

ΤΟΔΔ 2024 Ι.Ε.Π. ΘΕΜΑΤΑ Γ (4)

1.

Θ Ε Μ Α Γ

1.4

27898

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Γ

1.4

27959

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2023, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Γ

1.4

32631

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1$, $t \geq 0$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

- α. Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου σε χρόνο t .
- β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$ s και $t_2 = 3$ s.
- γ. Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;
- δ. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

Μονάδες $(8+6+5+6)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Γ

2.2

34921

Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

- α. Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

Μεταφορικό Μέσο x_i	Αριθμός Εκπαιδευτικών v_i
ΣΥΝΟΛΟ	50

- β. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
- γ. Να βρείτε τη σχετική συχνότητα για το κάθε μέσο μεταφοράς και να γράψετε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που χρησιμοποιεί το κάθε μέσο.

Μονάδες (8+9+8)=25

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν το n είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

(Μον. 2)

β) $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(Μον. 2)

γ) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1, ℓ_2

πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x)) = \ell_1 \ell_2 .$$

(Μον. 2)

- ε) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
ΣΥΝΟΛΑ				

- B1.** Αν γνωρίζετε ότι η 5^η συχνότητα (v_5) ισούται με την 1^η συχνότητα (v_1), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

- B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

- B3.** Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

- B4.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 3

Δ3. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$.

Μονάδες 8

Δ4. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.

(Μον. 2)

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Μον. 2)

γ) Το εύρος (R) είναι ένα μέτρο διασποράς.

(Μον. 2)

Μονάδες 6

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(x^p)' = \dots$, όπου p ρητός αριθμός.

(Μον. 3)

β) $(\sin x)' = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{X} = \dots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4, \kappa, 5, 6, 2\kappa+1, 4, 6, \kappa+2, 6, 4$$

όπου:

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 7

B2. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $(\bar{X})$ των βαθμών του φοιτητή.

Μονάδες 5

B3. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2) .

Μονάδες 8

B4. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Δίνεται ότι $\sqrt{14} \approx 1,18$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή.

Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.

Μονάδες 5

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.

Μονάδες 10

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Μονάδες 6

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$.

Μονάδες 5

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ - ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
& ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

(Μον. 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

(Μον. 3)

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

(Μον. 4)

Μονάδες 10

A2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- β. $(\sin x)' = \eta \mu x$
- γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.
- δ. Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς.
- ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha-1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- B1.** Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α .

Μονάδες 7

- B2.** Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2) .

Μονάδες 7

- B3.** Για $\alpha=4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

- B4.** Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa, \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa=1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa=1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

A2. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; (μον. 3)

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; (μον. 4)

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Ισχύει $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

δ. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν α_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα ν_i , τότε $\alpha_i = \frac{\nu}{\nu_i} \cdot 360^\circ$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$ και ν το μέγεθος του δείγματος.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές ενός δείγματος είναι $11, 7, \kappa, 13, 11, 10$ όπου $\kappa > 0$. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

B1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 5

B2. Αν $\bar{x} = 10$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ .

Μονάδες 7

B3. Αν $\kappa = 8$, να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) (μον. 4) και το εύρος (R) (μον. 2) του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 6

B4. Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές (μον. 5) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (μον. 2).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}, x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.$

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 5) και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μον. 6).

Μονάδες 11

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(5, f(5))$.

Μονάδες 6

Γ4. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A (μον. 3) και B (μον. 2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Δ1. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 4) και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{3}{8}\right)$ και $f\left(\frac{5}{6}\right)$ (μον. 3).

Μονάδες 7

Δ2. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (x^2 - x)} .$$

Μονάδες 7

Δ3. Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 5

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

β. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v}{v_i}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 6

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

β. $(\sqrt{x})' = \dots$, με $x > 0$

γ. $(\sin x)' = \dots$

Μονάδες 9

- A4.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
Σύνολο		100		

Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

- B1.** Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

- B2.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

Μονάδες 3

- B3.** Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

Μονάδες 5

- B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.

Μονάδες 4

Γ2. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι

$$f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2).$$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}.$$

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y=1$.

Μονάδες 8

Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x,1)$ της ευθείας $y=1$ με $x>0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x,1)$ και $O(0,0)$ ως προς x , όταν $x=1$.

Μονάδες 8

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$, με $x \neq 0$.

β. $(x^v)' = \dots\dots\dots$, όπου v φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

B2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

B3. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

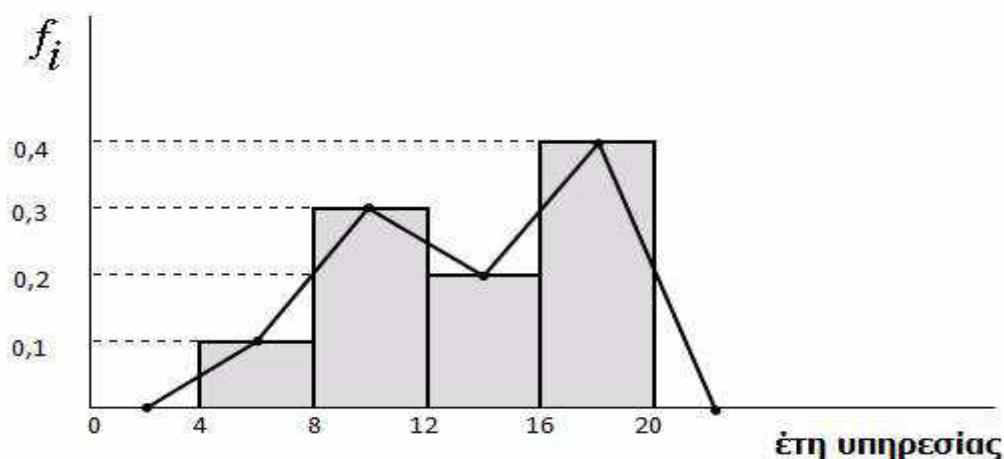
Μονάδες 7

B4. Για $\alpha = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5\text{m}$ και $x_B = 34,2\text{m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

Μονάδες 7

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπίες ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\sqrt{x})' = \dots$

β. $(f(g(x)))' = \dots$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν:
25, 10, 5, 20, 15.

B1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 7

B3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 6

Γ2. Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

Γ4. Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

- Δ1.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ (μον. 4).

Μονάδες 6

- Δ2.** Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} \quad , \quad s = \frac{1}{2f'(1)}$$

αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\bar{x} = 9$ και $s = 2$.

Μονάδες 6

- Δ3.** Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

Μονάδες 9

- Δ4.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

Μονάδες 4

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός, ισούται με $cf'(x)$.

Μονάδες 10

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με $i = 1, 2, \dots, k$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

β. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.

δ. $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$

ε. Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το α .

Μονάδες 6

B3. Για $\alpha = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Μονάδες 9

B4. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές/τριες της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		ν_3	
[20,24)		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ο μέσος χρόνος είναι $\bar{x} = 14$.

Γ1. Να δείξετε ότι $v_3 = 10$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-4, -1]$ ισχύει:

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_1, x_2, x_3 να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων y_1, y_2, y_3 .

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $x \in A$.

Μονάδες 10

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

(Μον. 2)

β) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

(Μον. 2)

γ) Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Μον. 2)

δ) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

(Μον. 2)

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ε) $(x^n)' = (n-1) \cdot x^n$, όπου n φυσικός αριθμός.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

B1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι:

7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 7

B4. Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^4 + \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον. 6) και β (μον. 2) αν

$$f(0) = 2019 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Μονάδες 12

Δ3. Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_v - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι ίσο με $\ell \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell^v, \text{ όπου } v \text{ φυσικός αριθμός.}$$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 95% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- ε) Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{n}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και n το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα είναι:

7, 8, 10, 5, 11, 7

B1. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:

- α. τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον. 3)
 β. τη διάμεσο $\tilde{x}$ (μον. 3)
 γ. τη διακύμανση s^2 (μον. 5)

Μονάδες 11

B2. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - kx + 2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5

Γ2. Για $k=3$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 10

Γ3. Για $k=3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{3}{4}$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ4. Αν οι τιμές $f(-1)$, $f(1)$, $f(0,25)$, $f(-0,5)$, $f(0)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X , τότε να τις διατάξετε κατά αύξουσα σειρά (μον. 5) και να υπολογίσετε το εύρος τους (R) (μον. 2) και τη διάμεσό τους (δ) (μον. 2).

Μονάδες 9

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΠΕΜΠΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}, x \in A$$

Μονάδες 10

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

β. Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι, τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$.

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να απαντήσουν σε μία ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός υποψηφίων n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$
[0,2)	1	
[2,4)	7	
[4,6)	4	
[6,8)		
[8,10)	1	
ΣΥΝΟΛΑ	20	100

B1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου που χρειάστηκαν οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

Μονάδες 5

B3. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην ερώτηση;

Μονάδες 5

B4. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i \%$).

Μονάδες 6

B5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i \%$) και τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

Έστω ότι

$$f'(1) + 3, \quad 8, \quad f(1), \quad 7, \quad f(2), \quad 10$$

είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των παρατηρήσεων (μον. 3), τη μέση τιμή (μον. 4) και τη διάμεσο (μον. 3).

Μονάδες 10

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των παραπάνω παρατηρήσεων είναι $s=2$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(\frac{R}{3}, f\left(\frac{R}{3}\right)\right)$, όπου R το εύρος των παραπάνω παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Γ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρήστε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) = x^2 + \frac{4s^2}{x} + \bar{x} - 27, \text{ με } x \neq 0,$$

όπου $\bar{x}$ και s είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και το σημείο $K(1, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Δ1. Να δείξετε ότι $s=2$ και $\bar{x}=10$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3}$

Μονάδες 6

Δ4. Έστω ότι $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι οι τιμές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ αντίστοιχα, όταν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Μονάδες 5

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή $f'(x)=(c)'=0$.

Μονάδες 7

A2. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται ο σταθμικός μέσος $\bar{x}$ της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A , μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

β. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n .

- γ. Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για όλες τις τιμές του x , τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- δ. Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.
- ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος:

13, 12, $\lambda + 5$, 9, 14, 15, κ , 12, 17, 13

όπου: $\lambda = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

B1. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 6

B2. Για $\lambda = 2$ να υπολογίσετε την τιμή του κ , αν η μέση τιμή ($\bar{x}$) των προϊόντων είναι 12.

Μονάδες 6

B3. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση (s) των τιμών των προϊόντων είναι 3.

Μονάδες 7

B4. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - \alpha x + 2 ,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Μονάδες 6

Γ2. Για $\alpha = -1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha = -1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Για $\alpha = -1$ να δείξετε ότι:

$$f(2019) + f(2020) > 2 \cdot f(1)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = (\lambda - 3)x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 6\lambda ,$$

όπου για τη σταθερά λ ισχύει $0 < \lambda < 3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι $y = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\lambda - 6)^2$

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Για $\lambda = 2$ δίνονται τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, $A_5(x_5, y_5)$ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$. Αν οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 αντίστοιχα, έχουν τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 5

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

Μονάδες 5

A2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση v της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

β. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζεται και η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$ με

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ όπου } x \in A \text{ και } g(x) \neq 0.$$

γ. Αν x_1, x_2 είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X , με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2 , τότε για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $v_2 = N_2 - N_1$, όπου $N_1 = v_1$.

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(\eta\mu x)' = \dots$

β. $(x^\rho)' = \dots$, όπου ρ ρητός αριθμός.

γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots$, όπου $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i
0	1		
1	κ^2		
2	8		
3	$\kappa - 1$		
Σύνολο	20	100	

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 7

B2. Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές τιμές.

Μονάδες 10

B3. Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας;

Μονάδες 3

B4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x < -1$.

Μονάδες 7

Γ2. Αν $x \in [-4, -2]$, να αποδείξετε ότι $-3 \leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 6

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ τέμνει τους άξονες x και y στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - a^2 - 8a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του a .

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε για ποια τιμή του a το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Μονάδες 8

Δ4. Για $a = -4$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)} .$$

Μονάδες 5

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΠΕΜΠΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 7

A2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Πώς ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i για $i=1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 4

β. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για $i=1, 2, \dots, k$.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$.

- β. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.
- γ. Ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.
- δ. Οι ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.
- ε. Πλάτος μίας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - \alpha x + 6$ με $\alpha, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(4) = 12$.

- B1.** Να βρείτε την $f'(x)$ (μον. 3) και να υπολογίσετε την τιμή του α (μον. 3).

Μονάδες 6

- B2.** Για $\alpha=4$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της (μον. 5) και να βρείτε τα ακρότατά της (μον. 3).

Μονάδες 8

- B3.** Για $\alpha=4$ να δείξετε ότι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

- B4.** Για $\alpha=4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 μαθητές/μαθήτριες ενός ΕΠΑ.Λ, για να μεταβούν από το σπίτι στο σχολείο τους, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους c , όπου

$$\frac{2}{c} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
[14, ...)	15	30	15
[..., ...)	20	40	...
[..., ...)	...	...	...
[..., ...)	5	...	50
Σύνολο	50	100	

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του πλάτους c .

Μονάδες 8

Γ2. Για $c=8$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

Γ3. Για $c=8$ να βρείτε το ποσοστό των μαθητών/μαθητριών που χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο τους.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x(3x-2) - 8$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

Μονάδες 5

Δ2. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = f(t)$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

Ζητούνται:

α. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=4$ δευτερόλεπτα.

Μονάδες 5

β. Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο.

Μονάδες 8

γ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t=10$ δευτερόλεπτα.

Μονάδες 7

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X μεγέθους n που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι μηδέν.

Μονάδες 9

A2. α. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μίας μεταβλητής x με μέση τιμή $\bar{x}$, όπου $\bar{x} \neq 0$;

Μονάδες 4

β. Πότε ένα δείγμα τιμών μίας μεταβλητής είναι ομοιογενές;

Μονάδες 2

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_1 .

β. Αν f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ισχύει

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

δ. Το εύρος ή κύμανση (R) είναι μέτρο διασποράς.

ε. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 6x + 3$, όπου x, α πραγματικοί αριθμοί.

B1. Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι ίσος με 14, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 8

B2. Για $\alpha = 2$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f''(x) + 14}{x^2 - 9}$$

Μονάδες 7

B3. Για $\alpha = 2$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - 16x$, με x πραγματικός αριθμός, ως προς τη μονοτονία (μον.8) και να βρείτε τα ακρότατα (μον.2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάστηκαν 200 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα, ομαδοποιήθηκαν σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-)	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
20 – 24	...	0,10	...
24 – 28	...	0,20	...
28 – 32	...	0,30	...
32 – 36	...	0,35	...
36 – 40	...	...	...
Σύνολο	200	...	

Γ1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

Γ2. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα (μον.3) και το πολύγωνο (μον.1) των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις %.

Μονάδες 4

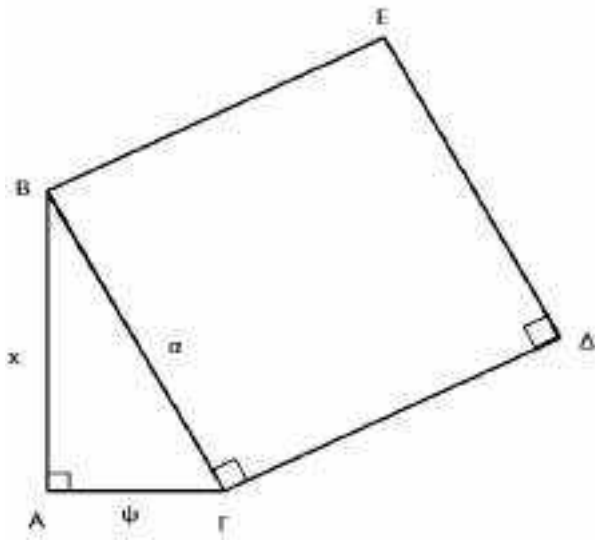
Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι χρειάστηκαν μέχρι και 26 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε τον μέσο χρόνο που χρειάζεται ένας μαθητής για να λύσει το πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ



Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με κάθετες πλευρές $AB = x$, $A\Gamma = \psi$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$, κατασκευάζουμε εξωτερικά τετράγωνο $BE\Delta\Gamma$, με πλευρά $B\Gamma = \alpha$, όπως το διπλανό σχήμα. Αν το άθροισμα των καθέτων πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 20cm , τότε:

- Δ1.** Να εκφράσετε την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x .

Μονάδες 5

- Δ2.** Να εκφράσετε το εμβαδόν $E(x)$ του τετραγώνου $BE\Delta\Gamma$ ως συνάρτηση του x (μον.2) και να βρεθεί το πεδίο ορισμού του εμβαδού $E(x)$ (μον.3).

Μονάδες 5

- Δ3.** Για ποιες τιμές του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο (μον.5) και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του (μον.2);

Μονάδες 7

- Δ4. α.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $T(x)$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με $T(x) = 10x - \frac{1}{2}x^2$.

Μονάδες 4

- β.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όταν το εμβαδόν $T(x)$ του τριγώνου γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 4

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

Μονάδες 5

- A2.** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 5

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η διακύμανση ενός δείγματος είναι μέτρο θέσης.
- β.** Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $v(t) = x'(t)$.
- γ.** $(x^p)' = px^{p+1}$, όπου p ρητός αριθμός.

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \dots$

β. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, ℓ_1 πραγματικός αριθμός, v ακέραιος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος αναμονής (σε λεπτά) ενός δείγματος επιβατών σε μία στάση λεωφορείου, κατά τη διάρκεια μίας ημέρας, ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(\sqrt{x}-1)}$.

B1. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 6

Αν $s = 1$:

B2. Να βρείτε το ποσοστό του δείγματος με χρόνο αναμονής από 3 έως 6 λεπτά.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τη διάμεσο δ (μον.1), τον συντελεστή μεταβολής CV (μον.2) και να εκτιμήσετε το εύρος R (μον.1).

Μονάδες 4

B4. Αν ο χρόνος αναμονής 380 ατόμων είναι από 3 έως 7 λεπτά, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Τα έτη υπηρεσίας των 50 υπαλλήλων μίας εταιρείας ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτη [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[0, 10)	5	7	14	...
[10, 20)	15	$2\alpha + 4$	...	...
[20, 30)	25	10	...	...
[30, 40)	35	$3\alpha - 6$	...	100
Σύνολο		50	100	

Γ1. Να υπολογίσετε το α .

Μονάδες 5

Αν $\alpha = 7$:

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

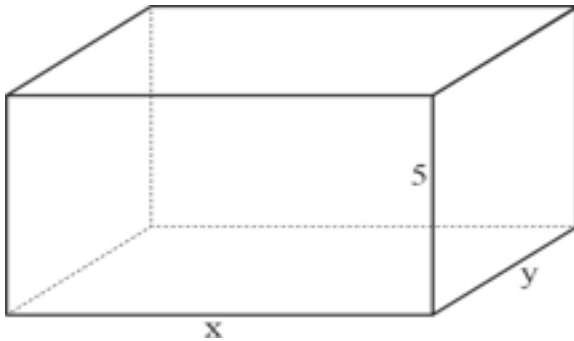
Μονάδες 7

Γ4. α. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα (μον.3) και το πολύγωνο (μον. 1) των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

β. Να εκτιμήσετε τη διάμεσο (μον. 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ



Μία δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 5 μέτρα, έχει βάση ορθογώνιο μήκους x και πλάτους y (οι διαστάσεις x, y εκφράζονται σε μέτρα). Η περίμετρος της βάσης είναι 40 μέτρα.

Δ1. Να εκφράσετε το πλάτος y ως συνάρτηση του x .

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $V(x) = 100x - 5x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του όγκου $V(x)$.

Μονάδες 6

Δ3. α. Για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει τον μέγιστο όγκο (μον. 8);

β. Να υπολογίσετε τον μέγιστο όγκο (μον. 2).

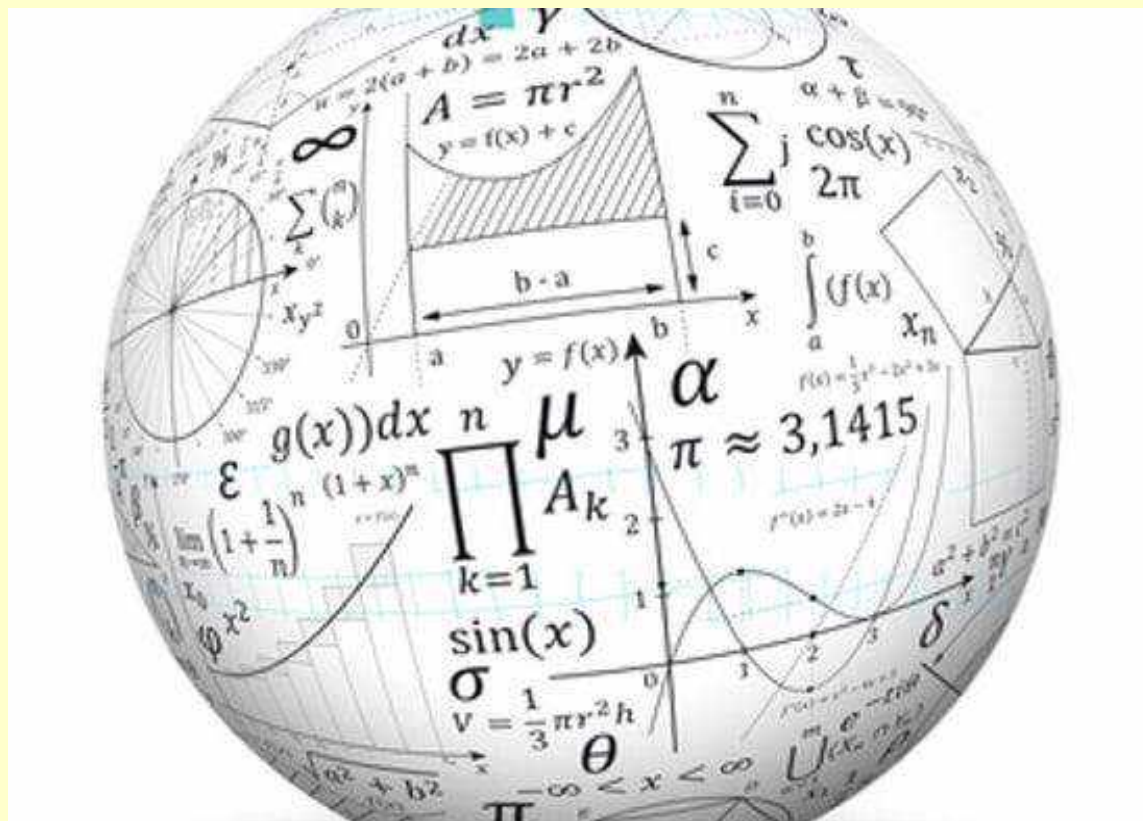
Μονάδες 10

Δ4. Δύο δεξαμενές Α και Β ίδιου σχήματος με την αρχική, έχουν μήκη $x_A = 11,81$ μέτρα και $x_B = 11,82$ μέτρα αντιστοίχως. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποια από τις δύο δεξαμενές έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

Μονάδες 5

8

2016-17-18-19-20-21-22-2023



ΕΦΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.**
1. Τι ονομάζουμε συχνότητα μιας τιμής μεταβλητής; (2 μονάδες)
 2. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας τιμής μεταβλητής; (2 μονάδες)
 3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $f(x)=c$ με $c \in \mathbb{R}$, είναι η $f'(x) = (c)' = 0$

(μονάδες 5)

(Μονάδες 9)

- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1. Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV είναι μέτρο θέσης.
 2. Αν f και g παραγωγίσιμες, ισχύει: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
 3. Η διάμεσος υπολογίζεται και για ποιοτικές μεταβλητές.
 4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0)$.

(Μονάδες 8)

- A3.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = \dots$
2. $(f(g(x)))' = \dots$
3. $(\sin x)' = \dots$
4. Αν $CV = 9\%$, τότε το δείγμα είναι

(Μονάδες 8)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: 8, 5, $2\omega-2$, 5, 9, $2\omega+1$, $\omega+3$, 6, 8, 7 (ω = πραγματικός αριθμός)

B1. Αν γνωρίζετε ότι η μέση τιμή της παραπάνω κατανομής είναι ίση με 7, να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

(Μονάδες 8)

B2. Για $\omega = 4$, να βρείτε την διάμεσο.

(Μονάδες 4)

B3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

(Μονάδες 8)

B4 Αν προσθέσουμε άλλα δύο νούμερα, το 4 και το 10, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

A Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 2\alpha x^2 + 5x - 2$. Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο $x = 1$, είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 7$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να γράψετε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης της καμπύλης της f .

(Μονάδες 7)

B Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \frac{2 - \sqrt{6-x}}{4-x^2}$.

Γ3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 6)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

(Μονάδες 6)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η θέση του δίνεται από τη σχέση:

$$S(t) = t^2 \left(\frac{2t}{3} - 7 \right) + 2(10t + 1) \quad (S \rightarrow \text{m}, t \rightarrow \text{sec}), \quad 0 \leq t \leq 10$$

Δ1. Να βρείτε τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή των 3 sec.

(Μονάδες 4)

Δ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θέσης του σώματος.

(Μονάδες 4)

Δ3. Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η θέση του σώματος μειώνεται.

(Μονάδες 6)

Δ5. Να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη, καθώς και την ταχύτητα αυτή.

(Μονάδες 6)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. 1. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα ενός δείγματος n παρατηρήσεων;
(μονάδες 4)

2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $f(x) = c$, είναι ίση με 0.
(μονάδες 8)

(Μονάδες 12)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η αθροιστική σχετική συχνότητα δίνεται και από τον τύπο: $F_i = \frac{N_i}{n}$.

2. Αν f και g παραγωγίσιμες, ισχύει: $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

3. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για ποιοτικές μεταβλητές.

4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0)$.

5. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

(Μονάδες 5)

A3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots$

2. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

3. $(\sqrt{x})' = \dots$

4. Σε μια κανονική κατανομή, στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το ...% των παρατηρήσεων.

(Μονάδες 8)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	x_i (κέντρο κλάσης)	v_i	N_i	f_i	F_i
[0,20)					0,05
[20,40)			9		
[40,60)		4		0,20	
[60,80)					0,85
[80,100)					
Σύνολα			-----		-----

B1. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$.

(Μονάδες 3)

B2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

(Μονάδες 7)

B3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

(Μονάδες 5)

B4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής. (δίνεται $\sqrt{560} \approx 23,66$)

(Μονάδες 6)

B5. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχει τιμή τουλάχιστον 50.

(Μονάδες 4)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1} - 2}, & x \geq -1 \text{ και } x \neq 3 \\ \sin(x-3) + \eta\mu(9-x^2) + \alpha^2 - 1, & x=3 \end{cases}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 16$.

(Μονάδες 10)

Γ3. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α , αν γνωρίζετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 3$.

(δίνονται: $\sin 0 = 1$ και $\eta\mu 0 = 0$)

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{\kappa x^2}{2} - 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\kappa = 5$, αν γνωρίζετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$ είναι ίσος με $\lambda = -6$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$.

(Μονάδες 5)

Δ3. Αν η συνάρτηση $f(x)$ αντιπροσωπεύει το μηνιαίο κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) μιας μικρής επιχείρησης επίπλων που παράγει x καναπέδες το μήνα ($x > 0$), πόσους καναπέδες θα πρέπει να κατασκευάσει για να έχει το μέγιστο δυνατό μηνιαίο κέρδος;

(Μονάδες 7)

Δ4. Να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(4)$, $f'(5)$, $f'(6)$.

(Μονάδες 3)

Δ5. Να υπολογίσετε την διάμεσο, το εύρος και τη μέση τιμή των παραπάνω τιμών.

(Μονάδες 4)



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Β' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να δώσετε τον ορισμό του σταθμικού μέσου ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

A2. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ . Να αποδειχθεί ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{4}{x}$ είναι $f'(x) = \frac{0}{1} = 0$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 .

4. Ο CV είναι ανεξάρτητος από μονάδες μέτρησης.

5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 10



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Β' ΦΑΣΗ

A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = \dots$

2. $(\sin x)' = \dots$

3. Αν f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $x \in \mathbb{R}$ τότε $(c \cdot f(x))' = \dots$

4. Αν x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 οι τιμές μιας μεταβλητής, με $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, τότε το εύρος αυτών των τιμών είναι $R = \dots$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ο δημιουργός του facebook Μαρκ Ζούκερμπεργκ, αποφάσισε να κάνει μία έρευνα για το ποιες ηλικίες ασχολούνται περισσότερο με αυτό. Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω στατιστικό πίνακα:

Κλάσεις	κ_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$	$v_i \kappa_i$
0-20				30				
20-40				20				
40-60								
60-80				20				
80-100								
Συνολο		200		100				

B1. Αν η γωνία του κυκλικού τομέα στην οποία αντιστοιχεί η κλάση 40 – 60 είναι 90° να δειχθεί ότι $f_3\% = 25$, $f_5\% = 5$ και να συμπληρωθεί ο στατιστικός πίνακας.

Μονάδες 10

B2. Να βρεθεί το ποσοστό των χρηστών με ηλικία: (**α.**) μέχρι 40 ετών (**β.**) από 20 έως 80 ετών.

Μονάδες 3

B3. Ποιο το πλήθος των χρηστών από 30 έως 60 ετών και ποιο το πλήθος από 50 έως 70 ετών ;

Μονάδες 3



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Β' ΦΑΣΗ

- B4.** Να βρεθεί η μέση τιμή, η διακύμανση και ο συντελεστής μεταβλητότητας των τιμών του δείγματος. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να θεωρήσετε ότι $\sqrt{620} \approx 25$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \lambda x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & , x \in \Delta \\ \alpha^2 - 3\alpha + 14 & , x = 1 \end{cases}$, όπου $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να βρείτε το Δ αν αυτό είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται ο πρώτος κλάδος της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- Γ2.** Να βρεθεί ο αριθμός λ αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(6, 40)$.

Μονάδες 5

Για $\lambda=1$,

- Γ3.** Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

Για $\alpha=1$,

- Γ4.** **i.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x+2)(\sqrt{x+3} + 2)$, $x \geq -3$.
ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο που τέμνει τον x' αξονα.
iii. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x+3} + 2} + 2018$ ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη της g σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον x' αξονα γωνία 45° .

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Β' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή με διάμεσο $\delta=8$, μέση τιμή $\bar{x}$, και τυπική απόκλιση s . Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \bar{x} \cdot \frac{x^2}{2} - 12x + 1$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = s$.

Δ1. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 3

Για $\bar{x}=8$,

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της και να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 9

Για $s=2$,

Δ3. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στα $(4,6)$ και $(8,10)$ είναι 950, να βρεθεί το μέγεθος n του δείγματος.

Μονάδες 5

Για $n=2000$,

Δ4. Να βρεθεί το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10,12)$.

Μονάδες 3

Δ5. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της σταθεράς $c > 0$, που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές της μεταβλητής X , ώστε να προκύψει ομοιογενές δείγμα.

Μονάδες 5

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

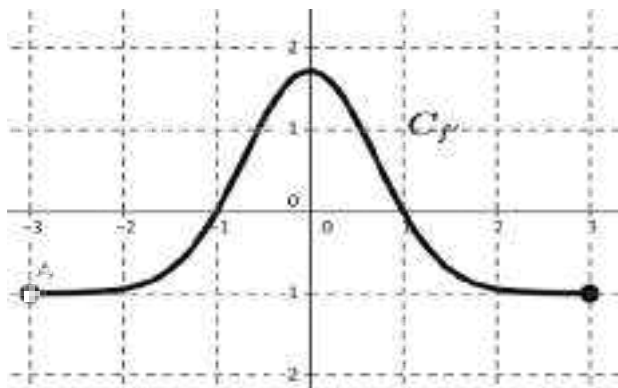
Α1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με το μηδέν.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f . Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση έτσι, ώστε να συμπληρώνεται σωστά η πρόταση:





ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019

Β' ΦΑΣΗ

«Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα: _____»

- α. $[-3,0]$
- β. $(-3,0]$
- γ. $[-1,1]$
- δ. $(-1,0)$

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με ένα «Σ» αν η πρόταση είναι σωστή, ή με ένα «Λ» αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε το x_0 θα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
- β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- γ. Αν η τυπική απόκλιση μιας ομάδας A είναι μεγαλύτερη από την τυπική απόκλιση μιας ομάδας B , τότε η σχετική διασπορά της ομάδας A είναι πάντοτε μεγαλύτερη από τη σχετική διασπορά της ομάδας B .
- δ. Σε μια κανονική κατανομή, αν s είναι η τυπική απόκλιση και R είναι το εύρος, τότε $s \approx 6R$.
- ε. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ στη θέση x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{2}{3}$, ($x \in \mathbb{R}$),

B1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τον ρυθμό μεταβολής της f .

Μονάδες 7

B2. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2, f(2))$. Στη συνέχεια να την σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων x, y .

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019

Β' ΦΑΣΗ

B3. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \frac{-x - \sqrt{2 - x^2}}{f'(x)}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$. (μονάδες 5)

(β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$. (μονάδες 6)

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει τον αριθμό των μηνυμάτων που στέλνουν μέσω της εφαρμογής MESSENGER ν ενήλικοι καθημερινά.

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i
$[\dots, 10)$	
$[\dots, \dots)$	
$[\dots, \dots)$	
$[\dots, \dots)$	35

Γ1. Να βρείτε τις κλάσεις και τις κεντρικές τιμές τους.

Μονάδες 5

Γ2. Για πλάτος κλάσης $c = 10$, να φτιάξετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων, σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αν γνωρίζετε τα εξής:

- λ ενήλικοι (λ είναι θετικός, ακέραιος) στέλνουν λιγότερα από 10 μηνύματα καθημερινά.
- 3λ ενήλικοι στέλνουν λιγότερα από 20 μηνύματα καθημερινά.
- 90% των ενηλίκων ή 45 ενήλικοι στέλνουν λιγότερα από 30 μηνύματα.
- Το 30% των ενηλίκων στέλνει από 20 έως 30 μηνύματα.

Μονάδες 8

Γ3. Να υπολογίσετε το εύρος, τη μέση τιμή και τον συντελεστή μεταβλητότητας. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

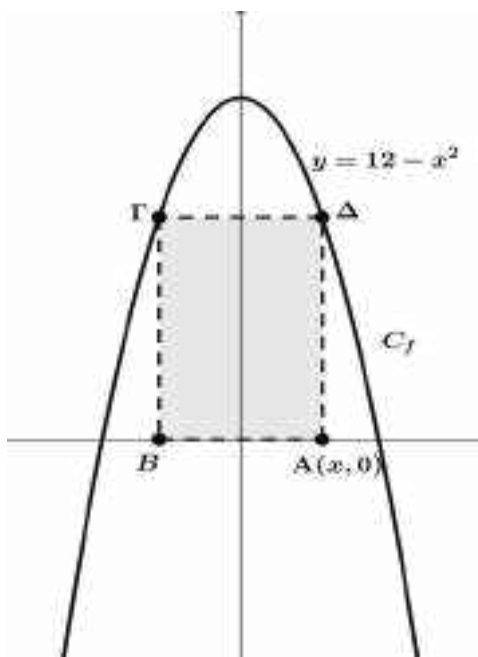
Μονάδες 7

- Γ4.** Αν θεωρήσουμε την ίδια μελέτη σε πλήθος 400 ενηλίκων, η οποία ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή, πήραμε τις εξής πληροφορίες: το 50% των ενηλίκων στέλνει πάνω από 15 μηνύματα καθημερινά και 10 ενήλικοι στέλνουν το πολύ 11 μηνύματα καθημερινά. Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση της κατανομής.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Στην παρακάτω γραφική παράσταση, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 12 - x^2$, με Γ, Δ σημεία που ανήκουν στη γραφική παράσταση της f , και A, B βρίσκονται πάνω στον x' με $A(x, 0), x > 0$, έτσι ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ορθογώνιο.



- Δ1.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 24x - 2x^3, x \in (0, 2\sqrt{3})$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να βρείτε το $x \in (0, 2\sqrt{3})$ έτσι, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Β' ΦΑΣΗ

Θεωρούμε τις τιμές $y_i = E''(x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ με $x_i \in (0, 2\sqrt{3})$. Δίνεται ότι $\bar{x} = 2$ είναι η μέση τιμή των x_i και $s_x^2 = 0,16$ είναι η διασπορά των x_i .

- Δ3.** Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας CV_y των τιμών y_i . Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του θετικού ακεραίου α που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε μία από τις y_i , ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

- Δ4.** Για την τιμή του α που βρήκατε, να λυθεί η εξίσωση $E(\alpha \cdot x - 70) = 32$.

Μονάδες 6



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 16 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε να αποδειχτεί ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Μονάδες 7

A2. Τί ονομάζεται δείγμα ενός πληθυσμού και πότε ένα δείγμα στην πράξη ονομάζεται αντιπροσωπευτικό ;

Μονάδες 4

A3. α) Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα της τιμής μιας μεταβλητής x ;
β) Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τη σχετική συχνότητα;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Πόσες φορές βγήκε με ‘Μετακίνηση 6’ στις 45 ημέρες καραντίνας ο Γιώργος είναι ποσοτική συνεχής μεταβλητή.

β) Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

Β' ΦΑΣΗ

- γ) Η αθροιστική συχνότητα N_i μιας τιμής x_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από την τιμή x_i , $i=1,2,\dots,k$
- δ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$.
- ε) Αν για μια συνάρτηση $f(x)$ ισχύουν, $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε η $f(x)$ παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x=x_0$ μέγιστο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa^2 x^3 - 9\kappa x^2 + 15x + 3$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x = \frac{1}{3}$.

B1. Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

Μονάδες 5

Αν $\kappa=3$

B2. Να εξετάσετε την $f(x)$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες 6

B3. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο $A(0, f(0))$ και να βρεθούν τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες x' και y' .

Μονάδες 7

B4. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) - 18f(0)}{\sqrt{x+2} - 2}$

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των λογαριασμών που διατηρούν σε κοινωνικά δίκτυα v σε πλήθος μαθητές ενός τμήματος ΕΠΑΛ της νησιωτικής Ελλάδας.

Αριθμός λογαριασμών σε κοινωνικά δίκτυα x_i	Αριθμός μαθητών v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
0	α		
1		β	
2			γ
3		δ	
4			ε
5			

- Γ1.** Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ v^2 - 40v + 401, & x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι το πλήθος των μαθητών της έρευνας μας είναι $v=20$.

Μονάδες 5

- Γ2. I.** Να δείξετε ότι $\alpha=2$, αν γνωρίζετε ότι: $\alpha = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3x - 9}$

Μονάδες 2

- II.** Να δείξετε ότι $\beta=12$, αν γνωρίζετε ότι: $\beta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

Μονάδες 2

- III.** Να δείξετε ότι $\gamma=10$, αν γνωρίζετε ότι: $\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-10\eta\mu^2 x}{\sin^2 x - 1}$

Μονάδες 2



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β' ΦΑΣΗ

Γ3. I. Να δείξετε ότι $\delta=15$, αν γνωρίζετε ότι: $\delta = \lim_{x \rightarrow 0} 15 \frac{\varepsilon \varphi x}{\eta \mu x}$

Μονάδες 3

II. Να δείξετε ότι $\varepsilon=5$, αν γνωρίζετε ότι: $\varepsilon = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

Μονάδες 3

Γ4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός λογαριασμών σε κοινωνικά δίκτυα x_i	Αριθμός μαθητών v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
0	$\alpha=v_1=2$	N_1	f_1
1	v_2	$\beta=N_2=12$	f_2
2	v_3	N_3	$\gamma=f_3=10$
3	v_4	$\delta=N_4=15$	f_4
4	v_5	N_5	$\varepsilon=f_5=5$
5	v_6	$v=20$	f_6
Σύνολο	$v=20$		

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Μια σκάλα AB με μήκος 3m είναι στερεωμένη όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Το πάνω άκρο γλιστρά με ταχύτητα $\sqrt{5}\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το A απέχει 2m, από το σημείο O.

