και στον κύκλο (A, ρ) .

Σύνθεση:

Φέρουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB και τον κύκλο (A, ρ) ή (B, ρ) . Το σημείο τομής της ευθείας και του κύκλου είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου. Χαράζουμε τον κύκλο (K, ρ) .



Απόδειξη:

Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του AB , θα είναι $KA = KB$. Επίσης το K ανήκει στον κύκλο (A, ρ) άρα $KA = \rho$. Οπότε ο κύκλος (K, ρ) είναι ο ζητούμενος αφού διέρχεται από τα A και B και έχει ακτίνα ρ .

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

Διερεύνηση:

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει ο κύκλος (A, ρ) να τέμνει τη μεσοκάθετο του AB σε δύο σημεία ή να έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Αυτό συμβαίνει όταν η ακτίνα ρ είναι μεγαλύτερη ή ίση με την απόσταση του A από τη μεσοκάθετο

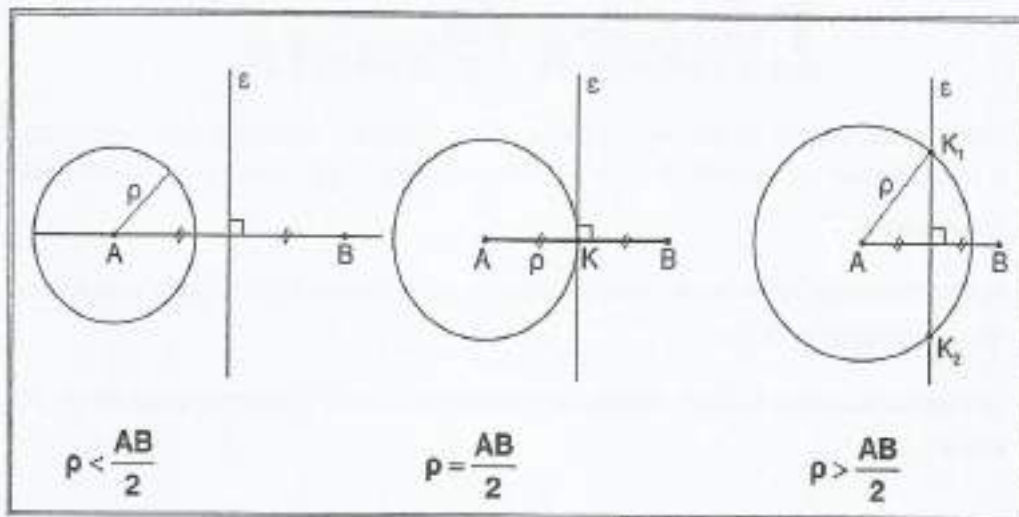
δηλαδή, $\frac{AB}{2}$.

Οπότε το πρόβλημα έχει

δύο λύσεις όταν $\rho > \frac{AB}{2}$,

έχει μία λύση όταν $\rho = \frac{AB}{2}$ και

όταν $\rho < \frac{AB}{2}$, το πρόβλημα δεν έχει λύση.

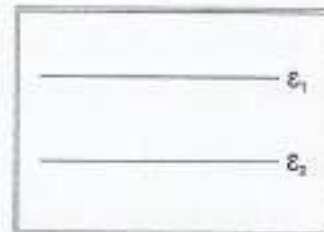


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

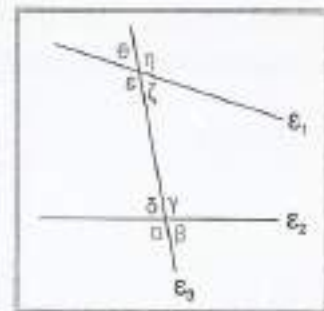
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δύο ευθείες e_1 και e_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες και γράφουμε $e_1 // e_2$.



4.2 ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ – ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΑΙΤΗΜΑ

Όταν δύο ευθείες e_1 και e_2 του επιπέδου τέμνονται από μία τρίτη ευθεία e_3 , σχηματίζονται οκτώ γωνίες με ιδιαίτερα ονόματα.



Οι γωνίες γ , δ , ϵ , ζ που βρίσκονται μεταξύ των e_1 και e_2 λέγονται *εντός*, ενώ οι γωνίες α , β , η , θ λέγονται *εκτός*. Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας e_3 λέγονται *επί τα αυτό μέρη*, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της e_3 λέγονται *εναλλάξ γωνίες*.

Οι γωνίες δ και ζ που βρίσκονται μεταξύ των e_1 και e_2 και εκατέρωθεν της e_3 , λέγονται *εντός εναλλάξ γωνίες*. Εντός εναλλάξ είναι και οι γωνίες γ και ϵ .

Οι γωνίες α και η , που βρίσκονται εκτός των ευθειών e_1 και e_2 και εκατέρωθεν της τέμνουσας e_3 , λέγονται *εκτός εναλλάξ γωνίες*. Εκτός εναλλάξ είναι και οι γωνίες β και θ .

Οι γωνίες γ και η , που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας e_3 και η μία βρίσκεται μεταξύ των ευθειών e_1 και e_2 ενώ η άλλη εκτός, λέγονται εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες λέγονται και οι β και ζ , δ και θ , α και ϵ .

Οι γωνίες δ και ϵ , που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας e_3 και μεταξύ των ευθειών e_1 και e_2 , λέγονται εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι και οι γ και ζ .

Οι γωνίες α και θ , που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας e_3 και εκτός των ευθειών e_1 και e_2 , λέγονται εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες λέγονται και οι β και η .

ΘΕΩΡΗΜΑ

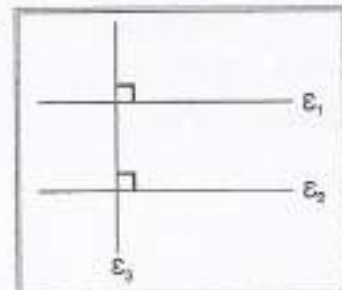
Αν οι δύο ευθείες, τεμνόμενες από τρίτη ευθεία, σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Αν δύο ευθείες, τεμνόμενες από τρίτη ευθεία, σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

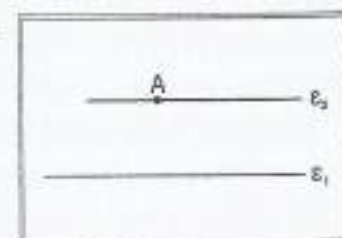
ΠΟΡΙΣΜΑ II

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



ΑΙΤΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ (ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΑΙΤΗΜΑ)

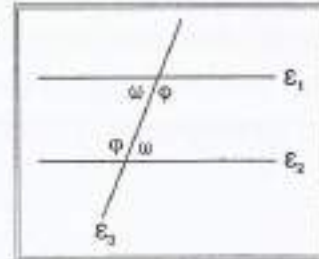
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ I

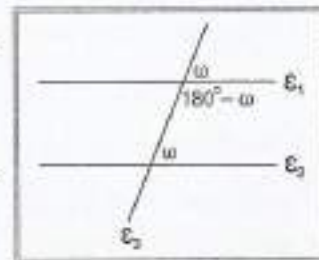
Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, σχηματίζουν:

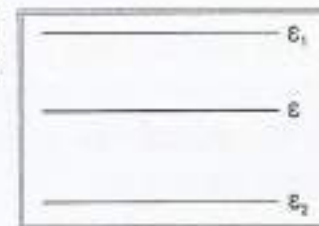
- I. Τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
- II. Τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.



ΠΡΟΤΑΣΗ II

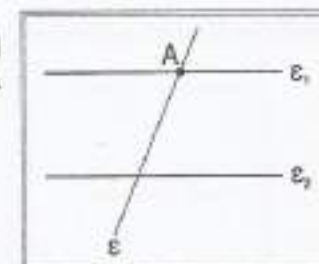
Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

$$\text{Δηλαδή } \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 // \varepsilon \\ \varepsilon_2 // \varepsilon \end{array} \right\} \text{ άρα } \varepsilon_1 // \varepsilon_2.$$



ΠΡΟΤΑΣΗ III

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ευθεία ε θα τέμνει και την άλλη.

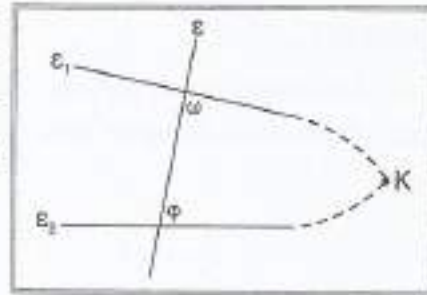


ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από τις δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ IV

Αν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

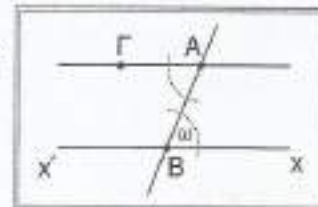


Σχόλιο

Η παραπάνω πρόταση χρησιμεύει για να εξετάζουμε αν δύο ευθείες τέμνονται.

4.3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

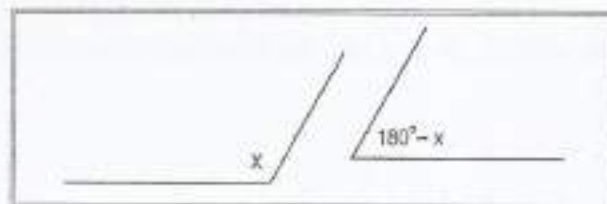
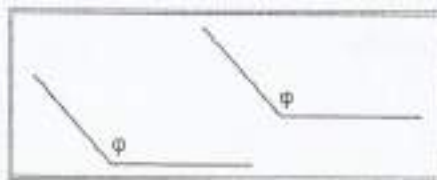
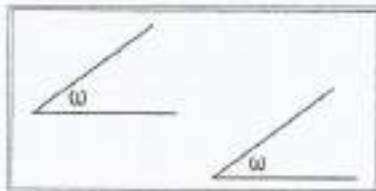
Πρόβλημα: Από τυχαίο σημείο A, που βρίσκεται εκτός της ευθείας $x'x$, να φέρετε παράλληλη στη $x'x$.



Από τυχαίο σημείο A φέρουμε τέμνουσα της $x'x$ και έστω B το σημείο τομής. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η AB με την $x'x$. Με κορυφή το σημείο A και πλευρά την AB σχηματίζουμε γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ ίση με τη γωνία ω . Η ευθεία AΓ είναι η ζητούμενη παράλληλη ευθεία.

4.4 ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

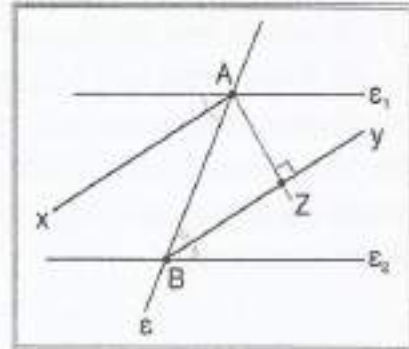
Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.



Κεφάλαιο 4 – Παράλληλες Ευθείες

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω e_1 και e_2 δύο παράλληλες ευθείες οι οποίες τέμνονται από ευθεία ε . Τότε οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες, ενώ οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.



4.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ο ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ



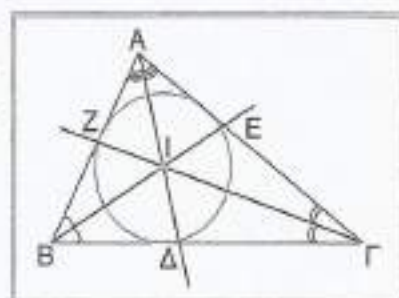
ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Το σημείο αυτό λέγεται περίκεντρο.

Ο ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

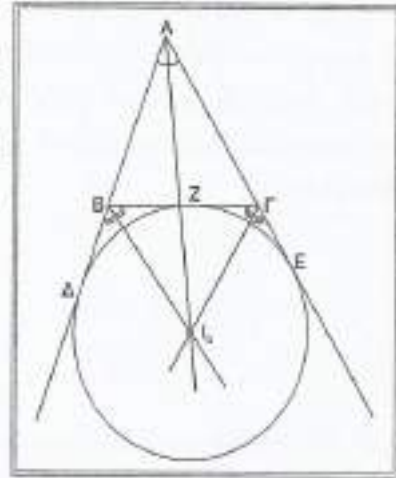
ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου. Το σημείο αυτό λέγεται έγκεντρο.



ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά και στις προεκτάσεις των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου.



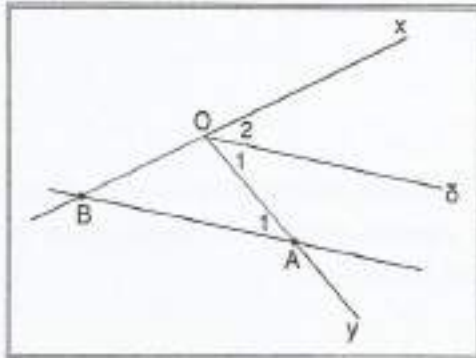
Ο κύκλος αυτός λέγεται παρεγγεγραμμένος και το κέντρο του λέγεται παράκεντρο του τριγώνου.

Σχόλιο

- i. Θα λέμε ότι δύο ημιευθείες ή δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα όταν βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες (δηλαδή σε παράλληλους φορείς).
- ii. Σε κάποιες ασκήσεις χρησιμοποιούμε δύο βοηθητικές γραμμές (έχοντας εξαντλήσει κάθε άλλη μέθοδο).
 - α. Την προέκταση κάποιας χαρακτηριστικής ευθείας ενός τριγώνου, π.χ. διαμέσου κατά ίσο τμήμα ή ένα μέρος του ευθύγραμμου τμήματος.
 - β. Την παράλληλη προς μία χαρακτηριστική ευθεία του τριγώνου, π.χ. προς μία πλευρά του τριγώνου.
- iii. Το έγκεντρο και τα τρία παράκεντρα είναι τα μοναδικά σημεία που ισαπέχουν από τις πλευρές του τριγώνου.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 4.1 Δίνονται μία γωνία $\widehat{xOy}$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Από ένα σημείο A της ημιευθείας Oy φέρουμε παράλληλη προς την $O\delta$ που τέμνει την προέκταση της ημιευθείας Ox στο σημείο B . Να δείξετε ότι $OA=OB$.



Δ	$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ $AB \parallel O\delta$
Z	$OA=OB$

Σκέψη

Τα δεδομένα της άσκησης δε μας οδηγούν σε σύγκριση τριγώνων για να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα. Πρέπει, λοιπόν, να δείξουμε ότι το τρίγωνο που δημιουργήσαμε είναι ισοσκελές. Αρκεί να δείξουμε ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Αυτό θα προκύψει από την παραλληλία και την ύπαρξη της διχοτόμου.

Λύση

$$O\delta \text{ διχοτόμος άρα } \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \quad (1)$$

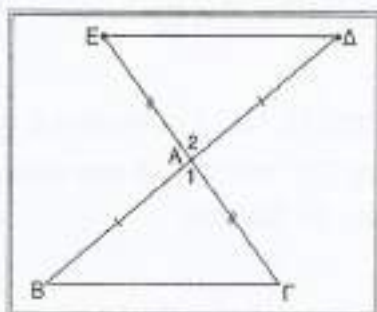
$$O\delta \parallel AB \text{ άρα } \widehat{O}_1 = \widehat{A}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \quad (2)$$

$$O\delta \parallel AB \text{ άρα } \widehat{O}_2 = \widehat{B} \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$.

Άρα $OB = OA$ στο τρίγωνο OAB .

- 4.2 Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα με $ΑΔ=ΑΒ$ και $ΑΕ=ΑΓ$. Να δείξετε ότι $ΔΕ // ΒΓ$.



Δ	$ΑΔ = ΑΒ$ $ΑΕ = ΑΓ$
Ζ	$ΔΕ // ΒΓ$

Σκέψη

Αρκεί να δείξουμε ότι κάποιο ζευγάρι γωνιών που σχηματίζονται είναι ίσες ή παραπληρωματικές. Η ισότητα των γωνιών μπορεί ναδειχθεί από τη σύγκριση των δύο τριγώνων που έχουν δημιουργηθεί.

Λύση

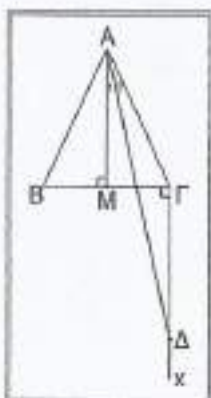
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΔ.

$$\left. \begin{array}{l} ΑΒ = ΑΔ \text{ (δεδομένο)} \\ ΑΓ = ΑΕ \text{ (δεδομένο)} \\ \hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 \text{ (κατακορυφήν)} \end{array} \right\}$$

άρα από το κριτήριο Π – Γ – Π θα είναι ίσα άρα και $\hat{Β} = \hat{Δ}_1$,

δηλαδή σχηματίσαμε εντός εναλλάξ γωνίες που είναι ίσες. Άρα $ΔΕ // ΒΓ$.

- 4.3 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=ΑΓ$ και ΑΜ η διάμεσός του. Φέρουμε ημιευθεία $Γχ \perp ΒΓ$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα $ΓΔ=ΑΒ$. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $Μ\hat{Α}Γ$.



Δ	$ΑΒ = ΑΓ$ $ΒΜ = ΜΓ$ $Γχ \perp ΒΓ$ $ΓΔ = ΑΒ$
Ζ	$Μ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$

Σκέψη

Οι δύο οξείες γωνίες δε βρίσκονται σε ίσα τρίγωνα. Άρα η σύγκριση των γωνιών πρέπει να γίνει με τη βοήθεια ισοσκελούς τριγώνου. Από την κατασκευή της κάθετης αυτό υπάρχει. Δεν έχουμε όμως παράλληλες για τη μεταφορά των γωνιών. Αυτό θα το ξεπεράσουμε όμως, καθώς η διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος και διχοτόμος.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma\Delta = AB \\ AB = A\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } \Gamma\Delta = A\Gamma, \text{ δηλαδή } A\Gamma\Delta \text{ τρίγωνο ισοσκελές,}$$

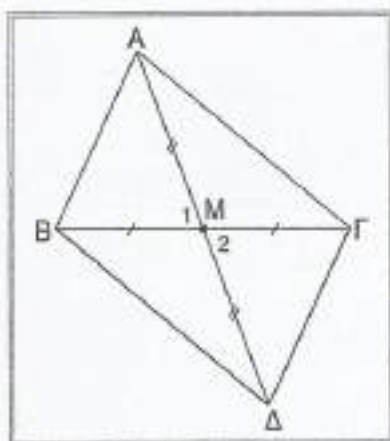
$$\text{άρα } \hat{A}_2 = \hat{\Delta} \quad (1).$$

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp B\Gamma \\ \Gamma\Delta \perp B\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } AM \parallel \Gamma\Delta. \text{ Επομένως } \hat{A}_1 = \hat{\Delta} \text{ ως εντός εναλλάξ } (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$,

άρα AD διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

4.4 Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμεσος. Προεκτείνουμε τη διάμεσο κατά ίσο ευθύγραμμο τμήμα MD . Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα BD και ΓD είναι ίσα και παράλληλα προς τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.



Δ	$BM = M\Gamma$ $AM = MD$
Z	$B\Delta = A\Gamma$ $\Gamma\Delta = AB$ $B\Delta \parallel A\Gamma$ $\Gamma\Delta \parallel AB$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα, θα χρησιμοποιήσουμε σύγκριση τριγώνων καθώς έχουμε αρκετά στοιχεία. Σαν αποτέλεσμα της σύγκρισης δημιουργούνται ζευγάρια ίσων γωνιών που θα μας δώσουν και την παραλληλία.

Λύση

Συγκρίνω τα τρίγωνα ABM και $MΓΔ$:

$$\left. \begin{array}{l} BM = MΓ \text{ (δεδομένο)} \\ AM = MΔ \text{ (δεδομένο)} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (κατακορυφήν)} \end{array} \right\}$$

Άρα $\Pi - \Gamma - \Pi$, άρα ίσα τρίγωνα με

$$AB = ΓΔ, \quad (1)$$

$$\hat{B} \hat{A} \Delta = \hat{A} \hat{\Delta} \Gamma. \quad (2)$$

Όμοια, συγκρίνω τα τρίγωνα $AMΓ$ και $BMΔ$ που είναι ίσα με

$$AΓ = BΔ, \quad (3)$$

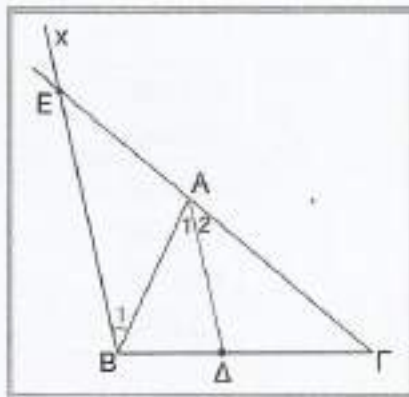
$$\hat{M} \hat{B} \Delta = \hat{M} \hat{\Gamma} A. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει η ισότητα ενώ

από τις σχέσεις (2), (4) η παραλληλία,

γιατί δημιουργούνται εντός εναλλάξ γωνίες που είναι ίσες.

- 4.5 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και $AΔ$ η διχοτόμος. Από τη κορυφή B φέρουμε ημιευθεία $Bx \parallel AΔ$, που τέμνει την προέκταση της $ΓA$ στο σημείο E . Να δείξετε ότι $EΓ = AB + AΓ$.



Δ	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $BE \parallel AΔ$
Z	$EΓ = AB + AΓ$

Σκέψη

Το ευθύγραμμο τμήμα $AΓ$ είναι μέρος του τμήματος $EΓ$. Άρα μας απασχολεί το AB το οποίο πρέπει να δείξουμε ότι είναι ίσο με το AE . Αρκεί να δείξω ότι το ABE είναι ισοσκελές. Αυτό δεν μπορεί να γίνει με σύγκριση τριγώνων, άρα για να δείξουμε την ισότητα των απέναντι γωνιών θα χρησιμοποιήσουμε την παραλληλία προς τη διχοτόμο.

Λύση

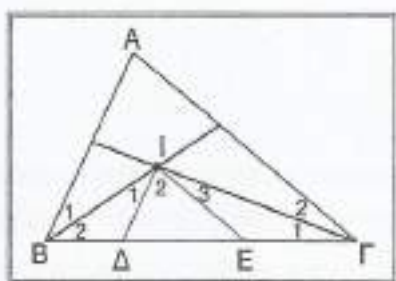
ΑΔ διχοτόμος άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (1)

ΑΔ//ΒΕ άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ (2)

και $\hat{A}_2 = \hat{E}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη. (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{E}$
 άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$.
 Άρα $ΕΓ = ΑΕ + ΑΓ = ΑΒ + ΑΓ$.

4.6 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται το έγκεντρο Ι. Φέρνουμε ΙΔ//ΑΒ και ΙΕ//ΑΓ.
 Να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.



Δ	ΒΙ, ΓΙ διχοτόμοι ΙΔ//ΑΒ ΙΕ//ΑΓ
Ζ	$ΒΓ = ΙΔ + ΔΕ + ΙΕ$

Σκέψη

Το έγκεντρο σαν σημείο τομής των διχοτόμων δημιουργεί ζευγάρια γωνιών ίσα με $\frac{\hat{B}}{2}$ και $\frac{\hat{G}}{2}$ αντίστοιχα προς τις πλευρές. Οι παράλληλες προς τις πλευρές από το έγκεντρο θα μας δώσουν επίσης ζευγάρια ίσων γωνιών. Άρα η μεταφορά των γωνιών θα δημιουργήσει ισοσκελή τρίγωνα με τη ζητούμενη ισότητα των πλευρών που θέλουμε.

Λύση

ΒΙ διχοτόμος άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$
 $ΙΔ//ΑΒ$ άρα ως εντός εναλλάξ $\hat{B}_1 = \hat{I}_1$ } άρα $\hat{B}_2 = \hat{I}_1$.

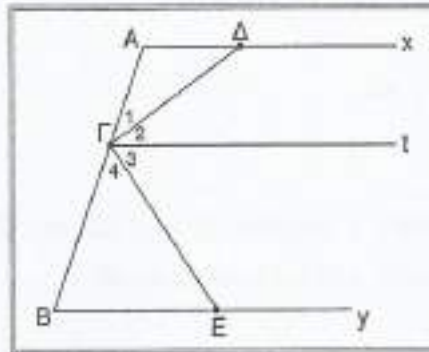
συνεπώς το ΒΔΙ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΔΙ$. (1)

Όμοια στο τρίγωνο ΓΕΙ που είναι ισοσκελές έχουμε $ΙΕ = ΕΓ$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε

$$\begin{aligned} ΒΓ &= ΒΔ + ΔΕ + ΕΓ = \\ &= ΔΙ + ΔΕ + ΙΕ. \end{aligned}$$

- 4.7 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του Γ. Από τα A και B και προς το ίδιο ημιεπίπεδο φέρουμε δύο παράλληλες ημιευθείες Ax και By. Παίρνουμε στην Ax σημείο Δ έτσι ώστε $AD = AG$, και στη By σημείο E έτσι ώστε $BE = BG$. Να δείξετε ότι η γωνία ΔΓΕ είναι ορθή.



Δ	$Ax // By$ $AD = AG$ $BE = BG$
Ζ	$\hat{\Delta} \hat{\Gamma} \hat{E} = 90^\circ$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι η γωνία είναι ορθή, αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_4$ είναι συμπληρωματικές. Οι ιδιότητες των ευθύγραμμων τμημάτων δε μας βοηθούν στη σύγκριση, αλλά δημιουργούν ισοσκελή τρίγωνα. Για να μεταφέρουμε όμως κάποιες ίσες γωνίες, θα χρειαστούμε μία βοηθητική ευθεία Γτ παράλληλη προς τις Ax, By για να εμφανίσουμε ζευγάρια γωνιών.

