

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εύρεση κυρτότητας και σημείων καμπής

332. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι κοίλη ή κυρτή καθώς και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεών τους

i. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x + 3$

ii. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό με :

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 2$$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$$

Είναι :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$60x^2$	+	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	0	+
$f(x)$				

- Η f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο διάστημα $(-\infty, 1]$
- Η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- Σημείο καμπής είναι το $K(1, 3)$.

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό με :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 1)[-(x^2 - 1) - 2(-x^2 - 1)]}{(x^2 - 1)^4} \\
 &= \frac{2x(-x^2 + 1 + 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}
 \end{aligned}$$

Είναι :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ή } x^2 + 3 = 0 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow x = 0$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
2x	-	-	0	+	+
x^2+3	+	+	+	+	+
$(x^2-1)'$	+	-	-	+	+
$f''(x)$	-	+	0	-	-
$f(x)$					

- Η f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $[0, 1)$
- Η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στα διαστήματα $(-1, 0]$ και $(1, +\infty)$.
- Σημείο καμπής είναι το $O(0, 0)$.

Μεθοδολογία

- ♦ Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$ και
- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .
- ♦ Αν ισχύουν :
 1^{ον}. Η f αλλάζει κοίλα εκατέρωθεν του x_0 και
 2^{ον}. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο A .
 τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f ονομάζεται **σημείο καμπής**.

Παρατηρήσεις

- ♦ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
- ♦ Δεν νοείται (ούτε ορίζεται) σημείο καμπής της C_f μιας συνάρτησης σε σημείο που αυτή δεν ορίζεται.

333. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6x^2 + x, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της C_f .

Λύση

- ♦ • Για $x < 0$ είναι $f'(x) = -3x^2 - 12x + 1$
- Για $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x + 1$
- Για το σημείο $x = 0$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 - 6x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - 6x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$

- ♦ • Για $x < 0$ είναι $f''(x) = -6x - 12$
- Για $x > 0$ είναι $f''(x) = 2$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x) = -6x - 12$		+	0	-
$f''(x) = 2$				+
$f(x)$		$\swarrow$	-18 Σ.Κ.	$\searrow$ 0 Σ.Κ.

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$.

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[-2, 0]$.

Στα σημεία $x_1 = -2$ και $x_2 = 0$ η f είναι παραγωγίσιμη, συνεπώς ορίζεται εφαπτομένη της C_f στα σημεία αυτά.

Επίσης η f αλλάζει τα κοίλα εκατέρωθεν των σημείων αυτών.

Επομένως **τα σημεία $A(-2, -18)$ και $O(0, 0)$ είναι σημεία καμπής της C_f .**

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στα σημεία αλλαγής της. Είναι όμως απαραίτητο να εξετάσουμε αν υπάρχει (πρώτη) παράγωγος της f στα σημεία αλλαγής για να διαπιστώσουμε αν ορίζεται ή όχι εφαπτομένη της C_f στα σημεία αυτά.

334. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x + \lambda}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής και να βρείτε την καμπύλη στην οποία ανήκει.

Λύση

Είναι $f(x) = (x + \lambda)e^{-x}$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με : $f'(x) = e^{-x} - (x + \lambda)e^{-x}$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + (x + \lambda)e^{-x} = e^{-x}(x + \lambda - 2)$$

Είναι : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \lambda$

Τα πρόσημα της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	$2-\lambda$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

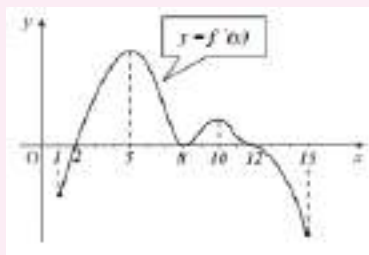
Άρα η γραφική παράσταση της f έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $K(2 - \lambda, f(2 - \lambda))$.

Είναι $f(2 - \lambda) = (2 - \lambda + \lambda)e^{\lambda - 2} = 2e^{\lambda - 2}$ οπότε $K(2 - \lambda, 2e^{\lambda - 2})$

$$\text{Θέτουμε : } \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2e^{\lambda - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 - x \\ y = 2e^{-x} \end{cases}$$

Άρα το σημείο καμπής K ανήκει στην καμπύλη $y = 2e^{-x}$

335. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 15]$.



Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κοίλη και κυρτή καθώς και τις θέσεις των τοπικών ακρότατων και των σημείων καμπής.

Λύση

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (οπότε και είναι $f'(x) > 0$) στα διαστήματα $(2, 8)$, $(8, 12)$, ενώ η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ (οπότε $f'(x) < 0$) στα διαστήματα $[1, 2)$, $(12, 15]$.

Επίσης η f' μηδενίζει στα σημεία 2, 8 και 12.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μονοτονίας της f :

x	1	2	8	12	15				
f'(x)		-	0	+	0	+	0	-	
f(x)	TM		TE				TM		TE

Συνεπώς :

Η f είναι γν. φθίνουσα στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[12, 15]$.

Η f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα $[2, 12]$.

Η f παρουσιάζει :

στο $x_1 = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)$, στο $x_2 = 2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2)$

στο $x_3 = 12$ τοπικό μέγιστο το $f(12)$, στο $x_4 = 15$ τοπικό ελάχιστο το $f(15)$

Την κυρτότητα της f θα την βρούμε από την μονοτονία της f' .

Από τη γραφική παράσταση της f' είναι φανερό ότι η f' είναι :

- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[1, 5]$ και $[8, 10]$

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[5, 8]$ και $[10, 15]$
 οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f' και κυρτότητας της f :

x	1	5	8	10	15
$f'(x)$					
$f(x)$					

Συνεπώς :

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $[1, 5]$ και $[8, 10]$.

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $[5, 8]$ και $[10, 15]$.

Η f έχει σημεία καμπής τα $K_1(5, f(5))$, $K_2(8, f(8))$, $K_3(10, f(10))$.

Εύρεση τιμών παραμέτρων

336. A. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a\sqrt{x} + \frac{\beta}{\sqrt{x}} \quad \text{με } a, \beta \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τα a, β αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(1, 4)$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\beta x^3 + 6(\beta^2 + \beta)x^2 + 2\alpha x + 1$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε τα a, β ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$ και η C_f να δέχεται στο σημείο $N(1, f(1))$ οριζόντια εφαπτομένη.

Λύση

A. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0, +\infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{\beta}{2x\sqrt{x}} = \frac{ax - \beta}{2x\sqrt{x}} \\ f''(x) &= \frac{a2x\sqrt{x} - (ax - \beta)(2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(2x\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{2ax\sqrt{x} - (ax - \beta)(2\sqrt{x} + \sqrt{x})}{4x^2x} = \frac{2ax\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(ax - \beta)}{4x^3} \\ &= \frac{2ax\sqrt{x} - 3ax\sqrt{x} + 3\beta\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{-ax\sqrt{x} + 3\beta\sqrt{x}}{4x^3} \end{aligned}$$

Αφού η C_f έχει σημείο καμπής το $A(1, 4)$ πρέπει κατ' ανάγκη :

$$\begin{cases} f''(1)=0 \\ f(1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-\alpha+3\beta}{4}=0 \\ \alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta=0 \\ \alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3\beta \\ 3\beta+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι οι $\alpha=3$ και $\beta=1$

B. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό με :

$$f'(x) = 4x^3 + 6\beta x^2 + 12(\beta^2 + \beta)x + 2\alpha$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12\beta x + 12(\beta^2 + \beta)$$

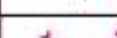
Για να παρουσιάζει η f καμπή στο $x_0 = 0$ πρέπει κατ' ανάγκη να ισχύει : $f''(0)=0$

Η C_f δέχεται στο σημείο $N(1, f(1))$ οριζόντια εφαπτομένη αν και μόνο αν: $f'(1)=0$
Οπότε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f''(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 12(\beta^2 + \beta)=0 \\ 4 + 6\beta + 12(\beta^2 + \beta) + 2\alpha = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 + \beta = 0 \\ 4 + 6\beta + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(\beta+1)=0 \\ \alpha = -2 - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \text{ ή } \beta=-1 \\ \alpha = -2 - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha = -2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

♦ Για $\alpha = -2$ και $\beta = 0$ είναι : $f''(x) = 12x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Επομένως :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	+	
$f(x)$				

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$

♦ Για $\alpha = 1$ και $\beta = -1$ είναι : $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

Επομένως :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$						

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

Παρατήρηση

Η συνθήκη $f''(x_0) = 0$ για να είναι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής μιας (δύο φορές παραγωγίσιμης) συνάρτησης f , είναι **αναγκαία** δεν είναι όμως και ικανή.

Γι' αυτό αν οι τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν από μια τέτοια συνθήκη είναι περισσότερες από μια τότε για να γίνουν δεκτές πρέπει να διαπιστωθεί για ποιές από αυτές η f αλλάζει τα κοίλα εκατέρωθεν του x_0 και συνεπώς παρουσιάζει καμπή.

Η επαλήθευση δεν είναι αποραϊτή αν οι τιμές των παραμέτρων είναι μοναδικές

337. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\lambda x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1.$$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\lambda x^2}{2} + x + 1, x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = x^2 - \lambda x + 1, x \in \mathbb{R}$. Η f'' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = \lambda^2 - 4$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$ ή $\lambda > 2$, τότε η f'' έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 και είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Οπότε η f δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

♦ Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

♦ Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$, τότε :

• Για $\lambda = 2$: $f''(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Είναι :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	↖ ↗	↖ ↗	↖ ↗

Οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

• Για $\lambda = -2$: $f''(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Είναι :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	↖ ↗	↖ ↗	↖ ↗

Οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άρα τελικά, όταν $\lambda \in [-2, 2]$ η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η f δεν έχει σημεία καμπής

338. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x) = x - x^2$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Έστω ότι η f παρουσιάζει καμπή σε κάποια θέση $x_0 \in (0, 1)$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, θα ισχύει : $f''(x_0) = 0$ (1)

Παραγωγίζοντας τη δεδομένη σχέση παίρνουμε : $2f(x)f'(x) = 1 - 2x$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Παραγωγίζοντας ξανά έχουμε :

$$2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) = -2 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = -1$$

Για $x = x_0$ παίρνουμε : $(f'(x_0))^2 + f(x_0)f''(x_0) = -1$

Οπότε λόγω (1) έχουμε : $(f'(x_0))^2 = -1$ **άτοπο**. Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ δεν έχει σημεία καμπής τότε ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους :

- ♦ Θεωρούμε ότι παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \Delta$ οπότε $f''(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
- ♦ Δείχνουμε ότι η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ , οπότε η f είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ και συνεπώς δεν έχει σημεία καμπής.

Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια κυρτότητας & εφαπτομένης

339. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1}$ και $g(x) = \ln(x+1)$.

- i. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητά τους.
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων f και g .
- iii. Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} > \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$.

Λύση

- i. ♦ Η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με :

$$f'(x) = e^{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = e^{x-1} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

- ♦ Η g είναι ορισμένη στο διάστημα $A = (-1, +\infty)$ και δύο φορές

παραγωγίσιμη με : $g'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x > -1$

$$g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > -1$$

Άρα η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $A = (-1, +\infty)$.

- ii. ♦** Η ευθεία $\varepsilon: y = x$ εφάπτεται της C_f αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $A(x_1, y_1)$ τέτοιο ώστε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Το } A \text{ να ανήκει στην } C_f \\ \text{Το } A \text{ να ανήκει στην } \varepsilon \\ f'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = e^{x_1-1} \\ y_1 = x_1 \\ e^{x_1-1} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array} \right.$$

Άρα η $\varepsilon: y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, 1)$.

- ♦** Η ευθεία $\varepsilon: y = x$ εφάπτεται της C_g αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $B(x_2, y_2)$ τέτοιο ώστε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Το } B \text{ να ανήκει στην } C_g \\ \text{Το } B \text{ να ανήκει στην } \varepsilon \\ g'(x_2) = \lambda_\varepsilon = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_2 = \ln(x_2 + 1) \\ y_2 = x_2 \\ \frac{1}{x_2 + 1} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Άρα η $\varepsilon: y = x$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $O(0, 0)$.

iii. Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$, άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της άρα και από την $\varepsilon: y = x$.

Επομένως: $f(x) \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$ **(1)** για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ αφού η ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, 1)$.

Η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $A = (-1, +\infty)$ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της άρα και από την $\varepsilon: y = x$.

Επομένως: $g(x) \leq x \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq x$ **(2)** για κάθε $x > -1$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ αφού η ε εφάπτεται της C_g στο σημείο $O(0, 0)$.

Από **(1)** και **(2)** έχουμε: $\ln(x+1) \leq x \leq e^{x-1}$ για κάθε $x > -1$. Αλλά οι ισότητες ισχύουν για διαφορετικές τιμές του x , οπότε: **$\ln(x+1) < e^{x-1}$ για κάθε $x > -1$**

Παρατηρήσεις

- ♦** Αν σε μια άσκηση ζητείται να αποδειχθεί ανισότητα της μορφής $f(x) \gtrless g(x)$

και έχουν προηγηθεί μελέτη των f, g ως προς την κυρτότητά τους και εύρεση εφαπτομένων τους, τότε κάνουμε χρήση της σχετικής θέσης που έχει μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση ως προς μια εφαπτομένη της η οποία είναι:

Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» (αντίστοιχα «πάνω») από τη C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

- ♦** Η «κλασική» μέθοδος να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$

και να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, δεν είναι ότι καλύτερο στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Ανισότητες Jensen

340. i. Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ , να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$ είναι :

$$f(\alpha) + f(\beta) < 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (\text{ανισότητα Jensen})$$

ii. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $f(0)=0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)}{2}$ (1) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii. Να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \leq 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}} \quad (2) \quad \text{για κάθε } a, b \in (0, +\infty) \text{ και } n \in \mathbb{N}^* \text{ με } n > 1$$

Λύση

i. Επειδή είναι $\alpha \neq \beta$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα :

$$\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right]$$

Επομένως υπάρχουν : $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right)$

$$\text{τέτοια ώστε να ισχύουν : } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ και επειδή $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta) \subseteq \Delta$, είναι :

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \\ &\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \\ &\Leftrightarrow^{\beta - \alpha > 0} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta) \end{aligned}$$

ii. Αφού είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

• Αν $\alpha = 0$ τότε η σχέση **(1)** ισχύει ως ισότητα.

• Αν $\alpha \neq 0$ τότε για $\beta = 0$ από **α)** ερώτημα, παίρνουμε :

$$f(\alpha) + f(0) > 2f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > 2f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{f(\alpha)}{2}$$

$$\text{Άρα } f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)}{2} \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[v]{x}$, $x > 0$, $v \in \mathbb{N}^*$, $v > 1$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με :

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{v}})' = \frac{1}{v} \cdot x^{\frac{1}{v}-1} = \frac{1}{v} \cdot x^{\frac{1-v}{v}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{v} (x^{\frac{1-v}{v}})' = \frac{1}{v} \cdot \frac{1-v}{v} \cdot x^{\frac{1-v}{v}-1} = \frac{1-v}{v^2} \cdot x^{\frac{1-2v}{v}}$$

Για κάθε $v > 1$ είναι $\frac{1-v}{v^2} < 0$ ενώ $x^{\frac{1-2v}{v}} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $A = (0, +\infty)$.

• Αν $\alpha = \beta$ τότε η σχέση **(2)** ισχύει ως ισότητα.

• Αν $\alpha \neq \beta$ τότε από **α)** ερώτημα, παίρνουμε :

$$f(\alpha) + f(\beta) < 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt[v]{\alpha} + \sqrt[v]{\beta} < 2 \cdot \sqrt[v]{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\text{Άρα } \sqrt[v]{\alpha} + \sqrt[v]{\beta} \leq 2 \cdot \sqrt[v]{\frac{\alpha+\beta}{2}} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in (0, +\infty).$$

Παρατήρηση 1

- ♦ Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω) σ' ένα διάστημα Δ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) **στο εσωτερικό** του Δ .
- ♦ Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω) σ' ένα διάστημα Δ τότε **δεν** είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) για κάθε $x \in \Delta$ αφού μπορεί να είναι $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) ή η f να μην είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο του Δ .

Παρατήρηση 2

Ομοίως αποδεικνύεται ότι : Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω σ' ένα διάστημα Δ , τότε :

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = \beta$. Οπότε αν $\alpha \neq \beta$ τότε ισχύει : $f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Ασκήσεις

Εύρεση κυρτότητας και σημείων καμπής συνάρτησης

1679. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεών τους :

i. $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - 3x + 1$

ii. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

iii. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

iv. $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$

v. $f(x) = e^x (x^2 + 1)$

vi. $f(x) = 1 + 2x^2 + 2x^2(\ln x - 2)^2$

vii. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4, & x \leq 0 \\ x^3 - 6x^2 + 4, & x > 0 \end{cases}$

viii. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, & x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, & x > 1 \end{cases}$

1680. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ έχει τρία σημεία καμπής τα οποία είναι συνευθειακά.

1681. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^3(x - \gamma)^4$ με $\alpha < \beta < \gamma$.

Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x - \alpha} + \frac{3}{x - \beta} + \frac{4}{x - \gamma}$

ii. η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ είναι κοίλη στα διαστήματα (α, β) και (β, γ) .

1682. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση :

$$f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x \quad \text{με } x \in (0, +\infty)$$

i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(1994)

1683. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(2004)

1684. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$ με $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

β. Για $\alpha = e$:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

iii. Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

(2009)

1685. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- A.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f
B. Να λύσετε την εξίσωση :

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

- Γ.** Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

(2010)

1686. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν :

$f(x) > 0$ και $f'(x) = af(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $a \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

1687. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, $g'(x) > 0$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in f(\Delta)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι κυρτή στο Δ .

1688. α. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ τέτοια ώστε $f''(x) > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{x-f(x)}$ $x \in \Delta$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω όταν $|1 - f'(x)| < \sqrt{f''(x)}$ για κάθε $x \in \Delta$.

β. Αν $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{x-2x^2}$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

1689. Αν μια συνάρτηση f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f''(0) = 0$ και $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$ ενώ στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$.

1690. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με συνεχή τρίτη παράγωγο και $f^{(3)}(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Αν x_0 εσωτερικό σημείο του Δ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f .

1691. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της C_f όπου :

$$f(x) = \frac{2}{\lambda} e^x - x^2, \quad \lambda > 0$$

1692. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda + \ln x}{x}$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα σημείο καμπής, και να βρεθεί η καμπύλη στην οποία ανήκει.

1693. Αν η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, ($a \neq 0$) έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο, να αποδείξετε ότι αυτό είναι θέση σημείου καμπής.

1694. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

- α.** Η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- β.** Αν η f έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
- γ.** Αν η f δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

1695. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 \sin 2a + 2x \sin^2 2a + \eta \mu^2 2a$, $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του a , η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του a ανήκει σε παραβολή. (2001)

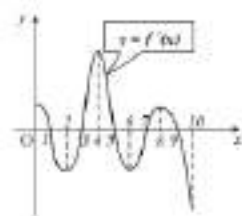
1696. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta \mu^2 \theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

- i.** Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
- iii.** Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta \mu^2 \theta$.