Δ1. Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το y τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 4



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β' ΦΑΣΗ

- Δ3. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το Α τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 5

- Δ4. I. Να εκφράσετε το εμβαδόν E ως συνάρτηση του x .

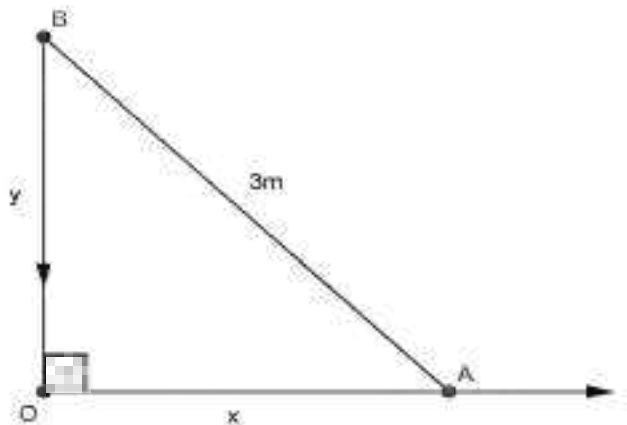
Μονάδες 4

- II. Να μελετήσετε την $E(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

- III. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $E\left(\eta\mu\frac{\pi}{18}\right)$ και $E\left(\eta\mu\frac{\pi}{5}\right)$

Μονάδες 3





ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Β' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ;

Μονάδες 5

A2. Τι ονομάζουμε δείγμα στη Στατιστική;

Μονάδες 5

A3. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$ είναι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν πιστεύετε πως η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ**, αν πιστεύετε πως η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ισούται με την επιτάχυνσή του την ίδια χρονική στιγμή.

β) Το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ με τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 100.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Β' ΦΑΣΗ

- γ) Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A τότε ορίζεται το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$ με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$
- δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $x_0 \in A_f$ αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 4

- A5. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α στο στοιχείο της στήλης Β που αντιστοιχεί.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Ραβδόγραμμα συχνοτήτων	1. Μικρό πλήθος παρατηρήσεων
β. Διάγραμμα συχνοτήτων	2. Ποσοτικές μεταβλητές
γ. Κυκλικό διάγραμμα	3. Ποιοτικές μεταβλητές
δ. Σημειόγραμμα	4. Διαχρονική εξέλιξη
ε. Χρονόγραμμα	5. Ποσοτικές και ποιοτικές μεταβλητές

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται οι χρόνοι λειτουργίας (σε μήνες) μπαταριών 50 αυτοκινήτων.

κλάσεις	x_i	v_i	N_i	f_i	$Fi\%$
[20 ,)		8			
[,)					34
[,)			32		
[,)				0,2	
[40 ,)		5			
[,)					
ΣΥΝΟΛΟ		50			



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Β' ΦΑΣΗ

B1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με 5.

Μονάδες 5

B2. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε το ποσοστό των μπαταριών που έχουν λειτουργήσει τουλάχιστον 40 μήνες.

Μονάδες 3

B4. Να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων %.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - \beta$, $x \in \mathbf{R}$

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$ έχει εξίσωση $y = -3x + 14$. Να δείξετε ότι $\alpha = 9$ και $\beta = -6$.

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Γ3. Να συγκρίνετε τις τιμές :

i) $f(1821)$ με $f(2021)$

ii) $f(1,821)$ με $f(2,021)$

Μονάδες 4



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Β' ΦΑΣΗ

Γ4. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f .

Μονάδες 5

Γ5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f''(x)}{4 - \sqrt{x^2 + 4x + 4}}, & x \in (-\infty, -6) \cup (-6, 2) \cup (2, +\infty) \\ -6, & x = 2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε τη συνάρτηση g ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta}, x \in \mathbf{R}, \beta \neq 0$ και

$$g(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)}, x \in (0, +\infty)$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x + 7$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε για ποια $x \in \mathbf{R}$ η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

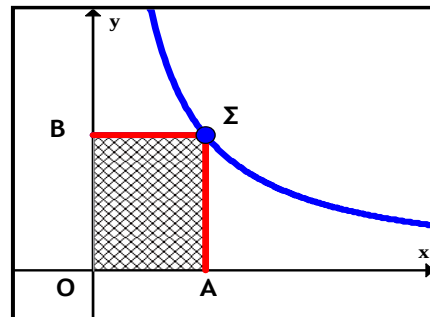


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Β' ΦΑΣΗ

Δ4. Να βρείτε τη συνάρτηση $(f+g)(x)$. (όταν $x>0$)

Μονάδες 3

Δ5. Αν $(f+g)(x) = \frac{2}{x}$, $x>0$, θεωρούμε σημείο $\Sigma(x, (f+g)(x))$ πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f+g$ και έστω το ορθογώνιο $ΟΑΣΒ$, όπου A και B οι προβολές του σημείου Σ στον άξονα $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $ΟΑΣΒ$ δίνεται από τον τύπο : $\Pi(x) = 2x + \frac{4}{x}$



Μονάδες 4

Δ6. Να δείξετε ότι η $\Pi(x) \geq 4\sqrt{2}$.

Μονάδες 5



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 27 Απριλίου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται καμπύλη συχνότητων;

Μονάδες 5

A2. Να αποδείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω από 10%, τότε το δείγμα είναι ομοιογενές.
- β)** Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι πραγματικός αριθμός.
- γ)** Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.
- δ)** Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η ημιδιαφορά των 2 μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος.
- ε)** Ισχύει ότι: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Β' ΦΑΣΗ

- A4. (I)** Να αντιστοιχίσετε τα μέτρα θέσης – διασποράς της Α στήλης με τους αντίστοιχους τύπους της στήλης Β (ένας τύπος της στήλης Β θα μείνει χωρίς αντιστοίχιση)

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Μέση τιμή	1. $\sqrt{s^2}$
β. Διακύμανση	2. $\frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^v t_i$
γ. Τυπική απόκλιση	3. $\frac{s}{ \bar{x} } \cdot 100\%$
δ. Συντελεστής μεταβλητότητας	4. $\frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^k w_i}$
	5. $\frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$

Μονάδες 4

- (II)** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ $A_f = \dots\dots\dots$

β) $f(x) = \sqrt{2x}$ $A_f = \dots\dots\dots$

γ) $f(x) = \sin x$ $A_f = \dots\dots\dots$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παρατηρήσεις:

$$\frac{\alpha}{3} + 4, \alpha + 3, 5\alpha - 5, 13 - 2\alpha, 7, \alpha + 2, 6 - \alpha, 5 \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$.

- B1.** Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β' ΦΑΣΗ

B2. Να βρείτε την διάμεσο και το εύρος της κατανομής.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας. Είναι το δείγμα ομοιογενές;
(Δίνεται: $\sqrt{3,75} \approx 1,93$)

Μονάδες 7

B4. Αν όλες οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 30% και στη συνέχεια μειωθεί η κάθε μια κατά 2 μονάδες, τότε να βρείτε τη μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση του νέου δείγματος. Να συγκρίνετε τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\kappa x^2 - 2x - 8}{2 - \sqrt{x}}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το $A = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι $\kappa = 1$, αν γνωρίζετε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{9}{2}$.

Μονάδες 6

Για $\kappa = 1$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [0, 4) \cup (4, +\infty) \\ -\frac{6}{25} \cdot \alpha & , x = 4 \end{cases}$

Δίνεται, επίσης, μια κατανομή περίπου κανονική, με διάμεσο ίση με 10 και τον αριθμό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον 12 να είναι ίσος με 640 από τις 4000 συνολικά. Ο πραγματικός αριθμός α ισούται με τον αριθμό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή το πολύ 6 (από την κανονική κατανομή). Να εξετάσετε την συνάρτηση g ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 4$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - \frac{1}{3}$, $x \in (-2, 4)$.

Δ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ2. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	Κέντρο x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i v_i$
[,)					0,05	
[,)				0,25		
[,)	3		10			
[,)		6				
[,)						
Σύνολα						

Για τον οποίο γνωρίζουμε ότι :

- Το πλάτος των κλάσεων ισούται με το ακρότατο της f
- Η συχνότητα της 1^{ης} κλάσης με την θέση ακρότατου της f .

Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 3,7$.

Μονάδες 7

Δ3. Από όλα τα σημεία του επιπέδου της μορφής $A(x, 2)$ ποιο είναι εκείνο που απέχει από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη απόσταση ; Στη συνέχεια να βρείτε την απόσταση αυτή .

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση: $h(x) = -f'(x) - 2 \cdot d'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 4}$, $x \in (-2, 4)$, όπου $d'(x)$ ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του σημείου A του προηγούμενου ερωτήματος από την αρχή των αξόνων. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $h(x)$ που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 9$.

Μονάδες 6



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Β' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

A2. Τι ονομάζουμε διάμεσο ενός δείγματος n παρατηρήσεων .

Μονάδες 3

A3. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε αυτή δίπλα από τον κάθε αριθμό.

1. Αν $h(x) = f(g(x))$ με $g(3) = 6, g'(3) = 4$ και $f'(6) = 7$ τότε ο αριθμός $h'(3)$ είναι ίσος με :

(α) 82	(β) 24	(γ) 28	(δ) 42
--------	--------	--------	--------

2. Εάν οι συντελεστές μεταβολής δύο συνόλων Α και Β είναι 15% και 20% αντιστοίχως ,τότε :

(α) τα δεδομένα Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια από τα Β
(β) τα δεδομένα Α παρουσιάζουν μικρότερη ομοιογένεια από τα Β
(γ) τα δεδομένα Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη διασπορά από τα Β
(δ) τα δεδομένα Α παρουσιάζουν μικρότερη διασπορά από τα Β

Μονάδες 6



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Β' ΦΑΣΗ

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων που αφορούν μια μεταβλητή X είναι μέτρο θέσης .

(β) Για το πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g με $g(x) \neq 0$

$$\text{ισχύει ότι } \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g'(x)f(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

(γ) Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

(δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για ποσοτικές μεταβλητές αρκεί η δυνατές τιμές τους να είναι σχετικά λίγες.

(ε) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x_1) \geq f(x)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3x - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$, a ένας πραγματικός αριθμός της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο της $A(2, f(2))$ είναι ίσος με -1

B1. Να αποδείξετε ότι $a = 2$

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-2}$

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε τις εξισώσεις εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 3x + 5$

Μονάδες 6

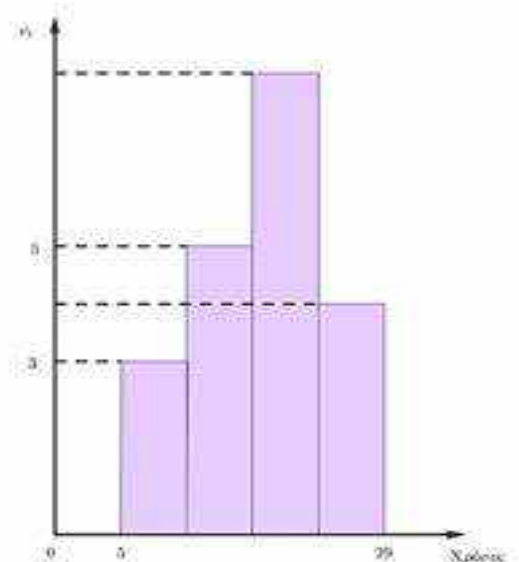
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Β' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάζονται οι μαθητές μια τάξης της Γ- Λυκείου για να πάνε στο σχολείο έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Αν γνωρίζετε ότι το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 3^η κλάση είναι διπλάσιο από το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 4^η κλάση και ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων είναι 20, τότε:



- Γ1. Να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c = 6$, και οι συχνότητες της 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα είναι $v_3 = 8$ και $v_4 = 4$.

Μονάδες 8

- Γ2. Να μεταφέρετε συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$f_i \%$
[... , ...)				
[... , ...)				
[... , ...)				
[... , ...)				
Σύνολο				

Μονάδες 5

- Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται
 α) τουλάχιστον 11 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο
 β) το πολύ 17 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο

Μονάδες 4



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Β' ΦΑΣΗ

- Γ4.** Να βρείτε τη μέση τιμή του χρόνου που χρειάζονται οι μαθητές για να φτάσουν στο σχολείο.

Μονάδες 3

- Γ5.** Το 40% των μαθητών που χρειάζονται τον περισσότερο χρόνο για να φτάσουν στο σχολείο χρησιμοποιούν κάποιο μεταφορικό μέσο. Να βρείτε από πόσα λεπτά και πάνω πρέπει να κάνει ένας μαθητής ώστε να έρθει στο σχολείο χρησιμοποιώντας κάποιο μεταφορικό μέσο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει x μονάδες ενός προϊόντος. Το κόστος κατασκευής x μονάδων προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση $K(x) = x^2 - 30x + 100$ (σε €). Την κάθε μονάδα προϊόντος την πουλάει 50€.

- Δ1. (i)** Ποια είναι η συνάρτηση των εσόδων από την πώληση x μονάδων προϊόντος;

Μονάδες 3

- (ii)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους δίνεται από την συνάρτηση:
 $P(x) = -x^2 + 80x - 100$ (σε €).

Μονάδες 5

- Δ2.** Να δείξετε ότι το κέρδος γίνεται μέγιστο για $x = 40$ μονάδες προϊόντος και να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος.

Μονάδες 6

- Δ3. (i)** Η εταιρεία κατασκευάζει συρτάρια και συγκεκριμένα 4000 συρτάρια ημερησίως που το μήκος τους ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή. Το 50% των συρταριών έχουν μήκος μικρότερο από 40cm και 100 συρτάρια έχουν μήκος πάνω από 50 cm Να δείξετε ότι $\bar{x} = 40$ cm και $s = 5$ cm.

Μονάδες 5

- (ii)** Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Μονάδες 2

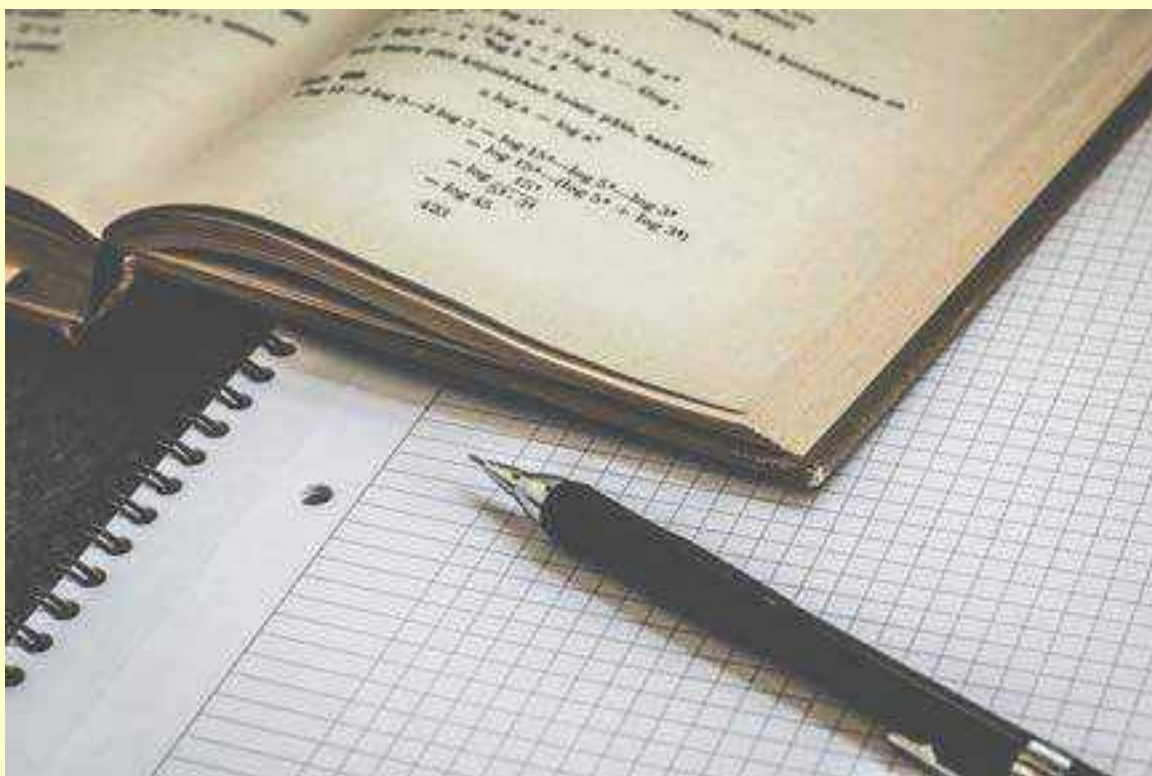
- (iii)** Ένα συρτάρι θεωρείτε ελαττωματικό αν έχει μήκος μικρότερο από 25cm ή μεγαλύτερο από 55 εκατοστά. Να βρείτε το πλήθος των ελαττωματικών συρταριών που παράγει η μηχανή κάθε μέρα.

Μονάδες 4

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ Γ' ΦΑΣΗ

6



2018-19-20-21-22-2023

ΕΦΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ



2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c πραγματική σταθερά, να αποδείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 10

- A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 5

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μία κανονική κατανομή, στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.

β) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.



2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποιοτικής μεταβλητής.
- δ) Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.
- ε) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός λογοτεχνικών βιβλίων που διάβασαν 50 μαθητές κατά τη διάρκεια των διακοπών

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$x_i \cdot v_i$
0				
1	12		18	
2				
3		40		
4	2			
Σύνολο				

B1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Μονάδες 6

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 6



2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B3. Να βρεθεί η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 6

B4. Να εξετάσετε εάν είναι ομοιογενές το παραπάνω δείγμα.

Μονάδες 3

B5. Να βρεθεί το ποσοστό παιδιών που διάβασε τουλάχιστον 2 λογοτεχνικά βιβλία.

Μονάδες 4

Δίνεται $\sqrt{1,28} \approx 1,13$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + ax^2 + kx + 2018$.

Γ1. Να υπολογίσετε το $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 7

Γ2. Για $\alpha=2$ και γνωρίζοντας ότι $f'(-1)=0$, να βρείτε το κ .

Μονάδες 4

Γ3. Για $\alpha=2$, $\kappa=1$ να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $K(1, f(1))$.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\alpha=2$, $\kappa=1$ να υπολογίσετε το $A = 4f'(2) - 8f'(-1) + f(0)$.

Μονάδες 6



2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΘΕΜΑ Δ

Ένα τουριστικό γραφείο εκτιμά ότι ο αριθμός των τουριστών N (N σε χιλιάδες) που επισκέπτονται ένα ελληνικό νησί μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$N(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t + 30, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των τουριστών.

Μονάδες 6

Δ2. Ποιά χρονική στιγμή ο αριθμός των τουριστών γίνεται ελάχιστος;

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι $N(t) \geq 20$.

Μονάδες 5

Δ4. Ποιά χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των τουριστών γίνεται ελάχιστος;

Μονάδες 6



2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 4 Μαΐου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

- A2.** Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 3

- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι πάντα μία από τις παρατηρήσεις αυτές.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.



2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- ii) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $u(t_0) = f'(t_0)$.
- iii) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- iv) Σε μια κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.
- v) Η διακύμανση είναι ένα μέτρο διασποράς που εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2\sqrt{x+5}-4}$.

Μονάδες 6

B2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

B3. Για $\alpha = 2$, να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{-3x^2 + 8x + 3}{(x^2 + 1)^2}$.

Μονάδες 8

B4. Για $\alpha = 2$, να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

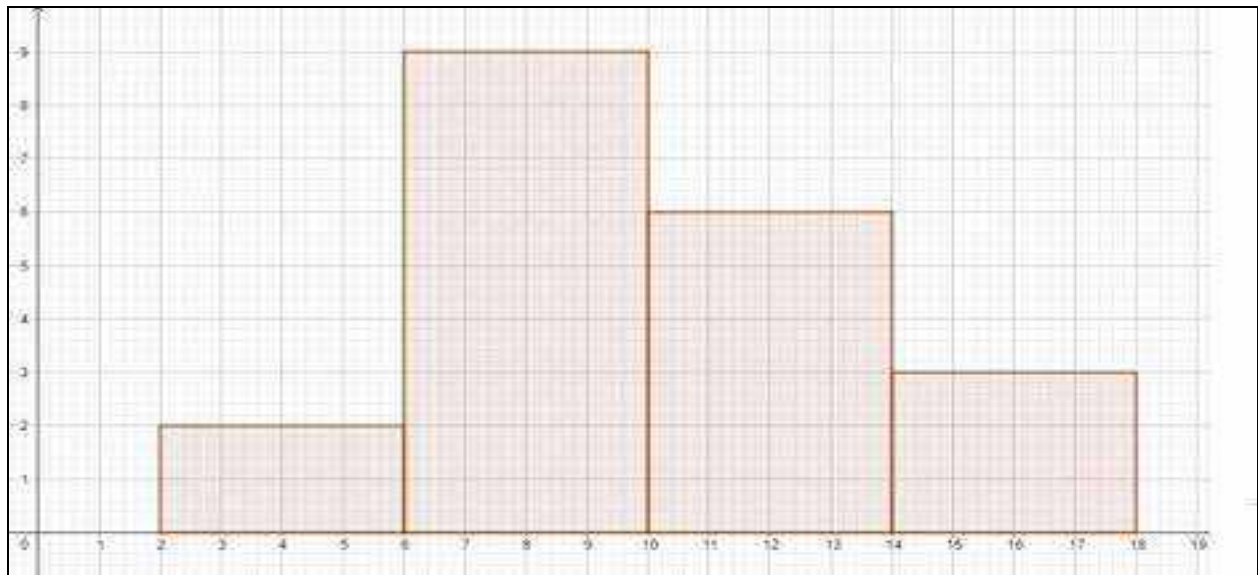
Μονάδες 6



ΘΕΜΑ Γ

Οι θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν σε κάποιες Ευρωπαϊκές πρωτεύουσες, δίνονται από το παρακάτω ιστογράμμο συχνοτήτων.

V_i



θερμοκρασία

Γ1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τη βοήθεια του παραπάνω ιστογράμματος συχνοτήτων.

Κλάσεις	Κεντρική τιμή κ_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[2, 6)					
[6, 10)					
[10, 14)					
[14, 18)					
Σύνολο					

Μονάδες 6



2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία.

Μονάδες 4

Γ3. Ποιό το ποσοστό πόλεων με θερμοκρασία τουλάχιστον 12;

Μονάδες 4

Γ4. Να εξετάσετε εάν είναι ομοιογενές το παραπάνω δείγμα.

Μονάδες 7

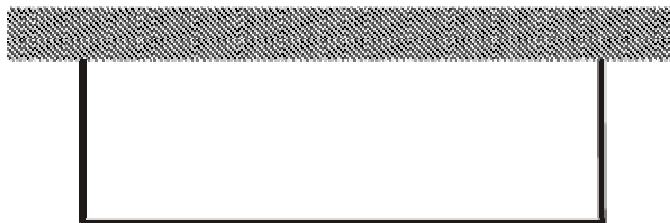
Γ5. Να βρεθεί ο μικρότερος αριθμός c που πρέπει να προστεθεί, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

Μονάδες 4

Δίνεται $\sqrt{12} \approx 3,5$.

ΘΕΜΑ Δ

Θέλουμε να περιφράξουμε μία ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της με συρματοπλέγμα μήκους 40 m, ενώ η τέταρτη πλευρά του ορθογωνίου θα είναι τοίχος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x .



Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που θα περιφραχθεί δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 20x$.

Μονάδες 6



2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- Δ2.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του της ορθογώνιας περιοχής.
Μονάδες 3
- Δ3.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που μπορούμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 40 m, καθώς και τις διαστάσεις της περιφραγμένης αυτής περιοχής.
Μονάδες 8
- Δ4.** Δίνονται οι αριθμοί $f(20), f(29), f(30), f(31), f(40)$. Να βρείτε τη διάμεσο δ και το εύρος R των παραπάνω αριθμών.
Μονάδες 8



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

(Μονάδες 8)

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 3)

A3. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποιοτικές και ποιες ποσοτικές;

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

ii) Αν $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ είναι οι συχνότητες που αντιστοιχούν στις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας μεταβλητής X , και $N_1, N_2, \dots, N_k$ οι αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες, τότε ισχύει $\nu_i = N_i - N_{i-1}$ για κάθε $i = 1, \dots, k$.

iii) Ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x > 0$.



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

iv) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

v) Αν μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάσαμε ένα δείγμα οικογενειών μιας περιοχής, ως προς τον αριθμό των παιδιών που έχει η καθεμία οπότε προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
0	κ			
1		0,30		
2			60	
3				95
4				
ΣΥΝΟΛΟ	10κ			

όπου, x_i ο αριθμός των παιδιών, v_i η συχνότητα, f_i η σχετική συχνότητα, N_i η αθροιστική συχνότητα και $F_i\%$ η αθροιστική σχετική συχνότητα %.

$$\text{Αν } \kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} :$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 8$.

(Μονάδες 8)

B2. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

(Μονάδες 8)

B3. Με τη βοήθεια του πίνακα να βρεθούν:

α) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2 παιδιά.

β) Πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 1 παιδί.

γ) Το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ 3 παιδιά.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - 2}$, για $x \neq 2$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3,2)$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας xOy , τότε:

Γ1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \frac{-2\alpha - \beta}{(x - 2)^2}$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -7$.

(Μονάδες 7)

Γ3. Αν επιπλέον, οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $A(3,2)$ και $B(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλες, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο B .

(Μονάδες 7)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)(x^3 - 8))$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ Δ

Ένας αγρότης αγόρασε συρματοπλέγμα μήκους 200m προκειμένου να περιφράξει ένα κομμάτι της έκτασής του ώστε να δημιουργήσει κήπο με λαχανικά, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η σχέση που δίνει το εμβαδό του κήπου θα είναι η $E(x) = 100x - x^2$, όπου x η μια πλευρά του.

(Μονάδες 8)

Δ2. Να βρείτε πότε το εμβαδό του κήπου γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

(Μονάδες 5)

Δ4. Αν για κάθε τετραγωνικό μέτρο, το κόστος της καλλιέργειας είναι 6€, να βρείτε πόσο θα στοιχίσει τελικά ο κήπος στον αγρότη.

(Μονάδες 5)



2021 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Μ. Δευτέρα 26 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$
(Μονάδες 6)
- A2.** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(Μονάδες 5)
- A3.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n .
1) Τι ονομάζεται συχνότητα n_i της τιμής x_i ;
2) Με τί είναι ίσος ο λόγος $\frac{n_i}{n}$;
(Μονάδες 8)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_2) > f(x_1)$.
2) Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i των τιμών x_i μιας μεταβλητής είναι ίσο με 100.



2021 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- 3) Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

Ρωτήσαμε τους 200 μαθητές που έλαβαν μέρος σ' ένα διαδικτυακό διαγωνισμό μιας μαθηματικής εταιρείας πόσα θέματα έλυσαν σωστά και οι απαντήσεις που λάβαμε ήταν σε 1, 2, 3, 4, 5 και 6. Το ποσοστό % που αντιστοιχεί σε κάθε απάντηση, προκύπτει από την σχέση:

$$f_1\% = \frac{1}{8} \quad f_2\% = \frac{1}{4} \quad f_3\% = \frac{1}{2} \quad f_5\% = \kappa,$$

ενώ επιπλέον ισχύουν: $v_1 = v_6$ και $v_3 = v_4$

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 5$.

(Μονάδες 6)

- B2.** Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής v_i , N_i , $f_i\%$, $F_i\%$.

(Μονάδες 8)

- B3.** Με τη βοήθεια του πίνακα να βρείτε:

- α)** Πόσοι μαθητές έλυσαν σωστά το πολύ 4 θέματα;
β) Ποιο ποσοστό μαθητών έλυσε σωστά τουλάχιστον 3 θέματα;

(Μονάδες 6)

- B4.** Αν η εταιρία βράβευσε το 15% των καλύτερων μαθητών του διαγωνισμού, πόσα θέματα θα πρέπει να έχει επιλύσει κάποιος σωστά για να βραβευτεί;

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Γ1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = 1$.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2021)$ και $f(2022)$.

(Μονάδες 4)

Γ4. Έστω επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x+5} - 2$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

(Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2, f(2))$ είναι $\varepsilon: y = -2x + 6$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να δείξετε ότι τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ είναι τα $A(0, 6)$ και $B(3, 0)$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)



2021 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Δ3. Έστω σημείο M της εφαπτομένης. Από το M φέρνω κάθετές προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ που τους τέμνουν στα σημεία A' και B' αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων MAA' και MBB' που σχηματίζονται μεταξύ καθέτων, αξόνων και εφαπτομένης ε , δίνεται από τον τύπο $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x το άθροισμα των δύο αυτών εμβαδών γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 6)



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να δώσετε τον ορισμό της παραγωγίσιμης συνάρτησης στο x_0 .
(Μονάδες 5)
- A2.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$, είναι ίση με $2x$,
δηλαδή $(x^2)' = 2x$.
(Μονάδες 6)
- A3.** Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται συνεχής; Να δώσετε ένα παράδειγμα
συνεχούς μεταβλητής.
(Μονάδες 4)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη Σωστό ή
Λάθος δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση:
- 1) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει
 $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα
στο Δ .
 - 2) Η παράγωγος της $f(x) = \eta\mu x$ είναι η $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.
 - 3) Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι πάντα μία από αυτές τις
παρατηρήσεις.
 - 4) Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i των τιμών x_i μιας μεταβλητής
είναι ίσο με 100.
 - 5) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και $x_1 \in A$. Αν $f(x) \geq f(x_1)$, για
κάθε x σε μια περιοχή του x_1 , τότε το $f(x_1)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

B1. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τον οριζόντιο και με τον κάθετο άξονα συντεταγμένων.

(Μονάδες 7)

B2. Να δείξετε ότι πρώτη παράγωγος της f είναι $f'(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)^{-\frac{1}{2}}$.

(Μονάδες 5)

B3. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y' και να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x' είναι αμβλεία.

(Μονάδες 6)

B4. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x}, & x \neq 0 \\ \sqrt{3}\alpha, & x = 0 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα σχετικά με έρευνα που έγινε για το πόσες ώρες περνούν οι μαθητές της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ το μήνα στο διαδίκτυο.

ΚΛΑΣΕΙΣ	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ (x_i)	v_i	N_i	f_i	F_i
[..., ...)		15			
[..., 45)		25			
[..., ...)		40			
[..., ...)	60	20			
	ΣΥΝΟΛΟ				



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 25$ και $\epsilon' = 10$, όπου α το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης και ϵ' το πλάτος των κλάσεων.
(Μονάδες 6)
- Γ2.** Να συμπληρώσετε ολόκληρο τον παραπάνω πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
(Μονάδες 8)
- Γ3.** Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i .
(Μονάδες 4)
- Γ4.** **α)** Πόσοι μαθητές περνούν τουλάχιστον 35 ώρες το μήνα στο διαδίκτυο;
(Μονάδες 2)
- β)** Με τι θα ισούται το εμβαδό της στήλης του ιστογράμματος συχνοτήτων (ν) που αντιστοιχεί στη δεύτερη κλάση;
(Μονάδες 2)
- γ)** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που περνούν κάτω από 50 ώρες στο διαδίκτυο μηνιαίως;
(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 15$.

- Δ1.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: y = -3x + 2$.
(Μονάδες 6)



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- Δ2.** Δίνονται επιπλέον οι βαθμολογίες σε 7 διαγωνίσματα που έγραψαν δύο μαθητές της Γ' τάξης στο δεύτερο τετράμηνο:

A:	18,	13,	14,	16,	α ,	12,	15
B:	15,	16,	17,	16,	15,	β ,	13

όπου α , β η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 17$ και $\beta = 13$.

(Μονάδες 6)

- Δ3.** Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο σε καθεμία από τις δύο βαθμολογίες.

(Μονάδες 6)

- Δ4.** Ποια από τις δύο βαθμολογίες παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια;

(Μονάδες 7)



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Μ. Δευτέρα 10 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

(Μονάδες 7)

A2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στη τιμή $x_i, i = 1, 2, \dots, k$;

(Μονάδες 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i = 1, 2, \dots, k$;

(Μονάδες 3)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

β. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 95% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

γ. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n .

(Μονάδες 6)



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \dots$$

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι ίσο με $l \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \dots$$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 3}$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

B2. Αν το σημείο $A(4, 7)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f να βρείτε την τιμή του a .

(Μονάδες 5)

B3. Για $a = -9$, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

B4. Για $a = -9$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

(Μονάδες 5)

B5. Για $a = -9$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, 7)$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ Γ

Μια αλυσίδα καταστημάτων με είδη ένδυσης διαθέτει 20 υποκαταστήματα σε όλη την Ελλάδα. Στον παρακάτω πίνακα απεικονίζεται ο αριθμός των υπαλλήλων που εργάζεται σε κάθε υποκατάστημα:

ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ x_i	ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ v_i	N_i	$f_i \%$
25	2		
30	6		
35	10		
40	2		
ΣΥΝΟΛΟ			

- Γ1.** Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα. (Μονάδες 6)
- Γ2.** Να υπολογίσετε:
- α. Πόσα υποκαταστήματα έχουν το πολύ 30 υπαλλήλους. (Μονάδες 3)
- β. Τι ποσοστό των υποκαταστημάτων έχει τουλάχιστον 30 υπαλλήλους. (Μονάδες 3)
- Γ3.** Να δείξετε ότι ο μέσος αριθμός των υπαλλήλων που εργάζονται συνολικά στην αλυσίδα είναι 33 υπάλληλοι. (Μονάδες 5)
- Γ4.** Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση είναι ίση με 4. (Μονάδες 5)
- Γ5.** Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό των υπαλλήλων που θα πρέπει να προσληφθούν σε κάθε υποκατάστημα ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές. (Μονάδες 3)



ΘΕΜΑ Δ

Μια επιχείρηση κατασκευάζει ημερησίως ηλεκτρικές συσκευές επαγγελματικής χρήσεως με έσοδα $E = 2x + 400$ ευρώ για την πώληση μιας συσκευής.

Το κόστος για την κατασκευή x συσκευών είναι $K(x) = 3x^2 + 200x + 150$ ευρώ,

$$0 \leq x \leq 200.$$

Δ1. Να υπολογίσετε:

α. Το αρχικό κόστος της επιχείρησης πριν την πώληση κάποιας συσκευής.

(Μονάδες 3)

β. Το συνολικό κόστος για την πώληση 5 συσκευών.

(Μονάδες 3)

Δ2. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που δίνει το κέρδος της επιχείρησης για την κατασκευή-πώληση x συσκευών δίνεται από τον τύπο:

$$P(x) = -x^2 + 200x - 150, 0 \leq x \leq 200.$$

(Μονάδες 6)

Δ3. Να βρείτε:

α. Πόσες συσκευές θα πρέπει να κατασκευάσει η επιχείρηση ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος από την πώληση του;

(Μονάδες 6)

β. Ποιο θα είναι το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης;

(Μονάδες 3)

Δ4. Είναι για την επιχείρηση πιο συμφέρουσα η κατασκευή-πώληση 120 ή 150 συσκευών;

(Μονάδες 4)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

2024

ΕΦΟΡΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

15

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τα ακρότατα.

Μονάδες 6

A2. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

β. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες $2 \times 3 = 6$

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = \dots$

2. $(\eta \mu x)' = \dots$

3. Αν f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $x \in \mathbb{R}$ τότε $(c \cdot f(x))' = \dots$

Μονάδες $3 \times 2 = 6$

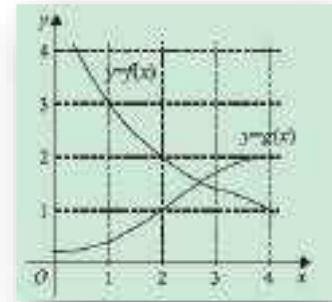
A5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις

δύο συναρτήσεων f και g .

Το άθροισμα $f(2) + g(2)$ είναι:

A. 5 B. 4 Γ. 3 Δ. 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση



Μονάδες 3

Θ Ε Μ Α Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων ενός οργανισμού.

Χρόνια υπη- ρεσίας	$F_i \%$	$f_i \%$	v_i	N_i
$[0, 5)$	10			
$[5, 10)$	24			
$[10, 15)$	40			
$[15, 20)$	50			
$[20, 25)$	80			
$[25, 30)$	100			
Σύνολο	-			-

- B1.** Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 50.
- B2.** Να βρείτε το πλήθος των υπαλλήλων που έχουν συνολικό χρόνο τουλάχιστον 10 χρόνια.
- B3.** Να βρείτε τη γωνία του αντίστοιχου κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί σε χρόνο υπηρεσίας από 15-20 χρόνια.
- B4.** Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που θα συνταξιοδοτηθούν την επόμενη δεκαετία (η συνταξιοδότηση γίνεται με τη συμπλήρωση 35ετίας).

Μονάδες $(10+5+5+5)=25$

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Γ1.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$

Μονάδες $(9+8+8)=25$

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - \kappa x^2 + 4, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν $f'(-1) = -3f'(1)$, τότε:

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.
- Δ2.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της.
- Δ3.** Να βρείτε το όριο $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h}$
και την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $(3, f(3))$.
- Δ4.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , έχει την ελάχιστη τιμή.

Μονάδες $[6+7+(3+3)+6]=25$

2

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 7

A2. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα ενός δείγματος n παρατηρήσεων;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- β. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f'(t_0)$.
- γ. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής χρησιμοποιούνται μόνο στην περίπτωση των ποιοτικών μεταβλητών.

Μονάδες $2 \times 3 = 6$

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots$

2. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

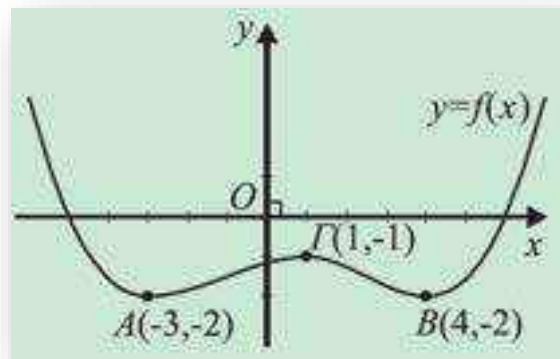
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dots$

Μονάδες $3 \times 2 = 6$

A5. Η ευθεία $y = \kappa$ θέλουμε να τέμνει τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία.

Τότε πρέπει:

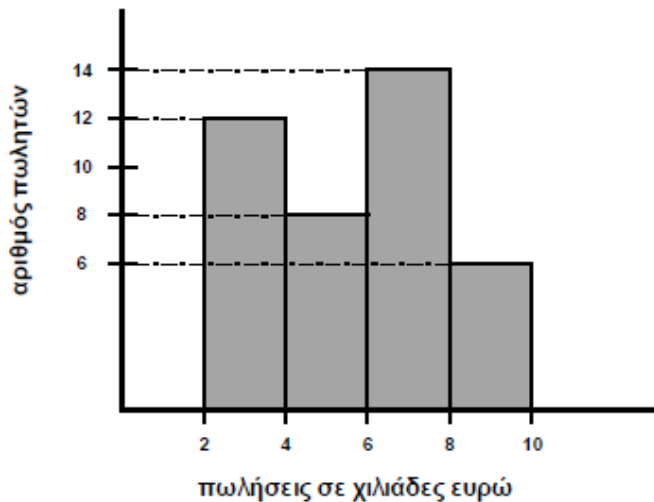
- A.** $\kappa > -1$
- B.** $\kappa = -1$
- Γ.** $\kappa < -2$
- Δ.** $-2 < \kappa < -1$



Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



- B1.** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.
- B2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες f_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[\cdot , \cdot)$			
$[\cdot , \cdot)$			
$[\cdot , \cdot)$			
$[\cdot , \cdot)$			
Σύνολο			

- B3.** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες $(7+10+8)=25$

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x}.$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ2. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[(\sqrt{x+5} - 2) f(x) \right].$$

Γ3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4}.$$

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, & x \in (1, +\infty) \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}.$$

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες $(4+7+7+7)=25$

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \alpha^2 - 4\alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

Δ2. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι 3-πλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

Δ3. Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος

Μονάδες $(10+8+7)=25$

Θ Ε Μ Α Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή

$$f'(x) = (c)' = 0$$

Μονάδες 7

- A2.** Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i , που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) > f(x_2).$$

- β.** Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = n\ell^{n-1}$$

- γ.** Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X , τότε ισχύει: $0 \leq f_i \leq 1$.

- δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων.
- ε. Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

A4. Αν $h(x) = f(g(x))$ και $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ και $f'(6) = 7$ να βρείτε τον αριθμό $h'(3)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το χρόνο αναμονής (σε λεπτά) των πελατών μιας εταιρείας, μια συγκεκριμένη ημέρα, μέχρι την εξυπηρέτησή τους, ομαδοποιημένο σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Η συχνότητα της 2^{ης} κλάσης είναι διπλάσια της συχνότητας της 1^{ης} κλάσης.

	x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i \%$	F_i	$F_i \%$
[,)							
[, 4)							
[,)		10		0,2			
[,)		6					
[, 10)		4					
	Σύνολο						

B1. Να δείξετε ότι το πλάτος της κάθε κλάσης είναι $c=2$

B2. Να δείξετε ότι την συγκεκριμένη ημέρα προσήλθαν προς εξυπηρέτηση, συνολικά $v=50$ πελάτες και ότι 10 από αυτούς περίμεναν λιγότερο από 2 λεπτά!

B3. Να συμπληρώσετε όλες τις στήλες του πίνακα

B4. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων

B5. i. Να βρείτε το ποσοστό των πελατών που περίμεναν τουλάχιστον 6 λεπτά

ii. Να βρείτε το πλήθος των πελατών που περίμεναν από 2 έως 8 λεπτά

$$\text{Μονάδες } [4+5+5+5+(3+3)]=25$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$, $x > -1$

- Γ1. i.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) + f(y) = 9$, όπου $x, y > -1$
- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f , στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ και να δείξετε ότι η (ε) δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τη C_f
- Γ3.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1^-} [f(x) \cdot (2x^3 + x^2 + 1)]$

Μονάδες [(5+5)+8+7]=25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + a}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(4, 4)$

- Δ1. i.** Να δείξετε ότι $a = -1$
- ii.** Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x-4}{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$
- Δ2. i.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- ii.** Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2)$, $f(3)$ και να αποδείξετε ότι $1 + 2\sqrt{3} > 3\sqrt{2}$
- Δ3.** Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(9+h) - 9}{h}$
- Δ4.** Να δείξετε ότι το $A(4, 4)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με τη διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων.
- Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f , στο σημείο $A(4, 4)$.
- Έστω ότι η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B .
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OBA , όπου O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες [(2+3)+(3+3)+5+9]=25

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πως ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f και πως η δεύτερη παράγωγός της;

Μονάδες 5

A2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων.

β. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο πραγματικό αριθμό, δηλαδή αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{όπου } \ell \text{ πραγματικός αριθμός τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v = \ell_1^v \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

γ. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

ε. Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατώτερου και του ανώτερου ορίου της κλάσης.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$(c)' = \dots,$$

$$(x)' = \dots,$$

$$(x^p)' = \dots,$$

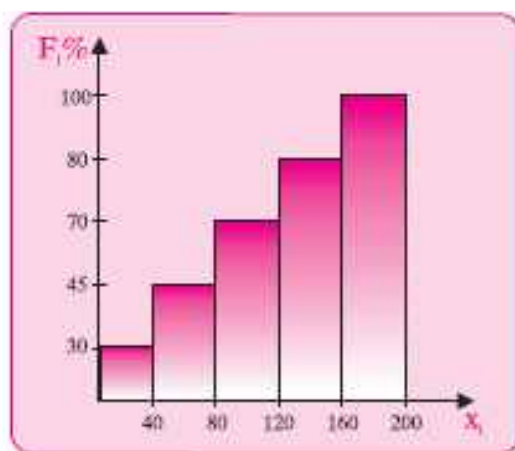
$$(\sqrt{x})' = \dots$$

$$(cf(x))' = \dots, \quad (f(x) + g(x))' = \dots,$$

Μονάδες 6

Θ Ε Μ Α Β

Στο διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %, παρουσιάζεται το ποσοστό των αυτοκινήτων, που βρίσκονται σε μια μάντρα μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, ανάλογα με τα χιλιόμετρα που δείχνει το κοντέρ τους.



B1. Να βρεθεί το πλήθος n των αυτοκινήτων που βρίσκονται στη μάντρα, αν το πλήθος των αυτοκινήτων, που το κοντέρ τους δείχνει 120-160 km, είναι 16.

B2. Να βρεθεί το πλήθος των αυτοκινήτων που το κοντέρ τους δείχνει πάνω από 100 km.

B3. Να γίνει το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

Μονάδες (11+5+9)=25

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Γ1.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ αυτής.
- Γ2.** Ποιο είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο δυνατό συντελεστή διεύθυνσης.
- Γ3.** Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο που η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x-2)^2(x+\alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι
- $$f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$
- Δ2.** Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.
- Δ3.** Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.
- Δ4.** Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$[f(0) - f(1)][f(5) - f(6)]$$

Μονάδες $(6+5+7+7)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Να ορίσετε το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων f, g που ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A .

Μονάδες 5

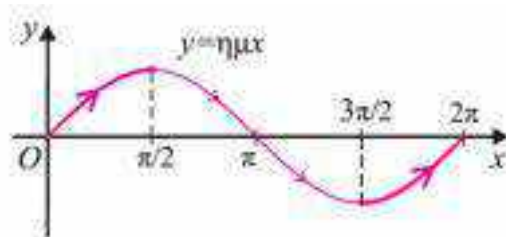
A2. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή που οι κλάδοι της βρίσκονται στο α' και γ' τεταρτημόριο.

β. Από την παρακάτω γραφική παράσταση της $y = \eta\mu x$ στο $[0, 2\pi]$



προκύπτει ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

γ. Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

- δ. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και ότι f_i , $i=1, 2, \dots, \kappa$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν a_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:

$$a_i = 360f_i, \quad \text{για } i=1, 2, \dots, \kappa.$$

- ε. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i .

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$(\eta\mu x)' = \dots\dots\dots,$$

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = \dots\dots\dots,$$

$$(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$$

Μονάδες 6

Θ Ε Μ Α Β

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n ως προς μία ποσοτική μεταβλητή X και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντ τιμές x_i	$f_i \%$	F_i	$F_i \%$
$[a, \dots)$				λ
$[\dots, \dots)$				$3\lambda + 10$
$[\dots, \dots)$				
$[\dots, \dots)$				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
$[\dots, \dots)$				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$
Σύνολο				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3\kappa = 0, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$.

B2. Να αποδείξετε ότι $f_1 = 10\%$, $f_2 = 30\%$, $f_3 = 20\%$, $f_4 = 30\%$ και $f_5 = 10\%$

B3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι $a = 10$ και $c = 4$

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

B4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

$$\text{Μονάδες } [8 + 5 + (4 + 4) + 4] = 25$$

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \eta \mu^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \alpha \neq \beta \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Γ3. Να δείξετε ότι: $[f'(x)]^2 + \frac{1}{4}[f''(x)]^2 = (\beta - \alpha)^2$

Γ4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \sqrt{3}$.

Μονάδες $(8+4+5+8)=25$

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^4 + \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον.6) και β (μον.2) αν

$$f(0) = 2021 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0.$$

Δ2. Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2021$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες $(8+12+5)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Πώς ορίζεται η τυπική απόκλιση s ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

A2. Πότε δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, ($g(x) \neq 0$) όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

β. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A , μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

δ. Το εύρος ή κύμανση (R) ενός δείγματος n παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης.

ε. Η διακύμανση ή διασπορά είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\sqrt{x})' = \dots$ **β.** $(f(g(x)))' = \dots$

Μονάδες $(3+3)=6$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να βρείτε την $f'(5)$.
- γ. Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Γ1. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο.
- Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) - 3}{x - 1}$.
- Γ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , όπου παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
- Γ4. Να βρείτε τον αριθμό α αν το τοπικό μέγιστο της f είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες $(5+5+7+8)=25$

Στις 10 το πρωί, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου ήταν:

Πόλη Α: 20 17 18 20 17 16 17 16 18 10

Πόλη Β: 18 22 20 17 16 16 15 17 12 16

α. Να βρείτε τη μέση και τη διάμεσο θερμοκρασία των πόλεων Α και Β, για το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου.

β. Ο Γιάννης υπολόγισε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β και βρήκε ότι είναι: $S_A = 2,66$ και $S_B = 2,59$ αντίστοιχα.

Να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας

(Δίνεται ότι: $\frac{2,59}{16,9} = 0,153$ και $\frac{2,66}{11,9} = 0,223$).

Μονάδες (9+6+10)=25

ΘΕΜΑ Α

A1. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

A2. Να ορίσετε το εύρος R (κύμανση) ενός συνόλου παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0=0$.
- β. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$., και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.
- γ. Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς.
- δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R , τότε ισχύει $s \approx 6R$.
- ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

A4. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικού αριθμούς, δηλαδή αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \quad \text{όπου} \quad \ell_1, \ell_2 \text{ πραγματικοί αριθμοί,}$$

να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \dots\dots\dots$

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = ,$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \dots\dots\dots$

Μονάδες (2+2+2)=6

Θ Ε Μ Α Β

31695

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5\frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,5)$. Να αποδείξετε ότι:

β. $\lambda = -5$.

γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -5x + 10$.

Μονάδες (9+7+9)=25

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x \cdot f'(x) + f(x)$ είναι σταθερή.

Γ2. Να υπολογιστεί η τιμή του k , αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$.

Γ3. Για $k = 3$ να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $B(1, f(1))$ της C_f .

Γ4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη του ερωτήματος Γ3 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες (5+4+5+7+4)=25

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:

10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10.

- α.** Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο της βαθμολογίας.
- β.** Να δείξετε ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι $\bar{x} = 12$.
- γ.** Να δείξετε ότι η διασπορά της βαθμολογίας είναι $s^2 = 18,8$ και να δείξετε ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι: $\sqrt{18,8} \simeq 4,3$.
- δ.** Ένας μαθητής της τάξης ισχυριζόμενος ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές, διατύπωσε την άποψη ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, θα προκύψει ένα δείγμα αριθμών (όχι βαθμών) που θα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(6+6+8+5)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}, x \in A.$$

Μονάδες 10

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .
- β.** Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι, τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$.
- γ.** Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.
- δ.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$
- ε.** Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Η κατανομή των ηλικιών των νέων κατασκηνοτών ενός κάμπινγκ της Αμοργού, είναι περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x} = 25$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,08$.

- α. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.
- β. Να βρεθεί το εύρος των ηλικιών της κατανομής.
- γ. Αν γνωρίζουμε ότι 200 είναι όλοι οι κατασκηνοτές του κάμπινγκ, να βρείτε πόσοι από αυτούς έχουν ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

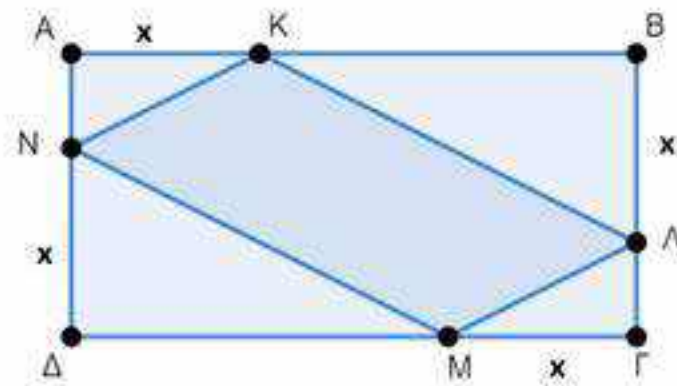
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{\kappa x^2}{2} - 3 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

- Γ1. Να δείξετε ότι $\kappa = 5$, αν γνωρίζετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$ είναι ίσος με $\lambda = -6$.
- Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$.
- Γ3. Αν η συνάρτηση $f(x)$ αντιπροσωπεύει το μηνιαίο κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) μιας μικρής επιχείρησης επίπλων που παράγει x καναπέδες το μήνα ($x > 0$), πόσους καναπέδες θα πρέπει να κατασκευάσει για να έχει το μέγιστο δυνατό μηνιαίο κέρδος;
- Γ4. Να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(4)$, $f'(5)$, $f'(6)$.
- Γ5. Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το εύρος και τη μέση τιμή των παραπάνω τιμών.

Μονάδες $(6+5+7+3+4)=25$

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB=4$ και $B\Gamma=2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.



Δ1. Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

$$E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x)x, \quad x \in (0, 2)$$

και το εμβαδόν του $K\Lambda$ ως συνάρτηση του x είναι

$$E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x)x, \quad x \in (0, 2).$$

ii. το εμβαδόν του $K\Lambda M N$ ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = 2(x^2 - 3x + 4), \quad x \in (0, 2).$$

Δ2. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$.

Δ3. Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες $[(6+5)+7+7]=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι

$$f'(x)=1,$$

για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

A2. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζεται και η συνάρ-

τηση $R = \frac{f}{g}$ με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει

$$f'(x) < 0$$

για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

δ. Η αθροιστική σχετική συχνότητα δίνεται και από τον τύπο $F_i = \frac{N_i}{n}$.

ε. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Σε μία έρευνα, για ένα δείγμα 20 οικογενειών που επιλέχτηκαν, καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών της κάθε οικογένειας, όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i
0	1
1	5
2	9
3	3
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	20

- α. Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των παιδιών.
β. Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	1	
1	5	
2	9	
3	3	
4	2	
ΣΥΝΟΛΟ	20	

- γ. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε.

$$\text{Μονάδες } (8+8+9)=25$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{\kappa}{2}x^2 + 3\lambda x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1. Να βρείτε την f' .
Γ2. Αν η f παρουσιάζει ακρότατα για $x=1$ και $x=2$, να δείξετε ότι $\kappa=9$ και $\lambda=2$.
Γ3. Για τις προηγούμενες τιμές των κ, λ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ4. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\mu, f(\mu))$. Για ποια τιμή του μ αυτός γίνεται ελάχιστος; Ποια η ελάχιστη τιμή του;

Γ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+5}} - 3$

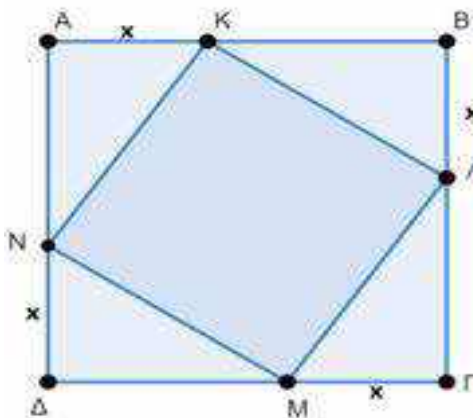
Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες $(3+4+6+6+6)=25$

Θ Ε Μ Α Δ

28282

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB=4$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.



α. Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι $E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x)x$, $x \in (0, 4)$.

ii. το εμβαδόν του $K\Lambda M N$ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$, $x \in (0, 4)$.

β. Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού $E(x)$.

γ. Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες $(5+8+6+6)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 10

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη *Σωστό*, αν η πρόταση είναι σωστή, ή *Λάθος*, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για

όλες τις τιμές του x , τότε ισχύει:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

β. Αν η συνάρτηση v της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας..

γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0)$.

δ. Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς.

ε. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Οι εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ ενός δείγματος δέκα καταστημάτων σε ένα εμπορικό κέντρο κατά το μήνα Απρίλιο του 2023 ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των εισπράξεων.
- β. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
15				
20				
30				
50				
Σύνολο				

- γ. Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος:

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

Να υπολογίσετε τη διακύμανση S^2 των εισπράξεων.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4 - 2Rx^3 + 48x^2 - 64x + 5\bar{x}$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $\bar{x}, R$ η μέση τιμή και το εύρος αντίστοιχα ενός δείγματος v παρατηρήσεων. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $f(1) = -17$, τότε:

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 2$ και $R = 6$.
- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Γ3.** Θεωρούμε ότι το παραπάνω δείγμα των n παρατηρήσεων ακολουθεί την κανονική κατανομή.
- Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής.
 - Αν $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι n παρατηρήσεις και $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 1000$, να βρείτε το n .

Μονάδες $[5+8+(5+7)]=25$

Θ Ε Μ Α Δ

32260

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .



- α.** Αν το μήκος της πλευράς $AB = x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ του ορθογωνίου

ΑΒΓΔ συναρτήσει του x είναι $B\Gamma = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

- β.** Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}, \quad x > 0.$$

- γ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ.** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(6+6+8+5)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 5

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A .

Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$, όπου ℓ_1, ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \ell_2$$

β. Συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι ο φυσικός αριθμός, που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής αυτής.

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής χρησιμοποιούνται μόνο στην περίπτωση των ποιοτικών μεταβλητών.

ε. Τα μέτρα διασποράς μας δίνουν πόσο επεκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το “κέντρο” τους.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

- α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
- β. Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3\text{kg}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος.
- γ. Είναι το δείγμα ομοιογενές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Γ1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης f στο σημείο $A(2, 2)$.
- Γ2. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ με $0 < x < 4$ της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox και Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.
- Γ3. Οι τετμημένες επτά διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος Δ1 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = -2$ και $s_x = 1$.
Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ και την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

Μονάδες $(5+6+6+8)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πως ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

Μονάδες 5

A2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 5

A3. Τι ονομάζουμε αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X , ενός δείγματος n παρατηρήσεων;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. 2018 ΕΠΑΝ

α. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

γ. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

δ. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.

ε. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.

- α. Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών.
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.
- γ. Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

Αν η μεταβλητή X παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, ενώ η διάμεσος δ και η μέση τιμή $\bar{X}$ της κατανομής είναι αντίστοιχα η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου A , στο οποίο η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{4} \text{ τότε:}$$

- Γ1. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- Γ2. Να εξετάσετε αν το πλήθος των τιμών της μεταβλητής X είναι περιττός αριθμός.
- Γ3. Να εξετάσετε αν η κατανομή είναι κανονική.
- Γ4. Να βρείτε την τυπική απόκλιση ώστε το δείγμα να είναι οριακά ομοιογενές.
- Γ5. Για την τιμή s που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{100(s \cdot x)^2 + 2x - 15}{\sqrt{x+1} - 2}.$$

Μονάδες $(5+5+5+5+5)=25$

Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

- α. i.** Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = -2x^2 + 20x.$$

- ii.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.
- β.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ.** Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

Μονάδες $[(5+5)+8+7]=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Να γραφεί ο τύπος με τη βοήθεια του οποίου παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$.

Μονάδες 5

A2. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A3. Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε με τι ισούται η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_1 .

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν η συνάρτηση v της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.
- β.** Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1.
- γ.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

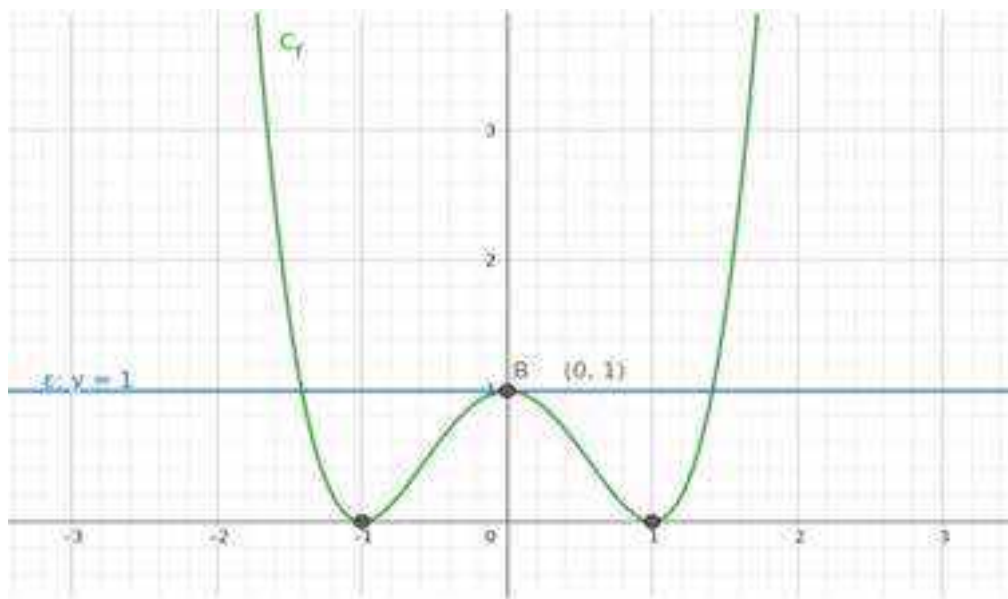
Μονάδες $2 \times 3 = 6$

A5. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

- i.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \dots\dots\dots,$
- ii.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \dots\dots\dots,$
- iii.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon \phi x = \epsilon \phi x_0$ (όταν $\sigma \upsilon \nu x_0 \neq 0$)

Μονάδες 9

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.



- α. Να βρείτε, με βάση το παραπάνω σχήμα, τη μονοτονία της συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.
- β. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(0, 1)$, τότε:
 - i. Να βρείτε την $f'(0)$ και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.
 - ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(0)=0$.

Μονάδες $[10+(10+5)]=25$

Θ Ε Μ Α Γ

Μια επιχείρηση παράγει x προϊόντα με συνολικό κόστος παραγωγής που δίνεται από τη συνάρτηση $\kappa(x) = x^2 - 5x + 9$ (σε ευρώ). Το κάθε προϊόν το πουλάει 5 €.

Γ1. Να βρείτε τη συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης.

Γ2. i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους της επιχείρησης δίνεται από τον τύπο $P(x) = -x^2 + 10x - 9$ (σε €).

ii. Για ποια τιμή του x το κέρδος γίνεται μέγιστο;

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1}$.

Γ4. Να δείξετε ότι $2P''(2) + P'(3) + P(4) = 15$.

Γ5. Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές: $x_1 = \kappa(2)$, $x_2 = \kappa(1)$, $x_3 = \kappa(a)$.

Αν το εύρος των παραπάνω τιμών είναι $R = 6$, να βρεθεί το a .

Μονάδες $[3 + (3+3) + 5 + 5 + 6] = 25$

Θ Ε Μ Α Δ

35477

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

Δ1. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:

i. Από 4 έως 6 λεπτά.

ii. Από 3 έως 6 λεπτά.

Δ2. Αν το πλήθος των πολιτών που εξυπηρετήθηκαν το μήνα Μάιο σε αυτή την υπηρεσία ήταν 5000 πόσοι περίπου πολίτες περίμεναν από 5 έως 6 λεπτά μέχρι να εξυπηρετηθούν;

Δ3. Να εκτιμήσετε το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

Δ4. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Μονάδες $[(4+4) + 6 + 6 + 5] = 25$

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$.
 Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_v - \bar{x}$.
 Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 10

- A2.** Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $(x^v)' = (v-1) \cdot x^v$, όπου v φυσικός αριθμός.

- β.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύει:

$$(c \cdot f)'(x) = f'(x) + c$$

- γ.** Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι φυσικός αριθμός.

- δ.** Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

- ε.** Το εύρος ή κύμανση (R) ενός δείγματος v παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν:

1,4,4,7,3,6,10,3,1,2,3

- α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
- γ. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ με $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 2} \frac{f(h-1) - f(3-h)}{\sqrt{h+2} - h} = -\frac{32}{3}.$$

- Γ1. Να δείξετε ότι $a=1$.
- Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Γ4. i. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος των αριθμών

$$f(-5), f(1), f'(2), f'(3), f'(4).$$

- ii. Ποια είναι η ελάχιστη ακέραια τιμή c που πρέπει να προσθέσουμε στις παραπάνω τιμές ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

Μονάδες $[5+6+5+(4+5)]=25$

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα(m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδόν 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2) .

- α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x} \text{ με } x > 0.$$

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

Μονάδες $(8+9+8)=25$

ΘΕΜΑ Α

A1. Πώς ορίζεται η τυπική απόκλιση s ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

A2. Τι εννοούμε με τον όρο κατανομή συχνοτήτων ή κατανομή των σχετικών συχνοτήτων;

Μονάδες 5

A3. Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε με τι ισούται η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i .

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A , μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

β. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ , δηλαδή αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ τότε για κάθε φυσικό αριθμό } n \text{ μεγαλύτερο του } 1 \text{ θα ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \ell^n$$

γ. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$$

δ. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν

$$f'(x_0) = 0, \text{ για } x_0 \in (a, \beta), \quad f'(x_0) > 0 \text{ στο } (a, x_0) \text{ και } f'(x_0) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta)$$

τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$.

Μονάδες $4 \times 2 = 8$

A5. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$

γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(h)}{h}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0.$

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

80, 70, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α. Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών.

β. Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

Μονάδες $[7+(9+9)]=25$

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(16, 22)$ με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής

$$\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και $s = 2$.

Γ2. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$

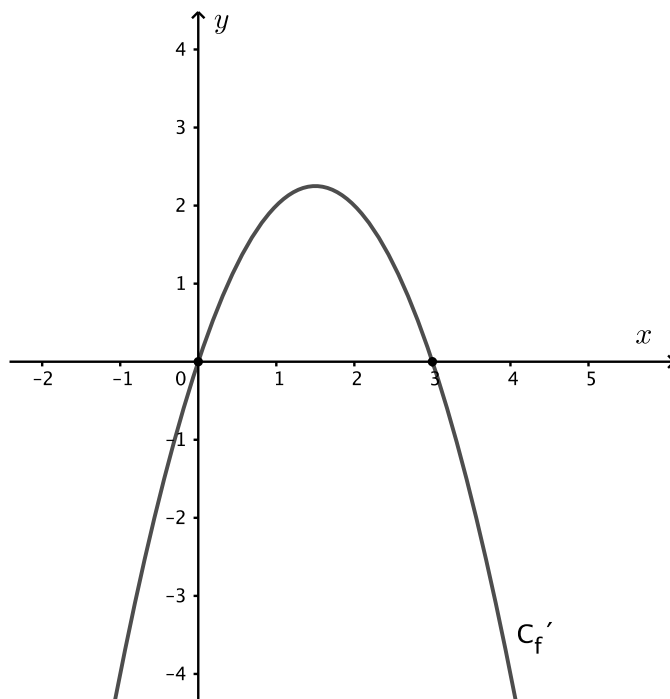
ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Γ3. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s.$$

Μονάδες $(10+5+10)=25$

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.



- α.** Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.
- β.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.
- γ.** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες $(9+6+10)=25$

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β-Γ-Δ



ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ	47
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	45
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	16

1ο.

ΘΕΜΑ Β

ΕΣΠΕΡ. 2016

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$

Μονάδες $(9+8+8)=25$

Λύση

B1. Η f ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = x^2 - 5x + 6$.

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ή } x > 3$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M.	T.E.		

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει

τοπικό μέγιστο το $f(2) = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$ και

τοπικό ελάχιστο το $f(3) = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 1 = 26 - \frac{45}{2} = \frac{7}{2}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B2. Έστω $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(0, f(0))$.

Η **εφαπτομένη** της καμπύλης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(0) = 6$.

Επομένως η εξίσωσή της είναι $\varepsilon: y = 6x + \beta$. Επειδή όμως το σημείο $(0, f(0))$, δηλαδή το $(0, -1)$, ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$.

Άρα, η εξίσωση της **εφαπτομένης** είναι $\varepsilon: y = 6x - 1$.

B3. Για $x \neq -1$ είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -7.\end{aligned}$$

2ο.

Θ Ε Μ Α Β

Ε Σ Π Ε Ρ . 2 0 1 6 Ε

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

B1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ να βρείτε το α .

B2. Για $\alpha = 3$ να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

B3. Για $\alpha = 3$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$.

Μονάδες $(5 + 10 + 10) = 25$

Λύση

B1. $A(1, 2) \in C_1 \Leftrightarrow f(1) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(1 + \alpha)}^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4 - 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}$.

Για $\alpha = 3$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\text{B2. } f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 3} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot (x^2 + 3)' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$			

O.E

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = \sqrt{0^2 + 3} = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{B3. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - 2^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x - 1)} \cdot (x + 1)}{\cancel{(x - 1)} \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \\ &= \frac{1 + 1}{\sqrt{1 + 3} + 2} = \frac{2}{\sqrt{4} + 2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3ο.

Θ Ε Μ Α Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 18}{\sqrt{x} - 3}, & x \in [0, 9) \cup (9, +\infty) \\ \alpha x + \beta, & x = 9 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \beta - \alpha, & x = 3 \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

B1. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x - 18}{\sqrt{x} - 3}$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 9$ και η g συνεχής στο $x_0 = 3$, να βρείτε τα α και β .

B3. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 3$, να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + g(2)x - f(9)}{x + 4}$.

Μονάδες (10+10+5)=25

Λύση

B1. Για $x \neq 9$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x - 18}{\sqrt{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2(x-9)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = 2 \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}+3) = 12 \end{aligned}$$

Για $x \neq 3$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 2$$

B2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 9$, άρα είναι $f(9) = \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$, οπότε

$$9\alpha + \beta = 12 \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, άρα είναι $g(3) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$,

οπότε $\beta - \alpha = 2 \quad (2)$.

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) έχουμε:

$$\begin{cases} 9\alpha + \beta = 12 \\ -\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta = 12 \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\alpha = 10 \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

B3. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 3$, είναι:

- $f(9) = 9 \cdot 1 + 3 = 12$
- $g(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 3}{2 - 3} = \frac{4 - 8 + 3}{-1} = 1$

Άρα για $x \neq -4$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + g(2)x - f(9)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-3)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x-3) = -7.$$

4ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \kappa\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\lambda, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} - 1.$$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

B2. Να ορίσετε την συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

B3. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης h διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(9, 3)$, να βρείτε τα κ και λ .

B4. Αν $\kappa = \lambda = 1$, να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$t(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες $(8+8+4+5)=25$

Λύση

B1. Είναι $f(x) = \kappa\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, άρα πρέπει $x^2 - x + 9 \geq 0$.

Αλλά το τριώνυμο $x^2 - x + 9$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 36 = -35 < 0$,

οπότε είναι $x^2 - x + 9 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επίσης είναι $g(x) = \sqrt{x} - 1$, άρα πρέπει $x \geq 0$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = [0, +\infty)$.

B2. Για τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ έχουμε:

$$\begin{cases} x \in A_f \cap A_g \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [0, 1) \cup (1, +\infty).$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι $A_h = [0, 1) \cup (1, +\infty)$ και

$$h(x) = \frac{\kappa\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\lambda}{\sqrt{x} - 1}.$$

B3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης h διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(9, 3)$, άρα είναι:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(9) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa + 3\lambda = 0 \\ \frac{9\kappa - 3\lambda}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa + 3\lambda = 0 \\ 9\kappa - 3\lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 1.$$

B4. Για $\kappa = \lambda = 1$, είναι $t(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - x + 9} - 3}{\sqrt{x} - 1}, & x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$

Για $x \neq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} t(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 9} - 3}{\sqrt{x} - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 9} - 3)(\sqrt{x^2 - x + 9} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x^2 - x + 9} + 3)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x^2 - x + 9} + 3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x^2 - x + 9} + 3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Άρα είναι

- $\lim_{x \rightarrow 1} t(x) = \frac{1}{3}$ και
- $t(1) = \frac{1}{3}$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} t(x) = t(1)$, άρα η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

5ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

B3. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

Λύση

B1. Είναι $xf(x) - 2f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow f(x)(x - 2) = x^2 - 4$.

Για $x \neq 2$ έχουμε $\frac{f(x)(x - 2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, άρα $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$.

B2. Για $x \neq 2$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$.

B3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής στο $x_0 = 2$, οπότε είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2), \text{ άρα } f(2) = 4.$$

6ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 3x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Να δείξετε ότι η παράγωγος $f'(x)$ έχει ολικό μέγιστο και να υπολογιστεί.

B3. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x}$.

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = (-x^3 - 3x + 4)' = -3x^2 - 3 = -(3x^2 + 3) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f'(x) < 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Η συνάρτηση $f'(x) = -3x^2 - 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = (-3x^2 - 3)' = -6x$$

Είναι

- $f''(x) = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) < 0 \Rightarrow -6x < 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) > 0 \Rightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$		O.M	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f' παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ολικό μέγιστο το

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 - 3 = -3.$$

B3. Α' τρόπος

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = f'(1) = -3 \cdot 1^2 - 3 = -3 - 3 = -6.$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $\varepsilon: y = -6x + \beta$. Αλλά το σημείο $A(1, f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη

$$\text{και επειδή είναι } f(1) = -1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0,$$

$$\text{Έχουμε } 0 = -6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6.$$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -6x + 6$.

B' τρόπος

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

- $f(1) = -1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$
- $f'(1) = -3 \cdot 1^2 - 3 = -3 - 3 = -6$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -6x + 6$.

B4. Για $x \neq 0$ είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 - 3x + 4 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 3}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 - 3) = 0 - 3 = -3.\end{aligned}$$

7ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$.

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

B2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

B3. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Μονάδες $(8+8+9)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' + (\eta\mu x)' = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x.$$

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f''(x) = (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = (-\eta\mu x)' + (\sigma\upsilon\nu x)' = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

Οπότε αντικαθιστώντας στη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$f(x) + f''(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0.$$

B2. Α' τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = f'(0) \Leftrightarrow \lambda = -\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 + 1 = 1$$

Το σημείο $(0, f(0))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε επειδή είναι

$$f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0 = 1 + 0 = 1$$

έχουμε $1 = \lambda \cdot 0 + \beta \stackrel{\lambda=1}{\Leftrightarrow} \beta = 1$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y = x + 1.$$

B' τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Αλλά είναι

- $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0 = 1 + 0 = 1$
- $f'(0) = -\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 = 0 + 1 = 1$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y - 1 = x$ ή $\varepsilon: y = x + 1$

B3. Είναι:

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \eta\mu \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$
- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1$

$$\text{Άρα } \lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow -\lambda = 2 + 2 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

8ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ και $g(x) = \sqrt{x}-1$,

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

B2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

Λύση

B1. Είναι $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, άρα πρέπει $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = [0, +\infty)$.

Επίσης είναι $g(x) = \sqrt{x}-1$, άρα πρέπει $x \geq 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = [0, +\infty)$.

B2. Είναι
$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \sqrt{x}-1$$

Επομένως

- $A_f = A_g = [0, +\infty)$
- $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Άρα οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

B3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \right)' = \frac{(x-1)'(\sqrt{x}+1) - (x-1)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\sqrt{x}+1 - (x-1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$= \frac{\sqrt{x}+1-\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

B4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ είναι

$$\lambda = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}} = 1. \text{ Αλλά } \lambda = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ.$$

Άρα η γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A είναι $\omega = 45^\circ$.

9ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

B3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f .

B4. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=2x+5$.

Μονάδες $(4+4+7+10)=25$

Λύση

B1. Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

B2. Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

B3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A με παράγωγο:

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$f'(x) = \frac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 2x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

B4. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης, η οποία είναι της μορφής $y = 2x + \beta$, εφόσον είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x + 5$. Είναι

$$f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0+1 = -1 \quad \text{ή} \quad x_0+1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \quad \text{ή} \quad x_0 = 0$$

- Για $x_0 = -2$ είναι $f(-2) = \frac{2(-2)}{-2+1} = \frac{-4}{-1} = 4$, άρα σημείο επαφής είναι το $A(-2, 4)$. Αλλά η ευθεία διέρχεται από το A, οπότε $4 = 2 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$.

Άρα στο σημείο A, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon_1 : y = 2x + 8$

- Για $x_0 = 0$ είναι $f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0$, άρα σημείο επαφής είναι το $B(0, 0)$.

Αλλά η ευθεία διέρχεται από το B, οπότε $0 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$.

Άρα στο σημείο B, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon_2 : y = 2x$.

10ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

B1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

- α. $\mathbb{R}$ β. $(-1, 1)$ γ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ δ. $(1, +\infty)$

B2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

B3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

B4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες $(5+7+6+7)=25$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Λύση

B1. Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

οπότε σωστή απάντηση είναι η γ.

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{x'(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

B3. Για $x \neq -1$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+1) \frac{x}{x^2 - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+1) \frac{x}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

B4. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $(0, f(0))$ είναι $\lambda = f'(0)$.

$$\text{Αλλά } f'(0) = -\frac{0^2 + 1}{(0^2 - 1)^2} = -1, \text{ άρα } \lambda = -1.$$

$$\text{Αλλά } \lambda = \varepsilon\varphi\omega, \text{ οπότε είναι } \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Επομένως η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα } x'x \text{ είναι } \omega = \frac{3\pi}{4}.$$

11ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να δείξετε ότι $a = 9$.

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον $x'x$.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha \quad \text{και} \quad f''(x) = 6x - 12.$$

Επομένως η σχέση $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$ γίνεται

$$2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

B2. Για $x \neq 1$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{x+1} = \frac{3(1-3)}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

B3. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης, η οποία είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = 0$ εφόσον είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Είναι

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \quad \text{ή} \quad x_0 = 3$$

- Για $x_0 = 1$ είναι $f(1) = 1 - 6 + 9 - 7 = -3$, άρα σημείο επαφής είναι το $A(1, -3)$. Αλλά η ευθεία διέρχεται από το A , οπότε $-3 = 0 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$. Άρα στο σημείο A , η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon_1 : y = -3$
- Για $x_0 = 3$ είναι $f(3) = 27 - 54 + 27 - 7 = -7$, άρα σημείο επαφής είναι το $B(3, -7)$. Αλλά η ευθεία διέρχεται από το B , οπότε $-7 = 0 \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -7$. Άρα στο σημείο B , η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon_2 : y = -7$.

12ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax(2-x)$, $a \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

B2. Για $a = \frac{1}{2}$, να βρείτε:

- α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.
- β. τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες $(10+5+10)=25$

Λύση

B1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° , άρα είναι

$$f'(0) = \tan 45^\circ \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Αλλά η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = (ax(2-x))' = a(x(2-x))' = a(x'(2-x) - x(2-x)') = a(2-2x).$$

$$\text{Επομένως έχουμε } f'(0) = 1 \Leftrightarrow a(2-2 \cdot 0) = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

B2. Για $a = \frac{1}{2}$ είναι $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, με παράγωγο $f'(x) = 1 - x$.

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = f'(1) \Leftrightarrow \lambda = 1 - 1 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Το σημείο $(1, f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα οι συντεταγμένες του

$$\text{επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε επειδή είναι } f(1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{έχουμε } \frac{1}{2} = 0 \cdot 1 + \beta \stackrel{\lambda=0}{\Leftrightarrow} \beta = \frac{1}{2}.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = \frac{1}{2}$.

β. Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		Ο.Μ	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{2}$.

13ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

B2. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x = 3$, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

B3. Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες (5+10+10)=25

Λύση

B1. Πρέπει και αρκεί $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$.

Επομένως πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

B2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x = 3$ ισούται με $f'(3)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A με παράγωγο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x = 3$, είναι

$$f'(3) = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

B3. Για $x \neq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

14ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

B2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

B3. Να εξετάσετε την συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Μονάδες $(5 + 8 + 12) = 25$

Λύση

B1. Πρέπει και αρκεί $x^2 - x + 1 \neq 0$. Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -3 < 0$, το τριώνυμο παραμένει θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.