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει ότι $AD = AG$,

άρα είναι ισοσκελές άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}$. (1)

$Ax // \Gamma\tau$ άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_2$ ως εντός εναλλάξ. (2)

Από σχέσεις (1), (2) έχουμε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$. (3)

Ομοίως στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε

$\hat{\Gamma}_4 = \hat{E}$ και $\hat{E} = \hat{\Gamma}_3$ λόγω παραλληλίας,

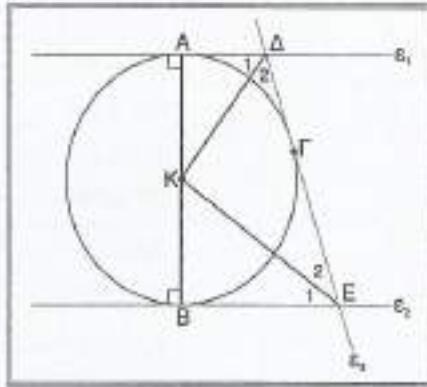
άρα $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4$. (4)

Συνεπώς, αφού $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 + \hat{\Gamma}_4 = 180^\circ$,

θα ισχύει $2\hat{\Gamma}_2 + 2\hat{\Gamma}_3 = 180^\circ$,

δηλαδή $\hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 90^\circ$ άρα $\hat{\Delta} \hat{\Gamma} \hat{E} = 90^\circ$.

- 4.8 Δίνεται κύκλος (K, ρ) και μία διάμετρός του AB . Στα σημεία A και B φέρουμε τις εφαπτομένες ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Σε ένα σημείο Γ του τόξου $\widehat{AB}$ φέρουμε επίσης εφαπτομένη ε_3 , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta K E}$ είναι ορθή.



Δ	$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ $\varepsilon_1 \perp AB$ $\varepsilon_2 \perp AB$
Z	$\widehat{\Delta K E} = 90^\circ$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι $\widehat{\Delta K E} = 90^\circ$, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισότητα τριγώνων, ούτε να μεταφέρουμε γωνίες με τη βοήθεια των παραλλήλων. Θα δείξουμε λοιπόν ότι οι πλευρές της γωνίας είναι κάθετες μεταξύ τους. Επειδή από τα σημεία Δ και E έχουμε τα αντίστοιχα εφαπτόμενα τμήματα, τα ευθύγραμμα τμήματα ΔK και KE είναι διχοτόμοι των αντίστοιχων γωνιών (όπως ξέρουμε από το 3ο κεφάλαιο).

Λύση

$\Delta A, \Delta \Gamma$ εφαπτόμενα τμήματα

άρα ΔK διχοτόμος της $\widehat{A \Delta \Gamma}$ γωνίας

άρα $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$.

Όμοια, $E \Gamma, E B$ εφαπτόμενα τμήματα

άρα KE διχοτόμος της γωνίας $B E \Gamma$

άρα $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$.

Όμως $\widehat{A \Delta \Gamma}, \widehat{\Gamma E B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

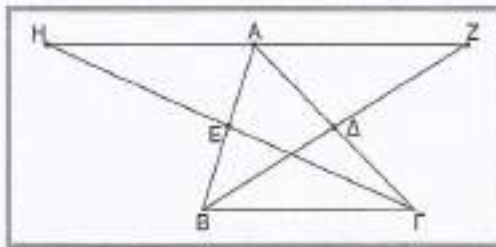
άρα παραπληρωματικές.

Άρα οι διχοτόμοι τους θα τέμνονται κάθετα, δηλαδή $\Delta K \perp KE$,

άρα $\widehat{\Delta K E}$ ορθή.

4.9 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε $B\Delta$ και ΓE διαμέσους. Προεκτείνουμε κατά ίσα τμήματα $B\Delta = \Delta Z$ και $\Gamma E = EH$. Να δείξετε ότι:

- $AZ \parallel B\Gamma$,
- $AH \parallel B\Gamma$,
- τα σημεία Z, A, H είναι συνευθειακά.



Δ	$AD = \Delta\Gamma$ $AE = EB$ $B\Delta = \Delta Z$ $\Gamma E = EH$
Z	$AZ \parallel B\Gamma$ $AH \parallel B\Gamma$ Z, A, H συνευθειακά

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες, αρκεί να δείξουμε ότι όταν τέμνονται από μία άλλη ευθεία, σχηματίζουν κάποιο ζευγάρι ίσων ή παραπληρωματικών γωνιών. Η ισότητα των γωνιών αυτών θα προκύψει από τη σύγκριση των τριγώνων που δημιουργήσαν οι προεκτάσεις των διαμέσων. Επίσης για να δείξουμε ότι τα τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζουν τα σημεία αυτά βρίσκονται σε παράλληλους φορείς και επειδή έχουν ένα κοινό σημείο θα βρίσκονται στον ίδιο φορέα δηλαδή στην ίδια ευθεία.

Λύση

α. Συγκρίνω τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$, $Z\Delta A$:

$$\left. \begin{array}{l} B\Delta = BZ \quad (\text{δεδομένο}) \\ \Delta\Gamma = A\Delta \quad (\text{δεδομένο}) \\ \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{A\Delta Z} \quad (\text{κατακορυφήν}) \end{array} \right\}$$

άρα από κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα

$$\text{άρα } \widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{\Delta ZA}.$$

Επομένως έχουμε τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

$$\text{άρα } AZ \parallel B\Gamma.$$

β. Όμοια από σύγκριση των τριγώνων $A\epsilon H$ και $B\epsilon\Gamma$ θα έχουμε $\widehat{A\epsilon H} = \widehat{B\epsilon\Gamma}$

άρα $AH \parallel B\Gamma$.

γ. $\left. \begin{array}{l} AZ \parallel B\Gamma \\ AH \parallel B\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} AZ \parallel AH \\ A \text{ κοινό σημείο} \end{array} \right\} \text{ άρα } Z, A, H \text{ συνευθειακά.}$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

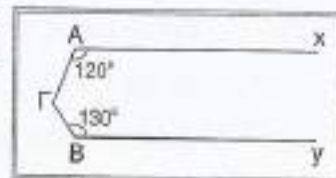
4.12 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

- α. Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε τουλάχιστον μία ευθεία παράλληλη στην ε. ☐ ☐
- β. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι πάντα ίσες. ☐ ☐
- γ. Αν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. ☐ ☐
- δ. Αν δύο ευθείες είναι κάθετες προς τρίτη ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες. ☐ ☐
- ε. Αν μία ευθεία τέμνει τη μία από δύο παράλληλες, τότε θα τέμνει και την άλλη. ☐ ☐

4.13 Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

- α. Στο διπλανό σχήμα οι ημιευθείες Αx και By είναι παράλληλες. Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας ΑΓΒ;

Α. 140° Β. 110° Γ. 150° Δ. 60°



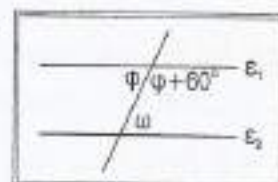
- β. Στο διπλανό σχήμα $e_1 \parallel e_2$. Η γωνία ω έχει μέτρο ίσο με

Α. 40° Β. 30° Γ. 45° Δ. 90°



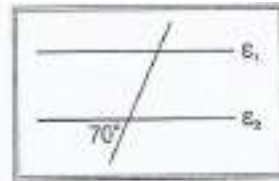
- γ. Στο διπλανό σχήμα $e_1 \parallel e_2$. Η γωνία ω έχει μέτρο ίσο με

Α. 55° Β. 45° Γ. 50° Δ. 60°



δ. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Πόσες γωνίες έχουν μέτρο ίσο με 70° .

A. 1 B. 3 Γ. 4 Δ. 2 E. 8



ε. Από τις δύο κορυφές τριγώνου διέρχονται:

A. 1 B. 2 Γ. 3
Δ. Κανένας E. Άπειρο πλήθος κύκλοι

4.14 Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης β.

α.

A	B
Περίκεντρο	σημείο τομής υψών
Παράκεντρο	σημείο τομής μεσοκαθέτων
Έγκεντρο	σημείο τομής διχοτόμων
	σημείο τομής διαμέσων
	σημείο τομής εσωτερικής και εξωτερικών διχοτόμων

β. Έστω $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

A	B
εντός εναλλάξ γωνίες	
εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες	ίσες
εκτός εναλλάξ γωνίες	παραπληρωματικές
εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες	άνισες
εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες	

4.15 Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία και τα μέτρα τους είναι $2x$ και $90^\circ + x$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών.

4.16 Δύο παράλληλες ευθείες δημιουργούν, τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία, εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με τα μέτρα $2x - 20^\circ$ και $100^\circ - x$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών αυτών.

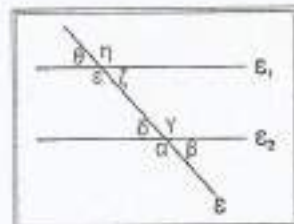
4.17 Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις:

α. Αν $\delta = \zeta$, τότε $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

β. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, τότε $\alpha =$

γ. Αν $\eta = \gamma$, τότε οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

δ. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, τότε οι $\beta =$ = =



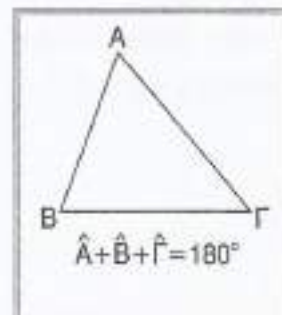
ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 4.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις ίσες πλευρές παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Να δείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.
- 4.19 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος Ax της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{\alpha}$. Από την κορυφή B φέρουμε ημιευθεία $By \parallel Ax$, που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Να δείξετε ότι $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$.
- 4.20 Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 . Πάνω σε αυτές παίρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ που είναι άνισα μεταξύ τους. Φέρουμε τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα EAB και $E\Gamma\Delta$ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
- 4.21 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους της γωνίας $\hat{A}$ και της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{\alpha}$. Αν από την κορυφή B φέρουμε παράλληλη στην πλευρά $A\Gamma$, η οποία τέμνει τις διχοτόμους στα σημεία Δ και E αντίστοιχα, να δείξετε ότι $B\Delta = BE$.
- 4.22 Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και έστω ένα τυχαίο σημείο A της πλευράς Ox . Από το A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά Oy και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα $AB = OA$. Αν το AB βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό της γωνίας $\hat{xOy}$, να δείξετε ότι η ευθεία OB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{xOy}$ ή της παραπληρωματικής της.
- 4.23 Από την κορυφή A ενός ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη προς την $A\Gamma$, στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει το B . Πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να δείξετε ότι η $B\Delta$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζεται από την πλευρά AB και το ύψος BE του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 4.24 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στο μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 4.25 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε ευθεία $\varepsilon \parallel B\Gamma$ που διέρχεται από την κορυφή A . Επίσης φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών B και Γ , οι οποίες τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Delta Z = AB + A\Gamma$.
- 4.26 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στη $B\Gamma$. Να δείξετε ότι η ευθεία ε διχοτομεί την εξωτερική γωνία $\hat{A}_{\alpha}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 4.27 Δίνεται μία γωνία $\hat{xOy}$ και στην πλευρά της Ox παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A και φέρουμε κάθετη στην Oy που την τέμνει στο σημείο B . Φέρουμε τη δι-

4.6 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

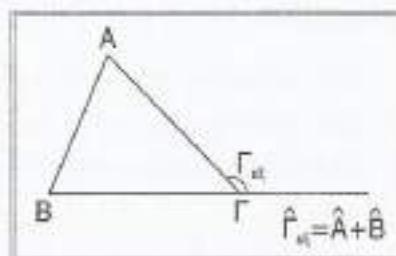
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.



- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες.
iii. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
iv. Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .

Σχόλιο

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιούμε μία βοηθητική ευθεία, παράλληλη προς μία πλευρά του τριγώνου. Γενικά όμως στις ασκήσεις πρώτα θα εξαντλούμε κάθε προσπάθεια για λύση με τα δεδομένα της άσκησης και μετά θα χρησιμοποιούμε βοηθητικές ευθείες. Ας μη φορτώνουμε το σχήμα μας άσκοπα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες, τότε είναι ίσα.

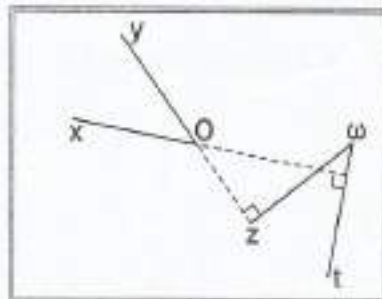
ΠΡΟΤΑΣΗ (4^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ)

Δύο τρίγωνα που έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Αναφερόμαστε σε οποιεσδήποτε γωνίες).

4.7 ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΘΕΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

4.8 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ Ν -ΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού n -γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κάθε κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με Ax διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{\text{εξ}}$ ισχύει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν $Ax \parallel B\Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Τότε:

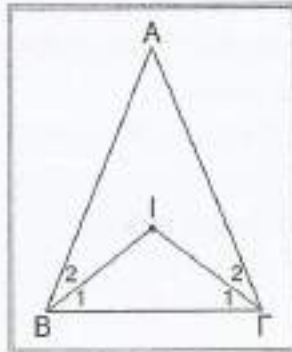
- Η γωνία δύο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με 90° συν το μισό της τρίτης γωνίας.
- Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με το μισό της τρίτης γωνίας.
- Η γωνία των δύο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με 90° μείον το μισό της τρίτης γωνίας.

Μεθοδολογία

1. Για να δείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες, αρκεί να δείξουμε ότι:
 - α. είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία,
 - β. είναι κάθετες σε μία τρίτη ευθεία,
 - γ. τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία σχηματίζουν:
 - i. Δύο εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.
 - ii. Δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
 - iii. Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές.
2. Για να δείξουμε ότι δύο ευθείες τέμνονται, αρκεί να δείξουμε ότι τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες.
3. Για να δείξουμε ότι δύο γωνίες είναι ίσες αρκεί να δείξουμε ότι είναι:
 - α. Εντός εναλλάξ παράλληλων ευθειών.
 - β. Εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παράλληλων ευθειών.
 - γ. Γωνίες ίσων τριγώνων.
 - δ. Κατακορυφήν γωνίες.
 - ε. Συμπληρώματα ίσων γωνιών.
 - ζ. Παραπληρώματα ίσων γωνιών.
 - η. Διαφορές ή αθροίσματα ίσων γωνιών.
 - θ. Γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.
 - ι. Γωνίες με πλευρές κάθετες (και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες).
 - ια. Γωνίες με πλευρές παράλληλες (και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.35 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Έστω I το έγκεντρο του τριγώνου και $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{I}\Gamma$.



	$AB = A\Gamma$
Δ	$\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$ $\hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$
Z	$B\hat{I}\Gamma = ;$

Σκέψη

Η ζητούμενη γωνία είναι γωνία του τριγώνου $B\hat{I}\Gamma$ άρα έχει σχέση με τις γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$, δηλ. $\frac{\hat{B}}{2}$ και $\frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ από το ισοσκελές $AB\Gamma$, για το οποίο γνωρίζουμε και τη σχέση $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Με τη βοήθεια του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ θα γίνει και ο υπολογισμός της.

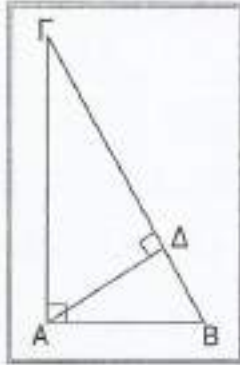
Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\hat{B}}{2} \text{ (δεδωμένο)} \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (} AB\Gamma \text{ ισοσκελές)} \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \end{array} \right\} \text{ άρα } \frac{\hat{B}}{2} + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \text{ δηλαδή } \frac{5}{2}\hat{B} = 180^\circ,$$

συνεπώς $\hat{B} = 72^\circ$ άρα $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 72^\circ$ και $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2} = 36^\circ$.

Στο τρίγωνο $B\hat{I}\Gamma$ έχουμε $B\hat{I}\Gamma + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$, άρα $B\hat{I}\Gamma = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 108^\circ$.

4.36 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και φέρουμε το ύψος AD που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να δείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta\hat{A}B}$.



Δ	$\hat{A} = 90^\circ$ $AD \perp B\Gamma$
Z	$\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta\hat{A}B}$

Σκέψη

Δεν έχουμε ίσα τρίγωνα για σύγκριση και τελικά ισότητα γωνιών. Αρκεί να δουλέψουμε, λοιπόν, με τη βοήθεια του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου. Το ότι η άσκηση εμφανίζει και το ύψος μάς δημιουργεί ορθογώνια τρίγωνα στα οποία οι ζητούμενες γωνίες είναι οξείες και συνεπώς συμπληρωματικές.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε

$$\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}. \quad (1) \text{ (συμπλήρωμα της } \hat{\Gamma} \text{)}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}. \quad (2) \text{ (συμπλήρωμα της } \hat{\Gamma} \text{)}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2)

$$\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \hat{B}.$$

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε

$$\hat{\Delta\hat{A}B} = 90^\circ - \hat{B}$$

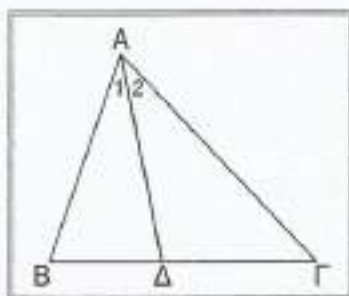
και στο ορθογώνιο $AB\Gamma$ έχουμε

$$\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}$$

άρα $\hat{\Delta\hat{A}B} = \hat{\Gamma}$.

4.37 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{Γ}$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
Να δείξετε ότι:

i. $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma - \hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{Γ}$ ii. $\hat{A}\hat{\Delta}B = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$ iii. $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$



Δ	$\hat{B} > \hat{Γ}$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
Z	$\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma - \hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{Γ}$ $\hat{A}\hat{\Delta}B = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$ $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$

Σκέψη

Οι ζητούμενες γωνίες στα δύο τρίγωνα, που σχηματίζει η διχοτόμος, έχουν σχέση με τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$, επομένως με το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ή με τη βοήθεια του πορίσματος της εξωτερικής γωνίας τριγώνου για κάθε ζητούμενη γωνία θα οδηγηθούμε στον υπολογισμό της διαφοράς των γωνιών. Επίσης οι δύο γωνίες είναι διαδοχικές και παραπληρωματικές. Άρα η λύση του συστήματος θα μας δώσει και τις εκφράσεις κάθε γωνίας σε σχέση με τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$.

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΔΓ η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}B$ εξωτερική άρα $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{Γ} + \hat{A}_2$. (1)

Στο τρίγωνο ΑΔΒ η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ εξωτερική άρα $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{A}_1$. (2)

ΑΔ διχοτόμος άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ (δεδομένο). (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma - \hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} - \hat{Γ} - \frac{\hat{A}}{2} = \hat{B} - \hat{Γ}$. (4)

Οι γωνίες $\hat{A}\hat{\Delta}B$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές

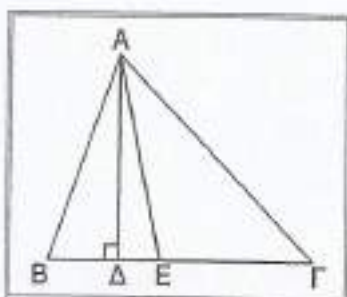
άρα $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma + \hat{A}\hat{\Delta}B = 180^\circ$. (5)

Προσθέτοντας κατά μέλη το σύστημα των σχέσεων (4), (5) και λύνοντας μας δίνει ότι $2\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - (\hat{B} - \hat{Γ})$

άρα $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$ και

συνεπώς $\hat{A}\hat{\Delta}B = 180^\circ - \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$.

4.38 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος AD και τη διχοτόμο AE .
Να δείξετε ότι $\Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



Δ	$\hat{B} > \hat{\Gamma}$ $AD \perp B\Gamma$ $B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma$
Z	$\Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

Σκέψη

Η ζητούμενη γωνία είναι οξεία γωνία του τριγώνου ADE , άρα δεν έχει σχέση με τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Για να εμφανίσουμε τη διαφορά, θα πρέπει αρχικά να γράψουμε τη $\Delta\hat{A}E$ σαν διαφορά δύο γωνιών τριγώνων με πλευρές που περιέχουν τη $\hat{B}$ και τη $\hat{\Gamma}$. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό, καθώς και η διχοτόμος AE στην εμφάνιση του παρανομαστή.

Λύση

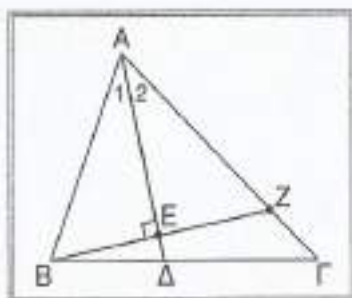
$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο ορθογώνιο τρίγωνο } A\hat{B}\Delta \\ B\hat{A}\Delta = 90^\circ - \hat{B} \\ \Delta\hat{A}E = B\hat{A}E - B\hat{A}\Delta \end{array} \right\} \text{άρα } \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{A}}{2} - (90^\circ - \hat{B}). \quad (1)$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ άρα } \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ \text{ συνεπώς } \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Από τις σχέσεις (1), (2)} \quad \Delta\hat{A}E &= 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - (90^\circ - \hat{B}) = \\ &= 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - 90^\circ + \hat{B} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}. \end{aligned}$$

4.39 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη διχοτόμο AD και από την κορυφή B ημιευθεία Bx κάθετη στη διχοτόμο AD . Η ημιευθεία τέμνει τη διχοτόμο στο σημείο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Z .
Να δείξετε ότι

$$\text{i. το τρίγωνο } ABZ \text{ είναι ισοσκελές} \quad \text{ii. } B\hat{Z}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad \text{iii. } Z\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$



Δ	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $BE \perp AD$
Z	ABZ ισοσκελές $B\hat{Z}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ $Z\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

Σκέψη

Για να δείξω ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αρκεί να δείξω ότι έχει δύο πλευρές ή δύο γωνίες ίσες. Αυτό μπορεί να γίνει με σύγκριση τριγώνων ή χρησιμοποιώντας την πρόταση που λέει ότι όταν σε ένα τρίγωνο η διχοτόμος είναι και ύψος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου AEZ , άρα μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της γωνίας $\hat{A}_2$. Η ζητούμενη γωνία $Z\hat{B}\Gamma$ είναι γωνία του $ZB\Gamma$ τριγώνου άρα έχει σχέση με τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Για να εμφανίσουμε και τη γωνία $\hat{B}$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο ερώτημα και το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

Λύση

i. Στο τρίγωνο ABZ

$\left. \begin{array}{l} AE \text{ διχοτόμος} \\ AE \text{ ύψος} \end{array} \right\} \text{ άρα } ABZ \text{ ισοσκελές,}$

ii. Στο τρίγωνο AEZ η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι εξωτερική άρα $B\hat{Z}\Gamma = \hat{A}_2 + Z\hat{E}A$

$$\text{δηλαδή } B\hat{Z}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ.$$

iii. Στο τρίγωνο $BZ\Gamma$, $Z\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} + B\hat{Z}\Gamma = 180^\circ$ άρα

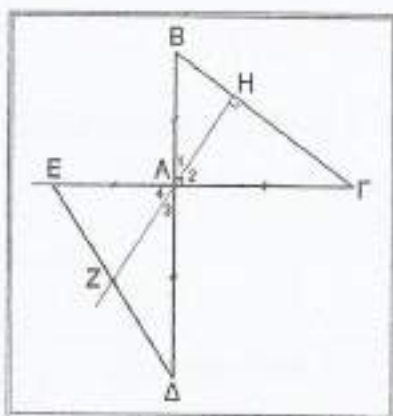
$$\left. \begin{array}{l} Z\hat{B}\Gamma = 180^\circ - \hat{\Gamma} - B\hat{Z}\Gamma \\ \text{από ii) } B\hat{Z}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ \end{array} \right\} \text{ άρα } Z\hat{B}\Gamma = 180^\circ - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ$$

$$\text{δηλ. } Z\hat{B}\Gamma = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma}. \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ άρα } \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ, \text{ δηλαδή } \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) } Z\hat{B}\Gamma = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \right) - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}.$$

4.40 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ προς το μέρος της κορυφής A και παίρνουμε αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$. Να δείξετε ότι αν η προέκταση του ύψους AH διέρχεται από το σημείο Z του ευθύγραμμου τμήματος ΔE , το Z είναι μέσο του ΔE .



Δ	$\hat{A} = 90^\circ$ $A\Delta = A\Gamma$ $AE = AB$ $AH \perp B\Gamma$
Z	$\Delta Z = ZE$

Σκέψη

Δεν έχουμε ίσα τρίγωνα με πλευρές ΔZ και ZE για να συγκρίνουμε. Ούτε μπορούμε να δεχθούμε ότι το Z είναι μέσο αρχικά. Θα πρέπει να δείξουμε την ισότητα των δύο ευθύγραμμων τμημάτων με τη βοήθεια ισοσκελών τριγώνων. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι κάποια τρίγωνα που περιέχουν τις ζητούμενες πλευρές έχουν ζευγάρια ίσων γωνιών. Αυτό μπορεί να γίνει γιατί αρχικά έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο, στο οποίο το ύψος δημιουργεί και άλλα δύο ορθογώνια τρίγωνα. Άρα η χρησιμοποίηση των συμπληρωματικών γωνιών και η μεταφορά τους θα μας οδηγήσει στη ζητούμενη σχέση.