(2007)

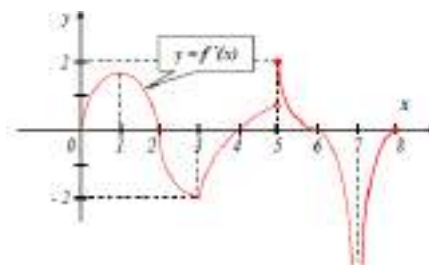
1697. Η γραφική παράσταση της παραγώγου

f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 10]$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε :



- i.** τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
- ii.** τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_f .

1698. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 8]$ και η γραφική παράσταση της παραγώγου της f' έχει τη μορφή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα :



- i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της.
- ii.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- iii.** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια :

α. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$

β. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7}$

1699. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση : $(x^2 + 1)f''(x) = (e^x - 1)f'(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $M(0, f(0))$.

1700. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(x) = 6\ln x - 6x + 5, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f(x) = 3x^2(\ln x - 1) - x^3 + 2014, \quad x > 0$$

- i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της g .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1701. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ είναι κυρτή στα διαστήματα

$(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

1702. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο $x_0 = 2$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Αν η f' στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, 4]$ να αποδείξετε ότι $f'(0) + f'(4) < 0$.

1703. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1999)

1704. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν :

- $f(a) = a$ και $f(b) = b$ με $a < b$ και
- $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 1$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.
- iii. Να αποδείξετε ότι για το σημείο x_0 του ερωτήματος (α) η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο.
- iv. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x \in (a, b)$.

1705. Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$, $x > 0$.

- i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$ με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

1706. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \ln x$, $x > 0$.

- i. Να αποδείξετε ότι $2x \ln x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

1707. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

- ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης της συνάρτησης

$$f(x) = e^x \ln x$$

 έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

1708. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με
 $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση :

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2011)

1709. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) με
 $f(a) = f(b) = 0$. Αν υπάρχει $\gamma \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f(\gamma) > 0$, να αποδείξετε ότι :

α. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$

β. υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$

γ. αν η f είναι κυρτή στο $[a, b]$, τότε :

i. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)$

ii. $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

1710. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, ώστε $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει το πολύ ένα σημείο καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f .

1711. i. Αν το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a > 0$

έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$). Αν υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$ να βρείτε το είδος των ακρότατων που παρουσιάζει το πολυώνυμο σ' αυτά τα σημεία.

ii. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 > 3\alpha\gamma$.

iii. Να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες του α) ερωτήματος. Είναι δυνατόν το πολυώνυμο $P(x)$ να παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποια από τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $P'(x) = 0$;

iv. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_0 \in (x_1, x_2)$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες του α) ερωτήματος.

1712. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf'(x) = x + f(x) \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και } f(1) = 1.$$

- α.** Να αποδείξετε ότι :
- i.** $f(x) = x \ln x + x, \quad x > 0$ **ii.** $f(0) = 0$
 - iii.** Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- β.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και ότι δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στη γραφική της παράσταση
- δ.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο ισχύει : $f(x) + \kappa \geq 1 + \kappa x$
- 1713.** Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την f'' συνεχή στο $\mathbb{R}$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν ισχύει $2f(1) + f(5) < 2f(2) + f(3)$, τότε:
- A.** Να αποδείξετε ότι
 - i.** υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 < \xi_2$ και $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$.
 - ii.** υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_0) < 0$.
 - iii.** η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
 - B.** Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(a + \beta - x) \leq 2f\left(\frac{a + \beta}{2}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($a, \beta \in \mathbb{R}$)
- 1714.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ ισχύουν $x \cdot f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1) = 0$.
- i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι 1-1.
 - ii.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.
 - iii.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
 - iv.** Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sin x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 - v.** Να εξετάσετε την h ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.
- 1715.** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$, $f'(1) = 2e$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \geq 1$.
Αν ισχύει $f''(x)f(x) > [f'(x)]^2 + 2f^2(x)$, για κάθε $x \geq 1$, τότε:
- i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 - ii.** Να αποδείξετε ότι $f(x) > e^{x^2}$, για κάθε $x > 1$.
 - iii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - iv.** Να λύσετε στο διάστημα $[1, +\infty)$ την εξίσωση $f(x) + \sin \frac{\pi}{x} = e - 1$
- 1716.** Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x)}{h^2} > 2 - 2e^{f''(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2016$

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x)}{h^2} = 2f''(x)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

iii. Να λύσετε η εξίσωση $f(2x+1) - (x-1)f'(3x) = f(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

iv. Να αποδείξετε ότι $f(x+1) - f(x) < 2016$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 2019x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να είναι παράλληλη σε εφαπτομένη της C_g .

1717. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x}$.

i. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f' είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.

1718. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $2f(x^3) - f^2(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

ii. $f'(-1) = f'(0) = f'(1)$.

iii. η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον 4 πιθανά σημεία καμπής στο διάστημα $(-1, 1)$.

1719. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x + x^2 - 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

v. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$.

vi. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

Εύρεση παραμέτρων

1720. Έστω $f(x) = 2x^2 + \alpha \ln x + \beta$, $x > 0$.

Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1, 5)$.

1721. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση :

$$f(x) = x^4 - (\alpha - 1)x^3 - (4\beta + 2)x^2 + 3$$

να παρουσιάζει καμπή στα $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$.

1722. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$ έχει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = -2$ και σημείο καμπής στο $x_2 = 1$.

1723. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^5 + \beta x^3 - 120x + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = 2$ και σημείο καμπής στο $x_2 = 1$.

i. Να βρείτε τους α και β .

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της C_f είναι συνευθειακά.

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - 1}{x}$

1724. Έστω $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 12\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής, στο οποίο να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

1725. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ να διαπερνά την C_f .

1726. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 6x$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -1$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ να διαπερνά την C_f .

1727. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε:

$$g(x)f'(x) = 2f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

(1995)

Η f δεν έχει σημεία καμπής

1728. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $(f(x))^2 = 3f(x) - e^x - x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

1729. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

1730. Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με :

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημείο καμπής. (1990)

1731. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να ισχύει :
 $(f'(x))^3 + 2f'(x) = e^x + x^3 + x^2 + x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

1732. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $x[f'(x) + 2] = f''(x) + e^{x-1} + 1$.

Να αποδείξετε ότι το $M(1, f(1))$ δεν είναι σημείο καμπής της C_f .

1733. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{\alpha^x + \beta^x}{2}$, $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$ δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

1734. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

1735. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 1$.
Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

1736. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 2)x^4 + 8x^3 + 6(\alpha + 1)x^2 + 2\alpha + 3$.
Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

1737. Για την τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

- $(f'(x))^2 + (f''(x))^3 = e^{2x} + e^{3x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f'(0) = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

i. η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

ii. η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

iii. $f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

1738. i. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, στο οποίο η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 2016$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=0$.

Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια κυρτότητας & εφαπτομένης

1739. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = e$.

iii. Να αποδείξετε ότι $x - e \ln(\ln x) \geq e$ για κάθε $x > 1$.

1740. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^{x-1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

iii. Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} \geq \frac{x+2}{x^2 - 4x + 6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1741. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ είναι κυρτή ενώ η $g(x) = \ln x$, $x > 0$ είναι κοίλη.

- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και της C_g στο $B(1, g(1))$.
- iii. Να δείξετε ότι $x^x > \ln x$ για κάθε $x > 0$.
- 1742.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^x$, $x > 0$ και $g(x) = \beta + a \ln x$, $x > 0$ που οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$.
- i. Να βρείτε τα α , β .
- ii. Να εξετάσετε τις f , g ως προς την κυρτότητά τους.
- iii. Να αποδείξετε ότι $x^x \geq \ln x + 1$, για κάθε $x > 0$.
- 1743.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + 3\ln x$.
- i. Να αποδείξετε ότι C_f έχει ένα σημείο καμπής.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 3x$, για κάθε $x \geq 0$.
- 1744.** i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$, είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 0)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.
- iv. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι
- $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$
- 1745.** i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$ ως προς τη μονotonία και τα ακρότατα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$
- iv. Να αποδείξετε ότι $x + \ln x > \sqrt{4x - 3}$ για κάθε $x > 1$.
- 1746.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
- $$f''(x) < -4f(x) + 4f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
- ii. Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 1747.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ και οι εφαπτόμενες της γραφικής της παράστασης στα σημεία της $A(1, f(1))$ και $B(3, f(3))$ είναι $\varepsilon: y = x + 1$ και $\zeta: y = -x + 5$ αντίστοιχα.
- i. Να βρείτε τα $f(1)$, $f'(1)$, $f(3)$, $f'(3)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μοναδικό ακρότατο του οποίου να βρείτε το είδος.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 \in (-1, 1)$, $x_2 \in (3, 5)$.

1748. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f''(x)e^{-x} - (f'(x))^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $2f'(0) + 1 = 0$ και
- $f(0) = \ln 2$

- i. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- iii. Να αποδείξετε ότι ισχύει : $2f(x) + x \geq \ln 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- v. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια :
 - i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$
 - ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

E.M.E 2016

1749. Έστω η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και κυρτή στο $(2, +\infty)$, τότε :

- a. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.
- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4, 5)$.
- γ. Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$
 - i. Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$.
 - ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

1750. Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ συνάρτηση f με $f(0) = -3$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1-x^2} f(x)$, $x \in (-1, 1)$ με $g(x) \leq \beta x - 3$, $x \in (-1, 1)$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται επιπλέον ότι η παράγωγος f' της f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$.

- i. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.
- ii. Να αποδείξετε ότι $g'(0) = \beta$ και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι η $y = \beta x - 3$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \beta$, $x \in (-1, 1)$ έχει μοναδική ρίζα το 0.
- iv. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(2012)

1751. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ii. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια λύση.

iv. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

(2012)

1752. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$$f(A) = \mathbb{R}, \text{ τέτοια, ώστε } e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

a. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα **β** και **γ**, δίνεται ότι $f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την κυρτότητα.

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους

(2014)

Ανισότητες Jensen

1753. i. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ η οποία στρέφει τα κοίλα άνω στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι

$$f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει :

$$(e^\alpha + 2)^v + (e^{-\alpha} + 2)^v > 2 \cdot 3^v$$

iii. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $[f'(x)]^2 + f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)}}{2} > e^{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$

iv. Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta$ τότε είναι $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}$.

1754. i. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ . Να αποδείξετε ότι

$$f(\alpha) + f(\beta) \leq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$

ii. Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$ είναι κοίλη, στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \geq \ln \alpha \ln \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$

1755. α. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta$$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Αν $\alpha > \frac{1}{e}$, $\beta > \frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{2-\ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2-\ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \frac{2-\ln^2(\sqrt{\alpha\beta})}{\ln(\sqrt{\alpha\beta}) + 1}$$

1756. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy}, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

και $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $g(x) = (f(x))^{2016}$

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 2$.

ii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

iii. Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $(0, 1)$.

iv. Για όλα τα $x, y \in (0, 1)$, ισχύει $g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}$

E. Αν $x > 0$, $y > 0$ και $x + y = 1$, τότε ισχύει: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016} \geq \frac{5^{2016}}{2^{2015}}$

1757. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(1997)

1758. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2) = 0$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[-2, 5]$, να αποδείξετε ότι $4f(5) + 3f(-2) < 0$.

1759. Έστω μια συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή.

Αν $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x) > \frac{4}{3}f\left(\frac{3x}{4}\right)$ για κάθε $x > 0$.

1760. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + 2\ln x$, $x > 0$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

iii. Αν $g(x) = \frac{x \ln x}{x+2}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε:

$$g(x) \geq g(x_0), \text{ για κάθε } x > 0$$

iv. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει:

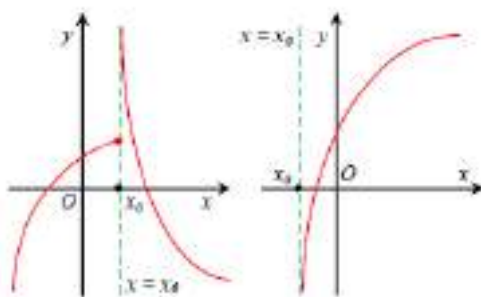
$$f(x-2) + f(x+4) < 2f(x+1)$$

Ασύμπτωτες Συνάρτησης

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

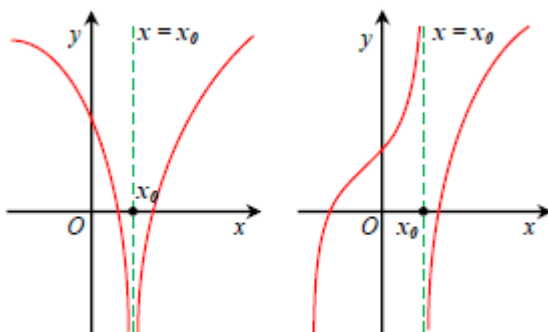
Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{είναι } +\infty \text{ ή } -\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

Παρατηρήσεις

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 , τότε ισχύει

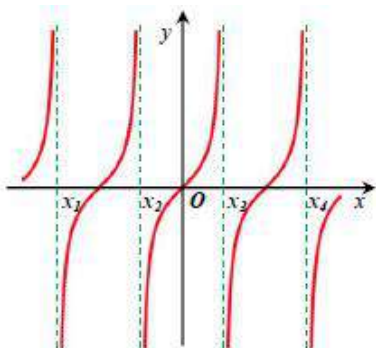
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Άρα η ευθεία $x = x_0$ **δεν** μπορεί να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

2. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει πολλές κατακόρυφες ασύμπτωτες.

3. Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f τις αναζητούμε :

- ♦ Στους πραγματικούς αριθμούς που είναι άκρα ανοιχτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f .
- ♦ Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
- ♦

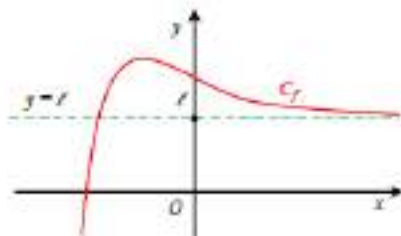


Οι ευθείες με εξισώσεις

$x = x_1$, $x = x_2$, $x = 0$ (ο άξονας $y'y$), $x = x_3$, $x = x_4$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

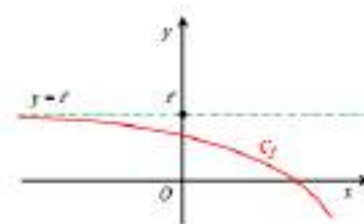
Οριζόντια Ασύμπτωτη

- ♦ Η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ όταν : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$



Η $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

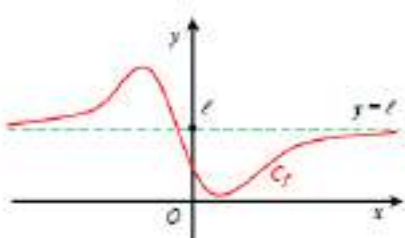
- ♦ Η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ όταν : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$



Η $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

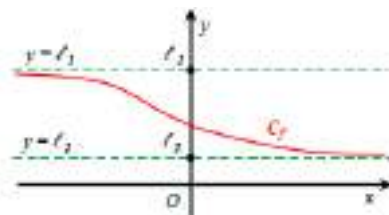
Παρατηρήσεις :

1. Για να αναζητήσουμε οριζόντια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f πρέπει η f να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, a)$.



Η $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$

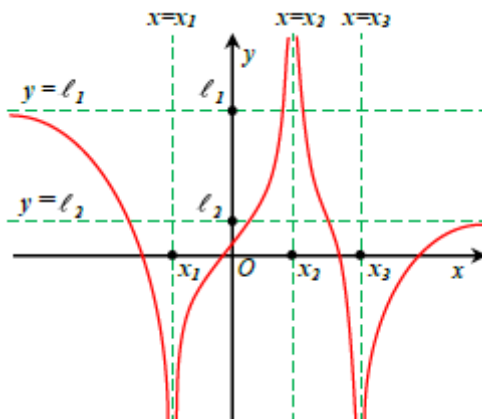
2. Η C_f μπορεί να έχει διαφορετική οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ απ' ότι στο $-\infty$. Αλλά η C_f **δεν** μπορεί να έχει δύο ή περισσότερες διαφορετικές οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$). Δηλαδή η C_f μπορεί να έχει το πολύ δύο οριζόντιες ασύμπτωτες.



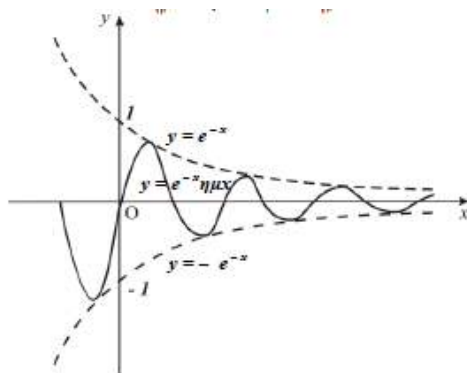
Η $y = l_1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Η $y = l_2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

3. Η ύπαρξη κατακόρυφων ασύμπτωτων δεν συνδέεται με την ύπαρξη οριζόντιων ασύμπτωτων.



4. Αν η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ($-\infty$) τότε όταν το x αυξάνεται (μειώνεται), οι αποστάσεις των σημείων $(x, f(x))$ της C_f από την ευθεία $y = \ell$ συνεχώς μικραίνουν. Δηλαδή η C_f πλησιάζει την ευθεία $y = \ell$.
- Η κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
 - Η οριζόντια όμως και η πλάγια ασύμπτωτη (όπως θα δούμε παρακάτω) μπορεί να τέμνουν τη γραφική παράσταση της f σε ένα ή περισσότερα σημεία.

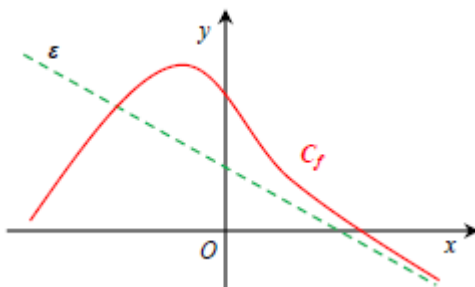


Για την $f(x) = e^{-x} \sin x$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι (οριζόντια) ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Η C_f τέμνει την ασύμπτωτή της και μάλιστα σε άπειρα σημεία.

Πλάγια Ασύμπτωτη

♦ Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ όταν :

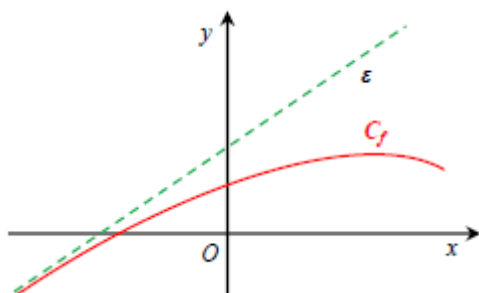
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$



Η ϵ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

♦ Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ όταν :

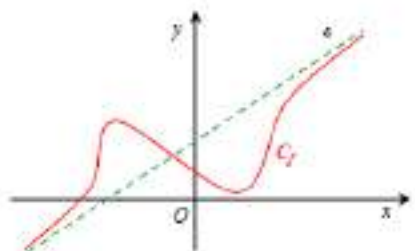
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$



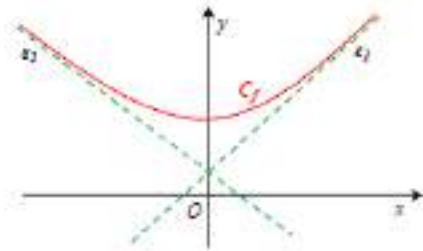
Η ε είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Παρατηρήσεις :

1. Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** όταν $\lambda = 0$ (η $y = \beta$), ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη**.
2. Όπως και στις οριζόντιες ασύμπτωτες έτσι και εδώ :
 - ♦ Για να αναζητήσουμε πλάγιες ασύμπτωτες η f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ ή $(a, +\infty)$.
 - ♦ Η C_f μπορεί να έχει την ίδια ή διαφορετική ασύμπτωτη στο $+\infty$ απ' ότι στο $-\infty$.
 - ♦ Η C_f μπορεί να έχει **το πολύ δύο** πλάγιες ασύμπτωτες.



