

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

1.1	Συναρτήσεις.	3
1.2	Η έννοια της παραγώγου.	11
1.3	Παράγωγος συνάρτησης	15
1.4	Εφαρμογές των Παραγώγων, χωρίς το κριτήριο της 2ης παραγώγου.	21
	ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ-	23
	ΤΘΔΔ (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)	35
	ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Ο.Ε.Φ.Ε. Α ΦΑΣΗ 2016-2017-2018-2019-2020-2021-2022-2023	69
	ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ Β ΦΑΣΗ 2018-2019-2020-2021-2022-2023	104

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

2.1	Βασικές έννοιες	126
2.2	Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων, χωρίς την υποπαράγραφο «Κλάσεις άνισου πλάτους».	129
2.3	Μέτρα Θέσης και Διασποράς, χωρίς τις υποπαραγράφους: "Εκατοστημόρια", "Επικρατούσα τιμή" και "Ενδοτεταρτημοριακό εύρος".	147
	ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ-	153
	ΤΘΔΔ (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)	164
	ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016-2017-2018-2019-2020-2021-2022-2023	203
	ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2016-2017-2018-2019-2020-2021-2022-2023	233
	ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Ο.Ε.Φ.Ε. Β ΦΑΣΗ 2016-2017-2018-2019-2020-2021-2022-2023	263
	ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ Γ ΦΑΣΗ 2018-2019-2020-2021-2022-2023	297
15	ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2024	323
108	ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Β-Γ-Δ	373

Καλή επιτυχία!

Μην εξαντλείστε στο να μάνετε τα
"πρόβλεπτα σωστά" αλλά προσπαθείτε να
μάνετε τα "σωστά προβλεπτά".

Οι έξυπνοι άνθρωποι συνεργάζονται
δεν διαγωνίζονται.

Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί
χωρίς τη σωστή στρατηγική. Η στρατηγική
είναι η λειτουργία που οδηγεί στην επίτευξη.

Οι νικητές διαθέτουν δύο πράγματα.
Ξεμάθαρους στόχους
και επιθυμία να πετύχουν.

Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι
το πιο πολύτιμο, το πιο ακριβό, το πιο
πεπερασμένο αγαθό.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός Συνάρτησης

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση

Απάντηση

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B .

Το σύνολο A , που λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το $\mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**.

Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A .

Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$ και διαβάζουμε “ y ίσον f του x ”.

Το $f(x)$ λέγεται τιμή της f στο x .

Πράξεις με Συναρτήσεις

2. Να ορίσετε το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων f, g που ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A .

Απάντηση

Ορίζουμε ως

άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g

τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in A$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in A$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{όπου } x \in A \text{ και } g(x) \neq 0$$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της συνάρτησης f .

Απάντηση

Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

Επομένως

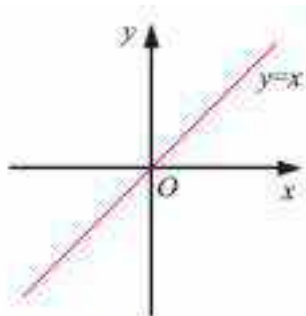
Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f , μόνο όταν $y = f(x)$

Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

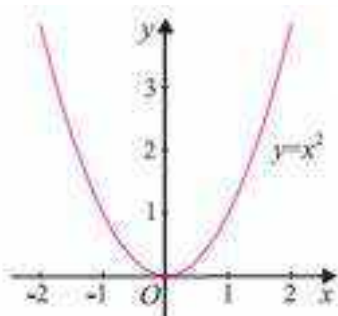
4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y = x, \quad y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}$$

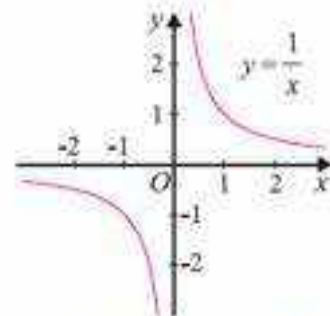
Απάντηση



(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.



(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

5. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

2016 Επαναληπτικές Μονάδες 5

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται

γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της,

όταν

για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$

με

$$x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) < f(x_2),$$

6. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται

γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της,

όταν

για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$

με

$$x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) > f(x_2).$$

7. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

Απάντηση

Μια συνάρτηση που είναι

γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , λέγεται γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ .

8. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A .

Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

2023 Επαναληπτικές Μονάδες 5 **2017** Επαναληπτικές Μονάδες 4

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0)$$

για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

9. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A .

Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0)$$

για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Όριο Συνάρτησης

10. Περιγράψτε την έννοια του ορίου.

Απάντηση

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ ”

ή

“το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ ”.

11. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, δηλαδή αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \quad \text{όπου} \quad \ell_1, \ell_2 \text{ πραγματικοί αριθμοί,}$$

να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \dots\dots\dots$

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = \dots\dots\dots$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \dots\dots\dots$

iv. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$ εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

v. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \dots\dots\dots$ $n \in \mathbb{N}^*$

vi. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \dots\dots\dots$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

Απάντηση

- i. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$
- ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \kappa \ell_1$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$
- iv. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- v. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v = \ell_1^v \quad v \in \mathbb{N}^*$
- vi. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[v]{\ell_1}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

12. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

13. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

2020 Μονάδες 4 **2017** Επαναληπτικές Μονάδες 4 **2015** Μονάδες 6

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο A , όταν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

14. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \dots\dots\dots, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \dots\dots\dots, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon \phi x = \dots\dots\dots \quad (\text{όταν } \sigma \upsilon \nu x_0 \neq 0)$$

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon \phi x = \epsilon \phi x_0 \quad (\text{όταν } \sigma \upsilon \nu x_0 \neq 0)$$

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Εφαπτομένη Καμπύλης

15. Τι πρέπει να γνωρίζετε όταν ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Απάντηση

- Θεωρούμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\varepsilon : y = \lambda x + \beta$$

όπου

ο συντελεστής διεύθυνσής της λ είναι ίσος με την $f'(x_0)$

δηλαδή

$$\lambda = f'(x_0)$$

- Το σημείο $A(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon)$, οπότε
οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης

- Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ τότε

$$\lambda = f'(x_0) = \varepsilon\omega$$

Υπενθυμίζουμε ότι

Όταν δυο ευθείες είναι παράλληλες τότε οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι ίσοι.

Παράγωγος της f στο $x = x_0$

16. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A .

Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

2023 Μονάδες 5 **2019** Επαναληπτικές Μονάδες 4 **2018** Μονάδες 5

Απάντηση

Αν το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι

η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$

Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

17. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Απάντηση

Όταν το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι ο πραγματικός αριθμός ℓ , τότε το όριο αυτό ονομάζεται

παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0

και συμβολίζεται με

$$f'(x_0)$$

δηλαδή αν:

12

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

τότε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

18. Τι εκφράζει η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 .

Απάντηση

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει

το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

Έτσι:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$f'(x_0),$$

δηλαδή

ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ είναι τη χρονική στιγμή t_0 ,

$$v(t_0) = f'(t_0),$$

δηλαδή

ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

- Αν επιπλέον η συνάρτηση $v(t)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ είναι τη χρονική στιγμή t_0 ,

$$a(t_0) = v'(t_0) = f''(t_0).$$

19. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο;

Απάντηση

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο.

Όπως είναι, για παράδειγμα,

η συνάρτηση

$$f(x) = |x| \text{ στο } x_0 = 0.$$

Διότι

όταν $h < 0$,

έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

ενώ

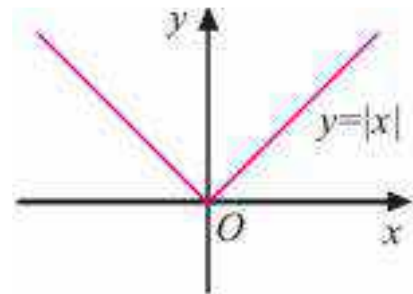
όταν $h > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

που σημαίνει ότι

δεν υπάρχει το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$



1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου

20. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πως ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

2020 Επαναληπτικές Μονάδες 5

Απάντηση

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f' .

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' .

Παραγωγή Βασικών Συναρτήσεων

21. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

2021 Μονάδες 6

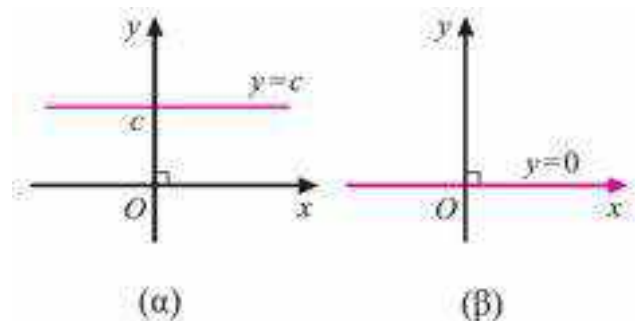
2019 Επαναληπτικές Μονάδες 7

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$



οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$

άρα $(c)' = 0.$

22. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι

$$f'(x)=1,$$

για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

2021 Επαναληπτικές Μονάδες 7 **2019** Μονάδες 8 **2016** Μονάδες 10

Απάντηση

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$$

και για $h \neq 0$.

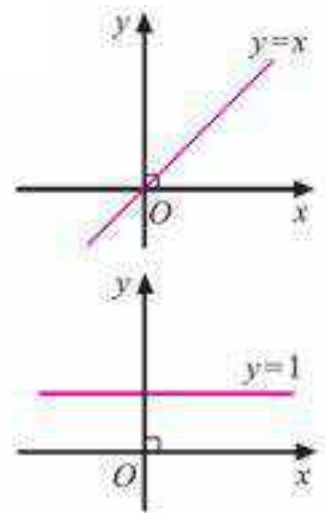
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

άρα

$$(x)' = 1.$$



23. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι

$$f'(x)=(x^2)' = 2x,$$

για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

2022 Μονάδες 7 **2020** Μονάδες 6

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h,$$

και για $h \neq 0$,

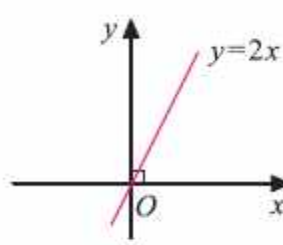
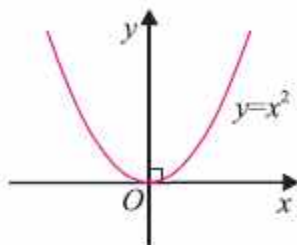
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h.$$

Επομένως,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

Άρα

$$(x^2)' = 2x.$$



Αποδεικνύεται ότι

$$(x^v)' = vx^{v-1}, \text{ όπου } v \text{ φυσικός.}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.

Άρα

$$(x^p)' = px^{p-1}, \text{ όπου } p \text{ ρητός αριθμός.}$$

Η παράγωγος του ημx και του συνx.

24. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$(\eta\mu x)' = \dots\dots (\sigma\upsilon\nu x)' = \dots\dots$$

Απάντηση

- $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Κανόνες Παραγωγίσης

25. Αν η συνάρτηση f είναι μία παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα A , να αποδείξετε ότι

$$(cf(x))' = cf'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}, x \in A.$$

2023 Μονάδες 10 2018 Επαναλ Μονάδες 10 2016 Επαναλ Μονάδες 10

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$.

Έχουμε:

$$F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c(f(x+h) - f(x)),$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \cdot f'(x).$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$ **26.** Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.**2017** Μονάδες 10**Απάντηση**Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$$

$$\text{και για } h \neq 0, \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

$$\text{Άρα } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

27. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$cf(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{με } g(x) \neq 0,$$

όπου c πραγματική σταθερά.**Μονάδες 4,5****Απάντηση**

- $(cf(x))' = cf'(x),$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$

Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

28. Να γραφεί ο τύπος με τη βοήθεια του οποίου παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$.

Μονάδες 4,5

Απάντηση

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Για να παραγωγίσουμε την συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g .

29. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$(c)' = \dots, \quad (x)' = \dots, \quad (x^p)' = \dots, \quad (\sqrt{x})' = \dots$$

$$(cf(x))' = \dots, \quad (f(x) + g(x))' = \dots, \quad (f(x) \cdot g(x))' = \dots$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots, \quad g(x) \neq 0 \quad (f(g(x)))' = \dots$$

Απάντηση

$(c)' = 0$	$(cf(x))' = cf'(x),$
$(x)' = 1$	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$
$(x^p)' = px^{p-1}$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

30. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την μονοτονία.

Απάντηση

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta,$$
τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta,$$
τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

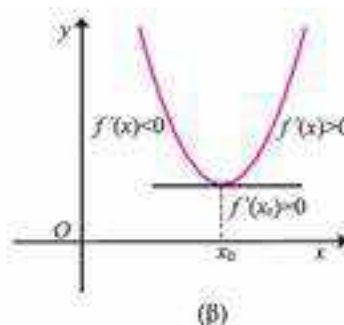
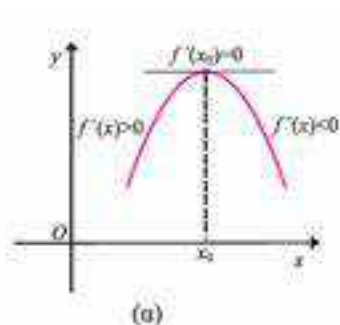
31. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τα ακρότατα.

Απάντηση

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν

$$f'(x_0) = 0 \text{ για } x_0 \in (a, \beta), \quad f'(x) > 0 \text{ στο } (a, x_0) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta),$$
τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ μέγιστο. (σχ. α)
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν

$$f'(x_0) = 0 \text{ για } x_0 \in (a, \beta), \quad f'(x) < 0 \text{ στο } (a, x_0) \text{ και } f'(x) > 0 \text{ στο } (x_0, \beta),$$
τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο. (σχ. β)



32. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f'(x) = 0, \text{ για } x_0 \in (a, \beta)$$

και

η παραγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 ,

τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

Απάντηση

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f'(x) = 0, \text{ για } x_0 \in (a, \beta) \text{ και}$$

η παραγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 ,

τότε

η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β)

και

δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**Πράξεις με Συναρτήσεις**

1. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζεται και η συνάρτηση

$$R = \frac{f}{g} \quad \text{με} \quad R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{όπου } x \in A \text{ και } g(x) \neq 0$$

2020 Επαναληπτικές

2. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντοτε πεδίο ορισμού A .

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

3. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \quad \text{ισχύει} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

2016

4. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \quad \text{ισχύει} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

5. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) < f(x_2).$$

2021**2017**

Επαναληπτικές

6. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

2022

Επαναληπτικές

7. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

8. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

9. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A , μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

2019

Επαναληπτικές

Όριο Συνάρτησης

10. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

11. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$, όπου ℓ_1, ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \ell_2$$

2019 – 2016 – 2011

12. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1 , δηλαδή αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1, \quad \text{τότε} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell_1^v \quad (v \text{ θετικός ακέραιος}).$$

2017 Επαναληπτικές

13. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό v μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = v \ell^{v-1}$$

14. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2017

15. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

16. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$

17. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$.

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ**Εφαπτομένη Καμπύλης-Παράγωγος της f στο $x = x_0$**

18. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0)$.

19. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

2021 Επαναληπτικές

20. Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι, τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$.

2018 Επαναληπτικές

21. Αν η συνάρτηση v της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

2020 Επαναληπτικές

22. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

2020

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**Παραγωγή Βασικών Συναρτήσεων**

23. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2016

24. $(x^v)' = (v-1) \cdot x^v$, όπου v φυσικός αριθμός.

2016 Επαναληπτικές

25. Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2019

26. Για κάθε $x > 0$, ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

27. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2017 Επαναληπτικές

28. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, $x > 0$, $p \in \mathbb{R}^*$

2015

29. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, p ρητός, $x > 0$

Η παράγωγος του ημx και του συνx.

30. Για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ ισχύει ότι $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$

31. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

2016

32. Ισχύει: $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$.

2021 Επαναληπτικές 2018

Κανόνες Παραγωγίσης

33. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

34. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύει:

$$(c \cdot f)'(x) = f'(x) + c$$

2014

35. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

36. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$$

37. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x).$

38. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

2018 Επαναληπτικές 2015 2010

39. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

2021 Επαναληπτικές

40. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

2013

41. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, ($g(x) \neq 0$) όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

42. Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για όλες

τις τιμές του x , τότε ισχύει:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

2022 Επαναληπτικές 2019 Επαναληπτικές

Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

43. Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

2019 – 2016 Επαναληπτικές

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

44. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

2022 2011

45. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

46. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει

$$f'(x) < 0$$

για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

2018

47. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

48. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν

$$f'(x_0) = 0, \text{ για } x_0 \in (\alpha, \beta), \quad f'(x_0) > 0 \text{ στο } (\alpha, x_0) \text{ και } f'(x_0) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta)$$

τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$.

49. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$,

$$f'(x) > 0 \text{ στο } (\alpha, x_0) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta),$$

τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

50. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

51. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$

γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(h)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

52. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots$

2. $(f(x)g(x))' = \dots\dots\dots$

3. $(\sqrt{x})' = \dots$

53. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

β. $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$

γ. $(\sin x)' = \dots\dots\dots$

2020 Μονάδες 9

54. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(\eta\mu x)' = \dots\dots\dots$

β. $(x^p)' = \dots\dots\dots$

γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots\dots\dots$ όπου $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2020 Επαναληπτικές Μονάδες 9

55. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $(x^p)' = \dots\dots\dots$, όπου p ρητός αριθμός.

β. $(\sin x)' = \dots\dots\dots$

2017 Μονάδες 6

56. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$ με $x \neq 0$

β. $(x^v)' = \dots\dots\dots$, όπου v φυσικός αριθμός.

γ. $(cf(x))' = \dots\dots\dots$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

2021 Μονάδες 9

57. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$

β. $(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$

2022 Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Λ 5. Λ 6. Σ 7. Λ 8. Λ 9. Σ 10. Σ 11. Σ 12. Σ
 13. Λ 14. Σ 15. Σ 16. Σ 17. Σ 18. Σ 19. Σ 20. Σ 21. Σ 22. Λ 23. Λ 24. Λ
 25. Λ 26. Σ 27. Λ 28. Λ 29. Σ 30. Λ 31. Σ 32. Λ 33. Σ 34. Λ 35. Σ 36. Λ
 37. Λ 38. Λ 39. Λ 40. Σ 41. Λ 42. Λ 43. Σ 44. Σ 45. Σ 46. Λ 47. Λ 48. Λ
 49. Λ 50. Σ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

51. α

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

52. 1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell^v \dots$

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$

53. α. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

β. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$

γ. $(\sin x)' = \cos x$

54. α. $(\sin x)' = \cos x$ β. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$ γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

55. α. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$ όπου p ρητός αριθμός. β. $(\sin x)' = \cos x.$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

56. α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ με $x \neq 0$ β. $(x^v)' = vx^{v-1}$ γ. $(cf(x))' = cf'(x)$.

2021 Μονάδες 9

57. α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

2022 Μονάδες 6

ΙΟΥΝΙΟΣ 2023

58. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

2023

59. $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

2023

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023

60. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $v(t) = x'(t)$

2023 Επαναληπτικές

61. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, όπου p ρητός

2023 Επαναληπτικές

62. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \dots\dots\dots$ β. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots\dots\dots$ όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, ℓ_1 πραγματικός αριθμός v ακέραιος.

2023 Επαναληπτικές Μονάδες 9

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (10)

1.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

24347

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.
- Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ για κάθε x του πεδίου ορισμού A .
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

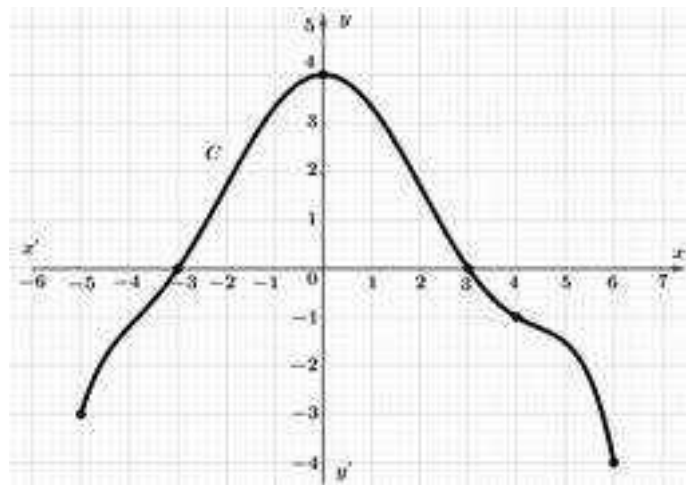
2.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

24355

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f .
Μελετώντας το σχήμα:



- Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Για τη συνάρτηση f , να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

γ. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

2 4 3 5 6

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{x^2 - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

4.