Λύση

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$

$$\left. \begin{array}{l} AE = AB \quad (\text{δεδομένο}) \\ A\Gamma = A\Delta \quad (\text{δεδομένο}) \\ \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} \quad (\text{κατακορυφήν}) \end{array} \right\} \text{άρα}$$

από κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα με $\hat{B} = \hat{E}$, $\Delta E = B\Gamma$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. (1)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο ορθογώνιο τρίγωνο } ABH \quad \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{B} \\ \text{Στο ορθογώνιο τρίγωνο } AB\Gamma \quad \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} \end{array} \right\} \hat{A}_1 = \hat{\Gamma} \quad (2)$$

AZ προέκταση της AH άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_3$ ως κατακορυφήν. (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε

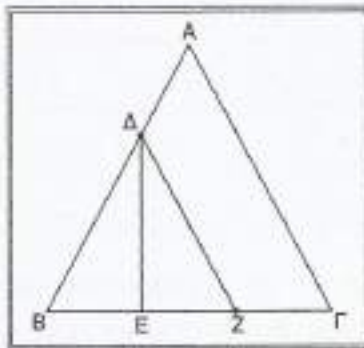
$$\hat{A}_3 = \hat{\Delta} \text{ άρα το } AZ\Delta \text{ τρίγωνο είναι ισοσκελές με } AZ = Z\Delta. \quad (4)$$

Όμοια το ΑΕΖ ισοσκελές γιατί $\hat{B} = \hat{E} = \hat{A}_2 = \hat{A}_4$ άρα $AZ = EZ$. (5)
Από τις σχέσεις (4), (5) $ZD = ZE$ άρα Z μέσο της ΔΕ.

Σχόλιο

Αντί για συμπληρωματικές γωνίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γωνίες με κάθετες πλευρές για τη σχέση (2).

4.41 Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $AD = BE = \frac{1}{3} AB$. Να δείξετε ότι $DE \perp BG$.



Δ	ΑΒΓ ισοπλευρο $AD = BE = \frac{1}{3} AB$
Ζ	$DE \perp BG$

Σκέψη

Δεν έχουμε κάποιο δεδομένο για να μας βοηθήσει στο θέμα της καθετότητας, ούτε φυσικά κάποια παραλληλία. Με μοναδικό εφόδιο τη γωνία των 60° ισοπλευρου τριγώνου θα πρέπει να δουλέψουμε με τρίγωνα. Μόνο του το ορθογώνιο $B\hat{D}E$ δεν μπορεί να σταθεί. Θα χρειαστεί λοιπόν να φέρουμε μία βοηθητική ευθεία που να συνδέει το Δ με το σημείο Ζ που είναι το μέσο της ΕΓ. Τότε δημιουργούνται τρίγωνα με αρκετά ίσα στοιχεία για να προχωρήσουμε σε υπολογισμό γωνιών άρα και να δείξουμε την καθετότητα.

Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοπλευρο . Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ (1).

Έστω Ζ μέσο του ΕΓ τότε $BE = EZ = Z\Gamma = \frac{1}{3} AB$.

Το τρίγωνο ΔΒΖ έχει $BD = BZ = \frac{2}{3} AB$ άρα ισοσκελές με $\hat{B} = 60^\circ$ και

$B\hat{D}Z = \hat{Z} = 60^\circ$ άρα ισοπλευρο.

Τότε στο ισοπλευρο τρίγωνο ΒΔΖ η ΔΕ διάμεσος (γιατί $BE = EZ$)
άρα και ύψος δηλαδή $DE \perp BG$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

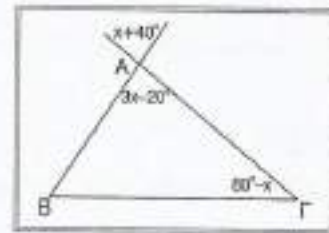
4.56 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

- α. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες. ☐ ☐
- β. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού εξαγώνου είναι 800° . ☐ ☐
- γ. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κάθε κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές. ☐ ☐
- δ. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες, τότε είναι ίσα. ☐ ☐

4.57 Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

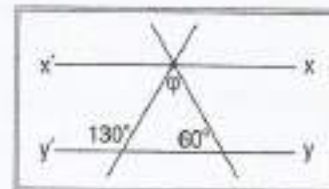
- α. Στο διπλανό σχήμα το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ είναι:

Α. 20° Β. 30° Γ. 45°
Δ. 60° Ε. 90°



- β. Στο διπλανό σχήμα $xx' // yy'$. Το μέτρο της γωνίας φ είναι:

Α. 50° Β. 60° Γ. 70°
Δ. 90° Ε. 120°



- γ. Ένα κυρτό πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 540° έχει πλήθος πλευρών ίσο με:

Α. 4 Β. 5 Γ. 6 Δ. 8 Ε. 10

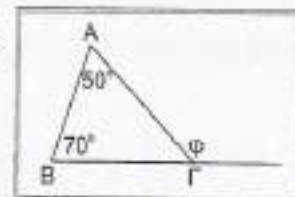
- δ. Στο διπλανό τρίγωνο το μέτρο της γωνίας B είναι:

Α. 20° Β. 40° Γ. 60°
Δ. 90° Ε. 100°



- ε. Στο διπλανό τρίγωνο το μέτρο της γωνίας φ είναι:

Α. 90° Β. 100° Γ. 120°
Δ. 130° Ε. 180°



- 4.58 Να δικαιολογήσετε γιατί δύο ύψη ενός τριγώνου τέμνονται.
- 4.59 Αν ένα κυρτό πολύγωνο έχει άθροισμα γωνιών 10 ορθές, πόσες κορυφές έχει;
- 4.60 Υπάρχει κυρτό πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 13 ορθές;
- 4.61 Ένα κυρτό δωδεκάγωνο και ένα κυρτό δεκαεξάγωνο έχουν το ίδιο άθροισμα εξωτερικών γωνιών;
- 4.62 Σε ένα τρίγωνο οι γωνίες του έχουν μέτρα ω , 2ω , 3ω . Να βρείτε το είδος του τριγώνου.
- 4.63 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ έχουμε $\hat{B} = 4\hat{\Gamma}$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
- 4.64 Να εξηγήσετε γιατί ένα τρίγωνο όπου μία γωνία του είναι ίση με το άθροισμα των άλλων δύο, είναι ορθογώνιο.
- 4.65 Να δικαιολογήσετε γιατί κάθε ισοσκελές τρίγωνο με μία γωνία 60° είναι ισόπλευρο.
- 4.66 Υπάρχει κυρτό πολύγωνο του οποίου το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του είναι ίσο με το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του;
- 4.67 Μπορούν δύο εσωτερικές διχοτόμοι ενός τριγώνου να τέμνονται κάθετα;
- 4.68 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, με τι ισούται το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}_{εξ} + \hat{\Gamma}_{εξ}$;
- 4.69 Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις
- α. Το άθροισμα τωνγωνιών ενός κυρτού πολυγώνου είναιορθές.
 - β. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{B}_{εξ} = \dots\dots\dots$ και $\hat{\Gamma}_{εξ} = \dots\dots\dots$
 - γ. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A}_{εξ} + \hat{B}_{εξ} + \hat{\Gamma}_{εξ} = \dots\dots\dots$
 - δ. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους μία προς μία είναι αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες γωνίες.
 - ε. Κάθε γωνία τριγώνου είναι ίση με 60° .

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 4.70 Δίνεται μία γωνία $\widehat{XOY} = 70^\circ$ και η διχοτόμος της Οδ. Παίρνουμε σημείο Α της διχοτόμου και φέρουμε παράλληλη προς την Οχ η οποία τέμνει την Ογ στο σημείο Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΒ.
- 4.71 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ι έγκεντρο. Αν $\widehat{A} = 60^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΒΙΓ.
- 4.72 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$. Στο εξωτερικό του τριγώνου κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΓΔ και του τριγώνου ΒΓΔ.
- 4.73 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και ΑΔ ύψος. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας ΔΑΓ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι $BE = AB$.
- 4.74 Οι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών του.
- 4.75 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$. Από τις κορυφές Β και Γ και εξωτερικά του τριγώνου φέρουμε Βχ και Γγ ημιευθείες που σχηματίζουν με τις ΑΒ και ΑΓ γωνίες 45° . Από το σημείο Α φέρουμε ΑΔ κάθετη στην ημιευθεία Βχ και ΑΕ κάθετη στη Γγ. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.
- 4.76 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\widehat{A} = 78^\circ$. Προεκτείνουμε τη ΒΓ και προς τα δύο μέρη. Στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα $BD = AB$ και $GE = AG$. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.
- 4.77 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι εξωτερικές γωνίες $\widehat{A}_{εξ}, \widehat{B}_{εξ}, \widehat{G}_{εξ}$ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 4, 5. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
- 4.78 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 60^\circ$ και $\widehat{G} = 50^\circ$. Να δείξετε ότι το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται σε ένα σημείο Ζ και να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΕ.
- 4.79 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\widehat{B}_{εξ}$ και $\widehat{G}_{εξ}$ σχηματίζουν γωνία 45° .
- 4.80 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\widehat{A} = 120^\circ$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε έτσι ώστε $BD = GE = AB$. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων που σχηματίζονται.

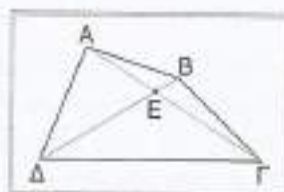
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο.

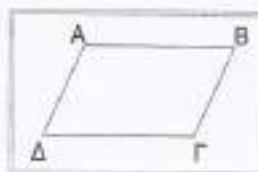
Το τετράπλευρο που έχει δύο διαγωνίους που τέμνονται σε εσωτερικό σημείο λέγεται κυρτό τετράπλευρο.



5.2 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

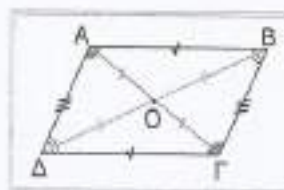
Παραλληλόγραμμα λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



Ιδιότητες παραλληλογράμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύει ότι:

- i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- iii. Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

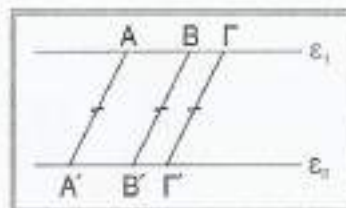


ΠΟΡΙΣΜΑ I

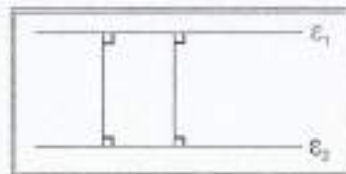
Το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας και λέγεται κέντρο παραλληλογράμμου.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

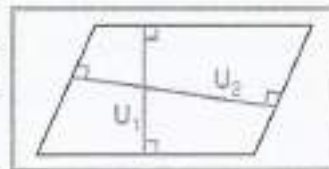
Τα παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες είναι ίσα.



Αν τα τμήματα είναι κάθετα στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται απόσταση των παραλλήλων.



Ύψος του παραλληλογράμμου λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις παράλληλες πλευρές και είναι κάθετο σε αυτές. Κάθε παραλληλόγραμμα έχει δύο ύψη.



Βάσεις λέμε τις απέναντι πλευρές του ως προς κάθε ύψος.

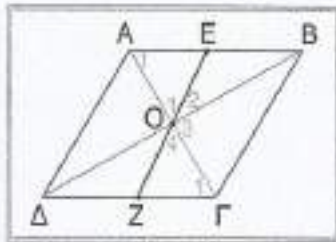
Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμα

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- ii. Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- iii. Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- iv. Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Παίρνουμε τα μέσα Ε και Ζ των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΔΓ. Να δείξετε ότι το ΕΖ διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου.



Δ	$AE = EB$ $DZ = ZΓ$ Ο κέντρο παραλληλογράμμου
Ζ	Ε, Ο, Ζ συνευθειακά

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το ΕΖ διέρχεται από το σημείο Ο, αρκεί να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΟ και ΟΖ σχηματίζουν μία ευθεία γωνία. Τότε θα βρίσκονται στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς. Επειδή όμως έχουν κοινό σημείο θα βρίσκονται στον ίδιο φορέα δηλαδή στην ίδια ευθεία.

Λύση

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΕΟ, ΖΟΓ

$$AE = \frac{AB}{2} = \frac{DΓ}{2} = ZΓ$$

$\hat{A}_1 = \hat{G}_1$ (εντός εναλλάξ) } άρα από κριτήριο Π - Γ - Π τα τρίγωνα είναι ίσα
 $OA = OG$

$$\text{άρα } \hat{O}_1 = \hat{O}_4. \quad (1)$$

$$E\hat{O}Z = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 =$$

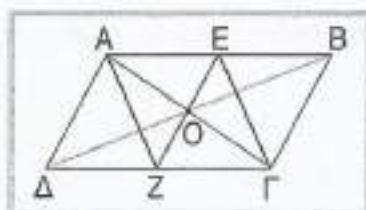
$$\stackrel{III}{=} \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_1 = A\hat{O}Γ = 180^\circ.$$

Άρα ΕΟ, ΟΖ βρίσκονται στον ίδιο φορέα και με Ο κοινό σημείο

άρα Ε, Ο, Ζ συνευθειακά.

5.2 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

- i. το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο,
- ii. οι $A\Gamma, B\Delta, EZ$ συντρέχουν.



Δ	$AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο $AE = EB$ $\Delta Z = Z\Gamma$
Z	$AE\Gamma Z$ παραλληλόγραμμο $A\Gamma, B\Delta, EZ$ συντρέχουν

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε κάποιο από τα τέσσερα κριτήρια. Επειδή η άσκηση αναφέρει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών, αρκεί να δείξουμε ότι δύο πλευρές είναι ίσες και παράλληλες μεταξύ τους. Για να δείξουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν, δεχόμαστε ότι οι δύο από αυτές τέμνονται σε ένα σημείο και αποδεικνύουμε ότι από το σημείο αυτό διέρχεται και τρίτη ευθεία.

Λύση

i.

$$\left. \begin{array}{l} AE = EB = \frac{AB}{2} \\ \Delta Z = Z\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2} \\ AB = \Delta\Gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{άρα } AE = Z\Gamma \\ AE \parallel Z\Gamma \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AE = EB = \frac{AB}{2} \\ \Delta Z = Z\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2} \\ AB = \Delta\Gamma \end{array}} \right\} \text{άρα } AE\Gamma Z \text{ παραλληλόγραμμο.}$$

ii. Επειδή το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιες του διχοτομούνται, δηλαδή $A\Gamma, ZE$ τέμνονται στο σημείο O όπου O το μέσο της $A\Gamma$.

Άρα $AO = O\Gamma$.

Όμως $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο,

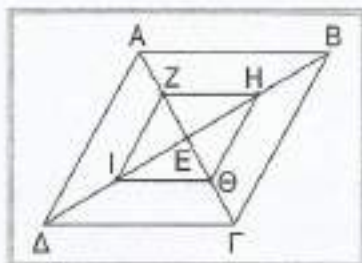
άρα οι διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο μέσο της $B\Delta$ και της $A\Gamma$

άρα το O είναι μέσο και της $B\Delta$.

Συνεπώς $A\Gamma, B\Delta, EZ$ συντρέχουν (στο σημείο O).

5.3 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο σημείο Ε. Παίρνουμε Ζ, Η, Θ, Ι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι παραλληλόγραμμο.



Δ	$EZ = ZA$ $EH = HB$ $E\Theta = \Theta\Gamma$ $EI = I\Delta$
Ζ	ΖΗΘΙ παραλληλόγραμμο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε κάποια από τις τέσσερις προτάσεις του κριτηρίου. Η άσκηση ασχολείται με τις διαγωνίους και το κέντρο παραλληλογράμμου, άρα αρκεί να δείξω ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου διχοτομούνται.

Λύση

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο άρα Ε κέντρο παραλληλογράμμου.

$$\text{Άρα } AE = EG = \frac{AG}{2} \text{ και } DE = EB = \frac{DB}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} AZ = ZE = \frac{AE}{2} \\ AE = \frac{AG}{2} \end{array} \right\} \text{ άρα } AZ = ZE = \frac{AG}{4} \quad (1)$$

$$\text{Όμοια Η μέσο άρα } EH = HB = \frac{EB}{2} = \frac{DB}{4} \quad (2)$$

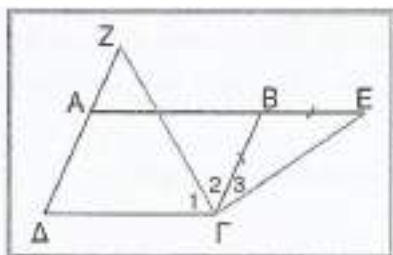
$$\text{Θ μέσο ΕΒ άρα } E\Theta = \Theta\Gamma = \frac{EG}{2} = \frac{AG}{4} \quad (3)$$

$$\text{Ι μέσο ΕΔ άρα } EI = I\Delta = \frac{ED}{2} = \frac{EB}{4} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) στο τετράπλευρο ΖΗΘΙ έχει τις διαγωνίους ΙΗ και ΘΖ να διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

5.4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ και παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε ΒΓ = ΒΕ. Όμοια προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ και παίρνουμε σημείο Ζ έτσι ώστε ΔΓ = ΔΖ.

Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΖ και ΓΕ είναι κάθετα.



Δ	ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμα ΒΓ = ΒΕ ΔΓ = ΔΖ
Ζ	ΓΖ ⊥ ΓΕ

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι κάθετα, αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν είναι ορθή. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών είναι ίσο με 90° . Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια των ισοσκελών τριγώνων και των ίσων γωνιών τους. Για να μπορέσουμε να μεταφέρουμε τις αντίστοιχες γωνίες, θα χρησιμοποιήσουμε το παραλληλόγραμμο με τις απέναντι ίσες γωνίες του.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \text{ΒΓ} = \text{ΒΕ} \text{ άρα } \hat{\Gamma}_3 = \hat{\text{Ε}} \\ \hat{\text{Β}} \text{ εξωτερική στο } \text{ΒΓΕ} \text{ τρίγωνο άρα } \hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma}_3 + \hat{\text{Ε}} \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{\Gamma}_3 = \frac{\hat{\text{Β}}}{2} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ΔΓ} = \text{ΔΖ} \text{ άρα } \hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Ζ}} \\ \text{Στο } \hat{\Delta}_1\hat{\text{Ζ}}\hat{\Gamma} \text{ τρίγωνο } \hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\text{Ζ}} = 180^\circ \end{array} \right\} \text{ άρα } 2\hat{\text{Ζ}} = 180^\circ - \hat{\Delta}_1$$

$$\text{Επομένως } \hat{\text{Ζ}} = 90^\circ - \frac{\hat{\Delta}_1}{2} \quad (2)$$

$$\text{ΒΓ} \parallel \text{ΔΖ} \text{ άρα } \hat{\text{Ζ}} = \hat{\Gamma}_2 \text{ (ως εντός εναλλάξ).} \quad (3)$$

$$\text{Από σχέσεις (2), (3)} \quad \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{\Delta}_1}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{\text{Β}}}{2} \quad (4) \text{ γιατί } \hat{\text{Β}} = \hat{\Delta}_1$$

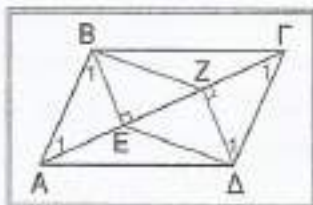
$$\text{Από σχέσεις (1), (4)} \quad \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{\Gamma}_3$$

$$\text{άρα } \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 90^\circ$$

$$\text{άρα } \text{ΖΓΕ} \text{ ορθή.}$$

$$\text{Συνεπώς } \text{ΖΓ} \perp \text{ΓΕ.}$$

- 5.5 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$. Από τις κορυφές B και Δ φέρουμε κάθετες στη διαγώνιο $A\Gamma$ με E και Z τα αντίστοιχα ίχνη. Να δείξετε ότι το $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



Δ	$AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο $BE \perp A\Gamma$ $Z\Delta \perp A\Gamma$
Z	$BE\Delta Z$ παραλληλόγραμμο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις τέσσερις προτάσεις του κριτηρίου. Η άσκηση μας δίνει ότι BE , ΔZ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία άρα μεταξύ τους παράλληλες. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν την ισότητα τους. Αυτό μπορεί να γίνει με σύγκριση τριγώνων και μάλιστα ορθογωνίων τριγώνων που δημιουργήσαν οι προβολές BE και ΔZ των κορυφών B και Δ στη διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Λύση

Συγκρίνω $\triangle BE$, $\triangle Z\Gamma$

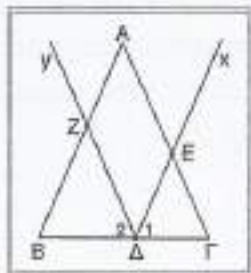
$$\left. \begin{array}{l} AB = \Gamma\Delta \text{ (απέναντι πλευρές παραλ./μου)} \\ \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \\ \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ (οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες)} \end{array} \right\} \text{ άρα από } \Pi - \Gamma - \Pi \text{ κριτήριο}$$

έχουμε $BE = Z\Delta$. (1)

$$\left. \begin{array}{l} BE \perp A\Gamma \\ Z\Delta \perp A\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } BE \parallel Z\Delta \quad (2)$$

Από σχέσεις (1), (2) το $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

- 5.6 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ και φέρουμε από το σημείο Δ παράλληλες ημιευθείες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ που τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Delta E + \Delta Z = AB$.



Δ	$AB = A\Gamma$ $\Delta x \parallel AB$ $\Delta y \parallel A\Gamma$
Z	$\Delta E + \Delta Z = AB$

Σκέψη

Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες (τις προσκείμενες στη βάση). Οι παράλληλες ημιευθείες όμως μπορούν να βοηθήσουν δημιουργώντας ζευγάρια ίσων γωνιών, καθώς και ένα παραλληλόγραμμα με όλες τις ιδιότητες που το συνοδεύουν. Με τη βοήθεια, λοιπόν, των ισοσκελών τριγώνων και των ίσων πλευρών τους μπορούμε να μεταφέρουμε τα ζητούμενα ευθύγραμμα τμήματα στην πλευρά AB και να γίνει ο υπολογισμός.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \Delta E // AB \\ \Delta Z // AG \end{array} \right\} \text{άρα } \Delta EAZ \text{ παραλ / μο με } \Delta E = AZ \quad (1)$$

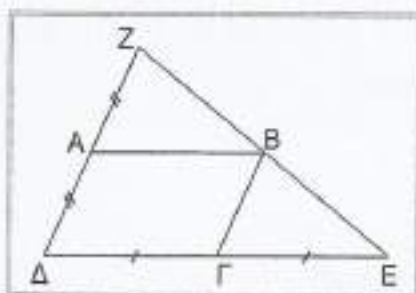
$$\left. \begin{array}{l} \Delta Z // AG \text{ άρα } \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 \text{ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη} \\ \text{αλλά } \hat{B} = \hat{\Gamma} \end{array} \right\}$$

$$\text{άρα } \hat{B} = \hat{\Delta}_2$$

$$\text{δηλαδή } \Delta BZ \text{ ισοσκελές με } BZ = Z\Delta. \quad (2)$$

$$\text{Από σχέσεις (1), (2) } \Delta E + \Delta Z = AZ + ZB = AB.$$

5.7 Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$ και όμοια προεκτείνουμε την ΔA κατά τμήμα $AZ = \Delta A$. Να δείξετε ότι τα σημεία Z, B, E είναι συνευθειακά.



Δ	$AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμα $\Gamma E = \Delta\Gamma, AZ = \Delta A$
Z	Z, B, E συνευθειακά

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα με άκρα ανά δύο τα σημεία αυτά είναι σε παράλληλους φορείς και επειδή έχουν ένα κοινό σημείο θα βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Για να δείξουμε λοιπόν την παραλληλία τους, θα χρησιμοποιήσουμε τις κατά ίσο τμήμα προεκτάσεις τους που δημιουργούν με τη σειρά τους παραλληλόγραμμα γιατί θα έχουμε δύο πλευρές ίσες και παράλληλες.

Λύση

$AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμα άρα $AB // \Delta\Gamma$ και $AD // B\Gamma$

$$\left. \begin{array}{l} AB = GE \\ AB \parallel GE \end{array} \right\} \text{άρα } ABEΓ \text{ παραλ./μο με } AG \parallel BE, (1)$$

όμοια

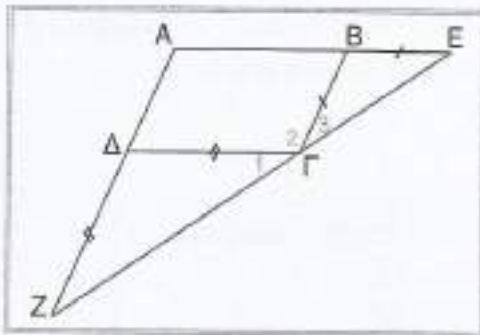
$$\left. \begin{array}{l} AZ = GB \\ AZ \parallel BG \end{array} \right\} \text{άρα } AZBΓ \text{ παραλ./μο με } ZB \parallel AG. (2)$$

Από σχέσεις (1), (2) έχουμε $\left. \begin{array}{l} BZ \parallel BE \\ B \text{ κοινό σημείο} \end{array} \right\} B, Z, E \text{ συνευθειακά.}$

Σχόλιο

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε διαφορετικά το θέμα των συνευθειακών σημείων όπως φαίνεται στην επόμενη άσκηση.

5.8 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BE = BΓ$ και την πλευρά AD κατά τμήμα $ΔZ = ΔΓ$. Να δείξετε ότι τα σημεία $Z, Γ, E$ είναι συνευθειακά.