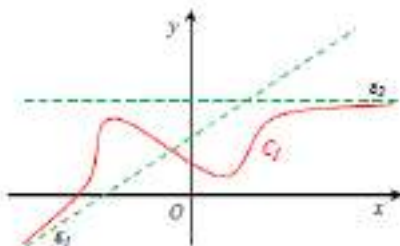
Η ε είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$



Η ε_1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

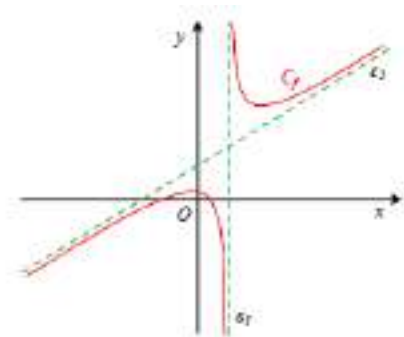
Η ε_2 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- ♦ Η C_f **δεν** μπορεί να έχει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) δύο (ή περισσότερες) πλάγιες ασύμπτωτες ή οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη.



Η ε_1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και η ε_2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- ♦ Η πλάγια ασύμπτωτη μιας C_f μπορεί να έχει κοινά σημεία με την C_f .
- ♦ Η ύπαρξη κατακόρυφων ασύμπτωτων δε συνδέεται με την ύπαρξη πλάγιων ασύμπτωτων.



Η ε_1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f η ε_2 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Θεώρημα

- ♦ Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

- ♦ Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις (για όλες τις ασύμπτωτες) :

Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού **μεγαλύτερου ή ίσου του 2** δεν έχουν καθόλου **ασύμπτωτες** (κατακόρυφες – οριζόντιες – πλάγιες).

Τα πολώνυμα με βαθμό 1 ή 0 ή το μηδενικό πολώνυμο έχουν ασύμπτωτη τον εαυτό τους. Μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα **δεν έχει** ασύμπτωτες.

Ειδικά οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

α. Παρουσιάζουν **κατακόρυφες** ασύμπτωτες στις ρίζες του παρονομαστή $Q(x)$ που έχουν απομείνει μετά από ενδεχόμενη απλοποίηση.

β. Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(x)$ είναι **μικρότερος ή ίσος** από το βαθμό του παρονομαστή $Q(x)$, τότε υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη (αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$, τότε η οριζόντια ασύμπτωτη είναι ο άξονας $x'x$).

γ. Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(x)$ είναι **μεγαλύτερος κατά 1** από το βαθμό του παρονομαστή, τότε υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

Δ. Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(x)$ είναι **μεγαλύτερος τουλάχιστον κατά 2** του βαθμού του παρονομαστή $Q(x)$, τότε **δεν** υπάρχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

Παράδειγματα

♦ Η $f(x) = \frac{4x+1}{3x+2}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = -\frac{2}{3}$ και οριζόντια την $y = \frac{4}{3}$.

♦ Η $f(x) = \frac{3x^2-3x+1}{x^2+2}$ έχει μόνο οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 3$.

♦ Η $f(x) = \frac{x-1}{x^4+x^2+1}$ έχει μόνο οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$. (ο άξονας $x'x$)

♦ Η $f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x+2}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = -2$ και πλάγια η οποία δε φαίνεται αμέσως (είναι η $y = -x + 5$)

♦ Η $f(x) = \frac{x^4+5x+4}{x^2-1}$ έχει μόνο μία κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = -1$, αφού μετά την απλοποίηση γίνεται $f(x) = \frac{x^3+x^2+x-4}{x+1}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εύρεση ασυμπτώτων.

341. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$ **ii.** $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ **iii.** $f(x) = \frac{x^3-10}{x-2}$ **iv.** $f(x) = \frac{-2x}{(x-1)^2}$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το :
 $A = \mathbb{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό.

♦ **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Κατακόρυφες ασύμπτωτες θα αναζητήσουμε στα -1 και 1 . Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} \stackrel{\left(\frac{-4}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3+x-2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x-2}{x-1} \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \text{ και } x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \\ \text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \end{array} \right)$$

Ομοίως $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = -1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Επομένως η $x = 1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Παρατήρηση 1

Θυμίζουμε ότι :Αν η f είναι συνεχής στο D_f τότε ασύμπτωτες αναζητούμε στα άκρα (εφόσον υπάρχουν) των ανοιχτών διαστημάτων του D_f .

Κατακόρυφες στους πραγματικούς αριθμούς.

Οριζόντιες – πλάγιες στα $+\infty, -\infty$.

Παρατήρηση 2

Δεν είναι απαραίτητη η εύρεση και των δύο πλευρικών ορίων στο -1 της f ($x \rightarrow -1^-$ και $x \rightarrow -1^+$). Αρκεί μόνο το ένα όριο για τον χαρακτηρισμό της ασύμπτωτης.

♦ Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x - 2 - x^3 + x}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση : $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$

είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Επειδή τα παραπάνω όρια προκύπτουν και όταν $x \rightarrow -\infty$, η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f και στο $-\infty$.

Παρατήρηση 1

- Εφόσον η C_f έχει στο $+\infty$ μια πλάγια ασύμπτωτη, τότε δεν μπορεί να έχει στο $+\infty$ άλλη πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.
- Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το $-\infty$.

ii. Η $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(x-1)^2} (-2x) \right] = (+\infty) \cdot (-2) = -\infty$$

(αφού $(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \in A$)

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

♦ Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Παρατηρήσεις 4

Για την εύρεση των οριζόντιων – πλάγιων ασύμπτωτων, μπορούσαμε να βρούμε :

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = 0 = \lambda$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 = \beta$

Οπότε η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

342. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
 $f(x) = 1 - x + \ln x$.

Λύση

♦ Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι

κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

♦ Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 - 1 + 0 = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + \ln x + x) \stackrel{(+\infty + \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) \right] = (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

343. Να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) :

- i. τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$.

ii. τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 3$.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό. Είναι :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln x \cdot \frac{1}{x-2} \right] = (-\infty) \cdot \frac{-1}{2} = +\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=0$ (ο άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \ln x \right] \stackrel{x>2}{=} (+\infty) \cdot \ln 2 = +\infty$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=2$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό.

Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 3 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\sqrt{4x^2 - 1})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} + 3 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{|x| \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2x} + 3 \right] \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2} + 3 \right] = 0 \cdot \frac{-1}{\sqrt{4-0}+2} + 3 = 3 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=3$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 3 \right] = (+\infty) - (-\infty) + 3 = +\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 1} = +\infty$$

Άρα η C_f **δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη** στο $-\infty$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Αν μας ενδιαφέρουν μόνο οι οριζόντιες ασύμπτωτες μιας C_f τότε βρίσκουμε τα :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ (εφόσον έχουν νόημα) και :}$$

$$\bullet \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

τότε η $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\bullet \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \ell \in \mathbb{R},$$

τότε δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το $-\infty$

344. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

$$\text{i. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \quad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^x + 10x - e^x}{e^x + 5}, & x \leq 0 \\ \frac{2}{\ln x}, & x > 0 \end{cases}$$

Λύση

i. Η $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$ και είναι συνεχής σ' αυτό.

♦ **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} \cdot x \cdot \sqrt{x^2+1} \right) \stackrel{x < 1}{=} (-\infty) \cdot \sqrt{2} = -\infty$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

♦ **Οριζόντιες – πλάγιες ασύμπτωτες**

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = 1 = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2+1}}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{x^2+1} - x^2 + x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)}{x-1} + \frac{x}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)}{(x-1) \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)} + \frac{x}{x-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \cdot (x^2 + 1 - x^2)}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x\right)} + \frac{x}{x-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{x>0 \\ x \rightarrow +\infty}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} + \frac{x}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 0 \cdot \frac{1}{1-0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} + \frac{1}{1-0} = 1 = \beta
\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x + 1$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x-1} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -1 = \lambda$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2+1}}{x-1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \sqrt{x^2+1} + x^2 - x}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x \cdot (x^2+1-x^2)}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)} - \frac{x}{x-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x\right)} - \frac{x}{x-1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{-x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x\right)} - \frac{x}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{1-0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+0} - \frac{1}{1-0} = -1 = \beta
\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = -x - 1$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων.
Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2xe^x + 10x - e^x}{e^x + 5} = \frac{-1}{6} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad (\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και επομένως η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Οπότε το 0 είναι ένα σημείο (το μοναδικό) στο οποίο θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη. Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \pm\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \pm\infty$

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες – πλάγιες

Είναι :

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \ln x} = 0 = \lambda, \quad \text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0 = \beta, \quad \text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^x + 10x - e^x}{xe^x + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2e^x + 10 - \frac{e^x}{x} \right)}{x(e^x + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + 10 - \frac{1}{x}e^x}{e^x + 5} = \frac{2 \cdot 0 + 10 - 0 \cdot 0}{0 + 5} = \frac{10}{5} = 2 = \lambda, \end{aligned}$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2xe^x + 10x - e^x}{e^x + 5} - 2x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^x + 10x - e^x - 2xe^x - 10x}{e^x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^x}{e^x + 5} = \frac{0}{5} = 0 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 2x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

345. Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2e^x + 1)$$

έχει στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + \ln 2$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1+e^x}$.

Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f .

Λύση

A. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι (οριζόντια) ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2e^x + 1)$. Θέτουμε : $u = 2e^x + 1$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

Δηλαδή : όταν $x \rightarrow -\infty$ το $u \rightarrow 1$.

Οπότε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$

Άρα ο άξονας $x'x$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

♦ Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = x + \ln 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \ln 2)] = 0$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2e^x + 1) - x - \ln 2] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2e^x + 1) - \ln 2 - x \ln e] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{2e^x + 1}{2} - \ln e^x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2e^x + 1}{2e^x}$$

$$\text{Θέτουμε : } u = \frac{2e^x + 1}{2e^x}$$

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 1}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{2e^x} \right] = 1 + 0 = 1, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Δηλαδή : όταν $x \rightarrow +\infty$ το $u \rightarrow 1$.

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \ln 2)] = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x + \ln 2$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Παρατηρήσεις

- Όταν ξέρουμε την ασύμπτωτη είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τους ορισμούς.
- Μπορούσαμε βέβαια να εφαρμόσουμε το θεώρημα και να αποδείξουμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \ln 2$$

B. Η $f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1+e^x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\text{Παρατηρούμε ότι : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x}{1+e^x} = \frac{5 \cdot 0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\frac{1}{e^x} + 1} = 5, \quad \left(\begin{array}{l} \text{αφού: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \text{οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{array} \right)$$

Επομένως έχουμε :

$$\blacklozenge \quad f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow f(x) - (2x + 3) = \frac{5e^x}{1+e^x}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x}{1+e^x} = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

$$\blacklozenge \quad f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow f(x) - 2x - 3 = \frac{5e^x}{1+e^x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2x - 3 - 5 = \frac{5e^x}{1+e^x} - 5 \Leftrightarrow f(x) - (2x + 8) = \frac{5e^x}{1+e^x} - 5$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 8)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5e^x}{1+e^x} - 5 \right) = 5 - 5 = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = 2x + 8$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Παρατήρηση 3

Μπορούσαμε βέβαια να εφαρμόσουμε το θεώρημα και να βρούμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 8$$

Εύρεση παραμέτρων και ορίων από δοσμένες ασύμπτωτες

346. Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε να είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3} f(x) + 2\lambda x^2 + x + 3}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2x - 1} = -4$$

Λύση

Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -3 \quad (2).$$

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3} \cdot f(x) + 2\lambda x^2 + x + 3}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)} \cdot f(x) + 2\lambda x^2 + x + 3}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2x - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \cdot f(x) + 2\lambda x^2 + x + 3}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2x - 1} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \cdot f(x) + 2\lambda x^2 + x + 3}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \cdot \frac{f(x)}{x} + 2\lambda + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(f(x) - 2x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} \\
&= \frac{-\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + 2\lambda + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} \stackrel{(1)}{=} \stackrel{(2)}{=} \\
&= \frac{-\sqrt{1+0} \cdot 2 + 2\lambda + 0 + 0}{-3 + 0 - 0} = \frac{2\lambda - 2}{-3}
\end{aligned}$$

Άρα $\frac{2\lambda - 2}{-3} = -4 \Leftrightarrow 2\lambda - 2 = 12 \Leftrightarrow \lambda = 7$

347. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - (\beta + 1)x + 2}{x^2 - \beta^2}$$

να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 2$ και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 1$

Λύση

♦ Η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη των C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha x^2 - (\beta + 1)x + 2}{x^2 - \beta^2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left[\alpha - (\beta + 1) \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right]}{x^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{x^2} \right)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha - (\beta + 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2}}{1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\beta^2}{x^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha - (\beta + 1) \cdot 0 + 0}{1 - 0} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1
\end{aligned}$$

Για να είναι η ευθεία $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f πρέπει κατ'ανάγκη το 2 να είναι ρίζα του παρανομαστή δηλαδή $2^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$ ή $\beta = -2$

(αφού αν $4 - \beta^2 \neq 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^2 - (\beta + 1)x + 2}{x^2 - \beta^2} = \frac{4\alpha - 2(\beta + 1) + 2}{4 - \beta^2} \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς η $x = 2$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f)

- Αν $\beta = 2$ (και $\alpha = 1$) τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Άρα η $x = 2$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Αν $\beta = -2$ (και $\alpha = 1$) τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{8}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2 + x + 2}{x+2} \right] \stackrel{x > 2}{x-2 > 0} = (+\infty) \cdot \frac{8}{4} = +\infty$$

Άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f Cf

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι $\alpha = 1$ και $\beta = -2$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Η συνθήκη το 2 να είναι ρίζα του παρανομαστή είναι αναγκαία όχι όμως και ικανή.

Γι αυτό εφόσον από μια τέτοια συνθήκη προκύπτουν περισσότερες από μια τιμές της παραμέτρου τότε είναι απαραίτητη η επαλήθευση ώστε να γίνουν ή όχι δεκτές.

Αν η παράμετρος παίρνει μοναδική τιμή η επαλήθευση δεν είναι απαραίτητη

348. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β και γ ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $x = -2$ και $y = x - 4$ να είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^2 + \beta x + 5}{2x + \gamma}$$

Λύση

- ♦ Η ευθεία $y = x - 4$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της C_f αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -4.$$

Είναι :

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2 + \beta x + 5}{2x^2 + \gamma x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\alpha - 2 + \frac{\beta}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{\gamma}{x} \right)} = \frac{\alpha - 2}{2}$$

Οπότε

$$\frac{\alpha - 2}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 4 \quad \text{και επομένως} \quad f(x) = \frac{2x^2 + \beta x + 5}{2x + \gamma}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x + 5}{2x + \gamma} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \beta x + 5 - 2x^2 - \gamma x}{2x + \gamma}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta - \gamma)x + 5}{2x + \gamma} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\beta - \gamma + \frac{5}{x} \right)}{x \left(2 + \frac{\gamma}{x} \right)} = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Οπότε $\frac{\beta - \gamma}{2} = -4 \Leftrightarrow \beta - \gamma = -8 \Leftrightarrow \beta = \gamma - 8 \quad (1)$

♦ Η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$

Έχουμε

Αριθμητής : $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + \beta x + 5) = 8 - 2\beta + 5 = 13 - 2\beta$.

Παρονομαστής : $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + \gamma) = \gamma - 4$.

♦ Αν $\gamma - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 4$ τότε $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{13 - 2\beta}{\gamma - 4} \in \mathbb{R}$ **άτοπο**

♦ Άρα πρέπει κατ' ανάγκη να είναι $\gamma = 4$ οπότε από (1) : $\beta = -4$.
Άρα $\alpha = 4$, $\beta = -4$ και $\gamma = 4$.

349. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{P(x)}$$

Αν η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y=2$ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=-2$ τότε να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x)$

Λύση

Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0$.

Η C_f έχει την ευθεία $y = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $+\infty$ αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\alpha_v x^v}$.

• Αν $v < 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, **άτοπο**.

• Αν $v > 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, **άτοπο**.

Άρα πρέπει $v = 2$, οπότε το $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού.

Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\alpha x^2} = \frac{2}{\alpha}$.

Άρα $\frac{2}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $P(x) = x^2 + \beta x + \gamma$.

Για να έχει η C_f ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = -2$, θα πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

Άρα πρέπει κατ' ανάγκη το 1 και το -2 να είναι ρίζες του παρονομαστή $P(x)$.
Δηλαδή

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \beta + \gamma = 0 \\ 4 - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -1 - \beta \\ 4 - 2\beta - 1 - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -1 - \beta \\ -3\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Οπότε $P(x) = x^2 + x - 2$

Ασκήσεις

Εύρεση ασυμπτωτών

1761. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4}$

ii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

iii. $f(x) = \frac{x(2x^2 + 1)}{x^2 + 1}$

iv. $f(x) = \frac{3x^4 - x^3 - 2}{x^3 - x^2}$

v. $f(x) = \frac{2x^5 - 1}{x^2 - 1}$

vi. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$

vii. $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2}$

viii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

ix. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

x. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

xi. $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x + 5}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{6x - 5}{2x + 3}, & x \geq 1 \end{cases}$

xii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}, & x < 2 \\ \sqrt{x^2 - 4}, & x \geq 2 \end{cases}$

1762. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = e^x - x$.

ii. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

iii. $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$

iv. $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$

v. $f(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{ex - 1}{x}$

1763. Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x + 2}$

ii. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x - 1}{3 - x}}$

1764. Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} - \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

ii. $f(x) = e^{-x^2}$

iii. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

1765. Να βρείτε τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1766. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2) \ln x + x - 3$, $x > 0$.

i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

iv. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος iii. με $x_1 < x_2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της f

στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(2010)

1767. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3}{x} + 2x$, $x \neq 0$. Να βρείτε :

- i. Τα τοπικά ακρότατα της f .
- ii. Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f
- iii. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- iv. Το σημείο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 0$, της γραφικής παράστασης C_f της f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1, f(1))$, $B(3, f(3))$.

(2010)

1768. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- ii. Για $\lambda = 0$
 - α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
 - β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(2006)

1769. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x}$, όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του k .
- γ. Για $k = 1$
 - i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
 - ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$

(2008)

1770. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x + 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.
- ii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.
- iii. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$.

(2009)

1771. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$.

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- iv. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$.

(2011)

1772. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(1) = \frac{1}{2}$
- i. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ.1.
- iii. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση :
$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$
- iv. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f'(x)} - \kappa) = 5$

(2013)

1773. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

(2014)

1774. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{1 + e^x}$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- ii. Η ευθεία $y = x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

1775. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 3x}{e^x + 1} = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x + 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

1776. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{\eta\mu x}{x} + 2x + 5$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + 5$.