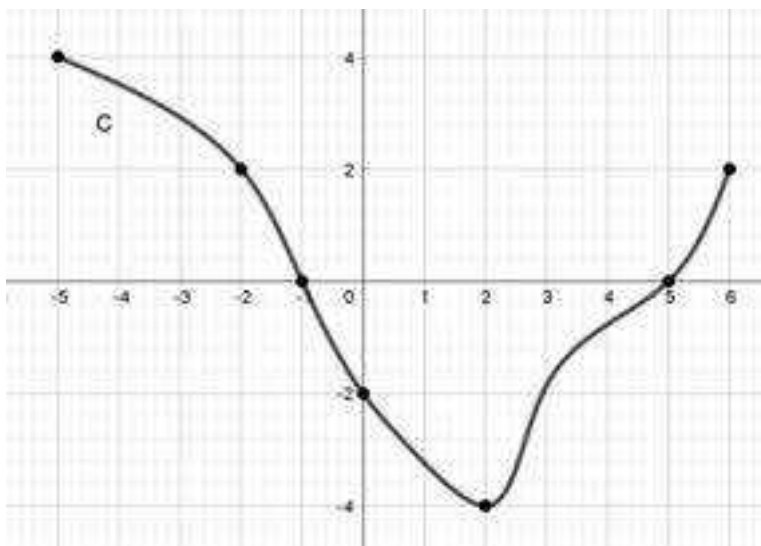
Θ Ε Μ Α Β

1.1

2 4 3 5 8

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f .

Μελετώντας το σχήμα:



α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Για τη συνάρτηση f , να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

γ. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

25874

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x + 1$

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

31085

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = x - 1$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

31086

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

32248

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g .

β. Να δείξετε ότι για $x \neq 2$ είναι: $f(x) - g(x) = x + 1$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)]$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

33624

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + 3f(2)$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

1.1

34591

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) = x - 2$$

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ (1)

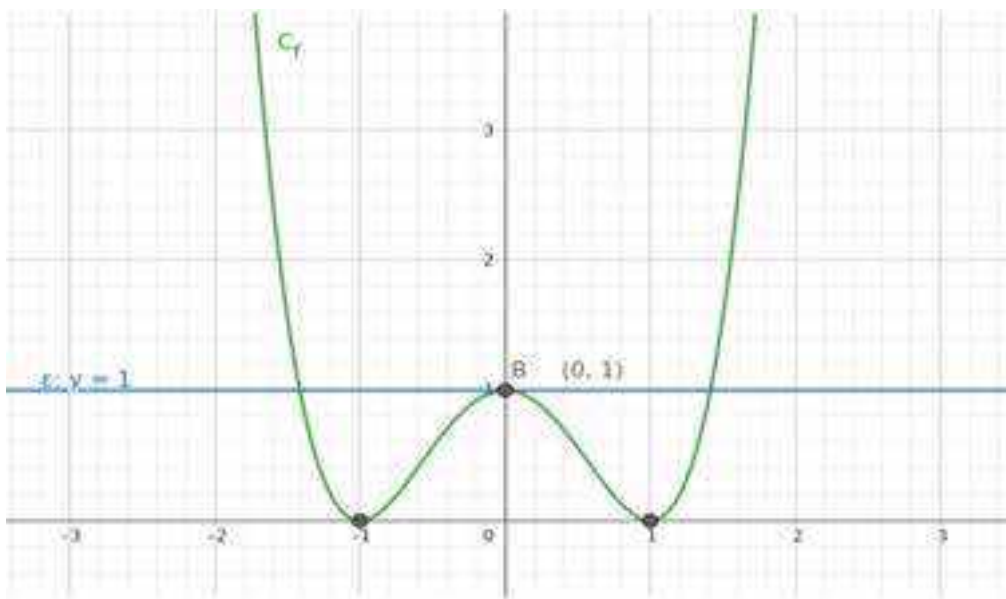
1.

Θ Ε Μ Α Β

1.2

34736

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.



- α. Να βρείτε, με βάση το παραπάνω σχήμα, τη μονοτονία της συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.
- β. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(0, 1)$, τότε:
 - i. Να βρείτε την $f(0)$ και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.
 - ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(0) = 0$.

Μονάδες $[10 + (10 + 5)] = 25$

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (15)

1.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

25326

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β. Να δείξετε ότι $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.
- γ. Να υπολογίσετε το $f'(4)$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

25875

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$.
Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:
- β. $\lambda = 4$.
- γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = 4x - 3$.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

25876

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

- β. $\lambda = 0$.
- γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -1$.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

26146

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.
- γ. Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

27843

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4$.

- α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -6x^2 + 2x$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

- β. $\lambda = -8$.
- γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -8x - 9$.

Μονάδες $(8+7+10)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

31084

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε το $f'(-1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $f'(-1) + f'(1) = 2$.

Μονάδες $(8+7+10)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

31088

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\frac{1}{x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

γ. Να υπολογίσετε το $f'(-3)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

31089

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\frac{1}{x} - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ. Να υπολογίσετε το $f'(-2)$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

3 1 0 9 0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\frac{1}{x} - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ. Να υπολογίσετε το $f'(-2) + f(2)$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

3 1 0 9 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

γ. Να υπολογίσετε το $f'(9)$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

3 1 6 9 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο

σημείο της $A\left(-1, \frac{2}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι:

β. $\lambda = 1$.

γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = x + \frac{5}{3}$.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

31695

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5\frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 5)$. Να αποδείξετε ότι:

β. $\lambda = -5$.

γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -5x + 10$.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

13.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

33622

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

β. Να βρείτε την $f''(x)$.

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0)$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

33625

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 7x$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2, -6)$, τότε:

α. να δείξετε ότι $f'(x) = 4x - 7$.

β. να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

γ. να δείξετε ότι $\beta = -8$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

15.

Θ Ε Μ Α Β

1.3

34592

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + 2$. Να βρείτε:

- α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β. Την παράγωγο f' της συνάρτησης.
- γ. Την τιμή $f'(2)$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (5)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

1.3

28286

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

- α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.
- β. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- γ. Ο Γιάννης υπολόγισε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και βρήκε ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135 μοιρών και επίσης ότι δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συμφωνείτε με τον Γιάννη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10 + 7 + 8) = 25$

2.

Θ Ε Μ Α Δ

1.3

28617

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 - 2x$, $x \in [0, +\infty)$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

- α. Αν ισχύει $f'(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $a = 1$.
- β. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$.
 - i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$.
- γ. Για $a = 1$
 - i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f}{g}(x)$.
 - ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες $[6 + (3 + 3) + (5 + 8)] = 25$

3.

Θ Ε Μ Α Δ

1.3

3 4 5 1 0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$

β. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3,4)$.

ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο $B(1,10)$.

γ. Αν η εφαπτομένη (η) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\Gamma(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y = f'(x_0)x$, να βρείτε το x_0 .

Μονάδες [5+(8+6)+6]=25

4.

Θ Ε Μ Α Δ

1.3

3 4 5 2 9

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \frac{2}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(2, g(2))$.

γ. i. Να δείξετε ότι το σημείο $(2, g(2))$ ανήκει και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii. Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο $(2,1)$, είναι κάθετες μεταξύ τους. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
(δίνεται ότι: δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι κάθετες μεταξύ τους εάν ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$)

Μονάδες [8+9+(2+6)]=25

5.

Θ Ε Μ Α Δ

1.3

34734

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $x > 0$.

α. Να βρείτε τον αριθμό α , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.

Στη συνέχεια δίνεται ότι $\alpha=4$.

β. i. Να υπολογίσετε τον $f'(1)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,4)$.

γ. i. Να βρείτε τα σημεία τομής K, Λ της (ϵ) με τους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ϵ) με τους άξονες $x'x, y'y$.

Μονάδες $[5+(6+7)+(3+4)]=25$

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (4)

1.

Θ Ε Μ Α Β

1.4

24357

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Να βρείτε την $f'(5)$.
- γ.** Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

1.4

25459

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2023, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Να υπολογίσετε το $f'(1)$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$.

Μονάδες $(8+7+10)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

1.4

32365

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 3x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Να υπολογίσετε το $f'(0)$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες $(8+7+10)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

1.4

34845

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$.

α. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 0)$. Να αποδείξετε ότι:

β. $\lambda = -3$

γ. η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y = -3x + 3$.

Μονάδες $(8 + 7 + 10) = 25$

1.4 Η ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (32)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

24359

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α.
 - i. Για $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
 - ii. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M((2, f(2)))$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Μονάδες $(5+5)+9+6=25$

2.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

24360

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα(m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2).

- α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}$ με $x > 0$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

Μονάδες $(8+9+8)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

24361

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- α. Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = -1$

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.
- γ. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

24363

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ με $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.
- γ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$, είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

25458

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}, x \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}, x \in \mathbb{R}$
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

Μονάδες $(5+6+6+8)=25$

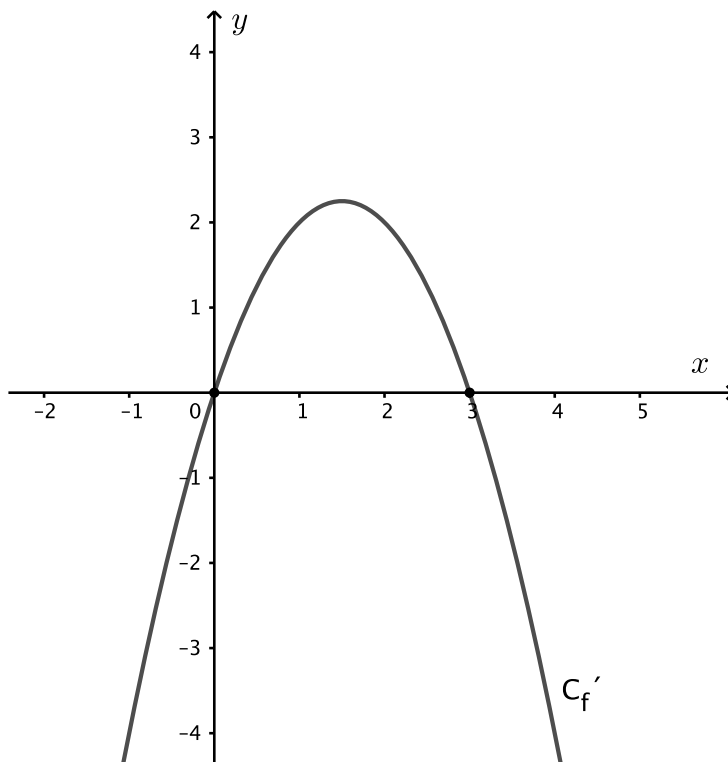
6.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

25461

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολώνυμο δευτέρου βαθμού.



- α. Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.
- β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.
- γ. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες $(9+6+10)=25$

7.

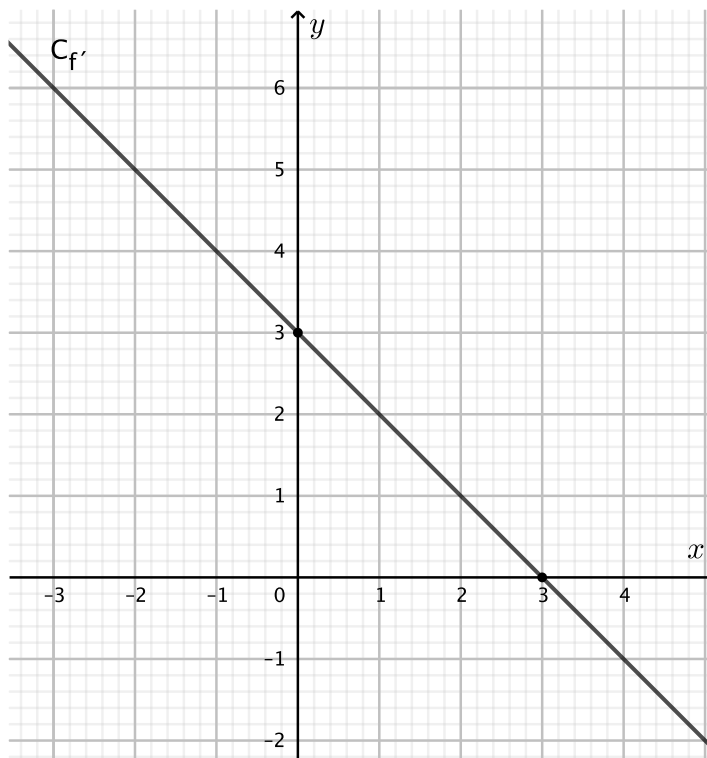
Θ Ε Μ Α Δ

1.4

25643

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f .

Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3,0)$, τότε:



- α. Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.
- β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$.
- γ. Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

Μονάδες $(10+6+9)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

26895

Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

- α. i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 20x$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.
- β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

Μονάδες $[(5+5)+8+7]=25$

9.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

28125

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 8x + 18$ και $g(x) = -(x-4)^4 + 2$.

- α. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g .
- β. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών.
- γ. Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x), x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες $(8+12+5)=25$

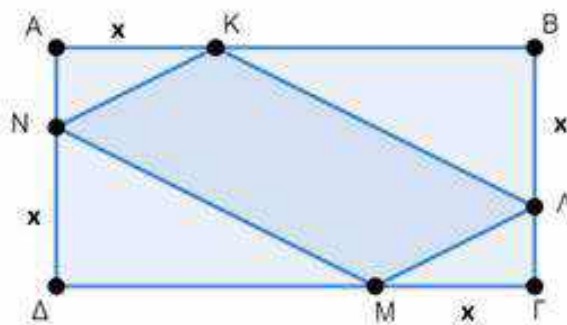
10.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

28280

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB=4$ και $B\Gamma=2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = BL = \Gamma M = \Delta N = x$.



- α. Να δείξετε ότι

- i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του x είναι $E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x)x$, $x \in (0, 2)$ και το εμβαδόν του ΚΒΛ ως συνάρτηση του x είναι $E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x)x$, $x \in (0, 2)$.
- ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 3x + 4)$, $x \in (0, 2)$.
- β. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$.
- γ. Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες $(6+5+7+7)=25$

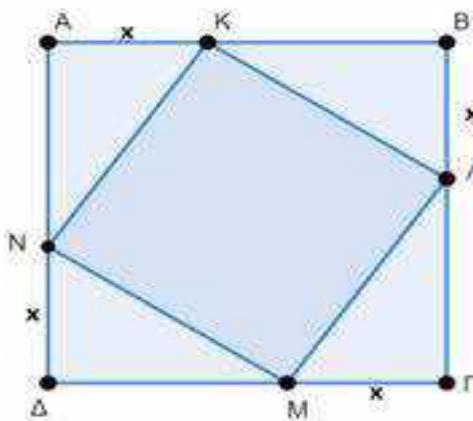
11.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

28282

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά $AB=4$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ,Λ,Μ και Ν των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα έτσι ώστε $AK=BL=GM=DN=x$.



- α. Να δείξετε ότι
- i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του x είναι $E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x)x$, $x \in (0, 4)$.
- ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$, $x \in (0, 4)$.
- β. Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού $E(x)$.
- γ. Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες $(5+8+6+6)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

28618

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1,1)$.

Μονάδες $(6+9+10)=25$

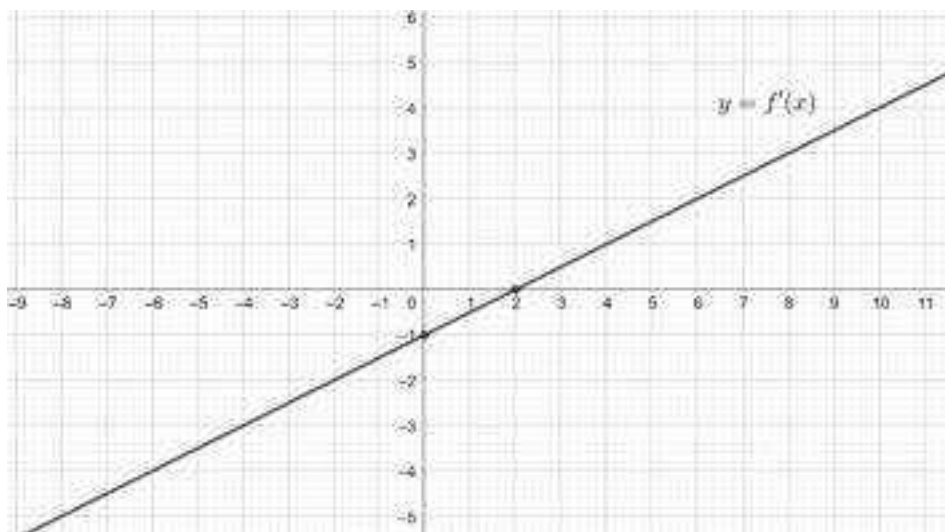
13.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

30975

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2)=5$ και $f(0)=6$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1 .



- Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

32260

Δίνεται το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .



- α. Αν το μήκος της πλευράς $AB = x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά $B\Gamma$ του ορθογωνίου

$AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει του x είναι $B\Gamma = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

- β. Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}, x > 0.$$

- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- δ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(6+6+8+5)=25$

15.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

32366

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 6x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10}$

Μονάδες $(10+8+7)=25$

16.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

3 2 3 6 7

Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι:

$$C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30, x \geq 0$$

α. Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας;

β. Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει;

γ. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$.

δ. Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος;

Μονάδες $(5+6+5+9)=25$

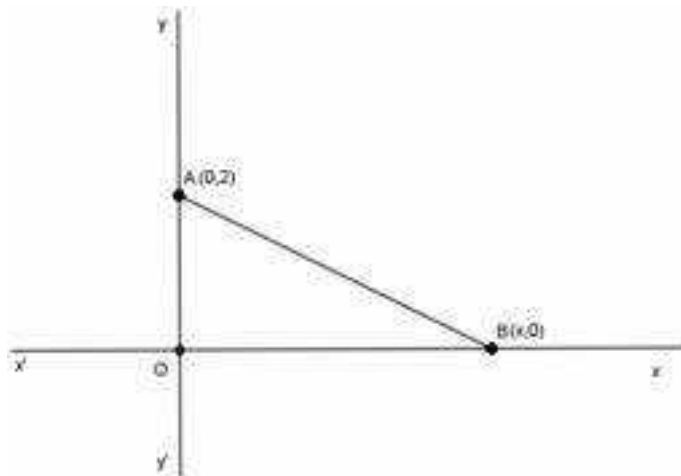
17.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

3 3 6 2 8

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $A(0,2)$ και $B(x,0)$ με $x > 0$.



59

- α. Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του x είναι:

$$d(x) = (AB) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ με } x > 0.$$

- β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x = 3$.
- γ. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι, καθώς το σημείο B κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα Ox , το μήκος του AB αυξάνεται. Να αιτιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, αξιοποιώντας το ερώτημα (β).

Μονάδες $(8+9+8)=25$

18.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

33629

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$.

- β. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

- γ. i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- δ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2301)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες $[5+8+(5+3)+4]=25$

19.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

33662

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

- α. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .
- β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

20.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

33859

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει;

Μονάδες $(10+9+6)=25$

21.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

33860

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5, x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- α. Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
Για $\lambda = 3$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$ και $f\left(\frac{13}{4}\right)$.
- γ. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$$

Μονάδες $(7+10+8)=25$

22.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34259

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

- α. i. Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
 ii. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $a=1$.

Για $a=1$

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x}-1}$.

Μονάδες $[(4+5)+9+7]=25$

23.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34801

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + c$, $0 \leq t \leq 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

- α. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c .

Για $c=8$

- β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t=2$.

- γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής.

Μονάδες $(6+9+10)=25$

24.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34802

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + c$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

- α. Να βρείτε το c αν ισχύει $f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0$.

Για $c=2$

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2023)$, $f(2024)$.

Μονάδες $(10+9+6)=25$

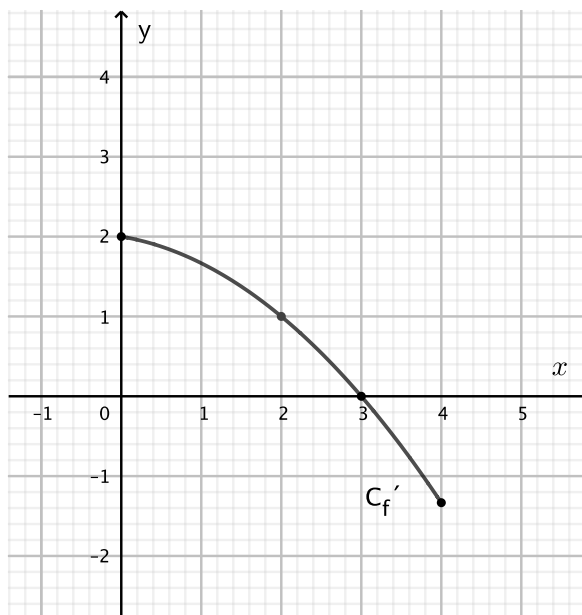
25.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34824

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 4]$. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη 3.