Δ	$ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο $BE = BΓ$ $\Delta Γ = \Delta Z$
Z	$Z, Γ, E$ συνευθειακά

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι τα τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι το άθροισμα των τριών γωνιών που σχηματίζονται με κορυφή τη Γ είναι ίσο με 2 ορθές. Τότε τα ευθύγραμμα τμήματα θα είναι σε παράλληλους φορείς και επειδή έχουν κοινό σημείο, θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Για τον υπολογισμό των γωνιών αυτών θα χρησιμοποιήσουμε τα ισοσκελή τρίγωνα που δημιουργούνται σε σχέση πάντα με τις γωνίες του παραλληλογράμμου (απέναντι γωνίες ίσες, διαδοχικές παραπληρωματικές) που είναι και εξωτερικές στα ισοσκελή τρίγωνα.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} BE = BG \text{ άρα } \hat{BEG} \text{ ισοσκελές με } \hat{G}_3 = \hat{E} \\ \text{Στο } \hat{BEG} \text{ η } \hat{ABG} \text{ εξωτερική άρα } \hat{ABG} = \hat{G}_3 + \hat{E} \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{G}_3 = \hat{E} = \frac{\hat{ABG}}{2} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Όμοια στο } \Delta \hat{G}Z \Delta G = \Delta Z \text{ άρα ισοσκελές άρα } \hat{G}_1 = \hat{Z} \\ \hat{A\hat{D}G} \text{ εξωτερική στο τρίγωνο } \Delta GZ \text{ άρα } \hat{A\hat{D}G} = \hat{Z} + \hat{G}_1 \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{G}_1 = \hat{Z} = \frac{\hat{A\hat{D}G}}{2} \quad (2)$$

Στο $ABGD$ παραλληλόγραμμο: $\hat{ABG} = \hat{ADG}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
 άρα $\frac{\hat{ABG}}{2} = \frac{\hat{ADG}}{2} = \hat{G}_1 = \hat{G}_3$ άρα $\hat{G}_1 + \hat{G}_3 = \hat{ABG}$. (3)

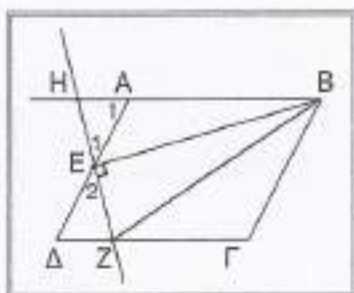
Στο παραλληλόγραμμο $ABGD$: $\hat{ABG} + \hat{BGD} = 180^\circ$ (4)

(ως διαδοχικές γωνίες παραλληλογράμμου άρα παραπληρωματικές).

Από τις σχέσεις (3), (4) $\hat{G}_1 + \hat{BGD} + \hat{G}_3 = 180^\circ$

Άρα $\left. \begin{array}{l} ZG \parallel GE \\ \Gamma \text{ κοινό σημείο} \end{array} \right\} Z, G, E \text{ συνευθειακά.}$

5.9 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$ με $\hat{A} > 90^\circ$. Παίρνουμε το μέσο E της πλευράς AD και φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα BE . Η κάθετη ευθεία στο σημείο E του BE τέμνει την DG στο Z και την προέκταση της BA στο σημείο H .
 Να δείξετε ότι $BZ = \Delta Z + \Delta G$.



Δ	$ABGD$ παραλληλόγραμμο $AE = ED$ $ZH \perp BE$
Z	$BZ = \Delta Z + \Delta G$

Σκέψη

Το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει άμεση σχέση με τα άλλα δύο ευθύγραμμα τμήματα. Η ισότητα θα προκύψει από μεταφορά τμημάτων και σύγκριση τριγώνων που δημιουργούνται από το σχήμα και μπορούν να εμφανίσουν άθροισμα ευθύγραμμων τμημάτων. (Μην ξεχνάμε ότι πρέπει να είναι συνευθειακά τα τμήματα για να τα αθροίσουμε).

Λύση

Συγκρίνω τα $\hat{AEH}$ και $\hat{DEZ}$:

$$\left. \begin{array}{l} AE = ED \text{ (δεδομένα)} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \text{ (κατακορυφήν)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A} \text{ (εντός εναλλάξ)} \end{array} \right\} \text{άρα από κριτήριο } \Gamma - \Pi - \Gamma$$

τα τρίγωνα είναι ίσα και $DZ = AH$ (1) και $HE = EZ$. (2)

Συγκρίνω $\triangle BEH$ και $\triangle BEZ$ (ορθογώνια):

$$\left. \begin{array}{l} BE \text{ κοινή} \\ HE = EZ \text{ (από σχέση (2))} \end{array} \right\} \text{άρα είναι ίσα άρα } BH = BZ \quad (3)$$

Όμως $BH = HA + AB = HA + \Delta\Gamma$ (4)
(γιατί $AB = \Delta\Gamma$ από $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο).

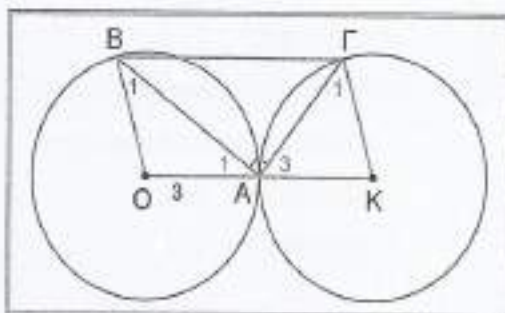
Από σχέσεις (1), (3), (4) $BZ = DZ + \Delta\Gamma$.

Σχόλιο

Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη σύγκριση των τριγώνων BEH και BEZ χρησιμοποιώντας την πρόταση ότι αν σε ένα τρίγωνο το ύψος είναι και διάμεσος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

5.10 Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) , (K, ρ) , οι οποίοι εφάπτονται στο σημείο A . Φέρουμε χορδή AB του κύκλου (O, ρ) και χορδή $A\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) έτσι ώστε $AB \perp A\Gamma$.

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $OK\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.



Δ	$(O, \rho), (K, \rho)$ $AB \perp A\Gamma$
Z	$OK\Gamma B$ παραλληλόγραμμο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε κάποια από τις τέσσερις προτάσεις του κριτηρίου. Με δεδομένο ότι έχουμε δύο ίσους κύκλους, άρα ίσες ακτίνες, έχουμε δύο ίσες πλευρές. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και παράλληλες. Θα πρέπει λοιπόν στα ισοσκελή τρίγωνα που δημιουργούνται να μεταφέρουμε γωνίες, έτσι ώστε να εμφανίσουμε κάποιο ζευγάρι γωνιών που οδηγούν σε παράλληλες ευθείες, δηλαδή εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές ή εντός εναλλάξ ίσες.

Λύση

$$OB = OA \text{ άρα } \triangle OBA \text{ ισοσκελές άρα } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ και } \hat{O} + \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = 180^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{O} = 180^\circ - 2\hat{A}_1 \quad (1)$$

$$KG = KA \text{ άρα } \triangle KAG \text{ ισοσκελές οπότε } \hat{G}_1 = \hat{A}_3 \text{ και } \hat{K} + \hat{A}_3 + \hat{G}_1 = 180^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{K} = 180^\circ - 2\hat{A}_3 \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) } \hat{K} + \hat{O} = 360^\circ - 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_3) \quad (3)$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}\hat{A}\hat{G} + \hat{A}_3 = 180^\circ \text{ άρα } \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{G}$$

$$\text{δηλ. } \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ - 90^\circ$$

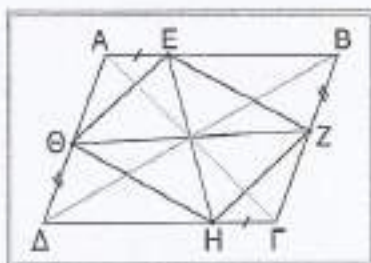
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 90^\circ \quad (4)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (3), (4) } \hat{K} + \hat{O} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

δηλαδή οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές

άρα $OB \parallel KG$
Επίσης $OB = KG = \rho$ } άρα $OKBG$ παραλληλόγραμμο.

5.11 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Παίρνουμε σημείο E της πλευράς AB και H σημείο της $\Gamma\Delta$ έτσι ώστε $AE = \Gamma H$. Επίσης παίρνουμε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ και Θ της πλευράς $A\Delta$ ώστε $BZ = \Delta\Theta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο και ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$, $B\Delta$, $E\Gamma$ και ΘZ συντρέχουν.



Δ	$AE = \Gamma H$ $\Delta\Theta = BZ$ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο
Z	$EZH\Theta$ παραλληλόγραμμο $A\Gamma, B\Delta, E\Gamma, \Theta Z$ συντρέχουν

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. Αυτό θα γίνει μετά από σύγκριση των τριγώνων, αφού η άσκηση δίνει σαν δεδομένο τις ισότητες ευθύγραμμων τμημάτων. Η χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του παραλληλόγραμμου -απέναντι πλευρές ίσες, απέναντι γωνίες ίσες- θα μας δώσει στοιχεία για τη σύγκριση. Για να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα συντρέχουν, αρκεί να δείξουμε ότι τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν το ίδιο κέντρο. Αυτό θα γίνει αφού το κέντρο είναι το σημείο που διχοτομούνται οι διαγώνιοι σε κάθε παραλληλόγραμμο.

Λύση

Συγκρίνω $\triangle \hat{A}\hat{E}\hat{\Theta}$ και $\triangle \hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{H}$

$$AE = \Gamma H$$

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}$$

$$A\Theta = Z\Gamma \text{ (γιατί } A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = B\Gamma - BZ = Z\Gamma \text{)}$$

άρα από κριτήριο Π - Γ - Π είναι ίσα

$$\text{Άρα } \Theta E = ZH.$$

(1)

Όμοια από σύγκριση $\triangle \hat{\Theta}H$ και $\triangle \hat{E}Z$ έχουμε $\Theta H = EZ$.

(2)

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα άρα οι $A\Gamma$, $B\Delta$ διχοτομούνται στο κέντρο.

Από τις σχέσεις (1), (2) το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμα.

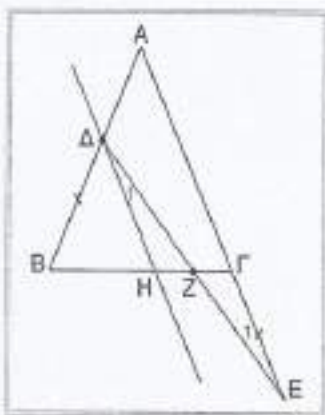
$$AE = H\Gamma$$

άρα $AEGH$ παραλληλόγραμμα και το μέσο της $A\Gamma$ διαγωνίου θα είναι μέσο και της EH .

Το ΘEZH παραλληλόγραμμα άρα το μέσο O της διαγωνίου EH θα είναι και μέσο της ΘZ .

Άρα όλα τα ευθύγραμμα τμήματα διέρχονται από το σημείο O .

- 5.12 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta B$. Να δείξετε ότι η $B\Gamma$ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΔE .



Δ	$AB = A\Gamma$ $\Gamma E = \Delta B$
Z	$B\Gamma$ διχοτομεί το ΔE

Σκέψη

Η ισότητα δύο ευθυγράμμων τμημάτων δεν μπορεί να γίνει με σύγκριση τριγώνων με τα δεδομένα στοιχεία. Πρέπει να δημιουργήσουμε ισότητες στοιχείων, γι' αυτό πρέπει να φέρουμε ως βοηθητική ευθεία μία παράλληλη της $A\Gamma$ που να διέρχεται από το σημείο Δ . Τότε θα έχουμε ζευγάρια ίσων γωνιών, καθώς και ένα νέο ισοσκελές τρίγωνο για να μπορούμε να μεταφέρουμε γωνίες και ευθύγραμμα τμήματα.

Λύση

Έστω Z το σημείο τομής των $B\Gamma$ και ΔE .

Φέρουμε $\Delta H \parallel A\Gamma$ με H σημείο της πλευράς $B\Gamma$.

Τότε θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Delta H B} = \hat{\Gamma} \text{ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)} \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (το } \triangle A\hat{B}\Gamma \text{ ισοσκελές)} \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{B} = \hat{\Delta H B}$$

άρα το $\triangle H B$ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta H$. (1)

Συγκρίνω $\triangle H Z$ και $\triangle \Gamma E$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta H = \Gamma E \text{ (από σχέση (1) και δεδομένο)} \\ \hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{\Delta H \Gamma} = \hat{Z \Gamma E} \text{ (εντός εναλλάξ)} \end{array} \right\}$$

άρα από κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα $\Delta Z = Z E$,
δηλαδή το Z μέσο του ΔE δηλαδή το $B\Gamma$ διχοτομεί το ΔE .

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

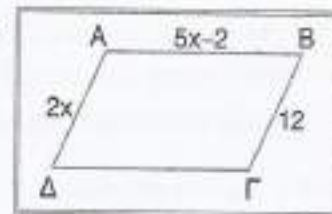
?

- 5.13** Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ
- | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| α. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες. | ☐ | ☐ |
| β. Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιες του διχοτομούνται, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. | ☐ | ☐ |
| γ. Μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών, τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα είναι ίσα. | ☐ | ☐ |
| δ. Ένα τετράπλευρο που έχει δύο ζευγάρια ίσων πλευρών είναι παραλληλόγραμμο. | ☐ | ☐ |
| ε. Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες είναι ανά δύο ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. | ☐ | ☐ |

5.14 Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

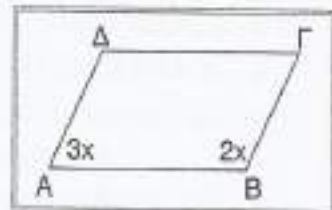
- α. Στο διπλανό παραλληλόγραμμο η περίμετρος του είναι ίση με:

A. 72 B. 80 Γ. 86
Δ. 90 E. 58



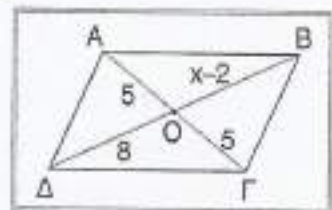
- β. Στο διπλανό παραλληλόγραμμο το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$ είναι ίσο με:

A. 74° B. 70° Γ. 72°
Δ. 76° E. 90°



- γ. Στο διπλανό παραλληλόγραμμο το x είναι ίσο με:

A. 8 B. 10 Γ. 12
Δ. 6 E. 5



ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

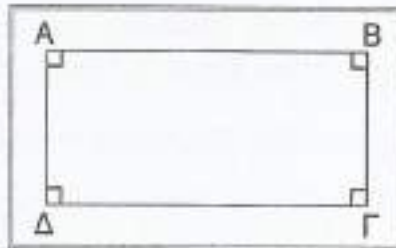
- 5.20 Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι $15 - x$, $x + 5$, $2x + 10$, $x + 15$. Να υπολογίσετε το x , αφού εξετάσετε ποιες μπορεί να είναι οι απέναντι πλευρές.
- 5.21 Δίνεται ένα παραλληλόγραμμα για το οποίο γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές γωνίες έχουν μέτρο x και $4x - 10$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.
- 5.22 Δίνεται παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$. Φέρουμε τις διχοτόμους AE και BZ .
Να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.
- 5.23 Δίνεται ένα παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$. Φέρουμε τις διχοτόμους AE και $ΓΖ$.
Να δείξετε ότι είναι παράλληλες.
- 5.24 Δίνεται ένα παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$. Παίρνουμε τα μέσα E και Z των απέναντι πλευρών AB και $ΔΓ$. Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα $AEZΔ$ και $EBΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμα.
- 5.25 Δίνεται ένα παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$ στο οποίο ισχύει $AB = 2BΓ$. Να δείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ διχοτομεί και το ευθύγραμμο τμήμα $ΓΕ$, όπου E το μέσο της πλευράς AB .
- 5.26 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και φέρνουμε τις διαμέσους $BΔ$ και $ΓΕ$. Προεκτείνουμε τη $BΔ$ κατά ίσο τμήμα $BΔ = ΔΖ$ και την $ΓΕ$ κατά ίσο τμήμα $ΓΕ = ΕΗ$.
Να δείξετε ότι:
I. τα σημεία Z, A, H είναι συνευθειακά,
II. $AZ = ZH$.
- 5.27 Δίνεται ένα παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$. Φέρουμε τις διαγωνίους $AΓ$ και $BΔ$ που τέμνονται στο σημείο E . Παίρνουμε τυχαίο σημείο Z της πλευράς AB και φέρουμε την EZ . Προεκτείνουμε την EZ ώστε να τμήσει την πλευρά $ΔΓ$ στο σημείο H . Να δείξετε ότι το $AZΓH$ είναι παραλληλόγραμμα.
- 5.28 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$. Παίρνουμε το μέσο $Δ$ της πλευράς AB και φέρουμε μία ευθεία η οποία διέρχεται από το $Δ$ και τέμνει την πλευρά $AΓ$ σε σημείο E . Προεκτείνουμε την $EΔ$ κατά ίσο τμήμα $ΔΖ = EΔ$.
Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $BZAE$ είναι παραλληλόγραμμα.

ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

5.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

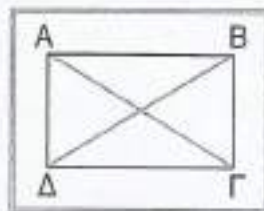
Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Ιδιότητα ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

$$A\Gamma = B\Delta$$



Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο.

Ένα ορθογώνιο είναι τετράπλευρο όταν:

- i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- iii. Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- iv. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

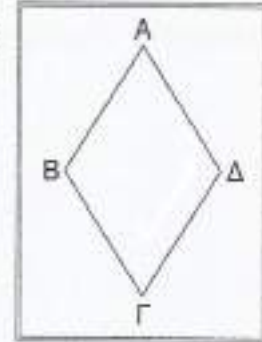
Σχόλιο

Το ορθογώνιο έχει όλες τις γωνίες ορθές.

5.4 ΡΟΜΒΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Ιδιότητες ρόμβου

- i. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- ii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

$$AO = OC$$

$$BO = OD$$



Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν:

- i. Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- iii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιος του διχοτομεί μία γωνία του.

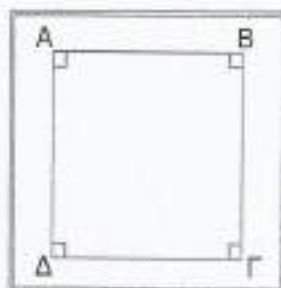
Σχόλιο

Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

5.5 ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Ιδιότητες τετραγώνου

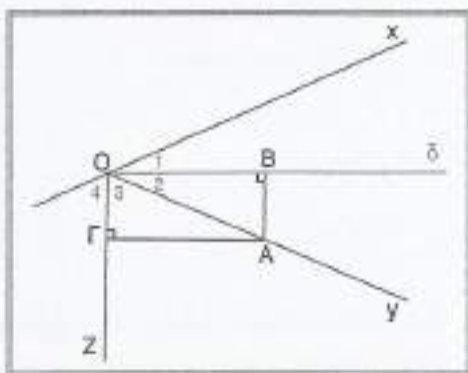
- i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- ii. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- iii. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- iv. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

- α. Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.
- β. Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο όταν:
 - i. Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
 - ii. Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
 - iii. Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του είναι κάθετες.
 - iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές του πλευρές του είναι ίσες.
 - v. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
 - vi. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.40 Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο A της πλευράς Oy . Φέρουμε την $O\delta$ εσωτερική διχοτόμο και την Oz εξωτερική διχοτόμο. Από το A φέρουμε AB κάθετη στην $O\delta$ και AG κάθετη στην Oz . Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $OBAΓ$ είναι ορθογώνιο.



Δ	$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$
	$\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$
	$AB \perp O\delta$
	$AG \perp Oz$
Z	$OBAΓ$ ορθογώνιο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αρκεί να δείξουμε ότι έχει όλες τις γωνίες του ίσες (ορθές). Είναι δεδομένο ότι οι δύο γωνίες είναι ορθές, οι $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, που είναι απέναντι γωνίες. Αρκεί να δείξουμε ότι οι $\widehat{BOΓ}$ και $\widehat{A}$ είναι ίσες επίσης. Το δεδομένο ότι έχουμε διχοτόμους δύο διαδοχικών και παραπληρωματικών γωνιών μας δίνει την καθετότητα από γνωστή πρόταση. Εξάλλου, το τετράπλευρο έχει άθροισμα γωνιών 360° , άρα έχουμε ότι χρειαζόμαστε για τους υπολογισμούς των γωνιών.

Λύση

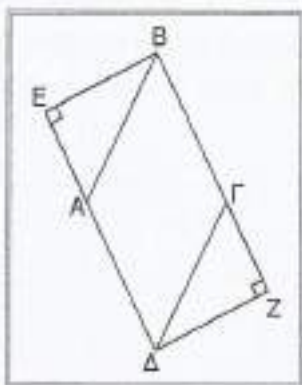
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ (γιατί } O\delta \text{ διχοτόμος)} \\ \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 \text{ (γιατί } Oz \text{ διχοτόμος)} \\ \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{άρα } \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \text{ άρα } \widehat{BOΓ} = 90^\circ. \\ \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \end{array}$$

Στο τετράπλευρο $OBAΓ$ ισχύει $\widehat{BOΓ} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{A} = 360^\circ$

$$\begin{aligned} \text{άρα, } \widehat{A} &= 360^\circ - \widehat{BOΓ} - \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \\ &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

άρα όλες οι γωνίες του τετραπλεύρου είναι ίσες.
Άρα είναι ορθογώνιο.

5.41 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε κάθετη στην πλευρά ΑΔ που την τέμνει στην προέκταση στο σημείο Ε. Επίσης, από την κορυφή Δ φέρουμε κάθετη στην πλευρά ΒΓ που την τέμνει στην προέκταση στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ορθογώνιο.



Δ	ΑΒΓΔ ρόμβος $BE \perp AD$ $DZ \perp B\Gamma$
Ζ	ΔΕΒΖ ορθογώνιο.

Σκέψη

Αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα και έχει μία γωνία ορθή. Οι κάθετες που έχουμε φέρει σε παράλληλες ευθείες είναι και μεταξύ τους παράλληλες και σχηματίζουν τουλάχιστον μία γωνία ορθή.

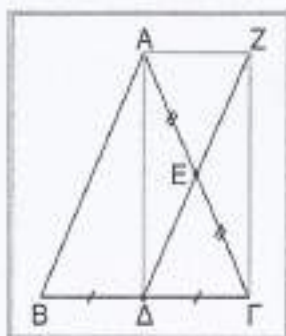
Λύση

$$\left. \begin{array}{l} BE \perp AD \\ DZ \perp B\Gamma \\ AD \parallel B\Gamma \end{array} \right\} \text{άρα } BE \parallel DZ. (1)$$

$$B\Gamma \parallel AD \text{ άρα } BZ \parallel DE. (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) το ΒΕΔΖ παραλληλόγραμμα και επειδή $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ το παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνιο.

5.42 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Παίρνουμε το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ και το Ε μέσο της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά ίσο τμήμα $EZ = DE$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο.



Δ	$AB = AG$ $BD = DG$ $AE = EG$ $DE = EZ$
Ζ	ΑΖΓΔ ορθογώνιο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε κάποια από τις προτάσεις των κριτηρίων. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι είναι παραλληλόγραμμα, έχοντας αρκετά ίσα ευθύγραμμα τμήματα, και ότι έχει μία ορθή γωνία. Το αρχικό τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και ύψος –άρα η γωνία είναι ορθή– ενώ η κατασκευή του τετραπλεύρου έγινε με προέκταση κατά ίσο τμήμα από το μέσο μιας πλευράς. Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα διχοτομούνται, δηλαδή οι διαγώνιες του, διχοτομούνται άρα είναι παραλληλόγραμμα.

Λύση

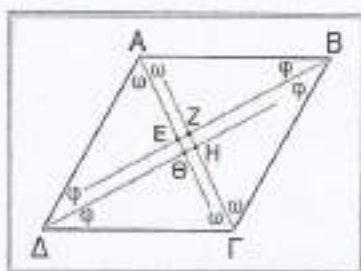
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Gamma \text{ ισοσκελές} \\ \text{AD διάμεσος} \end{array} \right\} \text{ άρα AD ύψος δηλ. } \angle AD\Gamma = 90^\circ. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{E μέσο AG άρα AE = EG} \\ \text{DE = EZ} \end{array} \right\} \text{ άρα οι διαγώνιες AG, DZ διχοτομούνται στο σημείο E.}$$

Άρα το $\triangle AD\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) το $\triangle AD\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

5.43 Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ και έστω E, Z, H, Θ τα σημεία τομής τους. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο EZHΘ είναι ορθογώνιο.



Δ	ABΓΔ παραλληλόγραμμα AΘ, BZ, ΔΘ, ΓH διχοτόμοι
Z	EZHΘ ορθογώνιο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε μία πρόταση από το κριτήριο. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια των διχοτόμων που δημιουργούν ίσες γωνίες. Με δεδομένο ότι έχουμε και ένα παραλληλόγραμμα με τις ιδιότητές του, θα μεταφέρουμε γωνίες για να δείξουμε ότι οι ζητούμενες γωνίες είναι ορθές.

Λύση

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

άρα $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ$

άρα $\omega + \varphi = 90^\circ$. (1)

Στο τρίγωνο ΔΘΑ: $\hat{\Theta}\hat{A}\hat{D} + \hat{A}\hat{D}\hat{\Theta} + \hat{\Delta}\hat{\Theta}\hat{A} = 180^\circ$

άρα $\hat{\Delta}\hat{\Theta}\hat{A} = 180^\circ - \omega - \varphi$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\hat{\Delta}\hat{\Theta}\hat{A} = 90^\circ$.