1777. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + e^x \sin x$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η ευθεία $\varepsilon : y = 2x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- ii. Η C_f και η ε έχουν άπειρα κοινά σημεία.

1778. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \ln x + x$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να αποδείξετε ότι έχει άπειρα κοινά σημεία με την C_f .

1779. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & \text{αν } x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$.

iii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(2007)

1780. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

a. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$

(2008)

1781. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x + 2)$, $x > -1$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$.

a. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β. Έστω ότι $\lambda = -1$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$.

(2009)

1782. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2x + 3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

1783. Να μελετήσετε ως προς τις κατακόρυφες ασύμπτωτες η $f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^x - x - 1}$.

1784. i. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x = x - 1$, $x > 0$.

ii. Να εξετάσετε ως προς τις ασύμπτωτες τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{\ln x - x + 1}$.

1785. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$, $a > 0$.

a. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y = 0$, να βρείτε την τιμή του a .

β. Για $a=1$:

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι: $(\sqrt{\kappa})^{\sqrt{\kappa}+1} > (\sqrt{\kappa+1})^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa \geq 8$.

1786. Έστω μια παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε

i. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2$

ii. Να βρείτε την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{(f(x))^2}{x}, \quad x > 0.$$

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι $f(x+1) - f(x) < 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εύρεση παραμέτρων και ορίων από δοσμένες ασύμπτωτες

1787. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε $g(x) = f(x) + 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x' , να αποδείξετε ότι η C_g έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την οποία και να βρείτε.

1788. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) + x + \chi_{\mu} \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Αν η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

1789. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $(-\infty, 0)$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) - g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2} \quad \text{για κάθε } x < 0$$

Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 3$ να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

1790. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία

$$e: y = 5x + 1, \quad \text{να βρείτε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \chi_{\mu} x}{x^2 f(x) - 5x^3}.$$

1791. Αν η ευθεία $y = 3x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,

να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2 + 1}{x^2 f(x) - 3x^3 + 2x^2}.$

1792. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι :

$$f(x) - g(x) = x - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

(2000)

1793. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

i. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

(1994)

1794. Αν η ευθεία $y = 5x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν $x \rightarrow +\infty$, να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ όταν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - ax + 4}{af(x) + 10x - 2} = \frac{1}{4}.$$

1795. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4 + 1} - x^3 + 2} = 10$$

1796. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \kappa x + 2] = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \kappa x^2}{f(x) + 2x} = -1, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

1797. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία

$\varepsilon: y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ποιες είναι οι τιμές των α και β ;

(2001)

1798. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x - 2}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η

C_f να έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$ στο $+\infty$.

1799. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \beta x - 4$ να είναι ασύμπτωτη της

γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x - 1}$, όταν $x \rightarrow +\infty$.

1800. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

i. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.

- ii. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, 0)$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.
- iii. Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(2000)

1801. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - \kappa x + 2}{x-3}$ με $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}$ και $x \neq 3$. Η ευθεία

$y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

α. Να αποδείξετε ότι :

i. $\alpha = 1$ και $\kappa = 3$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$

(2005)

1802. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τους α, β

και γ , ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $x = -2$ και $y = 3$ στο $+\infty$

1803. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - \alpha x + \beta}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = 2$ και

$x = 3$, να βρείτε τη συνάρτηση f . Έχει η συνάρτηση οριζόντια ασύμπτωτη ;

1804. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 6}{x^2 - 4x + 3}$.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να έχει μόνο μια κατακόρυφη ασύμπτωτη.

1805. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x - 2\alpha^2}{x + 2}$, $x \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$,

για τις οποίες η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

1806. Να βρείτε τους μη αρνητικούς αριθμούς α, β για τους οποίους η συνάρτηση

$f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 1}$, $x > 0$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x$.

1807. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2} - \alpha x + \beta - 2$. Να βρείτε τις τιμές των

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x + \frac{1}{4}$.

1808. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ να είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + 3x - 1$, όταν $x \rightarrow -\infty$.

Μελέτη Συνάρτησης

Η μελέτη μιας συνάρτησης περιλαμβάνει (χωρίς να είναι αυστηρή η σειρά) τα παρακάτω βήματα :

- 1ο.** Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- 2ο.** Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.
- 3ο.** Βρίσκουμε την παράγωγο f' και κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
- 4ο.** Βρίσκουμε την f'' , κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου της, με τη βοήθεια του οποίου προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμψής.
- 5ο.** Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της C_f (αν φυσικά υπάρχουν) και μελετάμε τη «συμπεριφορά» της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της.
- 6ο.** Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και πίνακας μεταβολών της f .
- 7ο.** Κάνουμε τη γραφική παράσταση της f χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω.

Παρατηρήσεις :

- 1.** Οποιαδήποτε επιπλέον πληροφορία που μπορούμε να αντλήσουμε είναι επιθυμητή. Έτσι :
 - ♦ Αν είναι άρτια θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι περιττή θα είναι συμμετρική ως προς το σημείο $O(0, 0)$.
 - ♦ Αν είναι περιοδική αρκεί να τη μελετήσουμε σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
 - ♦ Αν οι ρίζες της f είναι εύκολο να βρεθούν, είναι σημαντικό στοιχείο, αφού σ' αυτές η f τέμνει τον άξονα $x'x$.
- 2.** Ενοποιούμε τα σύμβολα της μονοτονίας και της κυρτής – κοίλης σε ένα σύμβολο ως εξής :
 - ♦ Γνησίως αύξουσα και κυρτή. 
 - ♦ Γνησίως αύξουσα και κοίλη. 
 - ♦ Γνησίως φθίνουσα και κυρτή. 
 - ♦ Γνησίως φθίνουσα και κοίλη. 

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

350. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Λύση

1. Πεδίο Ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2. Συνέχεια

Η f είναι συνεχής στο A ως ρητή.

3. Μονοτονία – Ακρότατα.

Έχουμε :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$
 Οι

ρίζες της f' είναι $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$ και το πρόσημό της δίνεται από το διπλανό πίνακα από τον οποίο παίρνουμε ότι

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
$f(x)$	$\nearrow \frac{-3\sqrt{3}}{2}$			$\searrow 0$	$\searrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$		
	τ.μ.				τ.ε.		

Η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{3}]$ και $[\sqrt{3}, +\infty)$.

Η f είναι γν. φθίνουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, \sqrt{3}]$.

Η f παρουσιάζει στο $x = -\sqrt{3}$ τοπικό μέγιστο το $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ και

στο $x = \sqrt{3}$ τοπικό ελάχιστο το $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. Κυρτότητα – Σημεία Καμπής

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{(x^2-1)[(4x^3 - 6x)(x^2-1) - (x^4 - 3x^2)4x]}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Η f'' έχει ρίζα το 0 και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα από τον οποίο παίρνουμε ότι :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$			0		
	σ.κ.				

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-1, 0]$ και $(1, +\infty)$.

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $[0, 1)$.

Σημείο καμπής το $O(0, 0)$.

5. Ασύμπτωτες – Οριακές Τιμές

♦ **Κατακόρυφες Ασύμπτωτες**

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^3}{x-1} \right]^{x < -1} = (-\infty) \cdot \frac{1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^3}{x-1} \right]^{x > -1} = (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = -1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^3}{x+1} \right]^{x < 1} = (-\infty) \cdot \frac{1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^3}{x+1} \right]^{x > 1} = (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

♦ **Οριζόντιες – Πλάγιες Ασύμπτωτες**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \beta$$

Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Επίσης έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

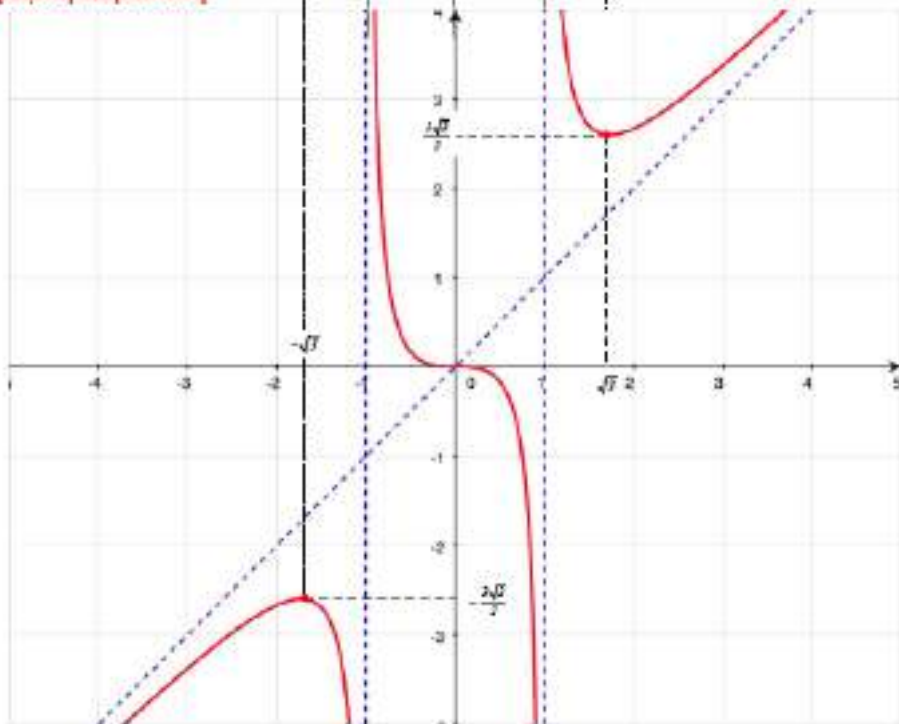
Οριακές τιμές είναι η «συμπεριφορά» της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της.

Αρκετές από τις πληροφορίες αυτές (πολλές φορές και όλες) τις παίρνουμε από τη μελέτη που έχουμε κάνει για τις ασύμπτωτες της C_f .

6. Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	+	0	-	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
		Τ.Μ.		Σ.Κ.		Π.Ε.	

7. Γραφική Παράσταση



351. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = xe^{-x}.$$

- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x = \lambda e^x$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

- Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και 2 φορές παραγωγίσιμη με :

$$f'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2)$$

Είναι :

- ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\text{DL'H}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

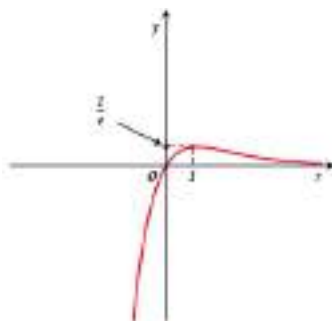
Άρα η μοναδική ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $y = 0$ δηλ. ο άξονας $x'x$ (στο $+\infty$).

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	$\frac{2}{e^2}$	0

Ο.Μ. Σ.Κ.

Από τον πίνακα μεταβολών της f και τα παραπάνω όρια προκύπτει η γραφική παράσταση της f που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ii. Είναι : $x = \lambda e^x \Leftrightarrow xe^{-x} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$

Η εύρεση του πλήθους των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Μετακινώντας την ευθεία $y = \lambda$ παράλληλα στον $x'x$ και παρατηρώντας την C_f συμπεραίνουμε ότι :

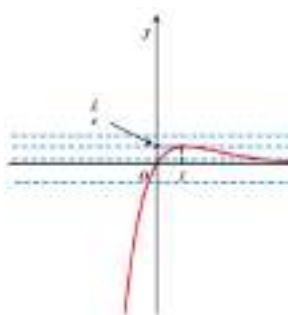
♦ Αν $\lambda > \frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι **αδύνατη**,

διότι η ευθεία $y = \lambda$ δεν τέμνει την C_f .

♦ Αν $\lambda = \frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **ακριβώς μια λύση**

και συγκεκριμένα την $x = 1$, διότι η ευθεία $y = \frac{1}{e}$ εφάπτεται της C_f

στο σημείο $A(1, \frac{1}{e})$.



- ♦ Αν $\lambda \in (0, \frac{1}{e})$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **δύο ακριβώς λύσεις** x_1, x_2 με $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$, διότι η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία.
- ♦ Αν $\lambda \leq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει **ακριβώς μία λύση** ρ με $\rho \in (-\infty, 0]$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε, παρατηρώντας το σχήμα, ότι για $\lambda = 0$, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$. Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει άμεσα και αλγεβρικά αφού για $\lambda = 0$ η εξίσωση δίνει $x = 0$.

Α σ κ ή σ ε ι ς

- 1809.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
- 1810.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$.
- 1811.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x e^x$.
- 1812.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- 1813.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.
- 1814.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 1 - x + \ln x$.
- 1815.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = (1 - x) e^x$.
- 1816.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x - \lambda x + 1 = 0$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 1817.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\lambda e^{-\frac{1}{x}} = x$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει :

$$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Παρατηρήσεις

- 1.** Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις παράγουσα.

Όμως αποδεικνύεται ότι

«κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ , έχει παράγουσα στο Δ ».

Το παραπάνω «θεώρημα» αν και έχει καθαρά «υπαρξιακό» χαρακτήρα, δεν έχει «υπολογιστικό».

Αυτό γιατί δεν μας δίνει κάποιον «αλγόριθμο» υπολογισμού παραγουσών μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ .

- 2.** Δεν έχουν μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις παράγουσα. Υπάρχουν και άλλες κατηγορίες συναρτήσεων που έχουν παράγουσα. Εμείς όμως θα περιοριστούμε στις συνεχείς.

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2x \eta \mu \frac{1}{x} - \sigma \nu \nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\text{δεν είναι συνεχής, αλλά έχει παράγουσα στο } \mathbb{R} \text{ την } F(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής :

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή :

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις :

- 1.** Αν το σύνολο που ορίζονται δύο αρχικές της ίδιας συνάρτησης δεν είναι διάστημα, τότε ενδεχομένως οι αρχικές να μη διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Για τις συναρτήσεις :

- $F(x)=x^2, x \in [-1,0] \cup [1,2]$
- $G(x)=\begin{cases} x^2-4, & x \in [-1, 0] \\ x^2-3, & x \in [1, 2] \end{cases}$

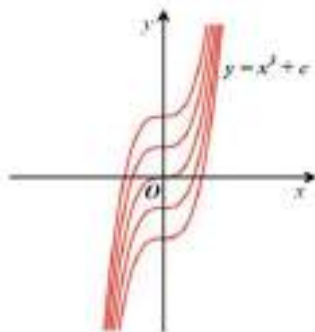
είναι $F'(x)=G'(x)=2x$, για κάθε $x \in [-1,0] \cup [1,2]$

$$\text{Όμως } F(x)-G(x)=\begin{cases} 4, & x \in [-1, 0] \\ 3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

δηλαδή **δεν** διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Ο λόγος είναι ότι το σύνολο που ορίζονται οι δύο αρχικές **δεν είναι διάστημα**

- 2.** Οι γραφικές παραστάσεις δύο παραγουσών της ίδιας συνάρτησης είναι σαν τις ισοϋψείς καμπύλες. **Δεν τέμνονται.**



Οι καμπύλες του παραπάνω σχήματος παριστάνουν συναρτήσεις του συνόλου των **παραγουσών** της $f(x)=3x^2$.

- 3.** Οι γραφικές παραστάσεις των παραγουσών $F(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ έχουν παράλληλες εφαπτομένες σε κάθε σημείο τους, αφού $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και $\lambda \in \mathbf{R}^*$, τότε:

- ♦ Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και
- ♦ Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^a, a \neq -1$	$G(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$G(x) = -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$G(x) = \sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$G(x) = \eta\mu x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \sigma\upsilon\nu(ax), a \neq 0$	$G(x) = \frac{\eta\mu(ax)}{a} + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = \eta\mu(ax), a \neq 0$	$G(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu(ax)}{a} + c, c \in \mathbb{R}$
11	$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x) = \epsilon\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
12	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
13	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
14	$f(x) = e^{ax}, a \neq 0$	$G(x) = \frac{e^{ax}}{a} + c, c \in \mathbb{R}$
15	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$

Σημείωση:

Οι τύποι του παραπάνω πίνακα ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$g(x) = f'(x)$	$G(x) = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2	$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$G(x) = \ln f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
3	$g(x) = f^a(x)f'(x), a \neq -1$	$G(x) = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + c, c \in \mathbb{R}$
4	$g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$G(x) = -\frac{1}{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$g(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$G(x) = \sqrt{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
6	$g(x) = \sigma \nu f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = \eta \mu f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
7	$g(x) = \eta \mu f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = -\sigma \nu f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
8	$g(x) = \frac{f'(x)}{\sigma \nu^2 f(x)}$	$G(x) = \varepsilon \phi f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
9	$g(x) = \frac{f'(x)}{\eta \mu^2 f(x)}$	$G(x) = -\sigma \phi f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
10	$g(x) = e^{f(x)} f'(x)$	$G(x) = e^{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
11	$g(x) = a^{f(x)} f'(x)$	$G(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$
12	$h(x) = f'(x) + g'(x)$	$H(x) = f(x) + g(x) + c, c \in \mathbb{R}$
13	$h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$H(x) = f(x)g(x) + c, c \in \mathbb{R}$
14	$h(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
15	$h(x) = g'(f(x))f'(x)$	$H(x) = g(f(x)) + c, c \in \mathbb{R}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

352. Να βρείτε τις αρχικές (παράγουσες) των συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^5 + 3\sqrt{x} - 4\eta\mu 2x + \sqrt{e^{-3x}}$ ii. $f(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x^3}$

iii. $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$ iv. $f(x) = \frac{5-x}{2-x}$ v. $f(x) = \varepsilon\phi x$ vi. $f(x) = \varepsilon\phi^2 x$

Λύση

i. Οι αρχικές της συνάρτησης $g(x) = x^5$ είναι οι $G(x) = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c_1 = \frac{x^6}{6} + c_1$

Οι αρχικές της συνάρτησης $h(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$ είναι οι

$$H(x) = 3 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_2 = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{2}} + c_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_2 = 2x\sqrt{x} + c_2$$

Οι αρχικές της συνάρτησης $\varphi(x) = 4\eta\mu 2x$ είναι οι

$$\Phi(x) = -4 \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + c_3 = -2\sigma\upsilon\nu 2x + c_3$$

Οι αρχικές της συνάρτησης $t(x) = \sqrt{e^{-3x}} = e^{\frac{-3x}{2}} = e^{\frac{-3}{2}x}$ είναι οι

$$T(x) = \frac{e^{\frac{-3}{2}x}}{\frac{-3}{2}} + c_4 = -\frac{2}{3} \sqrt{e^{-3x}} + c_4$$

Επομένως οι αρχικές της συνάρτησης $f(x) = x^5 + 3\sqrt{x} - 4\eta\mu 2x + \sqrt{e^{-3x}}$ είναι οι

$$\begin{aligned} \mathbf{F(x)} &= \left(\frac{x^6}{6} + c_1 \right) + \left(2x\sqrt{x} + c_2 \right) + \left(2\sigma\upsilon\nu 2x + c_3 \right) + \left(-\frac{2}{3} \sqrt{e^{-3x}} + c_4 \right) \\ &= \frac{x^6}{6} + 2x\sqrt{x} + 2\sigma\upsilon\nu 2x - \frac{2}{3} \sqrt{e^{-3x}} + \underbrace{c_1 + c_2 - c_3 + c_4}_c \\ &= \frac{1}{6} x^6 + 2x\sqrt{x} + 2\sigma\upsilon\nu 2x - \frac{2}{3} \sqrt{e^{-3x}} + c \end{aligned}$$

ii. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x^3} = \frac{2x^4}{x^3} - \frac{3x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{1}{x^3} \\ &= 2x - 3 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3} - x^{-3} = 2x - 3 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + x^{\frac{1}{2}-3} - x^{-3} = 2x - 3 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + x^{-\frac{5}{2}} - x^{-3} \end{aligned}$$

Επομένως οι αρχικές της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x^3}$ είναι οι

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x| + 3 \frac{1}{x} + \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c \\ &= x^2 - 3x + \ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{2}{2}} - \frac{x^{-2}}{-2} + c = x^2 - 3x + \ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2x^2} + c \\ &= x^2 - 3x + \ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{2}{3x\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2} + c \end{aligned}$$

iii. Είναι $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}$

Επομένως οι αρχικές της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$ είναι οι

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + c.$$

iv. Είναι $f(x) = \frac{5-2x}{2-x} = \frac{1+4-2x}{2-x} = \frac{1+2(2-x)}{2-x} = \frac{1}{2-x} + \frac{2(2-x)}{2-x} = -\frac{(2-x)'}{2-x} + 2$

Επομένως οι αρχικές της συνάρτησης $f(x) = \frac{5-x}{2-x}$ είναι οι $F(x) = -\ln|2-x| + 2x + c$

v. Είναι $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{(-\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}$

Επομένως οι αρχικές της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ είναι οι $F(x) = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c.$

vi. Είναι $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$

Επομένως οι αρχικές της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ είναι οι $F(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - x + c.$

Παρατηρήσεις

- ◆ Συνηθίζουμε να εισάγουμε τη σταθερά c στο τελευταίο βήμα υπολογισμού της παράγουσας, σαν να συγχωνεύονται στην c όλες οι σταθερές των εμφανιζόμενων παραγουσών συναρτήσεων.
- ◆ Όταν λέμε ότι οι παράγουσες μιας συνάρτησης f είναι οι $F(x)+c$ χωρίς να διευκρινίζουμε σε ποιο διάστημα ισχύουν, εννοούμε ότι ισχύουν σε κάθε υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της f .
Οπότε αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν είναι διάστημα αλλά ένωση διαστημάτων, τότε οι παράγουσες της ισχύουν σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση ορίζεται.