Μελετώντας το σχήμα να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

- α. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$;
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 3]$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

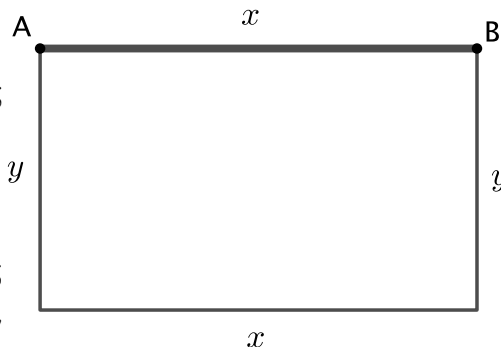
26.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34828

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η πλευρά AB της περιοχής, μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m , τότε:



- α. Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x , είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

- β. Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο.
γ. Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περίφραξης;

Μονάδες $(8+12+5)=25$

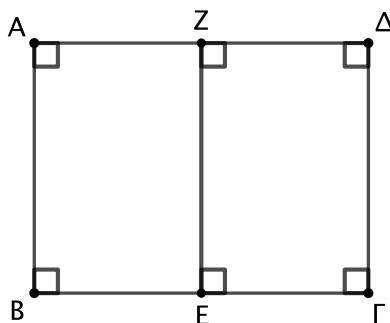
27.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34832

Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με ενδιάμεσο χώρισμα EZ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Αν $ΑΔ = x$ και $ΑΒ = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x , είναι:

$$E(x) = \frac{200x - 2x^2}{3}, 0 < x < 100$$

- β. Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μέγιστο.
- γ. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του σχήματος.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

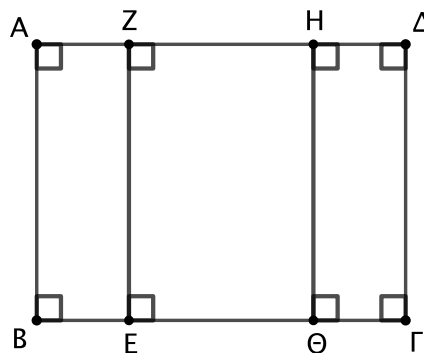
28.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34835

Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και να θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ με δύο ενδιάμεσα χωρίσματα $ΕΖ$ και $ΘΗ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Αν $ΑΔ = x$ και $ΑΒ = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x , είναι:

$$E(x) = \frac{100x - x^2}{2}, 0 < x < 100$$

- β. Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ ώστε το συνολικό εμβαδόν του να είναι μέγιστο.
- γ. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ του σχήματος.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

29.

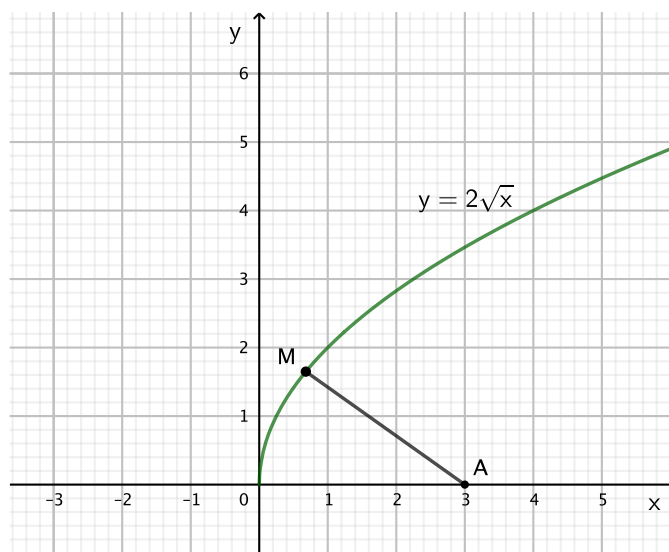
Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34838

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}, x \geq 0$, και το σημείο $A(3, 0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:



α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι:

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}, x \geq 0$$

β. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^2 - 2x + 9, x \geq 0$, γίνει ελάχιστο.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .

Μονάδες $(9+10+6)=25$

30.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

34846

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 4, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α. Την παράγωγο της συνάρτησης.

β. Τα ακρότατα της συνάρτησης.

γ. i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτόμενη της

είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 3$.

- ii. Να δείξετε ότι η μια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη διέρχεται από το σημείο $M\left(3, \frac{31}{3}\right)$.

Μονάδες $[4+8+(5+8)]=25$

31.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

36811

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος του σε μέτρα (m) μετά από t δευτερόλεπτα (s) από την εκτόξευσή του δίνεται από την συνάρτηση

$$h(t) = 8t - t^2, 0 \leq t \leq 8$$

- a. Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.
- β. Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση $v(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$
- γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.
- δ. Σε ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σώματος;

Μονάδες $[4+8+(4+9)]=25$

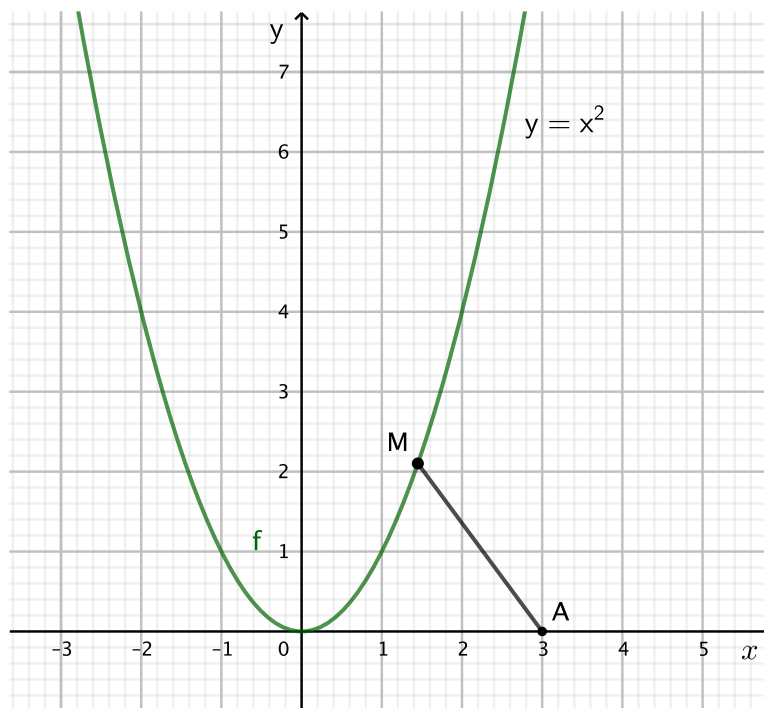
32.

Θ Ε Μ Α Δ

1.4

36812

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A(3, 0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα.



Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι:

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, x \in \mathbb{R}$$

β. i. Να αποδείξετε ότι $2x^3 + x - 3 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$.

ii. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .

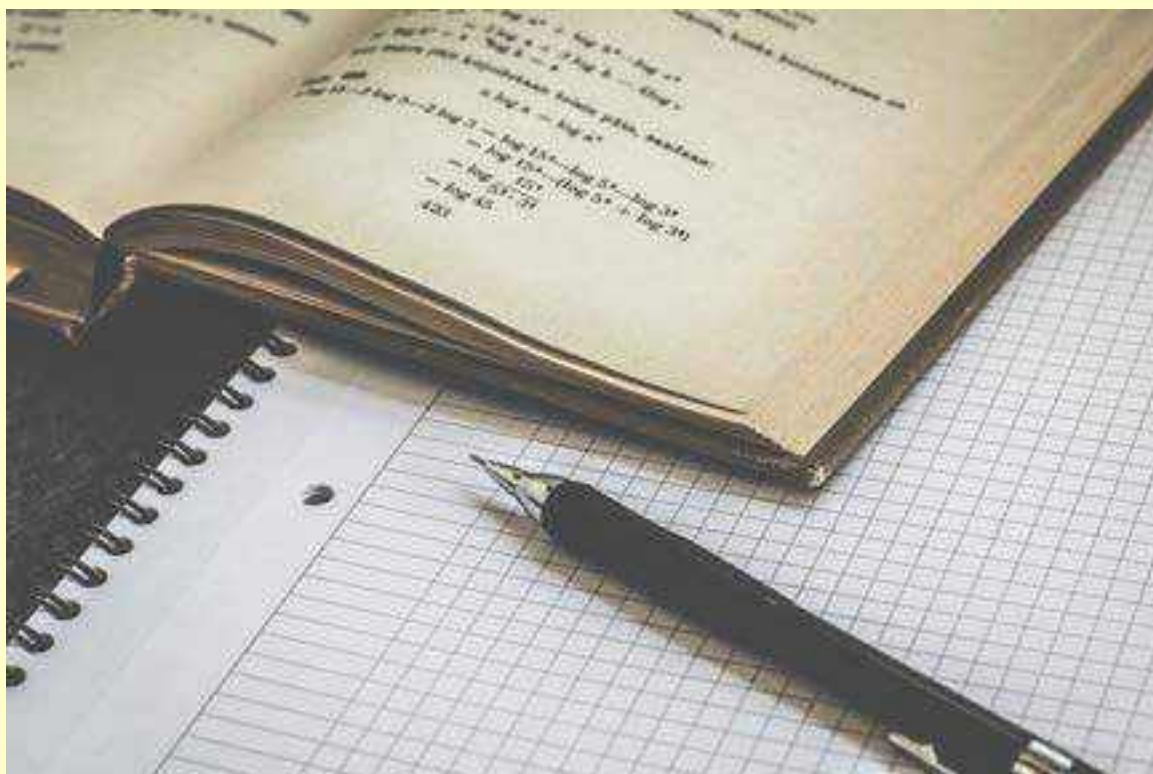
Μονάδες $[8 + (3 + 8) + 6] = 25$

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

Ο.Ε.Φ.Ε. Α' ΦΑΣΗ

8

2016-17-18-19-20-21-22-2023



ΑΦΟΡΟΥΝ ΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, να αποδείξετε ότι:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

(Μονάδες 7)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Μια συνάρτηση όταν είναι συνεχής στο $x = x_0$ θα είναι σίγουρα και παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
- Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x-1}$ είναι το $(-\infty, 1]$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$.
- Αν σε ένα διάστημα Δ ισχύει $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in \Delta$) και $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

(Μονάδες 10)

A3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \dots$
- $(\varepsilon\phi x)' = \dots$
- Αν c πραγματικός αριθμός, τότε $(c \cdot f(x))' = \dots$
- Αν η f είναι συνεχής στο $x = x_0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots$

(Μονάδες 8)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

B1. Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu x - \frac{x+1}{x^2}$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

B2. Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\right)^{10}$.

(Μονάδες 8)

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 10$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f'' διέρχεται από το $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{3x - 12}$

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{3x - 12}, & x \neq 4 \\ \alpha^2 - \frac{11}{15}, & x = 4 \end{cases}$$

Γ2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ3. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού α , αν γνωρίζετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 4$.

(Μονάδες 8)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Μια επιχείρηση παράγει x προϊόντα με συνολικό κόστος παραγωγής που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = x^2 - 5x + 9$ (σε ευρώ). Το κάθε προϊόν το πουλάει προς 5 ευρώ.

Δ1. Να βρείτε τη συνάρτηση των εσόδων της επιχείρησης.

(Μονάδες 4)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους της επιχείρησης δίνεται από τον τύπο $P(x) = -x^2 + 10x - 9$ (σε ευρώ).

(Μονάδες 6)

Δ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1}$.

(Μονάδες 8)

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $2P''(2) + P'(3) + P(4) = 15$.

(Μονάδες 7)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση και c πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ για κάθε x στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

A2. Να γράψετε τους ορισμούς της γνησίως αύξουσας και γνησίως φθίνουσας συνάρτησης f , σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 7)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = x_0$, (το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f), μόνο όταν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
2. Αν f και g παραγωγίσιμες, ισχύει: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$.
3. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \eta \mu x$ είναι το $\mathbb{R}$.
4. Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.
5. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x_1) \leq f(x)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

(Μονάδες 10)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

B1. Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = x^2 \cdot \sin x - \frac{\eta \mu x}{x}$.

(Μονάδες 7)

B2. Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \eta \mu^2 x + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x} - \sin(3x - \sqrt{2})$.

(Μονάδες 8)

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 4x - \frac{2}{3}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x = -2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -7$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{x^4 + x^2}$

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 7)

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{x^4 + x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{\kappa^3}{2} + \frac{\sin(x^2 + x)}{4} - \eta \mu\left(\frac{x}{2}\right), & x = 0 \end{cases}$$

Γ2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ3. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού κ , αν γνωρίζετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Δίνεται: $\sin 0 = 1$ και $\eta \mu 0 = 0$.

(Μονάδες 8)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \alpha x^2 - \beta x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$, αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$ και ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με τετμημένη $x = 2$ είναι ίσος με 4.

(Μονάδες 9)

Δ3. Για $\alpha = 3$ και $\beta = 4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = 3$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Για $\alpha = 3$ και $\beta = 4$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) - 5}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$

(Μονάδες 8)



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Παρασκευ 5 Ιανουαρίου 2018

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $f(x) = x^2$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = 2x.$$

Μονάδες 4

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν μια συνάρτηση έχει όριο στο x_0 έναν πραγματικό αριθμό ℓ , τότε το x_0 ανήκει οπωσδήποτε στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0 , δεν θα είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .
3. Το σημείο $A(3, 6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + x - 6$.
4. Αν η εφαπτομένη στην καμπύλη μιας συνάρτησης σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με 1.
5. Η $f(x) = \sin x$ δεν μπορεί να ορίζεται στο $[-3, 3]$.

Μονάδες 10



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Α' ΦΑΣΗ

A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^y = \dots$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \dots$

3. Αν f', g' οι παράγωγοι των συναρτήσεων f, g , τότε $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

4. Αν f', g' οι παράγωγοι των συναρτήσεων f, g , τότε $(f(g(x)))' = \dots$

Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της:

$$f(x) = \eta\mu(x^2 + 9) - \sqrt{2x + 1} - \frac{2}{x}$$

Μονάδες

B2. Να αποδείξετε ότι η 2^η παράγωγος της $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ίση με:

$$f(x) = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

Μονάδες 9

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 2x^2 + 6x - 2$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το $A(-1, 4)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

Μονάδες



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Α' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g.

Μονάδες 4

$$\text{Av } f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ 225 \cdot \lambda x + \frac{47}{4}, & x=1 \end{cases}, \text{ όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής}$$

διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f, στο $x_0 = 4$.

Γ2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρεθεί η τιμή του λ.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda = -\frac{11}{225}$, να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 3

Γ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x_0 = 4$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (κx + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $κ = -4$, αν γνωρίζετε ότι: $2f(0) + f'(-1) = f(1) + f'(1)$.

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Α΄ ΦΑΣΗ

Δ3. Για $\kappa = -4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 10x^2 + 2}{(\kappa + 5)x^2 - (-7 - 2\kappa)x}$.

Μονάδες 7

Δ4. Αν η συνάρτηση φείναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να συγκρίνετε μεταξύ τους, το $f(2017)$ με το $f(2018)$ και το $f\left(\frac{1}{2017}\right)$ με το $f\left(\frac{1}{2018}\right)$.

Μονάδες 5



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019

Α' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A2. Έστω $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, τότε η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 1$.
2. Η παράγωγος της συνάρτησης $c \cdot f(x)$ είναι $(c)' \cdot (f(x))'$.
3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης f , στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής, είναι η πρώτη παράγωγος της f στο x_0 .
4. Η συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται με οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.
5. Αν μια συνάρτηση διέρχεται από το σημείο $A(5, -3)$ τότε ισχύει $f(5) = -3$.

Μονάδες 10



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019

Α' ΦΑΣΗ

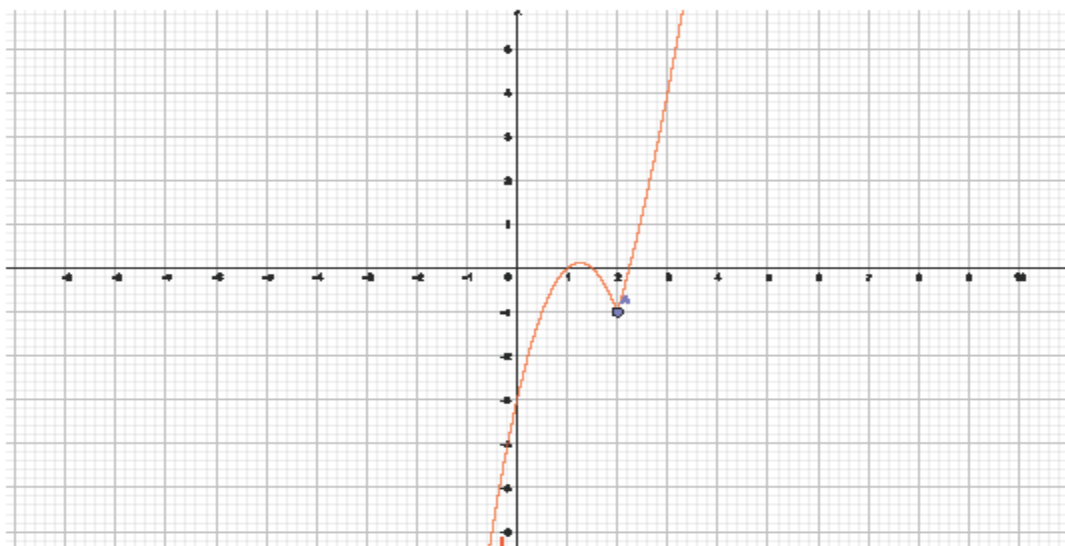
A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots$
2. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu 2x$, είναι $(\eta\mu 2x)' = \dots$
3. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) \cdot g(x)$, είναι: $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$
4. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , λέμε ότι παρουσιάζει Τοπικό Μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Μονάδες 4

Θέμα Β

B1. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του παρακάτω σχήματος, να υπολογίσετε τα όρια:



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ε ποια από τα σημεία: $x=0$, $x=1$, $x=2$ η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και γιατί.

Μονάδες 10



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Α΄ ΦΑΣΗ

B2. Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ισχύουν :

$$f(1) = 2, f'(1) = 3, g(1) = 4, g'(1) = -2, g(2) = 1, g'(2) = -2$$

Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $x=1$.

$$f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

Αν επιπλέον $h(x) = f(g(x))$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, να βρείτε τον αριθμό $h'(2)$.

Μονάδες 15

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{-2x^2 - 4x + 6}}$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Μονάδες 12

Γ3. εωρούμε μια συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-3, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

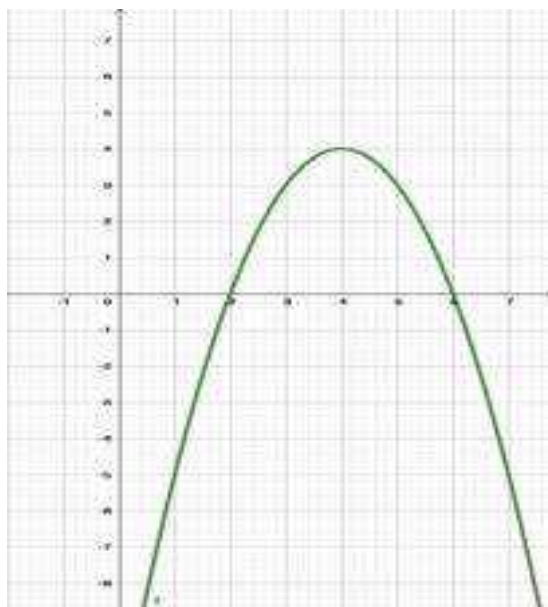
Μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019

Α΄ ΦΑΣΗ

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + ax - \beta$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(2,0)$ και $(6,0)$ όπως δίνεται στην παρακάτω γραφική απεικόνιση:



Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha=8$ και $\beta=12$.

Μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Δ2. Αν $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στα σημεία $A(2,0)$ και $(4,4)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)}{x-2} + \frac{(f'(x))^2 - 16}{x^2 - 4} \right]$

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

Α' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A και c είναι μια πραγματική σταθερά, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:
- $$(cf(x))' = cf'(x)$$

Μονάδες 6

- A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

- A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν είναι λανθασμένη.

- i. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lambda}$
- ii. Για όλες τις συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ισχύει : $(fg)'(x) = f'(x)g'(x)$
- iii. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β) .
- iv. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει: $f'(x_0) = 0$, με $x_0 \in A_f$, τότε αυτή έχει πάντοτε ακρότατο στο x_0 .
- v. Αν η ταχύτητα ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση.