Όμοια στο τρίγωνο ΔΗΓ έχουμε $\hat{\Delta}\hat{H}\hat{\Gamma} = 90^\circ$,

στο τρίγωνο ΒΖΓ έχουμε $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 90^\circ$

και στο τρίγωνο ΑΖΒ έχουμε $\hat{A}\hat{Z}\hat{B} = 90^\circ$.

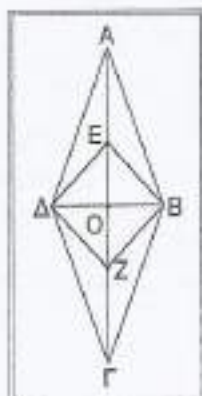
Δηλαδή το τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

Σχόλιο

Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα και έχει μία γωνία ορθή εναλλακτικά.

5.44 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε, Ζ της πλευράς ΑΓ, τέτοια ώστε $EO = OZ = OB = OD$.

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.



Δ	ΑΒΓΔ ρόμβος $EO = OZ = OB = OD$
Ζ	ΔΕΒΖ τετράγωνο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να δείξουμε ότι έχει όλες τις πλευρές και τις γωνίες του ίσες. Η ισότητα των ευθύγραμμων τμημάτων μας οδηγεί σε σύγκριση τριγώνων ή σε ειδική κατηγορία ορθογώνιων τριγώνων, τα ισοσκελή ορθογώνια, που είναι βολικά στον υπολογισμό γωνιών, αφού κάθε οξεία γωνία τους είναι 45° .

Κεφάλαιο 5 – Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

Λύση

ΑΒΓΔ ρόμβος άρα $OE \perp OD$
 $OE = OD$ (δεδομένο)

άρα $\triangle O\hat{D}E$ ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με $\angle O\hat{E}D = \angle E\hat{D}O = 45^\circ$. (1)

Όμοια στο $\triangle O\hat{B}E$ έχουμε $\angle O\hat{E}B = \angle E\hat{B}O = 45^\circ$ (2)

στο $\triangle O\hat{Z}$: $\angle O\hat{B}Z = \angle O\hat{Z}B = 45^\circ$ (3)

και στο $\triangle O\hat{Z}$ έχουμε $\angle O\hat{D}Z = \angle O\hat{Z}D = 45^\circ$. (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) έχουμε ότι οι γωνίες $\hat{D}, \hat{E}, \hat{B}, \hat{Z}$ του τετραπλεύρου είναι ορθές άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. (5)

Επίσης από σύγκριση τριγώνων $\triangle ODE$ και $\triangle OBE$

EO κοινή
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$
 $OD = OB$

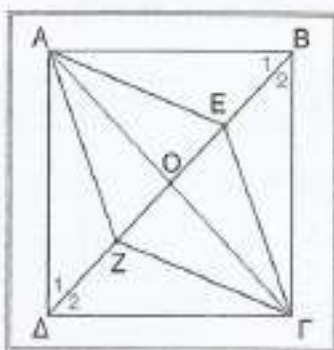
} άρα ίσα άρα $DE = EB$.

Ομοίως έχουμε $EB = BZ = ZD$, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος και από τη σχέση (5) ορθογώνιο άρα τετράγωνο.

Σχόλιο

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι είναι τετράγωνο ότι οι EZ, DB , διαγώνιες είναι ίσες και κάθετες μεταξύ τους.

5.45 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΒΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε $BE = \Delta Z$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ρόμβος.



Δ	ΑΒΓΔ τετράγωνο $BE = \Delta Z$
Z	ΑΕΓΖ ρόμβος

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, θα χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις του κριτηρίου. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Αυτό θα προκύψει από τη σύγκριση τριγώνων που έχουν δημιουργηθεί από τη διαγώνιο και τα ευθύγραμμα τμήματα. Όλα τα τρίγωνα είναι μεταξύ τους ίσα, άρα όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου είναι ίσες.

Λύση

Συγκρίνω $\triangle \hat{A} \hat{D} Z$ και $\triangle \hat{D} \hat{Z} \Gamma$: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 45^\circ$ (ΔB διχοτομεί $\hat{D}$)
 $AD = DG$ (πλευρές τετραγώνου)
 DZ κοινή πλευρά
 } άρα $\Pi - \Gamma - \Pi$ κριτήριο

άρα ίσα με $AZ = Z\Gamma$. (1)

Όμοια από σύγκριση $\triangle \hat{D} \hat{Z} \Gamma$ και $\triangle \hat{B} \hat{E} \Gamma$: $\hat{D}_2 = \hat{B}_2 = 45^\circ$
 $D\Gamma = B\Gamma$
 $DZ = BE$ (δεδομένο)
 } άρα ίσα $Z\Gamma = \Gamma E$. (2)

Όμοια από σύγκριση $\triangle \hat{B} \hat{E} \Gamma$ και $\triangle \hat{A} \hat{E} B$ έχουμε $AE = E\Gamma$. (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε $AZ = Z\Gamma = \Gamma E = AE$

άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

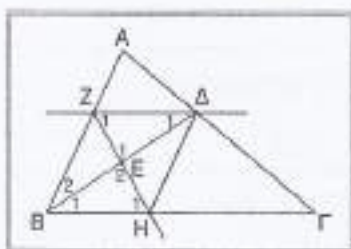
Σχόλιο

Η άσκηση μπορεί να λυθεί εναλλακτικά αν φέρουμε τη διαγώνιο AG και

$OZ = DO - DZ$
 $OE = OB - BE$ } άρα με δεδομένο $OZ = OE$
 $AO = OG$ } οι διαγώνιες διχοτομούνται

(άρα είναι παραλληλόγραμμα) και τέμνονται κάθετα ($AG \perp BD$) άρα είναι ρόμβος.

5.46 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B που τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Παίρνουμε το σημείο E μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BD . Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Φέρουμε την ZE που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο H . Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔZBH είναι ρόμβος.



$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$	
Δ	$BE = E\Delta$
	$\Delta Z \parallel B\Gamma$
Z	ΔZBH ρόμβος

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος, αρκεί να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμα και μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του. Αυτό θα γίνει γιατί τα δεδομένα μας δίνουν ότι BD διχοτόμος. Άρα πρέπει να ασχοληθούμε με την παραλληλία των πλευρών ή να δείξουμε ότι δύο πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Αυτό μπορεί να γίνει με σύγκριση τριγώνων που έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και BH για πλευρές.

Λύση

Συγκρίνω $\triangle \hat{Z}E$ και $\triangle \hat{E}H$: $BE = ED$ (δεδομένο)
 $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (κατακορυφήν)
 $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (εντός εναλλάξ με $\Delta Z // BH$)

άρα κριτήριο Π – Γ – Π άρα τα τρίγωνα είναι ίσα με $ZE = EH$ (1)

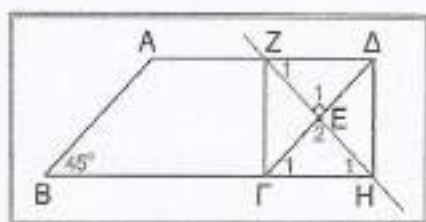
$$\Delta Z = BH \quad (2)$$

$$\hat{Z}_1 = \hat{H}_1 \quad (3)$$

$\Delta Z // BH$ (δεδομένο) } άρα ΔZBH παραλληλόγραμμα } άρα ΔZBH ρόμβος.
 $\Delta Z = BH$ (σχέση (2)) } $B\Delta$ διχοτομεί $\hat{B}$

5.47 Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 45^\circ$. Παίρνουμε το μέσο E της $\Gamma\Delta$ και φέρνουμε κάθετη ευθεία προς την $\Gamma\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο Z και την $B\Gamma$ στο σημείο H .

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta Z\Gamma H$ είναι τετράγωνο.



Δ	$AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμα $\hat{B} = 45^\circ$ $\Gamma E = E\Delta$ $ZH \perp \Delta\Gamma$
Z	$\Delta Z\Gamma H$ τετράγωνο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα και οι διαγώνιοι του είναι κάθετες και ίσες, δηλ. ρόμβος και ορθογώνιο μαζί. Θα ασχοληθούμε με τις διαγώνιες γιατί το ίδιο το ζήτημα αναφέρει το μέσο E της πλευράς. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο πλευρές ίσες και παράλληλες για να είναι το τετράπλευρο παραλληλόγραμμα, ενώ με τη σύγκριση τριγώνων θα έχουμε και την ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων που ζητάμε.

Λύση

Συγκρίνω $\triangle \hat{Z}E$ και $\triangle \hat{E}H$ $\Gamma E = E\Delta$ (δεδομένο)
 $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (κατακορυφήν)
 $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$

Από κριτήριο Π – Γ – Π ή από κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα τρίγωνα είναι ίσα άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα

$$\Delta Z = \Gamma H \quad (1)$$

$$ZE = EH \quad (2)$$

$$\hat{Z}_1 = \hat{H}_1 = 45^\circ \quad (3)$$

Από τη σχέση (1) και με $ZD \parallel \Gamma H$ το τετράπλευρο $ZDH\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

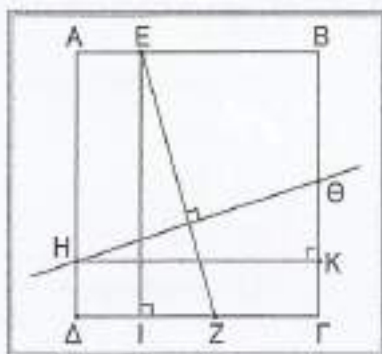
Από (2), (3) τα τρίγωνα είναι ορθογώνια ισοσκελή.

Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ZE , ED , EG , EH είναι ίσα και κάθετα μεταξύ τους.

Άρα οι διαγώνιες είναι ίσες και κάθετες.

Άρα το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

5.48 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο E και στην πλευρά $\Delta\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z . Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα EZ και σε τυχαίο σημείο του φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ στα σημεία H και Θ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα EZ και $H\Theta$ είναι ίσα.



Δ	$AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο $EZ \perp H\Theta$
Z	$EZ = H\Theta$

Σκέψη

Η καθετότητα από μόνη της δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε ισότητα τμημάτων. Δεν έχουμε επίσης παράλληλες ευθείες ή ισοσκελή τρίγωνα. Πρέπει λοιπόν να δημιουργήσουμε τρίγωνα, για να επιτύχουμε σύγκριση τριγώνων χρησιμοποιώντας τις πλευρές του τετραγώνου. Γι' αυτό φέρουμε EI και HK κάθετες στις πλευρές $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα που δημιουργήσαμε στην άσκηση.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \text{Συγκρίνω } E\hat{Z}I \text{ και } \Theta\hat{H}K : HK = EI (= AB = \Delta\Gamma) \\ \hat{H} = \hat{E} \text{ (οξείες με πλευρές κάθετες)} \end{array} \right\}$$

άρα τα ορθογώνια τρίγωνα EZI και ΘHK είναι ίσα άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα άρα $\Theta H = ZE$ (1)

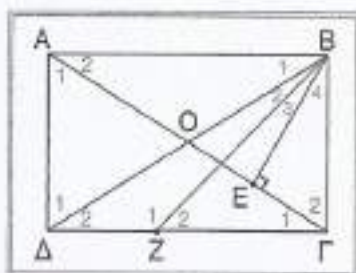
$$\hat{Z} = \hat{\Theta}$$

$$IZ = \Theta K.$$

Από τη σχέση (1) τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα.

5.49 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και φέρουμε από τη κορυφή Β, κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Ε. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας ΕΒΔ, η οποία τέμνει την πλευρά ΔΓ στο σημείο Ζ.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.



Δ	ΑΒΓΔ ορθογώνιο $BE \perp AG$ $\hat{\Delta} \hat{B} Z = Z \hat{B} E$
Ζ	ΖΒΓ ισοσκελές

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα, δεν έχουμε ίσα τρίγωνα για σύγκριση. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές υπολογίζοντας ότι έχει δύο γωνίες ίσες. Η προβολή του Β στη διαγώνιο έχει δημιουργήσει ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο έχει και τη διχοτόμο της οξείας γωνίας για να μας βοηθήσει στη μεταφορά των γωνιών και στη σύγκρισή τους. Το ορθογώνιο με τις ιδιότητες του και τη διάμεσο του δημιουργεί ισοσκελή τρίγωνα με ίσα ζευγάρια γωνιών. Με διαδοχικές αντικαταστάσεις θα πετύχουμε τον υπολογισμό των δύο ίσων γωνιών.

Λύση

$$BZ \text{ διχοτόμος } \Delta \hat{B} E \text{ άρα } \hat{B}_2 = \hat{B}_3. \quad (1)$$

$$\text{Στο τρίγωνο } \Delta BZ \quad \hat{Z}_2 \text{ εξωτερική άρα } \hat{Z}_2 = \hat{\Delta}_2 + \hat{B}_2. \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} BE \perp AG \\ BG \perp DG \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{B}_4 = \hat{\Gamma}_1 \quad (3)$$

γιατί έχουν τις πλευρές τους κάθετες και είναι οξείες.

$$\text{Το τρίγωνο } \Delta O \Gamma \text{ είναι ισοσκελές άρα } \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1. \quad (4)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (3), (4)} \quad \hat{B}_3 = \hat{\Delta}_2. \quad (5)$$

$$\text{Άρα με τη βοήθεια των (1), (5) η σχέση (2) γίνεται } \hat{Z}_2 = \hat{B}_4 + \hat{B}_3$$

$$\text{άρα } \hat{Z}_2 = Z \hat{B} \Gamma$$

$$\text{άρα το } Z \hat{B} \Gamma \text{ είναι ισοσκελές.}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

5.12 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

- | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| α. Το τετράπλευρο που έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο. | ☐ | ☐ |
| β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα. | ☐ | ☐ |
| γ. Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες είναι ρόμβος. | ☐ | ☐ |
| δ. Σε ένα τετράγωνο, οι διαγώνιοι είναι ίσες. | ☐ | ☐ |
| ε. Ένα παραλληλόγραμμο που έχει ίσες και κάθετες διαγώνιους είναι τετράγωνο. | ☐ | ☐ |

5.53 Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

- α. Το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές ίσες είναι:
- Α. ορθογώνιο
 - Β. ρόμβος
 - Γ. τετράγωνο
 - Δ. ρόμβος ή τετράγωνο
 - Ε. τίποτα από τα προηγούμενα
- β. Σε ένα ρόμβο οι διαγώνιοι:
- Α. είναι ίσες
 - Β. διχοτομούνται
 - Γ. σχηματίζουν γωνία 60°
 - Δ. σχηματίζουν γωνία 120°
 - Ε. τίποτα από τα προηγούμενα
- γ. Ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις διαγώνιους του ίσες και κάθετες είναι:
- Α. ορθογώνιο
 - Β. παραλληλόγραμμο
 - Γ. ρόμβος
 - Δ. τετράγωνο
 - Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

- δ. Σε ένα τετράγωνο η διαγώνιος και η πλευρά του σχηματίζουν γωνία
 Α. 30° Β. 45° Γ. 60°
 Δ. 90° Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

- ε. Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν:
 Α. Είναι ρόμβος και ορθογώνιο.
 Β. Έχει ίσες τις απέναντι πλευρές.
 Γ. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.
 Δ. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
 Ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.

5.54 Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β.

	Στήλη Α		Στήλη Β
α.	ορθογώνιο παραλληλόγραμμα	i.	οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται
		ii.	το άθροισμα των γωνιών είναι 400°
β.	τετράγωνο	iii.	οι διαγώνιοι είναι ίσες
		iv.	δύο πλευρές είναι ίσες
γ.	ρόμβος	v.	είναι παραλληλόγραμμα και όλες οι πλευρές του είναι ίσες

5.55 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και η διαγώνιος του τον χωρίζει σε δύο ισόπλευρα τρίγωνα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου.

5.56 Να αναφέρετε σε ποια παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι είναι διχοτόμοι των γωνιών του.

5.57 Να αναφέρετε σε ποια παραλληλόγραμμα έχουμε ίσες διαγώνιες.

5.58 Να δικαιολογήσετε γιατί ένα κυρτό τετράπλευρο που έχει ορθές τρεις γωνίες είναι ορθογώνιο.

5.59 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $AB = 2x + 4$ και $AD = 4x - 6$. Να υπολογίσετε την περίμετρό του.

5.60 Να εξετάσετε αν υπάρχει τετράπλευρο που έχει κάθετες διαγωνίους εκτός από το ρόμβο.

5.61 Να δικαιολογήσετε γιατί τα μέσα των πλευρών τετραγώνου σχηματίζουν τετράγωνο.

5.62 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α. Σε κάθε ορθογώνιο οι είναι ίσες.
- β. Ένα παραλληλόγραμμο είναι όταν δύο διαδοχικές πλευρές είναι
- γ. Οι διαγώνιοι ρόμβου έχουν τις εξής ιδιότητες:
 - I. κάθετα.
 - II. Είναι των γωνιών του.
- δ. Ένα παραλληλόγραμμο με μία γωνία έχει του είναι
- ε. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει τις του ίσες και μεταξύ τους, τότε είναι

Άλλα Θέματα

- 5.63 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Παίρνουμε το μέσο Δ της βάσης $B\Gamma$ και φέρουμε ημιευθείες παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το $AEDZ$ είναι ρόμβος.
- 5.64 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και $\hat{B} > 90^\circ$. Έστω E και Z τα μέσα των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ZEB\Gamma$ είναι ρόμβος.
- 5.65 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και παίρνουμε σημείο E της διαγωνίου $B\Delta$ τέτοιο ώστε $BE = B\Gamma$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του σχηματιζόμενου τριγώνου $\Delta\Gamma E$.
- 5.66 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και παίρνουμε τα μέσα E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι τετράγωνο.
- 5.67 Δίνεται κύκλος (O, ρ) και παίρνουμε μία ακτίνα OA . Φέρουμε την μεσοκάθετο στην ακτίνα OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.
- 5.68 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Παίρνουμε τα μέσα E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.
- 5.69 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Αν E είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα EA και EB διχοτομούν τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ αντίστοιχα και ότι η γωνία $\hat{AEB} = 90^\circ$.
- 5.70 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$. Παίρνουμε το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ και φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα AM το οποίο προεκτείνουμε. Στην προέκταση παίρνουμε ίσο μήκος $ME = AM$. Να δείξετε ότι τα E, Γ, Δ είναι συνευθειακά.
- 5.71 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, A, Z είναι συνευθειακά.
- 5.72 Δίνεται δύο κύκλοι $(O, \rho), (K, \rho)$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AKBO$ είναι ρόμβος.

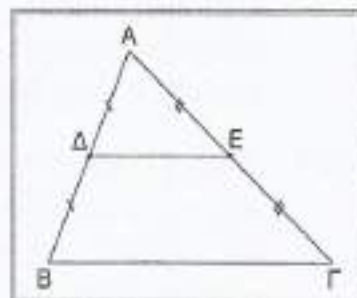
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

5.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

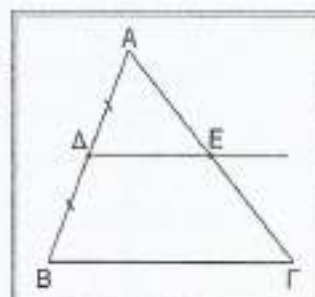
$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AB \\ E \text{ μέσο } AG \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta E \parallel B\Gamma \\ \text{άρα } \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \end{array}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ II

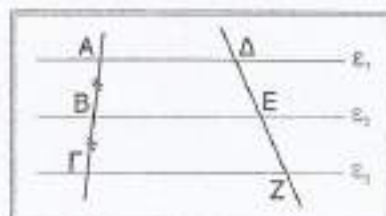
Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AB \\ \Delta E \parallel B\Gamma \end{array} \right\} \text{άρα } E \text{ μέσο } AG$$



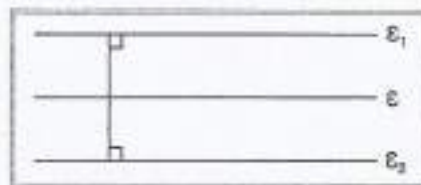
ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
 $e_1 \parallel e_2 \parallel e_3$. Αν $AB = B\Gamma$ τότε $\Delta E = EZ$



Η ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες e_1 και e_2 είναι μία ευθεία e παράλληλη προς τις e_1 και e_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες. Η ευθεία e λέγεται μεσοπαράλληλος των e_1 και e_2 .



ΠΡΟΤΑΣΗ:

Τα μέσα των πλευρών ενός (κυρτού ή μη κυρτού) τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

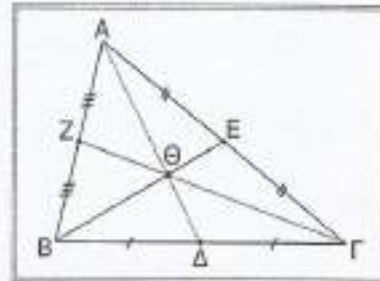
5.7 ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης

διαμέσου. $A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta$, $B\Theta = \frac{2}{3}B\Gamma$, $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$

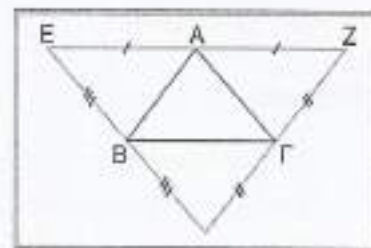
Το σημείο αυτό λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου.



5.8 ΤΟ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΛΗΜΜΑ:

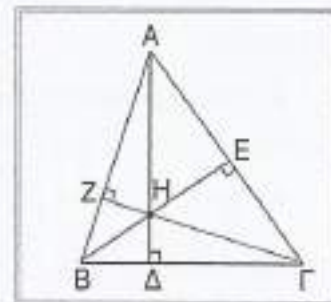
Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σημείο αυτό λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



Παρατήρηση: _____ 

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου. Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το ορθόκεντρο βρίσκεται στην κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Οι κορυφές Α, Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

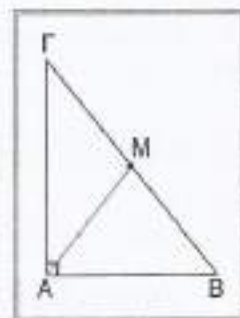
5.9 ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

$$\text{Αν } \hat{A} = 90^\circ, \text{ τότε } AM = \frac{BG}{2}$$

και αντίστροφα



ΘΕΩΡΗΜΑ II

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

$$\text{Αν } AM \text{ διάμεσος και } AM = \frac{BG}{2}, \text{ τότε } \hat{A} = 90^\circ$$

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

$$\text{Αν } AB = \frac{BG}{2}, \text{ τότε } \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

και αντίστροφα

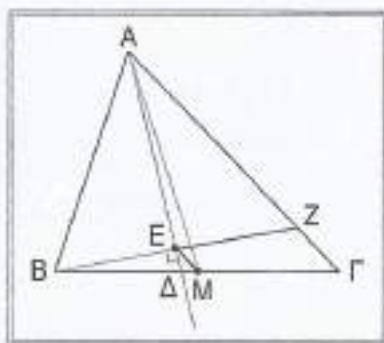
$$\text{αν } \hat{\Gamma} = 30^\circ, \text{ τότε } AB = \frac{BG}{2}$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.88 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AD και παίρνουμε το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$. Από την κορυφή B φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο AD που την τέμνει στο σημείο E . Να δείξετε ότι:

i. $EM \parallel A\Gamma$, ii. $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$, iii. $\angle \hat{E}M = \frac{\hat{A}}{2}$.



Δ	$BM = M\Gamma$ $BE \perp AD$ AD διχοτόμος
Z	$EM \parallel A\Gamma$ $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ $\angle \hat{E}M = \frac{\hat{A}}{2}$

Σκέψη

Η παραλληλία των δύο ευθειών δεν μπορεί ναδειχθεί με κάποιο ζευγάρι ίσων γωνιών, άρα με δεδομένο ότι το M είναι μέσο πλευράς, αρκεί να δείξουμε ότι και το E είναι μέσο πλευράς. Πρέπει να δείξουμε λοιπόν ότι στο τρίγωνο το AE που είναι διχοτόμος είναι και διάμεσος, άρα πρέπει να έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Τα δεδομένα της άσκησης δε μας βοηθούν άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία βοηθητική ευθεία, την προέκτασή της BE . Έτσι θα έχουμε το ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με πλευρά του αρχικού και με υπολογισμό θα έχουμε τις ισότητες που ζητάμε.

Λύση

Προεκτείνουμε τη BE που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z .

Στο τρίγωνο ABZ το ευθύγραμμο τμήμα AE είναι ύψος και διχοτόμος

άρα $\triangle ABZ$ ισοσκελές με $AB = AZ$ (1)

και επίσης AE διάμεσος δηλαδή $BE = EZ$. (2)

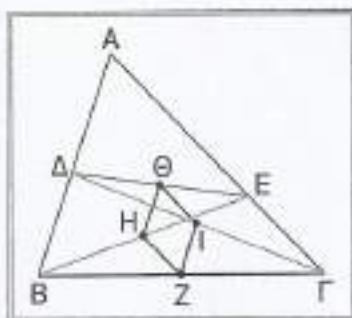
Στο τρίγωνο $BZ\Gamma$ $\left. \begin{array}{l} E \text{ μέσο } BZ \\ M \text{ μέσο } B\Gamma \end{array} \right\}$ άρα $EM = \frac{Z\Gamma}{2}$ και $EM \parallel Z\Gamma$ άρα $EM \parallel A\Gamma$

και $EM = \frac{A\Gamma - AZ}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

Επίσης $EM \parallel A\Gamma$, άρα $\angle \hat{E}M = \angle \hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες.

5.89 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ, ΔΓ, ΔΕ. Παίρνουμε τα σημεία Ζ, Η, Θ, Ι μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΓ, ΒΕ, ΔΕ και ΔΓ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος.