Έτσι π.χ. θα γράφουμε ότι παράγουσες της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι οι $F(x) = \ln|x| + c$ εννοώντας ότι αυτό ισχύει σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ αντί του τυπικά ορθότερου

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ \ln|x| + c_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

353. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι $f''(x) = 6x - 8$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -5x + 6$

Λύση

Η $\varepsilon: y = -5x + 6$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$, επομένως :

- $f'(1) = \lambda_\varepsilon = -5$ (1)
- Το $A(1, f(1))$ ανήκει στην ε , άρα : $f(1) = -5 \cdot 1 + 6 \Leftrightarrow f(1) = 1$ (2)

Έχουμε : $f''(x) = 6x - 8 \Leftrightarrow (f'(x))' = (3x^2 - 8)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + c_1$

Για $x=1$ έχουμε : $f'(1) = 3 - 8 + c_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -5 = 3 - 8 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Άρα : $f'(x) = 3x^2 - 8x \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - 4x^2)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + c_2$

Για $x=1$ έχουμε : $f(1) = 1 - 4 + c_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 = 1 - 4 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 4$

Συνεπώς : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4, x \in \mathbb{R}$.

354. Να βρείτε τη συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$f(0) = 1, f(x) > 0 \text{ και } \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2 + 1} = f'(x)$$

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2 + 1} = f'(x) &\stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} (\ln f(x))' = (x - \ln(x^2 + 1))' \\ \Leftrightarrow \ln f(x) &= x - \ln(x^2 + 1) + c \quad (1) \end{aligned}$$

Για $x=0$ η (1) δίνει: $\ln f(0) = 0 - \ln 1 + c \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} \ln 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $\ln f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^x - \ln(x^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x^2 + 1}\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

355. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F αρχική της f με:

$$f(x)F(x) = -e^{-2x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = 1$, να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση

Η F είναι η αρχική της f στο $\mathbb{R}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και ισχύει : $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) \cdot F(x) = -e^{-2x} \Leftrightarrow F'(x) \cdot F(x) = -e^{-2x} \Leftrightarrow 2F'(x) \cdot F(x) = -2e^{-2x}$$

Άρα $(F^2(x))' = (e^{-2x})'$, οπότε $F^2(x) = e^{-2x} + c$ **(1)**. Από τη δοθείσα σχέση για $x=0$

$$\text{παίρνουμε : } f(0) \cdot F(0) = -e^0 \Leftrightarrow 1 \cdot F(0) = -1 \Leftrightarrow F(0) = -1$$

$$\text{Από (1) για } x=0 \text{ έχουμε : } F^2(0) = e^0 + c \Leftrightarrow (-1)^2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως $F^2(x) = e^{-2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{-2x} \neq 0 \Leftrightarrow F^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow F(x) \neq 0$ και επειδή η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $F(0) = -1 < 0$, θα είναι $F(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε :

$$F^2(x) = e^{-2x} \Rightarrow F(x) = -\sqrt{e^{-2x}} \Rightarrow F(x) = -e^{-x}$$

$$\text{Άρα } F'(x) = (-e^{-x})' \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}.}$$

Παρατήρηση

Από την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης προκύπτουν τα παρακάτω:

- ♦ Μια αρχική της $f(x)f'(x)$ είναι η $\frac{1}{2}f^2(x)$
- ♦ Μια αρχική της $e^{f(x)}f'(x)$ είναι η $e^{f(x)}$
- ♦ Μια αρχική της $\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ είναι η $\frac{-1}{f(x)}$
- ♦ Μια αρχική της $(f'(x))^2 + f(x)f''(x)$ είναι η $f(x)f'(x)$
- ♦ Μια αρχική της $e^{\lambda x} [f'(x) + \lambda f(x)]$ είναι η $e^{\lambda x} f(x)$

Παράγουςα ή αρχική συνάρτηση

Ασκήσεις

1818. Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x + 7$

ii. $f(x) = (4x+1)(x-2)^2$

iii. $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^3}$

iv. $f(x) = \frac{4x^4 + 9x^3 - 8x^2 + x + 1}{x^3}$

v. $f(x) = 5x\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}$

vi. $f(x) = \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x^2}$

vii. $f(x) = 2\sin 5x - e^{2x}$

viii. $f(x) = \eta\mu 2x + e^{3x+1}$

ix. $f(x) = \sqrt{e^{-x}} - \frac{2}{x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x}$

x. $f(x) = 3^x - \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

xi. $f(x) = \frac{\eta\mu^3 x + \sin^2 x - 2}{\eta\mu^2 x}$

xii. $f(x) = \frac{e^{2x} - 5\sqrt{e^x} + 3}{e^{3x}}$

xiii. $f(x) = \sigma\phi x$

xiv. $f(x) = \sigma\phi^2 x$

xv. $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$

xvi. $f(x) = \frac{7-x}{2-x}$

xvii. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$

xviii. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

xix. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^x+1}{e^x+x}$

xx. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

xxi. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

xxii. $f(x) = \frac{1-x}{e^x+x}$

1819. Να βρείτε τις αρχικές στο $\mathbb{R}$, της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = e^{|x|}$.

1820. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , x \geq 0 \\ \sin x - 1 & , x < 0 \end{cases}$

έχει αρχικές στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να τις βρείτε.

1821. Να βρείτε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και η κλίση της f σε οποιοδήποτε σημείο $(x, f(x))$ είναι $\frac{4}{x^5}$.

1822. Να βρείτε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ αν

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad f'(1) = 1 \text{ και } f(9) = -10.$$

1823. Να βρείτε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν $f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα $x_1=1$ και $x_2=2$.

1824. Να βρείτε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όταν $f''(x)=6x-12$ και για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το 3.

1825. Να βρείτε συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να είναι $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$

για κάθε $x>0$ και της οποίας το διάγραμμα να έχει για $x \rightarrow +\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=3x-4$.

1826. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όταν ισχύει :

$$f'(\ln x)=2x^2+x \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(0)=3$$

1827. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x^2)=2x+1, \quad x>0 \text{ και } f(1)=2$$

1828. Έστω ότι $f'(x^3+x)=4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2)=3$. Να υπολογίσετε την $f(10)$.

1829. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)e^{f(x)}=2x+1$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο $A(1,f(1))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\frac{3}{5}$.

1830. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:A \rightarrow (0,+\infty)$ αν ισχύει $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x-3$ και η

γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο $M(2,f(2))$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=5$.

1831. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όταν ισχύει :

$$f'(x)=f(x)(\sin x+2x) \text{ και } f(x)>0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

1832. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ όταν η C_f δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της $M(x,f(x))$ με κλίση $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,e+1)$.

1833. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=1, \text{ να βρείτε την } f.$$

1834. Έστω $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν

$$f(x) \neq 0, \quad f(1)=1 \quad \text{και} \quad xf(x)f'(x) + xf(x) = f^2(x) + x^2 f'(x), \text{ για κάθε } x>0.$$

Να βρείτε την f .

1835. Έστω $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν $f''(x)=e^{2f(x)}$, για κάθε $x>0$, $f(1)=0$ και $f'(1)=-1$. Να βρείτε την f .

1836. Να βρείτε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad f(0)=e \text{ και } f'(x)=2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1837. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει την ιδιότητα :

$$f'(x) + f(x) = 1 + e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η κλίση της στο $x_0 = 0$ είναι 2. Να βρείτε στη συνέχεια τις αρχικές συναρτήσεις της f .

1838. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = 7$, η οποία για

$$\text{κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ ικανοποιεί τη σχέση } f'(x) = \frac{2 + f(x)}{x}. \text{ Να βρείτε τη συνάρτηση } f.$$

1839. Η F είναι αρχική της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει

$$F(2-x) + F(x^2-4) = 6x-2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη να αποδείξετε ότι :

i. η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο

ii. υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi) = -4$

1840. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f ,

για την οποία ισχύει $F(1-2x) + F(x^2+2) = x^4 + 5x^2 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$

β. Να αποδείξετε ότι :

i. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = 2$.

1841. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

• $F(0) = 0$ και

• $2xF(x) + f(x) = e^{-x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f .

1842. Δίνεται συναρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 7$ και F μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$,

για την οποία ισχύει $F(x) = xf(x) - 2x^3$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

1843. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 2$ και F αρχική της f με την ιδιότητα

$$f(x) = 2xe^{x^2 - F(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

1844. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$f(0) = 0 \text{ και } 2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln \frac{1+e^x}{2}$

ii. Αν G είναι αρχική της συνάρτησης $g(x) = x^{2017} f(x)$

και $h(x) = G(x) - G(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$.

1845. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει αρχική στο $\mathbb{R}$ μια συνάρτηση F που δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) = 0$.

1846. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f δέχεται αρχική F στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να είναι $F(x) \cdot F(1-x) = F(x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(1) = 0$.

1847. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$ και F μια αρχική της f στο $[-1, 1]$ με $F(-1) = F(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

1848. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύουν $f(0) = 2$, $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x)F(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $F(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

γ. Να βρείτε τον τύπο της f .

1849. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και F μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$. Αν είναι $F(\alpha) = \alpha$ και $F(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ σε ένα τουλάχιστο σημείο με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$.

1850. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $f(0) = 0$, $f(x) \geq \eta x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = x^2 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1851. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = e^{x-2} + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3.$$

α. Να βρείτε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f .

Ο ρ ι σ μ έ ν ο ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$ (οποιαδήποτε από τις άπειρες παράγουσες της f που υπάρχουν στο $[a, \beta]$).

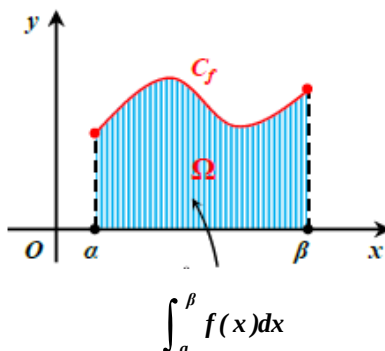
Το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο β συμβολίζεται $\int_a^\beta f(x)dx$ και υπολογίζεται από την ισότητα :

$$\int_a^\beta f(x)dx = [G(x)]_a^\beta = G(\beta) - G(a)$$



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε το $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το **εμβαδόν** που οριοθετείται από την καμπύλη $y = f(x)$ και τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $[a, \beta]$.



Παρατηρήσεις :

- 1.** Το σύμβολο $\int$ του ολοκληρώματος είναι το «τραβηγμένο» S από τη λατινική λέξη Summa που σημαίνει άθροισμα.
- 2.** Ο αριθμός a ονομάζεται **κάτω όριο** (ή **άκρο**) ενώ ο αριθμός β ονομάζεται **άνω όριο** (ή **άκρο**). Και οι δύο μαζί ονομάζονται **όρια** (ή **άκρα**) ολοκλήρωσης.
- 3.** Μοναδική προϋπόθεση για την ύπαρξη του $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι η f να είναι **συνεχής** στο $[a, \beta]$. Λέμε τότε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, \beta]$.

4. Ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(u)du = \int_a^\beta f(t)dt = \dots$, δηλαδή **δεν** έχει σημασία το σύμβολο της μεταβλητής. Το ορισμένο ολοκλήρωμα εξαρτάται από τη συνάρτηση f και τα όρια ολοκλήρωσης α και β .

5. Προφανώς ισχύει

$$\int_a^\beta f'(x)dx = [f(x)]_a^\beta = f(\beta) - f(\alpha)$$

6. Σε όλα τα παραπάνω, το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ αναφέρεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε ισχύει $\alpha < \beta$. Ωστόσο ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται ώστε να καλύψει και τις περιπτώσεις $\alpha > \beta$ και $\alpha = \beta$.

Ορίζουμε λοιπόν :

$$\bullet \int_a^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx \qquad \bullet \int_a^\alpha f(x)dx = 0$$

7. Δεν είναι δυνατόν να βρούμε το ολοκλήρωμα όλων των συναρτήσεων, έστω και αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει. Τυπικά παραδείγματα τέτοιων ολοκληρωμάτων είναι τα εξής :

$$\int_a^\beta \frac{e^x}{x} dx, \quad \int_a^\beta e^x \ln x dx, \quad \int_a^\beta \frac{\eta \mu x}{x} dx, \quad \int_a^\beta e^{-x^2} dx,$$

$$\int_a^\beta \eta \mu x^2 dx, \quad \int_a^\beta \sqrt{\eta \mu x} dx, \quad \int_a^\beta \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int_a^\beta \ln(\ln x) dx$$

Οι αρχικές των συναρτήσεων που είναι στα παραπάνω ολοκληρώματα είναι πολύ συγκεκριμένα σύνολα συναρτήσεων τα οποία όμως δεν μπορούμε να γράψουμε με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων (π.χ. πολυωνυμικών, εκθετικών, τριγωνομετρικών, κ.λ.π.) έτσι ώστε να μας γίνουν επακριβώς γνωστά.

Ιδιότητες

Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύουν :

$$\blacklozenge \int_a^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbf{IR}$$

$$\blacklozenge \int_a^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$$

$$\blacklozenge \int_a^\beta (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx + \mu \int_a^\beta g(x)dx \quad \lambda, \mu \in \mathbf{IR}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε σημεία $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ ισχύει :

$$\blacklozenge \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Προσοχή στο γεγονός ότι τα α, β, γ είναι **τυχαία σημεία του Δ** και **όχι** κατ' ανάγκη τέτοια ώστε $\alpha < \gamma < \beta$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1	$\int_a^\beta 1 \, dx = [x]_a^\beta = \dots$	
2	$\int_a^\beta x^v \, dx = \left[\frac{x^{v+1}}{v+1} \right]_a^\beta = \dots, \quad v \neq -1$	
3	$\int_a^\beta \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_a^\beta = \dots$	$\int_a^\beta \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = [\ln f(x)]_a^\beta = \dots$
4	$\int_a^\beta \sigma\upsilon\nu x \, dx = [\eta\mu x]_a^\beta = \dots$	$\int_a^\beta \sigma\upsilon\nu(\kappa x) \, dx = \left[\frac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa} \right]_a^\beta = \dots$
5	$\int_a^\beta \eta\mu x \, dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_a^\beta = \dots$	$\int_a^\beta \eta\mu(\kappa x) \, dx = \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu(\kappa x)}{\kappa} \right]_a^\beta = \dots$
6	$\int_a^\beta \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx = [\epsilon\phi x]_a^\beta = \dots$	
7	$\int_a^\beta \frac{1}{\eta\mu^2 x} \, dx = [-\sigma\phi x]_a^\beta = \dots$	
8	$\int_a^\beta e^x \, dx = [e^x]_a^\beta = \dots$	$\int_a^\beta e^{\kappa x} \, dx = \left[\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} \right]_a^\beta = \dots$
9	$\int_a^\beta \alpha^x \, dx = \left[\frac{\alpha^x}{\ln \alpha} \right]_a^\beta = \dots$	

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

356. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^1 (4x^3 - 2x - 1) dx \quad I_2 = \int_1^4 \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1 - \sqrt{x}}{x^3} dx \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 4x) dx$$

$$I_4 = \int_{-2}^{-1} \frac{x e^{2x} + 1}{x} dx \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\phi x dx \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi^2 \omega d\omega$$