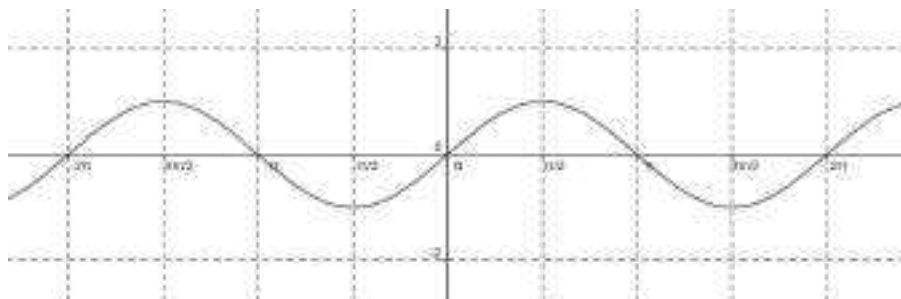
Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

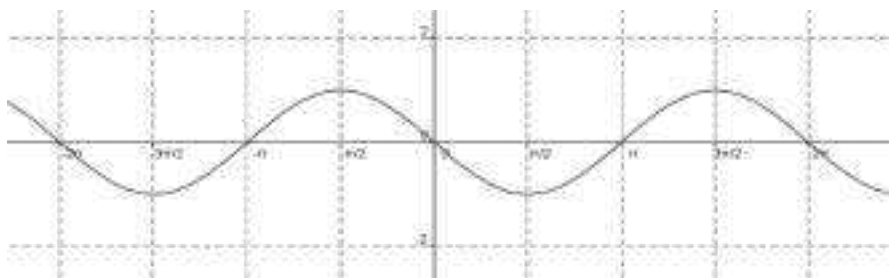
Α' ΦΑΣΗ

- A4.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sin x$ με $x \in \mathbb{R}$. Ποια από τις δύο εικόνες που ακολουθούν αντιστοιχεί στο γράφημα της $g'(x)$;

Εικόνα 1



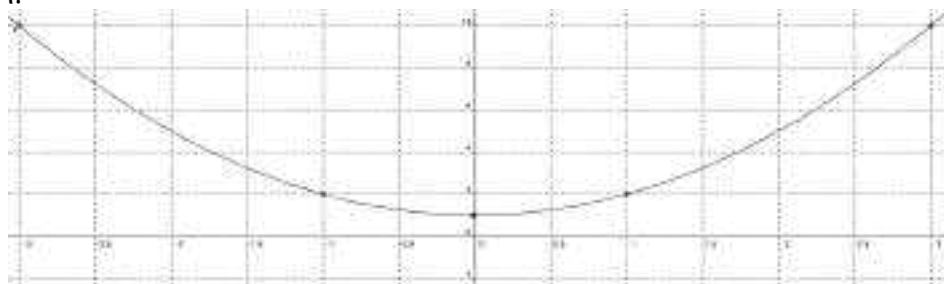
Εικόνα 2



Δώστε την ορθή απάντηση στο γραπτό σας γράφοντας εικόνα 1 ή 2 ανάλογα με την επιλογή σας.

Μονάδες 3

- A5.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$, της οποίας το γράφημα ακολουθεί:

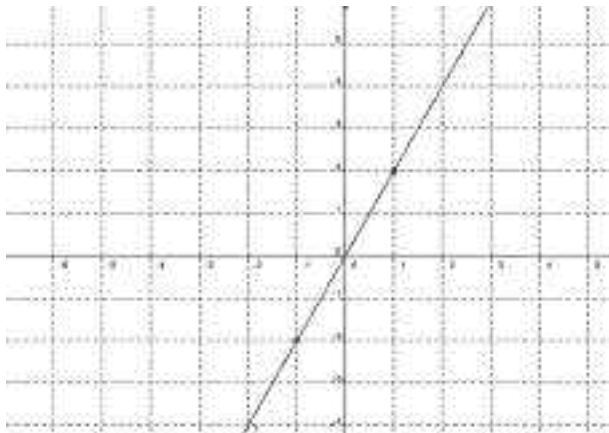


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

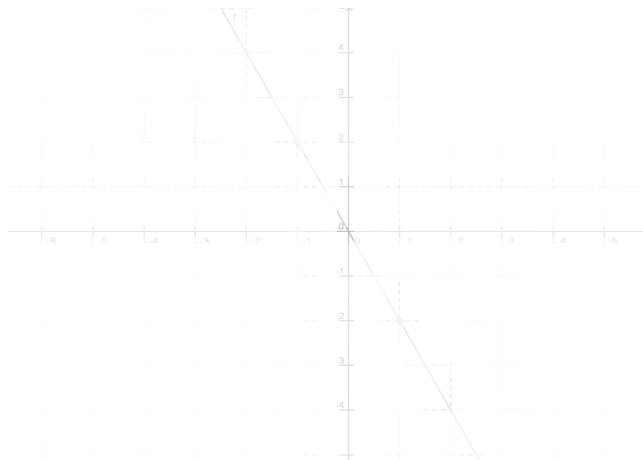
Α΄ ΦΑΣΗ

Ποια από τις δύο εικόνες που ακολουθούν αντιστοιχεί στο γράφημα της $f'(x)$;

Εικόνα 1



Εικόνα 2



Δώστε την ορθή απάντηση στο γραπτό σας γράφοντας εικόνα 1 ή 2 ανάλογα με την επιλογή σας.

Μονάδες 3



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Α' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + 2}$ με $x \in \mathbb{R}$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

Μονάδες 5

ii. Βρείτε την παράγωγο της $g(x)$.

Μονάδες 5

B2. Αν $f(x) = -x^3 - x + 2, x \geq 1$

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Μονάδες 5

ii. Βρείτε την εφαπτόμενη της f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία
 $y = -13x + 3$

Μονάδες 5

iii. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την ευθεία
 $y = -13x + 18$ με $x \in \mathbb{R}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 5



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

Α΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται δευτέρου βαθμού πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x) + \frac{1}{2}P''(x) = (\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x)^{2019}x^2 + 2\eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$$

Γ1. Να δείξετε ότι $P(x) = x^2 + 1$

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $P(x)$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Γ3. Σχεδιάστε την $P(x) = x^2 + 1$ και την εφαπτομένη της (ε): $y = 2x$ για $x \geq 0$, καθώς και την προβολή ενός τυχαίου σημείου A της εφαπτομένης στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι η ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του τριγώνου που σχηματίζουν το τυχαίο σημείο A της εφαπτομένης (ε), η προβολή του B στον $x'x$ και η αρχή των αξόνων O , είναι σταθερός.

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

Α' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

Μονάδες 9

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-2x^2+2x+4}{x+1}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)$

Μονάδες 2

ii. Να δείξετε ότι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \frac{-2x^2+2x+4}{x+1}$ είναι η ζητούμενη ευθεία στο ερώτημα (Δ1) εκτός του σημείου $B(-1,6)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Δ4.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Μονάδες 3

ii. να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)+x}{g(x)}$.

Μονάδες 4



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως αυξουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

β) Αν η f είναι γνησίως αυξουσα στο Δ , τότε είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

γ) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε $x \in A$.

δ) Για μια συνάρτηση f έχουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$. Τότε η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 4$.

ε) Αν ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$, τότε $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Α' ΦΑΣΗ

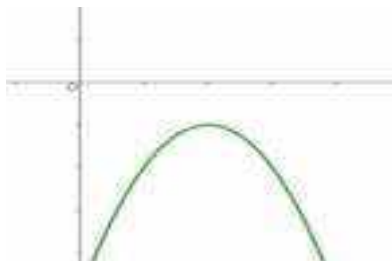
A4. Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα από την στήλη Α με τον σωστό αριθμό της στήλης Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α. 	1. $f(x) = \eta\mu x$
β. 	2. $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
γ. 	3. $f(x) = \alpha x^2$
δ. 	4. $f(x) = \alpha x + \beta$
ε. 	5. $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α' ΦΑΣΗ

ζ.

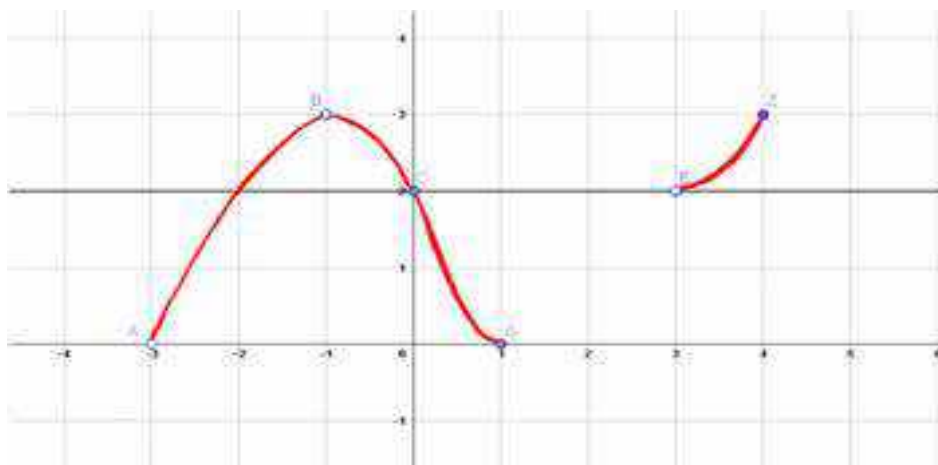


6. $f(x) = \sin x$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται το παρακάτω γράφημα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 2

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$ και η ανίσωση $f(x) > 2$.

Μονάδες 1+2

γ) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 1+2

δ) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x),$$

Μονάδες 4



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α' ΦΑΣΗ

B2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{27 - 3x^2}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Εστω ότι $f(x) = \frac{-2x^2 - x + \alpha}{1 - 4x^2}$ που διέρχεται από το σημείο $(-1, 0)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να απλοποιηθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Μονάδες 2+3

Γ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Ποια η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $(-2, 1)$.

Μονάδες 8

Γ4. Αν $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \frac{1}{2} \\ 2x - \beta, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$

i) Να βρεθούν τα όρια των: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

ii) Να βρείτε το β για να είναι η συνάρτηση g συνεχής.

Μονάδες 4+5



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Α΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + \frac{\alpha x^2}{2} - 36x + 10$

Δ1. Αν ισχύει: $3 \cdot f''(-1) + f'(1) = -39$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετηθεί συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την παράγωγο της f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Ποια η εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της f' στο $x_0=1$;

Μονάδες 4

Δ5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f\left(\frac{5}{4}\right)$ με $f\left(\frac{5}{7}\right)$.

Μονάδες 4

Δ6. Να αποδείξετε ότι: $x^2 + x \geq -\frac{1}{4}$.

Μονάδες 5



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Α' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Μονάδες 7

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) = x^{-3}$ τότε $f'(x) = -3x^2$.

β) Όταν μια συνάρτηση έχει όριο στο x_0 έναν πραγματικό αριθμό λ , τότε το x_0 ανήκει οπωσδήποτε στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση διέρχεται από το σημείο $A(0, 2021)$ τότε ισχύει $f(0) = 2021$

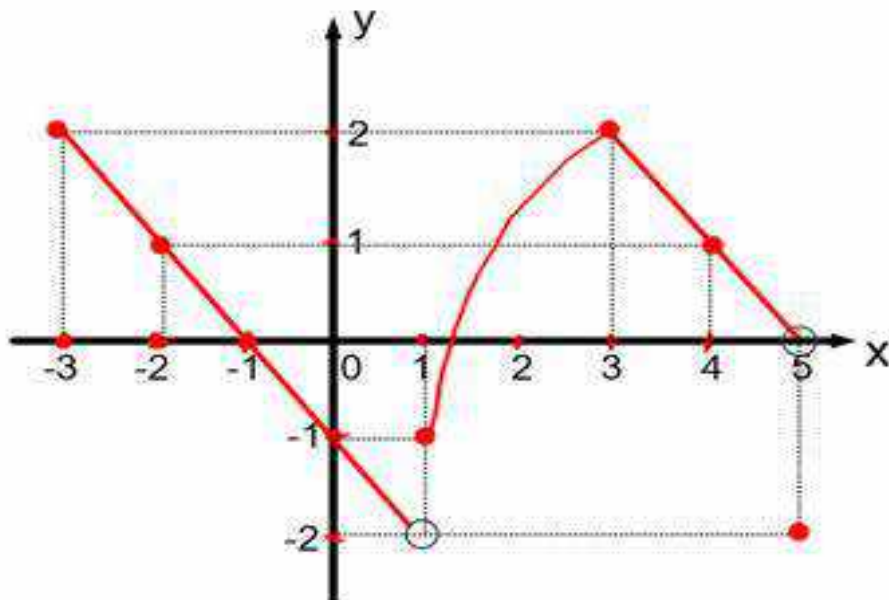
ε) Ισχύει ότι: $(c \cdot f(x))' = (c)' \cdot f'(x), c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Α' ΦΑΣΗ

- A3.** Με δεδομένη την παρακάτω γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση:



- i.** Το πεδίο ορισμού της f είναι:

(α) $\mathbb{R}$	(β) $[-3, 5)$	(γ) $[-3, 1) \cup (1, 5)$	(δ) $[-3, 5]$
-------------------------	----------------------	----------------------------------	----------------------

- ii.** Οι τιμές της συνάρτησης για $x = 1$ και $x = 5$ είναι:

(α) $f(1) = -2$ $f(5) = 0$	(β) $f(1) = -1$ $f(5) = -2$	(γ) $f(1) = 0$ $f(5) = 0$	(δ) $f(1) = 1$ $f(5) = -1$
--	---	---	--

- iii.** Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι:

(α) $x = 0, x = 4$	(β) $x = -1, x = 2$	(γ) $x = -3, x = 3$	(δ) $x = -2, x = 1$
---------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Α' ΦΑΣΗ

iv. Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ισούνται με:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$	(β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$	(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$	(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$
--	---	---	---

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες 8

B3. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty) \\ 4, & x = 2 \end{cases}$.

Να εξετάσετε την συνάρτηση g ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης f με τους άξονες.

Μονάδες 6



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Α' ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -4x^3 + 2\alpha x^2 + 4$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $K(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 6$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης της f στο σημείο που ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με 12.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - 20}{h}$.

Μονάδες 6

Γ4. Έστω τα σημεία $A(1, f(1))$ και $K(2, f(2))$ της συνάρτησης f .

Ποια η απόσταση μεταξύ τους;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της (ε) είναι: $y = (2 - \alpha)x + \alpha^2$

Μονάδες 6

Δ2. Έστω A και B τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα. Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες των A και B συναρτήσει του α .

Μονάδες 6

ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς α , όταν $\alpha = 2$.

Μονάδες 7



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Α΄ ΦΑΣΗ

- Δ3. Έστω ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του δίνεται από την συνάρτηση σε σχέση με τον χρόνο: $S(t) = f(t) + 2t^3 + 2t^2 + 3t + 3$ (όπου το S μετριέται σε μέτρα (m) και το t σε δευτερόλεπτα (sec), $t \geq 0$). Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος την χρονική στιγμή $t = 2$ sec;

Μονάδες 6



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

A3. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στην παράγωγό της στην στήλη Β μεταφέροντας τον πίνακα 1 στο τετράδιό σας σωστά συμπληρωμένο.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \eta\mu^3 x$	A. $f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu 3x$
2. $f(x) = x^{-6}, x \neq 0$	B. $f'(x) = -3\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu x$
3. $f(x) = \eta\mu 3x$	Γ. $f'(x) = -3\eta\mu 3x$
4. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$	Δ. $f'(x) = -6x^{-7}$
5. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$	E. $f'(x) = -5x^{-6}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^5}, x \neq 0$	ΣΤ. $f'(x) = 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x$

Πίνακας 1					
1.	2.	3.	4.	5.	6.

Μονάδες 9



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α΄ ΦΑΣΗ

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για το πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

(β) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$

(γ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$

(δ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

(ε) Αν $f(x) = 5, x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(5) = 5$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a^2 - 2a + 3, & x = 1 \end{cases}$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Μονάδες 5

B2. (α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Μονάδες 3

(β) Να υπολογίσετε όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρείστε $f(x) = x^2 - 5x + 6, x \in \mathbb{R}$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α΄ ΦΑΣΗ

- B3.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$

Μονάδες 5

- B4.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f και να συγκρίνεται τους αριθμούς $f(-2023)$ και $f(-2022)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί.

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2 και ισχύει $f'(1) = -3$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$

Μονάδες 8

- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 1$

Μονάδες 7

- Γ3.** Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h}$

Μονάδες 3

- Γ4.** Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης της f η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6 - \sqrt{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$

- Δ1.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7



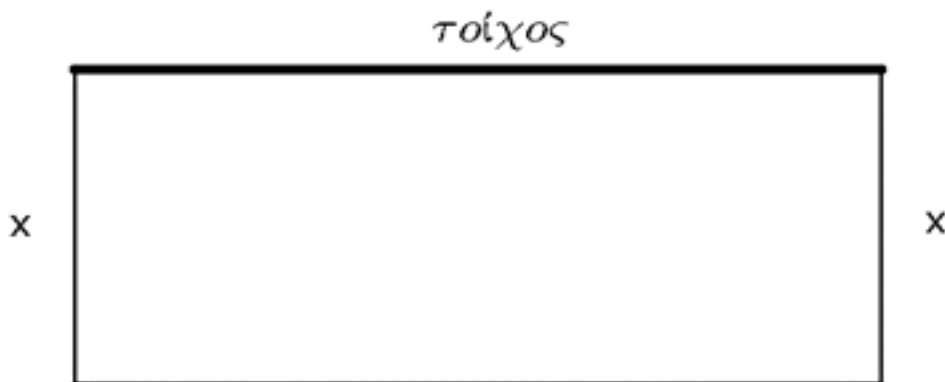
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Α΄ ΦΑΣΗ

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{f(x) - 4}$

Μονάδες 5

Δ3. Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου το έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 100 m από τις τρεις πλευρές του, η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Συμβολίζουμε με x τα μήκη των πλευρών του οικοπέδου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 100x, 0 < x < 50$

Μονάδες 6

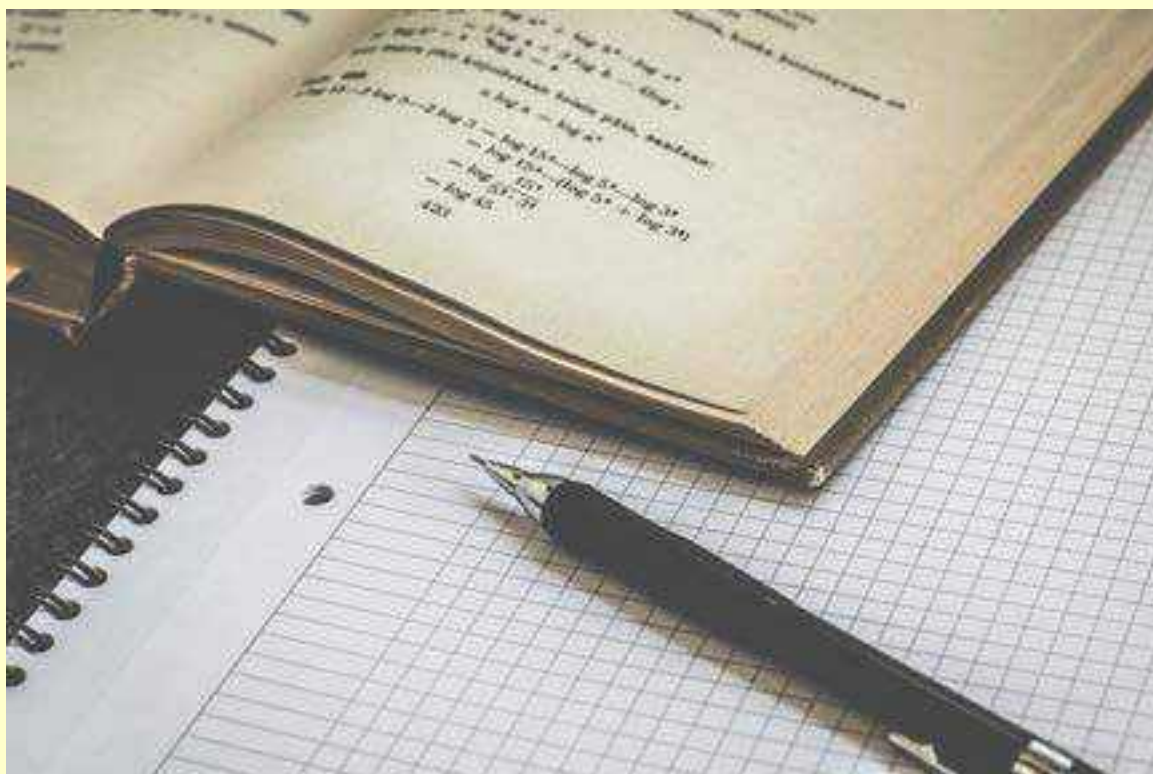
(ii) Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου όταν το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ Β' ΦΑΣΗ

6



2018-19-20-21-22-2023

ΑΦΟΡΟΥΝ ΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ



2018 | Φάση 1 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου c πραγματικός αριθμός, είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $(c)' = 0$.

Μονάδες 7

A2. i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

ii. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.

β. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

δ. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει $\left(f(g(x))\right)' = f'_{(g(x))} \cdot g'_{(x)}$.

ε. $(\eta \mu x)' = -\sin x$.

Μονάδες 10



2018 | Φάση 1 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

ΘΕΜΑ Β

B1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{x-1}{x+1} + \sqrt{2}, \quad x \neq -1.$$

Μονάδες 5

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες 8

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $(-2, f(-2))$ να είναι 12.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - bx^2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την παράγωγο της f .

Μονάδες 2

ii. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .

Μονάδες 3

iii. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b αν το σημείο $M(1, 2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f και επιπλέον ισχύει $f''(1) = 0$.

Μονάδες 5



2018 | Φάση 1 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & , \quad x \in [1, 2) \cup (2, +\infty) \\ \frac{3K}{8} + 1 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες 10

ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό K ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ όπου α πραγματικός αριθμός για την οποία ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 21 = 3x^2 + 6x$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε την παράγωγο της f .

Μονάδες 2

Δ2. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .

Μονάδες 2

Δ3. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha = -9$:

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x^3 - x}$.

Μονάδες 7

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία ε που έχει εξίσωση $\psi + 12x - 1 = 0$.

Μονάδες 8



2019 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω η συνάρτηση f και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ και πότε γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ ;
Μονάδες 4
- A2.** Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 4
- A3.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A . **Σ Λ**
- ii.** Η παράγωγο της f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $y = f(x)$, ως προς x , όταν $x = x_0$. **Σ Λ**
- iii.** Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. **Σ Λ**



2019 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

iv. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ είναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Σ Λ

v. Αν η δεύτερη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι σταθερή, τότε η g είναι το πολύ 2ου βαθμού. Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 + x}$. Αφού βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Μονάδες 12

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & , x \neq 2 \\ \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2} & , x = 2 \end{cases}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

iii. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x}{x+2}$, όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4



2019 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

Γ2. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} [x \cdot f(x)] = 3\alpha - 4$.

Μονάδες 4

Γ3. Για $\alpha = 2$, να βρεθούν τα σημεία της γραφικής παράστασης της f που οι εφαπτόμενες σ' αυτά σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και κατόπιν να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 10

Γ4. Για $\alpha = 2$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 2018$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{\kappa(x-1)}, & x \neq 1 \\ \frac{\kappa}{10}, & x = 1 \end{cases}, \text{ όπου } \kappa < 0.$$

και η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x+5} - 3}$.

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του κ .

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

Μονάδες 7



2019 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Προετοιμασίας

Δ3. Αν $\kappa = -10$ να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$

Μονάδες 3

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 4

Δ4. Αν $\kappa = -10$ να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράστασή της f τέμνει τους άξονες.

Μονάδες 5



2020 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 11 Ιανουαρίου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $f(x) = x^2$ είναι ίση με $2x$, δηλαδή ότι ισχύει $(x^2)' = 2x$.
(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)
- A2.** Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:
- Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής αν υπάρχει ένα $x_0 \in A$ έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
 - Για την παράγωγο του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύει ο κανόνας $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
 - Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .



2020 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x_0 , είναι ίσος με $f'(x_0)$.
5. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$.

B1. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{2-x}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

B2. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_0 = -1$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

B3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

B4. Να βρεθεί σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f'(x)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 3} - \sqrt{12}$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)



2020 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

Γ2. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Γ3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x-3}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

Γ4. Αν $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-3}, & \text{αν } \frac{3}{2} \leq x \neq 3 \\ \frac{\lambda\sqrt{12}}{2}, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η συνάρτηση h να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 1}{\beta x + 1}$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο $M(2, -1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -7$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = 2$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f ισούται με $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 7}{4x^2 + 4x + 1}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{3}x + 2020$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)



2021 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι ίση με 1, δηλαδή ισχύει $x' = 1$.

(Μονάδες 7)

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A .

α) Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

β) Πότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 6)

A3. Να συμπληρώσετε τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων ώστε αυτές να εκφράζουν κανόνες παραγωγίσης:

α) $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dots\dots\dots$

β) $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

γ) $(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 6)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_2 < x_1$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Η παράγωγος της $f(x) = \eta\mu x$ είναι η $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Η παράγωγος μιας περιττής συνάρτησης είναι επίσης περιττή συνάρτηση.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6$ και μια ευθεία $\varepsilon: y = ax + \beta$.

B1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

B2. Αν η ε διέρχεται από το σημείο $M(5, 9)$ ενώ το σημείο τομής της με τη C_f βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\zeta: x = 2$, να βρεθούν τα α, β .

(Μονάδες 7)

B3. Αν $g(x) = x + \sqrt{2}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i) $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και ii) $h(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$

(Μονάδες 8)

B4. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ , ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \kappa x - 2\kappa - 4}{2 - \kappa} = -4$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} & , x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty) \\ 2\alpha x + 2 & , x = 1 \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 3)



2021 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

Γ2. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και $y'y$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Αν για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2\lambda x + 2 - \lambda}}$ ισχύει $A_g = \mathbb{R}$:

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 6)

β) Για $\lambda = -1$, να βρείτε την πρώτη παράγωγο της g .

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x + 1$.

Δ1. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1, 5)$, είναι παράλληλη στο $x'x$, να βρεθούν τα α, β .

(Μονάδες 7)

Για $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

Δ2. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της f στο $(1, f(1))$.

(Μονάδες 5)

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των οριζόντιων εφαπτομένων της C_f

(Μονάδες 8)

Δ4. Να βρεθεί το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f'(x)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = -\frac{1}{6}x + 2021$.

(Μονάδες 5)



2022 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 15 Ιανουαρίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$, με $x \neq 0$, σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , δεν τέμνει τους άξονες.

β) Σε μια συνάρτηση, ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η επιτάχυνσή του $a(t)$ θα είναι $a(t) = x'(t)$.

Μονάδες 6

A3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$, με $x \in \mathbb{R}$ είναι ίση με ένα, δηλαδή $f'(x) = (x)' = 1$.

Μονάδες 7



2022 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

A4. Να μεταφέρετε τις παρακάτω ισότητες στο τετράδιό σας και να τις συμπληρώσετε κατάλληλα.

α) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \dots\dots\dots$

β) $(\sin x^2)' = \dots\dots\dots$

γ) $(\eta\mu(2x+1))' = \dots\dots\dots$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{9-x} - 4$.

B1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Μονάδες 6

B2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x}$.

Μονάδες 6

B3. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g(x) = \frac{f(x)}{x-7}$ και $h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{f(x)}$.

Μονάδες 8

B4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ με τεταγμένη 1.

Μονάδες 5



ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{2\sqrt{x+3}-4}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 3$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα συντεταγμένων.

Μονάδες 5

Γ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 5x - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g στο σημείο $M(4, g(4))$.

Μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$, $x \neq 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η πρώτη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1.$$

Μονάδες 5



2022 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

- Δ2.** Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 2022$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει εφαπτομένη παράλληλη της ευθείας ε στο σημείο $N(2, f(2))$, την εξίσωση της οποίας και να βρείτε.

Μονάδες 7

- Δ3.** Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = 2x + 1$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και g .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι οι δυο συναρτήσεις έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα από τα σημεία τομής τους και να βρείτε την εξίσωση της.

Μονάδες 7



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 14 Ιανουαρίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1. 1) Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 3
- 2) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;
Μονάδες 3
- A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ είναι $cf'(x)$.
Μονάδες 7
- A3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
- 1) $(f(x) \cdot g(x))' =$
- 2) $(\sin x)' =$
- 3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$
- Μονάδες 6
- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- 1) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο x_0 .
- 2) Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- 3) $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
- Μονάδες 6



ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 9, x \in \mathbb{R}$.

- B1. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f τα οποία έχουν τεταγμένη ίση με 7.

Μονάδες 4

- B2. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = -5x - 3$.

Μονάδες 5

- B3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+3)}{h}$.

Μονάδες 5

- B4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - \alpha x + 3}$.

- 1) Να βρείτε τις τιμές που επιτρέπεται να πάρει ο αριθμός α , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g να είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ($A_g = \mathbb{R}$).

Μονάδες 5

- 2) Αν το α παίρνει τιμές στο διάστημα $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 2}, & x \neq -1, 2 \\ \alpha^2 + 5\alpha - 4, & x = -1 \end{cases}$$

- Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 3



2023 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

- Γ2. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$

Μονάδες 7

- Γ3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 5

- Γ4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό β , ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + \beta x^2 - 9x - 9\beta}{x^2 - 2x - 3} = 12$$

Μονάδες 5

- Γ5. Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t (σε s) δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 4\frac{t^3}{3} + 11t^2 - 75t + 21, t \in [0, 7]$$

Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή $t = 5s$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x^2 + \kappa x + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα στο σημείο της M με τετμημένη ίση με 1.

- Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 5$ και $\lambda = -2$.

Μονάδες 6

Για $\kappa = 5$, $\lambda = -2$:

- Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 5

- Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1 - \sqrt{x}}$

Μονάδες 7



2023 | Ιανουάριος | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Εμπέδωσης

- Δ4. 1) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της N , που αυτή τέμνει τον κάθετο άξονα $y'y$.
- 2) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το N , σχηματίζει με το $x'x$ οξεία γωνία.

Μονάδες 4

Μονάδες 3

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΩΡΙΑ

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Τι ονομάζουμε πληθυσμό;

Απάντηση

Πληθυσμό ονομάζουμε ένα σύνολο που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.

Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως **μονάδες** ή **άτομα** του πληθυσμού.

2. Τι ονομάζουμε μεταβλητές και τι τιμές μεταβλητής;

Απάντηση

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα X , Y , Z , B , ...

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

3. Σε ποιες κατηγορίες χωρίζονται οι μεταβλητές; Δώστε και από ένα παράδειγμα

Απάντηση

Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι **αριθμοί**.

Τέτοιες είναι, για παράδειγμα,

η ομάδα αίματος (με τιμές A , B , AB , O),

το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι),

οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ),

η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή).

Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι **αριθμοί** και διακρίνονται:

Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές.

Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα,

ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1, 2,...),

το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1, 2, ..., 6)

κτλ.

Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν **οποιαδήποτε** τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α , β).

Τέτοιες μεταβλητές είναι

το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ' Λυκείου,

ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης,

η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης

κτλ.

4. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

2019 Μονάδες 3

Απάντηση

Ποσοτικές μεταβλητές, είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι **αριθμοί**.

5. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

2019 Μονάδες 4

Απάντηση

- Μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή, όταν παίρνει μόνο «μεμονωμένες» τιμές.
- Μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται συνεχής, όταν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

6. Τι ονομάζουμε δείγμα;

Απάντηση

Σε πολλές περιπτώσεις η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη. Επίσης ο κόπος, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλα, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος. Όπου λοιπόν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή οικονομικά και χρονικά ασύμφορη, ο ερευνητής μαζεύει πληροφορίες από κάποια μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται **δείγμα**.

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στατιστικοί Πίνακες

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών **πινάκων** ή **γραφικών παραστάσεων**, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων.

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

- α. γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία)
- β. ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

- τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,
- τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,
- το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,
- την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ' αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Πίνακες Κατανομής Συχνοτήτων

7. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i , που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

2021 Μονάδες 4

2018 Μονάδες 3

Απάντηση

Ο φυσικός αριθμός v_i , που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων, ονομάζεται **απόλυτη συχνότητα** ή απλά συχνότητα της τιμής x_i .

8. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

2021 Επαναληπτικές Μονάδες 4

2018 Μονάδες 3

Απάντηση

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Δηλαδή

$$f_i = \frac{v_i}{n} \text{ με } i=1, 2, \dots, k.$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i \%$, δηλαδή $f_i \% = 100f_i$.

9. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Να αποδείξετε ότι: $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$

2021 Επαναληπτικές Μονάδες 4

Απάντηση

Από τη σχέση $0 \leq v_i \leq n$ διαιρώντας με n , προκύπτει ότι

$$\frac{0}{n} \leq \frac{v_i}{n} \leq \frac{n}{n} \Leftrightarrow 0 \leq f_i \leq 1$$

10. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

2023 Επαναληπτικές Μον 5 **2020** Επαναληπτικές Μον 5 **2018** Μον 4

Απάντηση

Αν $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας μεταβλητής X , σε δείγμα μεγέθους n , έχουμε:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

11. Τι ονομάζουμε πίνακα κατανομής συχνοτήτων ή απλά πίνακα συχνοτήτων;

Απάντηση

Οι ποσότητες x_i, v_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων ή απλά πίνακας συχνοτήτων**.

12. Τι εννοούμε με τον όρο κατανομή συχνοτήτων ή κατανομή των σχετικών συχνοτήτων;

Απάντηση

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων**

και

το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) , ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$, την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**.

Αθροιστικές Συχνότητες

13. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα ενός δείγματος n παρατηρήσεων;

Απάντηση

Αθροιστική συχνότητα N_i , είναι η συχνότητα που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

14. Τι ονομάζουμε αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X , ενός δείγματος n παρατηρήσεων;

Απάντηση

Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i , της τιμής x_i , είναι η συχνότητα που εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Συχνά οι F_i πολλαπλασιάζονται επί 100 εκφραζόμενες έτσι επί τοις εκατό, δηλαδή

$$F_i\% = 100F_i.$$

15. Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε με τι ισούται η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i .

Απάντηση

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i.$$

Είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$v_1 = N_1, \quad v_2 = N_2 - N_1, \dots, v_k = N_k - N_{k-1}$$

16. Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε με τι ισούται η αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής x_i

Απάντηση

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i,$$

Είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$f_1 = F_1, \quad f_2 = F_2 - F_1, \dots, f_k = F_k - F_{k-1}.$$

17. Με τι ισούται η σχετική αθροιστική συχνότητα F_i

Απάντηση

Η σχετική αθροιστική συχνότητα F_i μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X ισούται με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση της τιμής x_i , Δηλαδή είναι

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k \quad \text{και} \quad f_k = F_k - F_{k-1}$$

Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

α) Ραβδόγραμμα

18. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα

Απάντηση

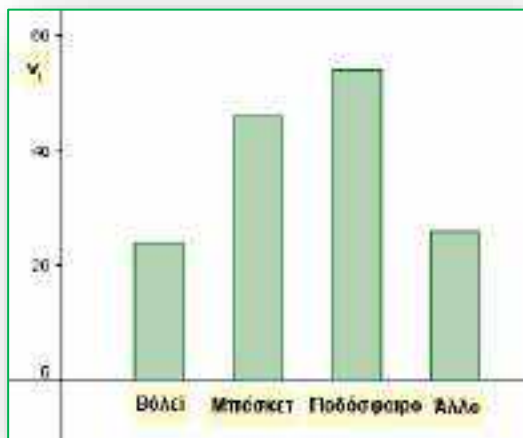
Ραβδόγραμμα ονομάζουμε τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα.

Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα.

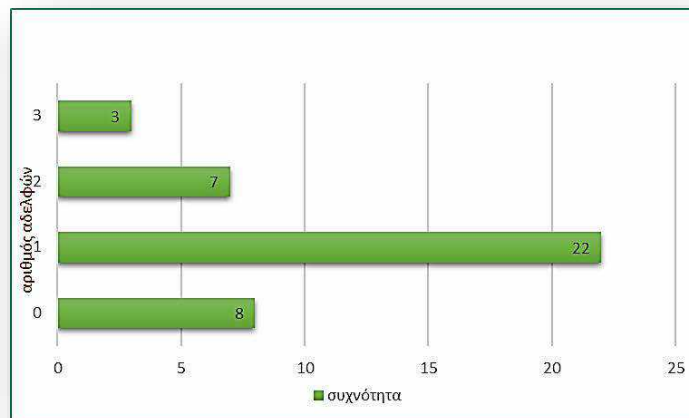
Έτσι έχουμε αντίστοιχα

το ραβδόγραμμα συχνοτήτων



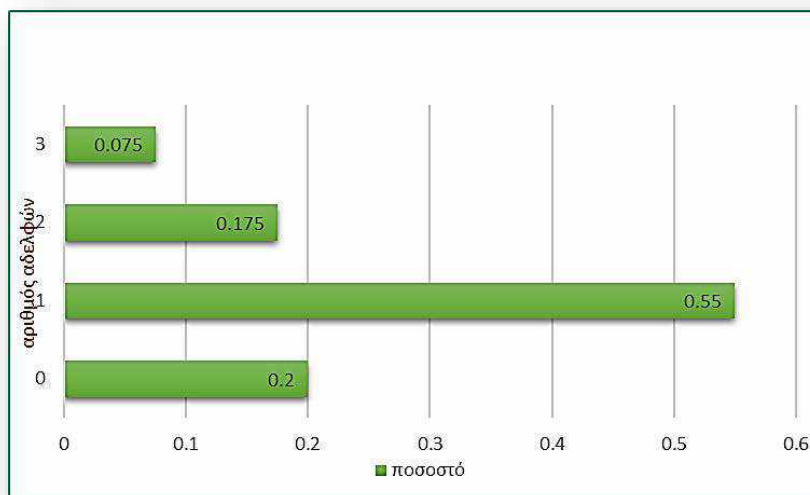
ή

με οριζόντιες ράβδους



και

το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

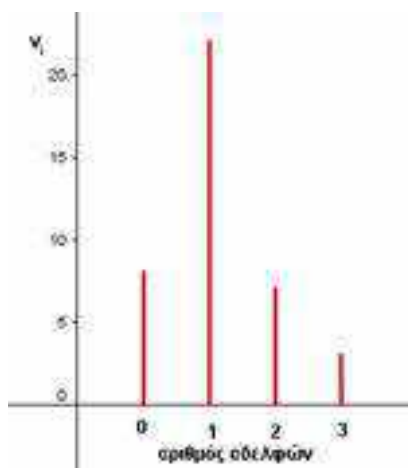


β) Διάγραμμα Συχνοτήτων

19. Τι ονομάζουμε διάγραμμα συχνοτήτων ή διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και τι πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων

Απάντηση

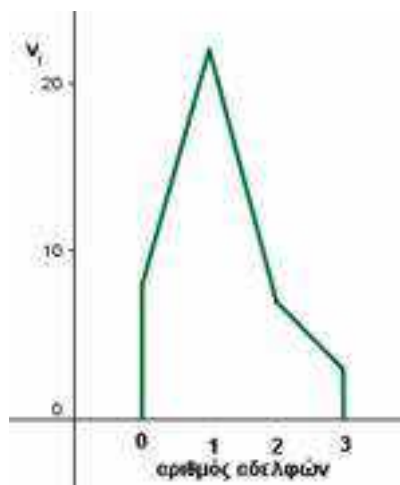
Το **διάγραμμα συχνοτήτων** είναι η γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. Χρησιμοποιείται αντί του ραβδογράμματος, με μόνη διαφορά ότι αντί για συμπαγή ορθογώνια, υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < \dots < x_k$) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i , οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο

πολύγωνο συχνοτήτων ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε, (βλέπε το παρακάτω σχήμα).



γ. Κυκλικό Διάγραμμα

20. Τι ονομάζουμε κυκλικό διάγραμμα.

Απάντηση

Το **κυκλικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε

$$\alpha_i = v_i \frac{360^\circ}{v} = 360^\circ f_i \quad \text{για } i=1, 2, \dots, \kappa.$$



δ. Σημειόγραμμα

21. Τι εννοούμε όταν λέμε σημειόγραμμα. Δώστε ένα παράδειγμα

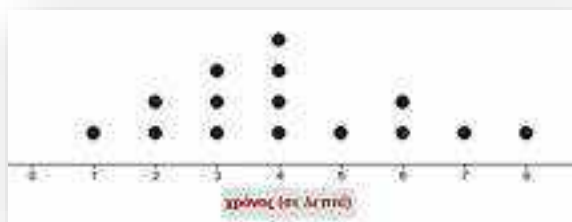
Απάντηση

Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα**, στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν **σημεία** υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα.

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το σημειόγραμμα των χρόνων (σε λεπτά)

4,2,3,1,5,6,4,2,3,4,7,4,8,6,3

που χρειάστηκαν δεκαπέντε μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα.



ε. Χρονόγραμμα

22. Τι εννοούμε όταν λέμε χρονόγραμμα.

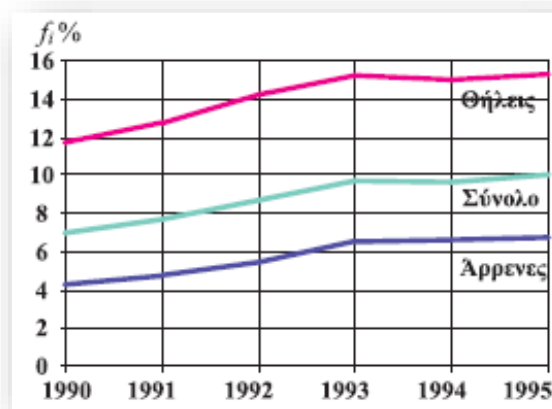
Απάντηση

Το **χρονόγραμμα** ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της **διαχρονικής εξέλιξης** ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους.