B2. Έχουμε

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{(-1)^2 + 1 + 1} = -\frac{1}{3}$$

B3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - x + 1} \right)' = \frac{x'(x^2 - x + 1) - x(x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{x^2 - x + 1 - x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	0	−	+	0	−
$f(x)$		 T.E	 T.M		

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{1}{3}$

και τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1$.

15ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 8$ όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

B1 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$, να βρείτε την τιμή του a .

B2 Έστω $a = 1$

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

Λύση

B1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^3 - 8) = \alpha - 8.$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7 \Leftrightarrow \alpha - 8 = -7 \Leftrightarrow \alpha = 1.$

B1. i. Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = x^3 - 8$, οπότε για $x \neq 2$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

ii. Α' τρόπος

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = (x^3 - 8)' = 3x^2$$

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = f'(2) \Leftrightarrow \lambda = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Το σημείο $(2, f(2))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε επειδή είναι

$$f(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$$

έχουμε $0 = 12 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -24$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y = 12x - 24.$$

Β' τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2).$

Αλλά είναι

- $f(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$

- $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y = 12(x - 2) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y = 12x - 24.$$

16ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο

σημείο $x_0 = \alpha$, τότε $\alpha^{2015} + \alpha^{2016} + \alpha^{2017} + \alpha^{2018} = 0$.

B2. Για την προηγούμενη τιμή του α να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με

$g(x) = (\alpha^2 + 2)f'(x) + \alpha x f''(x)$ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

B3. Να βρείτε το είδος του τοπικού ακρότατου της συνάρτησης f καθώς και την τιμή του.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + 1 \right)' = \frac{4x^3}{4} + \frac{6x^2}{3} + 2x + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \alpha$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha^3 + 1) + 2\alpha(\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) + 2\alpha(\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \quad (\alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0) \end{aligned}$$

οπότε:

$$\alpha^{2015} + \alpha^{2016} + \alpha^{2017} + \alpha^{2018} = (-1)^{2015} + (-1)^{2016} + (-1)^{2017} + (-1)^{2018} = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

B2. Είναι $f'(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $f''(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)' = 3x^2 + 4x + 2$

και για $\alpha = -1$, η g γράφεται:

$$g(x) = 3f'(x) - xf''(x) = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x(3x^2 + 4x + 2) = 2x^2 + 4x + 3$$

Αλλά η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 3$ είναι $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$,

άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η καμπύλη της g δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

B3. Είναι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3 + 1 + 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$, άρα $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) < 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 1) < 0 \stackrel{x^2+x+1>0}{\Leftrightarrow} x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \\ \bullet \quad f'(x) > 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 1) > 0 \stackrel{x^2+x+1>0}{\Leftrightarrow} x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

O.E

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(-1) = \frac{7}{12}$.

17ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^3 - 6x + 3$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Να βρείτε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο A .

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$.

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = (-x^3 - 6x + 3)' = -3x^2 - 6 = -3(x^2 + 2) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B2. Το ζητούμενο σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το σημείο στο οποίο η παράγωγος της f μεγιστοποιείται.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x) = (-3x^2 - 6) = -6x$

Είναι

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -6x < 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$		O.M	

Άρα η f' παρουσιάζει μέγιστο το $f'(0) = -6$. Επομένως στο σημείο $A(0, f(0))$ δηλαδή στο $A(0, 3)$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

B3. Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = f'(0) \Leftrightarrow \lambda = -6$$

Το σημείο $A(0, 3)$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε έχουμε $3 = -6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -6x + 3$.

B4. Για $x \neq 1$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - 6x + 3 + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2 - x - 7)}{(x-1)(x^2 + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x - 7}{x^2 + 2} = \frac{-9}{3} = -3. \end{aligned}$$

18ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 4, x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ αυτής.
- B2.** Ποιο είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο δυνατό συντελεστή διεύθυνσης.
- B3.** Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο που η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

Λύση

- B1.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = (2x^3 - 6x^2 + 8x - 4)' = 6x^2 - 12x + 8$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x, f(x))$ είναι $\lambda = f'(x)$, οπότε

$$\lambda = 6x^2 - 12x + 8$$

- B2.** Το ζητούμενο σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το σημείο στο οποίο η παράγωγος της f ελαχιστοποιείται.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f''(x) = (6x^2 - 12x + 8)' = 12x - 12$$

Είναι

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x - 12 < 0 \Leftrightarrow x < 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$		O.E	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι το ελάχιστο (ολικό) εμφανίζεται στη θέση $x=1$. Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος για $x=1$ και επειδή $f(1)=0$ συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, 0)$.

B3. Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα το μοναδικό σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι το $A(1, 0)$.

19ο.

Θ Ε Μ Α Β

Το κέρδος σε € μιας εταιρείας από την πώληση κάποιου προϊόντος t έτη μετά την παραγωγή του δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 3 \cdot 10^4 t^2 - 5 \cdot 10^3 t^3$$

Να βρείτε:

B1. για πόσα χρόνια η εταιρεία δε θα έχει ζημία.

B2. σε πόσα χρόνια η εταιρεία θα έχει μέγιστο κέρδος.

B3. σε πόσα χρόνια ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους γίνεται μέγιστος.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

Λύση

B1. Η εταιρεία δεν έχει ζημία αν και μόνο αν ισχύει

$$P(t) \geq 0 \Leftrightarrow 10^3(30t^2 - 5t^3) \geq 0 \Leftrightarrow 5000t^2(6-t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 6$$

Άρα η εταιρεία δε θα έχει ζημία τα πρώτα 6 χρόνια πώλησης του προϊόντος.

B2. Αναζητούμε την τιμή του t για την οποία η συνάρτηση $P(t)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Η συνάρτηση $P(t)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$P'(t) = (3 \cdot 10^4 t^2 - 5 \cdot 10^3 t^3)' = 6 \cdot 10^4 t - 1,5 \cdot 10^4 t^2 = 1,5 \cdot 10^4 t(4 - t)$$

Είναι

- $P'(t) = 0 \Leftrightarrow 1,5 \cdot 10^4 t(4 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$
- $P'(t) < 0 \Leftrightarrow 1,5 \cdot 10^4 t(4 - t) < 0 \Leftrightarrow t > 4$
- $P'(t) > 0 \Leftrightarrow 1,5 \cdot 10^4 t(4 - t) > 0 \Leftrightarrow t < 4$

t	$-\infty$	4	$+\infty$
$P'(t)$	+	0	-
$P(t)$		O.M	

Από τον πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι η $P(t)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 4$.

Άρα σε 4 χρόνια η εταιρεία θα έχει μέγιστο κέρδος.

B3. Αναζητούμε την τιμή του t για την οποία η συνάρτηση $P'(t)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

Η συνάρτηση $P'(t)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $P''(t) = 6 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4 t = 3 \cdot 10^4 (2 - t)$

Είναι

- $P''(t) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4 t = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 10^4 (2 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$
- $P''(t) < 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4 t < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 10^4 (2 - t) < 0 \Leftrightarrow t > 2$
- $P''(t) > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4 t > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 10^4 (2 - t) > 0 \Leftrightarrow t < 2$

t	$-\infty$	2	$+\infty$
$P''(t)$	+	0	-
$P'(t)$		O.M	

Από τον πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι η $P'(t)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 2$.

Άρα σε 2 χρόνια ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους γίνεται μέγιστος.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

20ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + \alpha + 2017, \text{ όπου } \alpha \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

B1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B3. Να δείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε συναρτήσει του α .

B4. Να υπολογίσετε το α , αν το τοπικό ελάχιστο είναι ίσο με 2016.

Μονάδες $(3+8+8+6)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με παράγωγο

$$f'(x) = (4x^3 - 6x^2 + \alpha + 2017)' = 12x^2 - 12x$$

B2. Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x < 0 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		T.M		
			T.E	

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

B3. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 1$ με τιμή

$$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + \alpha + 2017 \Leftrightarrow f(1) = 4 - 6 + \alpha + 2017 \Leftrightarrow f(1) = \alpha + 2015$$

B4. Αν το τοπικό ελάχιστο είναι ίσο με 2016 έχουμε $\alpha + 2015 = 2016 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

21ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f'(x) = x^2 - 3x + \lambda, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

B1. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ .

Για $\lambda = 2$,

B2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και το είδος των ακροτάτων,

B3. να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές της συνάρτησης για $x_1 = \frac{6}{5}$ και $x_2 = \frac{3}{2}$, καθώς επίσης και οι τιμές της συνάρτησης για $x_3 = 4$ και $x_4 = 6$.

Μονάδες $(10+7+8)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, άρα είναι $f'(1) = 0$.

$$\text{Επομένως είναι } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - 3 \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

B2. Για $\lambda = 2$ είναι $f'(x) = x^2 - 3x + 2$, οπότε

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	-	0 +	+
$f(x)$		T.M	T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Επίσης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B3. Για να συγκριθούν οι τιμές της $f(x)$ για $x_1 = \frac{6}{5}$ και $x_2 = \frac{3}{2}$ κάνουμε τα κλάσματα $\frac{6}{5}$ και $\frac{3}{2}$

ομώνυμα, οπότε $\frac{6}{5}, \frac{3}{2} \rightarrow \frac{12}{10}, \frac{15}{10}$.

Παρατηρούμε πως οι τιμές $\frac{12}{10}$ και $\frac{15}{10}$ ανήκουν στο διάστημα $[1, 2]$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα για $\frac{12}{10} < \frac{15}{10}$ είναι $f\left(\frac{12}{10}\right) > f\left(\frac{15}{10}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{6}{5}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Ομοίως οι τιμές 4 και 6 ανήκουν στο διάστημα $[2, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα για $4 < 6$ είναι $f(4) < f(6)$.

22ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2017, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f' της f .

B2. Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B3. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2017$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

Μονάδες $(6+12+7)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2017 \right)' = x^2 - 4x + 3$$

B2. Είναι

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \text{οπότε } x_1 = 3, x_2 = 1$$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Επίσης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2017 = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 2017 = \frac{1}{3} + 2018.$$

και τοπικό ελάχιστο το $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 2017 = 9 - 18 + 9 + 2017 = 2017$

B3. Η f στο $x_2 = 3$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $[1, +\infty)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Επομένως είναι $f(x) \geq f(3)$. Άρα $f(x) \geq 2017$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

23ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

B1. να δείξετε ότι $\kappa = -2$ και $\lambda = 1$.

B2. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

B3. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) + f'(x) + f''(x) > 0$.

B4. να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $B(1, f(1))$.

Μονάδες $(8+5+6+6)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = (x^2 + \kappa x + \lambda)' = 2x + \kappa$$

Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο , άρα είναι $f'(1) = 0$, άρα

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$$

Το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στη C_f , άρα

$$f(1) = 0 \stackrel{\kappa=-2}{\Rightarrow} 1^2 - 2 \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

B2. Για $\kappa = -2$ και $\lambda = 1$ είναι $f(x) = x^2 - 2x + 1$ και $f'(x) = 2x - 2$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = (2x - 2)' = 2$$

B3. Είναι

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 2 = x^2 + 1 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B4. Α' τρόπος

Έστω $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(1, f(1))$. Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Επομένως η εξίσωσή της είναι $\varepsilon: y = \beta$. Επειδή όμως το σημείο $(1, f(1))$, δηλαδή το $(0, 0)$, ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε $\beta = 0$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 0$.

B' τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

Αλλά είναι $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ και $f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 0$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

24ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x) = x^2 - 2x.$$

B1. Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B3. Να βρείτε την $f''(x)$.

B4. Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακροτάτων;

B5. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $f'(x)$ στο σημείο $M(1, f'(1))$ και να δείξετε ότι είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες $(4+6+6+4+5)=25$

Λύση

B1. Είναι $f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ και $f'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = x^2 - 2x$.

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow x(x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B3. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$

B4. Στη θέση $x_1 = 0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)$.

Στη θέση $x_2 = 2$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(2)$.

B5. Α' τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f''(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = \beta$. Αλλά το σημείο $M(1, f'(1))$ ανήκει στην

εφαπτομένη και επειδή $f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$, έχουμε $\beta = -1$. Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = -1$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

B' τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f'(1) = f''(1)(x - 1)$. Αλλά είναι

$$f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1, \quad f''(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

Οπότε $\varepsilon: y + 1 = 0(x - 1)$, άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = -1$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

25ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000, \quad 0 \leq t \leq 10, \quad \text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε έτη.}$$

B1. Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);

B2. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

B3. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

B4. Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

$$\text{Μονάδες } (5 + 8 + 7 + 5) = 25$$

Λύση

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B1. Είναι $N(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 5 \cdot 0 + 1000 = 1000$.

Άρα κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων υπάρχουν 1000 δελφίνια.

B2. Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών είναι

$$N'(t) = (2t^3 - t^2 + 5t + 1000)' = 6t^2 - 2t + 5$$

B3. Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος είναι

$$N'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 24 - 4 + 5 = 25 \text{ δελφίνια ανά έτος.}$$

B4. Σε δέκα έτη θα υπάρχουν

$$N(10) = 2 \cdot 10^3 - 10^2 + 5 \cdot 10 + 1000 = 2 \cdot 1000 - 100 + 50 + 1000 = 2950 \text{ δελφίνια.}$$

26ο.

Θ Ε Μ Α Β

Ο.Ε.Φ.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a^2 - 4a$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

B2. Να προσδιορίσετε τις τιμές του a για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι 3-πλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

B3. Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος

Μονάδες $(10+8+7)=25$

Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Είναι

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \stackrel{(\div 3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \text{ οπότε } x_1 = -3, x_2 = 1$$

$$\bullet \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 < 0 \stackrel{(\div 3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\bullet \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 > 0 \stackrel{(\div 3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \quad \text{ή} \quad x > 1$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει στη θέση $x_1 = -3$ τοπικό μέγιστο το $f(-3)$ και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)$.

B2. Το τοπικό μέγιστο είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο. Άρα $f(-3) = 3f(1)$.

Είναι

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(-3) &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + \alpha^2 - 4\alpha = \alpha^2 - 4\alpha + 27 \\ \bullet \quad f(1) &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + \alpha^2 - 4\alpha = 1 + 3 - 9 + \alpha^2 - 4\alpha = \alpha^2 - 4\alpha - 5 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα έχουμε} \quad \alpha^2 - 4\alpha + 27 = 3(\alpha^2 - 4\alpha - 5) \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 27 = 3\alpha^2 - 12\alpha - 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha^2 + 8\alpha + 42 = 0 \stackrel{(\div 2)}{\Leftrightarrow} -\alpha^2 + 4\alpha + 21 = 0$$

$$\text{Είναι} \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4(-1)21 = 16 + 84 = 100, \text{ άρα}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 10}{-2} \quad \text{οπότε} \quad \alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = -3$$

B3. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x) = (3x^2 + 6x - 9)' = 6x + 6$

Είναι

$$\begin{aligned} \bullet \quad f''(x) &= 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = -1 \\ \bullet \quad f''(x) &< 0 \Leftrightarrow 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow 6x < -6 \Leftrightarrow x < -1 \\ \bullet \quad f''(x) &> 0 \Leftrightarrow 6x + 6 > 0 \Leftrightarrow 6x > -6 \Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$		O.E	

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$, επομένως για $x = -1$ ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

27ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση: $f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \leq t \leq 10$

- B1.** Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$;
- B2.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .
- B3.** Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
- B4.** Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Μονάδες $(5+7+7+6)=25$

Λύση

B1. Είναι $f(0) = -3 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 = 0$, άρα το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο έδαφος.

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 10]$ με παράγωγο

$$f'(t) = (-3t^2 + 30t)' = -6t + 30, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του ύψους μετά από χρόνο t είναι $f'(t) = -6t + 30$ μέτρα /sec.

B3. Είναι

- $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 5$
- $f'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t + 30 > 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 5$
- $f'(t) < 0 \Leftrightarrow -6t + 30 < 0 \Leftrightarrow 5 < t \leq 10$

Άρα στο χρονικό διάστημα $[0, 5)$ το αεροπλάνο ανεβαίνει και στο χρονικό διάστημα $(5, 10]$ κατεβαίνει.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B4. Είναι

x	0	5	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		Ο.Μ	

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης f προκύπτει ότι το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος όταν $t = 5$.

Το μέγιστο ύψος είναι $f(5) = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 = -75 + 150 = 75$ μέτρα.

1ο.

ΘΕΜΑ Γ

ΕΠΑΛ 2016

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες $(6 + 4 + 12 + 3) = 25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Γ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ είναι αντίστοιχα:

$$\bullet \quad f'(-1) = \frac{1 - (-1)^2}{((-1)^2 + 1)^2} = \frac{1 - 1}{(1 + 1)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- $f'(1) = \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{1-1}{(1+1)^2} = \frac{0}{4} = 0$

Γ3. Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	7-	0	+	0	-
$f(x)$		T.E		T.M	

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η $f(x)$ είναι:

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Επίσης η $f(x)$ παρουσιάζει στο $x_1 = -1$ τοπικό ελάχιστο το

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \text{ και}$$

στο $x_2 = 1$ τοπικό μέγιστο το

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Γ4. Η $f(x)$ στο διάστημα $[2015, 2016]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Οπότε: $2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016)$.

2ο.

ΘΕΜΑ Γ

ΕΠΑΛ 2016Ε

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}.$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Γ2. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}.$

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3} \right)' = x^2 - 2x - 3$$

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2$$

Γ2. Για $x \neq 1$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \cancel{2x} - 3 + \cancel{2x} - 2 + 4}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 4 \end{aligned}$$

Γ3. Πρέπει

$$f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = -4 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = -4 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, f(1))$ και επειδή είναι

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - 1 - 3 - \frac{4}{3} = -5$$

το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, -5)$.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1, -5)$ είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = f'(1) = -4,$$

άρα της μορφής $\varepsilon: y = -4x + \beta$.

Αλλά το σημείο $A(1, -5)$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα

$$-5 = -4 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$$

Επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -4x - 1$.

3ο.

ΘΕΜΑ Γ

2018

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

Λύση

Γ1. Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με: $f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$.

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ισχύει ότι:

$$f'(1) = 0$$

$$6 - 6\kappa = 0$$

$$\kappa = 1$$

Γ2. Από (1) για $\kappa = 1$: $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

Η $f'(x)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.

Η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{ή} \quad 12x - 6 = 0 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$		Ο.Ε	

Άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$.

Γ3. Έχουμε:

$$f'(-1) = 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(-1) = -18$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda = f''(-1) = -18$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f' στο σημείο $(-1, 12)$ είναι: $\varepsilon: y = -18x + \beta$

Αφού $(-1, 12) \in \varepsilon$, έχουμε $12 = -18(-1) + \beta$.

Δηλαδή $\beta = -6$. Επομένως $\varepsilon: y = -18x - 6$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

4ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο.

Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) - 3}{x - 1}$.

Γ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , όπου παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Γ4. Να βρείτε τον αριθμό α αν το τοπικό μέγιστο της f είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες $(5+5+7+8)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \alpha \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = x^2 + x - 2$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = (x^2 + x - 2)' = 2x + 1$$

Γ2. Για $x \neq 1$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) - 3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2 + 2x + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 1+4 = 5. \end{aligned}$$

Γ3. Είναι $f'(x) = x^2 + x - 2$, οπότε έχουμε

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \quad x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \quad \text{ή} \quad x > 1$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η $f(x)$ είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$ και
- γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Επίσης η συνάρτηση f

- στη θέση $x_1 = -2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)$ και
- στη θέση $x_2 = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)$.

Γ4. Το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $f(x)$ είναι διπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, οπότε:

$$f(-2) = 2f(1).$$

$$\text{Άρα είναι: } \frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) - \alpha = 2\left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \alpha = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \alpha = \frac{2}{3} + 1 - 4 - 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha - \alpha = \frac{2}{3} - 3 + \frac{8}{3} - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{10}{3} - \frac{9}{1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{10-27}{3} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{17}{3}.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

5ο.

ΘΕΜΑ Γ

Ο.Ε.Φ.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \kappa x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν $f'(-1) = -3f'(1)$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της.

Γ3. Να βρείτε το όριο $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h}$ και την εξίσωση της

εφαπτόμενης της συνάρτησης f στο σημείο $(3, f(3))$.

Γ4. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , έχει την ελάχιστη τιμή.

Μονάδες $(6+7+7+5)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = 3x^2 - 2\kappa x$$

Οπότε είναι:

- $f'(-1) = 3(-1)^2 - 2\kappa(-1) = 3 + 2\kappa$ και
- $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2\kappa \cdot 1 = 3 - 2\kappa$

Άρα από τη σχέση $f'(-1) = -3f'(1)$ έχουμε

$$3 + 2\kappa = -3(3 - 2\kappa) \Leftrightarrow 3 + 2\kappa = -9 + 6\kappa \Leftrightarrow 2\kappa - 6\kappa = -9 - 3 \Leftrightarrow \frac{-4\kappa}{-4} = \frac{-12}{-4} \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Γ2. Για $\kappa = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 2$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		T.M		T.E 

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η $f(x)$ είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και
- γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Επίσης η συνάρτηση f :

- στη θέση $x_1 = 0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$ και
- στη θέση $x_2 = 2$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$

Γ3. Είναι $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4$ και $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$,

άρα έχουμε:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9.$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(3, f(3))$ είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(3) = 9$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 9x + \beta$.

Αλλά το σημείο $(3, f(3))$ ανήκει στην ευθεία και επειδή $f(3) = 4$ έχουμε $4 = 9 \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -23$.

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 9x - 23$.

Γ4. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 6 < 0 \Leftrightarrow 6x < 6 \Leftrightarrow x < 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow 6x > 6 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$		Ο.Ε	

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , έχει την ελάχιστη τιμή είναι το $M(1, f(1))$.

Αλλά $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$, οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο $M(1, 2)$.

6ο.

ΘΕΜΑ Γ

Ο.Ε.Φ.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \lambda x^3 - 6x + \mu.$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2\lambda}$ και το μέγιστο της συνάρτησης είναι 9:

Γ1. Δείξτε ότι $\lambda = 2$.

Γ2. Δείξτε ότι $\mu = 5$.

Γ3. Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτόμενη (ε) είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ4. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες $(7+6+6+6)=25$

Λύση

Γ1. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - (x + 1)}{x^2 - 1} =$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left| \sqrt{x^2+3} - (x+1) \right| \left| \sqrt{x^2+3} + (x+1) \right|}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - (x+1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3-x^2-2x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+2}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \frac{-2}{2(\sqrt{4}+2)} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{x^2-1} = -\frac{1}{2\lambda}$, άρα $-\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Γ2. Για $\lambda = 2$ είναι

$$f(x) = 2x^3 - 6x + \mu.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \stackrel{(\div 6)}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 < 0 \stackrel{(\div 6)}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 > 0 \stackrel{(\div 6)}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Επομένως η f παρουσιάζει

- στη θέση $x_1 = -1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1)$
- στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)$

Αλλά το τοπικό μέγιστο είναι 9, άρα

$$f(-1) = 9 \Rightarrow 2(-1)^3 - 6(-1) + \mu = 9 \Leftrightarrow -2 + 6 + \mu = 9 \Leftrightarrow \mu = 5$$

Γ3. Για $\lambda = 2$ και $\mu = 5$ είναι $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ και $f'(x) = 6x^2 - 6$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένη της C_f .

Αλλά η εφαπτομένη (ε) της C_f είναι παράλληλη στον $x'x$, άρα $f'(x_0) = 0$.

Επομένως $6x_0^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$ ή $x_0 = 1$

- Για $x_0 = -1$ έχουμε $f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5 = -2 + 6 + 5 = 9$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(-1, 9)$ και η αντίστοιχη εφαπτόμενη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 9$
- Για $x_0 = 1$ έχουμε $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 5 = 2 - 6 + 5 = 1$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\Lambda(1, 1)$ και η αντίστοιχη εφαπτόμενη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 1$.

Γ4. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x) = (6x^2 - 6)' = 12x$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x < 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$		O.E	

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, άρα για $x = 0$ ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

7ο.

ΘΕΜΑ Γ

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x+a)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = (x-2)(3x+2a-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Να βρείτε τον αριθμό a , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.

Γ3. Για $a = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Γ4. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $[f(0)-f(1)][f(5)-f(6)]$

Μονάδες $(5+8+7+5)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x-2)^2 \right]' (x+a) + (x-2)^2 (x+a)' \\ &= 2(x-2)(x-2)' (x+a) + (x-2)^2 = 2(x-2)(x+a) + (x-2)^2 \\ &= (x-2)[2(x+a) + x-2] = (x-2)(2x+2a+x-2) \\ &= (x-2)(3x+2a-2), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Γ2. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$, άρα είναι $f'(4) = 0$. Οπότε

$$\begin{aligned} (4-2)(3 \cdot 4 + 2a - 2) &= 0 \Leftrightarrow 2(12 + 2a - 2) = 0 \Leftrightarrow 2(2a + 10) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2a + 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{2a}{2} = \frac{-10}{2} \Leftrightarrow a = -5. \end{aligned}$$

Γ3. Για $a = -5$ είναι $f(x) = (x-2)^2(x-5)$ και

$$f'(x) = (x-2)(3x-10-2) = (x-2)(3x-12) = 3(x-2)(x-4)$$

Οπότε είναι

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) > 0 \Leftrightarrow x < 2 \quad \text{ή} \quad x > 4$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η $f(x)$ είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[2, 4]$ και
- γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$.

Επίσης η συνάρτηση f

στη θέση $x_1 = 2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2) = (2-2)^2(2-5) = 0$ και

στη θέση $x_2 = 4$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(4) = (4-2)^2(4-5) = -4$.

Γ4. Οι τιμές 0, 1 ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 2]$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα
οπότε

$$0 < 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ}}{\Leftrightarrow} f(0) < f(1) \Leftrightarrow f(0) - f(1) < 0$$

Οι τιμές 5, 6 ανήκουν στο διάστημα $[4, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα
οπότε

$$5 < 6 \stackrel{f \text{ γν. αύξ}}{\Leftrightarrow} f(5) < f(6) \Leftrightarrow f(5) - f(6) < 0$$

Συνεπώς

$$[f(0) - f(1)][f(5) - f(6)] > 0$$

8ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \eta\mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Γ3. Να δείξετε ότι: $[f'(x)]^2 + \frac{1}{4}[f''(x)]^2 = (\beta - \alpha)^2$

Γ4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \sqrt{3}$.

Μονάδες $(8+4+5+8)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\alpha \sin^2 x + \beta \eta\mu^2 x)' = 2\alpha \sin x (\sin x)' + 2\beta \eta\mu x (\eta\mu x)' \\ &= -2\alpha \sin x \cdot \eta\mu x + 2\beta \eta\mu x \cdot \sin x \\ &= (\beta - \alpha) 2\eta\mu x \sin x = (\beta - \alpha) \eta\mu 2x \end{aligned}$$

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f''(x) = ((\beta - \alpha) \eta\mu 2x)' = (\beta - \alpha) (\eta\mu 2x)' = 2(\beta - \alpha) \sin 2x$$

Γ2. Έχουμε: $f'(x) = 0$, άρα $(\beta - \alpha) \eta\mu 2x = 0 \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} \eta\mu 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Γ3. Είναι

$$\begin{aligned} [f'(x)]^2 + \frac{1}{4}[f''(x)]^2 &= (\beta - \alpha)^2 \eta\mu^2 2x + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2 4\sin^2 2x \\ &= (\beta - \alpha)^2 [\eta\mu^2 2x + \sin^2 2x] = (\beta - \alpha)^2 \cdot 1 = (\beta - \alpha)^2 \end{aligned}$$

Γ4. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της C_f είναι $\lambda = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Άρα

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow (\beta - \alpha) \eta\mu \frac{2\pi}{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (\beta - \alpha) \eta\mu \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (\beta - \alpha) \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta - \alpha = 2 \quad (1)$$

Επίσης είναι

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6} + \beta \eta\mu^2 \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) έχουμε:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 2 \\ \beta + 3\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \alpha = -2 \\ \beta + 3\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 + \alpha \\ 4\alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

9ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}.$$

Γ2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Γ3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

Λύση

Γ1. Πρέπει $x^2 - x + 1 \geq 0$.

Αλλά το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$, άρα $x^2 - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \neq 1$ είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2-x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)' = 2 \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} (x^2-x+1)' \\ &= 2 \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} (2x-1) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\end{aligned}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι $\lambda = f'(0)$.

Οπότε είναι

$$\lambda = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = \frac{-1}{1} = -1$$

B3. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$,
άρα είναι

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow -1 = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \omega = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

10ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Έστω $g(x) = f(x)(x-1)^3$ και $f(x) = \alpha x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με

$$f(1) = 2 \text{ και } f'(1) = 1.$$

Γ1. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f και g .

Γ2. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x^2 - x}$.

Γ3. Να βρείτε τον παράγωγο αριθμό $g'(1)$.

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της εκείνο που αυτή τέμνει τον άξονα των τεταγμένων.

Μονάδες $(7+8+3+7)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = \alpha$

Αλλά $f'(1) = 1$ οπότε $f'(1) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Επομένως είναι

$$f(x) = x + \beta.$$

Επίσης από υπόθεση έχουμε ότι $f(1) = 2$. Αλλά $f(1) = 1 + \beta$.

Συνεπώς $2 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα είναι $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

Οπότε είναι $g(x) = f(x) \cdot (x-1)^3 = (x+1)(x-1)^3$

Γ2. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x+1)'(x-1)^3 + (x+1) \cdot [(x-1)^3]' = (x-1)^3 + (x+1) \cdot 3(x-1)^2(x-1)' \\ &= (x-1)^3 + 3(x+1)(x-1)^2 = (x-1)^2 [(x-1) + 3(x+1)] \\ &= (x-1)^2 (x-1+3x+3) = (x-1)^2 (4x+2) = 2(2x+1)(x-1)^2. \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(2x+1)(x-1)^2 \overset{(0)}{0}}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(2x+1)(x-1)}{x} = \frac{2(2+1)(1-1)}{1} = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x^2 - x} = 0.$$

Γ3. Είναι $g'(1) = 2(2+1)(1-1)^2 = 0$.

Γ4. Η C_g τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $(y'y)$ στο σημείο $A(0, g(0))$.

Αλλά

$$g(0) = (0+1)(0-1)^3 = 1(-1)^3 = -1,$$

άρα

$$A(0, -1).$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(0, -1)$ είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ με

$$\lambda = g'(0) = 2(0+1)(0-1)^2 = 2,$$

άρα

$$\varepsilon: y = 2x + \beta.$$

Αλλά το σημείο $A(0, -1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της,

άρα

$$-1 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 1$.

11ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2 - \frac{\kappa}{x}, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = x \cdot f'(x) + f(x)$$

είναι σταθερή.

Γ2. Να υπολογιστεί η τιμή του κ , αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$.

Γ3. Για $\kappa = 3$ να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $B(1, f(1))$ της C_f .

Γ4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη του ερωτήματος Γ3 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες $(5+4+5+7+4)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(2 - \frac{\kappa}{x}\right)' = -\kappa \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\kappa}{x^2}$$

Άρα είναι

$$g(x) = x \cdot f'(x) + f(x) = x \cdot \frac{\kappa}{x^2} + 2 - \frac{\kappa}{x} = \frac{\kappa}{x} + 2 - \frac{\kappa}{x} = 2$$

Επομένως $g(x) = 2$ (σταθερή συνάρτηση).

Γ2. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$, άρα $f(3) = 1$ και επειδή $f(3) = 2 - \frac{\kappa}{3}$ έχουμε

$$2 - \frac{\kappa}{3} = 1 \Leftrightarrow 2 - 1 = \frac{\kappa}{3} \Leftrightarrow 1 = \frac{\kappa}{3} \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Γ3. Για $\kappa = 3$ είναι

$$f(x) = 2 - \frac{3}{x} \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{3}{x^2}.$$

Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Αλλά είναι

- $f(1) = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$ και
- $f'(1) = \frac{3}{1^2} = \frac{3}{1} = 3$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 3x - 4$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Γ4. Η εφαπτομένη με εξίσωση $\varepsilon: y = 3x - 4$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\Gamma\left(\frac{4}{3}, 0\right)$,

επειδή για $y = 0$ έχουμε

$$3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

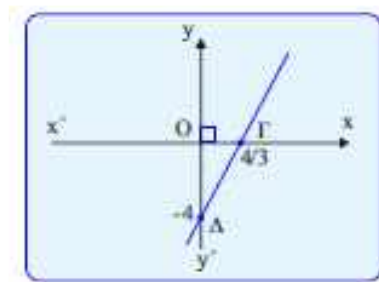
Ομοίως η εφαπτομένη με εξίσωση $\varepsilon: y = 3x - 4$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Delta(0, -4)$

επειδή για $x = 0$ είναι

$$y = 3 \cdot 0 - 4 \Leftrightarrow y = -4.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $ΟΓ\Delta$ είναι:

$$\begin{aligned} (ΟΓ\Delta) &= \frac{1}{2} (ΟΓ) \cdot (Ο\Delta) \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{4}{3} \right| \cdot |-4| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$



Γ5. Είναι $f'(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)' = \frac{3}{x^2} > 0$, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

12ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \left[(\sqrt{x+5} - 2) f(x) \right]$.

Γ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4}$.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, & x \in (1, +\infty) \\ a, & x = 1 \end{cases}$.

Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες $(4+7+7+7)=25$

Λύση

Γ1. Πρέπει $x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq -1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

Γ2. Για $x \neq -1$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left[(\sqrt{x+5} - 2) \cdot f(x) \right] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[(\sqrt{x+5} - 2) \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+5} - 2)(\sqrt{x+5} + 2)(x^2 + 5x + 6)}{(x^2 + x)(\sqrt{x+5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+5-4)(x^2 + 5x + 6)}{(x^2 + x)(\sqrt{x+5} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 5x + 6)}{x(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 6}{x(\sqrt{x+5} + 2)} = \frac{(-1)^2 + 5(-1) + 6}{-1(\sqrt{-1+5} + 2)} = \frac{1-5+6}{-1 \cdot 4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Γ3. Για $x \neq -2$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x}}{\frac{x^2 - 4}{1}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{(x^2 + x)(x^2 - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+3)}{(x^2 + x)(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{(x^2 + x)(x-2)} = \frac{-2+3}{(4-2)(-2-2)} = \frac{1}{2(-4)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Γ4. Είναι $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}, & x \in (-1, +\infty) \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$

Αλλά $f(1) = \frac{1+5+6}{1+1} = \frac{12}{2} = 6$, οπότε

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x} - \overset{x^2+x}{\frac{6}{1}}}{x-1} = \frac{\frac{x^2 + 5x + 6 - 6x^2 - 6x}{x^2 + x}}{x-1} = \frac{-5x^2 - x + 6}{(x-1)(x^2 + x)}$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$. Αλλά

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2 - x + 6}{(x-1)(x^2 + x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5(x-1)\left(x + \frac{6}{5}\right)}{(x-1)(x^2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5\left(x + \frac{6}{5}\right)}{x^2 + x} = -\frac{11}{2}$
- $g(1) = \alpha$

Άρα $\alpha = -\frac{11}{2}$.

13ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{\kappa}{2}x^2 + 3\lambda x + 2, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την f' .

Γ2. Αν η f παρουσιάζει ακρότατα για $x=1$ και $x=2$, να δείξετε ότι $\kappa=9$ και $\lambda=2$.

Γ3. Για τις προηγούμενες τιμές των κ, λ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ4. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\mu, f(\mu))$. Για ποια τιμή του μ αυτός γίνεται ελάχιστος;

Ποια η ελάχιστη τιμή του;

Γ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες $(3+4+6+6+6)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{\kappa}{2}x^2 + 3\lambda x + 2 \right)' = 3x^2 - \kappa x + 3\lambda$$

Γ2. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα για $x=1$ και $x=2$, άρα ισχύει:

- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \kappa - 3\lambda = 3 \quad (1)$
- $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - 3\lambda = 12 \quad (2)$

Από τη λύση του συστήματος των (1), (2) έχουμε:

$$\begin{cases} \kappa - 3\lambda = 3 \\ 2\kappa - 3\lambda = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa + 3\lambda = -3 \\ 2\kappa - 3\lambda = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 9 \text{ και } \lambda = 2$$

Γ3. Για $\kappa = 9$ και $\lambda = 2$ έχουμε: $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 2$ και $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ καθώς και στο $[2, +\infty)$, ενώ στο $[1, 2]$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- παρουσιάζει στο $x_1 = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{9}{2}$ και στο $x_2 = 2$ τοπικό ελάχιστο το

$$f(2) = 4 \quad f(2) = 4$$

Γ4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(\mu, f(\mu))$ είναι ίσος με την $f'(\mu) = 3\mu^2 - 9\mu + 6$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(\mu) = (3\mu^2 - 9\mu + 6)' = 6\mu - 9$$

Είναι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- $f''(\mu) = 0 \Leftrightarrow 6\mu - 9 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2}$
- $f''(\mu) < 0 \Leftrightarrow 6\mu - 9 < 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{3}{2}$
- $f''(\mu) > 0 \Leftrightarrow 6\mu - 9 > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{3}{2}$

μ	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f''(\mu)$	-	0	+
$f'(\mu)$		o.e.	

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι

ο συντελεστής διεύθυνσης $f'(\mu)$ γίνεται ελάχιστος για $\mu = \frac{3}{2}$ με ελάχιστη τιμή: $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Γ5. Για $x \neq 2$ είναι

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2-3x+2)}{\sqrt{x^2+5}-3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2+5)-9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-1)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)} = \frac{3(\sqrt{4+5}+3)}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

14ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$,

της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$.

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

Λύση

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 - 4)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x$$

Η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$. Άρα:

- Το A είναι σημείο της C_f , οπότε $f(-2) = 0$ και
- $f'(-2) = 0$ (αφού το $A(-2, 0)$ είναι σημείο επαφής της C_f με $x'x$)

Άρα είναι

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha + 4\beta - 4 = 0 \\ 12\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 3$$

Γ2. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ είναι $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \stackrel{(+3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x < 0 \stackrel{(+3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow x(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x > 0 \stackrel{(+3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 0$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		T.M		
			T.E	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f :

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ καθώς και στο $[0, +\infty)$, ενώ στο $[-2, 0]$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- στη θέση $x_1 = -2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

- στη θέση $x_2 = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$

Γ3. Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η C_f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης πρέπει να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο και να μελετήσουμε το πρόσημό της.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = (3x^2 + 6x)' = (3x^2)' + (6x)' = 6x + 6$$

Είναι

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \cancel{6}x = \frac{-6}{\cancel{6}} \Leftrightarrow x = -1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow \cancel{6}x < \frac{-6}{\cancel{6}} \Leftrightarrow x < -1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x + 6 > 0 \Leftrightarrow \cancel{6}x > \frac{-6}{\cancel{6}} \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$		ο.ε	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $f'(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -1$ το

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $B(-1, -2)$.

Γ4. Για $x \neq -2$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{5})^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x^2+1-5} = \end{aligned}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x-2} = \frac{3(-2)(\sqrt{(-2)^2+1}+\sqrt{5})}{-2-2} = \frac{-6(\sqrt{5}+\sqrt{5})}{-4} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

15ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 + \lambda x - 2 - \lambda$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

Γ2. Για $\kappa=2$ και $\lambda=3$

- i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f

Γ3. i. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -5$

- ii. Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(2017)$ και $f(2018)$.