Λύση

$$I_1 = \int_0^1 (4x^3 - 2x - 1) dx = 4 \int_0^1 x^3 dx - 2 \int_0^1 x dx - \int_0^1 1 dx$$

$$= 4 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - [x]_0^1 = 4 \frac{1}{4} [x^4]_0^1 - 2 \frac{1}{2} [x^2]_0^1 - [x]_0^1$$

$$= (1^4 - 0^4) - (1^2 - 0^2) - (1 - 0) = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$I_2 = \int_1^4 \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1 - \sqrt{x}}{x^3} dx = \int_1^4 \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right) dx$$

$$= \int_1^4 \left(2 - \frac{1}{x} + 3 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3} \right) dx = \int_1^4 2 dx - \int_1^4 \frac{1}{x} dx + 3 \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^4 \frac{1}{x^3} dx - \int_1^4 x^{\frac{1}{2}-3} dx$$

$$= 2[x]_1^4 - [\ln|x|]_1^4 + 3 \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 + \int_1^4 x^{-3} dx - \int_1^4 x^{-\frac{5}{2}} dx$$

$$= 2(4-1) - (\ln 4 - \ln 1) - 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1} \right) + \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right]_1^4 - \left[\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} \right]_1^4$$

$$= 6 - \ln 4 - 3 \frac{-3}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} \right]_1^4 + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{\frac{3}{x^2}} \right]_1^4 = 6 - \ln 2^2 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{x\sqrt{x}} \right]_1^4$$

$$= 6 - \ln 2^2 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{-15}{16} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\sqrt{4}} - 1 \right) = 6 - 2\ln 2 + \frac{9}{4} + \frac{15}{32} + \frac{2}{3} \frac{-7}{8}$$

$$= 6 - 2\ln 2 + \frac{9}{4} + \frac{15}{32} - \frac{7}{12} = \frac{15}{32} + \frac{23}{3} - 2\ln 2$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 4x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 4x dx = 2 [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \left[\eta \mu x \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \left[\sigma \nu 4x \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu 0 \right) + \frac{1}{4} \left(\sigma \nu \frac{4\pi}{2} - \sigma \nu 0 \right)$$

$$= 2(1 - 0) + \frac{1}{4}(0 - 1) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_4 &= \int_{-2}^{-1} \frac{x e^{2x} + 1}{x} dx = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x e^{2x}}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(e^{2x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_{-2}^{-1} e^{2x} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-2}^{-1} + \left[\ln |x| \right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} (e^{-2} - e^{-4}) + (\ln |-1| - \ln |-2|) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^4} \right) - \ln 2 \\ &= \frac{e^2 - 1}{2e^4} - \ln 2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_5 = \int_0^{\pi/3} \varepsilon \varphi x \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{(-\sigma \nu x)'}{\sigma \nu x} dx = \left[-\ln |\sigma \nu x| \right]_0^{\pi/3} = -\ln \left| \sigma \nu \frac{\pi}{3} \right| + \ln |\sigma \nu 0| \\ &= -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_6 &= \int_0^{\pi/4} \varepsilon \varphi^2 \omega \, d\omega = \int_0^{\pi/4} \frac{\eta \mu^2 \omega}{\sigma \nu^2 \omega} d\omega = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \sigma \nu^2 \omega}{\sigma \nu^2 \omega} d\omega = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 \omega} - 1 \right) d\omega \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sigma \nu^2 \omega} d\omega - \int_0^{\pi/4} d\omega = \left[\varepsilon \varphi \omega \right]_0^{\pi/4} - \left[\omega \right]_0^{\pi/4} = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} - \varepsilon \varphi 0 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

357. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^{\pi/3} (\sigma \nu x - x \eta \mu x) dx$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sigma \nu t - \eta \mu t}{e^t} dt$$

Λύση

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^{\pi/3} (\sigma \nu x - x \eta \mu x) dx = \int_0^{\pi/3} (x \sigma \nu x)' dx = \left[x \sigma \nu x \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} \sigma \nu \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sigma \nu t - \eta \mu t}{e^t} dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{\eta \mu t}{e^t} \right)' dt = \left[\frac{\eta \mu t}{e^t} \right]_0^{\pi} = \frac{\eta \mu \pi}{e^{\pi}} - \frac{\eta \mu 0}{e^0} = 0$$

358. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x-2} dx$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^1 \frac{3x-3}{x^2-x-2} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{2x^3 - x^2 - 3x - 3}{x^2 - x - 2} dx \quad , \quad I_4 = \int_0^1 \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^2 - x - 2} dx$$

Λύση

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x-2} dx = \int_0^1 \frac{(x^2-x-2)'}{x^2-x-2} dx = \left[\ln|x^2-x-2| \right]_0^1$$

$$= \ln|1-1-2| - \ln|-2| = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{3x-3}{x^2-x-2} dx = \int_0^1 \frac{3x-3}{(x+1)(x-2)} dx$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{3x-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow 3x-3 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3x-3 = (A+B)x - 2A + B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -2A+B=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=3-A \\ -2A+3-A=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=3-A \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=2 \end{cases}$$

Άρα :

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx = 2 \left[\ln|x+1| \right]_0^1 + \left[\ln|x-2| \right]_0^1$$

$$= 2(\ln 2 - \ln 1) + \ln|-1| - \ln|-2| = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$$

Μεθοδολογία

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

1^η περίπτωση : Αν βαθμ. $P(x) <$ βαθμ. $Q(x)$

τότε :

♦ Αν το $P(x)$ μπορεί να γραφτεί ως παράγωγος του $Q(x)$, δηλαδή αν $P(x) = \alpha \cdot Q'(x)$

$$\text{τότε :} \quad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_a^b \frac{\alpha \cdot Q'(x)}{Q(x)} dx = \alpha \left[\ln|Q(x)| \right]_a^b = \dots$$

♦ Αν $P(x) \neq \alpha \cdot Q'(x)$, τότε παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (εφόσον αυτό είναι δυνατό) και αναλύουμε το πηλίκο $\frac{P(x)}{Q(x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Δηλαδή :

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_a^b \frac{P(x)}{a(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots} dx = \int_a^b \left(\frac{A}{x-\rho_1} + \frac{B}{x-\rho_2} + \dots \right) dx$$

$$= A [\ln |x-\rho_1|]_a^b + B [\ln |x-\rho_2|]_a^b + \dots$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{2x^3 - x^2 - 3x - 3}{x^2 - x - 2} dx$$

Κάνουμε τη διαίρεση $(2x^3 - x^2 - 3x - 3) : (x^2 - x - 2)$

Είναι :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 3x - 3 & x^2 - x - 2 \\ - 2x^3 + 2x^2 + 4x & 2x + 1 \\ \hline x^2 + x - 3 & \\ - x^2 + x + 2 & \\ \hline 2x - 1 & \end{array}$$

Οπότε :

$$I_3 = \int_0^1 \frac{(x^2 - x - 2)(2x + 1) + 2x - 1}{x^2 - x - 2} dx = \int_0^1 \left(\frac{(x^2 - x - 2)(2x + 1)}{x^2 - x - 2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 1) dx + \int_0^1 \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} dx = \left[x^2 + x \right]_0^1 + I_1 = [(1^2 + 1) - (0^2 + 0)] + 0 = 2$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^2 - x - 2} dx$$

Κάνουμε τη διαίρεση $(2x^3 - 3x^2 - 1) : (x^2 - x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 0x - 1 & x^2 - x - 2 \\ - 2x^3 + 2x^2 + 4x & 2x - 1 \\ \hline - x^2 + 4x - 1 & \\ x^2 - x - 2 & \\ \hline 3x - 3 & \end{array}$$

Οπότε :

$$I_4 = \int_0^1 \frac{(x^2 - x - 2)(2x - 1) + 3x - 3}{x^2 - x - 2} dx = \int_0^1 \left(\frac{(x^2 - x - 2)(2x - 1)}{x^2 - x - 2} + \frac{3x - 3}{x^2 - x - 2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (2x - 1) dx + \int_0^1 \frac{3x - 3}{x^2 - x - 2} dx = \left[x^2 - x \right]_0^1 + I_2 = [(1^2 - 1) - (0^2 - 0)] + \ln 2 = \ln 2$$

2η περίπτωση : Αν βαθμ. $P(x) \geq$ βαθμ. $Q(x)$ τότε : Εκτελούμε τη διαίρεση

$P(x)$	$Q(x)$
	$\pi(x)$
$v(x)$	

οπότε $P(x) = Q(x)\pi(x) + v(x)$ όπου $\text{Βαθμ. } v(x) < \text{Βαθμ. } Q(x)$. Επομένως :

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_a^b \frac{Q(x)\pi(x) + v(x)}{Q(x)} dx = \int_a^b \left(\pi(x) + \frac{v(x)}{Q(x)} \right) dx = \int_a^b \pi(x) dx + \int_a^b \frac{v(x)}{Q(x)} dx$$

και αναγόμεναι στην 1^η περίπτωση.**359. i. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς A, B, Γ για τους οποίους**

$$\text{ισχύει } \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

$$\text{ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_1^2 \frac{2}{x^3+x} dx.$$

Λύση**i.** Έχουμε :

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+\Gamma)x}{x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2 = Ax^2 + A + Bx^2 + \Gamma x \Leftrightarrow 2 = (A+B)x^2 + \Gamma x + A, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{Από την ισότητα των πολυωνύμων παίρνουμε : } \begin{cases} A+B=0 \\ \Gamma=0 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-2 \\ \Gamma=0 \\ A=2 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}.$$

ii. Έχουμε :

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3+x} dx = \int_1^2 \frac{2}{x(x^2+1)} dx \stackrel{\omega}{=} \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{-2x}{x^2+1} \right) dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx - \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \left[2 \ln|x| \right]_1^2 - \left[\ln(x^2+1) \right]_1^2$$

$$= (2 \ln 2 - 2 \ln 1) - (\ln 5 - \ln 2) = 3 \ln 2 - \ln 5 = \ln 2^3 - \ln 5 = \ln 8 - \ln 5 = \ln \frac{8}{5}$$

ΠαρατήρησηΑν στη ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό $P(x) <$ βαθμού $Q(x)$,ο παρονομαστής έχει παράγοντα της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

(δηλαδή που δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων) τότε σε κάθε

παράγοντα αυτής της μορφής αντιστοιχεί ένα κλάσμα $\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$.

360. i. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς A, B, Γ για τους οποίους

$$\text{ισχύει : } \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x-2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2-2x+1)(x-2)} dx$.

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ έχουμε :

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + \Gamma(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = A(x^2 - 3x + 2) + Bx - 2B + \Gamma(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx - 2B + \Gamma x^2 - 2\Gamma x + \Gamma$$

$$\Leftrightarrow x+1 = (A+\Gamma)x^2 + (B-3A-2\Gamma)x + 2A-2B+\Gamma$$

Άρα

$$\begin{cases} A+\Gamma=0 \\ B-3A-2\Gamma=1 \\ 2A-2B+\Gamma=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma=-A \\ B-3A+2A=1 \\ 2A-2B-A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma=-A \\ A=B-1 \\ B-1-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma=3 \\ A=-3 \\ B=-2 \end{cases}$$

Επομένως $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-2}$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2-2x+1)(x-2)} dx &= \int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} dx \stackrel{\omega)}{=} \int_{-1}^0 \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-2} \right) dx \\ &= -3 \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx - 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx + 3 \int_{-1}^0 \frac{1}{x-2} dx \\ &= -3 \left[\ln|x-1| \right]_{-1}^0 - 2 \left[\frac{-1}{x-1} \right]_{-1}^0 + 3 \left[\ln|x-2| \right]_{-1}^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -3(\ln|-1| - \ln|-2|) - 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 3(\ln|-2| - \ln|-3|) \\
 &= 3\ln 2 - 1 + 3\ln 2 - 3\ln 3 = \mathbf{6\ln 2 - 3\ln 3 - 1}
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Αν στη ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό $P(x) < \text{βαθμό } Q(x)$, ο παρονομαστής έχει παράγοντα της μορφής $(x - \rho)^v$, τότε :

- Σε κάθε $(x - \rho)^2$ αντιστοιχεί το άθροισμα $\frac{A}{x - \rho} + \frac{B}{(x - \rho)^2}$.
- Σε κάθε $(x - \rho)^3$ αντιστοιχεί το άθροισμα $\frac{A}{x - \rho} + \frac{B}{(x - \rho)^2} + \frac{\Gamma}{(x - \rho)^3}$ κ.ο.κ.

361. Να λύσετε την εξίσωση

$$\int_2^x (x-7)dt + \int_x^3 (3x-1)dy = 1.$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται :

$$\begin{aligned}
 \int_2^x (x-7)dt + \int_x^3 (3x-1)dy &= 1 \Leftrightarrow (x-7)\int_2^x dt + (3x-1)\int_x^3 dy = 1 \\
 \Leftrightarrow (x-7)[t]_2^x + (3x-1)[y]_x^3 &= 1 \Leftrightarrow (x-7)(x-2) + (3x-1)(3-x) = 1 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7x + 14 + 9x - 3x^2 - 3 + x &= 1 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Στο ορισμένο ολοκλήρωμα μεταβλητή είναι το γράμμα που ακολουθεί μετά το σύμβολο $\int$ π.χ. x, y, t στα dx, dy, dt αντίστοιχα. Κάθε άλλο γράμμα ή παράσταση με κάθε άλλο γράμμα θεωρείται σταθερά.

362. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx \text{ αν ισχύει : } \int_a^b f(x) \left(\int_a^b f(x)dx \right) dx = \int_a^b 2f(x)dx - 1$$

Λύση

Κάθε ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Έτσι, αν θέσουμε $\int_a^b f(x)dx = \kappa$: σταθερός αριθμός, η δοθείσα ισότητα γίνεται :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) \cdot \left(\int_a^b f(x)dx \right) dx &= 2 \int_a^b f(x)dx - 1 \\
 \Leftrightarrow \int_a^b f(x) \cdot \kappa dx &= 2\kappa - 1 \Leftrightarrow \kappa \int_a^b f(x)dx = 2\kappa - 1
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \kappa \cdot \kappa = 2\kappa - 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$$\text{Άρα } \int_a^\beta f(x)dx = 1.$$

Παρατήρηση

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι πραγματικός αριθμός. **Συνέπεια :**

$$\text{Ενώ } \int_a^\beta f'(x)dx = [f(x)]_a^\beta = f(\beta) - f(a) \text{ εν τούτοις } \left(\int_a^\beta f(x)dx \right)' = 0$$

363. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\int_a^\beta \left(\int_a^\beta f(x) \cdot f(y)dx \right) dy = \left(\int_a^\beta f(x)dx \right)^2$$

Λύση

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \alpha' \text{ μέλος : } \int_a^\beta \left(\int_a^\beta f(x) \cdot f(y)dx \right) dy &= \int_a^\beta \left(f(y) \cdot \int_a^\beta f(x)dx \right) dy = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta f(y)dy \\ &= \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta f(x)dx = \left(\int_a^\beta f(x)dx \right)^2 = \beta' \text{ μέλος} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- Στο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x) \cdot f(y)dx$ μεταβλητή είναι το x , οπότε η $f(y)$ είναι σταθερός αριθμός, άρα $\int_a^\beta f(x) \cdot f(y)dx = f(y) \int_a^\beta f(x)dx$.
- Στο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta \left(f(y) \cdot \int_a^\beta f(x)dx \right) dy$ μεταβλητή είναι το y , οπότε η $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι σταθερός αριθμός, άρα $\int_a^\beta \left(f(y) \cdot \int_a^\beta f(x)dx \right) dy = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta f(y)dy$
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που εξαρτάται από τη συνάρτηση και τα όρια ολοκλήρωσης a και β και **δεν** εξαρτάται από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Δηλαδή ισχύει : $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(y)dy = \int_a^\beta f(t)dt = c \in \mathbb{R}$

364. Να αποδείξετε ότι

$$\int_a^\beta \frac{1}{1+e^x} dx - \int_\beta^a \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \beta - a.$$

Λύση

$$\text{Είναι : } \int_a^\beta \frac{1}{1+e^x} dx - \int_\beta^a \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_a^\beta \frac{1}{1+e^x} dx + \int_a^\beta \frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^\beta \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_a^\beta \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \right) dx = \int_a^\beta \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx \\
 &= \int_a^\beta \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_a^\beta 1 dx = [x]_a^\beta = \beta - \alpha
 \end{aligned}$$

365. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$ και

$$\int_1^3 f(x) dx = 5, \quad \int_4^5 f(x) dx = 6, \quad \int_2^5 f(x) dx = 7 \quad \text{και} \quad \int_2^3 f(x) dx = 2,$$

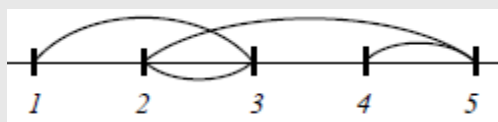
να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^4 f(x) dx$.

Λύση

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι : } \int_1^4 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx \\
 &= \int_1^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx - \int_4^5 f(x) dx = 5 - 2 + 7 - 6 = 4.
 \end{aligned}$$

Μέθοδος

Με βάση τα δοσμένα ολοκληρώματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω βοηθητικό διάγραμμα.



Οπότε για να πάμε από το 1 στο 4 ακολουθούμε τη διαδρομή : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$

366. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 1, & x \leq 1 \\ 6 - x, & x > 1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κι έπειτα να υπολογίσετε το

$$\text{ολοκλήρωμα : } I = \int_0^3 f(x) dx$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική.

Στο $x = 1$ έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x^3 + 1) = 5 = f(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6 - x) = 5$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ οπότε η f είναι συνεχής και στο 1.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$, άρα και στο $[0, 3]$. Συνεπώς υπάρχει το $\int_0^3 f(x)dx$

Εχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_0^1 (4x^3 + 1)dx + \int_1^3 (6 - x)dx \\ &= 4 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + [x]_0^1 + 6[x]_1^3 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = (1 - 0) + (1 - 0) + 6(3 - 1) - \frac{1}{2}(3^2 - 1) \\ &= 1 + 1 + 12 - \frac{1}{2}8 = \mathbf{10}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

♦ Μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο $[a, b]$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη σ' αυτό όταν υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$.

♦ Αποδεικνύεται ότι :

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή υπάρχουν ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ που δεν είναι συνεχείς στο $[a, b]$.

367. Έστω μια συνάρτηση

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \sqrt{1 + f^2(x)}, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Αν $f(0) + f(1) = 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Λύση

$$\text{Για κάθε } x \in [0, 1] \text{ είναι } f'(x) = \sqrt{1 + f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = 1.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x) \cdot 1 dx = \int_0^1 f(x) \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int_0^1 \frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{1 + f^2(x)}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{1 + f^2(x)} \right)' dx = \left[\sqrt{1 + f^2(x)} \right]_0^1 = \sqrt{1 + f^2(1)} - \sqrt{1 + f^2(0)} \\ &\stackrel{f(0) = -f(1)}{=} \sqrt{1 + f^2(1)} - \sqrt{1 + (-f(1))^2} = \sqrt{1 + f^2(1)} - \sqrt{1 + f^2(1)} = 0 \end{aligned}$$

368. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_1^2 xg(x)dx = \frac{x+1}{x} - g(x), \text{ για κάθε } x > 0$$

Λύση

Το $\int_1^2 xg(x)dx$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

$$\text{Έστω } c = \int_1^2 xg(x)dx \quad (1)$$

Τότε η δοθείσα σχέση γίνεται : $c = \frac{x+1}{x} - g(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{x+1}{x} - c$

Οπότε από την (1) για κάθε $x > 0$, έχουμε :

$$\begin{aligned} c &= \int_1^2 x \left(\frac{x+1}{x} - c \right) dx \Leftrightarrow c = \int_1^2 (x+1 - xc) dx \Leftrightarrow c = \left[\frac{x^2}{2} + x - c \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ \Leftrightarrow c &= \left(\frac{4}{2} + 2 - c \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - c \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow c = 4 - 2c - \frac{3}{2} + \frac{c}{2} \Leftrightarrow 2c = 8 - 4c - 3 + c \\ \Leftrightarrow 5c &= 5 \Leftrightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$g(x) = \frac{x+1}{x} - 1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{x+1-x}{x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Παρατήρηση

Το «κλειδί» για την εύρεση της $g(x)$ είναι να προσέξουμε ότι το $\int_1^2 xg(x)dx$ είναι σταθερός αριθμός τον οποίο και συμβολίσαμε με c .