Δ	$ΒΔ = ΓΕ$ $ΒΖ = ΖΓ$ $ΔΙ = ΙΓ$ $ΒΗ = ΗΕ$ $ΔΘ = ΘΕ$
Ζ	ΖΗΘΙ ρόμβος

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος, αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Πρέπει λοιπόν να εργαστούμε στην κατεύθυνση της ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων χωρίς την ύπαρξη ίσων τριγώνων. Θα χρησιμοποιήσουμε τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων που συνδυαζόμενα μας δημιουργούν τρίγωνα και ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα και ίσα μεταξύ τους, με τη βοήθεια της πρότασης για ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου.

Λύση

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{Στο τρίγωνο } \Delta BE \quad \left. \begin{array}{l} \Theta \text{ μέσο } \Delta E \\ H \text{ μέσο } BE \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} \Theta H = \frac{\Delta B}{2} \quad (1) \\ \Theta H \parallel \Delta B \end{array} \right\} \\ \\ \text{Στο τρίγωνο } B \Gamma \Delta \quad \left. \begin{array}{l} Z \text{ μέσο } B \Gamma \\ H \text{ μέσο } BE \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} IZ = \frac{\Delta B}{2} \quad (2) \\ IZ \parallel \Delta B \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} \Theta H = IZ = \frac{\Delta B}{2} \\ \Theta H \parallel IZ \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{Όμοια στο τρίγωνο } \Delta E \Gamma \quad \left. \begin{array}{l} \Theta \text{ μέσο } \Delta E \\ I \text{ μέσο } \Delta \Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} \Theta I = \frac{E \Gamma}{2} \quad (4) \\ \Theta I \parallel \Delta B \end{array} \right\} \\ \\ \text{Στο τρίγωνο } B E \Gamma \quad \left. \begin{array}{l} H \text{ μέσο } BE \\ Z \text{ μέσο } B \Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} HZ = \frac{E \Gamma}{2} \quad (5) \\ HZ \parallel E \Gamma \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} \Theta I = HZ = \frac{E \Gamma}{2} \\ \Theta I \parallel HZ \end{array} \right\} \quad (6)$$

Από σχέσεις (3), (6) το τετράπλευρο έχει

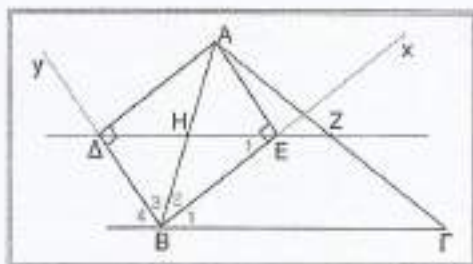
$$\Theta H = IZ = \Theta I = HZ = \frac{B \Delta}{2} = \frac{E \Gamma}{2} \text{ άρα είναι ρόμβος.}$$

5.90 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική και την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ και από την κορυφή Α φέρουμε κάθετες στις δύο διχοτόμους, τις οποίες τέμνουν στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ΑΕΒΔ είναι ορθογώνιο.

ii. η ευθεία ΕΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ.



Δ	$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ $\hat{B}_3 = \hat{B}_4$ $AD \perp By$ $AE \perp Bx$
Z	ΑΕΒΔ ορθογώνιο $AZ = Z\Gamma$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αρκεί να δείξουμε ότι τρεις γωνίες του είναι ίσες αφού έχουμε δύο απέναντι γωνίες ορθές. Αυτό θα γίνει γιατί οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{B}_{εξ}$ είναι παραπληρωματικές και οι διχοτόμοι τέμνονται κάθετα. Για να δείξουμε ότι το σημείο τομής των ΔΕ και ΑΓ είναι το μέσο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι παράλληλα προς την πλευρά ΒΓ που διέρχεται από το μέσο της ΑΒ. Δηλαδή να δείξουμε ότι το σημείο Η είναι μέσο της ΑΒ και $HZ \parallel B\Gamma$, άρα από γνωστό θεώρημα το Ζ θα είναι μέσο της ΑΓ. Η παραλληλία θα προκύψει από τις ισότητες των γωνιών που δημιουργούν οι διχοτόμοι και τα ισοσκελή τρίγωνα, που δημιουργούνται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{B}_{εξ} = 180^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 = \hat{B}_4 \end{array} \right\} \text{άρα } \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^\circ \text{ άρα } \Delta \hat{B}E = 90^\circ. \quad (1)$$

Στο τετράπλευρο ΑΔΒΕ $\hat{\Delta} = \hat{E} = \Delta \hat{B}E = 90^\circ$ άρα ορθογώνιο.

Συνεπώς $AB = DE$ και Η σημείο τομής των διαγωνίων

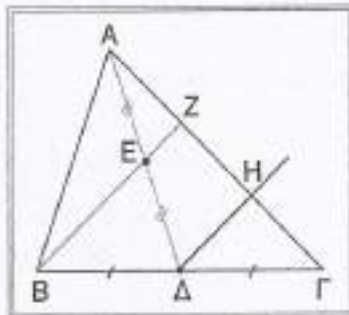
άρα $AH = HB$ δηλαδή Η το μέσο της ΑΒ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Το τρίγωνο } BHE \text{ } HB = HE \text{ άρα ισοσκελές άρα } \hat{E}_1 = \hat{B}_2 \\ (BE \text{ διχοτόμος}) \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array} \right\} \text{άρα } \hat{E}_1 = \hat{B}_1$$

δηλαδή οι εντός εναλλάξ είναι ίσες άρα οι ΗΕ, ΒΓ παράλληλες

$$\left. \begin{array}{l} H \text{ μέσο } AB \\ HZ \parallel B\Gamma \end{array} \right\} \text{άρα } Z \text{ μέσο } A\Gamma.$$

5.91 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΔ και παίρνουμε το μέσο Ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ. Φέρουμε τη ΒΕ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι $Z\Gamma = 2AZ$.



Δ	$B\Delta = \Delta\Gamma$ $A\epsilon = \epsilon\Delta$
Z	$Z\Gamma = 2AZ$

Σκέψη

Η ζητούμενη σχέση όπου ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι διπλάσιο ενός άλλου μόνο από το θεώρημα που αναφέρεται στο βαρύκεντρο μπορεί να δοθεί, χωρίς όμως να υπάρχει τρίγωνο με ΑΓ διάμεσο. Επίσης δεν μπορεί να γίνει σύγκριση τριγώνων. Πρέπει λοιπόν να φέρουμε βοηθητική ευθεία που να εμπλέκεται το ΑΓ ή τμήμα του. Φέρουμε από το μέσο Δ της ΒΓ παράλληλη στη ΒΖ και αρκεί να δείξουμε την ισότητα των τριών ευθύγραμμων τμημάτων που δημιουργούνται. Σε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις που αναφέρονται στα μέσα πλευρών, καθώς και σε παράλληλες προς την τρίτη πλευρά τριγώνου. Έτσι η σύγκριση ανά δύο, τμημάτων, θα δημιουργήσει τη σχέση που ζητάμε.

Λύση

Φέρουμε $\Delta H \parallel BZ$ όπου Η σημείο της πλευράς ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΒΖΓ $\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } B\Gamma \\ \Delta H \parallel BZ \end{array} \right\} \text{ άρα Η μέσο } Z\Gamma$

άρα $ZH = H\Gamma$. (1)

Στο τρίγωνο ΑΔΗ $\left. \begin{array}{l} \epsilon \text{ μέσο } A\Delta \\ \epsilon Z \parallel \Delta H \end{array} \right\} \text{ άρα } Z \text{ μέσο } A\epsilon$

άρα $AZ = Z\epsilon$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) $ZH = AZ = H\Gamma = \frac{A\Gamma}{3}$

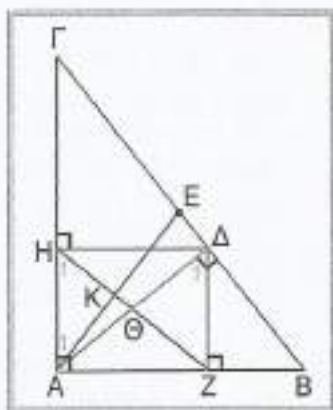
άρα $Z\Gamma = \frac{2A\Gamma}{3} = 2AZ$

5.92 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε το ύψος AD και τη διάμεσο AE . Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετες στις πλευρές AB και $A\Gamma$ και Z, H τα σημεία τομής τους αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

i. $AD = HZ$.

ii. $AE \perp HZ$.



Δ	$\hat{A} = 90^\circ$ $BE = GE$ $ZD \perp AB$ $\Delta H \perp A\Gamma$ $AD \perp B\Gamma$
Z	$AD = HZ$ $AE \perp HZ$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν τρίγωνα που τα έχουν πλευρές και είναι μεταξύ τους ίσα ή να δείξουμε ότι είναι το τετράπλευρο ορθογώνιο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες. Για να δείξουμε ότι οι δύο ευθείες είναι κάθετες αρκεί να δείξουμε ότι $AK \perp HZ$. Αυτό θα γίνει αν δείξουμε πως οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου είναι συμπληρωματικές, άρα η γωνία $\hat{K}$ θα είναι ορθή.

Λύση

Το $AZ\Delta H$ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τρεις ορθές γωνίες,
 Άρα οι διαγώνιοι AD, ZH είναι ίσες.

Στο ορθογώνιο $A\hat{B}\Gamma$ AE διάμεσος άρα $AE = \frac{B\Gamma}{2} = EG$

άρα $A\hat{E}\Gamma$ ισοσκελές με $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1).

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα AZH και $Z\Delta A$: AZ κοινή
 $HA = \Delta Z$

άρα ίσα άρα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2)

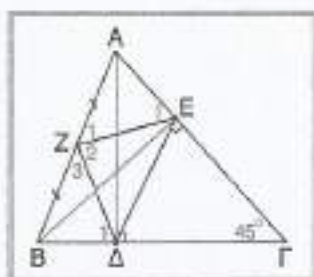
και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (γιατί έχουν κάθετες πλευρές και είναι οξείες). (3)

Από σχέσεις (2), (3) $\hat{H}_1 + \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$.

Άρα $AK \perp ZH$

δηλαδή $AE \perp HZ$.

- 5.93 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AD και BE του τριγώνου και παίρνουμε το σημείο Z μέσο της πλευράς AB . Να δείξετε ότι το τρίγωνο ZDE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



$\hat{\Gamma} = 45^\circ$	
Δ	$AD \perp B\Gamma$ $BE \perp A\Gamma$
Z	$\hat{E}\hat{Z}\hat{D} = 90^\circ$ $ZE = ZD$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το ζητούμενο τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο πλευρές ίσες και οι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές είναι ίσες με 45° ή κάθε μια. Εναλλακτικά μπορούμε να δείξουμε ότι η $\hat{Z}_2 = 90^\circ$, με τη βοήθεια $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3 = 90^\circ$. Η ισότητα των πλευρών θαδειχθεί με τα ορθογώνια τρίγωνα τα οποία δημιούργησαν τα ύψη, και τα ευθύγραμμα τμήματα που ζητάμε είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα. Τα ισοσκελή τρίγωνα που δημιουργούν αυτές οι διάμεσοι μπορούν να μας βοηθήσουν στη μεταφορά των γωνιών $\hat{Z}_1$ και $\hat{Z}_3$, σε σχέση με τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$. Γι' αυτές γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ ΔZ διάμεσος άρα $\Delta Z = \frac{AB}{2}$. (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Delta$ EZ διάμεσος άρα $EZ = \frac{AB}{2}$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\Delta Z = ZE$ άρα $\Delta \hat{Z}E$ ισοσκελές.

Στο ισοσκελές τρίγωνο AZE $\left(AZ = ZE = \frac{AB}{2} \right)$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Z}_1 + \hat{E}_1 + \hat{A} = 180^\circ \\ \hat{E}_1 = \hat{A} \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{Z}_1 = 180^\circ - 2\hat{A}. \quad (3)$$

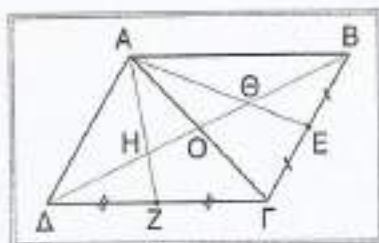
$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο ισοσκελές τρίγωνο } BZ\Delta \text{ (γιατί } BZ = Z\Delta = \frac{AB}{2} \text{)} \\ \hat{\Delta}_1 + \hat{Z}_3 + \hat{A} = 180^\circ \\ \hat{\Delta}_1 = \hat{B} \end{array} \right\}$$

άρα $\hat{Z}_3 = 180^\circ - 2\hat{B}$ (4)

Από τις σχέσεις (3), (4) $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3 = 360^\circ - 2(\hat{A} + \hat{B}) = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.

Άρα $\hat{Z}_2 = 90^\circ$. Άρα το $\Delta \hat{Z}E$ ορθογώνιο και ισοσκελές.

- 5.94 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και παίρνουμε Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΑΖ. Να δείξετε ότι τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.



	ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο
Δ	BE = ΕΓ ΔΖ = ΖΓ
Ζ	ΔΗ = ΗΘ = ΘΒ

Σκέψη

Δεν υπάρχουν θεωρήματα ή προτάσεις που να αναφέρονται σε τριχοτόμηση ευθυγράμμων τμημάτων, θα πρέπει λοιπόν να προχωρήσουμε σε σύγκριση ανά δύο αυτών των τμημάτων. Όμως οι συγκρίσεις των τριγώνων δεν μπορούν να γίνουν γιατί δεν έχουμε αρκετά στοιχεία. Αν φέρουμε λοιπόν την δεύτερη διαγώνιο και έστω Ο το κέντρο του παραλληλογράμμου, τότε δημιουργούμε δύο τρίγωνα στα οποία τα Η, Θ είναι τα σημεία τομής των διαμέσων τους, δηλαδή τα βαρύκεντρα με τη συγκεκριμένη ιδιότητα ως προς το μήκος τους σε σχέση με την αντίστοιχη διάμεσο. Η σύγκριση θα γίνει άμεσα γιατί οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται στο κέντρο του παραλληλόγραμμου.

Λύση

Φέρουμε το ΑΓ και Ο κέντρο του ΑΒΓΔ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο } \triangle \text{ΑΔΓ} \text{ τρίγωνο} \\ \text{ΑΖ διάμεσος} \\ \text{ΔΟ διάμεσος} \end{array} \right\} \text{ άρα Η βαρύκεντρο δηλαδή } \Delta\text{Η} = \frac{2}{3} \Delta\text{Ο} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο } \triangle \text{ΑΒΓ} \text{ τρίγωνο} \\ \text{ΒΟ διάμεσος} \\ \text{ΑΕ διάμεσος} \end{array} \right\} \text{ άρα Θ βαρύκεντρο δηλαδή } \text{ΒΘ} = \frac{2}{3} \text{ΒΟ} \quad (2)$$

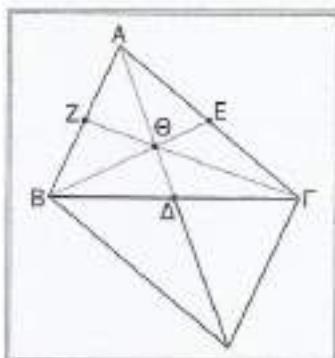
$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο} \\ \text{Ο κέντρο παραλληλογράμμου} \end{array} \right\} \text{ άρα } \Delta\text{Ο} = \text{ΟΒ} = \frac{\Delta\text{Β}}{2} \quad (3)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε ότι } \Delta\text{Η} = \frac{2}{3} \Delta\text{Ο} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta\text{Β}}{2} = \frac{\Delta\text{Β}}{3} = \text{ΒΘ}.$$

$$\text{Επίσης } \text{ΗΘ} = \Delta\text{Β} - \Delta\text{Η} - \text{ΒΘ} = \Delta\text{Β} - \frac{\Delta\text{Β}}{3} - \frac{\Delta\text{Β}}{3} = \frac{\Delta\text{Β}}{3} \text{ άρα } \text{ΗΘ} = \Delta\text{Η} = \text{ΒΘ}.$$

5.95 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$, BE , ΓZ οι αντίστοιχες διόμεσοί του. Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{3}{4}(AB + A\Gamma + B\Gamma) < A\Delta + BE + \Gamma Z < AB + A\Gamma + B\Gamma.$$



Δ	$B\Delta = \Delta\Gamma$ $AZ = ZB$ $AE = E\Gamma$
Z	$\frac{3}{4}(AB + A\Gamma + B\Gamma) < A\Delta + BE + \Gamma Z < AB + A\Gamma + B\Gamma$

Σκέψη

Η ανισοτική σχέση που πρέπει να αποδείξουμε, εφόσον αναφέρεται σε πλευρές τριγώνου, θα μας οδηγήσει σε θεωρήματα ανισοτικών σχέσεων που αναφέρονται σε πλευρές και την μεταξύ τους σύγκριση από το 3^ο κεφάλαιο. Η εμφάνιση των διαμέσων του τριγώνου στην άσκηση φέρνει το βαρύκεντρο και τη σχέση του τμήματος με τις αντίστοιχες πλευρές. Άρα αρκεί να δείξουμε ένα κομμάτι της ζητούμενης σχέσης και ομοίως θα προκύψουν οι σχέσεις για τα υπόλοιπα μέλη της ανισότητας, προσθέτοντας κατά μέλη ανισότητες.

Λύση

Έστω Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Στο τρίγωνο $AB\Theta$ από τριγωνική ανισότητα $AB < A\Theta + \Theta B$

$$\text{Άρα} \quad AB < \frac{2}{3}A\Delta + \frac{2}{3}BE$$

$$\text{Συνεπώς} \quad \frac{3}{2}AB < A\Delta + BE. \quad (1)$$

Όμοια από τρίγωνα $B\Theta\Gamma$ και $\Gamma\Theta A$ έχουμε

$$\frac{3}{2}B\Gamma < BE + \Gamma Z \quad (2)$$

$$\text{και} \quad \frac{3}{2}A\Gamma < \Gamma Z + A\Delta. \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε

$$\frac{3}{2}(AB + B\Gamma + A\Gamma) < 2A\Delta + 2BE + 2\Gamma Z$$

$$\text{άρα} \quad \frac{3}{4}(AB + B\Gamma + A\Gamma) < A\Delta + BE + \Gamma Z. \quad (4)$$

Προεκτείνουμε την ΑΔ διάμεσο κατά ίσο τμήμα ΔΗ = ΑΔ.

Τότε στο τρίγωνο ΑΒΗ από τριγωνική ανισότητα

$$\left. \begin{array}{l} AH < AB + BH \\ AH = 2AD \\ BH = AG \end{array} \right\} \text{ άρα } AD < \frac{AB + AG}{2} \quad (5)$$

$$\text{Ομοίως προεκτείνουμε τις διαμέσους και έχουμε } BE < \frac{AB + BG}{2} \quad (6)$$

$$\text{και } \Gamma Z < \frac{AG + BG}{2} \quad (7)$$

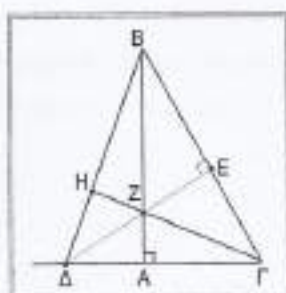
$$\text{από (5), (6), (7) } AD + BE + \Gamma Z < \frac{2AB + 2AG + 2BG}{2} = AB + AG + BG \quad (8)$$

$$\text{άρα από (4), (8) σχέσεις } \frac{3}{4}(AB + AG + BG) < AD + BE + \Gamma Z < AB + AG + BG.$$

Σχόλιο

Η προέκταση της διαμέσου κατά ίσο τμήμα ως βοηθητική ευθεία έχει χρησιμοποιηθεί ξανά, γιατί δημιουργεί δύο ίσα τρίγωνα και ένα παραλληλόγραμμα όπως έχουμε αποδείξει.

- 5.96 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε κάθετη στην πλευρά ΒΓ, που την τέμνει στο σημείο Ε και την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι $\Gamma Z \perp BD$.



Δ	$\hat{A} = 90^\circ$ $DE \perp BC$
Ζ	$\Gamma Z \perp BD$

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι δύο ευθείες (ή τμήματα) τέμνονται κάθετα αρχικά θα επιδιώξουμε να συγκρίνουμε τρίγωνα. Όμως δεν έχουμε κανένα στοιχείο ισότητας, άρα θα πρέπει εναλλακτικά να σκεφτούμε θεωρήματα που αναφέρονται σε κάθετες ευθείες. Στο θεώρημα που αναφέρεται στο ορθόκεντρο του τριγώνου έχουμε τα ύψη που μας οδηγούν στο σημείο τομής τους, έτσι τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα μπορούν να θεωρηθούν ύψη στο τρίγωνο που έχει δημιουργηθεί με την προέκταση της πλευράς. Έτσι και το τρίτο ευθύγραμμο τμήμα θα είναι ύψος άρα κάθετο στην πλευρά του τριγώνου.

Λύση

Προεκτείνουμε το ΓZ και έστω H το σημείο τομής με το ευθύγραμμο τμήμα BA .

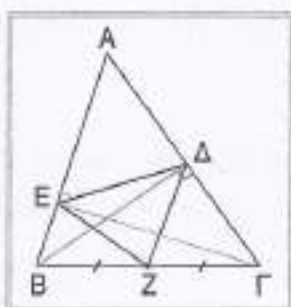
Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ $\left. \begin{array}{l} BA \perp \Delta\Gamma \text{ άρα } BA \text{ ύψος} \\ \Delta E \perp B\Gamma \text{ άρα } \Delta E \text{ ύψος} \end{array} \right\}$

άρα το Z ορθόκεντρο του τριγώνου ως σημείο τομής των δύο υψών.

Άρα ΓH ύψος άρα $\Gamma Z \perp B\Delta$.

5.97 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE του τριγώνου. Έστω Z το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.



Δ	$B\Delta \perp A\Gamma$ $\Gamma E \perp AB$ $BZ = Z\Gamma$
Z	ΔEZ είναι ισοσκελές

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο πλευρές ίσες. Η ισότητα όμως δε θα προέλθει από σύγκριση τριγώνων, αφού δεν έχουμε αρκετά στοιχεία για να προχωρήσουμε. Έχουμε όμως ορθογώνια τρίγωνα που έχουν σχηματιστεί με τη βοήθεια των υψών. Σε αυτά το σημείο Z είναι μέσο της υποτείνουσας, άρα μπορεί να συγκριθεί η αντίστοιχη διάμεσος με την υποτείνουσα. Έτσι θα έχουμε ισότητα δύο ευθύγραμμων τμημάτων άρα και ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

Στο τρίγωνο $BE\Gamma$ έχουμε $E\Gamma \perp BE$

άρα $\hat{E} = 90^\circ$

και EZ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$

$$\text{άρα } EZ = \frac{B\Gamma}{2}. \quad (1)$$

Όμοια στο $\Delta B\Gamma$ τρίγωνο $B\Delta \perp A\Gamma$ άρα $\hat{\Delta} = 90^\circ$

και ΔZ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$ άρα $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}. \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $EZ = \Delta Z$ άρα το ΔEZ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

5.105 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

α. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Αν η πλευρά $A\Gamma$ είναι ίση με τη διάμεσο AM , τότε $\hat{B} = 30^\circ$.

☐ ☐

β. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Θ το βαρύκεντρο του.

Τότε θα ισχύει ότι $A\Theta = 2\Theta M$ με AM διάμεσο.

☐ ☐

γ. Σε ένα τετράπλευρο αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών, δημιουργούμε παραλληλόγραμμα.

☐ ☐

δ. Μία ευθεία που διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλη προς μία άλλη πλευρά διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς.

☐ ☐

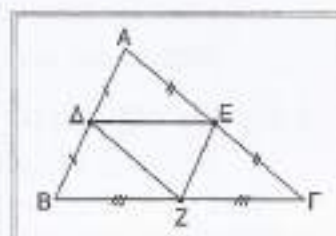
ε. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η πλευρά $A\Gamma$ είναι ίση με το μισό της πλευράς AB , τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

☐ ☐

5.106 Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

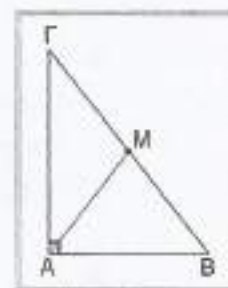
α. Στο διπλανό τρίγωνο έχουμε $AB = 10$, $B\Gamma = 8$, $A\Gamma = 6$, τότε το τρίγωνο ΔEZ έχει περίμετρο

- A. 10 B. 12 Γ. 14
Δ. 16 E. 18



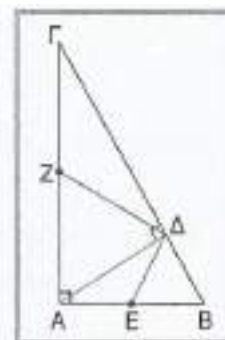
β. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 40^\circ$ και AM διάμεσος. Η γωνία $\hat{AMB}$ ισούται με:

- A. 80° B. 90° Γ. 100°
Δ. 120° E. 140°



γ. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A} = 90^\circ$ και AD ύψος. Αν E, Z μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε η περίμετρος $AZDE$ είναι:

- A. $AB + B\Gamma$ B. $AB + A\Gamma$ Γ. $A\Gamma + B\Gamma$
 Δ. $2AD$ Ε. $AB + A\Gamma + B\Gamma$



δ. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν AD ύψος, τότε το AD είναι ίσο με:

- A. AB B. $A\Gamma$ Γ. $\frac{A\Gamma}{2}$ Δ. $\frac{B\Gamma}{2}$ Ε. $\frac{AB}{2}$

ε. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Αν $AB = 5$, τότε η $B\Gamma$ είναι ίση με:

- A. 5 B. 8 Γ. 10 Δ. 15 Ε. 20

5.107 Υπάρχει σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ορθογωνίου τριγώνου και αν ναι ποιο είναι αυτό;

5.108 Να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου που δημιουργούν τα μέσα των πλευρών τριγώνου με μία κορυφή του.