Μονάδες (13+6+6)=25

Λύση

Γ1. Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$, άρα είναι $f(0) = -5$, οπότε

$$\frac{1}{3} \cdot 0^3 - \kappa \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 2 - \lambda = -5 \Leftrightarrow -2 - \lambda = -5 \Leftrightarrow -\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2\kappa x + \lambda \xRightarrow{\lambda=3} f'(x) = x^2 - 2\kappa x + 3$$

Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x=1$,

άρα

$$f'(1) = 0,$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

οπότε έχουμε $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - 2 \cdot \kappa \cdot 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow -2\kappa = -4 \Leftrightarrow \kappa = 2$

Γ2. Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 3$ είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ και $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

i. Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		T.M		T.E	

Άρα η συνάρτηση f είναι

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$ και
- γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f στη θέση $x_1 = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = \frac{1}{3} - 2 + 3 - 5 = \frac{1}{3} - \frac{4}{1} = -\frac{11}{3}$$

Και στη θέση $x_2 = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 18 + 9 - 5 = -5$$

Γ3.i. Η συνάρτηση f στο $x_2 = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3) = -5$.

Άρα είναι $f(x) \geq f(3)$, οπότε $f(x) \geq -5$.

ii. Οι αριθμοί 2017 και 2018 ανήκουν στο διάστημα $[3, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή είναι $2017 < 2018$ έχουμε $f(2017) < f(2018)$.

16ο.

ΘΕΜΑ Γ

Θ.Π.Ε.

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

Γ1. Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}x(50-x)$, $0 < x < 50$.

Γ2. Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

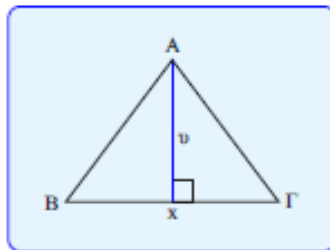
Γ3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Μονάδες $(8+12+5)=25$

Λύση

Γ1. Έστω u το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$.

Τότε είναι $x + u = 50 \Leftrightarrow u = 50 - x$ (1), με $50 - x > 0 \Leftrightarrow x < 50$ και $x > 0$.



Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}B\Gamma \cdot u$ και λόγω της σχέσης (1) είναι

$$E(x) = \frac{1}{2}x \cdot (50 - x), \text{ με } 0 < x < 50.$$

Γ2. Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού θα μελετήσουμε τη συνάρτηση

$$E(x) = \frac{50x - x^2}{2}, \text{ με } 0 < x < 50 \text{ ως προς τα ακρότατα.}$$

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$E'(x) = \frac{1}{2}(50x - x^2)' = \frac{1}{2}(50 - 2x) = 25 - x$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Οπότε είναι

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0 \Leftrightarrow x = 25$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow 25 - x < 0 \Leftrightarrow 25 < x < 50$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 25 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 25$

x		0	25	50
$E'(x)$		+	0 Ο.Μ	-
$E(x)$		1		2

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 25$, άρα το εμβαδό της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου γίνεται μέγιστο για $x = 25$ cm.

Γ3. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι $E(25) = \frac{1}{2} \cdot 25(50 - 25) = \frac{25 \cdot 25}{2} = \frac{625}{2} \text{ cm}^2$.

17ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Θ . Π . Ε .

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x$$

Γ2. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

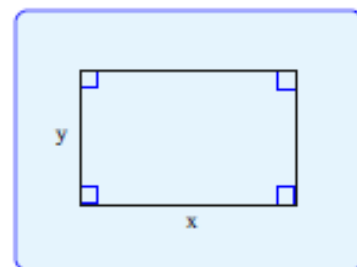
Λύση

Γ1. Έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθογωνίου,

τότε είναι $x + y = 200 \Leftrightarrow y = 200 - x \quad (1)$,

με $200 - x > 0 \Leftrightarrow x < 200$ και $x > 0$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = x \cdot y$ και λόγω της σχέσης



ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

(1) έχουμε $E(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x$

Γ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $E'(x) = -2x + 200$

Οπότε είναι

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 200 = 0 \Leftrightarrow -2x = -200 \Leftrightarrow x = 100$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 200 < 0 \Leftrightarrow -2x < -200 \Leftrightarrow 100 < x < 200$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 200 > 0 \Leftrightarrow -2x > -200 \Leftrightarrow 0 < x < 100$

x		0	100	200	
$E'(x)$		+	0	-	
$E(x)$		1	Ο.Μ	2	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x = 100$.

Γ3. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου είναι

$$E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = -10000 + 20000 = 10000 \text{ m}^2$$

18ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -x^2 + 3ax + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να υπολογίσετε το a , αν γνωρίζετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Γ2. Για $a = 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $B(2, f(2))$ είναι $y = -x + 6$.

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) του ερωτήματος Γ2 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες $(9 + 8 + 8) = 25$

Λύση

Γ1. $f'(x) = (-x^2 + 3\alpha x + 2)' = -2x + 3\alpha$

$$\lambda = f'(1) = \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow -2 + 3\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Για $\alpha = 1$ είναι: $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε $f'(x) = -2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. $f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = -4 + 6 + 2 = 4$ $\lambda = f'(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$

$$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -x + \beta$$

$$B(2, f(2)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow B(2, 4) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 4 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6.$$

Επομένως $\boxed{(\varepsilon): y = -x + 6}$.

Γ3. $(\varepsilon): y = -x + 6$.

- Για $x = 0 \Rightarrow y = 6$, άρα $\Gamma(0, 6)$ το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$.
- Για $y = 0 \Rightarrow x = 6$, άρα $\Delta(6, 0)$ το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $x'x$.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}(\text{ΟΔ}) \cdot (\text{ΟΓ}) \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 36 \Leftrightarrow \boxed{E = 18 \text{ τ.μ.}}$$

1ο.

ΘΕΜΑ Δ

2016Ε

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^4 + ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των a (μον.6) και β (μον.2) αν

$$f(0) = 2019 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0.$$

Δ2. Για $a = 4$ και $\beta = 2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες $(8+12+5)=25$

Λύση

Δ1. Είναι $f(0) = 2019 \Leftrightarrow 0^4 + a \cdot 0 + \beta = 2019 \Leftrightarrow \beta = 2019$, άρα είναι $f(x) = x^4 + ax + 2019$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = (x^4 + ax + 2019)' = 4x^3 + a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Αλλά είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (-1)^3 + a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 + a = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Δ2. Για $a = 4$ και $\beta = 2019$, είναι $f(x) = x^4 + 4x + 2019$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 4x^3 + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = -4 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 < 0 \Leftrightarrow 4x^3 < -4 \Leftrightarrow x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 > 0 \Leftrightarrow 4x^3 > -4 \Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x > -1$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$		O.E	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = -1$ το

$$f(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1) + 2019 = 1 - 4 + 2019 = 2016.$$

Δ3. Είναι $f(x) \geq f(-1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$x^4 + 4x + 2019 \geq 2016 \Leftrightarrow x^4 + 4x \geq -3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2ο.

ΘΕΜΑ Δ

2018

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$.

Μονάδες $(6+9+10)=25$

Λύση

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 4} + 2018 \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Δ2. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από τον αριθμητή x , δεδομένου ότι $\sqrt{x^2 + 4} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Ο.Ε

Η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 2020$.

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2 + 4} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = 0.$$

1ο.

ΘΕΜΑ Β

ΕΠΑΛ 2016

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	$x_i v_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
ΣΥΝΟΛΑ				

B1. Αν γνωρίζετε ότι η 5^η συχνότητα (v_5) ισούται με την 1^η συχνότητα (v_1), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

B3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

B4. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες $(10+5+5+5)=25$

Λύση

B1. Από τα δεδομένα της άσκησης:

- Είναι $v_5 = v_1$, άρα $v_5 = 5$, οπότε

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ και } f_5 = 0,25$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

- $v_2 = N_2 - N_1 = 9 - 5 = 4$, οπότε

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{4}{20} = 0,20$$

- $v_3 = f_3 \cdot v = 0,10 \cdot 20 = 2$

- $v_4 = v - (v_1 + v_2 + v_3 + v_5) = 20 - 16 = 4$ και $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,20$

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω συμπληρωμένος πίνακας:

x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$x_i v_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
ΣΥΝΟΛΑ	20		100	40

B2. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{40}{20} = 2$$

B3. Ο αριθμός των υπαλλήλων που χρησιμοποιούν το πολύ 3 κάρτες είναι

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = N_4 = 15.$$

B4. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 κάρτες είναι

$$f_3 + f_4 + f_5 = 0,55, \text{ δηλαδή } 55\%.$$

2ο.

ΘΕΜΑ Β

ΕΣΠΕΡ 2016

Θεωρούμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , που ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 12$ και η τυπική απόκλιση είναι $s = 2$.

B1. Να ελέγξετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

B2. Να βρείτε ποιο είναι περίπου το ποσοστό των παρατηρήσεων στο διάστημα τιμών από 10 έως 16.

B3. Να βρείτε ποιο είναι περίπου το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από 6.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

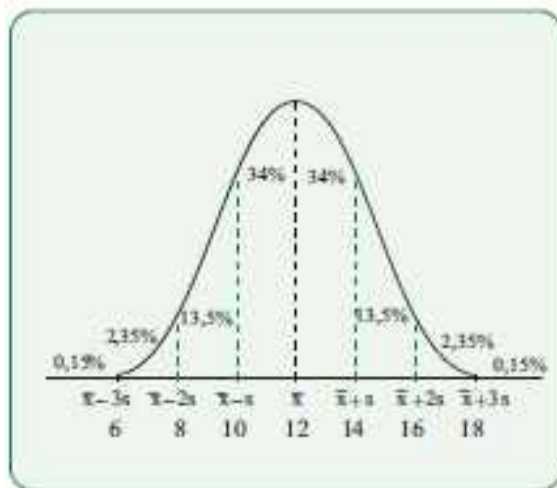
Λύση

B1. Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0,1666... \quad 16,67\%.$$

Αλλά $16,67\% > 10\%$,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.



B2. Το ποσοστό των παρατηρήσεων στο διάστημα τιμών από 10 έως 16 είναι

$$34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%,$$

άρα

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

στο διάστημα $(10, 16)$ βρίσκεται το 81,5% των παρατηρήσεων.

B3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από 6 είναι

- $100\% - 0,15\% = 99,85\%$ ή
- $2,35\% + 13,5\% + 34\% + 34\% + 13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 99,85\%$

Άρα

το 99,85% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 6.

3ο.

ΘΕΜΑ Β

ΕΠΑΛ 2016Ε

Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

B1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω αριθμών.

B3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s των παραπάνω αριθμών.

B4. Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν.

Μονάδες $(5+5+7+8)=25$

Λύση

B1. Έστω ότι

$$t_1, t_1 + 2, t_1 + 4, t_1 + 6, t_1 + 8, t_1 + 10, t_1 + 12$$

είναι οι ζητούμενοι 7 περιττοί αριθμοί, με t_1 περιττό αριθμό, διατεταγμένοι σε αύξουσα σειρά.

Το πλήθος των αριθμών είναι περιττός (επτά), άρα διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, οπότε έχουμε:

$$\delta = t_1 + 6 \Leftrightarrow 13 = t_1 + 6 \Leftrightarrow t_1 = 13 - 6 \Leftrightarrow t_1 = 7.$$

Επομένως

οι ζητούμενοι περιττοί αριθμοί είναι οι 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

B2. Η μέση τιμή των παραπάνω αριθμών είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 t_i}{n} = \frac{7+9+11+13+15+17+19}{7} = \frac{91}{7} = 13.$$

B3. Η διακύμανση των παραπάνω αριθμών είναι

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{x})^2}{v} = \\
 &= \frac{(7-13)^2 + (9-13)^2 + (11-13)^2 + (13-13)^2 + (15-13)^2 + (17-13)^2 + (19-13)^2}{7} = \\
 &= \frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2}{7} = \frac{112}{7} = 16
 \end{aligned}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$$

B4. Α' τρόπος

Αν $\bar{x}'$ και s' η νέα μέση τιμή και η νέα τυπική απόκλιση αντίστοιχα, από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}' = \bar{x} + 3 = 13 + 3 = 16 \\ s' = s = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} \cdot 100\% = \frac{4}{16} \cdot 100\% = 25\%.$$

B' τρόπος

Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3 προκύπτουν οι νέοι αριθμοί :

$$10, 12, 14, 16, 18, 20, 22.$$

Οπότε η νέα μέση τιμή $\bar{x}'$ και η νέα τυπική απόκλιση s' είναι:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}' &= \frac{\sum_{i=1}^7 t'_i}{v} = \frac{10+12+14+16+18+20+22}{7} = \frac{112}{7} = 16 \\
 s'^2 &= \frac{\sum_{i=1}^7 (t'_i - \bar{x}')^2}{v} = \\
 &= \frac{(10-16)^2 + (12-16)^2 + (14-16)^2 + (16-16)^2 + (18-16)^2 + (20-16)^2 + (22-16)^2}{7} = \\
 &= \frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2}{7} = \frac{112}{7} = 16
 \end{aligned}$$

Οπότε

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$s' = \sqrt{s'^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Ο συντελεστής μεταβολής των νέων αριθμών είναι

$$CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} \cdot 100\% = \frac{4}{16} \cdot 100\% = 25\%.$$

4ο.

ΘΕΜΑ Β

Ο.Ε.Φ.Ε. 2017

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i	v_i	N_i	f_i	F_i
$[0, 20)$					0,05
$[20, 40)$			9		
$[40, 60)$		4		0,20	
$[60, 80)$					0,85
$[80, 100)$					
Σύνολο					

B1. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$.

B2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

B3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

B4. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής. (δίνεται $\sqrt{560} \approx 23,66$).

B5. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχει τιμή τουλάχιστον 50.

Μονάδες $(3+7+5+6+4)=25$

Λύση

B1. Είναι $v_3 = 4$ και $f_3 = 0,20$, οπότε έχουμε:

$$f_3 = \frac{v_3}{n} \Leftrightarrow n = \frac{v_3}{f_3} = \frac{4}{0,2} = \frac{40}{2} \Leftrightarrow n = 20.$$

B2. ο κέντρο της πρώτης κλάσης είναι $x_1 = \frac{0+20}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Ομοίως προκύπτουν και τα κέντρα των υπόλοιπων κλάσεων.

- Είναι $F_1 = 0,05$, άρα $f_1 = 0,05$, οπότε $v_1 = f_1 \cdot v = 0,05 \cdot 20 = 1$ και $N_1 = 1$
- $v_2 = N_2 - N_1 = 9 - 1 = 8$, άρα $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{20} = 0,40$.
- $f_4 = F_4 - F_3 = 0,85 - 0,65 = 0,20$.
- $v_5 = N_5 - N_4 = 20 - 17 = 3$ και $f_5 = F_5 - F_4 = 1,00 - 0,85 = 0,15$.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω συμπληρωμένος πίνακας με επιπλέον 3 στήλες οι οποίες θα βοηθήσουν στα επόμενα ερωτήματα :

Κλάσεις	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
$[0, 20)$	10	1	1	0,05	0,05	10	- 40	1600	1600
$[20, 40)$	30	8	9	0,40	0,45	240	-20	400	3200
$[40, 60)$	50	4	13	0,20	0,65	200	0	0	0
$[60, 80)$	70	4	17	0,20	0,85	280	20	400	1600
$[80, 100)$	90	3	20	0,15	1,00	270	40	1600	4800
Σύνολο		20		1,00		1000			11200

B3. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{1000}{20} = 50$$

B4. Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{11200}{20} = 560,$$

οπότε

η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{s^2} \approx 23,7$$

Επομένως

ο συντελεστής μεταβολής είναι

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{23,7}{50} = 0,474 \quad \text{ή} \quad 47,4\%.$$

Το δείγμα είναι ανομοιογενές, γιατί

$$CV > 10\%.$$

B5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχει τιμή τουλάχιστον 50 είναι

$$\frac{1}{2} \cdot f_3 + f_4 + f_5 = \frac{1}{2} \cdot 0,20 + 0,20 + 0,15 = 0,45 \quad \text{ή} \quad 45\%.$$

5ο.

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων ωρών μελέτης των μαθητών της Γ' τάξης ενός ΕΠΑ.Λ. στη διάρκεια μιας εβδομάδας.

Ώρες μελέτης x_i	Αριθμός μαθητών v_i
2	10
3	α
4	10
5	10
6	20

B1. Αν η διάμεσος του δείγματος είναι $\delta = 3,5$ να βρείτε την τιμή του α .

B2. Για $\alpha = 30$

- να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των ωρών μελέτης των μαθητών.
- να βρείτε τη διακύμανση s^2 των ωρών μελέτης των μαθητών.

B3. Αν $\sqrt{2} \approx 1,414$ να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

$$\text{Μονάδες} \quad (8 + (5+8) + 4) = 25$$

Λύση

B1. Η διάμεσος δ του δείγματός μας είναι $\delta = 3,5$.

Αλλά η διάμεσος δ ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή εκείνη για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων, δηλαδή οι μισές, είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτή, οπότε έχουμε

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 + v_5$$

Επομένως είναι

$$10 + \alpha = 10 + 10 + 20 \Leftrightarrow \alpha = 40 - 10 \Leftrightarrow \alpha = 30$$

B2. Για $\alpha = 30$ κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

y_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i (x_i - \bar{x})^2$
2	10	20	-2	4	40
3	30	90	-1	1	30
4	10	40	0	0	0
5	10	50	1	1	10
6	20	120	2	4	80
Σύνολο	80	320			160

i. Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων η μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i, \text{ όπου } v = \sum_{i=1}^k v_i$$

Άρα αντικαθιστώντας έχουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{80} 320 = 4.$$

ii. Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων η διακύμανση s^2 των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i, \text{ όπου } v = \sum_{i=1}^k v_i$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Άρα αντικαθιστώντας έχουμε $s^2 = \frac{1}{80}160 = 2$.

B3. Ο συντελεστής μεταβολής CV δίνεται από τον τύπο

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}, \text{ όπου } s = \sqrt{s^2} \text{ είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.}$$

Άρα αντικαθιστώντας έχουμε

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq \frac{1,414}{4} = 0,3535 = 35,35\%$$

Αλλά

$$35,35\% > 10\%,$$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

6ο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί

$$8, 5, 2\omega - 2, 5, 9, 2\omega + 1, \omega + 3, 6, 8, 7 \text{ όπου } \omega \in \mathbb{R}.$$

B1. Αν γνωρίζετε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ της παραπάνω κατανομής είναι ίση με 7, να δείξετε ότι $\omega = 4$.

B2. Για $\omega = 4$

- i. να βρείτε τη διάμεσο δ.
- ii. να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s.

B3. Για $\omega = 4$, αν προσθέσουμε στους αρχικούς αριθμούς άλλους δύο, τους 4 και 10, να βρείτε τη νέα μέση τιμή.

$$\text{Μονάδες } [7 + (5+8) + 5] = 25$$

Λύση

B1. Η μέση τιμή ενός δείγματος παρατηρήσεων μεγέθους n, δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

Άρα είναι

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 + 7 + 8 \cdot 2 + 9 + 2\omega - 2 + 2\omega + 1 + \omega + 3}{10} = \frac{5\omega + 50}{10}.$$

Αλλά $\bar{x} = 7$, οπότε έχουμε

$$\frac{5\omega + 50}{10} = 7 \Leftrightarrow 5\omega + 50 = 70 \Leftrightarrow 5\omega = 20 \Leftrightarrow \omega = 4$$

B2. Για $\omega = 4$ οι παρατηρήσεις είναι:

8, 5, 6, 5, 9, 9, 7, 6, 8, 7

- i. Για να βρούμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων αρχικά τις διατάσσουμε με αύξουσα σειρά και έχουμε:

5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n = 10$ (άρτιος), η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή της πέμπτης και της έκτης παρατήρησης. Άρα

$$\delta = \frac{7 + 7}{2} = 7$$

- ii. Η διακύμανση n παρατηρήσεων ενός δείγματος δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2$$

Άρα

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(5-7)^2 + (5-7)^2 + (6-7)^2 + \dots + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (9-7)^2}{10} = \\ &= \frac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2}{10} = \\ &= \frac{4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4}{10} = \frac{20}{10} = 2 \end{aligned}$$

Επομένως

η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}.$$

B3. Η νέα μέση τιμή των δώδεκα παρατηρήσεων είναι

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\bar{x}_A = \frac{t_{11} + t_{12} + \sum_{i=1}^{10} t_i}{12} = \frac{4 + 10 + 70}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

Άρα η νέα μέση τιμή είναι πάλι $\bar{x}_A = 7$.

7ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ.Π.Ε.

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα f_i %
0 – 5	10
5 – 10	15
10 – 15	12
15 – 20	15
20 – 25	18
25 – 30	18
30 – 35	12

B1. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

B2. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α. πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[5 + (10 + 10)] = 25$

Λύση

B1. Επειδή το 10% των $n=100$ εκπαιδευτικών ανήκουν στην πρώτη κλάση, συμπεραίνουμε ότι η συχνότητα n_1 της πρώτης κλάσης είναι

$$n_1 = \frac{10}{100} \cdot 100 = 10.$$

Όμοια υπολογίζουμε και τις συχνότητες των άλλων κλάσεων.

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Συχνότητα n_i
0 – 5	10	10
5 – 10	15	15
10 – 15	12	12
15 – 20	15	15
20 – 25	18	18
25 – 30	18	18
30 – 35	12	12
Σύνολο	100	100

Οι εκπαιδευτικοί που έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας είναι οι εκπαιδευτικοί των κλάσεων: 15 – 20, 20 – 25, 25 – 30, 30 – 35, άρα

$$15+18+18+12=63$$

B2. α. Για τα επόμενα 12,5 χρόνια θα έχουν συμπληρώσει 35 χρόνια υπηρεσίας οι εκπαιδευτικοί των κλάσεων 25 – 30 και 30 – 35, δηλαδή

$$18+12=30 \text{ εκπαιδευτικοί}$$

καθώς και x εκπαιδευτικοί της κλάσης 20 – 25 που ανήκουν στην κλάση 22,5 – 25.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Υποθέτοντας ότι οι 18 εκπαιδευτικοί της κλάσης 20 – 25 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι, οι 9 έχουν πάνω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας, άρα συνολικά

$$9 + 18 + 12 = 39 \text{ εκπαιδευτικοί.}$$

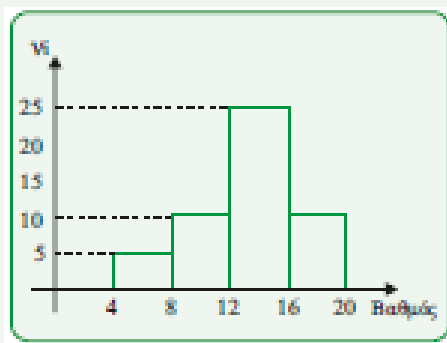
- β. Επειδή στα επόμενα 5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν οι εκπαιδευτικοί που βρίσκονται στην κλάση 30 – 35, δηλαδή 12, πρέπει να προσληφθούν 12 εκπαιδευτικοί, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών να παραμείνει ίδιος.

8ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθ/γίας [,)	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

B3. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

$$\text{Μονάδες } (1 + 1 + 8 + 6) = 25$$

Λύση

B1. Θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, άρα

$$v_1 = 5, \quad v_2 = 10, \quad v_3 = 25, \quad v_4 = 10$$

Επομένως είναι:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 5 + 10 + 25 + 10 = 50$$

Με τη βοήθεια του τύπου $f_i = \frac{v_i}{v}$ υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης, οπότε είναι:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{50} = 0,10, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{10}{50} = 0,20, \quad f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{25}{50} = 0,50, \quad \text{και} \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{10}{50} = 0,20$$

Τέλος με την βοήθεια των τύπων $v_k = N_k - N_{k-1}$ και $f_k = F_k - F_{k-1}$ υπολογίζουμε την αθροιστική συχνότητα N_i και την αθροιστική σχετική συχνότητα F_i της κάθε κλάσης και έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις βαθ/γίας [,)	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)	6	5	0,10	5	0,10
[8, 12)	10	10	0,20	15	0,30
[12, 16)	14	25	0,50	40	0,80
[16, 20)	18	10	0,20	50	1
Σύνολο		50	1		

B2. Όταν έχουμε σε πίνακα συχνοτήτων ομαδοποιημένα δεδομένα, η μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i, \quad \text{όπου} \quad v = \sum_{i=1}^k v_i \quad \text{και} \quad x_i \quad \text{το κέντρο της } i \text{ κλάσης}$$

Άρα είναι

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 5 + 10 \cdot 10 + 14 \cdot 25 + 18 \cdot 10}{50} = \frac{660}{50} = 13,2.$$

- B3.** Βαθμό μέχρι και 10 έχουν όλοι οι μαθητές της κλάσης $[4, 8)$ και οι μισοί της κλάσης $[8, 12)$ λόγω ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων εντός της κλάσης (αφού 10 το κέντρο της) , δηλαδή: $5+5=10$ μαθητές.

9ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών v_i
0	$a+4$
1	$5a+8$
2	$4a$
3	$a-1$
4	$2a$
Σύνολο	50

- B1.** Να υπολογίσετε την τιμή του a .

Στη συνέχεια να βρείτε:

- B2.** Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

- B3.** Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

$$\text{Μονάδες} \quad (3+7+7+8) = 25$$

Λύση

- B1.** Είναι

$$\sum_{i=1}^k v_i = n,$$

άρα έχουμε:

$$\alpha + 4 + 5\alpha + 8 + 4\alpha + \alpha - 1 + 2\alpha = 50 \Leftrightarrow 13\alpha + 11 = 50 \Leftrightarrow 13\alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

B2. Για $\alpha = 3$ είναι:

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	50	77	

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων, η μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v}, \text{ όπου } v = \sum_{i=1}^k v_i$$

Άρα είναι

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 7 + 1 \cdot 23 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6}{50} = \frac{77}{50} = 1,54 \text{ βιβλία.}$$

B3. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $v = 50$ (άρτιος), η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή της 25ης και της 26ης παρατήρησης.

Από τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων διαπιστώνουμε ότι η 25η και 26η σε διάταξη

παρατηρήσεις είναι ίσες με 1, άρα $\delta = \frac{1+1}{2} = 1$ βιβλίο.

10ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες v_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 3$ είναι άγνωστη.

Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

B1. Να αποδείξετε ότι $v_2 = 7$.

B2. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

B3. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} = 2,2$

Μονάδες $(9 + 9 + 7) = 25$

Λύση

B1. Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων, η μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v}, \text{ όπου } v = \sum_{i=1}^k v_i$$

Άρα

$$4 = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot v_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + v_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3 \cdot v_2 + 15 + 32}{13 + v_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 52 + 4 \cdot v_2 = 59 + 3 \cdot v_2 \Leftrightarrow v_2 = 7.$$

B2. Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων η διακύμανση s^2 των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v}, \text{ όπου } v = \sum_{i=1}^k v_i$$

Άρα αντικαθιστώντας έχουμε

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{(2-4)^2 \cdot 6 + (3-4)^2 \cdot 7 + (5-4)^2 \cdot 3 + (8-4)^2 \cdot 4}{20}$$

$$= \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \frac{98}{20} = 4,9.$$

B3. Ο συντελεστής μεταβολής CV δίνεται από τον τύπο

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}, \text{ όπου } s = \sqrt{s^2} \text{ είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.}$$

$$\text{Άρα αντικαθιστώντας έχουμε } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \simeq \frac{2,2}{4} = 0,55 = 55\%$$

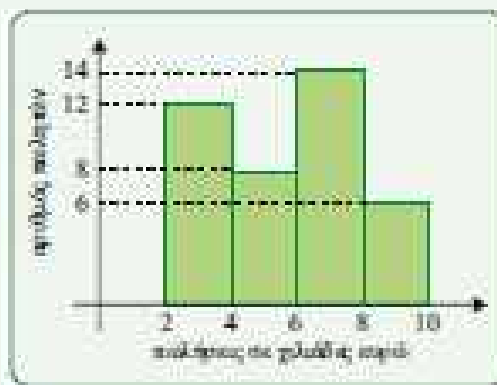
Αλλά $55\% > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

11ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



B1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

B2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες f_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
[...,...)			
[...,...)			
[...,...)			
[...,...)			
Σύνολο			

B3. α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

β. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα καταναεμημένες).

Μονάδες $[5+8+(6+6)]=25$

Λύση

B1. Θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων, αν v_1, v_2, v_3, v_4 είναι οι συχνότητες της κατανομής των πωλήσεων και v το πλήθος των πωλητών της εταιρείας, είναι :

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40.$$

B2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
[2, 4)	3	12	0,30

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

[4, 6)	5	8	0,20
[6, 8)	7	14	0,35
[8, 10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

Οι σχετικές συχνότητες υπολογίζονται από τον τύπο :

$$f_i = \frac{v_i}{v}, \text{ όπου } i=1, 2, 3, 4, \text{ οπότε :}$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,30, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10} = 0,20$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = \frac{3,5}{10} = 0,35, \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = \frac{1,5}{10} = 0,15$$

B3. α. Α' τρόπος

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$x_i v_i$
[2, 4)	3	12	0,30	36
[4, 6)	5	8	0,20	40
[6, 8)	7	14	0,35	98
[8, 10)	9	6	0,15	54
Σύνολο		40	1	228

Είναι

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = \frac{1}{40} (3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6) = \frac{228}{40} = 5,7.$$

Άρα η μέση τιμή των πωλήσεων του έτους ήταν 5,7 χιλιάδες ευρώ.

B' τρόπος :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 3 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,35 + 9 \cdot 0,15 = 0,9 + 1 + 2,45 + 1,35 = 5,7$$

Άρα η μέση τιμή των πωλήσεων του έτους ήταν 5,7 χιλιάδες ευρώ.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

- β. Το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ είναι ίσος με το άθροισμα των συχνοτήτων των κλάσεων $[4,5, 6)$, $[6,8)$ και $[8,10)$ και επειδή οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, το ζητούμενο πλήθος των πωλητών είναι :

$$\frac{3}{4}v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{4} \cdot 8 + 14 + 6 = 6 + 14 + 6 = 26$$

12ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ.Π.Ε.

Στο παρακάτω πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου (°C).

Τιμές θερμοκρασίας x_i	Πλήθος ημερών v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

B1. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4 °C, τότε:

- α. να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C.
- β. να υπολογίσετε τη διάμεσο.

B2. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 24,5 °C, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C.

Μονάδες $[(10+5)+10]=25$

Λύση

B1. α. Είναι $v = 20$, επομένως

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 9 \quad (1)$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{x} = 24,4 &\Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^6 v_i x_i = 24,4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{20} (2 \cdot 22 + 4 \cdot 23 + v_3 \cdot 24 + v_4 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 27) = 24,4 \\ &\Leftrightarrow 24v_3 + 25v_4 = 219 \quad (2)\end{aligned}$$

Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2)

$$\begin{aligned}\begin{cases} v_3 + v_4 = 9 \\ 24v_3 + 25v_4 = 219 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 9 - v_4 \\ 24(9 - v_4) + 25v_4 = 219 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 9 - v_4 \\ 24(9 - v_4) + 25v_4 = 219 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 9 - v_4 \\ 216 + v_4 = 219 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 6 \\ v_4 = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Επομένως 6 ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και 3 ημέρες θερμοκρασία 25°C .

- β.** Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $v = 20$ (άρτιος), η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή της 10ης και της 11ης παρατήρησης. Επομένως η διάμεσος είναι

$$\delta = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{24 + 24}{2} = 24$$

B2. Είναι $v = 20$.

Επομένως

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 9 \quad (1)$$

Επιπλέον έχουμε ότι $\frac{x_{10} + x_{11}}{2} = 24,5$. Άρα είναι $x_{10} = 24$ και $x_{11} = 25$.

Αλλά

$$v_1 + v_2 + v_3 = \frac{v}{2} \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 10 \Leftrightarrow 2 + 4 + v_3 = 10 \Leftrightarrow v_3 = 4$$

Άρα από την σχέση (1) προκύπτει ότι $v_4 = 5$.

Επομένως 4 ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και 5 ημέρες θερμοκρασία 25°C

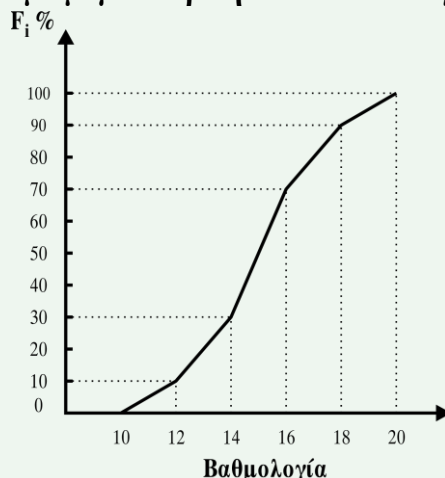
13ο.

ΘΕΜΑ Β

Θ.Π.Ε.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20.

Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



B1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

B2. Να βρείτε τη διάμεσο.

B3. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες (10+5+10)=25

Λύση

B1. Δέκα μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14, άρα $v_2 = 10$. Από το διάγραμμα είναι $F_2\% = 30$ και $F_1\% = 20$, οπότε η σχετική συχνότητα f_2 είναι

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 30\% - 20\% = 10\%, \text{ άρα } f_2 = 0,1$$

Αλλά

$$f_2 = \frac{v_2}{v},$$

οπότε είναι

$$f_2 = 0,1 \Leftrightarrow \frac{v_2}{v} = 0,1 \Leftrightarrow \frac{10}{v} = 0,1 \Leftrightarrow v = 100.$$

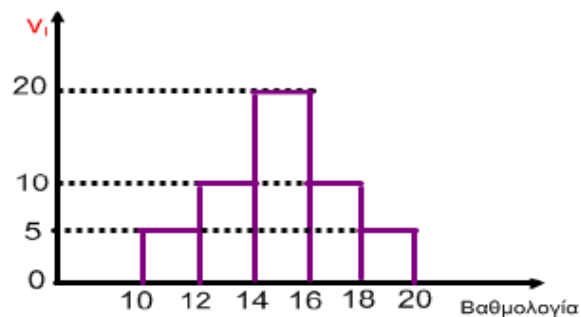
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B2. Η ευθεία με εξίσωση $y = 50$ τέμνει το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό σε σημείο του οποίου η τετμημένη είναι ίση με 15. Άρα η διάμεσος είναι $\delta = 15$.

B3. Κατασκευάζουμε αρχικά τον πίνακα συχνοτήτων.

Κλάσεις	$F_i \%$	$f_i \%$	n_i
$[10, 12)$	10	10	5
$[12, 14)$	30	20	10
$[14, 16)$	70	40	20
$[16, 18)$	90	20	10
$[18, 20)$	100	10	5
Σύνολο	-	100	50

Από τον παραπάνω πίνακα κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων:



14ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [–)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108° .

B1. Να δείξετε ότι $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$, $f_3 = \frac{5}{10}$, $f_4 = \frac{3}{10}$

B2. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

- i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.
- ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.
- iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

Μονάδες $[10+(5+5+5)]=25$

Λύση

B1. Δίνεται ότι η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην 4^η κλάση είναι 108° , άρα

$$\alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 108 = f_4 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_4 = 0,3 \Leftrightarrow f_4 = \frac{3}{10}.$$

Επίσης δίνεται ότι $f_1 = f_2$.

Γνωρίζουμε ότι

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_1 + f_3 + \frac{3}{10} = 1 \Leftrightarrow 2f_1 + f_3 = \frac{7}{10} \quad (1)$$

Δίνεται επίσης ότι

$$\begin{aligned} \bar{x} = 70 &\Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 70 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i \frac{v_i}{v} = 70 \Leftrightarrow \sum x_i f_i = 70 \Leftrightarrow \\ 30f_1 + 50f_2 + 70f_3 + 90f_4 &= 70 \Leftrightarrow 80f_1 + 70f_3 + 90 \cdot 0,3 = 70 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 80f_1 + 70f_3 = 43 \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$ και $f_3 = \frac{5}{10}$.

B2. Δίνεται $v = 50$.

i. Είναι $v_i = v \cdot f_i$, από όπου βρίσκουμε $v_1 = 5$, $v_2 = 5$, $v_3 = 25$ και $v_4 = 15$.

Έτσι έχουμε το παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
$[20, 40)$	30	5	0,1
$[40, 60)$	50	5	0,1
$[60, 80)$	70	25	0,5
$[80, 100)$	90	15	0,3
Σύνολο	-	50	1

ii. Το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60 είναι

$$v_3 + v_4 = 25 + 15 = 40.$$

iii. Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70 ανήκουν (θεωρώντας ότι οι βαθμολογίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις) στο μισό της 2^{ης} κλάσης και στο μισό της 3^{ης} κλάσης.

Είναι $\frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,3$, άρα το ποσοστό είναι 30%.

15ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ . Π . Ε .

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144° .
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	ΣΧΕΤ ΣΥΧΝ f_i	ΣΧΕΤ ΣΥΧΝΟΤ $f_i \%$
ΣΥΝΟΛΟ				

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας των μαθητών.

B3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14.

B4. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17.

Μονάδες $(10+6+4+5)=25$

Λύση

B1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι $n = 60$ και

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 144 = f_3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_3 = 0,4 \quad (1).$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Επίσης $f_1 = f_2$ (2) και

$$v_1 + v_2 + v_3 = 48 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = \frac{48}{60} \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,8 \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $f_1 = f_2 = 0,2$.

Δίνεται ακόμα ότι $v_5 = 6 \Leftrightarrow f_5 = 0,1$, άρα και $f_4 = 0,2 - 0,1 = 0,1$.

Εύκολα συμπληρώνουμε τώρα τον πίνακα, προσθέτοντας μία ακόμα στήλη, η οποία χρειάζεται για τα επόμενα ερωτήματα.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	$x_i \cdot v_i$
$[10, 12)$	11	12	0,2	20	132
$[12, 14)$	13	12	0,2	20	156
$[14, 16)$	15	24	0,4	40	360
$[16, 18)$	17	6	0,1	10	102
$[18, 20)$	19	6	0,1	10	114
ΣΥΝΟΛΟ	-	60	1	100	864

B2. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \frac{864}{60} = 14,4$

B3. Από 10 έως 14 είναι οι μαθητές που αντιστοιχούν στην πρώτη και στη δεύτερη κλάση, άρα

$$v_1 + v_2 = 12 + 12 = 24 \text{ μαθητές.}$$

B4. Το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμό τουλάχιστον 17 (θεωρώντας ότι οι βαθμολογίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις) είναι

$$\frac{1}{2} f_4 \% + f_5 \% = 5\% + 10\% = 15\%$$

16ο.

Θ Ε Μ Α Β

Θ.Π.Ε.

Οι ημέρες αδείας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ημερών	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[6, \dots)$		16			
$[\dots, \dots)$					
$[\dots, \dots)$					
$[\dots, \dots)$					
$[\dots, 26)$					
ΣΥΝΟΛΟ	-				

Αν ισχύει ότι:

στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδείας το τόξο α_1 του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι 72° , και

$$3f_2 = 3f_5 = f_3 = f_4, \text{ τότε:}$$

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.

B2. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

B3. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδείας και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
(Δίνεται ότι: $\sqrt{25,6} \approx 5,06$)

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες.

$$\text{Μονάδες } (8+4+8+5)=25$$

Λύση

B1. Το εύρος του δείγματος είναι $26-6=20$. Και εφόσον θέλουμε ομαδοποίηση σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, προκύπτει πως το πλάτος της κάθε κλάσεις θα είναι ίσο με $\frac{20}{5} = 4$.