Ο **οριζόντιος** άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως **άξονας μέτρησης του χρόνου** και ο **κάθετος** ως **άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής**.

Στο σχήμα έχουμε το χρονόγραμμα του ποσοστού ανεργίας στη χώρα μας από το 1990 έως το 1995. (Πηγή ΕΣΥΕ).

Παρατηρούμε ότι στο γυναικείο πληθυσμό υπάρχει συστηματικά μεγαλύτερο ποσοστό ανεργίας, γύρω στις 8 εκατοστιαίες μονάδες. Στο διάστημα 1993-95 το ποσοστό ανεργίας έχει σταθεροποιηθεί γύρω στο 6,5% για τους άνδρες και γύρω στο 15% για τις γυναίκες.



Ποσοστά ανεργίας στην Ελλάδα

Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

23. Τι εννοούμε όταν λέμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων

Απάντηση

Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων είναι οι ταξινόμησή τους (όταν το πλήθος των τιμών της μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο), σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και **κλάσεις**, έτσι ώστε **κάθε τιμή** να ανήκει **μόνο σε μία κλάση**.

Αυτό μπορεί να συμβεί είτε στην περίπτωση μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει

οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της, οπότε οι πίνακες συχνοτήτων και κατ' αναλογία τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι δύσκολο να κατασκευαστούν

Τα άκρα των κλάσεων καλούνται **όρια των κλάσεων**.

Συνήθως υιοθετούμε την περίπτωση που μια κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (**κλειστή αριστερά**) αλλά όχι το άνω άκρο της (**ανοικτή δεξιά**), δηλαδή που οι κλάσεις είναι της μορφής $[,)$.

Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να “αντιπροσωπευθούν” από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.

24. Τι εννοούμε όταν λέμε πλάτος μιας κλάσης

Απάντηση

Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

25. Περιγράψτε τα βήματα που ακολουθούμε στην ομαδοποίηση των δεδομένων

Απάντηση

Το **πρώτο βήμα** στην ομαδοποίηση των δεδομένων είναι η εκλογή του αριθμού k των ομάδων ή κλάσεων.

Ο αριθμός αυτός συνήθως ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του.

Το **δεύτερο βήμα** είναι ο προσδιορισμός του πλάτους των κλάσεων.

Στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος. Φυσικά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου επιβάλλεται οι κλάσεις να έχουν άνισο πλάτος, όπως, για παράδειγμα, στις κατανομές εισοδήματος, ημερών απεργίας κτλ.

Το **επόμενο βήμα** είναι η κατασκευή των κλάσεων.

Ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση, ή για πρακτικούς λόγους λίγο πιο κάτω από την μικρότερη παρατήρηση, και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος c δημιουργούμε τις k κλάσεις.

Αυτονόητο είναι ότι η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα (πρέπει να) ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση.

Τέλος, γίνεται η **διαλογή** των παρατηρήσεων.

Το πλήθος των παρατηρήσεων n_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i καλείται **συχνότητα της κλάσης** αυτής ή **συχνότητα της κεντρικής τιμής** x_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Πρέπει να προσεχτεί ότι:

Καμία παρατήρηση δεν μπορεί να μείνει έξω από κάποια κλάση.

Οι κεντρικές τιμές διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος των κλάσεων.

Μία παρατήρηση που συμπίπτει με το άνω άκρο μιας κλάσης θα τοποθετηθεί κατά τη διαλογή στην αμέσως επόμενη κλάση.

Ιστόγραμμα Συχνοτήτων

26. Τι ονομάζουμε ιστόγραμμα συχνοτήτων και πως κατασκευάζουμε το πολύγωνο συχνοτήτων

Απάντηση

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα** (histogram) συχνοτήτων.

27. Πως κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων καθώς και το πολύγωνο συχνοτήτων

Απάντηση

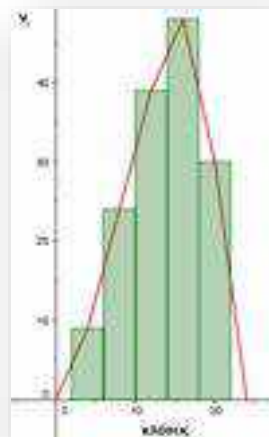
Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**.

Θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες.

Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες.

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων**.



Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων

28. Πως κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων καθώς και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων

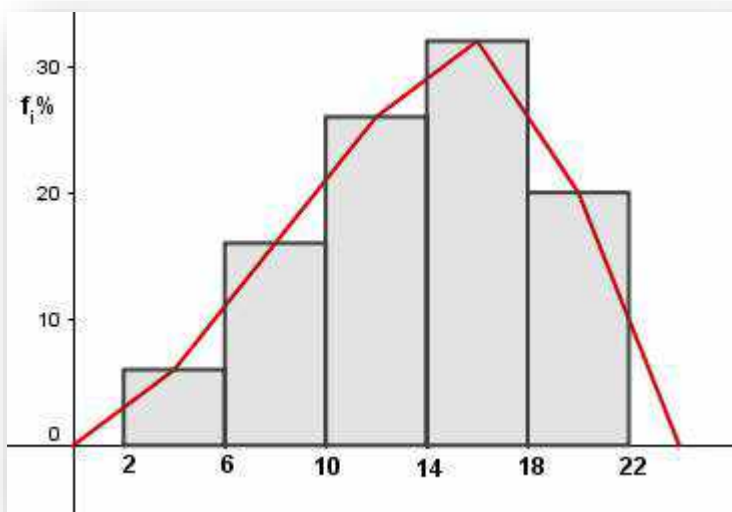
Απάντηση

Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**, οπότε στον κάθετο άξονα βάζουμε τις σχετικές συχνότητες.

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων**.

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος n .

Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με 1.



Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

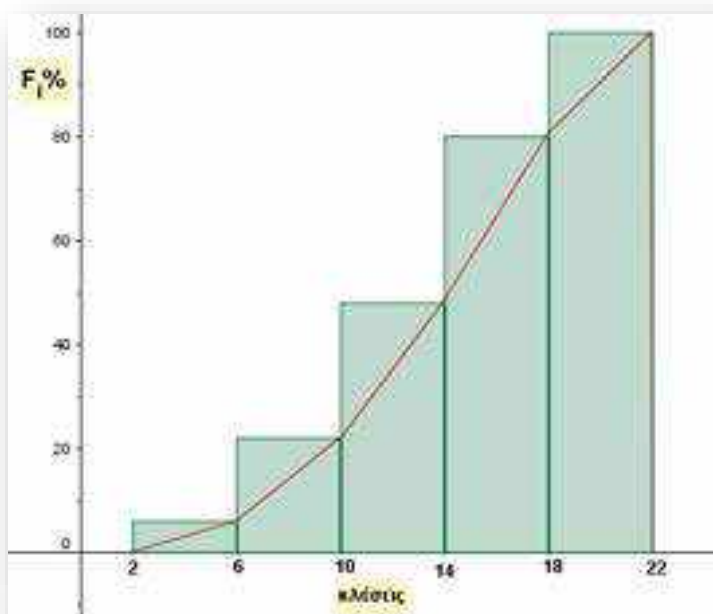
29. Πως κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων καθώς και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

Απάντηση

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**.

Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** της κατανομής.

Στο σχήμα παριστάνεται ένα ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

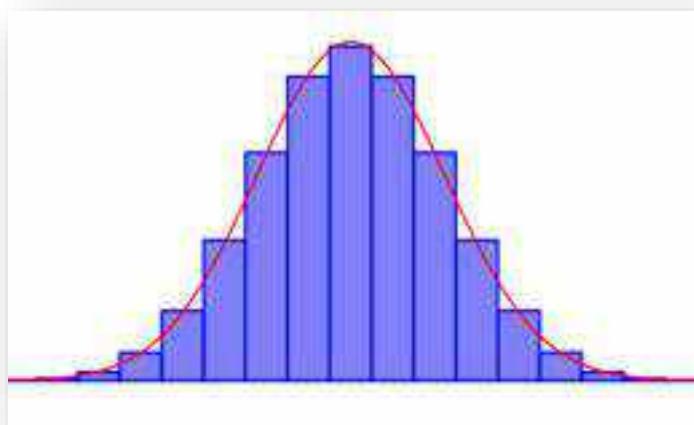


Καμπύλες Συχνοτήτων

30. Τι ονομάζουμε καμπύλη συχνοτήτων

Απάντηση

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα .



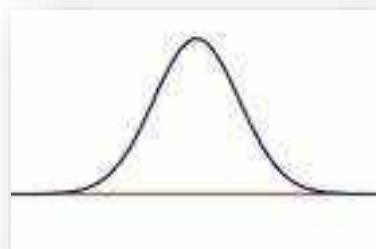
Οι καμπύλες συχνοτήτων έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Στατιστική, όπου οι ιδιότητες τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

31. Να αναφέρετε μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων

Απάντηση

Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων που συναντάμε συχνά στις εφαρμογές δίνονται παρακάτω.

Η διπλανή κατανομή, με “κωδωνοειδή” μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική.



Όταν οι παρατηρήσεις “κατανέμονται” ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[a, b]$, η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**.



Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι **συμμετρικά κατανεμημένες**,

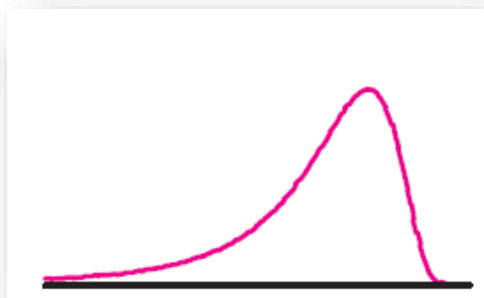
η κατανομή λέγεται

ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία όπως στην διπλανή κατανομή.



ή

αρνητική ασυμμετρία όπως στην διπλανή κατανομή.



2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Τα μέτρα θέσης μας δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το “κέντρο” τους.

Μέτρα Θέσης

α) Μέση Τιμή ($\bar{x}$)

1. Αν $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v , τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. (Μ. 4)

Απάντηση

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους v οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, \dots, t_v$ τότε η μέση τιμή, που συμβολίζεται με $\bar{x}$, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i.$$

2. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2, \dots, x_k$ με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα και v είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{x}$;

(Μ. 4)

Απάντηση

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητα $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i. \quad \text{και}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^k x_i f_i \quad \text{όπου } f_i \text{ οι σχετικές συχνότητες.}$$

3. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_v - \bar{x}$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

2022 Επαναληπτικές Μονάδες 9 **2017** Επαναληπτικές Μονάδες 7

Απάντηση

Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από καθεμιά παρατήρηση, προκύπτουν οι διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_v - \bar{x}$.

Ο αριθμητικός μέσος των παραπάνω διαφορών είναι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v - v\bar{x}}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

β) Σταθμικός Μέσος

4. Αν $x_1, x_2, \dots, x_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v και $w_1, w_2, \dots, w_v$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

2019 Επαναληπτικές Μονάδες 4

Απάντηση

Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_v$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_v$

τότε ο σταθμικός μέσος δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}.$$

γ) Διάμεσος (δ)

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

5. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

2022 Μονάδες 6 **2016** Μονάδες 5

Απάντηση

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως:

- Η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός
- Ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

6. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

2018 Επαναληπτικές Μονάδες 5

Απάντηση

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίοι έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

7. Πως ορίζεται η διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Απάντηση

Κατασκευάζουμε πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, οπότε διάμεσος είναι η τετμημένη του σημείου τομής του πολυγώνου των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και της ευθείας $y = 50$.

Μέτρα Διασποράς**α) Εύρος (R)**

8. Να ορίσετε το εύρος R (κύμανση) ενός συνόλου παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής. (Μ. 4)

Απάντηση

Το εύρος ή κύμανση R ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση του δείγματος.

γ) Διακύμανση (s^2)

9. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_3$ μιας μεταβλητής X . (Μ. 3)

Απάντηση

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

Τότε διακύμανση ή διασπορά s^2 των τιμών t_i ορίζουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή του $\bar{x}$.

Δηλαδή

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2.$$

δ) Τυπική Απόκλιση (s)

Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Αν όμως πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού, όπως ακριβώς είναι και όλα τα άλλα μέτρα θέσης, που εξετάσαμε έως τώρα.

10. Πώς ορίζεται η τυπική απόκλιση s ενός συνόλου παρατηρήσεων.

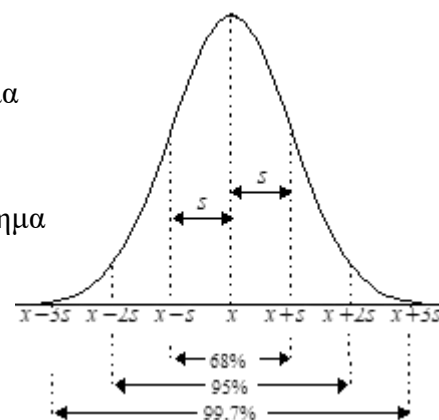
Απάντηση

Η τυπική απόκλιση s είναι ίση με την (θετική) τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, δηλαδή

$$s = \sqrt{s^2}$$

Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι **κανονική ή περίπου κανονική**, τότε η τυπική απόκλιση (s) έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

- το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
- το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
- το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.



Συντελεστής Μεταβολής (CV)

Ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας**

11. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μίας μεταβλητής x με μέση τιμή $\bar{x}$ όπου $\bar{x} \neq 0$;

2022 Επαναληπτικές Μονάδες 4

Απάντηση

Συντελεστής μεταβολής ονομάζεται ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή, δηλαδή

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}.$$

Αν $\bar{x} < 0$, τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$ οπότε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$

12. Πότε δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές;

2022 Επαναληπτικές Μονάδες 2

Απάντηση

Δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών είναι ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής (CV) δεν ξεπερνά το 10%, όταν δηλαδή ισχύει

$$CV \leq 10\%$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πληθυσμός - Μεταβλητές

1. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

2020

2. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.
3. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

2020 Επαναληπτικές

4. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .

2021

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Πίνακες Κατανομής Συχνοτήτων

5. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι φυσικός αριθμός.
6. Συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι ο φυσικός αριθμός, που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής αυτής.
7. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

2017 Επαναληπτικές **2015**

8. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

2020

9. Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X , τότε ισχύει: $0 \leq f_i \leq 1$.
10. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1.
11. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με το μέγεθος v του δείγματος.
12. Το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) , όπου f_i η σχετική συχνότητα της τιμής x_i , αποτελεί την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.
13. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με $i = 1, 2, 3, \dots, \kappa$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

2023

Αθροιστικές Συχνότητες

14. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .
15. Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
16. Αν x_1, x_2 είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X , με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2 τότε για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $v_2 = N_2 - N_1$, όπου $N_1 = v_1$

2020 Επαναληπτικές

17. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής χρησιμοποιούνται μόνο στην περίπτωση των ποιοτικών μεταβλητών.
18. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
19. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
20. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

2018 Επαναληπτικές

21. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i .
22. Η αθροιστική σχετική συχνότητα δίνεται και από τον τύπο $F_i = \frac{N_i}{v}$.
23. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και v_i , χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i , N_i .

Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

Ραβδόγραμμα

24. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

2021

25. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

2017

26. Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

Διάγραμμα Συχνοτήτων

27. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

2019 Επαναληπτικές

Κυκλικό Διάγραμμα

28. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

2018

29. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για ποιοτικές μεταβλητές.

30. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων.

31. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν α_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα v_i , τότε

$$\alpha_i = \frac{v_i}{v} 360^\circ \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k \quad \text{και } v \text{ το μέγεθος του δείγματος.}$$

2019

32. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και ότι f_i , $i=1, 2, \dots, k$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν a_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε: $a_i = 360f_i$, για $i=1, 2, \dots, k$.
33. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες n_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.
34. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς τα εμβαδά των οποίων είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες n_i .

Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

35. Όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν τα δεδομένα σε κλάσεις.
36. Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατώτερου και του ανώτερου ορίου της κλάσης.
37. Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

2021 Επαναληπτικές

38. Όταν ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων.
39. Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους.
40. Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης.
41. Το πλάτος των κεντρικών τιμών ισοπλατών κλάσεων ενός δείγματος ισούται με το πλάτος των κλάσεων αυτών.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

42. Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

Ιστόγραμμα Συχνοτήτων

43. Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων μιας κατανομής με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
44. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

2018 Επαναληπτικές

45. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν ίσο με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης.
46. Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.
47. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n .

2019 Επαναληπτικές

48. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

2022 Επαναληπτικές

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

- | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. Σ | 2. Λ | 3. Λ | 4. Λ | 5. Σ | 6. Σ | 7. Σ | 8. Λ | 9. Σ | 10. Λ | 11. Λ | 12. Σ |
| 13. Λ | 14. Λ | 15. Σ | 16. Λ | 17. Λ | 18. Σ | 19. Σ | 20. Λ | 21. Λ | 22. Σ | 23. Σ | 24. Σ |
| 25. Λ | 26. Σ | 27. Λ | 28. Λ | 29. Λ | 30. Λ | 31. Λ | 32. Σ | 33. Σ | 34. Λ | 35. Σ | 36. Λ |
| 37. Σ | 38. Σ | 39. Σ | 40. Λ | 41. Σ | 42. Σ | 43. Σ | 44. Σ | 45. Λ | 46. Λ | 47. Λ | 48. Λ |

2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Μέτρα Θέσης

1. Τα μέτρα θέσης δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον κατακόρυφο άξονα Oy.

α) Μέση Τιμή ($\bar{X}$)

2. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

β) Σταθμικός Μέσος

3. Ο σταθμικός μέσος χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις όπως και ο αριθμητικός μέσος.
4. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

2019

γ) Διάμεσος (δ)

5. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.
6. Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

2016 Επαναληπτικές

7. Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.
8. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.
9. Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.
10. Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

2023

Μέτρα Διασποράς

- 11. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.
- 12. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς.
- 13. Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

2022

- 14. Τα μέτρα διασποράς μας δίνουν πόσο επεκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το “κέντρο” τους.

α) Εύρος (R)

- 15. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.
- 16. Το μέτρο διασποράς εύρος ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.
- 17. Το εύρος ή κύμανση (R) ενός δείγματος n παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης.
- 18. Το εύρος του δείγματος χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις.
- 19. Το εύρος ή κύμανση (R) είναι ένα μέτρο διασποράς.

2022 Επαναληπτικές 2017

γ) Διακύμανση (s^2)

- 20. Η διακύμανση ενός δείγματος είναι μέτρο θέσης.

2023 Επαναληπτικές

- 21. Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς.

2018

- 22. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

2018 Επαναληπτικές

23. Η διακύμανση ή διασπορά είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$.

24. Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm και η διακύμανση εκφράζεται σε cm.

δ) Τυπική Απόκλιση (s)

25. Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς.

26. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται με περίπου 6 φορές την τυπική απόκλιση, δηλαδή $R \simeq 6s$, όπου s η τυπική απόκλιση.

27. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R , τότε ισχύει $s \approx 6R$.

28. Η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.

29. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

2023 2018 2016

30. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή, περίπου το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

2017 Επαναληπτικές

31. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

2016 Επαναληπτικές

32. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

2022 Επαναληπτικές

Συντελεστής Μεταβολής (CV)

33. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.

2019 Επαναληπτικές

34. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

2022

35. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

2016 Επαναληπτικές

36. Ο συντελεστής μεταβλητότητας εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής.

37. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς.

38. Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A$ τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A.

39. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

40. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

α. το εύρος

β. η διάμεσος

γ. η διακύμανση

δ. η τυπική απόκλιση

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

41. Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_n$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον μέσο ή μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{x} = \dots\dots\dots$.

42. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και φράσεις, αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.
Σε μια κανονική κατανομή, στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το ...% των παρατηρήσεων.

2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

- | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. Λ | 2. Σ | 3. Λ | 4. Λ | 5. Λ | 6. Λ | 7. Λ | 8. Σ | 9. Λ | 10. Σ | 11. Λ | 12. Λ |
| 13. Λ | 14. Σ | 15. Λ | 16. Σ | 17. Λ | 18. Σ | 19. Σ | 20. Λ | 21. Λ | 22. Λ | 23. Σ | 24. Λ |
| 25. Σ | 26. Σ | 27. Λ | 28. Λ | 29. Σ | 30. Λ | 31. Λ | 32. Λ | 33. Σ | 34. Λ | 35. Σ | 36. Σ |
| 37. Λ | 38. Λ | 39. Λ. | | | | | | | | | |

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

40. β

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

- 41.1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell^v \dots$

42. 95%

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Β ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (10)

1.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

32245

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σε ευρώ, το ποσό που ξόδεψαν 20 μαθητές στο κυλικείο του σχολείου τους, στη διάρκεια μιας μέρας.