5.109 Να δικαιολογήσετε γιατί το διπλάσιο της διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι μεγαλύτερο από κάθε κάθετη πλευρά και μικρότερο από το άθροισμα των κάθετων πλευρών.

5.110 Να εξηγήσετε γιατί τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα μέσα απέναντι πλευρών σε ένα τυχαίο τετράπλευρο διχοτομούνται.

5.111 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α. Το ευθύγραμμο τμήμα που τα μέσα των τριγώνου είναι προς την τρίτη πλευρά και ίσο της.
- β. Οι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο του οποίου η απόσταση από κάθε είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης
- γ. Η διάμεσος τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της γωνίας είναι ίση με το μισό της και αντίστροφα.
- δ. Αν η ενός τριγώνου ισούται με το της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι με την πλευρά αυτή.

- ε. Αν σε τρίγωνο μία γωνία του ισούται με, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το της και αντίστροφα.

ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 5.112 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ. Παίρνουμε Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.
- 5.113 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Παίρνουμε Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμα.
- 5.114 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Παίρνουμε Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.
- 5.115 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμα.
- 5.116 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ χωρίζουν το αρχικό τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα.
- 5.117 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΖΔ και τη διάμεσο ΕΑ.
Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα διχοτομούνται.
- 5.118 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα. Παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο.
- 5.119 Δίνεται παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 60^\circ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ η οποία τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ε. Παίρνουμε το σημείο Ζ μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΓ. Να δείξετε ότι:
- η ΔΖ διχοτόμος της γωνίας $\hat{D}$.
 - $\Delta Z = \frac{AB}{2}$.

- 5.120 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Παίρνουμε σημεία Δ , E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = \frac{AB}{4}$ και $AE = \frac{A\Gamma}{4}$. Να δείξετε ότι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{4}$.
- 5.121 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ και τα μέσα E , Z των ευθύγραμμων τμημάτων BD και $D\Gamma$ αντίστοιχα. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετες στις πλευρές AB , $A\Gamma$ που τις τέμνουν στα σημεία H , Θ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
- $EH + Z\Theta = \frac{B\Gamma}{2}$.
 - Αν I μέσο του $A\Delta$ τότε $HI + I\Theta = A\Delta$.
- 5.122 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Παίρνουμε το μέσο E της πλευράς $\Gamma\Delta$ και φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AE και BE . Παίρνουμε τα σημεία Z και H μέσα των AE και BE αντίστοιχα. Φέρουμε την ZH και προεκτείνουμε προς τις δύο πλευρές. Η ZH τέμνει τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ στα σημεία Θ και I αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Theta Z = HI = \frac{AB}{4}$.
- 5.123 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Φέρουμε τις διαγώνιους του $A\Gamma$ και $B\Delta$ που σχηματίζουν γωνία 60° και τέμνονται στο κέντρο O του τετραπλεύρου. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη προς την $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο E . Να δείξετε ότι:
- E το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος OA .
 - $AE = \frac{A\Gamma}{4}$.

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

5.10 ΤΡΑΠΕΖΙΟ

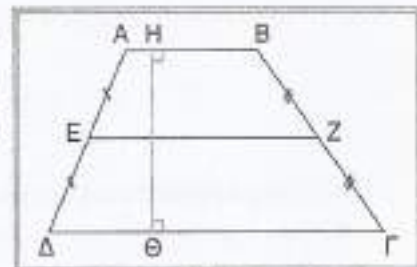
ΟΡΙΣΜΟΣ:

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Οι παράλληλες πλευρές λέγονται βάσεις του τραπεζίου.

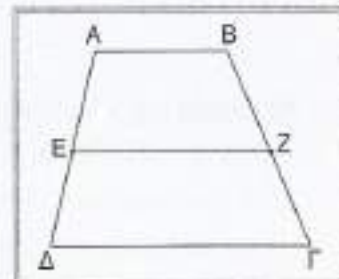
Το κάθετο τμήμα στις βάσεις λέγεται ύψος του τραπεζίου και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών λέγεται διάμεσος του τραπεζίου.



ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις και ίση με το ημίαθροισμα τους.

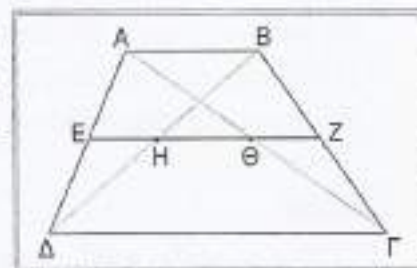
$$\text{Δηλαδή } EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}, EZ \parallel AB \parallel \Delta\Gamma$$



ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ενός τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του και το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων.

$$\text{Δηλαδή } H\Theta = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}, H\Theta \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$$



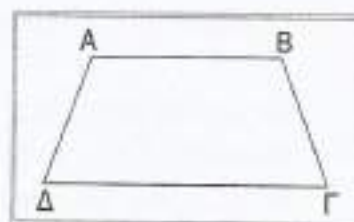
Παρατηρήσεις:

- i. Συνήθως οι δύο βάσεις του τραπεζίου λέγονται μικρή και μεγάλη βάση ανάλογα με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος.
- ii. Ύψος του τραπεζίου λέγεται και η απόσταση των βάσεων (παράλληλων πλευρών) του. Σε ασκήσεις συνήθως φέρουμε ύψη από τις κορυφές του τραπεζίου.

5.11 ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

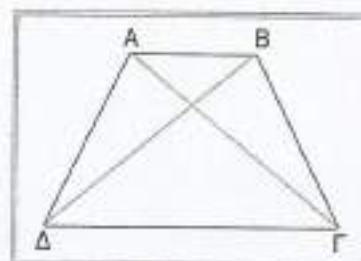
Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.



Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε

- i. οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες,
- ii. οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, όταν

- i. οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες ή
- ii. οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο, αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές, σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα και η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος κάθε βάσης.

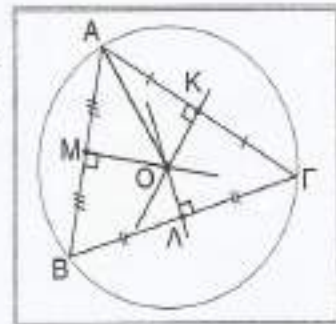
Σημείωση

Ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ λέγεται **ορθογώνιο τραπέζιο**.

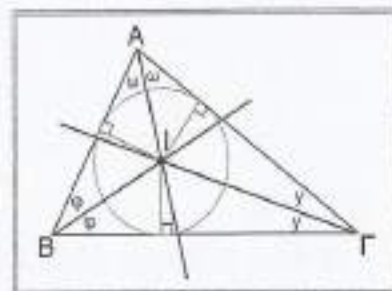
5.12 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ διέρχονται από το ίδιο σημείο:

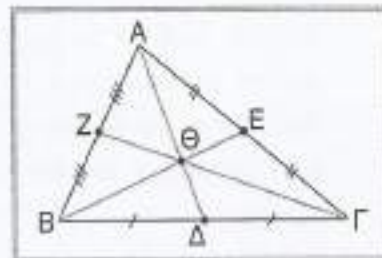
- i. Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών. Το κοινό σημείο O λέγεται **περίκεντρο** του $AB\Gamma$, και ο κύκλος (O, OA) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.



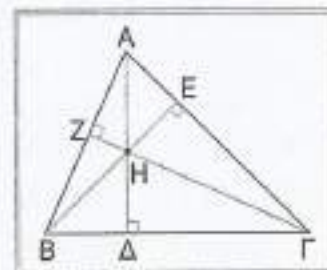
- ii. Οι διχοτόμοι των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο I λέγεται **έγκεντρο** του $AB\Gamma$ και ο κύκλος με κέντρο το I και ακτίνα κοινή απόσταση του I από τις τρεις πλευρές του λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.



- iii. Οι τρεις διάμεσοι. Το κοινό σημείο Θ λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου $AB\Gamma$.

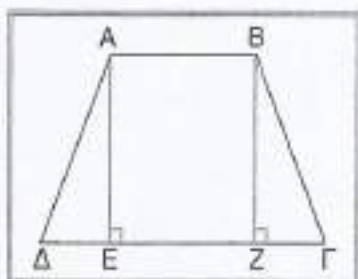


- iv. Τα τρία ύψη του. Το κοινό σημείο H λέγεται **ορθόκεντρο** του $AB\Gamma$.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.136 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta > AB$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ . Να δείξετε ότι $\Delta E = \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.



Δ	$AB \parallel \Gamma\Delta$ $A\Delta = B\Gamma$ $AE \perp \Delta\Gamma$ $BZ \perp \Delta\Gamma$
Z	$\Delta E = \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

Σκέψη

Για να δείξουμε την ισότητα των δύο ευθύγραμμων τμημάτων, αρκεί να δείξουμε την ισότητα των δύο ορθογωνίων τριγώνων που έχουν δημιουργήσει τα δύο ύψη από τις κορυφές A και B . Για να υπολογίσουμε την δεύτερη ισότητα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το τετράπλευρο που δημιουργήθηκε για να μεταφέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε σχέση με τη βάση $\Gamma\Delta$. Άρα αρκεί να γράψουμε τη βάση με τη βοήθεια των επιμέρους ευθύγραμμων τμημάτων και να υπολογίσουμε κάνοντας τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις.

Λύση

Συγκρίνω $\triangle A\hat{\Delta}E$ και $\triangle B\hat{Z}\Gamma$ ορθογώνια: $\left. \begin{array}{l} \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} \\ A\Delta = B\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα ίσα}$

$\left. \begin{array}{l} \text{άρα } \Delta E = Z\Gamma. \quad (1) \\ AE \perp \Delta\Gamma \\ BZ \perp \Delta\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} AE \parallel BZ \\ AB \parallel \Delta\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } ABZE \text{ παραλληλόγραμμα}$

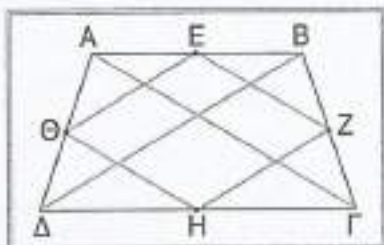
άρα $AB = EZ \quad (2)$

$$\Delta\Gamma = AE + EZ + Z\Gamma$$

$$\text{άρα } \Delta\Gamma \stackrel{(1)}{=} 2\Delta E + AB \quad (2)$$

$$\text{άρα } \Delta\Gamma - AB = 2\Delta E \text{ δηλαδή } \Delta E = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = Z\Gamma.$$

- 5.137 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Παίρνουμε τα μέσα E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.



Δ	$AB \parallel \Gamma\Delta$ $A\Delta = B\Gamma$ $AE = EB$ $BZ = Z\Gamma$ $\Delta H = H\Gamma$ $A\Theta = \Theta\Delta$
Z	$EZH\Theta$ ρόμβος

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος, αρκεί να δείξουμε ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες (ή κάποιο άλλο κριτήριο). Τα μέσα των πλευρών μας οδηγούν σε τρίγωνα που σχηματίζονται με τη βοήθεια των διαγωνίων που είναι ίσες. Δηλαδή, το ισοσκελές τραπέζιο με τις ίσες διαγωνίους θα μας υπολογίσει όλες τις πλευρές του τετραπλεύρου με τη χρήση των εφαρμογών του παραλληλογράμμου και τις προτάσεις που έχουμε εκεί.

Λύση

Φέρουμε διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$ με $A\Gamma = B\Delta$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο τρίγωνο } AB\Delta \\ \Theta \text{ μέσο } A\Delta \\ E \text{ μέσο } AB \end{array} \right\} \text{ άρα } \Theta E = \frac{B\Delta}{2} \quad \Theta E \parallel B\Delta$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Στο τρίγωνο } B\Delta\Gamma \\ Z \text{ μέσο } B\Gamma \\ H \text{ μέσο } \Delta\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } ZH = \frac{B\Delta}{2} \quad ZH \parallel B\Delta$$

$$\left. \begin{array}{l} \Theta E \parallel ZH \text{ και } \Theta E = ZH = \frac{B\Delta}{2} \\ \text{Όμοια στα τρίγωνα } A\Gamma\Delta \text{ και } AB\Gamma \text{ έχουμε:} \\ EZ \parallel \Theta H \text{ και } EZ = \Theta H = \frac{A\Gamma}{2} \end{array} \right\} \text{ άρα } EZH\Theta \text{ ρόμβος.}$$

$$\Theta E \parallel ZH \text{ και } \Theta E = ZH = \frac{B\Delta}{2} \quad (2)$$

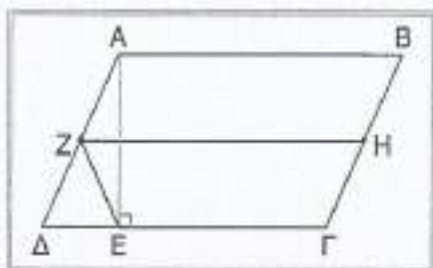
Όμοια στα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουμε:

$$EZ \parallel \Theta H \text{ και } EZ = \Theta H = \frac{A\Gamma}{2} \quad (3)$$

Από σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε $\Theta E = ZH = EZ = \Theta H$

Άρα $EZH\Theta$ ρόμβος.

5.138 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το ύψος του AE . Παίρνουμε τα σημεία Z και H μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το $ZE\Gamma H$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Δ	$AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο $AZ = Z\Delta$ $BH = H\Gamma$ $AE \perp \Delta\Gamma$
Z	$ZE\Gamma H$ ισοσκελές τραπέζιο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο πλευρές παράλληλες και τις μη παράλληλες πλευρές ίσες. Θα δείξουμε λοιπόν ότι τα μέσα Z , H των πλευρών του παραλληλογράμμου δημιουργούν νέο παραλληλόγραμμο με κάποιο από τα κριτήρια (π.χ. οι δύο πλευρές ίσες και παράλληλες). Στο θέμα της ισότητας θα χρειαστούμε το ορθογώνιο τρίγωνο που δημιουργεί το ύψος του τραπεζίου, στο οποίο η μία πλευρά του ζητούμενου τραπεζίου είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια των πλευρών του παραλληλογράμμου όπως και η άλλη μη παράλληλη πλευρά του ζητούμενου τραπεζίου.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} Z \text{ μέσο } A\Delta \text{ άρα } AZ = Z\Delta = \frac{A\Delta}{2} \\ H \text{ μέσο } B\Gamma \text{ άρα } BH = H\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \\ B\Gamma = A\Delta \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} AZ = BH \\ AZ \parallel BH \end{array} \right\} \text{ άρα } AZHB \text{ παραλληλόγραμμο}$$

Άρα $ZH \parallel E\Gamma$.

(1)

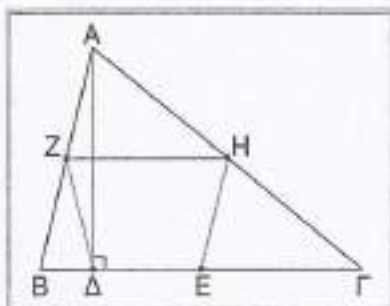
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ EZ διάμεσος

$$\text{άρα } EZ = \frac{A\Delta}{2} = Z\Delta. \quad (2)$$

Στο τετράπλευρο $ZE\Gamma H$ έχουμε από σχέση (1) $ZH \parallel E\Gamma$ τραπέζιο.

Όμως $Z\Delta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = H\Gamma$ και από σχέση (2) $EZ = H\Gamma$ οι μη παράλληλες είναι ίσες δηλαδή το $ZH\Gamma E$ ισοσκελές τραπέζιο.

5.139 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε το ύψος του AD . Παίρνουμε τα σημεία E, Z, H μέσα των $B\Gamma, AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΔEHZ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Δ	$AD \perp B\Gamma$ $BE = E\Gamma$ $BZ = AZ$ $AH = H\Gamma$
Z	ΔEHZ ισοσκελές τραπέζιο

Σκέψη

Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο πλευρές παράλληλες και οι μη παράλληλες είναι ίσες. Για την παραλληλία έχουμε τα μέσα Z και H των δύο πλευρών του τριγώνου άρα από εφαρμογή ιδιοτήτων παραλληλογράμμου έχουμε παραλληλία. Για την ισότητα των δύο μη παράλληλων θα χρησιμοποιηθούν επίσης θεωρήματα γιατί δεν υπάρχουν ίσα τρίγωνα για σύγκριση. Άρα η ΔZ εμπλέκεται με το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ του οποίου είναι διάμεσος, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα HE δημιουργείται από τα μέσα H, E των πλευρών του τριγώνου άρα έχει σχέση με την AB . Έτσι με τη μεταφορά γίνεται και η σύγκριση των δύο ευθύγραμμων τμημάτων για να πάρουμε το ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

$$\text{Στο } \triangle AB\Gamma \left\{ \begin{array}{l} Z \text{ μέσο } AB \\ H \text{ μέσο } A\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } ZH \parallel B\Gamma \quad (1)$$

Στο $AB\Delta$ ορθογώνιο τρίγωνο Z μέσο AB και ΔZ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

$$\text{Άρα } \Delta Z = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

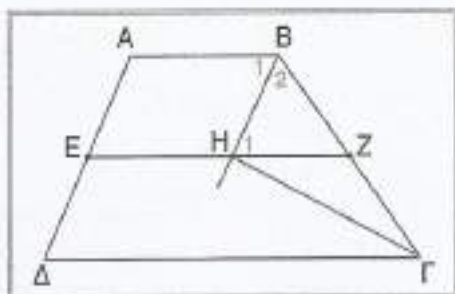
$$\text{Στο } \triangle AB\Gamma \left\{ \begin{array}{l} H \text{ μέσο } A\Gamma \\ E \text{ μέσο } B\Gamma \end{array} \right\} \text{ άρα } \left. \begin{array}{l} HE \parallel AB \\ HE = \frac{AB}{2} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Από σχέση (1) έχουμε ΔEHZ τραπέζιο.

Από σχέσεις (2), (3) έχουμε $\Delta Z = HE$

Άρα ισοσκελές τραπέζιο.

5.140 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ και τη διάμεσο EZ του τραπεζίου που τέμνονται στο σημείο H .
Να δείξετε ότι $BH \perp H\Gamma$



Δ	$AB \parallel \Gamma\Delta$
	$AE = E\Delta$
	$BZ = Z\Gamma$
	BH διχοτόμος
Z	$BH \perp H\Gamma$

Σκέψη

Δεν γνωρίζουμε κάποιο στοιχείο για τη σχέση του τμήματος ΓH με τη γωνία $\hat{\Gamma}$ (π.χ. διχοτόμος) άρα θα πρέπει να περιοριστούμε στο τρίγωνο BHZ αρχικά και στις σχέσεις με τις γωνίες που μπορούμε να εμφανίσουμε. Η διάμεσος EZ του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις, άρα έχουμε ζευγάρια ίσων γωνιών τα οποία με τη βοήθεια της BH διχοτόμου μπορούν να μεταφερθούν και να μας εμφανίσουν ισοσκελή τρίγωνα (από την ισότητα δύο γωνιών). Άρα η διάμεσος που είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί θα μας δώσει τη ζητούμενη καθετότητα αφού θα δημιουργήσει ορθογώνιο τρίγωνο.

Λύση

EZ διάμεσος $AB\Gamma\Delta$ τραπεζίου. Άρα $EZ \parallel AB$

Άρα $\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (ως εντός εναλλάξ γωνίες) (1)

BH διχοτόμος άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (2)

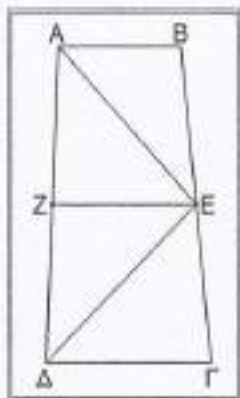
Από σχέσεις (1), (2) το BZH ισοσκελές τρίγωνο με $BZ = ZH$. (3)

Στο τρίγωνο BHZ $\left. \begin{array}{l} HZ \text{ διάμεσος} \\ HZ = BZ = \frac{B\Gamma}{2} \end{array} \right\} \text{ άρα}$

Το τρίγωνο $BH\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{BHG} = 90^\circ$.

Άρα $BH \perp H\Gamma$.

5.141 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$. Παίρνουμε το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ. Να δείξετε ότι $AE \perp ED$.



Δ	$AB \parallel \Gamma\Delta$ $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$ $BE = E\Gamma$
Z	$AE \perp ED$

Σκέψη

Το τετράπλευρο μας είναι τραπέζιο και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΕΔ δε δημιουργούν ίσα τρίγωνα για να μπορούμε να συγκρίνουμε και να μεταφέρουμε γωνίες. Η εμφάνιση της μίας μη παράλληλης πλευράς μας οδηγεί στο να πάρουμε το μέσο της άλλης μη παράλληλης πλευράς. Έτσι η διάμεσος του τραπεζίου με δεδομένη τη σχέση της πλευράς ΑΔ θα είναι ίση με το μισό της, άρα έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο με τη ζητούμενη καθετότητα λόγω της ορθής $\hat{A}\hat{E}\hat{D}$ γωνίας.

Λύση

Έστω Ζ μέσο ΑΔ.

Τότε ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

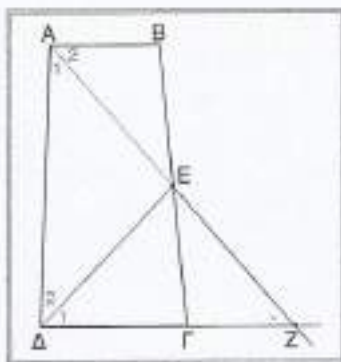
$$\text{Άρα } EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΕΔ $\left. \begin{array}{l} EZ \text{ διάμεσος} \\ EZ = \frac{A\Delta}{2} \end{array} \right\} \text{ άρα το τρίγωνο ΑΕΔ}$

είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την ΑΔ.

Άρα $\hat{A}\hat{E}\hat{D} = 90^\circ$ δηλαδή $AE \perp ED$.

- 5.142 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E .
Να δείξετε ότι η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{D}$.



Δ	$AB \parallel \Gamma\Delta$ $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
Z	$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

Σκέψη

Δεν έχουμε στοιχεία για το σημείο E σε σχέση με τις πλευρές του τραπέζιου άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προτάσεις με τη διάμεσο τραπέζιου. Επίσης τα τρίγωνα που έχουν δημιουργηθεί δεν μπορούν να συγκριθούν για την ισότητα γωνιών. Πρέπει λοιπόν να φέρουμε την προέκταση της AE και να δουλέψουμε με τα επιμέρους τρίγωνα στα οποία έχουμε λίγα στοιχεία. Η σχέση της μη παράλληλης όμως θα μας οδηγήσει στον υπολογισμό της προέκτασης αυτής. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της διαμέσου προς τη βάση σε ισοσκελές τρίγωνο που είναι ύψος και διχοτόμος.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel \Delta Z \text{ άρα } \hat{A}_2 = \hat{Z} \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (υπόθεση)} \end{array} \right\} \text{ άρα } \hat{A}_1 = \hat{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{άρα } \triangle ADZ \text{ ισοσκελές με } A\Delta = \Delta Z \text{ (1)} \\ AB + \Gamma\Delta = A\Delta \text{ (υπόθεση)} \end{array} \right\} \text{ άρα } AB + \Gamma\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z.$$

$$\text{Άρα } AB = \Gamma Z$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Συγκρίνω τα τρίγωνα } ABE, EZ\Gamma: \hat{E}\Gamma Z = \hat{B} \\ \hat{A}_2 = \hat{Z} \\ AB = \Gamma Z \end{array} \right\} \text{ άρα από κριτήριο } \Gamma - \Pi - \Gamma$$

$$\text{είναι ίσα με } AE = EZ. \quad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ADZ DE είναι διάμεσος άρα και ύψος και διχοτόμος δηλαδή $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$.

μεθοδολογία

1. Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.
 - α. έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες
 - β. έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
 - γ. έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο ίσες
 - δ. έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες
 - ε. οι διαγώνιοι διχοτομούνται
2. Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.
 - α. είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία γωνία ορθή
 - β. έχει όλες τις γωνίες του ορθές
 - γ. είναι παραλληλόγραμμο και έχει ίσες διαγωνίους
3. Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.
 - α. έχει όλες τις πλευρές του ίσες
 - β. είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες
 - γ. είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι κάθετες
 - δ. είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του
4. Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αρκεί να δείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.
5. Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τραπέζιο αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο (απέναντι) πλευρές παράλληλες. Σύμφωνα με τον ορισμό, πρέπει να δείξουμε ότι και οι άλλες δύο πλευρές δεν είναι παράλληλες πράγμα που είναι προφανές στις περισσότερες περιπτώσεις.
6. Για να δείξουμε ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.
 - α. οι διαγώνιοί του είναι ίσες
 - β. έχει τις μη παράλληλες πλευρές ίσες
 - γ. οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες
 - δ. οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές
 - ε. Η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο βάσεων του τραπεζίου είναι κάθετη σε αυτές.