Έτσι δημιουργούνται οι κλάσεις :

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$[6,10), [10,14), [14,18), [18,22)$ και $[22,26)$

Το τόξο α_1 του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση είναι 72° , άρα

$$\text{έχουμε} \quad \alpha_1 = \frac{v_1}{v} \cdot 360 \Leftrightarrow 72 = \frac{16}{v} \cdot 360 \Leftrightarrow v = 80.$$

$$\text{Άρα επειδή } v_1 = 16, \text{ έχουμε } f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{16}{80} = 0,2.$$

$$\text{Επίσης } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,2 + f_2 + 3f_2 + 3f_2 + f_2 = 1 \Leftrightarrow f_2 = 0,1$$

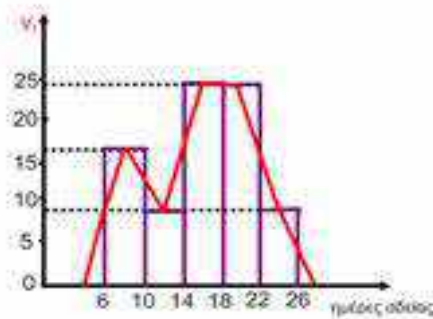
$$\text{Επομένως } f_3 = f_4 = 0,3 \text{ και } f_5 = 0,1.$$

Συμπληρώνουμε τώρα εύκολα τον πίνακα :

B2.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
$[6, 10)$	8	16	0,2	16	0,2	128	1024
$[10, 14)$	12	8	0,1	24	0,3	96	128
$[14, 18)$	16	24	0,3	48	0,6	384	0
$[18, 22)$	20	24	0,3	72	0,9	480	384
$[22, 26)$	24	8	0,1	80	1	192	512
ΣΥΝΟΛ	-	80	1	-	-	1280	2048

Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων:



B3. Έχοντας συμπληρώσει τις δύο τελευταίες στήλες του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι:

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

- Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{1280}{80} = 16$
- Η διακύμανση είναι $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{2048}{80} = 25,6,$

άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{25,6} \simeq 5,06$

B4. Το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\frac{1}{2}f_2\% + f_3\% + f_4\% + \frac{3}{4}f_5\% = \frac{1}{2}10\% + 30\% + 30\% + \frac{3}{4}10\% = 72,5\%.$$

17ο.

Θ Ε Μ Α Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι χρόνοι (σε min) που χρειάστηκαν για να λύσουν μία άσκηση οι μαθητές ενός σχολείου. Γνωρίζουμε ότι το 85% των μαθητών χρειάστηκε λιγότερο από 16 min για να λύσουν την άσκηση, ενώ το 35% των μαθητών χρειάστηκε τουλάχιστον 12 min για να λύσουν την άσκηση.

Χρόνος [...,...)	Σχ.συχ $f_i\%$
4-8	
8-12	5
12-16	
16-20	10
20-24	

B1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

B2. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

B3. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 40, να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών που χρειάστηκε το πολύ 10 min για να λύσει την άσκηση.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

Λύση

B1. Εφόσον το 85% των μαθητών χρειάστηκε λιγότερο από 16 min για να λύσει την άσκηση, τότε το 15% χρειάστηκε τουλάχιστον 16 min. Άρα έχουμε:

$$f_4 \% + f_5 \% = 15 \Leftrightarrow f_5 \% = 15 - 10 = 5.$$

Επίσης το 35% χρειάστηκε τουλάχιστον 12 min για να λύσει την άσκηση, οπότε το 65% χρειάστηκε λιγότερο από 12 min.

Άρα είναι

$$f_1 \% + f_2 \% = 65 \Leftrightarrow f_1 \% = 65 - 5 = 60.$$

Επίσης είναι: $f_1 \% + f_2 \% + f_3 \% + f_4 \% + f_5 \% = 100 \Leftrightarrow f_3 \% = 20.$

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις [.....)	$f_i \%$
4-8	60
8-12	5
12-16	20
16-20	10
20-24	5
Σύνολο	100

B2. Η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση $\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i$, όπου x_i είναι τα κέντρα των κλάσεων, οπότε:

$$\bar{x} = 6 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,05 + 14 \cdot 0,2 + 18 \cdot 0,1 + 22 \cdot 0,05 = 3,6 + 0,5 + 2,8 + 1,8 + 1,1 = 9,8$$

Άρα

η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 9,8 \text{ min.}$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

Συμπληρώνουμε τον προηγούμενο πίνακα με την στήλη των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i \%$:

Κλάσεις [.....)	$f_i \%$	$F_i \%$
4-8	60	60
8-12	5	65
12-16	20	85
16-20	10	95
20-24	5	100

Κατασκευάζουμε ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i \%$ και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



Η ευθεία με εξίσωση $y=50$ τέμνει το πολύγωνο στο σημείο Γ. Η ζητούμενη διάμεσος δ ισούται με την τετμημένη του σημείου Γ.

Αλλά τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια (κοινή γωνία και ορθογώνια),
οπότε έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AB}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{4} = \frac{50}{60} \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{10}{3}.$$

Άρα

η διάμεσος είναι:

$$\delta = 4 + \frac{10}{3} = \frac{22}{3}.$$

Επίσης με το «μάτι» θα μπορούσε από το σχήμα να εκτιμηθεί ότι $\delta \simeq 7$.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

B3. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 40. Αλλά το εμβαδόν του χωρίου αυτού είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, οπότε $n = 40$.

Θεωρώντας τους χρόνους των κλάσεων ομοιόμορφα κατανεμημένους, το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκε το πολύ 10 min για να λύσει την άσκηση είναι:

$$f_1\% + \frac{1}{2}f_2\% = 60\% + 2,5\% = 62,5\%$$

Άρα ο αριθμός των μαθητών που χρειάστηκε το πολύ 10 min για να λύσει την άσκηση είναι

$$n \cdot 62,5\% = 40 \cdot 62,5\% = 25 \text{ μαθητές.}$$

18ο.

ΘΕΜΑ Β

Σε μια εταιρεία απασχολούνται 20 άνδρες με μέση ηλικία 35 έτη και 10 γυναίκες με μέση ηλικία 29 έτη.

B1. Να βρεθεί η μέση ηλικία του συνόλου των απασχολούμενων στην εταιρεία.

B2. Θα μεταβληθεί η μέση ηλικία των απασχολούμενων, αν απολυθούν 2 γυναίκες ηλικίας 30 και 36 ετών;

B3. Πόσο θα μεταβληθεί η αρχική μέση ηλικία, αν απολυθεί μια γυναίκα ηλικίας 22 ετών και ένας άνδρας ηλικίας 30 ετών;

B4. Πόσο θα μεταβληθεί η αρχική μέση ηλικία, αν απολυθούν δύο άνδρες ηλικίας 42 και 45 ετών και προσληφθούν δύο γυναίκες ηλικίας 20 και 22 ετών.

$$\text{Μονάδες } (4+7+7+7)=25$$

Λύση

B1. Η μέση ηλικία των 30 απασχολούμενων είναι:

$$\bar{x}_1 = \frac{20 \cdot 35 + 10 \cdot 29}{20 + 10} = \frac{700 + 290}{30} = 33 \text{ έτη.}$$

B2. Αν απολυθούν δύο γυναίκες ηλικίας 30 και 36 ετών θα μείνουν 28 εργαζόμενοι και το σύνολο των ηλικιών των 8 γυναικών που παραμένουν είναι: $290 - 30 - 36 = 224$, οπότε

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β

$$\bar{x}_2 = \frac{700 + 224}{20 + 8} = 33 \text{ έτη.}$$

Άρα δεν μεταβάλλεται η μέση ηλικία, διότι η μέση ηλικία των δύο γυναικών που απολύθηκαν είναι:

$$\frac{30 + 36}{2} = 33.$$

B3. Αν απολυθεί μια γυναίκα ηλικίας 22 ετών και ένας άνδρας ηλικίας 30 ετών θα είναι ομοίως:

$$\bar{x}_3 = \frac{(700 - 30) + (290 - 22)}{(20 - 1) + (10 - 1)} = \frac{670 + 268}{28} = 33,5 \text{ έτη.}$$

Άρα η αρχική μέση ηλικία αυξάνεται κατά

$$\frac{33,5 - 33}{33} = \frac{0,5}{33} \simeq 1,5\%$$

B4. Ομοίως

$$\bar{x}_4 = \frac{(700 - 42 - 45) + (290 + 20 + 22)}{(20 - 2) + (10 + 2)} = 31,5 \text{ έτη.}$$

Άρα η αρχική μέση ηλικία μειώνεται κατά $\frac{33 - 31,5}{33} = \frac{1,5}{33} \simeq 4,5\%$.

19ο.

ΘΕΜΑ Β

ΕΠΑΛ 2017

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι: 4, κ, 5, 6, 2κ+1, 4, 6, κ+2, 6, 4

όπου: $\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

B2. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των βαθμών του φοιτητή.

B3. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2).

B4. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV.

Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \approx 1,18$.

Μονάδες $(7+5+8+5)=25$

Λύση

B1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{A.M. } x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 1+2 = 3$, άρα $\boxed{\kappa = 3}$

B2. Για $\kappa = 3$ οι βαθμοί είναι:

4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4

Οπότε η μέση τιμή τους είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{v} = \frac{4+3+5+6+7+4+6+5+6+4}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

B3. Η διακύμανση είναι:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{v} \\ &= \frac{(4-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + \dots + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2}{10} \\ &= \frac{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2}{10} \\ &= \frac{1+4+0+1+4+1+1+0+1+1}{10} = \frac{14}{10} = 1,4. \end{aligned}$$

B4. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,4} \simeq 1,18$, οπότε ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1,18}{5} = 0,236 = 23,6\%$$

20ο.

ΘΕΜΑ Β

ΕΠΑΛ 2018

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha - 1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α .

B2. Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2).

B3. Για $\alpha = 4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

B4. Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες $(7+7+7+5)=25$

Λύση

B1. Επειδή το πλήθος των αριθμών είναι 5, δηλαδή περιττός, η διάμεσος είναι τιμή του δείγματος.

$$\text{Άρα } 4\alpha - 1 = 15 \quad \text{ή} \quad \alpha = 4$$

B2. Για $\alpha = 4$ το δείγμα διαμορφώνεται: 14, 12, 18, 15, 16.

$$\text{Άρα } \bar{x} = \frac{14+12+18+15+16}{5} = 15$$

$$s^2 = \frac{1}{5} \left[(14-15)^2 + (12-15)^2 + (18-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 \right]$$

$$s^2 = 4$$

B3. $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} 100\% = \frac{2}{15} 100\% \quad 13,3\% > 10\%$

Άρα το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

B4. Αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους αριθμούς με -2 και προσθέσουμε το 5, τότε το νέο δείγμα γίνεται $y_i = -2x_i + 5, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\text{Άρα } \bar{y} = -2\bar{x} + 5 = -25$$

$$s_y = |-2| s_x = 4$$

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} 100\% = 16\%$$

1ο.

ΘΕΜΑ Γ

Θ.Π.Ε.

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

Γ1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Γ2. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Γ3. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%,
να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες (6+7+12)=25

Λύση

Γ1. Η μέση τιμή των τιμών είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} = \frac{8+10+13+13+15+16+18+14+14+9}{10} = \frac{130}{10} = 13 \text{ ευρώ.}$$

Για να βρούμε τη διάμεσο αρχικά διατάσσουμε τις τιμές με αύξουσα σειρά και έχουμε:

8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $n=10$ (άρτιος αριθμός), η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή της πέμπτης και της έκτης παρατήρησης.

$$\text{Άρα } d = \frac{13+14}{2} = 13,5.$$

Γ2. Για να βρούμε το εύρος R, εντοπίζουμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη των τιμών που είναι 18 και 8, άρα το εύρος είναι: $R = 18 - 8 = 10$

Για να βρούμε την τυπική απόκλιση s βρίσκουμε αρχικά την διακύμανση s^2 .

Επειδή η μέση τιμή είναι ακέραιος αριθμός ($\bar{x}=13$) επιλέγουμε για τον υπολογισμό της

$$\text{διακύμανσης τον τύπο: } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{x})^2 \\
 &= \frac{1}{10} \left[(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + \dots + (15-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{10} \left[(-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 \right] \\
 &= \frac{1}{10} (25 + 16 + 9 + 1 + 1 + 4 + 25) = \frac{1}{10} 90 = 9
 \end{aligned}$$

Επομένως η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{9} = 3$ και ο συντελεστής μεταβολής

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{13}.$$

Γ3. Οι αρχικές τιμές του προϊόντος $t_i, i=1, 2, \dots, 10$ έχουν (από ερωτήματα Γ1 και Γ2)

- μέση τιμή $\bar{x} = 13$,
- τυπική απόκλιση $s = 3$ και
- συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{13}$.

Οι τιμές $t_i, i=1, 2, \dots, 10$ υφίστανται έκπτωση 10%, άρα προκύπτουν νέες τιμές

$$y_i = t_i - 10\%t_i = t_i - \frac{10}{100}t_i = \frac{90}{100}t_i = 0,9t_i, \quad i=1, 2, \dots, 10$$

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των νέων τιμών είναι:

- $\bar{y} = 0,9 \bar{x} = 0,9 \cdot 13$ και
- $s_y = 0,9 s = 0,9 \cdot 3$

Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{0,9 \cdot 3}{0,9 \cdot 13} = \frac{3}{13}$

Επομένως όταν όλες οι τιμές του προϊόντος υποστούν έκπτωση 10% ο συντελεστής μεταβολής δεν μεταβάλλεται.

2ο.**Θ Ε Μ Α Γ****Θ.Π.Ε.**

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- Γ1.** Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.
- Γ2.** Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε;
(Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
- Γ3.** Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
- Γ4.** Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.
Δίνεται ότι $\sqrt{11} \approx 3,3$.

Μονάδες $(5+5+7+8)=25$

Λύση

- Γ1.** Η μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α είναι

$$\bar{x}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ χιλιάδες ώρες}$$

και η μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Β είναι

$$\bar{x}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ χιλιάδες ώρες}$$

Γ2. Η μπαταρία τύπου Α έχει μέση διάρκεια ζωής $\bar{x}_A = 22$ χιλιάδες ώρες και κοστίζει €38,

$$\text{άρα κάθε χιλιάδα κοστίζει κατά μέσο όρο } \frac{38}{22} = \frac{19}{11} \text{ €}$$

$$\text{ενώ η μπαταρία τύπου Β θα κοστίζει } \frac{40}{24} = \frac{5}{3} \text{ €}.$$

$$\text{Αλλά είναι } \frac{19}{11} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{57}{33} > \frac{55}{33},$$

άρα η μπαταρία τύπου Β κοστίζει λιγότερο, οπότε συμφέρει να αγοράσουμε την μπαταρία τύπου Β.

Γ3. Οι διακυμάνσεις και οι τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών είναι:

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}_A)^2}{5} = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (18-22)^2}{5} = \\ &= \frac{4+16+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}_B)^2}{5} = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} = \\ &= \frac{4+64+25+16+1}{5} = \frac{110}{5} = 22. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } s_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ και } s_B = \sqrt{22}.$$

Γ4. Για να βρούμε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής τους.

$$\text{Είναι: } CV_A = \frac{s_A}{|\bar{x}_A|} = \frac{\sqrt{8}}{22} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11} \quad \text{και} \quad CV_B = \frac{s_B}{|\bar{x}_B|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{24}$$

$$\text{Αλλά } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{24} > \frac{1}{11} \Leftrightarrow 11\sqrt{11} > 24, \text{ οπότε } CV_B > CV_A.$$

Άρα μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής παρουσιάζει ο τύπος Α.

3ο.

ΘΕΜΑ Γ

Θ.Π.Ε.

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Απώλεια βάρους σε κιλά	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i
$[0, \dots)$	...	20
$[\dots, \dots)$	6	40
$[\dots, \dots)$	...	45
$[\dots, \dots)$	...	30
$[\dots, \dots)$	...	25
Σύνολο	-	160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4 .

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά

συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s .

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ4. Να βρείτε τον αριθμό των ατόμων που είχαν απώλεια βάρους από 7 έως 14 κιλά.

Μονάδες $(6 + 8 + 5 + 6) = 25$

Δίνεται ο τύπος
$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

Λύση

Γ1. Αν c το πλάτος της κλάσης, η πρώτη κλάση είναι $[0, c)$ και η δεύτερη είναι $[c, 2c)$. Δίνεται ότι το κέντρο της δεύτερης κλάσης είναι 6, άρα είναι

$$\frac{c + 2c}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{3c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = \frac{12}{3} \Leftrightarrow c = 4.$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Γ2. Από το ερώτημα Γ1 είναι $c = 4$, άρα οι κλάσεις είναι

$$[0, 4), [4, 8), [8, 12), [12, 16), [16, 20)$$

με κέντρα κλάσης 2, 6, 10, 14, 18, οπότε συμπληρώνεται ο πίνακας.

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[0, 4)	2	20	40	- 8	64	1280
[4, 8)	6	40	240	- 4	16	640
[8, 12)	10	45	450	0	0	0
[12, 16)	14	30	420	4	16	480
[16, 20)	18	25	450	8	64	1600
Σύνολο	-	160	1600	-	-	4000

Με τη βοήθεια στηλών του πίνακα βρίσκουμε τη μέση τιμή:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{160} = \frac{2 \cdot 20 + 6 \cdot 40 + 10 \cdot 45 + 14 \cdot 30 + 18 \cdot 25}{160} = \frac{1600}{160} = 10$$

Για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση βρίσκουμε αρχικά την διακύμανση

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} \\
 &= \frac{(2-10)^2 \cdot 20 + (6-10)^2 \cdot 40 + (10-10)^2 \cdot 45 + (14-10)^2 \cdot 30 + (18-10)^2 \cdot 25}{160} = \\
 &= \frac{64 \cdot 20 + 16 \cdot 40 + 0 \cdot 45 + 16 \cdot 30 + 64 \cdot 25}{160} = \frac{1280 + 640 + 0 + 480 + 1600}{160} = \frac{4000}{160} = 25.
 \end{aligned}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5$.

Γ3. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\% > 10\%$.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Γ4. Θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις έχουμε ότι:

$$\text{Τα άτομα που έχουν απώλεια βάρους από 7 ως 8 κιλά είναι } \frac{1}{4}v_2 = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10.$$

$$\text{Τα άτομα που έχουν απώλεια βάρους από 8 ως 12 κιλά είναι } v_3 = 45.$$

$$\text{Τα άτομα που έχουν απώλεια βάρους από 12 ως 14 κιλά είναι } \frac{2}{4}v_4 = \frac{2}{4} \cdot 30 = 15.$$

$$\text{Άρα τα άτομα που έχουν απώλεια βάρους από 7 ως 14 κιλά είναι } 10 + 45 + 15 = 70.$$

4ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Θ . Π . Ε .

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανύμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Αθρ. σχετ. συχνότητα
[5, 15)		60			
[15,25)					68
[25,35)				180	
[35,45)					
Σύνολο	-	200		-	-

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Γ2. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i \%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Γ3. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

$$\text{Μονάδες } (10 + 5 + 5 + 5) = 25$$

Λύση

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Γ1. Με τη βοήθεια του τύπου $f_i \% = \frac{v_i}{v} \%$ υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης

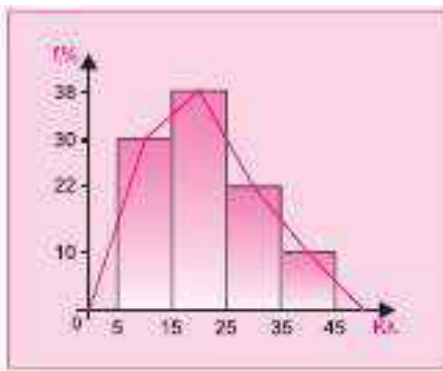
και με την βοήθεια των τύπων $v_k = N_k - N_{k-1}$ και $f_k \% = F_k \% - F_{k-1} \%$

υπολογίζουμε την αθροιστική συχνότητα N_i και την αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i \%$ της κάθε κλάσης .

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
Σύνολο	-	200	100	-	-

Γ2.



Γ3. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 60 + 20 \cdot 76 + 30 \cdot 44 + 40 \cdot 20}{200} = \frac{600 + 1520 + 1320 + 800}{200} = \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ χλμ.}$$

Γ4. Το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων είναι το άθροισμα των οχημάτων που ανήκουν στις δύο τελευταίες κλάσεις,

άρα $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$ αυτοκίνητα.

5ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων ενός οργανισμού.

Χρόνια υπηρεσίας	$F_i \%$	$f_i \%$	v_i	N_i
$[0, 5)$	10			
$[5, 10)$	24			
$[10, 15)$	40			
$[15, 20)$	50			
$[20, 25)$	80			
$[25, 30)$	100			
Σύνολο	-			-

- Γ1.** Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 50.
- Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των υπαλλήλων που έχουν συνολικό χρόνο τουλάχιστον 10 χρόνια.
- Γ3.** Να βρείτε τη γωνία του αντίστοιχου κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί σε χρόνο υπηρεσίας από 15-20 χρόνια.
- Γ4.** Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που θα συνταξιοδοτηθούν την επόμενη δεκαετία (η συνταξιοδότηση γίνεται με τη συμπλήρωση 35ετίας).

$$\text{Μονάδες} \quad (10 + 5 + 5 + 5) = 25$$

Λύση

- Γ1.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 50, άρα είναι $v = 50$,
 οπότε συμπληρώνεται ο πίνακας ως ακολούθως:

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Κλάσεις	$F_i \%$	$f_i \%$	f_i	v_i	N_i
$[0, 5)$	10	10	0,10	5	5
$[5, 10)$	24	14	0,14	7	12
$[10, 15)$	40	16	0,16	8	20
$[15, 20)$	50	10	0,10	5	25
$[20, 25)$	80	30	0,30	15	40
$[25, 30)$	100	20	0,20	10	50
Σύνολο	-	100	1	50	-

Συμπληρώνεται πρώτα η στήλη $f_i \%$ με τη βοήθεια του τύπου $f_k \% = F_k \% - F_{k-1} \%$ και στη συνέχεια η στήλη f_i .

Οπότε στηριζόμενοι στη σχέση $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$ έχουμε $v_i = v f_i$,

οπότε συμπληρώνουμε και την στήλη v_i και τέλος με την βοήθεια του τύπου

$$v_k = N_k - N_{k-1}$$

συμπληρώνουμε και την στήλη N_i

Γ2. Το πλήθος των υπαλλήλων που έχουν υπηρεσία τουλάχιστον δέκα χρόνια είναι

$$v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 8 + 5 + 15 + 10 = 38$$

Γ3. Η γωνία του αντίστοιχου κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί σε χρόνο υπηρεσίας από 15-20 χρόνια είναι

$$\alpha_4 = 360^\circ \cdot f_4 = 360^\circ \cdot 0,10 = 36^\circ.$$

Γ4. Την επόμενη δεκαετία θα συνταξιοδοτηθούν όσοι υπάλληλοι βρίσκονται στην κλάση $[25, 30)$, δηλαδή 10 υπάλληλοι.

6ο.

ΘΕΜΑ Γ

Σε έρευνα που έγινε σε δείγμα 800 οδηγών, για την ποιότητα βενζίνης που βάζουν στα αυτοκίνητά τους ανά εβδομάδα βρέθηκε ότι: 128 οδηγοί έβαλαν λιγότερα από 22 lt, ενώ 20 οδηγοί έβαλαν πάνω από 31 lt.

Αν η κατανομή της ποσότητας της βενζίνης είναι περίπου κανονική, τότε:

- Γ1.** Να βρείτε τη μέση ποσότητα βενζίνης που βάζουν οι οδηγοί και την τυπική απόκλιση της κατανομής.
- Γ2.** Πόσοι οδηγοί έβαλαν από 25 lt έως 31 lt βενζίνης.
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές και να υπολογίσετε την ελάχιστη επιπλέον ποσότητα βενζίνης που πρέπει να βάλει ο οδηγός, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.
- Γ4.** Αν όλοι οι οδηγοί του αρχικού δείγματος βάλουν 3 lt παραπάνω βενζίνη ο καθένας, να βρείτε πόσοι οδηγοί θα βάλουν από 25 lt έως 31 lt.

Μονάδες (10 + 4 + 6 + 5) = 25

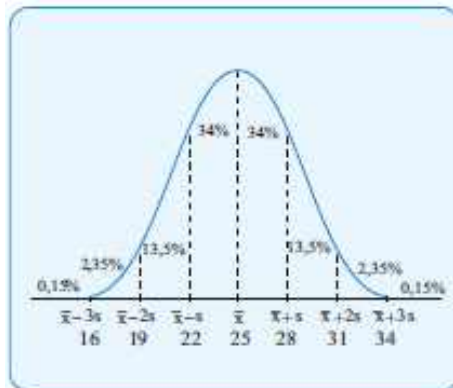
Λύση

Γ1. Οι 128 οδηγοί είναι το $\frac{128}{800} \cdot 100 = 16\%$ του δείγματος και οι 20 οδηγοί είναι το

$\frac{20}{800} \cdot 100 = 2,5\%$. Έτσι το 16% των παρατηρήσεων είναι λιγότερο από 22 lt, επομένως

$\bar{x} - s = 22$ και το 2,5% είναι πάνω από 31 lt άρα $\bar{x} + 2s = 31$.

Οπότε:
$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} - s = 22 \\ \bar{x} + 2s = 31 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{x} = 25 \\ s = 3 \end{array} \right\}.$$



Γ2. Από 25 lt έως 31 lt βενζίνης, δηλαδή τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(\bar{x}, \bar{x} + 2s)$ έβαλε το $34\% + 13,5\% = 47,5\%$ του δείγματος δηλαδή:

$$\frac{47,5}{100} \cdot 800 = 380 \text{ οδηγοί.}$$

Γ3. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{25} = 0,12 > 0,1$

οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Έστω x_i οι αρχικές παρατηρήσεις και y_i οι νέες μετά την αύξηση κατά c lt η καθεμία.

Τότε $y_i = x_i + c$.

Επομένως σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού είναι

$$\bar{y} = \bar{x} + c \Leftrightarrow \bar{y} = 25 + c \quad \text{και} \quad s_y = s_x,$$

άρα $s_y = 3$.

Για να γίνει το δείγμα ομοιογενές, πρέπει:

$$CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{3}{25 + c} \leq 0,1 \Leftrightarrow c \geq 5.$$

Άρα η ελάχιστη απαιτούμενη επιπλέον ποσότητα βενζίνης είναι 5 lt.

Γ4. Έστω x_i οι αρχικές παρατηρήσεις και z_i οι νέες μετά την αύξηση κατά 3 lt η καθεμία.

Τότε $z_i = x_i + 3$.

Επομένως σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού είναι

$$\bar{z} = \bar{x} + 3 \Leftrightarrow \bar{z} = 28 \text{ lt} \quad \text{και} \quad s_z = s_x,$$

άρα $s_z = 3$ lt.

Το νέο δείγμα έχει $\bar{z} = 28$ lt και $s_z = 3$ lt.

Επομένως στο διάστημα $(25, 31)$ δηλαδή στο $(\bar{z} - s, \bar{z} + s)$ βρίσκεται το:

$$34\% + 34\% = 68\% \text{ του δείγματος}$$

$$\text{δηλαδή} \quad \frac{68}{100} \cdot 800 = 544 \text{ οδηγοί.}$$

7ο.

ΘΕΜΑ Γ

Ο χρόνος που χρειάζεται το 99,7% των 200 μαθητών ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο κυμαίνεται από 4 έως 16 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή να βρείτε:

Γ1. Τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής.

Γ2. Τον αριθμό των μαθητών που χρειάζονται κάτω από 8 λεπτά για να πάνε στο σχολείο τους.

Γ3. Τον αριθμό των μαθητών που χρειάζονται από 6 έως 12 λεπτά για να πάνε στο σχολείο τους.

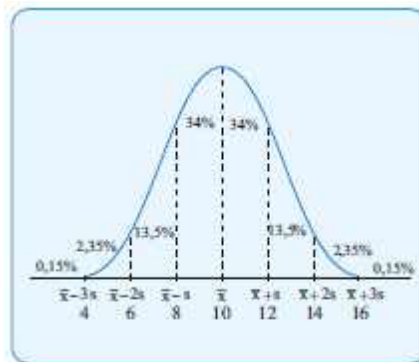
Μονάδες (9 + 8 + 8) = 25

Λύση

Γ1. Εφόσον ο χρόνος που χρειάζεται το 99,7 των 200 μαθητών κυμαίνεται από 4 έως 16 λεπτά έχουμε:

$$\bar{x} - 3s = 4 \quad (1) \quad \text{και} \quad \bar{x} + 3s = 16 \quad (2).$$

Επιλύοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε: $\bar{x} = 10$ και $s = 2$.



Γ2. Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται κάτω από 8 λεπτά για να πάνε στο σχολείο τους

είναι: $\frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%$ δηλαδή

$$200 \cdot 16\% = 32 \text{ μαθητές.}$$

Γ3. Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται από 6 έως 12 λεπτά είναι:

$$68\% + \frac{95\% - 68\%}{2} = 81,5\%$$

δηλαδή $200 \cdot 81,5\% = 163$ μαθητές.

8ο.

ΘΕΜΑ Γ

Η βαθμολογία των μαθητών της Θετικής Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου ενός Ενιαίου Λυκείου, στο μάθημα της Βιολογίας ομαδοποιήθηκε σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογίες	Κέντρο κλάσης	f_i
[... , ...)		
[... , ...)	6	0,15
[... , ...)		0,25
[... , 16)		
[... , ...)		
Σύνολο		

Δίνεται επιπλέον ότι η συχνότητα της πρώτης ισούται με τη συχνότητα της πέμπτης κλάσης, ενώ της τέταρτης είναι τετραπλάσια από αυτές.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι 4 και οι βαθμολογίες βρίσκονται στο διάστημα $[0, 20)$.

Γ2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Γ3. Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s .

Δίνονται οι τύποι:

$$s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i \quad \text{και} \quad s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$$

$$\text{Μονάδες} \quad (10 + 5 + 10) = 25$$

Λύση

Γ1. Έστω c το πλάτος της κλάσης. Τότε η τέταρτη κλάση θα είναι $[16 - c, 16)$ και αντίστοιχα οι υπόλοιπες:

$$1^{\text{η}} [16-4c, 16-3c)$$

$$2^{\text{η}} [16-3c, 16-2c)$$

$$3^{\text{η}} [16-2c, 16-c)$$

$$5^{\text{η}} [16, 16+c)$$

Το κέντρο της δεύτερης κλάσης είναι 6, άρα

$$6 = \frac{16-3c+16-2c}{2} \Leftrightarrow -5c+32=12 \Leftrightarrow -5c=-20 \Leftrightarrow c=4$$

Και οι βαθμολογίες βρίσκονται στο διάστημα: $[16-4c, 16+c)$ ή $[0, 20)$

Γ2. Επειδή $v_1 = v_5$ και $v_4 = 4v_1$,

άρα

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{v_5}{v} = f_5 \text{ και } f_4 = \frac{4v_1}{v} = 4f_1$$

επομένως

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1,$$

οπότε είναι

$$6f_1 = 1 - 0,4 \Leftrightarrow f_1 = 0,10$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Βαθμολογίες	Κέντρο κλάσης	f_i
$[0, 4)$	2	0,10
$[4, 8)$	6	0,15
$[8, 12)$	10	0,25
$[12, 16)$	14	0,40
$[16, 20)$	18	0,10
Σύνολο	-	1

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Γ3. Με τη βοήθεια των στηλών του επόμενου πίνακα υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

Βαθμολογίες	Κέντρο x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
[0 , 4)	2	0,10	0,2	4	0,4
[4 , 8)	6	0,15	0,9	36	5,4
[8 , 12)	10	0,25	2,5	100	25,0
[12 , 16)	14	0,40	5,6	196	78,4
[16 , 20)	18	0,10	1,8	324	32,4
Σύνολο	-	1	11	-	141,6

Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 11 .$$

Η διακύμανση είναι

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v^2} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \bar{x}^2 = \\
 &= 141,6 - 11^2 = 141,6 - 121 = 20,6
 \end{aligned}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{20,6} .$$

9ο.

Θ Ε Μ Α Γ

Οι μισθοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ ν υπαλλήλων μιας εταιρείας έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 800$ € και τυπική απόκλιση $s_x = 200$ €.

Γ1. Να εξετάσετε αν οι μισθοί των υπαλλήλων αποτελούν ένα ομοιογενές δείγμα.

Γ2. Η εταιρεία αποφασίζει να κάνει αύξηση μισθού κάθε υπαλλήλου κατά 10%. Να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση των μισθών.

Γ3. Αν η εταιρεία αποφάσιζε να αυξήσει τον αρχικό μισθό κάθε υπαλλήλου κατά c €, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του c ώστε οι νέοι αυτοί μισθοί να αποτελούν ένα ομοιογενές δείγμα.

Μονάδες $(7+7+11)=25$

Λύση

Γ1. Ο συντελεστής μεταβολής CV_x ισούται με: $CV_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{200}{800} = 0,25$.

Αλλά είναι $CV_x > 0,10$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ2. Μετά την αύξηση κατά 10%, οι μισθοί των υπαλλήλων γίνονται

$$y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i = x_i + 0,1x_i = 1,1x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Άρα σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού είναι $\bar{y} = 1,1\bar{x}$ και $s_y = 1,1s_x$

δηλαδή $\bar{y} = 880$ και $s_y = 220$.

Γ3. Μετά την αύξηση κατά c ευρώ των αρχικών μισθών, οι μισθοί γίνονται

$$z_i = x_i + c, \quad i=1,2,\dots,n$$

Από εφαρμογή σχολικού έχουμε ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των νέων μισθών είναι

$$\bar{z} = \bar{x} + c = 800 + c \quad \text{και} \quad s_z = s_x = 200$$

Για να αποτελούν οι νέοι μισθοί ένα ομοιογενές δείγμα, πρέπει $CV_z \leq 0,10$.

$$\text{Δηλαδή} \quad \frac{s_z}{\bar{z}} \leq 0,10 \Leftrightarrow \frac{200}{800+c} \leq 0,10 \Leftrightarrow 200 \leq 80+0,10c \Leftrightarrow c \geq 1200.$$

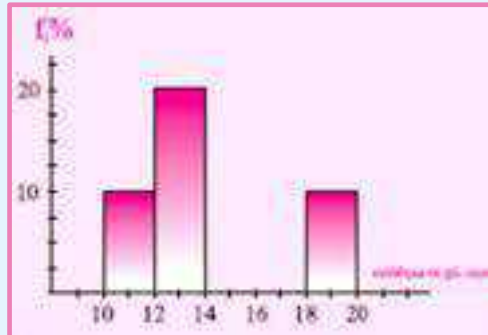
Άρα η ελάχιστη τιμή που πρέπει να πάρει το c είναι 1200, πράγμα ασύμφορο για την εταιρεία.

10ο.

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ του ετήσιου εισοδήματος σε χιλιάδες €, των εργαζομένων σε μια επιχείρηση. Από το ιστόγραμμα λείπουν τα ορθογώνια που αντιστοιχούν σε δυο κλάσεις.

Αν η μέση τιμή του ετήσιου εισοδήματος είναι 15200 € τότε:



Γ1. Να βρείτε τις συχνότητες f_3, f_4 που λείπουν.

Γ2. Η διοίκηση της επιχείρησης αποφάσισε τη χορήγηση επιδόματος θέρμανσης σε όσους από τους εργαζόμενους έχουν ετήσια έσοδα μικρότερα από 16.000 €.

Βρείτε το ποσοστό των εργαζομένων που δικαιούνται το επίδομα.

Γ3. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 40 τότε να βρείτε τον αριθμό των οικογενειών που δικαιούνται το επίδομα του προηγούμενου ερωτήματος.

Γ4. Αν η διοίκηση της εταιρείας αποφασίσει να αυξήσει τους μισθούς όλων των εργαζομένων κατά 10% από την επόμενη χρονιά, να βρείτε ποια θα είναι η μέση τιμή του ετήσιου εισοδήματος, μετά την αύξηση.

Μονάδες $(10+3+8+4)=25$

Λύση

Γ1. Είναι

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + 0,2 + f_3 + f_4 + 0,1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_3 + f_4 = 0,6 \quad (1)$$

Ακόμη είναι:

$$\bar{x} = 15,2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 15,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11 \cdot 0,1 + 13 \cdot 0,2 + 15 \cdot f_3 + 17 \cdot f_4 + 19 \cdot 0,1 = 15,2 \quad (1) \quad 15f_3 + 17f_4 = 9,6 \quad (2)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε $f_3 = f_4 = 0,3$.

Γ2. Είναι

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,6$$

Άρα το ποσοστό των εργαζομένων που έχουν ετήσια έσοδα μικρότερα από 16.000 € και δικαιούνται το επίδομα είναι ίσο με 60%.

Γ3. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 40.

Αλλά το εμβαδόν του χωρίου αυτού είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, οπότε

$$n = 40.$$

Επομένως

ο αριθμός των οικογενειών που δικαιούνται το επίδομα του προηγούμενου ερωτήματος είναι:

$$\frac{60}{100} \cdot 40 = 24 \text{ οικογένειες.}$$

Γ4. Αν x_i με $i = 1, 2, \dots, 40$

οι μισθοί των εργαζομένων πριν την αύξηση τότε οι νέοι μισθοί θα είναι:

$$y_i = x_i + \frac{10}{100} \cdot x_i = 1,1 x_i.$$

Συνεπώς η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = 1,1 \bar{x} = 1,1 \cdot 15,2 = 16,72 ,$$

δηλαδή

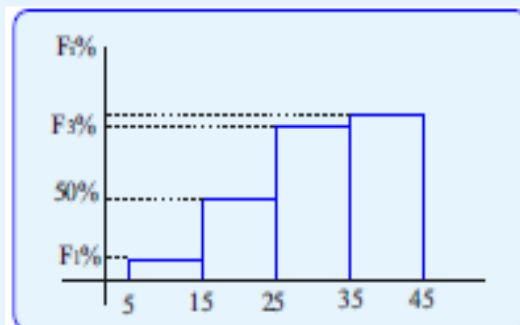
$$16720 \text{ €}.$$

11ο.

ΘΕΜΑ Γ

Θ.Π.Ε.

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5,45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Γ1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Γ2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ (μον. 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μον. 5).

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
$[5, \dots)$		$\alpha+4$	20	12	20
$[\dots, \dots)$		$3\alpha-6$	30	30	50
$[\dots, \dots)$		$2\alpha+8$	40	54	90
$[\dots, \dots)$		$\alpha-2$	10	60	100
Σύνολο			100		

Γ3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Γ4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες $(4+8+8+5)=25$

Λύση

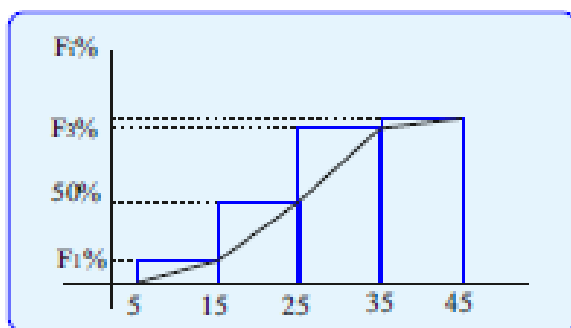
Γ1.

Κατασκευάζουμε το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και παρατηρούμε ότι το σημείο, που η ευθεία $y = 50$ τέμνει το πολύγωνο, έχει τετμημένη 25.