Ποσό σε ευρώ x_i	n_i	N_i	f_i	$f_i\%$
0	1			
1	9			
2	8			
3	2			
Σύνολο	20			

- Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας, και να συμπληρώσετε τα κενά.
- Πόσοι μαθητές ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, το πολύ 2 ευρώ;
- Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, τουλάχιστον 2 ευρώ;

Μονάδες $(14+6+5)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

3 2 2 4 6

Στον παρακάτω πίνακα, δίνεται ο αριθμός των μαθητών ενός τμήματος του σχολείου με 25 μαθητές, που απουσίασαν από 0 έως και 5 ημέρες στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα.

Ημέρες απουσίας	Αριθμός μαθητών που απουσίασε
0	10
1	2
2	2
3	κ
4	2
5	1

- Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών κ , που απουσίασε από το σχολείο 3 ημέρες.
- Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που δεν απουσίασε από το σχολείο.
- Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που απουσίασε τουλάχιστον 1 ημέρα από το σχολείο.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

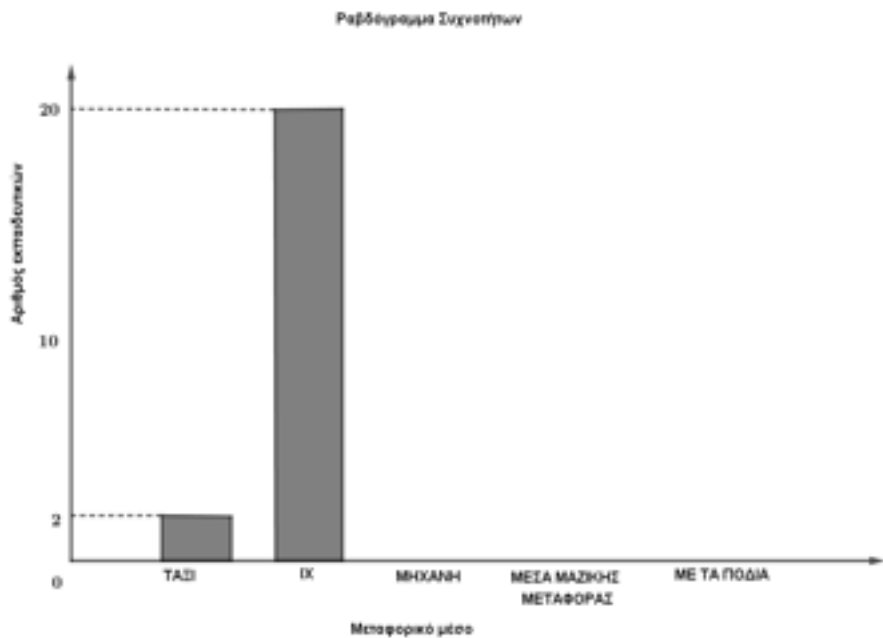
3 3 6 2 6

Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

Μεταφορικό Μέσο x_i	Αριθμός Εκπαιδευτικών ν_i
ΣΥΝΟΛΟ	50

- α. Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και n_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.
- β. Αφού μεταφέρετε το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων στην κόλλα σας, να βάλετε τα αριθμητικά δεδομένα που σας χρειάζονται στον κατακόρυφο άξονα και να σχεδιάσετε τις ράβδους που λείπουν.



Μονάδες (13+12)=25

4.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

3 4 3 5 4

Στον επόμενο πίνακα σχετικών συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των γραπτών βαθμών του συνόλου των μαθητών της Γ΄ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών το προηγούμενο σχολικό έτος.

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0-4	10
4-8	10

8-12	
12-16	35
16-20	15

- Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 και μικρότερο του 12.
- Αν οι μαθητές που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι 42400 να υπολογίσετε το πλήθος του συνόλου των μαθητών.
- Πόσοι μαθητές έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16;

Μονάδες $(9+9+7)=25$

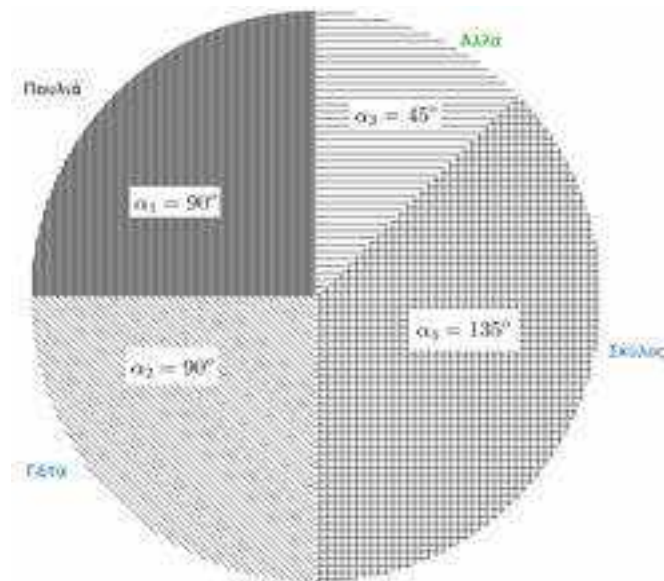
5.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

34431

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνονται σε μοίρες τα μέτρα των γωνιών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ τα οποία αντιστοιχούν στους τέσσερις κυκλικούς τομείς, σχετικά με το αγαπημένο κατοικίδιο των μαθητών της Γ' λυκείου ενός ΕΠΑΛ.



- Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_3 , αυτών που προτιμούν πουλιά ή άλλα κατοικίδια αντίστοιχα.

- β. Αν το σύνολο των μαθητών που ρωτήθηκαν ήταν $n=120$, να βρείτε πόσοι μαθητές της τάξης αυτής προτιμούν τα πουλιά για κατοικίδιο.

Μονάδες $(12+13)=25$

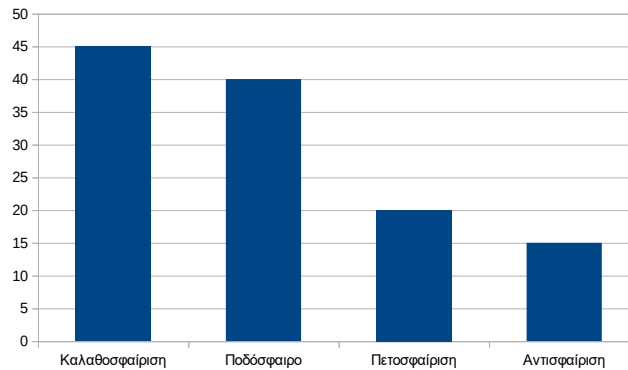
6.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

3 4 4 3 2

Στο παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές της Γ΄ Λυκείου ενός ΕΠΑΛ επέλεξαν καθένα από τέσσερα αθλήματα για να διαγωνιστούν στο σχολικό πρωτάθλημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι καθένας από τους μαθητές επέλεξε ένα μόνο από τα αθλήματα.



- α. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών της Γ΄ λυκείου αυτού του ΕΠΑΛ.
- β. Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , καθενός από τα αθλήματα που επέλεξαν οι μαθητές.

Μονάδες $(12+13)=25$

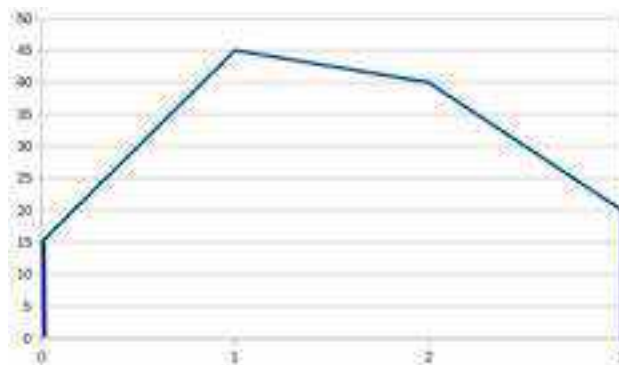
7.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

34434

Στο παρακάτω πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές ενός δείγματος της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα από τα τέσσερα των πανελλαδικών εξετάσεων.



- Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος αυτού.
- Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , του πλήθους των μαθητών, οι οποίοι βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα αντίστοιχα.

Μονάδες (12+13)=25

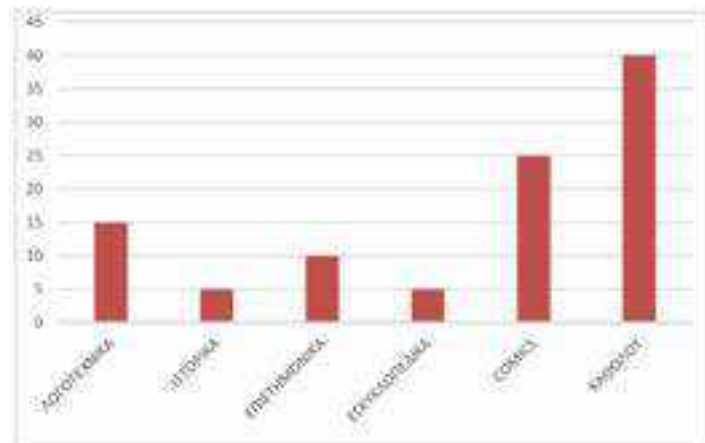
8.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

34766

Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων για το διάβασμα βιβλίων μαθητών γυμνασίου. Κάθε μαθητής απάντησε για ένα μόνο είδος βιβλίου ή «ΚΑΘΟΛΟΥ» αν δεν διαβάζει κανένα βιβλίο. Ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τον αριθμό των μαθητών και ο οριζόντιος άξονας τα είδη των βιβλίων.



- α. Ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος των μαθητών γυμνασίου που συμμετέχουν στην έρευνα, όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα;
- β. Πόσοι μαθητές διαβάζουν λογοτεχνικά βιβλία και πόσοι επιστημονικά;
- γ. i. Πόσοι μαθητές διαβάζουν βιβλία;
ii. Τι ποσοστό μαθητών δεν διαβάζει καθόλου βιβλία;

Μονάδες $[7+4+(6+8)]=25$

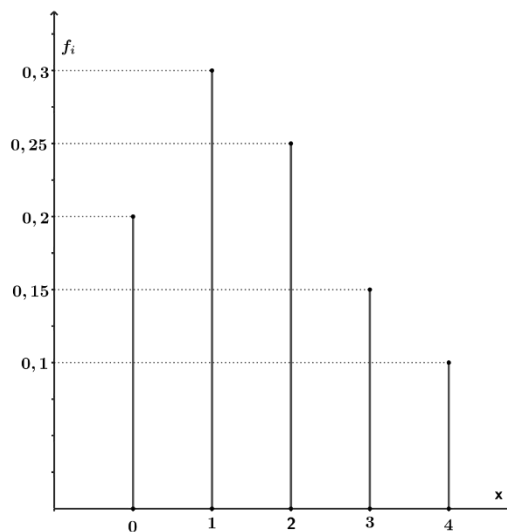
9.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

34813

Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων (άξονας των x) ενός δείγματος 160 μαθητών ενός σχολείου στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

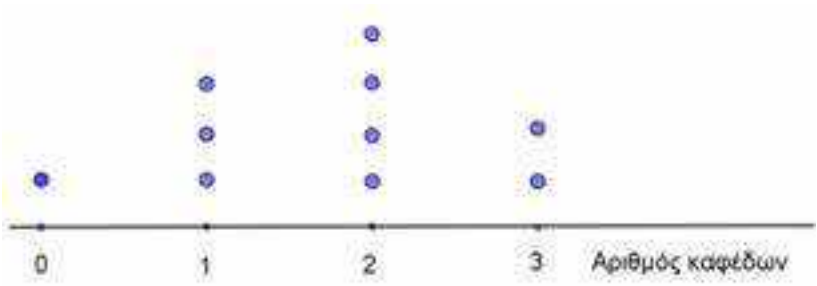


Για το παραπάνω δείγμα βρείτε:

- α. το ποσοστό των μαθητών που έκανε ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως.
- β. πόσοι μαθητές πραγματοποίησαν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως.
- γ. το ποσοστό των μαθητών που έκανε δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

Στο παρακάτω σημειόγραμμα, βλέπουμε τον αριθμό των καφέδων που πίνουν οι 10 υπάλληλοι μιας ιδιωτικής εταιρείας κάθε ημέρα στην εργασία τους.



α. Μελετώντας το σημειόγραμμα να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός καφέδων x_i	Αριθμός υπαλλήλων ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
0		
1		
2		
3		
ΣΥΝΟΛΟ	10	1

- β. Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους το πολύ 2 καφέδες.
- γ. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους 3 καφέδες.

Μονάδες (10+8+7)=25

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (4)

1.

Θ Ε Μ Α Β

2.2

3 2 2 5 3

Οι 20 μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, ενός σχολείου, που πήραν μέρος σε ένα ετήσιο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, πήραν τους παρακάτω βαθμούς (κλίμακα 0-10).

4 10 8 8 5 6 9 7 8 9 10 9 5 6 6 7 8 8 7 6

α. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός				
x_i	n_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Σύνολο				

- β. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των συχνοτήτων n_i , καθώς και το διάγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.
- γ. Αν η διεύθυνση του σχολείου θελήσει να βραβεύσει τους μαθητές που πέτυχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους μαθητές θα βραβεύσει;
- δ. Αν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, βραβεύσει το 25% των μαθητών που πήραν μέρος στο διαγωνισμό, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να βραβευτεί;

Μονάδες (9+6+5+5)=25

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των παγωτών που κατανάλωσαν οι μαθητές της Γ' τάξης ενός σχολείου στη διάρκεια της πενθήμερης εκδρομής τους.

Αριθμός Παγωτών x_i	n_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0					
1					70
2	10				90
3			10		100
Σύνολο			100		

Δίνεται το $f_4\% = 10$ και ότι το 40% των μαθητών δεν έφαγε παγωτό.

- Να δείξετε ότι η αθροιστική σχετική συχνότητα $F_1\% = 40$ και η σχετική συχνότητα $f_3 = 0,2$.
- Να δείξετε ότι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή, είναι $n = 50$.
- Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά.
- Πόσοι μαθητές έφαγαν τουλάχιστον ένα παγωτό;

Μονάδες $(7+6+7+5)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Δ

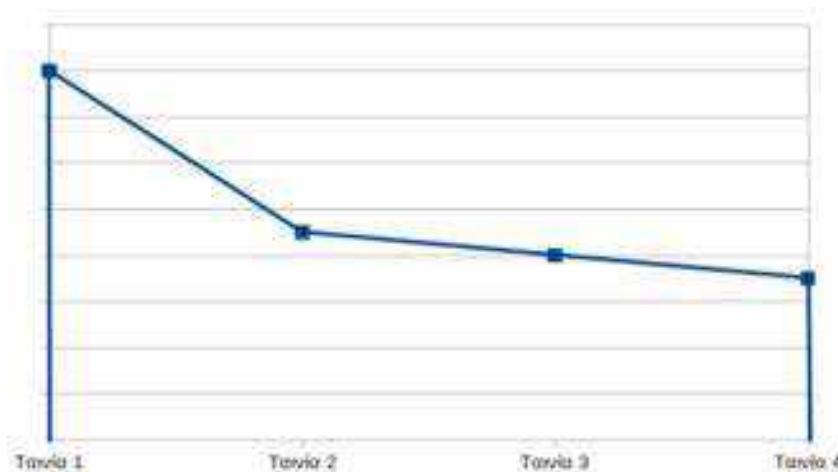
2.2

34733

Σε έναν κινηματογράφο τα εισιτήρια που έκοψαν τέσσερις ταινίες τον μήνα Νοέμβριο φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Ταινία 1	150
Ταινία 2	130
Ταινία 3	70
Ταινία 4	50

- α. Ένας μαθητής κατασκεύασε το επόμενο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων % για τους θεατές που παρακολούθησαν τον μήνα Νοέμβριο τις παραπάνω ταινίες:

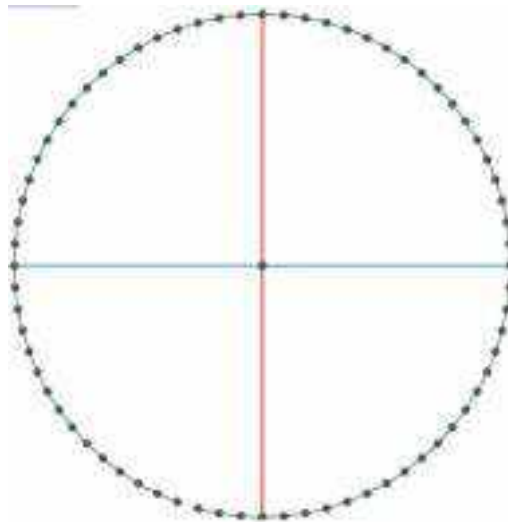


Να αιτιολογήσετε αν το πολύγωνο αυτό είναι σωστό ή λανθασμένο.

- β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ταινία	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i
Ταινία 1	150	
Ταινία 2	130	
Ταινία 3	70	
Ταινία 4	50	
Σύνολο		

- γ. Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία που θα αντιστοιχεί σε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για καθεμία από τις παραπάνω ταινίες. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κυκλικό δίσκο, ο οποίος είναι χωρισμένος σε τόξα 5° .



Μονάδες $(8+9+8)=25$

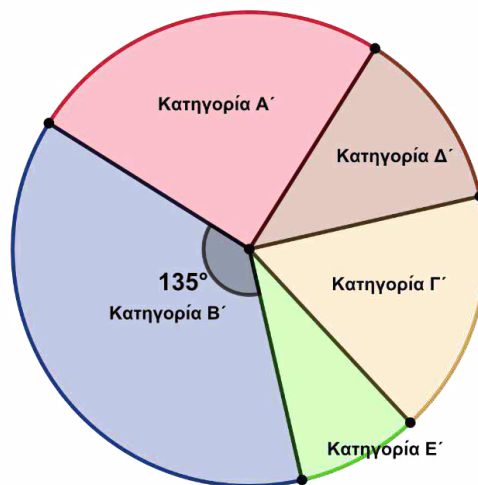
4.

Θ Ε Μ Α Δ

2.2

34816

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 1200 εργαζομένων μιας επιχείρησης χωρισμένο σε πέντε κατηγορίες.



175

Α΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ΄ Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης

Δ΄ Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Ε΄ Κατηγορία: Κάτοχοι Διδακτορικού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνο από τις κατηγορίες αυτές.

Στις κατηγορίες Α΄ και Δ΄ ανήκει το 25% και το 12,5% των εργαζομένων αντίστοιχα.

Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Β΄ κατηγορίας είναι 135° .

Τέλος οι εργαζόμενοι της Γ΄ κατηγορίας είναι διπλάσιοι από τους εργαζόμενους της Ε΄ κατηγορίας.

α. Να αποδειχθεί ότι οι εργαζόμενοι στην κατηγορία Β΄ είναι 450.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων σε κάθε κατηγορία.

γ. i. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

ii. Εάν συνταξιοδοτηθούν όλοι οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ΄ τι ποσοστό των εργαζομένων της εταιρείας θα αντιπροσωπεύουν πλέον οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Ε΄;

Μονάδες $[4+8+(9+4)]=25$

2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ (28)

1.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

25460

Οι βαθμοί 10 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν:

4, 7, 3, 5, 8, 6, 5, 9, 6, 6

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος.
- Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων.
- Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8;

Μονάδες $(10+10+5)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

28615

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

- Τι είδους μεταβλητή είναι η μεταβλητή 'Βάρος'; Ποιοτική, Ποσοτική Διακριτή ή Ποσοτική Συνεχής;
- Να βρείτε:
 - τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
 - τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

28616

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

80, 70, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

- Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών.
- Να βρείτε:

- i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
 ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

Μονάδες $[7+(9+9)]=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

30974

Οι προφορικοί βαθμοί έξι μαθητών στα μαθηματικά είναι 10,13,11,15,9,14.

- α. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος των έξι μαθητών.
 β. i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
9		
10		
11		
13		
14		
15		

- ii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

Μονάδες $[10+(5+10)]=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

31087

Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν:

1,4,4,7,3,6,10,3,1,2,3

- α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
 β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
 γ. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 2 2 4 3

Στον παρακάτω πίνακα, αναγράφεται ανά ημέρα, το πλήθος των απόντων μαθητών ενός τμήματος της Γ' Λυκείου.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Πλήθος απόντων μαθητών	4	3	2	2	4

Για το δείγμα των απόντων μαθητών να υπολογίσετε:

- το εύρος R.
- τη διάμεσο δ.
- τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 2 2 5 0

Στη διάρκεια του χειμώνα, από το σύνολο των μαθητών μιας τάξης, οι δέκα σημείωσαν τις εξής ημέρες απουσίας από το σχολείο: 6, 7, 1, 2, 3, 5, 2, 4, 4, 6. Να βρείτε:

- το εύρος των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.
- τη διάμεσο των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.
- τη μέση τιμή των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 3 6 2 7

Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.

- Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών.
- Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.
- Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 4 2 5 8

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή ‘Βάρος’ και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

- Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής ‘Βάρος’ των δέκα μαθητών.
- Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3\text{kg}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος.
- Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 4 8 1 4

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά της διάρκεια του μήνα Απριλίου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις αθροιστικές συχνότητες N_i των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης, οι οποίες έχουν χωριστεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Ωρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Κεντρική τιμή x_i	$x_i v_i$
0-2		5	1	
2-4		15	3	
4-6		20	5	
6-8		35	7	
8-10		40	9	
ΣΥΝΟΛΟ				

- να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.

180

- β. να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.
 γ. να βρεθεί η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 4 8 1 5

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i , $i=1, 2, 3, 4$.

x_i	v_i
1	1
2	2
3	1
4	4

Να αποδείξετε ότι:

- α. Η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με 3.
 β. Η διάμεσος δ ισούται με 3,5.

Μονάδες $(13+12)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 4 8 1 8

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα στις εξετάσεις ήταν: 8,18,12,14,13

- α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή.
 β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή.
 γ. Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2,1,3,3 και 1 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή;

Μονάδες $(9+7+9)=25$

13.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

34820

Οι πόντοι που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε (5) αγώνες της ομάδας του ήταν:

20,17,21,19,23

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πόντων του καλαθοσφαιριστή.
- Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος. Δίνεται ότι $\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2 = 20$, όπου $t_i, i=1,2,\dots,5$, είναι οι πόντοι του καλαθοσφαιριστή στους 5 αγώνες.
- Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

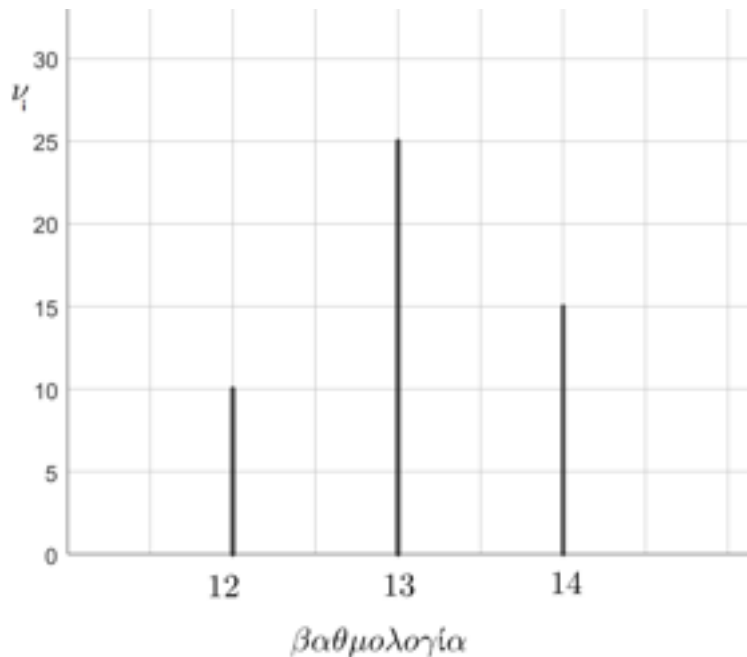
14.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

34843

Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζονται οι βαθμολογίες 50 μαθητών σε μια γραπτή δοκιμασία.



- Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογία x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
12			
13			
14			
Σύνολο			

β. Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες $(12+13)=25$

15.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

3 4 8 4 4

Βιοτεχνία θέλει να προμηθευτεί κουτιά συσκευασίας για τα 100 προϊόντα που παρήγαγε σε μια εβδομάδα, τα οποία μοίρασε σε τέσσερεις κλάσεις ανάλογα με τον όγκο της συσκευασίας σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Όγκος (cm^3) [-)	v_i	f_i	$f_i \%$
50-60	20		
60-70	10		
70-80	40		
80-90	30		
Σύνολο	100		

α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων.

β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής.

Μονάδες $(12+13)=25$

16.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

34927

Κατάστημα υποδημάτων κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων τις πωλήσεις σε ένα μήνα ενός σχεδίου γυναικείου παπουτσιού ανάλογα με το νούμερό του. Για την κατανομή αυτή:

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Νούμερο x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
36	8		
37	12		
38	20		
39	10		
Σύνολο			

β. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων v_i .

Μονάδες (12+13)=25

17.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35475

Οι εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ ενός δείγματος δέκα καταστημάτων σε ένα εμπορικό κέντρο κατά το μήνα Απρίλιο του 2023 ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των εισπράξεων.
- Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
15				
20				
30				
50				
Σύνολο				

- Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος:

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

Να υπολογίσετε τη διακύμανση S^2 των εισπράξεων.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

18.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35767

Η μέση τιμή του βάρους έξι μαθητών της Γ' Λυκείου είναι 72 κιλά.

- Να δείξετε ότι το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι 432 κιλά.
- Στην ομάδα των έξι μαθητών προστίθενται άλλοι δύο, με βάρος 77 και 83 κιλά αντίστοιχα. Να βρείτε:

185

- i. το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών.
- ii. τη μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών.

Μονάδες $[8+(8+9)]=25$

19.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35769

Σε μία έρευνα, για ένα δείγμα 20 οικογενειών που επιλέχτηκαν, καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών της κάθε οικογένειας, όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i
0	1
1	5
2	9
3	3
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	20

- α. Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των παιδιών.
- β. Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	1	
1	5	
2	9	
3	3	
4	2	
ΣΥΝΟΛΟ	20	

- γ. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

20.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35770

Ένα ξενοδοχείο του Ναυπλίου διαθέτει 15 δωμάτια. Στο διπλανό πίνακα, καταγράφηκε ο αριθμός των κρεβατιών ανά δωμάτιο, καθώς και ο αριθμός των δωματίων που τα έχουν. Να βρείτε:

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων ν_i
1	1
2	2
3	8
4	4
ΣΥΝΟΛΟ	15

- τη διάμεσο του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.
- το συνολικό αριθμό των κρεβατιών του ξενοδοχείου.
- τη μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

21.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35772

Η κατανομή των ηλικιών των νέων κατασκηνοτών ενός κάμπινγκ της Αμοργού, είναι περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x} = 25$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,08$.

- Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.
- Να βρεθεί το εύρος των ηλικιών της κατανομής.
- Αν γνωρίζουμε ότι 200 είναι όλοι οι κατασκηνοτές του κάμπινγκ, να βρείτε πόσοι από αυτούς έχουν ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

22.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35774

Οι βαθμοί που έγραψε στα πέντε τεστ του 1^{ου} τετραμήνου, για το μάθημα των Μαθηματικών, ένας μαθητής της Γ' Λυκείου είναι: 12, 14, 8, 20, 16.

- Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ.
- Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

Βαθμός x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
12		
14		
8		
20		
16		
ΣΥΝΟΛΟ		

- ii. Αξιοποιώντας τον συμπληρωμένο πίνακα του ερωτήματος (β, i), να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση, της βαθμολογίας του μαθητή για τα πέντε τεστ.

Μονάδες $[8 + (8 + 9)] = 25$

23.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35779

Δίνονται οι πέντε αριθμοί 6, 5, 28, 3, 8.

- Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω πέντε αριθμών.
- Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω πέντε αριθμών.
- Στους παραπάνω πέντε αριθμούς, δίνεται ως έκτος, ο αριθμός 16. Να βρείτε τη διάμεσο των έξι αριθμών.

Μονάδες $(9 + 8 + 8) = 25$

24.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35780

Δίνονται οι αριθμοί: 2, 3, 4, 6, 10.

- Να βρεθεί η μέση τιμή τους.
- Να δείξετε ότι η διασπορά τους είναι $s^2 = 8$.
- Να βρείτε την τυπική απόκλιση, του παραπάνω δείγματος των πέντε αριθμών.

Μονάδες $(10 + 10 + 5) = 25$

25.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

35781

Οι υπάλληλοι μιας μεγάλης εταιρείας πετρελαιοειδών, χρησιμοποιούν το καφέ και το εστιατόριο της εταιρείας καθημερινά. Αν τα χρήματα που ξοδεύουν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}=10$ ευρώ και συντελεστή μεταβολής $CV=0,2$ τότε:

- α. να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας καθημερινά, είναι $s=2$ ευρώ.
- β. i. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ.
ii. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ.

Μονάδες $[9+(8+8)]=25$

26.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

36570

Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή είναι 14,18,20,14,12,12, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s=3$.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος βαθμών.
- β. Να βρείτε τη διάμεσο δ και το εύρος R του δείγματος.
- γ. Αν $\bar{x}=15$, να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή μεταβολής CV .

Μονάδες $(10+10+5)=25$

27.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

36571

Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή για το Α' τετράμηνο είναι 16,18,18,12,16,10, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Αν η μέση τιμή των βαθμών είναι $\bar{x}=15$ και η τιμή της διασποράς $s^2=9$.

- α. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s και τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος των βαθμών.
- β. Να βρείτε τη διάμεσο δ του δείγματος.

- γ. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών του μαθητή για το Β' τετράμηνο αυξήθηκαν όλοι κατά δύο μονάδες. Να υπολογίσετε την νέα μέση τιμή των βαθμών του Β' τετράμηνου.

Μονάδες $(10+5+10)=25$

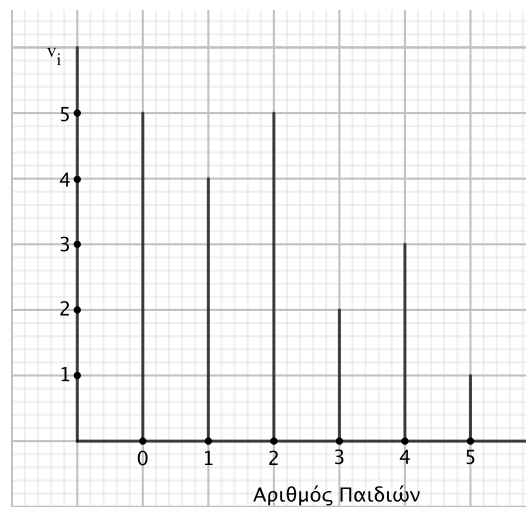
28.

Θ Ε Μ Α Β

2.3

36813

Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των παιδιών (οριζόντιος άξονας) είκοσι (20) οικογενειών.



- α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i v_i$
0		
1		
2		
3	2	6
4		
5		
Σύνολο	$v = 20$	

- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των 20 οικογενειών.
 γ. Ποιο είναι το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά;

Μονάδες $(11+8+6)=25$

2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ (14)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

3 2 2 5 1

Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους στο σχολείο, ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται ότι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των χρόνων είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του $s^2 = 4$.

- α. Να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x} = 10$.
- β. Να υπολογίσετε (προσεγγιστικά), το εύρος του δείγματος των χρόνων.
- γ. Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών, που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο:
 - i. το πολύ 10 λεπτά
 - ii. πάνω από 14 λεπτά
 - iii. από 6 έως 12 λεπτά

Μονάδες $[8 + 5 + (4 + 4 + 4)] = 25$

2.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

3 2 2 5 6

Στις τέσσερις κλάσεις του παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται τα χρόνια εργασίας του συνόλου των εκπαιδευτικών ενός Λυκείου της Αθήνας.

Χρόνια Υπηρεσίας	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
$[0, 10)$		10	
$[10, 20)$		15	
$[20, 30)$		κ	
$[30, 40)$		5	
Σύνολο			

- α. Αφού μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά του, συναρτήσει του κ , όπου αυτό είναι αναγκαίο.

- β. Αν ο μέσος χρόνος εργασίας των παραπάνω εκπαιδευτικών είναι τα 19 χρόνια, να δείξετε ότι το $\kappa = 20$. Πόσοι ήταν συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου;

Για $\kappa = 20$,

- γ. να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Χρόνια Υπηρεσίας	ν_i	f_i	N_i	F_i	$F_i\%$
[0, 10)	10				
[10, 20)	15				
[20, 30)	20				
[30, 40)	5				
Σύνολο					

- δ. να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, και να βρείτε τη διάμεσο του χρόνου εργασίας.

Μονάδες $(5+6+8+6)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

32257

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:

10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10.

- α. Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο της βαθμολογίας.
- β. Να δείξετε ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι $\bar{x} = 12$.
- γ. Να δείξετε ότι η διασπορά της βαθμολογίας είναι $s^2 = 18,8$ και να δείξετε ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι: $\sqrt{18,8} \simeq 4,3$.
- δ. Ένας μαθητής της τάξης ισχυριζόμενος ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές, διατύπωσε την άποψη ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, θα προκύψει ένα

δείγμα αριθμών (όχι βαθμών) που θα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (6+6+8+5)=25

4.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

33573

Δύο διαφορετικά δείγματα μίας μεταβλητής X ενός πληθυσμού έχουν τις παρακάτω τιμές:

Δείγμα 1: 8, 9, 10, 11, 12 και

Δείγμα 2: 8, 10, 10, 10, 12

- Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο d .
- Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s .
- Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV .
- Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη:
«Αν δύο διαφορετικά δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή και διάμεσο, τότε εμφανίζουν και την ίδια ομοιογένεια.»
Συμφωνείτε με αυτήν την άποψη; Χρησιμοποιώντας τα δείγματα που δόθηκαν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

5.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

33631

Ένας καθηγητής Μαθηματικών που διδάσκει στο ΕΠΑΛ μιας πόλης, κατέγραψε τη βαθμολογία που πέτυχαν οι 20 μαθητές του, στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, στην κλίμακα 0 – 20. Στη συνέχεια κατασκεύασε το διπλανό πίνακα, όπου σημείωσε τους βαθμούς που πέτυχαν οι μαθητές του (η στήλη των x_i) και το πλήθος-συχνότητα των μαθητών που τους πέτυχε (η στήλη των n_i). N_i είναι η αθροιστική συχνότητα.

Βαθμός x_i	Συχνότητα n_i	$x_i \cdot n_i$	N_i
6	3		
8	2		
10	4		
11	1		
14	5		
15	1		
18	3		
20	1		
ΣΥΝΟΛΟ	20		

- α. Να συμπληρώσετε τις δύο στήλες του πίνακα που δεν έχουν συμπληρωθεί.
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας, που πέτυχαν οι μαθητές του ΕΠΑΛ αυτού.
- γ. Όταν ο σύλλογος των διδασκόντων του ΕΠΑΛ αυτού, συζήτησε τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές τους, ο καθηγητής των Μαθηματικών υποστήριξε ότι:
- το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε κάτω από τη βάση (κάτω από 10) ξεπερνάει το 52% και είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου.
 - το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε άριστα (από 18 έως 20) είναι μόλις το 5%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου είναι τετραπλάσιο αυτού.
- Συμφωνείτε με τις απόψεις που διατύπωσε ο Μαθηματικός;
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[6+7+(6+6)]=25$

6.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

3 4 4 4 8

Μελετήσαμε ένα δείγμα Ι.Χ. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	50	0,125				
2	110	0,275				
3		0,3				
4	30	0,075				
5	90					
ΣΥΝΟΛΑ	$v=400$					

- α. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
- β. Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.

- γ. Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Δίνεται ότι: $\sqrt{7} = 2,65$)

Μονάδες $(7+7+11)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

34527

Ο κυβισμός των κινητήρων X , σε κυβικά εκατοστά ενός δείγματος 10000 αυτοκινήτων, ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 5000 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1800 κυβικά εκατοστά.

- α. Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος, είναι 1800 κυβικά εκατοστά.
- β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο παραπάνω δείγμα υπάρχουν 3400 αυτοκίνητα που ο κυβισμός τους είναι από 1800 κυβικά εκατοστά έως 2000 κυβικά εκατοστά, να βρείτε την τυπική απόκλιση s του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.
- γ. Να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

34817

Στις 10 το πρωί, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου ήταν:

Πόλη Α: 20 17 18 20 17 16 17 16 18 10

Πόλη Β: 18 22 20 17 16 16 15 17 12 16

- α. Να βρείτε τη μέση και τη διάμεσο θερμοκρασία των πόλεων Α και Β, για το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου.
- β. Ο Γιάννης υπολόγισε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β και βρήκε ότι είναι: $S_A = 2,66$ και $S_B = 2,59$ αντίστοιχα. Να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

- γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας

(Δίνεται ότι: $\frac{2,59}{16,9} = 0,153$ και $\frac{2,66}{11,9} = 0,223$).

Μονάδες (9+6+10)=25

9.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

35092

Έστω α ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνεται η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	v_i	$x_i v_i$
30-40		α	
40-50		2α	
50-60		3α	
60-70		4α	
Σύνολο		10α	

- α. i. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.
 ii. Να δείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\bar{x} = 55$.
- β. i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Κλάσεις [-)	Κεντρ.τιμές x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
30-40		α			
40-50		2α			
50-60		3α			
60-70		4α			
Σύνολο		10α			

- ii. Να βρείτε την διακύμανση s^2 της κατανομής.
- γ. Να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής συχνοτήτων του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	v_i
30-40	10
40-50	20
50-60	30
60-70	40
Σύνολο	100

Μονάδες $[(4+4)+(4+5)+8]=25$

10.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

35476

Μια εταιρεία απασχολεί 7 υπαλλήλους, οι 4 από αυτούς εργάζονται στο τμήμα Α και οι υπόλοιποι 3 στο τμήμα Β. Οι μισθοί (σε ευρώ) των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι:

990, 910, 960, 940.

Ενώ των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι: 990, 980, 1000.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.
- β. Να υπολογίσετε το ποσοστό των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας, που έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β.
- γ. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των μισθών των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι 960 ευρώ ενώ η μέση τιμή των μισθών των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι 990 ευρώ. Η εταιρεία θέλει να προσλάβει έναν υπάλληλο στο τμήμα Β ώστε η νέα μέση τιμή των μισθών των εργαζομένων του τμήματος Β να είναι ίση με αυτή του τμήματος Α, ποιος πρέπει να είναι ο μισθός του υπαλλήλου που θα προσληφθεί;

Μονάδες $(9+9+7)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

35477

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

- α. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:
 - i. Από 4 έως 6 λεπτά.
 - ii. Από 3 έως 6 λεπτά.
- β. Αν το πλήθος των πολιτών που εξυπηρετήθηκαν το μήνα Μάιο σε αυτή την υπηρεσία ήταν 5000 πόσοι περίπου πολίτες περίμεναν από 5 έως 6 λεπτά μέχρι να εξυπηρετηθούν;
- γ. Να εκτιμήσετε το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.
- δ. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

$$\text{Μονάδες } [(4+4)+6+6+5]=25$$

12.

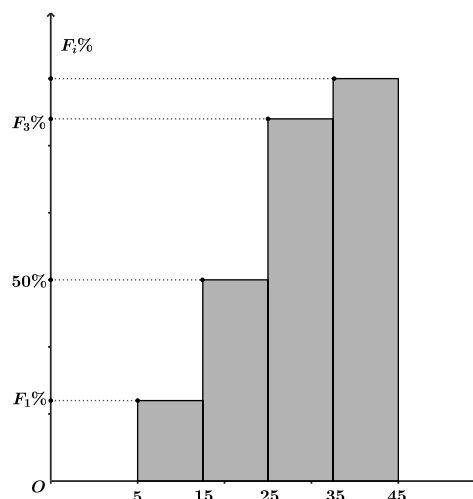
Θ Ε Μ Α Δ

2.3

35478

Οι χρόνοι σε λεπτά, που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5,45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους.

Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



- α. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.
- β. i. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $a=8$
 ii. και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας.

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)		$\alpha+4$			
[15,25)		$3\alpha-6$			
[25,35)		$2\alpha+8$			
[35,45)		$\alpha-2$			
Σύνολο					

Μονάδες $[10+(7+8)]=25$

13.

Θ Ε Μ Α Δ

2.3

35479

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1=\alpha$, $x_2=\alpha+5$, $x_3=\alpha+10$ και $x_4=\alpha+35$, όπου α πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x_i	F_i
α	$\frac{4}{\lambda}$
$\alpha+5$	$\frac{11}{\lambda}$
$\alpha+10$	$\frac{18}{\lambda}$
$\alpha+35$	$\frac{25}{\lambda}$

όπου λ θετικός ακέραιος.

- Να αποδείξετε ότι $\lambda=25$.
- Να βρείτε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_1 , F_2 , F_3 και F_4 αλλά και τις σχετικές συχνότητες f_1 , f_2 , f_3 και f_4 .
- Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x}=19$, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες $(9+8+8)=25$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20 \cdot s \cdot x^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Αν ισχύει ότι $f'(1) = 0$, τότε:

β. Να δείξετε ότι το δείγμα των n παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $s = 1$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

δ. Για $s = 1$ και $\bar{x} = 20$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες $(4+10+4+7)=25$