Σχόλιο

Για να δείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες, αρκεί να δείξουμε ότι είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, πρόταση που μπορεί να συμπληρώσει τη μεθοδολογία των παραλλήλων του 4^{ου} κεφαλαίου.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



5.149 Χαρακτηρίστε Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις: Σ Λ

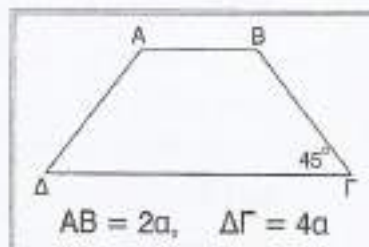
- α. Η διάμεσος ενός τραπέζιου διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. ☐ ☐
- β. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες. ☐ ☐
- γ. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοί του είναι ίσες. ☐ ☐
- δ. Η διάμεσος ενός τραπέζιου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του. ☐ ☐
- ε. Σε ένα τραπέζιο οι διαγώνιοί του είναι κάθετες. ☐ ☐

5.150 Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

α. Το διπλανό τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Το ύψος του ισούται με:

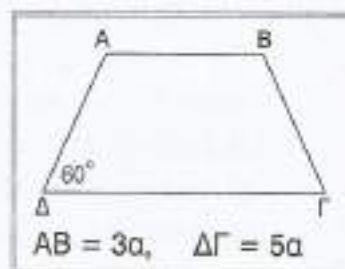
- Α. $\frac{a}{2}$ Β. a Γ. $2a$
Δ. $3a$ Ε. $4a$



β. Το διπλανό τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Η περίμετρος του ισούται με:

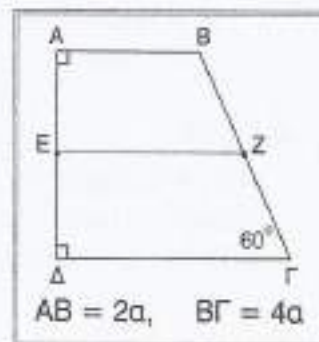
- Α. $10a$ Β. $11a$ Γ. $12a$
Δ. $13a$ Ε. $14a$



γ. Το διπλανό τραπέζιο είναι ορθογώνιο τραπέζιο

με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Η διάμεσος EZ του τραπέζιου ισούται με:

- Α. $2a$ Β. $3a$ Γ. $4a$
Δ. $5a$ Ε. $6a$



δ. Ίσες διαγωνίους έχει το:

- | | |
|------------------------------|-------------|
| Α. παραλληλόγραμμα | Β. ρόμβος |
| Γ. ισοσκελές τραπέζιο | Δ. τραπέζιο |
| Ε. τίποτα από τα προηγούμενα | |

ε. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων ενός τριγώνου λέγεται:

- | | | |
|---------------|-------------------------------|---------------|
| Α. ορθόκεντρο | Β. έγκεντρο | Γ. περίκεντρο |
| Δ. παράκεντρο | Ε. τίποτα από τα προηγούμενα. | |

5.151 Να εξετάσετε αν ένα τραπέζιο με τρεις πλευρές ίσες είναι ισοσκελές.

5.152 Να εξετάσετε αν ένα τραπέζιο μπορεί να έχει τρεις γωνίες ίσες.

5.153 Υπάρχει κοινή ιδιότητα μεταξύ ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ισοσκελούς τραπέζιου;

5.154 Να εξετάσετε αν ένα τραπέζιο μπορεί να έχει ορθές γωνίες. Αν ναι, πόσες.

5.155 Να εξηγήσετε γιατί αν από το μέσο της μη παράλληλης πλευράς φέρουμε παράλληλη προς τη βάση ισοσκελούς τραπέζιου, θα περάσει από το μέσο της άλλης μη παράλληλης πλευράς.

5.156 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

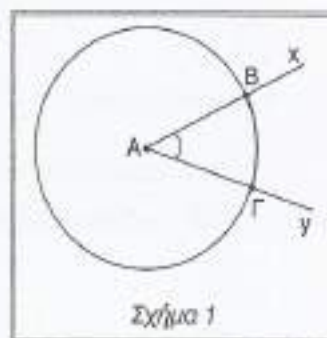
- α. Τραπέζιο το τετράπλευρο που έχει πλευρές
- β. Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπέζιου λέγονται τραπέζιου.
- γ. Ύψος ενός τραπέζιου λέγεται τμήμα κάθετο στις και τα άκρα του στους των βάσεων.
- δ. Η διάμεσος ενός τραπέζιου είναι προς τις βάσεις του και με το τους.
- ε. Σε κάθε τραπέζιο οι γωνίες στις είναι ίσες.
- στ. Αν οι είναι τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

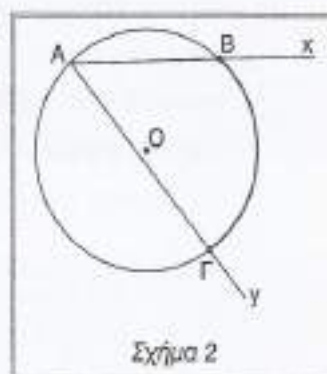
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

6.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Μία γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ λέγεται επίκεντρη, όταν η κορυφή της είναι κέντρο ενός κύκλου (σχ. 1).



2. Μία κυρτή γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ λέγεται εγγεγραμμένη σε ένα κύκλο (O, R) , όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου (σχ. 2).

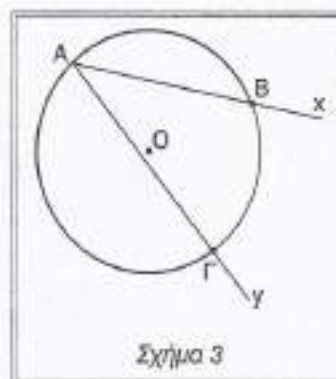


Σχόλιο

Η επίκεντρη γωνία μπορεί να μην είναι κυρτή. Εμείς θα μιλάμε για κυρτές επίκεντρες γωνίες. Όταν θα ασχολούμαστε με μη κυρτές θα το αναφέρουμε.

3. α. Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας $\widehat{x\hat{A}y}$ (σχ.1) τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ που περιέχεται στην γωνία ονομάζεται αντίστοιχο τόξο της. Διαφορετικά λέμε τότε ότι η επίκεντρη γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

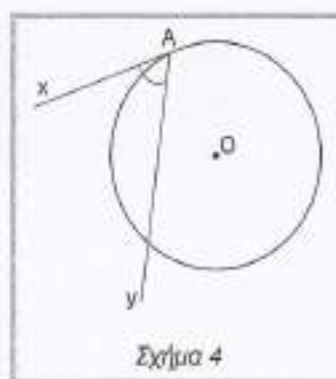
β. Οι πλευρές της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{x\hat{A}y}$ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ που περιέχεται στη γωνία λέγεται αντίστοιχο τόξο της. Διαφορετικά λέμε τότε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$. Επίσης λέμε ότι το τόξο $\widehat{BA\Gamma}$ δέχεται την εγγεγραμμένη $\widehat{x\hat{A}y}$ (σχ.3).



Παρατηρήσεις:

Είναι προφανές ότι το τόξο $\widehat{B\Gamma}$, στο οποίο βαίνει η γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$, και το τόξο $\widehat{BA\Gamma}$, το οποίο δέχεται τη γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$, έχουν άθροισμα 360° .

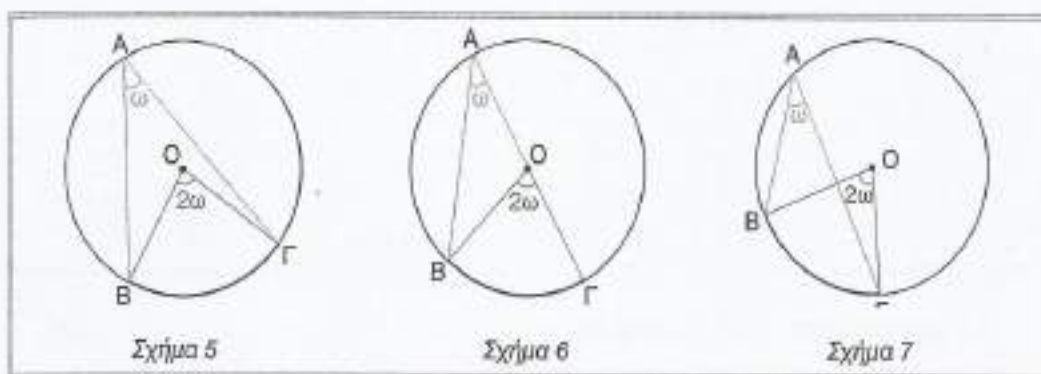
4. Έστω $\widehat{x\hat{A}y}$ η κυρτή γωνία της οποίας η κορυφή Α είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτόμενη του κύκλου (σχ.4). Τότε η γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ λέγεται γωνία χορδής και εφαπτομένης.



6.2 ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο. (σχ. 5, 6, 7).

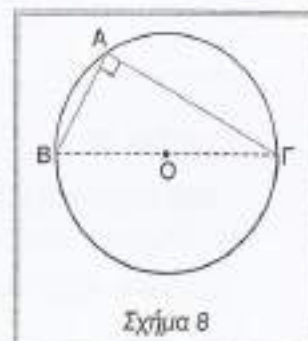


ΠΟΡΙΣΜΑ 1:

Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

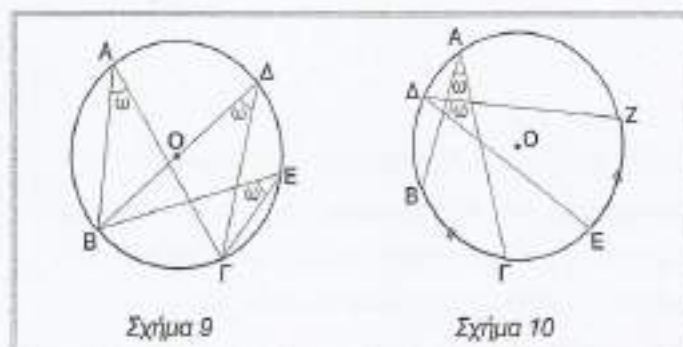
ΠΟΡΙΣΜΑ 2:

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή (σχ. 8).



ΠΟΡΙΣΜΑ 3:

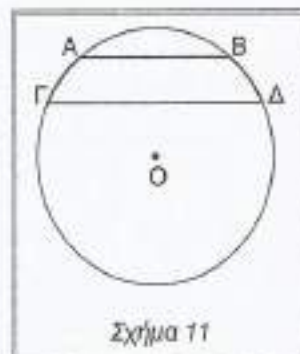
Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα (σχ. 9, 10).



ΠΟΡΙΣΜΑ 4:

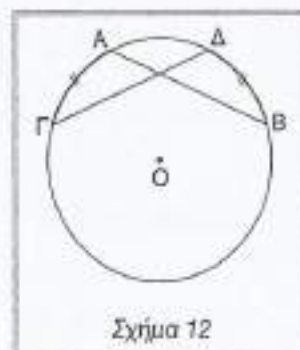
Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα.

Δηλαδή, αν $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$ (σχ. 11).



Παρατήρηση:

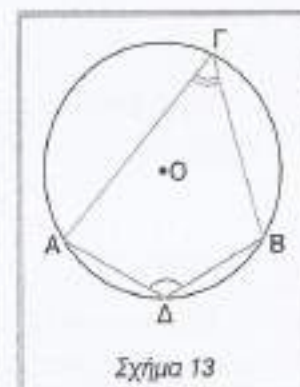
Το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος ισχύει μόνο με την επιπλέον απαίτηση οι χορδές AB και ΓΔ να μην έχουν κοινό σημείο (σχ. 11). Αν δεν ισχύει η απαίτηση αυτή, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι χορδές είναι παράλληλες (σχ. 12).



ΠΟΡΙΣΜΑ 5:

Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που καθεμία βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη είναι παραπληρωματικές:

Δηλαδή $\widehat{A\Gamma B} + \widehat{A\Delta B} = 180^\circ$ (σχ. 13).



ΠΟΡΙΣΜΑ 6:

Αν δύο χορδές B_1B_2 και $\Gamma_1\Gamma_2$ τέμνονται σε σημείο Α εσωτερικό του κύκλου (σχ. 14), τότε η γωνία που ορίζουν ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχουν η γωνία και η κατακορυφήν της.

Δηλαδή $\widehat{B_1\hat{A}\Gamma_1} = \widehat{B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1} + \widehat{\Gamma_2\hat{B}_1B_2}$.



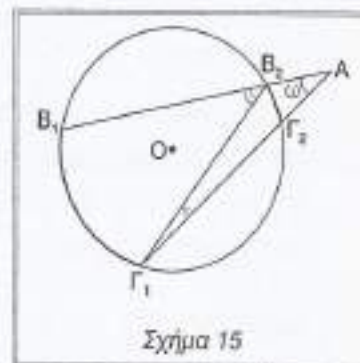
Παρατήρηση:

Επομένως $\widehat{B_1\hat{A}G_1} = \frac{(\widehat{B_1G_1})}{2} + \frac{(\widehat{B_2G_2})}{2}$, όπου $(\widehat{B_1G_1})$ και $(\widehat{B_2G_2})$ τα μέτρα των τόξων $\widehat{B_1G_1}$ και $\widehat{B_2G_2}$ αντίστοιχα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7:

Αν οι προεκτάσεις δύο χορδών B_1B_2 και G_1G_2 τέμνονται σε σημείο A (εξωτερικό του κύκλου) (σχ. 15), τότε η γωνία που ορίζουν ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η γωνία.

Δηλαδή $\widehat{B_1\hat{A}G_1} = \widehat{B_1B_2G_1} - \widehat{B_2G_1G_2}$.



Παρατήρηση:

Επομένως $\widehat{B_1\hat{A}G_1} = \frac{(\widehat{B_1G_1})}{2} - \frac{(\widehat{B_2G_2})}{2}$, όπου $(\widehat{B_1G_1})$ και $(\widehat{B_2G_2})$ τα μέτρα των τόξων $\widehat{B_1G_1}$ και $\widehat{B_2G_2}$ αντίστοιχα.

6.3 ΓΩΝΙΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

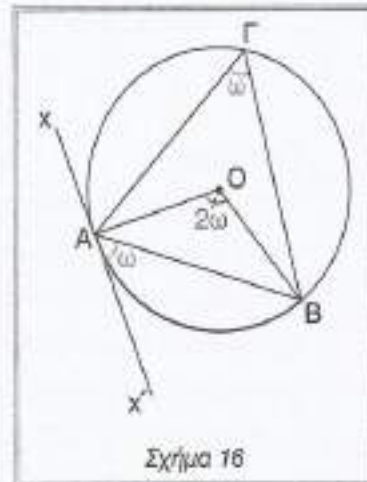
Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτόμενη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής (σχ. 16).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1:

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτόμενη στο άκρο της χορδής είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο τόξο της χορδής (σχ. 16).

ΠΟΡΙΣΜΑ 2:

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της χορδής.



Μεθοδολογία

Στις περισσότερες ασκήσεις με επίκεντρες γωνίες ή γωνίες εγγεγραμμένες σε κύκλο ή γωνίες που σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη, προσπαθούμε να «μεταφέρουμε» τις γωνίες στο σχήμα μέχρι να βρεθούν σε κατάλληλη θέση.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

6.18 Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να δώσετε την κατάλληλη απάντηση:

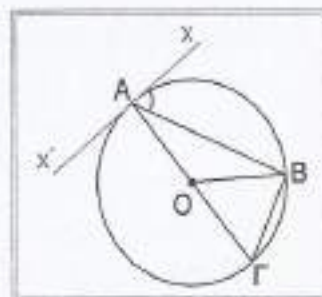
- Πότε μία γωνία λέγεται εγγεγραμμένη σε κύκλο (O, R) και πότε λέγεται επίκεντρη;
- Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μέτρα μιας εγγεγραμμένης και μιας επίκεντρης γωνίας ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο;
- Αν η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ βαίνει σε ημικύκλιο, τότε ποιο είναι το μέτρο της;
- Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μέτρα δύο γωνιών εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο όταν η μία βαίνει στο τόξο το οποίο δέχεται την άλλη;

6.19 Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $x\chi$ είναι η εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο A .

Η γωνία $\widehat{BA\chi}$ είναι ίση με:

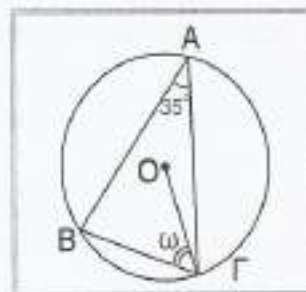
- Α: $\widehat{AOB}$, Β: $\widehat{OBA}$, Γ: $2\widehat{A\Gamma B}$,
 Δ: $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$, Ε: $\widehat{\chi A\Gamma}$.



- Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{BA\Gamma} = 35^\circ$.

Η γωνία $\widehat{\omega}$ είναι ίση με:

- Α: 35° , Β: 55° , Γ: 60° ,
 Δ: 70° , Ε: Κανένα από τα παραπάνω.



6.20 Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε το Σ αν νομίζετε ότι η πρόταση είναι σωστή ή το Λ αν νομίζετε ότι είναι λανθασμένη.

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| α. Αν μία εγγεγραμμένη γωνία είναι ορθή, τότε βαίνει σε ημικύκλιο. | ☐ | ☐ |
| β. Η γωνία που ορίζεται από μία χορδή ενός κύκλου και την εφαπτόμενη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής. | ☐ | ☐ |
| γ. Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους δύο ίσες επίκεντρες γωνίες ορίζουν ίσα τόξα. | ☐ | ☐ |
| δ. Αν δύο τεμνόμενες χορδές ενός κύκλου σχηματίζουν γωνία 60° , τότε τα τόξα που αποκόπτονται στον κύκλο από τη γωνία αυτή και την κατακορυφήν της έχουν άθροισμα 60° . | ☐ | ☐ |
| ε. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) τότε η διχοτόμος AD της γωνίας του $\hat{A}$ διχοτομεί το τόξο $\widehat{B\Gamma}$. | ☐ | ☐ |
| στ. Αν η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο του κύκλο στα σημεία Δ και Δ' αντίστοιχα, τότε η χορδή $\Delta\Delta'$ είναι διάμετρος του κύκλου. | ☐ | ☐ |

6.5 – 6.6 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΕΓΤΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1:

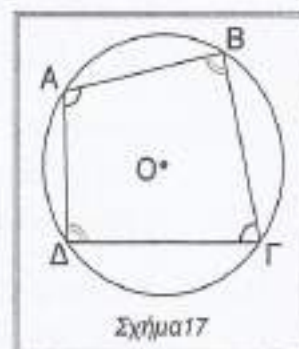
Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

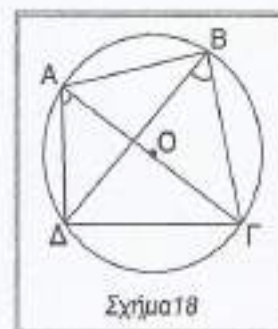
ΘΕΩΡΗΜΑ:

Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- i. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
(Δηλαδή $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{D} = 2L$) (σχ. 17)



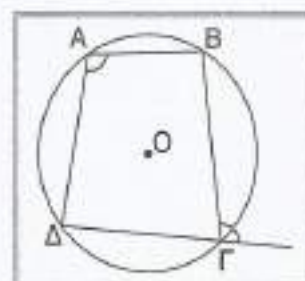
- ii. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
(Δηλαδή $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$, $B\hat{A}\Gamma = B\hat{D}\Gamma$, $A\hat{D}B = A\hat{\Gamma}B$ και $A\hat{B}D = A\hat{\Gamma}D$). (σχ. 18)



ΠΟΡΙΣΜΑ:

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(Δηλαδή $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A}$, $\hat{B}_{εξ} = \hat{D}$, $\hat{A}_{εξ} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{D}_{εξ} = \hat{B}$) (σχ. 19)



ΠΡΟΤΑΣΗ:

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου διέρχονται από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2:

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο, όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Παρατήρηση:

Αν γραφεί ο κύκλος αυτός, τότε το τετράπλευρο δεν είναι πλέον εγγράψιμο.
Έχει γίνει εγγεγραμμένο

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

- i. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- ii. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- iii. Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.
- iv. Οι μεσοκάθετοι των πλευρών διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Παρατήρηση:

Αν οι μεσοκάθετοι τριών πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε από το σημείο αυτό θα διέρχεται και η μεσοκάθετος της τέταρτης πλευράς και το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το σημείο αυτό.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

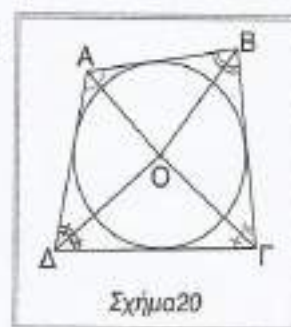
ΟΡΙΣΜΟΣ 3:

Ένα τετράπλευρο του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο λέγεται **περιγεγραμμένο** στον κύκλο αυτό. Τότε ο κύκλος λέγεται **εγγεγραμμένος** στο τετράπλευρο αυτό.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) έχει τις παρακάτω ιδιότητες:



- I. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
- II. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.
(Δηλαδή $AB + \Gamma\Delta = B\Gamma + \Delta A$)

ΟΡΙΣΜΟΣ 4:

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να εφάπτεται και στις τέσσερις πλευρές του.

Παρατήρηση: _____ 

Αν γραφεί ο κύκλος αυτός, τότε το τετράπλευρο δεν είναι πλέον περιγράψιμο.
Έχει γίνει περιγεγραμμένο.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο, όταν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- ii. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Παρατήρηση:

Αν οι διχοτόμοι τριών γωνιών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε από το σημείο αυτό θα διέρχεται υποχρεωτικά και η διχοτόμος της τέταρτης γωνίας. Αρκεί λοιπόν να δείχνουμε ότι οι διχοτόμοι τριών γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τετράπλευρο κύκλου.

Μεθοδολογία

1. Όταν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, τότε αποδεικνύουμε ένα από τα επόμενα:
 - α. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
 - β. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
 - γ. Μία γωνία του ισούται με την απέναντι εξωτερική.
 - δ. Οι μεσοκάθετοι τριών πλευρών του συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο).
2. Όταν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο, τότε αποδεικνύουμε ένα από τα επόμενα:
 - α. Οι διχοτόμοι τριών γωνιών του συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο).
 - β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

?

6.63 Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να δώσετε την κατάλληλη απάντηση:

- α. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και πότε λέγεται εγγράψιμο;
- β. Να αναφέρετε τις ιδιότητες ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο τετράπλευρου
- γ. Να αναφέρετε τέσσερα κριτήρια που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
- δ. Πότε λέμε ότι ένα τετράπλευρο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο και πότε περιγράψιμο;
- ε. Ποιες ιδιότητες έχει ένα περιγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο;
- στ. Να αναφέρετε δύο κριτήρια που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο.
- η. Αν ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο;
- θ. Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο;

6.64 Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε το Σ αν νομίζετε ότι η πρόταση είναι σωστή ή το Λ αν νομίζετε ότι είναι λανθασμένη. Σ Λ

- α. Κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο είναι περιγράψιμο
σε κάποιο κύκλο. ☐ ☐
- β. Ένα τετράπλευρο που έχει δύο
διαδοχικές γωνίες ορθές είναι εγγράψιμο. ☐ ☐
- γ. Σε κάθε περιγράψιμο τετράπλευρο,
οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐ ☐
- δ. Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένο
σε κύκλο (O, R) , τότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών
του διέρχονται από το ίδιο σημείο. ☐ ☐
- ε. Αν οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$
είναι ορθές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και το

κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.

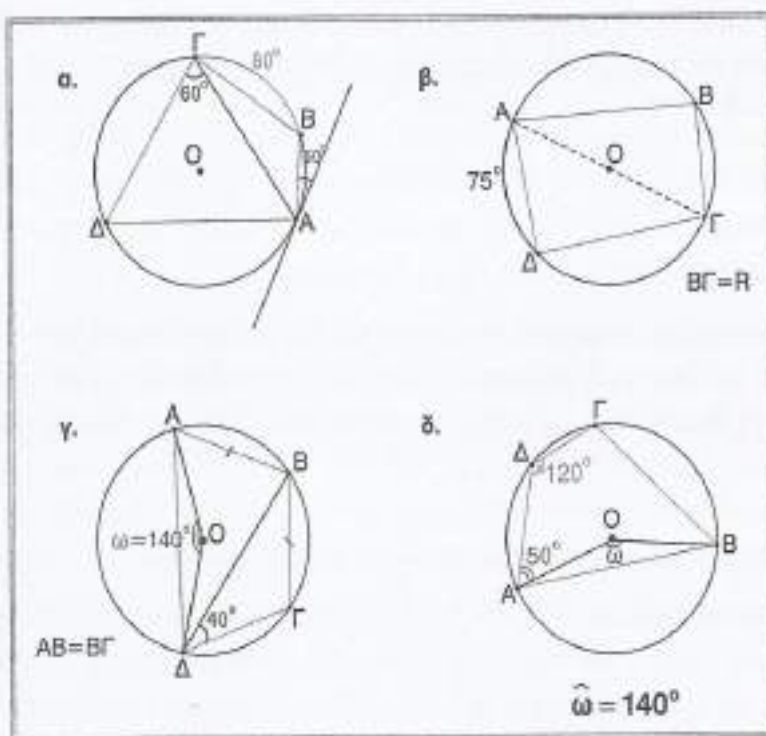


στ. Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), τότε η γωνία που σχηματίζει μία πλευρά του με την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο είναι ίση με την απέναντι γωνία του τετραπλεύρου.



ΑΠΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

6.65 Σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα να υπολογιστούν οι γωνίες του εγγεγραμμένου στον κύκλο τετραπλεύρου.



6.66 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ. Από την κορυφή Β φέρουμε κάθετο ΒΕ προς την ευθεία ΑΜ. Να δείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι εγγράψιμο.
- $BE = ED = \Delta A$.