Άρα

η διάμεσος είναι

$$\delta = 25.$$



Γ2. Α' τρόπος

Δίνεται ότι $F_2 = 50\%$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{v_1 + v_2}{N} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+4) + (3a-6)}{(a+4) + (3a-6) + (2a+8) + (a-2)} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{4a-2}{7a+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

Β' τρόπος

Η διάμεσος ταυτίζεται με το άνω όριο της δεύτερης κλάσης,

άρα είναι :

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow a + 4 + 3a - 6 = 2a + 8 + a - 2 \Leftrightarrow a = 8$$

Επίσης το πλάτος κάθε κλάσης είναι $c = \frac{45-5}{4} = 10$.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρώνεται με βάση το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$ και με χρήση των τύπων:

- $f_i\% = 100 \frac{v_i}{v}$, για $i = 1, 2, 3, 4$
- $N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$, για $i = 1, 2, 3, 4$
- $F_i\% = f_1\% + f_2\% + \dots + f_i\%$, για $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, 15)	10	12	20	12	20
[15, 25)	20	18	30	30	50
[25, 35)	30	24	40	54	90
[35, 45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Γ3. Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα,

η μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i,$$

όπου

$$v = \sum_{i=1}^k v_i \text{ και } x_i \text{ το κέντρο της } i \text{ κλάσης}$$

Υπολογίζουμε αρχικά το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6 = 1440$$

Επομένως η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{1440}{60} = 24$.

Υπολογίζουμε επίσης το άθροισμα $\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i = 5040$,

άρα η διακύμανση είναι $s^2 = \frac{5040}{60} = 84$.

Επομένως η τυπική απόκλιση των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές είναι $s = \sqrt{84} \simeq 9,17$.

Γ4. Α' τρόπος

Το διάστημα από 37 λεπτά έως 45 λεπτά είναι τα $\frac{4}{5}$ της τέταρτης κλάσης.

Θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\frac{4}{5} \cdot f_4 \% = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8\%.$$

Β' τρόπος

Θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, αν y το

ζητούμενο ποσοστό έχουμε:
$$\frac{45-37}{45-35} = \frac{y\%}{f_4\%} \Leftrightarrow \frac{8}{10} = \frac{y\%}{10\%}$$

Άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα είναι 8%.

12ο.**ΘΕΜΑ Γ****ΕΠΑΛ 2017**

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή.

Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.

Μονάδες $(5+10+5+5)=25$

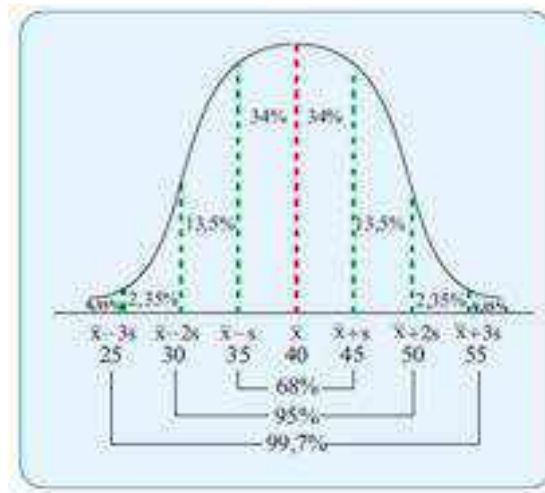
Λύση

Γ1. Επειδή το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών, η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$ έτη.

Γ2. Το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών,
άρα

$$\bar{x} - s = 35 \Leftrightarrow 40 - s = 35 \Leftrightarrow s = 5$$

Γ3.



Από το σχήμα της κανονικής κατανομής το ποσοστό των εργαζομένων που έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών είναι:

$$13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%.$$

Επομένως οι εργαζόμενοι με ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών είναι:

$$\frac{16}{100} \cdot 400 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ εργαζόμενοι.}$$

Γ4. Από το σχήμα της κανονικής κατανομής το ποσοστό των εργαζομένων που έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μεγαλύτερη των 45 ετών είναι:

$$13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%.$$

Επομένως

οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μεγαλύτερη των 45 ετών είναι:

$$\frac{81,5}{100} \cdot 400 = 81,5 \cdot 4 = 326 \text{ εργαζόμενοι.}$$

13ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η μέση τιμή των εικόνων $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ είναι ίση με 5.

Γ1. Να βρείτε το α .

Γ2. Αν $\alpha = 1$, να υπολογίσετε τη διακύμανση των εικόνων

$$f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3).$$

Γ3. Αν $\alpha = 1$ και η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \kappa^2 + 4\kappa, & x = 2 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, να βρείτε το κ .

Μονάδες $(8+8+9)=25$

Λύση

Γ1. Είναι

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 + \alpha = \alpha$
- $f(0) = 0^2 + 0 + \alpha = \alpha$
- $f(1) = 1^2 + 1 + \alpha = 2 + \alpha$
- $f(2) = 2^2 + 2 + \alpha = 6 + \alpha$
- $f(3) = 3^2 + 3 + \alpha = 12 + \alpha$

Η μέση τιμή των $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ είναι

$$\bar{x} = \frac{f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)}{5} = \frac{\alpha + \alpha + 2 + \alpha + 6 + \alpha + 12 + \alpha}{5} = \frac{5\alpha + 20}{5} = \alpha + 4$$

Αλλά $\bar{x} = 5 \Leftrightarrow \alpha + 4 = 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Γ2. Για $\alpha = 1$, οι εικόνες είναι 1, 1, 3, 7, 13.

Άρα η διακύμανσή τους είναι

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{(1-5)^2 + (1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (13-5)^2}{5} = \frac{16+16+4+4+64}{5} = \frac{104}{5}$$

Γ3. Αν $\alpha = 1$, είναι $f(x) = x^2 + x + 1$,

οπότε

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7.$$

Άρα

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \kappa^2 + 4\kappa, & x = 2 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{R}$$

Είναι

- Για $x \neq 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6 \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$$

- $h(2) = \kappa^2 + 4\kappa$

Αλλά

η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 2$,

άρα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) \Leftrightarrow 5 = \kappa^2 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa - 5 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \quad \text{ή} \quad \kappa = -5.$$

1ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε.

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Δ1. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Δ2. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ3. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Δ4. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

Λύση

Δ1. Επειδή η κατανομή είναι κανονική, το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μικρότερη από τη μέση τιμή και το 50% μεγαλύτερη από αυτή. Αφού λοιπόν το 50% έκανε χρόνο περισσότερο από 12 min είναι $\bar{x}=12$. Αφού το 50% έκανε χρόνο περισσότερο από 12 min άρα το 50% έκανε χρόνο λιγότερο από 12 min. Επίσης το 16% έκανε χρόνο λιγότερο από 10 min. Άρα το 34% έκανε χρόνο από 10 – 12 min.

Αλλά το 34% αντιστοιχεί στο διάστημα

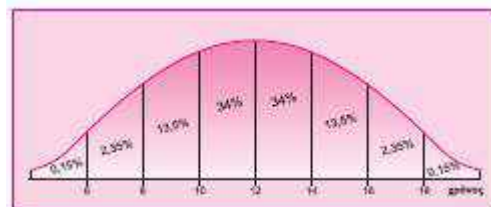
$[\bar{x} - s, \bar{x}]$. Επομένως είναι

$$\bar{x} - s = 10 \Leftrightarrow 12 - s = 10 \Leftrightarrow s = 2$$

Δ2. Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV_x = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0,166 \text{ ή } 16,6\%.$$

Άρα $CV_x > 10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Δ3. Από $14 - 16$ min έκανε το ποσοστό των μαθητών που αντιστοιχούν στο διάστημα $(14,16) = (\bar{x} + s, \bar{x} + 2s)$ δηλαδή στο 13,5%.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός μαθητών είναι: $\frac{13,5}{100} \cdot 4000 = 540$.

Δ4. Κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 min. Άρα αν t_i ήταν οι χρόνοι πριν από την καθυστέρηση με $\bar{x} = 12$ και $s = 2$, οι νέοι χρόνοι είναι $y_i = t_i + 5$.

Επομένως σύμφωνα με εφαρμογή σχολικού η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ είναι

$$\bar{y} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17.$$

Η τυπική απόκλιση παραμένει αμετάβλητη, δηλαδή είναι $s_y = s = 2$.

Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι: $CV_y = \frac{s}{\bar{y}} = \frac{2}{17}$.

Η μεταβολή του συντελεστή μεταβολής είναι: $\frac{CV_x - CV_y}{CV_x} = \frac{\frac{2}{12} - \frac{2}{17}}{\frac{2}{12}} = 0,29\%$.

2ο.

Θ Ε Μ Α Δ

Θ . Π . Ε .

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.

Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

Δ1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

Δ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ3. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Δ4. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

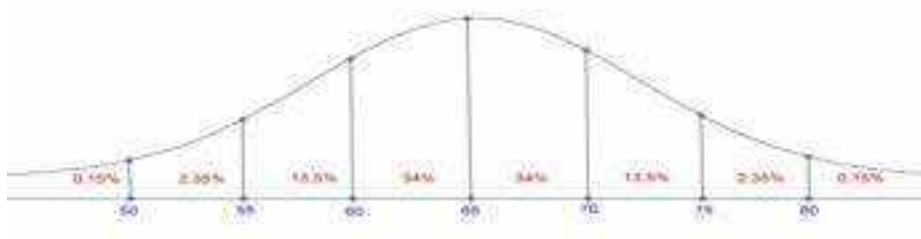
Λύση

Δ1. Επειδή το 50% των μαθητών έχουν το πολύ βάρος 65 Kg, η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x} = 65$.

Στην κανονική κατανομή η διάμεσος και η μέση τιμή ταυτίζονται, άρα και $\delta = 65$

Τα 75 Kg αντιστοιχούν στο $\bar{x} + 2s$.

Άρα $\bar{x} + 2s = 75 \Leftrightarrow 2s = 75 - 65 \Leftrightarrow s = 5$.



Δ2. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{65} \simeq 0,076 \leq 0,10$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ3. Το ποσοστό των μαθητών από 55 Kg έως 70 Kg είναι $13,5\% + 68\% = 81,5\%$.

Δ4. Το ποσοστό των μαθητών από 55 Kg έως 60 Kg είναι $13,5\%$.

Το πλήθος των μαθητών που αντιστοιχεί σε αυτό το ποσοστό είναι 27.

Με απλή αναλογία βρίσκουμε ότι το 100% των μαθητών, δηλαδή το σύνολο των μαθητών είναι 200.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

3ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε.

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετ. συχνότ. f_i
[,)	...	0, 1
[, 7)	...	...
[,)	...	0, 3
[,)	10	...
Σύνολο	-	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2^{ης} κλάσης f_2 , τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.

Δ2. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Δ3. i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s .

Δίνεται ο τύπος:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

Μονάδες [10+5+(4+6)]=25

Λύση

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Δ1. Η 3^η κλάση είναι της μορφής $[7, 7+c)$, άρα η 4^η κλάση είναι $[7+c, 7+2c)$.

Το κέντρο της 4^{ης} κλάσης είναι ίσο με 10, άρα $\frac{7+c+7+2c}{2} = 10 \Leftrightarrow c = 2$.

Δ2. Ισχύει $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + 2f_2 = 1 \Leftrightarrow f_2 = 0,2$

και συνεπώς $f_4 = 0,4$.

Εύκολα τώρα συμπληρώνουμε το δοσμένο πίνακα και όσες άλλες στήλες μας χρειάζονται για τα επόμενα ερωτήματα.

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
$[3, 5)$	4	0,1	0,4	1,6
$[5, 7)$	6	0,2	1,2	7,2
$[7, 9)$	8	0,3	2,4	19,2
$[9, 11)$	10	0,4	4	40
Σύνολα	-	-	8	68

Δ3. i. Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 8$.

ii. Η διακύμανση είναι
$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i}{v} - (\bar{x})^2$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 \frac{v_i}{v} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = 68 - 64 \Leftrightarrow s^2 = 4$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$.

4ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

Δ1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

Δ2. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

Δ3. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Δ4. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

$$\text{Μονάδες} \quad (6 + 5 + 8 + 6) = 25$$

Λύση

Δ1. Οι παρατηρήσεις των ομάδων Α και Β διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι

- **Ομάδα Α:** 1, 3, 4, 5, 8, 9.

Η μέση τιμή τους είναι $\bar{x}_A = \frac{1+3+4+5+8+9}{6} = 5$ και η διάμεσός τους $\delta_A = \frac{4+5}{2} = 4,5$

- **Ομάδα Β:** 4, 5, 6, 7, 12, 14

Η μέση τιμή τους είναι $\bar{x}_B = \frac{4+5+6+7+12+14}{6} = 8$ και η διάμεσός τους $\delta_B = \frac{6+7}{2} = 6,5$

Δ2. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων της ομάδας Α είναι

$$s_A^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2}{6} =$$

$$= \frac{16+4+1+0+9+16}{6} = \frac{46}{6} = \frac{23}{3} \quad \text{και} \quad s_A = \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{23}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{69}}{3}$$

Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων της ομάδας Β είναι

$$s_B^2 = \frac{(4-8)^2 + (5-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (12-8)^2 + (14-8)^2}{6}$$

$$= \frac{16+9+4+1+16+36}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3} \quad \text{και} \quad s_B = \sqrt{\frac{41}{3}} = \frac{\sqrt{41}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{123}}{3}$$

Άρα οι συντελεστές μεταβολής τους είναι

$$CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{69}}{15} \simeq 0,5553 \text{ περίπου } 55\%$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{123}}{24} \simeq 0,4621 \text{ περίπου } 46\%.$$

Άρα $CV_A > CV_B$ δηλαδή μεγαλύτερη ομογένεια έχει η ομάδα Β από την ομάδα Α.

Σημείωση: Επειδή τα αποτελέσματα είναι με ριζικά, η σύγκριση μπορεί να γίνει και με ύψωση στο τετράγωνο των CV_A, CV_B .

Δ3. Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι μετά την αύξηση κατά 20% της ομάδας Α και την αύξηση κατά 5€ των παρατηρήσεων της ομάδας Β οι νέες μέσες τιμές διαμορφώνονται ως εξής:

$$\bar{x}'_A = 1,2 \cdot \bar{x}_A = 6 \quad \text{και} \quad \bar{x}'_B = \bar{x}_B + 5 = 13$$

Δ4. Από την εφαρμογή έχουμε επίσης ότι οι νέες τυπικές αποκλίσεις είναι

$$s'_A = 1,2s_A \quad \text{και} \quad s'_B = s_B$$

Επομένως οι νέοι συντελεστές μεταβολής μετά τις αυξήσεις είναι:

$$CV'_A = \frac{s'_A}{\bar{x}'_A} = \frac{1,2 \cdot s_A}{1,2 \cdot \bar{x}_A} = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = CV_A \quad \quad CV'_B = \frac{s'_B}{\bar{x}'_B} = \frac{s_B}{\bar{x}_B + 5} < \frac{s_B}{\bar{x}_B} = CV_B$$

Επειδή από το ερώτημα Δ2 είναι $CV_A > CV_B$, επομένως προκύπτει ότι

$$CV'_A > CV'_B,$$

δηλαδή μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζει η ομάδα Β.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

5ο.

ΘΕΜΑ Δ

ΕΣΠΕΡ 2016

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν n υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους c , όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8,.....)		20
[.....,.....)	14	15
[.....,.....)		10
[.....,.....)		v_4
ΣΥΝΟΛΟ	-	$v = \dots$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c = 4$.

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x} = 14$ να αποδείξετε ότι $v_4 = 5$ (μον. 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s = 4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες $(4 + 6 + 5 + 6 + 4) = 25$

Λύση

Δ1. Οι δύο πρώτες κλάσεις είναι οι

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

$$[8, 8+c), [8+c, 8+2c) \text{ και } x_2 = \frac{8+c+8+2c}{2} = \frac{16+3c}{2}$$

Οπότε επειδή $x_2 = 14$, είναι $14 = \frac{16+3c}{2} \Leftrightarrow 28 = 16+3c \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

Δ2.

Κλάσεις [,) Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	v_4	$22v_4$
ΣΥΝΟΛΟ			$590 + 22v_4$

Η μέση τιμή δίνεται από την σχέση $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v}$, όπου x_i το κέντρο της κλάσης. Άρα έχουμε

$$14 = \frac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot v_4}{20 + 15 + 10 + v_4} \Leftrightarrow 14 = \frac{200 + 210 + 180 + 22v_4}{45 + v_4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14(45 + v_4) = 590 + 22v_4 \Leftrightarrow 630 + 14v_4 = 590 + 22v_4 \Leftrightarrow 40 = 8v_4 \Leftrightarrow v_4 = 5$$

Συνεπώς ο πίνακας συχνοτήτων είναι ο παρακάτω:

Κλάσεις [,) Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
ΣΥΝΟΛΟ		50	700

Δ3. Οι υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά ανήκουν στο διάστημα $[9, 12)$ και στις κλάσεις $[12, 16)$, $[16, 20)$, $[20, 24)$.

Επειδή στην κλάση $[8, 12)$ οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, το πλήθος των υπολογιστών στο διάστημα $[9, 12)$ είναι ίσο με $\frac{3}{4}v_1$.

Επομένως έχουμε:
$$\frac{3}{4}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{4} \cdot 20 + 15 + 10 + 5 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45,$$

δηλαδή 45 υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Δ4. Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{(10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 10 + (22-14)^2 \cdot 5}{20+15+10+5}$$

$$= \frac{4^2 \cdot 20 + 0 \cdot 15 + 4^2 \cdot 10 + 8^2 \cdot 5}{50} = \frac{320 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$.

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|14|} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$

Είναι $\frac{2}{7} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow 2 \cdot 10 > 7 \cdot 1 \Leftrightarrow 20 > 7$ που ισχύει.

Συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Εάν x_i είναι οι αρχικοί χρόνοι επεξεργασίας του προγράμματος και y_i οι αντίστοιχοι νέοι χρόνοι μετά την αντικατάσταση του επεξεργαστή με ταχύτερο, τότε για τους νέους χρόνους ισχύει: $y_i = 0,8x_i$

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, για τη νέα μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση s_y των χρόνων y_i ισχύει $\bar{y} = 0,8\bar{x}$ και $s_y = |0,8|s = 0,8s$,

οπότε ο αντίστοιχος συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{0,8s}{0,8\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}.$$

Επομένως και το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

6ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(16, 22)$ με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x} \pm 3s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm s$, $\bar{x}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και $s = 2$.

Δ2. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$

ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Δ3. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s.$$

Μονάδες $(10+5+10)=25$

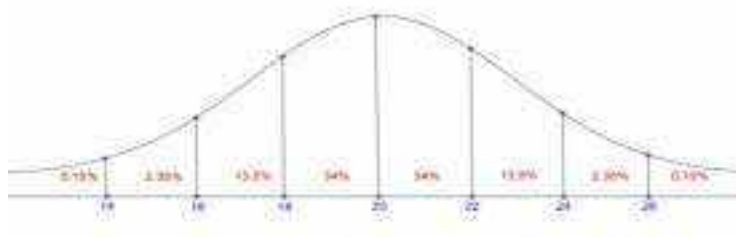
Λύση

Δ1. Επειδή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20, είναι $\bar{x} = 20$.

Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα

$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s) = (20 - 2s, 20 + s) = (16, 22), \text{ άρα } s = 2.$$

Δ2. Έτσι έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Το 95% των παρατηρήσεων ανήκει στο διάστημα

$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (16, 24) = (\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s) = (20 - \alpha \cdot 2, 20 + \alpha \cdot 2).$$

Άρα $20 - \alpha \cdot 2 = 16$ και $20 + \alpha \cdot 2 = 24$.

Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε $\alpha = 2$.

Δ3. Στην κανονική κατανομή είναι $R \simeq 6s = 12$, άρα η συνάρτηση γίνεται

$$f(x) = 6x^2 - 24x + 18$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = 12x - 24 = 12(x - 2).$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Rightarrow 12(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow 12(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$
- $f'(x) > 0 \Rightarrow 12(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		Ο.Ε	

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $f(2) = -6$.

7ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους $n = 72$ με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4 όπου $v_4 = 3v_3$. Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα 50° και 30° .

Δ1. Να βρεθούν οι συχνότητες v_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Δ2. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x_3 και x_4

Δ3. Δίνεται ότι $x_1 < -7$, $x_2 = -7$, $x_3 = 3$ και $x_4 > 3$.

Να δειχθεί ότι $10R + 72\bar{x} = 52\delta$ όπου R , $\bar{x}$, δ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες $(10 + 8 + 7) = 25$

Λύση

Δ1. Τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα 50° και 30° , άρα είναι

- $\alpha_1 = 50^\circ \Leftrightarrow v_1 \frac{360^\circ}{v} = 50^\circ \Leftrightarrow v_1 \frac{360^\circ}{72} = 50^\circ \Leftrightarrow v_1 = 10$
- $\alpha_2 = 30^\circ \Leftrightarrow v_2 \frac{360^\circ}{v} = 30^\circ \Leftrightarrow v_2 \frac{360^\circ}{72} = 30^\circ \Leftrightarrow v_2 = 6$

Επίσης έχουμε

$$v_4 = 3v_3 \quad (1) \quad \text{και} \quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 72 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 56 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $v_3 = 14$ και $v_4 = 42$.

Δ2. Τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x_3 και x_4 είναι

$$\alpha_3 = v_3 \frac{360^\circ}{v} = 14 \cdot \frac{360^\circ}{72} = 70^\circ \quad \text{και} \quad \alpha_4 = v_4 \frac{360^\circ}{v} = 42 \cdot \frac{360^\circ}{72} = 210^\circ.$$

Δ3. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι η διάταξη των παρατηρήσεων είναι

$$\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{10 \text{ φορές}} < \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{6 \text{ φορές}} < \underbrace{x_3, x_3, \dots, x_3}_{14 \text{ φορές}} < \underbrace{x_4, x_4, \dots, x_4}_{42 \text{ φορές}}$$

Επομένως

- το εύρος είναι $R = x_4 - x_1$
- η διάμεσος δ ισούται με το ημιάθροισμα $36^{\text{ης}}$ και $37^{\text{ης}}$ παρατήρησης, άρα

$$\delta = \frac{x_4 + x_4}{2} = x_4$$

- η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{10x_1 + 6 \cdot (-7) + 14 \cdot 3 + 42x_4}{72} = \frac{10x_1 + 42x_4}{72}$

$$\text{Άρα είναι} \quad 10R + 72\bar{x} = 10(x_4 - x_1) + 72 \cdot \frac{10x_1 + 42x_4}{72} = 52x_4 = 52\delta.$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

8ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i v_i$
[25,)			x			
[,)			$x+20$			
[,)			$2x$			
[,)			x^2-6x			
ΣΥΝΟΛΟ						

Δ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες $f_i \%$, $i = 1, 2, 3, 4$

Δ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι $\delta = 50$ χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι $c = 10$.

Δ3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών.

Δ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια;

Μονάδες $(6+8+6+5)=25$

Λύση

Δ1. Είναι $\sum_{i=1}^4 f_i \% = 100$,

άρα έχουμε

$$x + (x + 20) + 2x + (x^2 - 6x) = 100 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \quad \text{ή} \quad x = -8.$$

Επειδή το x είναι μία από τις σχετικές συχνότητες, είναι θετικός αριθμός, άρα η τιμή $x = -8$ απορρίπτεται.

Άρα είναι

$$f_1 = 10\% \quad , \quad f_2 = 30\% \quad , \quad f_3 = 20\% \quad , \quad f_4 = 40\%$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Δ2. Έστω c το πλάτος των κλάσεων.

Κλάσεις	$f_i \%$	$F_i \%$
$[25, 25+c)$	10	10
$[25+c, 25+2c)$	30	40
$[25+2c, 25+3c)$	20	60
$[25+3c, 25+4c)$	40	100
ΣΥΝΟΛΟ	100	-

Σύμφωνα με τον ορισμό της διαμέσου, το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν.

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι το 50% αντιστοιχεί στο κέντρο της τρίτης κλάσης με δεδομένο ότι η κατανομή μέσα σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφη.

Το κέντρο της τρίτης κλάσης είναι $\frac{25+2c+25+3c}{2} = \frac{50+5c}{2}$,

$$\text{άρα } \frac{50+5c}{2} = 50 \Leftrightarrow c = 10.$$

Δ3. Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Κλάσεις	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i v_i$
$[25, 35)$	30	5	10	5	10	150
$[35, 45)$	40	15	30	20	40	600
$[45, 55)$	50	10	20	30	60	500
$[55, 65)$	60	20	40	50	100	1200
ΣΥΝΟΛΟ	-	50	100	-	-	2450

Άρα η μέση τιμή των ηλικιών είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{2450}{50} = 49$ χρόνια.

Δ4. Έστω ότι θα προσληφθούν x άτομα των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

κλάση. Η μέση τιμή των ηλικιών αυτών των ατόμων είναι όσο το κέντρο της κλάσης, δηλαδή 30 χρόνια. Επομένως έχουμε

$$\frac{x \cdot 30 + 50 \cdot 49}{50 + x} = 40 \Leftrightarrow x = 45 .$$

Άρα πρέπει να προσληφθούν 45 άτομα από αυτήν την κατηγορία.

9ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα Ι, όπου $f_i \%$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων.

Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Δίνεται ότι:

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108° .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$.

Κλάσεις	$f_i \%$
[8, 10)	
[10, 12)	14
[12, 14)	
[14, 16)	
[16, 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 10$, $f_3\% = 30$, $f_4\% = 20$, $f_5\% = 30$.

Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο.

Δ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \approx 2,57$.

Δ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα και v_1, v_2, v_3 και v_4 , οι συχνότητες της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα.

Αν $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$, βρείτε το πλήθος n των παρατηρήσεων του δείγματος

Δ4. Έστω a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα n παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{a}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και s_a την τυπική τους απόκλιση.

Εάν $\beta_i = \frac{a_i - \bar{a}}{s_a}$, για $i = 1, 2, 3, 4, 5$, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του

δείγματος $\beta_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση s_β είναι ίση με 1.

Μονάδες $(6+7+5+7)=25$

Λύση

Δ1. Στην πρώτη κλάση περιέχεται το 10% των παρατηρήσεων, άρα $f_1\% = 10$

Στην τελευταία κλάση περιέχεται το 30% των παρατηρήσεων, άρα $f_5\% = 30$

Δίνεται ότι $\alpha_3 = 108^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{\alpha_3}{360^\circ} = \frac{108}{360} = 0,3$, άρα $f_3\% = 30$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{i=1}^5 x_i f_i \\ &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 \\ &= 9,9 + 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4\end{aligned}$$

Αλλά δίνεται ότι $\bar{x} = 14$, άρα

$$9,9 + 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 14 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \quad (1)$$

Επίσης ισχύει

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε $f_2 = 0,1$ και $f_4 = 0,2$

Άρα έχουμε $f_2\% = 20$ και $f_4\% = 20$.

Δ2. Η διακύμανση είναι $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 v_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 f_i (x_i - 14)^2 = 6,6$,

άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{6,6} = 2,57$

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} = 0,18357 = 18,357\% > 10\% ,$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ3. Έστω n το πλήθος των παρατηρήσεων. Τότε $v_1 = n \cdot f_1 = 0,1 \cdot n$

Ομοίως βρίσκουμε $v_2 = 0,1 \cdot n$, $v_3 = 0,3 \cdot n$, $v_4 = 0,2 \cdot n$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_i v_i &= 1780 \Leftrightarrow x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 1780 \Leftrightarrow \\ 9 \cdot 0,1n + 11 \cdot 0,1n + 13 \cdot 0,3n + 15 \cdot 0,2n &= 1780 \Leftrightarrow 8,9n = 1780 \Leftrightarrow n = 200 \end{aligned}$$

Δ4. Είναι $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{s_{\alpha}} = \frac{1}{s_{\alpha}} \cdot \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_{\alpha}}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

Επομένως σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του νέου δείγματος είναι αντίστοιχα:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_{\alpha}} = 0 \text{ και } s_{\beta} = \frac{1}{s_{\alpha}} \cdot s_{\alpha} = 1.$$

10ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε

Θεωρούμε ένα δείγμα n συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες.

Δίνεται ότι:

- Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.
- Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με 36° .
- $\frac{N_1}{4} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{15} = \frac{N_4}{18}$, όπου N_1, N_2, N_3 και N_4 είναι οι αθροιστικές

συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4.

Δ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Κλάσεις (σε ώρες)	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες $f_i \%$
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
Σύνολο		

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4, δίνεται ότι

$$f_1\% = 20, f_2\% = 25, f_3\% = 30, f_4\% = 15 \text{ και } f_5\% = 10.$$

Δ3. Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

Δ4. Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι 4 ώρες δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών.

Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος τον μήνα Μάιο.

$$\text{Μονάδες } (4+10+5+6)=25$$

Λύση

Δ1. Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν, άρα, αν c το πλάτος κλάσης, οι κλάσεις είναι της μορφής

$$[0, c), [c, 2c), [2c, 3c), [3c, 4c), [4c, 5c)$$

Επίσης το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18, άρα $\frac{4c+5c}{2} = 18 \Leftrightarrow c = 4$

Δ2. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 5^η κλάση είναι $\alpha_5 = 36^\circ \Leftrightarrow f_5 = \frac{36}{360} = 0,1$

$$\text{και } \frac{v_5}{v} = 0,1 \Leftrightarrow v_5 = 0,1v \Leftrightarrow f_5 = 0,1.$$

$$\text{Ισχύουν } N_1 = v_1, N_2 = N_1 + v_2 \Leftrightarrow \frac{9N_1}{4} = N_1 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{5v_1}{4} \Leftrightarrow f_2 = \frac{5f_1}{4}$$

$$\text{Ομοίως προκύπτει } N_3 = N_2 + v_3 \Leftrightarrow v_3 = \frac{15N_1}{4} - \frac{9N_1}{4} = \frac{6v_1}{4} \Leftrightarrow f_3 = \frac{6f_1}{4} \text{ και}$$

$$N_4 = N_3 + v_4 \Leftrightarrow v_4 = \frac{18N_1}{4} - \frac{15N_1}{4} \Leftrightarrow v_4 = \frac{3v_1}{4} \Leftrightarrow f_4 = \frac{3f_1}{4}.$$

Ξέρουμε όμως πως

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow f_1 + \frac{5f_1}{4} + \frac{6f_1}{4} + \frac{3f_1}{4} + 0,1 = 1 \Leftrightarrow \frac{18f_1}{4} = 0,9 \Leftrightarrow f_1 = 0,2$$

Έτσι προκύπτουν και $f_2 = \frac{5f_1}{4} = 0,25$, $f_3 = \frac{6f_1}{4} = 0,3$ και $f_4 = \frac{3f_1}{4} = 0,15$

Ο ζητούμενος λοιπόν πίνακας διαμορφώνεται ως εξής :

Κλάσεις	x_i	$f_i \%$
$[0, 4)$	2	20
$[4, 8)$	6	25
$[8, 12)$	10	30
$[12, 16)$	14	15
$[16, 20)$	18	10
Σύνολο		100

Δ3. Το ποσοστό των συνδρομητών που έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες είναι

$$\frac{1}{4}f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{4} \cdot 0,20 + 0,25 + \frac{1}{2} \cdot 0,30 = 0,45 = 45\%$$

Δ4. Με βάση τα δεδομένα αφαιρείται η πρώτη κλάση , άρα οι νέες κλάσεις είναι $[4, 8)$, $[8, 12)$, $[12, 16)$ και $[16, 20)$ με αντίστοιχες κεντρικές τιμές 6, 10, 14 και 18.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n' = 0,80n$, συνεπώς οι συχνότητες είναι

$$v_1 = 0,25n \text{ , } v_2 = 0,30n \text{ , } v_3 = 0,15n \text{ , } v_4 = 0,10n$$

Επομένως η μέση τιμή των τιμών από τις 4 ώρες και μετά είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{n'} = \frac{6 \cdot 0,25n + 10 \cdot 0,30n + 14 \cdot 0,15n + 18 \cdot 0,10n}{0,80n} = \frac{8,40 \cdot n}{0,80 \cdot n} = 10,5 \text{ ώρες.}$$

Άρα ο μέσος πληρωμένος χρόνος είναι $10,5 - 4 = 6,5$ ώρες.

11ο.

ΘΕΜΑ Δ

ΕΣΠΕΡ. 2016Ε

Ρωτήσαμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας να μας πουν πόσα παιδιά έχει η καθεμιά.

Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών x_i	Οικογένειες v_i
0	1
1	3
2	1
3	2
4	v_5
x_6	1
ΣΥΝΟΛΟ	v

Δ1. Αν η διάμεσος του αριθμού των παιδιών είναι $\delta = 3$, να βρείτε τις δυνατές τιμές του μεγέθους v του δείγματος.

Δ2. Αν $v = 12$ και η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών είναι $\bar{x} = \frac{8}{3}$, τότε:

α. να βρείτε την τιμή x_6 (μονάδες 5)

β. να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων (μονάδες 2) και το πολύγωνο συχνοτήτων (μονάδα 1).

Τα διαγράμματα να γίνουν με στυλό.

Δ3. Μετά από ένα χρόνο ξαναρωτήσαμε τις ίδιες οικογένειες για το πλήθος των παιδιών της καθεμιάς. Η οικογένεια που δεν είχε παιδιά απέκτησε δίδυμα και μία από τις οικογένειες που είχε ένα παιδί απέκτησε και δεύτερο. Στις υπόλοιπες οικογένειες ο αριθμός των παιδιών δεν μεταβλήθηκε. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών που προκύπτει από τις νέες παρατηρήσεις.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

Λύση

Δ1. Είναι $1+3+1+2+v_5+1=v \Leftrightarrow v=8+v_5$ (1). Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- 1^η περίπτωση: $\underbrace{0, 1, 1, 1, 2}_{5 \text{ παρατηρήσεις}}, \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\uparrow \\ \text{μεσαία} \\ \text{παρατήρηση}}}, \underbrace{3, 4, \dots, 4, x_6}_{2+v_5 \text{ παρατηρήσεις}}$

Πρέπει $5 = 2 + v_5 \Leftrightarrow v_5 = 3 \Leftrightarrow v = 11$ ⁽¹⁾

- 2^η περίπτωση: $\underbrace{0, 1, 1, 1, 2, 3}_{6 \text{ παρατηρήσεις}}, \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\uparrow \\ \text{μεσαία} \\ \text{παρατήρηση}}}, \underbrace{4, \dots, 4, x_6}_{1+v_5 \text{ παρατηρήσεις}}$

Πρέπει $6 = 1 + v_5 \Leftrightarrow v_5 = 5 \Leftrightarrow v = 13$ ⁽¹⁾

- 3^η περίπτωση: $\underbrace{0, 1, 1, 1, 2}_{5 \text{ παρατηρήσεις}}, \underbrace{\boxed{3, 3}}_{\substack{\uparrow \\ \text{μεσαίες} \\ \text{παρατηρήσεις}}}, \underbrace{4, \dots, 4, x_5}_{1+v_5 \text{ παρατηρήσεις}}$

Πρέπει $5 = 1 + v_5 \Leftrightarrow v_5 = 4 \Leftrightarrow v = 12$ ⁽¹⁾

Επομένως οι δυνατές τιμές για το v είναι $v=11$ ή $v=12$ ή $v=13$

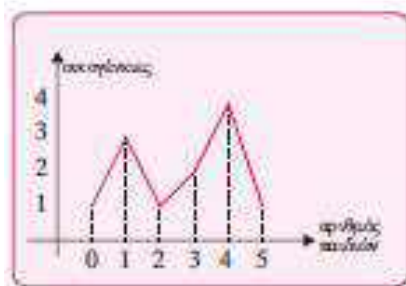
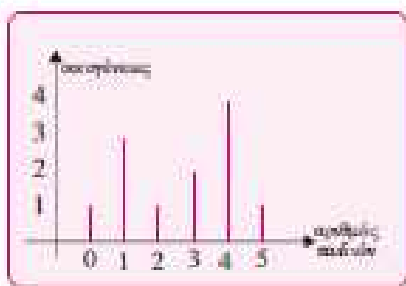
Δ2.α. Για $v=12$ και $\bar{x} = \frac{8}{3}$ είναι $v_5 = 4$, οπότε έχουμε

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
0	1	0
1	3	3
2	1	2
3	2	6
4	4	16
x_6	1	x_6
Σύνολο	12	$x_6 + 27$

Άρα είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i v_i}{v} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{x_6 + 27}{12} \Leftrightarrow x_6 + 27 = 32 \Leftrightarrow x_6 = 32 - 27 \Leftrightarrow x_6 = 5$

β. Διάγραμμα συχνотήτων και πολύγωνο συχνотήτων

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ



Δ3. Ο νέος πίνακας που προκύπτει σύμφωνα με τις αλλαγές που δίνονται στα δεδομένα είναι :

x_i	v_i'	$x_i \cdot v_i'$
1	2	2
2	3	6
3	2	6
4	4	16
5	1	5
Σύνολο	12	35

Άρα η νέα μέση τιμή είναι $\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i'}{v} = \frac{35}{12}$

Β' τρόπος: Ο αριθμός των παιδιών αυξήθηκε κατά 3, άρα

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i v_i + 3}{v} = \frac{32 + 3}{12} = \frac{35}{12}$$

12ο.

ΘΕΜΑ Δ

ΕΠΑΛ 2017

Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4)$ και

$M_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των

τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2),$

$M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των

τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5).$$

Μονάδες $(8+6+6+5)=25$

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως

πολυωνυμική με παράγωγο: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3, x \in \mathbb{R}$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Επομένως η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$
- γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$

Δ2. Από το προηγούμενο ερώτημα Δ1 προκύπτει ότι η f παρουσιάζει:

- στη θέση $x_1 = 1$ τοπικό ελάχιστο, το

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 = -\frac{1}{3}.$$

- στη θέση $x_2 = 3$ τοπικό μέγιστο, το

$$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -9 + 18 - 9 + 1 = 1.$$

Δ3. Η ευθεία $y = x + 2017$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$,

άρα αν $A(x_0, f(x_0))$ το ζητούμενο σημείο, είναι:

$$f'(x_0) = 1 \Rightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 3 = 1 \Rightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Αλλά

$$f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -\frac{8}{3} + 8 - 6 + 1 = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{-8+9}{3} = \frac{1}{3}.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

Δ4. Είναι $y = f''(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$, άρα οι τεταγμένες των σημείων

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 είναι $y_i = -2x_i + 4$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

Σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε:

$$s_y = |-2| \cdot s_x = 2 \cdot 3 = 6$$

Άρα η τυπική απόκλιση των τεταγμένων είναι $s_y = 6$.

1ο.

ΘΕΜΑ Δ

ΕΠΑΛ 2016

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^2 + ax - 3$, $a \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του a , αν $a = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$.

Δ2. Για $a = 2$ να βρείτε την $f'(x)$.

Δ3. Για $a = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$.

Δ4. Αν τα σημεία

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$$

ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες $(8+3+8+6)=25$

Λύση

Δ1. Είναι $a = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2) = 4-2 = 2$

Η εξίσωση $x^2 - 6x + 8 = 0$ έχει ρίζες τις $x_1 = 4$ και $x_2 = 2$, άρα είναι

$$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$$

Δ2. Για $a = 2$ είναι $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = (x^2)' + (2x)' - (3)' = 2x + 2$.

Δ3. Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, με

$$\lambda = f'(-2) \Leftrightarrow \lambda = 2(-2) + 2 \Leftrightarrow \lambda = -4 + 2 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -2x + \beta$. Αλλά το σημείο $M(-2, f(-2))$ ανήκει στην εφαπτομένη και επειδή είναι

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3 \quad \text{τότε}$$

$$-3 = (-2) \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow -3 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -7$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $\varepsilon: y = -2x - 7$.