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ασκήσεις

1852. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^2 (3x^2 + 6x - 7) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 (x-1)^2 (3x+2) dx$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$$

$$I_7 = \int_1^3 \frac{9a^2 + x^2}{x^3} dx$$

$$I_9 = \int_4^9 \sqrt{x} dx$$

$$I_{11} = \int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_{13} = \int_1^4 (\sin(\pi x) + \sqrt{x}) dx$$

$$I_{15} = \int_0^1 (e^{2x} - \eta\mu(\pi x)) dx$$

$$I_{17} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{e^{2x}} - 3^x \right) dx$$

$$I_{19} = \int_2^5 \frac{x+1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$I_{21} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

$$I_{23} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$I_{25} = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi x dx$$

$$I_{27} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 (3x^2 - x - 1) dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^2 12t(t-1)^2 dt$$

$$I_6 = \int_1^2 \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x^2} dx$$

$$I_8 = \int_1^2 \frac{4x^2 + 6x - 8}{x^3} dx$$

$$I_{10} = \int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_{12} = \int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x^4} dx$$

$$I_{14} = \int_0^1 (x^2 + 1 + \sigma\upsilon\nu(\pi x)) dx$$

$$I_{16} = \int_0^1 \left(4e^{2x-1} + 5\sqrt{\frac{1}{e^{5x}}} \right) dx$$

$$I_{18} = \int_1^2 \left(2^x + \frac{3x+2}{x^2} \right) dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\pi} \frac{e^x + \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x} dx$$

$$I_{22} = \int_0^1 \sqrt{\frac{e^x}{1+e^{-x}}} dx$$

$$I_{24} = \int_0^1 \frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x} dx$$

$$I_{26} = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^2 x dx$$

$$I_{28} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\eta\mu\sigma\upsilon\nu t} dt$$

1853. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) e^{-x} dx$$

$$I_3 = \int_1^{\pi} \left(\ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu x}{x} \right) dx$$

$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{2\eta\mu x}{x^3} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} (2x\eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x) dx$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{x e^x - e^x}{x^2} dx$$

$$I_6 = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$$

$$I_7 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$$

$$I_8 = \int_1^e \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} dx$$

1854. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx$

ii. $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$

iii. $\int_2^3 \frac{1}{x^2+x} dx$

iv. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$

v. $\int_0^1 \frac{x^3-2x+1}{x^2-4} dx$

vi. $\int_{-2}^0 \frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12} dx$

vii. $\int_3^4 \frac{x^2-x+4}{x^3-3x^2+2x} dx$

viii. $\int_1^2 \frac{2x^4-x^3-16x^2-9}{x^3-9x} dx$

1855. i. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε για κάθε

$$x \in \mathbb{R}^* - \{-1\} \text{ να ισχύει } \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1}.$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1} dx$

1856. i. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε για κάθε

$$x \in \mathbb{R}^* - \{1\} \text{ να ισχύει } \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}.$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^4 \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$

1857. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 6x^2 y dx$

ii. $\int_1^2 6x^2 y dy$

iii. $\int_1^2 6x^2 y du$

1858. i. Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^x (x-2) dt + \int_x^1 (2x-5) dy = 0$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^1 2t \ln x dt = \int_1^e \frac{x}{t} dt - 1$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\int_2^x (x-1) dt \geq 2x^2 - 9x + 7$.

1859. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^2 f(x) dx$ όταν ισχύει :

$$\int_1^2 f(x) \left[\int_1^2 f(x) dx \right] dx = \int_1^2 x \left[\int_1^2 f(x) dx \right] dx - \frac{1}{2}$$

1860. Αν $\int_0^1 f(x) dx = 2$ και $\int_2^3 g(x) dx = 5$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x) g(t) dt \right) dx$$

1861. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

με $g(x) = \int_0^1 (f^2(t) - 2xt^2f(t) + x^2t^4) dt$ για $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

$$x_0 = 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

(2000)

1862. Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$\text{με } f(x) = \int_0^1 (x^2 - 2t \sin x + g(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ένα μόνο ακρότατο του οποίου να προσδιορίσετε το είδος του.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $\int_1^2 t^2 \left(\int_0^1 g(x) dx \right) dt = 14$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 5 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1863. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

ii. Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$$

(1996)

1864. Να βρείτε την πολωνυμική συνάρτηση f με :

$$f(x) = ax^3 + bx + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, b, \gamma \in \mathbb{R}$$

η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :

- Η συνάρτηση f είναι περιττή.
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$
- $\int_0^2 f(x) dx = 2$

(1992)

1865. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2$ με $a, b \in \mathbb{R}^*$.

i. Να βρείτε τα a, b ώστε η f να έχει σημείο καμπής το $K(1, 2)$.

ii. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

iii. Να υπολογίσετε το $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$, όπου x_1, x_2 οι θέσεις τοπικού ελαχίστου και τοπικού μεγίστου αντιστοίχως.

1866. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο και η γραφική της παράσταση

διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(2, 8)$, να βρείτε το $\int_{-1}^2 f'(x) dx$.

1867. Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη

$x=a$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη

$x=\beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx$.

1868. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(1) = \frac{3}{e}$ και $f(0) = 1$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^1 e^x (f(x) + f'(x)) dx$$

1869. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή f'' στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο το 0 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$. Αν ισχύει $\int_0^1 (f(x) - f''(x)) e^x dx = 2$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A είναι κάθετη στην ευθεία $x+y=0$.

1870. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(\pi) = 3$ και $\int_0^{\pi} (f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x) dx = 2$. Να βρείτε την $f(0)$.

1871. Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $f(0) = g(0) - 1$ και $f'(x) = 1 + g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\int_1^a f(x) dx - \int_1^a g(x) dx = \frac{1}{2}.$$

1872. Αν f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \eta \mu x f'(x)) e^{f(x)} dx = e$$

1873. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f'(x) e^{f(x)} dx = 0, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha < \beta.$$

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(\alpha) = f(\beta)$

ii. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

(2001)

1874. Αν $\alpha, \beta > 1$, ώστε $\int_1^e \ln(\alpha x) dx = \int_1^e \ln(\beta x) dx$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$

1875. Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3} dx + \int_3^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx = 2$.

1876. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2x \eta \mu x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{4}{\pi^2 + 4}$.

1877. Να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta \ln t dt - \int_\beta^a \ln \frac{\mu}{t} dt = (\beta - \alpha) \ln \mu$, όπου $\mu > 0$.

1878. Να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_4^{\kappa^2} \frac{2x^2 + 23}{x^2 + 7} dx + \int_{\kappa^2}^4 \frac{2 - x^2}{x^2 + 7} dx = 36$

1879. Να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_2^{\kappa} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4} dx - \int_{\kappa}^2 \frac{9 - x^2}{x^2 + 4} dx = 12$.

1880. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία

ισχύουν $f(1) = 6$ και $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_2^1 \frac{f(x)}{x^2} dx = 1$. Να βρείτε :

i. Την τιμή $f(2)$.

ii. Το ολοκλήρωμα $I = \int_1^2 x(2f(x) + xf'(x)) dx$.

1881. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία

ισχύει : $\int_0^2 (2xf(2) - f(4)) dx = -16$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(4) = 2f(2) + 8$.

ii. Να υπολογίσετε το $I = \int_2^4 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_4^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

1882. Για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύουν :

$$\int_7^4 f(x) dx = -2, \quad \int_0^9 f(x) dx = 6, \quad \int_0^{10} f(x) dx = 8 \quad \text{και} \quad \int_4^{10} f(x) dx = 5$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^4 f(x) dx$ ii. $\int_9^{10} f(x) dx$ iii. $\int_7^9 f(x) dx$

1883. Για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύουν :

$$\int_1^5 f(x) dx = 2, \quad \int_2^5 f(x) dx = 3 \quad \text{και} \quad \int_1^7 f(x) dx = 5.$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_5^2 f(x) dx$ ii. $\int_5^7 f(x) dx$ iii. $\int_1^2 f(x) dx$ iv. $\int_2^7 f(x) dx$

1884. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x < 0 \\ e^x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

1885. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, όπου $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + 2x + 3, & x \leq 0 \\ \sigma \nu \eta x + 2x + 2, & x > 0 \end{cases}$

1886. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 5x + 2, & x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ \beta x - 6, & x > 2 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Για τις τιμές αυτές των α, β να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(x) dx$.

1887. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \alpha x + 5, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ και να ισχύει } \int_0^2 f(x) dx = 12.$$

1888. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_{-2}^2 |x^2 - x - 2| dx$$

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2|\eta \mu x - x| dx$$

$$I_3 = \int_{-2}^2 (|x| + 3|x-1|) dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

1889. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu 3x}{x} & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x & x \geq 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

ii. Αν $f'(\frac{\pi}{2}) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 3$.

iii. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) dx$

(2007)

1890. Έστω μια συνάρτηση f με $f(x) > 0$ για την οποία ισχύει $f'(x) = f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(1) = 2f(0)$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$.

1891. Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f'(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Αν $f(\alpha)$ και $-f(\beta)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 5x - 1 = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

1892. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

iii. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

(2003)

1893. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = \frac{e^x}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^2 \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1} dx$

1894. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_0^2 (x f'(x^2) + 1) dx = 4$$

Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $\rho \in (0, 4)$, ώστε $f'(\rho) = 1$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (0, 4)$, ώστε $f'(\xi) = \frac{\xi}{2}$.

1895. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(x) dx$

ii. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$

iii. $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x$ (1996)

iv. $\int_0^1 t f(t) dt = f(x) - x^2 - \frac{15}{4}$

v. $f(x) = x^2 + \int_0^1 x f(t) dt$

1896. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=1$ και

$$f'(x) = \int_0^1 f(x) dx, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1897. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να είναι $f(0)=1$

και $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

1898. Να βρείτε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία

ισχύουν : $\frac{3}{4} \int_0^2 x f(t) dt = f'(x)$ και $f(4)=16$

1899. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

a. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι : $g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του

ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

(2008)

Μέθοδοι υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες, με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε θα ισχύει :

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx$$

Παρατηρήσεις

1. Όταν έχουμε ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων της μορφής $\int_a^\beta f(x) \cdot h(x)dx$ βρίσκουμε μια παράγουσα g της συνάρτησης h , οπότε $g'(x) = h(x)$ και εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο $\int_a^\beta f(x) \cdot g'(x)dx$.
2. Η μέθοδος είναι «έμμεση», δηλαδή με την εφαρμογή της προκύπτει πάλι ολοκλήρωμα. Άρα έχει νόημα, μόνο αν το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι πιο εύκολο από το αρχικό.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και η g είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο τότε θα ισχύει :

$$\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du ,$$

$$\text{όπου} \quad u = g(x), \quad du = g'(x)dx \quad u_1 = g(a), \quad u_2 = g(\beta)$$

Παρατήρηση :

Η κεντρική ιδέα της μεθόδου είναι η αντικατάσταση της μεταβλητής x με μια άλλη η οποία μετατρέπει το ολοκλήρωμα από δύσκολο σε εύκολο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων με ολοκλήρωση κατά παράγοντες .

369. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\text{i.} \quad I_1 = \int_0^2 (3x+2)e^{3x} dx \quad \text{ii.} \quad I_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

Λύση

Μεθοδολογία

Η μέθοδος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης οδηγεί πάντα σε αποτέλεσμα (εφόσον εφαρμοστεί σωστά και σύμφωνα με τις τεχνικές που περιγράφουμε) όταν εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα που έχουν μια από τις παρακάτω μορφές :

1^η Μορφή

$$\int_\kappa^\lambda P(x)e^{ax} dx \quad \text{όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο.}$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου βρίσκουμε μια παράγουσα του εκθετικού παράγοντα,

δηλαδή $e^{ax} = \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)'$ και εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

$$\text{Οπότε : } \int_{\kappa}^{\lambda} P(x)e^{ax} dx = \int_{\kappa}^{\lambda} P(x) \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' dx = \dots$$

Παρατήρηση :

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι n βαθμού, θα χρειαστούμε n διαδοχικές εφαρμογές της μεθόδου της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης έως ότου καταλήξουμε σε ολοκλήρωμα βασικής συνάρτησης.

i. Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 (3x+2)e^{3x} dx = \int_0^2 (3x+2) \left(\frac{e^{3x}}{3} \right)' dx = \left[(3x+2) \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^2 - \int_0^2 (3x+2)' \frac{e^{3x}}{3} dx \\ &= (3 \cdot 2 + 2) \frac{e^{3 \cdot 2}}{3} - (3 \cdot 0 + 2) \frac{e^{3 \cdot 0}}{3} - \int_0^2 3 \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{8e^6}{3} - \frac{2}{3} - \int_0^2 e^{3x} dx \\ &= \frac{8e^6 - 2}{3} - \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_0^2 = \frac{8e^6 - 2}{3} - \left(\frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} \right) \\ &= \frac{8e^6 - 2}{3} - \frac{e^6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8e^6 - 2 - e^6 + 1}{3} = \frac{7e^6 - 1}{3} \end{aligned}$$

ii. $I_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 (e^x)' dx =$

$$\begin{aligned} &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' e^x dx \\ &= (1^2 e^1 - 0e^0) - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2 \int_0^1 x(e^x)' dx \\ &= e - 2 \left(\left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx \right) = e - 2(e - 0) + 2 \int_0^1 e^x dx = e - 2e + 2 \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - 2e + 2(e - 1) = e - 2e + 2e - 2 = e - 2. \end{aligned}$$

370. Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωματα :

i. $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx$

ii. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - 1) \eta \mu 2x dx$

Λύση

2η Μορφή

$$\int_{\kappa}^{\lambda} P(x) \eta \mu(ax) dx \quad \text{ή} \quad \int_{\kappa}^{\lambda} P(x) \sin(ax) dx \quad \text{όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο.}$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου βρίσκουμε μια παράγουσα του τριγωνομετρικού

παράγοντα $\eta\mu(ax) = \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(ax)}{a}\right)'$ $\sigma\upsilon\nu(ax) = \left(\frac{\eta\mu(ax)}{a}\right)'$ και εφαρμόζουμε

ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Οπότε :

$$\int_{\kappa}^{\lambda} P(x)\eta\mu(ax)dx = \int_{\kappa}^{\lambda} P(x)\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu ax}{a}\right)' dx = \dots$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda} P(x)\sigma\upsilon\nu(ax)dx = \int_{\kappa}^{\lambda} P(x)\left(\frac{\eta\mu ax}{a}\right)' dx = \dots$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η :

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι n βαθμού, θα χρειαστούμε n διαδοχικές εφαρμογές της μεθόδου της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης έως ότου καταλήξουμε σε ολοκλήρωμα βασικής συνάρτησης

i. Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sigma\upsilon\nu 3x \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \left(\frac{\eta\mu 3x}{3} \right)' dx = \left[x \frac{\eta\mu 3x}{3} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x)' \frac{\eta\mu 3x}{3} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{3} \eta\mu \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \eta\mu \frac{3\pi}{6} \right] - \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu 3x \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{3} \eta\mu \pi - \frac{\pi}{6} \eta\mu \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{3} \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{3} \cdot 0 - \frac{\pi}{6} \cdot 1 \right] + \frac{1}{9} \left[\sigma\upsilon\nu 3x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{18} + \frac{1}{9} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{6} \right] \\ &= -\frac{\pi}{18} + \frac{1}{9} \left[\sigma\upsilon\nu \pi - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{18} + \frac{1}{9} (-1 - 0) = -\frac{\pi}{18} - \frac{1}{9} = \frac{-\pi - 2}{18} \end{aligned}$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - 1) \eta\mu 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - 1) \left(\frac{-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)' dx \\ &= \left[(x^2 - 1) \frac{-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - 1)' \frac{-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[(x^2 - 1) \sigma\upsilon\nu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi^2}{16} - 1 \right) \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - (0 - 1) \sigma\upsilon\nu 0 \right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sigma\upsilon\nu 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} (0 + 1) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{\eta\mu 2x}{2} \right)' dx = -\frac{1}{2} + \left[x \frac{\eta\mu 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x)' \frac{\eta\mu 2x}{2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[x \eta \mu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu 2x dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \eta \mu \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{-\sigma \upsilon \nu 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \left[\sigma \upsilon \nu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \left(\sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2} - \sigma \upsilon \nu 0 \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 6}{8}.
\end{aligned}$$

371. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $I_1 = \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$ **ii.** $I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$ **iii.** $I_3 = \int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx$

Λύση

3η Μορφή

$$\int_{\kappa}^{\lambda} P(x) \ln(ax) dx \quad \text{όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο.}$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου βρίσκουμε μια παράγουσα του πολυωνυμικού

παράγοντα κάνοντας χρήση της ιδιότητας : $x^v = \left(\frac{x^{v+1}}{v+1} \right)'$.

και εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Αν $P(x) = 1$ τότε γράφουμε το 1 ως $(x)'$. Οπότε :

$$\int_{\kappa}^{\lambda} P(x) \ln^v(ax) dx = \int_{\kappa}^{\lambda} Q'(x) \ln^v(ax) dx = \dots \text{όπου } Q'(x) = P(x) \text{ και } P(x) : \text{ Πολυώνυμο.}$$

Παρατήρηση :

Η μέθοδος συχνά εφαρμόζεται με επιτυχία και σε ολοκληρώματα της μορφής :

$$\int_{\kappa}^{\lambda} f(x) \ln^v(g(x)) dx, \text{ όπου το } f(x) \text{ δεν είναι κατ' ανάγκη πολυώνυμο.}$$

i. Έχουμε : $I_1 = \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} \ln x dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} (\ln x)' dx \\
&= \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \ln x \right]_1^4 - \frac{2}{3} \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \left(\sqrt{4^3} \ln 4 - 1 \cdot \ln 1 \right) - \frac{2}{3} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{64} \ln 4 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \ln 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_1^4 \\
&= \frac{16 \ln 4}{3} - \frac{4}{9} (\sqrt{64} - 1) = \frac{16 \ln 4}{3} - \frac{4}{9} \cdot 7 = \frac{16 \ln 4}{3} - \frac{28}{9} = \frac{48 \ln 4 - 28}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx = \int_1^e x^{-3} \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right)' \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{-1}{2x^2} \right)' \ln x dx \\
&= \left[\frac{-1}{2x^2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{2x^2} (\ln x)' dx = \frac{-1}{2e^2} \ln e - \frac{-1}{2 \cdot 1^2} \ln 1 + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \int_1^e x^{-3} dx = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^e \\
&= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x^2} \right]_1^e = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{1^2} \right) = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx = \int_2^3 (x)' \ln(x^2 - 1) dx = \left[x \ln(x^2 - 1) \right]_2^3 - \int_2^3 x (\ln(x^2 - 1))' dx \\
&= 3 \ln 8 - 2 \ln 3 - \int_2^3 x \frac{2x}{x^2 - 1} dx = 3 \ln 2^3 - 2 \ln 3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{x^2 - 1} dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 \int_2^3 \frac{(x^2 - 1) + 1}{x^2 - 1} dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx = 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 \int_2^3 dx - 2 \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2[x]_2^3 + \int_2^3 \frac{-2}{(x-1)(x+1)} dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2(3-2) + \int_2^3 \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)(x+1)} dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 + \int_2^3 \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \right) dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 + \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx - \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 + [\ln(x+1)]_2^3 - [\ln(x-1)]_2^3 \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 + (\ln 4 - \ln 3) - (\ln 2 - \ln 1) \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 + \ln 2^2 - \ln 3 - \ln 2 \\
&= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - 2 + 2 \ln 2 - \ln 3 - \ln 2 = \mathbf{10 \ln 2 - 3 \ln 3 - 2}
\end{aligned}$$

372. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $I_1 = \int_{\pi}^0 2e^x \sin x dx$ ii. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu 2x}{e^x} dx$

Λύση

$$\int_{\kappa}^{\lambda} e^{ax} \eta\mu(\beta x) dx \quad \text{ή} \quad \int_{\kappa}^{\lambda} e^{ax} \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$$

Εφαρμόζουμε δυο φορές παραγοντική ολοκλήρωση, με εύρεση παράγουσας και τις δυο φορές του εκθετικού ή του τριγωνομετρικού παράγοντα. Στην περίπτωση αυτή το αρχικό ολοκλήρωμα I επανεμφανίζεται, οπότε λύνουμε την σχέση $I = A + \lambda I$ που προέκυψε ως προς I .