Δ4. Είναι: $\bar{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 2$

Η μέση τιμή των τεταγμένων είναι $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}$

Αλλά $y_1 = -2x_1 - 7$, $y_2 = -2x_2 - 7, \dots, y_5 = -2x_5 - 7$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(-2x_1 - 7) + (-2x_2 - 7) + (-2x_3 - 7) + (-2x_4 - 7) + (-2x_5 - 7)}{5} = \\ &= \frac{-2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 5(-7)}{5} = \frac{-2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}{5} + \frac{5(-7)}{5} \\ &= -2 \cdot \bar{x} - 7 = -2 \cdot 2 - 7 = -4 - 7 \Leftrightarrow \bar{y} = -11. \end{aligned}$$

2ο.**ΘΕΜΑ Δ****Ο.Ε.Φ.Ε. 2017**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{\kappa x^2}{2} - 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι $\kappa = 5$, αν γνωρίζετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$ είναι ίσος με $\lambda = -6$.
- Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$.
- Δ3.** Αν η συνάρτηση $f(x)$ αντιπροσωπεύει το μηνιαίο κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) μιας μικρής επιχείρησης επίπλων που παράγει x καναπέδες το μήνα ($x > 0$), πόσους καναπέδες θα πρέπει να κατασκευάσει για να έχει το μέγιστο δυνατό μηνιαίο κέρδος;
- Δ4.** Να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0), f'(1), f'(2), f'(4), f'(5), f'(6)$.
- Δ5.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το εύρος και τη μέση τιμή των παραπάνω τιμών.

Μονάδες $(6 + 5 + 7 + 3 + 4) = 25$

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = \left(-\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{\kappa x^2}{2}\right)' - (3)' = -x^2 + \kappa x$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$ είναι ίσος με $\lambda = -6$ και επειδή $\lambda = f'(-1)$, είναι

$$f'(-1) = -6 \Leftrightarrow -(-1)^2 + \kappa \cdot (-1) = -6 \Leftrightarrow -1 - \kappa = -6 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$ είναι της μορφής

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta \text{ με } \lambda = f'(-1) = -6.$$

Άρα $\varepsilon: y = -6x + \beta$.

Αλλά το σημείο $(-1, f(-1))$ ανήκει στην εφαπτομένη και επειδή

$$f(-1) = -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5 \cdot (-1)^2}{2} - 3 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{2+15-18}{6} = -\frac{1}{6},$$

$$\text{είναι } -\frac{1}{6} = -6 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow -\frac{1}{6} - 6 = \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{37}{6}.$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y = -6x - \frac{37}{6}$.

Δ3. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $f'(x) = -x^2 + 5x$. Οπότε

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x < 0 \Leftrightarrow x(-x + 5) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 5$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x > 0 \Leftrightarrow x(-x + 5) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x=5$, άρα η επιχείρηση πρέπει να κατασκευάσει $x=5$ καναπέδες το μήνα για να έχει το μέγιστο κέρδος.

Δ4. Είναι

- $f'(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 = 0$, $f'(1) = -(1^2) + 5 \cdot 1 = -1 + 5 = 4$
- $f'(2) = -(2^2) + 5 \cdot 2 = 6$, $f'(4) = -(4^2) + 5 \cdot 4 = -16 + 20 = 4$
- $f'(5) = -(5^2) + 5 \cdot 5 = 0$, $f'(6) = -(6^2) + 5 \cdot 6 = -6$

Δ5. Από το προηγούμενο ερώτημα οι τιμές διατεταγμένες με αύξουσα σειρά είναι $-6, 0, 0, 4, 4, 6$

Το πλήθος τους είναι $n=6$ (άρτιος), άρα η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων. Άρα $\delta = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{0 + 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Το εύρος είναι $R = x_{\max} - x_{\min} = 6 - (-6) = 6 + 6 = 12$ και η μέση τιμή τους

$$\bar{x} = \frac{-6 + 0 + 0 + 4 + 4 + 6}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1,33...$$

3ο.

Θ Ε Μ Α Δ

Θ.Π.Ε.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.

Δ2. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Δ3. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος Δ1 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.

Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες $(7 + 10 + 8) = 25$

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως ρητή με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $\Lambda(1, 1)$ είναι της μορφής

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta, \text{ με } \lambda = f'(1) = -1.$$

Άρα $\varepsilon: y = -x + \beta$. Αλλά το σημείο $\Lambda(1, 1)$ ανήκει στην εφαπτομένη οπότε είναι

$$1 = -1 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y = -x + 2$.

Δ2. Έστω $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Από το σημείο M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{2}{x}$.

Η συνάρτηση Π είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}, \quad x > 0 \text{ οπότε}$$

- $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$
- $\Pi'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x < 1$
- $\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$

x	0	-1	$+\infty$
$\Pi'(x)$		-	+
$\Pi(x)$		↘ οξ	↗

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Π παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=1$, άρα η περίμετρος του ορθογωνίου ελαχιστοποιείται όταν $x=1$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1,1)$, το οποίο σημείο ταυτίζεται με το σημείο Λ του ερωτήματος Δ1.

Δ3. Αν x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι οι τετμημένες των σημείων της ευθείας $\varepsilon: y = -x + 2$ τότε οι τεταγμένες είναι $y_i = -x_i + 2, i=1, 2, 3, 4, 5$

Άρα σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού η μέση τιμή τους είναι

$$\bar{y} = -\bar{x} + 2 \Leftrightarrow \bar{y} = -5 + 2 \Leftrightarrow \bar{y} = -3$$

και η τυπική τους απόκλιση $s_y = |-1|s_x = 2$.

4ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10, x \geq 0$.

Δ1. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο

$A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $k=2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Δ2. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\bar{x} = f(1) \text{ και τυπική απόκλιση } s = -\frac{2f'(4)}{13}.$$

Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

i. Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να

προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

$$\text{Μονάδες } (5+10+10)=25$$

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A=[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = -4x + \kappa + \frac{4}{2\sqrt{x}} = -4x + \kappa + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα είναι: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + \kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$

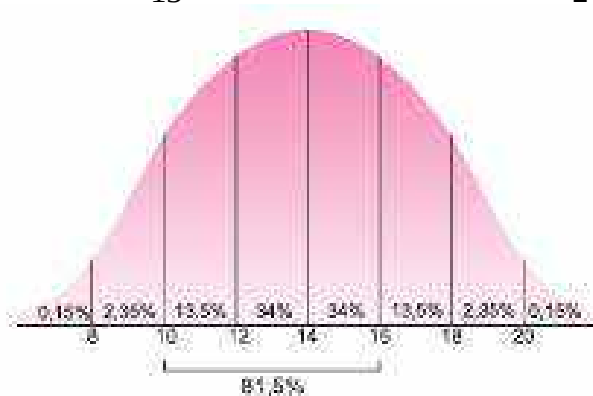
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι Άρα $\varepsilon: y = \beta$.

Αλλά το σημείο $A(1, f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη και επειδή

$$f(1) = -2 + 2 + 4 + 10 = 14 \text{ είναι } \beta = 14.$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 14$

Δ2. Είναι $\bar{x} = f(1) = 14$ και $s = -\frac{2f'(4)}{13} = 2$ όπου $f'(4) = -16 + 2 + \frac{2}{2} = -13$.



Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8, άρα οι 3 παρατηρήσεις είναι το 0,15% του συνόλου n των παρατηρήσεων.

Επομένως έχουμε $\frac{0,15}{100} \cdot n = 3 \Leftrightarrow n = 2000$.

i. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$ οπότε ο αριθμός των

ζητούμενων παρατηρήσεων είναι: $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$.

ii. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{14} \approx 0,143 > 10\%$.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Προσθέτουμε σε όλες τις παρατηρήσεις τον αριθμό a , οπότε προκύπτουν οι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

$$y_i = x_i + \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, 2000.$$

Σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού οι παρατηρήσεις y_i έχουν μέση τιμή

$$\bar{y} = \bar{x} + \alpha = 14 + \alpha \text{ και τυπική απόκλιση είναι: } s_y = s = 2.$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει: $CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{14 + \alpha} \leq 0,1 \Leftrightarrow \alpha \geq 6,$

οπότε η μικρότερη τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = 6$.

5ο.

ΘΕΜΑ Δ

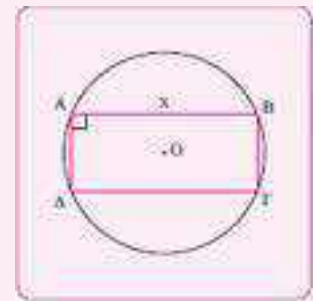
Θ.Π.Ε

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα

$\rho = 5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον

κύκλο αυτόν με πλευρά $AB = x$,

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως

συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο.

Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x}$

Μονάδες $(7+10+8)=25$

Λύση

Δ1. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $\rho = 5$.

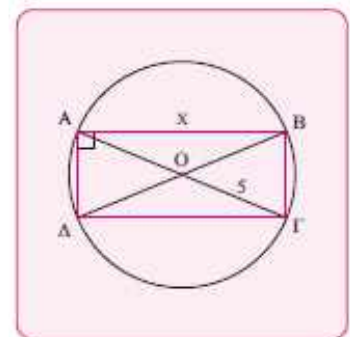
Άρα η διάμετρος του είναι $B\Delta = 10$.

Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow 10^2 = B\Gamma^2 + x^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 100 - x^2$$

Άρα για $0 < x < 10$ είναι $B\Gamma = \sqrt{100 - x^2}$.

Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι



ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

$$(AB\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma, \text{ άρα } f(x) = x\sqrt{100-x^2} \text{ με } 0 < x < 10.$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' \sqrt{100-x^2} + x \left(\sqrt{100-x^2} \right)' = \sqrt{100-x^2} + x \frac{(100-x^2)'}{2\sqrt{100-x^2}} \\ &= \sqrt{100-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} \end{aligned}$$

Είναι

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100-2x^2 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -100$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{50} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{50} \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$\bullet \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} < 0 \Leftrightarrow 100-2x^2 < 0 \Leftrightarrow -2x^2 < -100$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 50 \Leftrightarrow |x| > 5\sqrt{2} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x > 5\sqrt{2}$$

$$\bullet \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x < 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$.

$$\text{Για } x = 5\sqrt{2} \text{ είναι } B\Gamma = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Άρα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta = 5\sqrt{2}$, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Δ3. Είναι $f(1) = \sqrt{99}$, $f'(1) = \frac{100-2 \cdot 1^2}{\sqrt{100-1^2}} = \frac{100-2}{\sqrt{99}} = \frac{98}{\sqrt{99}}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{98} \cdot \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \right) \\ &= \frac{1}{98} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{(\sqrt{99})^2} = \frac{\sqrt{99}}{99}.\end{aligned}$$

6ο.

Θ Ε Μ Α Δ

Θ.Π.Ε.

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της.

Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x .

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε

δίνεται από τον τύπο $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$.

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών

$$f'(100), f'(101), f'(102), f'(103) \text{ και } f'(104).$$

Δ4. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών

$$f'(100), f'(101), f'(102), f'(103), f'(104)$$

και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c , όπου $c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c , έτσι ώστε να ισχύει

$$CV' = 2CV.$$

Μονάδες $(6+7+5+7)=25$

Λύση

Δ1. Αν y είναι το πλάτος της περίφραξης, τότε επειδή το συρματοπλέγμα έχει μήκος 200 m ισχύει

$$x + 2y = 200 \Leftrightarrow y = \frac{200 - x}{2} \Leftrightarrow y = 100 - \frac{x}{2}.$$

Επομένως το εμβαδόν της περιφραγμένης περιοχής είναι

$$x \cdot y = x \left(100 - \frac{x}{2} \right) = 100x - \frac{1}{2}x^2,$$

δηλαδή $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 200$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 100 - x$, με $0 < x < 200$.

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 100$

x	0	100	200
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 100]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[100, 200)$ και

παρουσιάζει μέγιστο για $x = 100$, συνεπώς το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x = 100$.

Το μέγιστο αυτό εμβαδόν ισούται με $f(100) = 5000 \text{ m}^2$.

Δ3. Είναι

$$f'(100) = 0, f'(101) = -1, f'(102) = -2, f'(103) = -3 \text{ και } f'(104) = -4$$

Επομένως η μέση τιμή των αριθμών αυτών είναι $\bar{x} = \frac{0-1-2-3-4}{5} = -2$.

Δ4. Αν s είναι η τυπική απόκλιση των τιμών αυτών, $\bar{y}$ και s_y η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των νέων τιμών $y_i = x_i + c$ αντίστοιχα, τότε ισχύουν

$$\bar{y} = \bar{x} + c = -2 + c \text{ και } s_y = s.$$

$$\text{Επομένως } CV' = 2CV \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} = 2 \frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{s}{|-2+c|} = \frac{2s}{|-2|} \Leftrightarrow |c-2| = 1$$

Άρα είναι $c-2=1$ ή $c-2=-1$, συνεπώς $c=3$ ή $c=1$.

7ο.**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + 4$.

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(1, f(1))$.

Δ2. Μια τυχαία μεταβλητή X η οποία δίνει το χρόνο που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για τη διαδρομή σπίτι–σχολείο ακολουθεί κανονική κατανομή. Δίνεται επίσης ότι $\bar{x} = f(2)$, το 2,5% των μαθητών χρειάζεται χρόνο το πολύ ίσο με $\frac{4f'(3)}{11}$ λεπτά και δύο παιδιά χρειάζονται χρόνο πάνω από 20 λεπτά για να πάνε σχολείο. Να βρείτε:

- i.** Τον αριθμό των μαθητών που πάνε στο σχολείο αυτό.
- ii.** Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζεται από 12 έως 22 λεπτά
- iii.** Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές και αν όχι, να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο που πρέπει να προσθέσουμε στους προηγούμενους χρόνους των μαθητών ώστε να γίνει ομοιογενές το δείγμα των νέων χρόνων.

Μονάδες $[7 + (6 + 6 + 6)] = 25$

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 2x$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $A(1, f(1))$ είναι της μορφής

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta, \text{ με } \lambda = f'(1) = 5. \text{ Άρα } \varepsilon: y = 5x + \beta.$$

Αλλά το σημείο $A(1, f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη και επειδή $f(1) = 6$, είναι

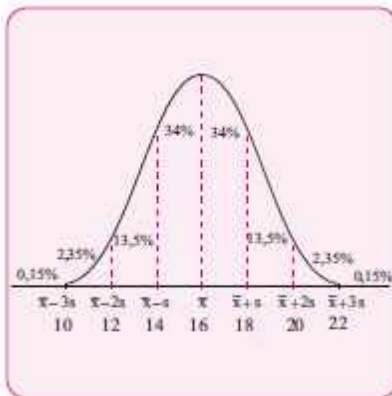
$$6 = 5 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 5x + 1$.

Δ2. Είναι $f(2) = 16$ άρα $\bar{x} = 16$.

Το 2,5% των μαθητών χρειάζονται χρόνο το πολύ ίσο με $\frac{4f'(3)}{11} = 12$,

άρα είναι $\bar{x} - 2s = 12$, οπότε $2s = 4 \Leftrightarrow s = 2$



- i. Επειδή δύο μαθητές χρειάζονται χρόνο πάνω από 20 λεπτά δηλαδή πάνω από το $x + 2s$, άρα οι δύο μαθητές είναι το 2,5% του συνόλου οπότε $\frac{2,5}{100}v = 2$ άρα
- $$v = \frac{2}{0,025} = \frac{2000}{25} = 80.$$

- ii. Το ποσοστό των μαθητών που είναι στο διάστημα $\bar{x} - 2s$ έως $\bar{x} + 3s$ είναι

$$95\% + \frac{99,7 - 95}{2}\% = 95 + 2,35 = 97,35\%.$$

- iii. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = 0,125 = 12,5\%$.

Αλλά $12,5\% > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Έστω t η τιμή που πρέπει να προσθέσουμε στους χρόνους x_i . Τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των νέων χρόνων είναι :

$$\bar{y} = \bar{x} + t \quad \text{και} \quad s_y = s = 2,$$

οπότε για να γίνει το δείγμα των νέων χρόνων ομοιογενές πρέπει:

$$CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{16+t} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 16+t \geq 20 \Leftrightarrow t \geq 4$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε 4 λεπτά (τουλάχιστον).

8ο.**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης f στο σημείο $A(2, 2)$.
- Δ2.** Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ με $0 < x < 4$ της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox και Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.
- Δ3.** Οι τετμημένες επτά διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος Δ1 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = -2$ και $s_x = 1$. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ και την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

Λύση

- Δ1.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = 2x - 5$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $A(2, 2)$ είναι της μορφής

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta, \text{ με } \lambda = f'(2) = -1.$$

Άρα $\varepsilon: y = -x + \beta$.

Αλλά το σημείο $A(2, 2)$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα είναι

$$2 = -1 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = -x + 4$.

- Δ2.** Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με xy .

Αλλά $M(x, y) \in \varepsilon$ με $\varepsilon: y = -x + 4$, οπότε $y = -x + 4$,

άρα $E(x) = x(-x + 4)$ ή $E(x) = -x^2 + 4x$, $0 < x < 4$.

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ με παράγωγο $E'(x) = -2x + 4$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Είναι

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2.$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x > 2.$

x	0	2	4
E'(x)		+	-
E(x)		↗	↘

Από τον πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν $x = 2$, οπότε $y = 2$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $A(2, 2)$

Δ3. Οι τετμημένες επτά διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος Δ1 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = -2$ και $s_x = 1$.

Οι τεταγμένες των επτά αυτών σημείων είναι $y_i = -x_i + 4$, $i = 1, 2, \dots, 7$.

Άρα σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών είναι:

$$\bar{y} = -\bar{x} + 4 \Leftrightarrow \bar{y} = (-2) + 4 = 2 \quad \text{και} \quad s_y = |-1|s_x \Leftrightarrow s_y = 1.$$

9ο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(0, 5)$ και ακόμη ότι η f παρουσιάζει ένα μόνο ακρότατο το $f(2) = 1$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, β, γ και δ .

β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = -2x + 4$.

Δ2. Έστω εκατό σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_{100}(x_{100}, y_{100})$ της εφαπτομένης (ε) του ερωτήματος Δ1.(β). Οι τετμημένες των σημείων $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} = -7$ και τυπική απόκλιση $s = 1$

- i.** Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{y}$ και την τυπική απόκλιση s_y , των τεταγμένων $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{100}$, των σημείων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ της παραπάνω εφαπτομένης.
- ii.** Να αποδείξετε ότι το δείγμα των τεταγμένων $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{100}$, των σημείων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ δεν είναι ομοιογενές.
- iii.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \kappa$, $x \in \mathbb{R}$ και έστω $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{100}$ σημεία της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $(1, g(1))$. Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε το δείγμα των τεταγμένων των σημείων $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{100}$ να είναι ομοιογενές.

Μονάδες (7+10+8)=25

Λύση

Δ1. α. Η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(0, 5)$,

άρα είναι $f(0) = 5 \Leftrightarrow \delta = 5$, οπότε $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma.$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$.

Αλλά η f παρουσιάζει ένα μόνο ακρότατο το $f(2) = 1$, οπότε:

- Αν $a \neq 0$ και $\Delta > 0$, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, οπότε δύο ακρότατα, οπότε άτοπο.
- Αν $a \neq 0$ και $\Delta = 0$, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια ρίζα διπλή, άρα δεν υπάρχει αλλαγή μονοτονίας και κατά συνέπεια δεν παρουσιάζεται ακρότατο, οπότε άτοπο.
- Αν $a \neq 0$ και $\Delta < 0$, η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζα πραγματική, άρα κανένα ακρότατο, οπότε άτοπο.

Άρα $\alpha = 0$, οπότε είναι $f'(x) = 2\beta x + \gamma$.

Επίσης επειδή η f παρουσιάζει ένα μόνο ακρότατο το $f(2) = 1$ ισχύει: $f'(2) = 0$ και $f(2) = 1$

Άρα $4\beta + \gamma = 0$ και $4\beta + 2\gamma + 5 = 1$, οπότε λύνοντας το σύστημα έχουμε $\beta = 1$ και $\gamma = -4$.

Επομένως $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- β.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $(1, f(1))$ είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = f'(1) = -2$.

Άρα $\varepsilon: y = -2x + \beta$.

Αλλά το σημείο $(1, f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη και επειδή $f(1) = 2$, είναι

$$2 = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = -2x + 4$.

- Δ2. i.** Οι τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ των σημείων $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} = -7$ και τυπική απόκλιση $s = 1$.

Άρα σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού, η μέση τιμή των τεταγμένων $y_i = -2x_i + 4$, $i = 1, 2, \dots, 100$ είναι $\bar{y} = -2\bar{x} + 4 = (-2)(-7) + 4 = 18$.

Η τυπική απόκλιση των $y_i = -2x_i + 4$, $i = 1, 2, \dots, 100$ είναι $s_y = |-2|s = 2$.

- ii.** Ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{100}$, είναι

$$CV = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} > 10\% \text{ , άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

- iii.** Είναι $g(x) = f(x) + \kappa$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$g(x) = x^2 + 4x + 5 + \kappa, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της g στο $(1, g(1))$ είναι της μορφής

$\zeta: y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = g'(1) = -2$.

Άρα $\zeta: y = -2x + \beta$.

Αλλά το σημείο $(1, g(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη και επειδή $g(1) = 2 + \kappa$, είναι

$$2 + \kappa = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4 + \kappa$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\zeta: y = -2x + 4 + \kappa$

Έστω $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{100}$ σημεία της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $(1, g(1))$, δηλαδή σημεία της $\zeta: y = -2x + 4 + \kappa$.

Αν $y_i = -2x_i + 4 + \kappa$, $i = 1, 2, \dots, 100$ οι τεταγμένες των σημείων $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{100}$, τότε από γνωστή εφαρμογή η μέση τιμή των τεταγμένων αυτών είναι $\bar{y} = -2\bar{x} + 4 + \kappa \Leftrightarrow \bar{y} = 18 + \kappa$ και η τυπική απόκλιση $s = 2$.

Θέλουμε το δείγμα των τεταγμένων των σημείων $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{100}$ να είναι ομοιογενές,

$$\text{άρα } CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{|18 + \kappa|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |18 + \kappa| \geq 20 \Leftrightarrow 18 + \kappa \leq -20 \text{ ή } 18 + \kappa \geq 20$$

$$\Leftrightarrow \kappa \leq -38 \text{ ή } \kappa \geq 2.$$

10ο.**ΘΕΜΑ Δ**

Αν η μεταβλητή X παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, ενώ η διάμεσος δ και η μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής είναι αντίστοιχα η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου A , στο οποίο η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

με τύπο $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}$ τότε:

- Δ1.** Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- Δ2.** Να εξετάσετε αν το πλήθος των τιμών της μεταβλητής X είναι περιττός αριθμός.
- Δ3.** Να εξετάσετε αν η κατανομή είναι κανονική.
- Δ4.** Να βρείτε την τυπική απόκλιση ώστε το δείγμα να είναι οριακά ομοιογενές.
- Δ5.** Για την τιμή s που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{100(s \cdot x)^2 + 2x - 15}{\sqrt{x+1} - 2}.$$

Μονάδες $(5+5+5+5+5)=25$

Λύση

Δ1. Η $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x$. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το

σημείο στο οποίο η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .

Έχουμε: $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ και

$$f(x_0) = x_0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2 + \frac{3}{4} = x_0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ και } f(x_0) = 1$$

, δηλαδή $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ οπότε η διάμεσος της κατανομής είναι $\delta = \frac{1}{2}$ ενώ η μέση τιμή $\bar{x} = 1$.

Δ2. Οι τιμές της μεταβλητής X είναι ακέραιοι αριθμοί. Αν το πλήθος των τιμών της είναι περιττός φυσικός, τότε η διάμεσος θα ήταν η μεσαία παρατήρηση δηλαδή ακέραιος αριθμός, άτοπο αφού $\delta = \frac{1}{2}$. Άρα το πλήθος των τιμών της μεταβλητής X δεν είναι περιττός αριθμός.

Δ3. Αν η κατανομή ήταν κανονική, θα ίσχυε $\bar{x} = \delta$, άτοπο. Άρα η κατανομή δεν είναι κανονική.

Δ4. Για να είναι το δείγμα «οριακά» ομοιογενές πρέπει:

$$CV = 10\% \text{ , άρα } \frac{s}{\bar{x}} 100\% = 10\% \text{ και επειδή } \bar{x} = 1 \text{ είναι } s = 0,1.$$

Δ5. Για $s = 0,1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{100(s \cdot x)^2 + 2x - 15}{\sqrt{x+1} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} [(x+5)(\sqrt{x+1}+2)] = 32. \end{aligned}$$

11ο.**ΘΕΜΑ Δ**

Μια επιχείρηση παράγει x προϊόντα με συνολικό κόστος παραγωγής που δίνεται από τη συνάρτηση $\kappa(x) = x^2 - 5x + 9$ (σε ευρώ). Το κάθε προϊόν το πουλάει 5 €.

Δ1. Να βρείτε τη συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης.

Δ2. i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους της επιχείρησης δίνεται από τον τύπο

$$P(x) = -x^2 + 10x - 9 \text{ (σε €).}$$

ii. Για ποια τιμή του x το κέρδος γίνεται μέγιστο;

Δ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1}$.

Δ4. Να δείξετε ότι $2P''(2) + P'(3) + P(4) = 15$.

Δ5. Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές: $x_1 = \kappa(2)$, $x_2 = \kappa(1)$, $x_3 = \kappa(a)$.

Αν το εύρος των παραπάνω τιμών είναι $R = 6$, να βρεθεί το a .

Μονάδες (3+6+5+5+6)=25

Λύση

Δ1. Έστω $f(x)$ η συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης. Τότε $f(x) = 5x$.

Δ2. i. Γνωρίζουμε ότι Κέρδος = Έσοδα - Κόστος.

Άρα είναι

$$P(x) = f(x) - \kappa(x) = 5x - (x^2 - 5x + 9) = 5x - x^2 + 5x - 9, \text{ οπότε } P(x) = -x^2 + 10x - 9$$

ii. Η συνάρτηση P είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $P'(x) = -2x + 10$

Είναι

- $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x = 5$
- $P'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 10 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x > 5$
- $P'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x < 5$

x	0	5	$+\infty$
$P'(x)$		+	-
$P(x)$		↗	↘

Άρα για $x=5$ το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Δ3. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x+9)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+9}{x+1} = \frac{8}{2} = 4$

Δ4. Είναι

- $P(x) = -x^2 + 10x - 9$, άρα $P(4) = -4^2 + 10 \cdot 4 - 9 = -16 + 40 - 9 = 15$
- $P'(x) = -2x + 10$, άρα $P'(3) = -2 \cdot 3 + 10 = 4$
- $P''(x) = -2$, άρα $P''(2) = -2$

Επομένως είναι $2P''(2) + P'(3) + P(4) = 2 \cdot (-2) + 4 + 15 = -4 + 4 + 15 = 15$

Δ5. Είναι

- $x_1 = \kappa(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 9 = 4 - 10 + 9 = 3$
- $x_2 = \kappa(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 9 = 1 - 5 + 9 = 5$
- $x_3 = \kappa(\alpha) = \alpha^2 - 5\alpha + 9$

Το εύρος είναι $R = x_3 - x_1 = \alpha^2 - 5\alpha + 9 - 3 = \alpha^2 - 5\alpha + 6$

Αλλά $R = 6 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 6 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 5) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 5$

12ο.

Θ Ε Μ Α Δ

Θ . Π . Ε .

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{300s^2}(t - \bar{x})^3$, $t \in \mathbb{R}$ και $s \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Δ3. Αν $f'(0) = 1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_v)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$.

Μονάδες $(5+6+8+6)=25$

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει παράγωγο

$$f'(t) = \frac{1}{300s^2} \cdot 3 \cdot (t - \bar{x})^2 \cdot (t - \bar{x})' = \frac{1}{100s^2} (t - \bar{x})^2 \geq 0.$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι $f'(t) = \frac{1}{100s^2} (t - \bar{x})^2$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει παράγωγο

$$f''(t) = \frac{1}{100s^2} \cdot 2 \cdot (t - \bar{x}) = \frac{1}{50s^2} (t - \bar{x})$$

Είναι

- $f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50s^2} (t - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow t = \bar{x}$
- $f''(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50s^2} (t - \bar{x}) < 0 \Leftrightarrow t < \bar{x}$
- $f''(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50s^2} (t - \bar{x}) > 0 \Leftrightarrow t > \bar{x}$

t	$-\infty$	$\bar{x}$	$+\infty$
$f''(t)$	-	0	+
$f'(t)$		O.E	

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \bar{x}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\bar{x}, +\infty)$ και η

f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $t = \bar{x}$, το $f'(\bar{x}) = \frac{1}{100s^2} (\bar{x} - \bar{x})^2 = 0$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και η ελάχιστη τιμή του είναι ίση με 0.

Δ3. Είναι $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{100s^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{s^2}{\bar{x}^2} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow CV^2 = \frac{1}{100} \Leftrightarrow CV = \frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα είναι οριακά ομοιογενές.

Δ4. Η τυπική απόκλιση είναι $s^2 = \frac{1}{v} \sum (t_i - \bar{x})^2$.

Άρα η ζητούμενη μέση τιμή είναι

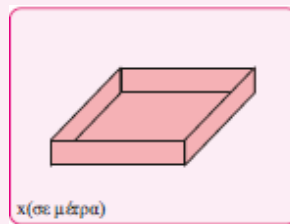
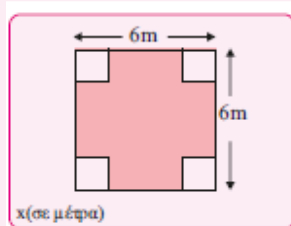
$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v f'(t_i) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \frac{1}{100s^2} (t_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{100s^2} \cdot \left[\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \right] = \frac{1}{100s^2} \cdot s^2 = \frac{1}{100}.$$

13ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θ.Π.Ε.

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0 < x < 3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x) = 4x(3-x)^2, \quad 0 < x < 3$$

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων a, b, γ είναι $V = ab\gamma$).

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x}$

Δ4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ με $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2$ οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 12$, τυπική απόκλιση $s_y = 2$ και συντελεστή μεταβολής CV_y

Να βρείτε το εύρος R των τιμών y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ με $-12 < \alpha < 0$ ο οποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i , προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε

$$CV = 2CV_y + \frac{R}{12}$$

Μονάδες $[5+5+5+(5+5)]=25$

Λύση

Δ1. Σύμφωνα με τα δεδομένα οι διαστάσεις α, β, γ του παραλληλεπίπεδου είναι:

$$\gamma = x \quad \text{και} \quad \alpha = \beta = 6 - 2x.$$

Επομένως ο όγκος της δεξαμενής είναι $f(x) = \alpha\beta\gamma = (6 - 2x)^2 \cdot x = 4x(3 - x)^2$, $0 < x < 3$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = 4(3 - x)^2 - 4x \cdot 2(3 - x) = 4(3 - x)(3 - x - 2x) = 12(3 - x)(1 - x) = 12(x - 1)(x - 3)$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3$

x	0	1	3
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$.

Επομένως η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο για $x_0 = 1$. Ο μέγιστος όγκος ισούται με $f(1) = 16 \text{ m}^3$

Δ3. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} = f'(2) = -12$

Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$, άρα η διάταξη των τιμών y_i

είναι $f(1) = f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5) = f(2)$ ή

$$16 = y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > y_5 = 8$$

Επομένως το εύρος των τιμών y_i είναι $R = 16 - 8 = 8$.

Επίσης είναι $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$

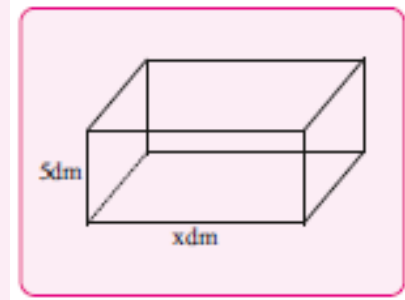
άρα αν $z_i = y_i + \alpha$, τότε $CV_z = \frac{s_z}{\bar{z}} = \frac{s_y}{\bar{y} + \alpha} = \frac{2}{12 + \alpha}$, με $12 + \alpha > 0$.

Άρα $CV = 2CV_y + \frac{R}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{12 + \alpha} = \frac{2}{6} + \frac{8}{12} \Leftrightarrow \alpha = -10$.

14ο.**ΘΕΜΑ Δ****Θ.Π.Ε.**

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.

Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$$

και να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$ όπου

$$y_i = E(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, 15 \quad \text{με} \quad 5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων x_i , $i = 1, 2, \dots, 15$ των παραπάνω σημείων $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\bar{x} = 8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε $2s^2 - 5s + 2 = 0$

τότε:

α. να αποδείξετε ότι $s = 2$.

β. να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2 με $i = 1, 2, \dots, 15$.

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

Δ3. Να βρείτε ποια από τα παραπάνω σημεία $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, 15$ έχουν τεταγμένη y_i , τέτοια ώστε $y_i = -4x_i + 9R + 1$, όπου R το εύρος των $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 15$.

Μονάδες $[8 + (4+4) + 9] = 25$

Λύση

Δ1. Αν x , y και h οι διαστάσεις του κουτιού, τότε :

$$h = 5 \quad \text{και} \quad 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x, \quad 0 < x < 10.$$

Το ολικό εμβαδό είναι :

$$E(x) = xy + 2xh + 2yh = x(10 - x) + 10x + 10(10 - x) = -x^2 + 10x + 100, \quad 0 < x < 10.$$

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με $E'(x) = -2x + 10$.

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής προκύπτει ότι η συνάρτηση $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$, οπότε το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια για $x = 5$ dm

x	0	5	10
$E'(x)$		+	-
$E(x)$		↗	↘

Δ2. α. Είναι $2s^2 - 5s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = 2$ ή $s = \frac{1}{2}$

- Αν $s = \frac{1}{2}$, τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} < 0,1$,

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές, οπότε η τιμή $s = \frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

- Αν $s = 2$, τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} > 0,1$,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, οπότε η τιμή $s = 2$ δεκτή.

Άρα $s = 2$.

β. Έστω $\bar{x}^2$ η μέση τιμή των x_i^2 , $i = 1, 2, 3, \dots, 15$, τότε :

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right\} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{15} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{15} \right)^2 \Leftrightarrow 4 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = 4 + 8^2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = 68.$$

Δ3. Η συνάρτηση $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[5, 10)$.

Άρα επειδή $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{15} = 9$ προκύπτει ότι :

$$125 = E(5) = E(x_1) > E(x_2) > \dots > E(x_{15}) = E(9) = 109$$

Επομένως το εύρος των τιμών R είναι : $R = E(5) - E(9) = 125 - 109 = 16$.

$$\text{Αλλά } E(x_i) = y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 9 \cdot 16 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x_i^2 + 14x_i - 45 > 0 \Leftrightarrow 5 < x_i < 9.$$

Άρα οι τιμές που δεν μπορεί να πάρει το x_i είναι το 5 και το 9, οπότε τα μόνα σημεία που εξαιρούμε από τα 15 σημεία είναι τα A_1 και A_{15} .

Συνεπώς τα ζητούμενα σημεία είναι συνολικά 13, τα $A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_{14}(x_{14}, y_{14})$.

15ο.

Θ Ε Μ Α Δ

Θ . Π . Ε .

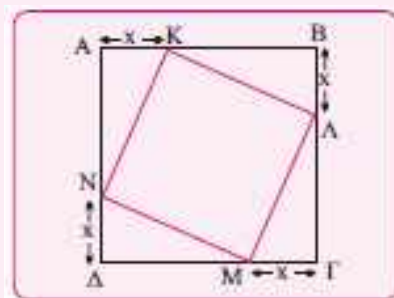
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 4. Θεωρούμε τα

εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών

$AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα, έτσι ώστε

$AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $K\Lambda M N$, ως συνάρτηση του x , είναι:



$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0, 4).$$

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Δ3. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = E(x_i)$, $x_i \in (0, 4)$, $i = 1, 2, 3, \dots, 19$ έτσι ώστε:

- Τα x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 19$ είναι διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους.
- Η μέση τιμή των x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 19$ είναι ίση με 2.
- Η μέση τιμή των y_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 19$ είναι ίση με 8,02

α. Να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2 , $i = 1, 2, 3, \dots, 19$

β. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s_x των x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 19$ και να εξετάσετε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές.

$$\text{Δίνεται ότι } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\},$$

όπου t_i , $i = 1, 2, \dots, v$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.

$$\text{Μονάδες } [5+5+(7+8)] = 25$$

Λύση

Δ1. Η μία κάθετη πλευρά των τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων είναι ίση με x , άρα η άλλη κάθετη πλευρά τους είναι ίση με $4-x$. Άρα το εμβαδόν $E(x)$ του ΚΛΜΝ είναι

$$E(x) = (ΑΒΓΔ) - 4(ΑΚΝ) = 16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x(4-x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad 0 < x < 4.$$

Δ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ με παράγωγο $E'(x) = 4(x-2)$

Είναι

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow 4(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 4(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Δ

x	0	2	4
E'(x)		-	+
E(x)		dx	

Άρα το εμβαδόν παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned}
 \Delta 3. \alpha. \text{ Έχουμε } \bar{y} = 8,02 &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{19} E_i}{19} = 8,02 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{19} 2(x_i^2 - 4x_i + 8)}{19} = 8,02 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2 \frac{\sum_{i=1}^{19} x_i^2}{19} - 8 \frac{\sum_{i=1}^{19} x_i}{19} + \frac{19 \cdot 16}{19} = 8,02 \Leftrightarrow 2\bar{x}^2 - 8\bar{x} + 16 = 8,02 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2\bar{x}^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 8,02 \Leftrightarrow 2\bar{x}^2 = 8,02 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = 4,01.
 \end{aligned}$$

β. Από τον τύπο που μας δίνεται έχουμε

$$\begin{aligned}
 s_x^2 &= \frac{1}{19} \left\{ (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{19}^2) - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{19})^2}{19} \right\} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{19}^2}{19} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{19}}{19} \right)^2 \\
 &= \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = 4,01 - 4 = 0,01.
 \end{aligned}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{0,01} = 0,1$.

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{0,1}{2} = 0,05 = 5\% < 10\%$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

16ο.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + \dots + (t_v - x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $t_1, t_2, \dots, t_v$ ο αριθμός αντίστοιχα των τυπογραφικών λαθών που βρέθηκαν στις v σελίδες ενός βιβλίου στην πρώτη του διόρθωση. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(2) = 4$, τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι $\bar{x} = 2$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $s^2 = \frac{4}{v}$.

Δ3. Να βρείτε το μικρότερο πλήθος σελίδων ώστε το δείγμα των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_v$ να είναι ομοιογενές.

Δ4. Αν $\sum_{i=1}^v t_i^2 = 724$, να βρείτε το πλήθος v των σελίδων.

Μονάδες $(7+5+8+5)=25$

Λύση

Δ1. Α' τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με παράγωγο

$$f'(x) = -2(t_1 - x) - 2(t_2 - x) - \dots - 2(t_v - x)$$

Αλλά η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(2) = 4$, άρα είναι

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow t_1 - 2 + t_2 - 2 + \dots + t_v - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} = 2 \Leftrightarrow \bar{x} = 2.$$

Β' τρόπος

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι $\bar{x} = 2$.

Δ2. Είναι $s^2 = \frac{1}{v} \left[(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + \dots + (t_v - \bar{x})^2 \right] = \frac{1}{v} f(\bar{x})$.

Αλλά η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \bar{x}$ το $f(2) = 4$, άρα $f(\bar{x}) = 4$, οπότε

$$s^2 = \frac{1}{v} \cdot 4 = \frac{4}{v}.$$

Δ3. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}}$, οπότε για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει

$$CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} \leq 0,1 \Rightarrow \frac{s^2}{\bar{x}^2} \leq 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \leq 0,01 \Leftrightarrow v \geq 100.$$

Άρα το μικρότερο πλήθος σελίδων, ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές, είναι $v = 100$.

Δ4. Είναι $s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\} \Leftrightarrow \frac{4}{v} = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{(v\bar{x})^2}{v} \right\} \Leftrightarrow 4 = 724 - 4v \Leftrightarrow v = 180.$