Παρατήρηση

Δεν έχει σημασία ποιον από τους δυο παράγοντες (εκθετικό ή τριγωνομετρικό) αντικαταστήσουμε με την παράγουσά του.

Και ο εκθετικός και ο τριγωνομετρικός οδηγούν εξίσου καλά στη λύση. Όποιον όμως επιλέξουμε για την πρώτη εφαρμογή της μεθόδου **τον ίδιο διατηρούμε** και κατά τη δεύτερη εφαρμογή. Διαφορετικά, τότε η παραγοντική ολοκλήρωση απλώς θα μας επιστρέψει πίσω στο αρχικό ολοκλήρωμα.

i. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi}^0 2e^x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\pi}^0 (2e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx = \left[2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \right]_{\pi}^0 - \int_{\pi}^0 2e^x (\sigma\upsilon\nu x)' dx \\ &= 2e^0 \sigma\upsilon\nu 0 - 2e^{\pi} \sigma\upsilon\nu \pi - \int_{\pi}^0 2e^x (-\eta\mu x) dx = 2 \cdot 1 - 2e^{\pi} \cdot (-1) + \int_{\pi}^0 2e^x \eta\mu x dx \\ &= 2 + 2e^{\pi} + \int_{\pi}^0 (2e^x)' \eta\mu x dx = 2 + 2e^{\pi} + \left[2e^x \cdot \eta\mu x \right]_{\pi}^0 - \int_{\pi}^0 2e^x (\eta\mu x)' dx \\ &= 2 + 2e^{\pi} + 2e^0 \eta\mu 0 - 2e^{\pi} \eta\mu \pi - \int_{\pi}^0 2e^x \sigma\upsilon\nu x dx = 2 + 2e^{\pi} - I_1 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως} \quad I_1 = 2 + 2e^{\pi} - I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = 2 + 2e^{\pi} \Leftrightarrow \mathbf{I_1 = 1 + e^{\pi}}$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta\mu 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \eta\mu 2x dx \\ &= \left[-e^{-x} \eta\mu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x} (\eta\mu 2x)' dx \\ &= \left[-e^{-\frac{\pi}{2}} \eta\mu \pi - (-e^0 \eta\mu 0) \right] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x} \sigma\upsilon\nu 2x \cdot (2x)' dx \\ &= -e^{-\frac{\pi}{2}} \eta\mu \pi + 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sigma\upsilon\nu 2x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \sigma\upsilon\nu 2x dx \\ &= 2 \left[-e^{-x} \sigma\upsilon\nu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x} (\sigma\upsilon\nu 2x)' dx \\ &= 2 \left[-e^{-\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2 \frac{\pi}{2} - (-e^0 \sigma\upsilon\nu 0) \right] - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x} (-\eta\mu 2x) (2x)' dx \\ &= 2 \left(-e^{-\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu \pi + 1 \right) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-x} \eta\mu 2x dx = 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta\mu 2x dx = 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2 - 4I_2 \end{aligned}$$

Οπότε : $I_2 = 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2 - 4I_2 \Leftrightarrow 5I_2 = 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2}{5}$

373. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx \quad I_2 = \int_1^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\varepsilon\phi x)' dx = [x\varepsilon\phi x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x)' \varepsilon\phi x dx \\ &= \frac{\pi}{4} \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} - 0 \cdot \varepsilon\phi 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\sin x)'}{\sin x} dx = \frac{\pi}{4} + [\ln(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) - \ln(\sin 0) = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} - \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \ln 2 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \int_1^3 xe^x \left(\frac{-1}{x+1} \right)' dx = \left[xe^x \frac{-1}{x+1} \right]_1^3 - \int_1^3 (xe^x)' \frac{-1}{x+1} dx \\ &= \frac{-3e^3}{4} - \frac{-e}{2} - \int_1^3 (e^x + xe^x) \frac{-1}{x+1} dx = \frac{-3e^3 + 2e}{4} - \int_1^3 e^x (1+x) \frac{-1}{x+1} dx \\ &= \frac{-3e^3 + 2e}{4} + \int_1^3 e^x dx = \frac{-3e^3 + 2e}{4} + [e^x]_1^3 \\ &= \frac{-3e^3 + 2e}{4} + e^3 - e = \frac{-3e^3 + 2e + 4e^3 - 4e}{4} = \frac{e^3 - 2e}{4}. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες μπορεί να είναι αποτελεσματική και σε πολλές άλλες περιπτώσεις ολοκληρωμάτων που δεν ανήκουν στις τέσσερις χαρακτηριστικές μορφές των προηγούμενων εφαρμογών.

Γενικά, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι μια υποψήφια μέθοδος όταν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι γινόμενο δύο επιμέρους συναρτήσεων από τις οποίες η μία είναι αναγνωρίσιμη παράγωγος.

- ♦ Στο $\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$ ισχύει ότι $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Άρα $\sin x > 0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = [\ln(\sin x)]_0^{\pi/4}$$

αντί για $\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = [\ln |\sin x|]_0^{\pi/4}$.

- ♦ Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες μπορεί να εφαρμοστεί με πολλούς τρόπους.

Για παράδειγμα στο $\int_1^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ μπορούμε να την εφαρμόσουμε θεωρώντας ότι :

$$\frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} (e^x)' \quad \text{ή} \quad \frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{(x+1)^2} \left(\frac{x^2}{2} \right)'$$

Όμως και οι δύο αυτοί τρόποι οδηγούν σε ολοκληρώματα πιο δύσκολα από το αρχικό.

Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων με αλλαγή μεταβλητής.

374. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 (5x^2 - 10x + 2)^4 (x-1) dx$

ii. $\int_4^5 \frac{4x}{(6-x)^4} dx$

iii. $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \eta\mu(5x + \pi) dx$

iv. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{\sqrt{2}}{\pi}} \frac{1}{x^3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x^2} dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu^2 x} dx$

vi. $\int_0^1 30x^5 \sqrt{x^3 + 3} dx$

vii. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$

viii. $\int_1^e \frac{dx}{x + x \ln x}$

ix. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2} dx$

Λύση

i. Για να υπολογίσουμε το $\int_0^1 (5x^2 - 10x + 2)^4 (x-1) dx$

θέτουμε $u = 5x^2 - 10x + 2$. Οπότε

$$du = (5x^2 - 10x + 2)' dx \Leftrightarrow du = (10x - 10) dx \Leftrightarrow du = 10(x-1) dx \Leftrightarrow \frac{du}{10} = (x-1) dx$$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = 2$.

Για $x = 1$ προκύπτει $u = -3$.

Επομένως :

$$\int_0^1 (5x^2 - 10x + 2)^4 (x-1) dx = \int_2^{-3} u^4 \frac{du}{10} = \frac{1}{10} \left[\frac{u^5}{5} \right]_2^{-3} = \frac{1}{50} [(-3)^5 - 2^5] = \frac{-3^5 - 2^5}{50}$$

Η εύρεση του ολοκληρώματος $I = \int_a^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ με αντικατάσταση γίνεται ως εξής:

- ♦ Θέτουμε $u = g(x)$ οπότε $du = g'(x) dx$
- ♦ Βρίσκουμε τα **νέα άκρα** ολοκλήρωσης ως εξής :
 Για $x = a$ προκύπτει $u_1 = g(a)$
 Για $x = \beta$ προκύπτει $u_2 = g(\beta)$

$$\text{Οπότε : } I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

ii. Για να υπολογίσουμε το $\int_4^5 \frac{4x}{(6-x)^4} dx$

$$\text{θέτουμε } u = 6 - x \Leftrightarrow x = 6 - u$$

$$\text{Οπότε } du = (6 - x)' dx \Leftrightarrow du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$$

$$\text{Για } x = 5 \text{ προκύπτει } u = 1.$$

$$\text{Για } x = 4 \text{ προκύπτει } u = 2.$$

Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_4^5 \frac{4x}{(6-x)^4} dx &= \int_2^1 \frac{4(6-u)}{u^4} (-du) = \int_2^1 \frac{4u - 24}{u^4} du = \int_2^1 \left(\frac{4u}{u^4} - \frac{24}{u^4} \right) du \\ &= \int_2^1 \frac{4}{u^3} du - \int_2^1 \frac{24}{u^4} du = 4 \int_2^1 u^{-3} du - 24 \int_2^1 u^{-4} du = 4 \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_2^1 - 24 \left[\frac{u^{-3}}{-3} \right]_2^1 \\ &= -2 \left[\frac{1}{u^2} \right]_2^1 + 8 \left[\frac{1}{u^3} \right]_2^1 = -2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + 8 \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} \right) \\ &= -2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) + 8 \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \dots = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- Δεν είναι κάθε αντικατάσταση ικανή να μας οδηγήσει στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος και αυτός είναι ο λόγος που η μέθοδος αυτή απαιτεί κάποια διορατικότητα. Όμως εάν, εφόσον αυτό είναι δυνατό, θέσουμε ως u μια παράσταση του x της οποίας η παράγωγος βρίσκεται στο ολοκλήρωμα πολλαπλασιασμένη με το dx και τα υπόλοιπα της υπό ολοκλήρωσης συνάρτησης είναι σταθερές (ανεξάρτητες του x) τότε η αντικατάσταση είναι επιτυχής.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής :

$$\int_{\kappa}^{\lambda} (ax + \beta)^v dx \quad \int_{\kappa}^{\lambda} e^{ax + \beta} dx \quad \int_{\kappa}^{\lambda} \frac{1}{(ax + \beta)^v} dx \quad \int_{\kappa}^{\lambda} \eta \mu(ax + \beta) dx \quad \int_{\kappa}^{\lambda} \sigma \nu(ax + \beta) dx$$

επιλέγουμε την αντικατάσταση $u = ax + \beta$.

iii. Για να υπολογίσουμε το $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \eta \mu(5x + \pi) dx$ θέτουμε $u = 5x + \pi$ οπότε

$$du = (5x + \pi)' dx \Leftrightarrow du = 5dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{5}$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{5} \text{ προκύπτει } u = 2\pi. \text{ Για } x = 0 \text{ προκύπτει } u = \pi.$$

Επομένως :

$$\int_0^{\frac{\pi}{5}} \eta \mu(5x + \pi) dx = \int_{\pi}^{2\pi} \eta \mu u \frac{du}{5} = \frac{1}{5} [-\sigma \nu u]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{5} (\sigma \nu 2\pi - \sigma \nu \pi) = -\frac{1}{5} (1 - (-1)) = -\frac{2}{5}$$

iv. Για να υπολογίσουμε το $\int_{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2} dx$ θέτουμε $u = \frac{1}{x^2}$ οπότε

$$du = \left(\frac{1}{x^2} \right)' dx \Leftrightarrow du = \frac{-2x}{x^4} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2} du = \frac{1}{x^3} dx$$

Για $x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ προκύπτει $u = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2} = \frac{\pi}{2}$. Για $x = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ προκύπτει $u = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2} = \pi$.

$$\text{Επομένως: } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{1}{2} \sin u du = -\frac{1}{2} [\eta \mu u]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}$$

v. Για να υπολογίσουμε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta \mu x \sin x e^{\eta \mu^2 x} dx$ θέτουμε $u = \eta \mu^2 x$ οπότε

$$du = (\eta \mu^2 x)' dx \Leftrightarrow du = 2\eta \mu x \sin x dx$$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $u = \eta \mu^2 \frac{\pi}{2} = 1$. Για $x = 0$ προκύπτει $u = \eta \mu^2 0 = 0$.

$$\text{Επομένως: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta \mu x \sin x e^{\eta \mu^2 x} dx = \int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

vi. Για να υπολογίσουμε το $\int_0^1 30x^5 \sqrt{x^3 + 3} dx$ έχουμε :

α' τρόπος

Θέτουμε $u = x^3 + 3 \Leftrightarrow x^3 = u - 3$

Οπότε $du = (x^3 + 3)' dx \Leftrightarrow du = 3x^2 dx$

Για $x = 1$ προκύπτει $u = 4$. Για $x = 0$ προκύπτει $u = 3$. Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_0^1 30x^5 \sqrt{x^3 + 3} dx &= \int_0^1 10x^3 \sqrt{x^3 + 3} 3x^2 dx \\ &= \int_3^4 10(u-3)\sqrt{u} du = \int_3^4 (10u\sqrt{u} - 30\sqrt{u}) du = \int_3^4 \left(10u^{\frac{3}{2}} - 30u^{\frac{1}{2}} \right) du \\ &= 10 \int_3^4 u^{\frac{3}{2}} du - 30 \int_3^4 u^{\frac{1}{2}} du = 10 \left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_3^4 - 30 \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_3^4 = 10 \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_3^4 - 30 \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_3^4 \\ &= 10 \frac{2}{5} \left[\sqrt{u^5} \right]_3^4 - 30 \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_3^4 = 4 \left[u^2 \sqrt{u} \right]_3^4 - 20 \left[u \sqrt{u} \right]_3^4 \\ &= 4(4^2 \sqrt{4} - 3^2 \sqrt{3}) - 20(4\sqrt{4} - 3\sqrt{3}) = 4(32 - 9\sqrt{3}) - 20(8 - 3\sqrt{3}) \\ &= 118 - 36\sqrt{3} - 160 + 60\sqrt{3} = -32 - 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- Όταν σε ένα ολοκλήρωμα υπάρχουν ριζικά που περιέχουν μεγάλες παραστάσεις, συνήθως εφαρμόζουμε την μέθοδο αντικατάστασης.
- Δεν είναι κάθε αντικατάσταση μοναδική. Στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 30x^5 \sqrt{x^3+3} \, dx$ μπορούμε να επιλέξουμε την αντικατάσταση $u = x^3 + 2$ ή την $u = \sqrt{x^3+2}$. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

β' τρόπος

Θέτουμε $u = \sqrt{x^3+3} \Leftrightarrow u^2 = x^3+3 \Leftrightarrow x^3 = u^2-3$

Οπότε $du = \left(\sqrt{x^3+3}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x^3+3}}(x^3+3)' dx = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}} dx$. Άρα

$$2u du = 3x^2 dx$$

Για $x=1$ προκύπτει $u=2$.

Για $x=0$ προκύπτει $u=\sqrt{3}$. Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_0^1 30x^5 \sqrt{x^3+3} \, dx &= \int_0^1 10x^3 \sqrt{x^3+3} \cdot 2\sqrt{x^3+3} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}} dx \\ &= \int_0^1 20x^3 \cdot (x^3+3) \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}} dx = \int_{\sqrt{3}}^2 20(u^2-3)u \, du \\ &= \int_{\sqrt{3}}^2 (20u^4 - 60u^2) du = 20 \int_{\sqrt{3}}^2 u^4 \, du - 60 \int_{\sqrt{3}}^2 u^2 \, du = 20 \left[\frac{u^5}{5} \right]_{\sqrt{3}}^2 - 60 \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= 20 \left(\frac{2^5}{5} - \frac{\sqrt{3}^5}{5} \right) - 60 \left(\frac{2^3}{3} - \frac{\sqrt{3}^3}{3} \right) = 20 \frac{32-9\sqrt{3}}{5} - 60 \frac{8-3\sqrt{3}}{3} \\ &= 4(32-9\sqrt{3}) - 20(8-3\sqrt{3}) = 128 - 36\sqrt{3} - 160 + 60\sqrt{3} = -32 + 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

vii. Για να υπολογίσουμε το

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx \quad \text{θέτουμε } u = e^x + 1 \quad \text{οπότε } du = (e^x+1)' dx = e^x dx$$

Για $x=0$ προκύπτει $u=2$. Για $x=\ln 3$ προκύπτει $u=e^{\ln 3}+1=3+1=4$.

Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1} e^x dx = \int_2^4 \frac{u-1}{u} du = \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = \int_2^4 1 du - \int_2^4 \frac{1}{u} du \\ &= [u]_2^4 - [\ln|u|]_2^4 = 4 - 2 - (\ln 4 - \ln 2) = 2 - (\ln 2^2 - \ln 2) = 2 - (2\ln 2 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \end{aligned}$$

viii. Για να υπολογίσουμε το $\int_1^e \frac{dx}{x+x \ln x} = \int_1^e \frac{1}{1+\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$ θέτουμε

$$u = 1 + \ln x \quad \text{οπότε} \quad du = (1 + \ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

Για $x=1$ προκύπτει $u=1+\ln 1=1$. Για $x=e$ προκύπτει $u=1+\ln e=2$

$$\text{Επομένως:} \quad \int_1^e \frac{1}{1+\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{u} du = [\ln u]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

ix. Για να υπολογίσουμε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2} dx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2} \sin x dx \quad \text{θέτουμε } u = \eta\mu x \quad \text{οπότε} \quad du = (\eta\mu x)' dx \Leftrightarrow du = \sin x dx$$

Για $x=0$ προκύπτει $u = \eta\mu 0 = 0$ Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $u = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

$$\text{Οπότε} \quad \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 3u + 2} du = \int_0^1 \frac{1}{(u+1)(u+2)} du$$

Για κάθε $u \in \mathbb{R} - \{-2, -1\}$ έχουμε

$$\frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2} \Leftrightarrow 1 = (A+B)u + 2A + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2A-A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases} \quad \text{Επομένως:}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(u+1)(u+2)} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{u+1} + \frac{-1}{u+2} \right) du = \int_0^1 \frac{1}{u+1} du + \int_0^1 \frac{-1}{u+2} du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u+1} du - \int_0^1 \frac{1}{u+2} du = [\ln|u+1|]_0^1 - [\ln|u+2|]_0^1$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) - (\ln 3 - \ln 2) = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 2^2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

375. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

ii. $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x) dx$

iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2x \ln(1+\eta\mu x) dx$

Λύση

i. Για να υπολογίσουμε το $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

$$\text{Θέτουμε } u = \sqrt{x} \quad \text{οπότε} \quad du = (\sqrt{x})' dx \Leftrightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Για $x=1$ προκύπτει $u = \sqrt{1}=1$.

Για $x=4$ προκύπτει $u = \sqrt{4}=2$.

Οπότε :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^4 2u e^u du \\
&= \int_1^4 2u(e^u)' du = \left[2ue^u \right]_1^4 - \int_1^4 (2u)' e^u du \\
&= (4e^2 - 2e) - \int_1^4 2e^u du = \\
&= 4e^2 - 2e - 2 \left[e^u \right]_1^4 = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e^1) = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e) \\
&= 4e^2 - 2e - 2e^2 + 2e = 2e^2
\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Δεν αντικαθιστούμε πάντα μια παράσταση του x που η παράγωγός της βρίσκεται στο ολοκλήρωμα. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε με u μια παράσταση του x που η παράγωγός της δεν υπάρχει στο ολοκλήρωμα, αρκεί μετά τις πράξεις να έχουμε ένα ευκολότερο ολοκλήρωμα με μεταβλητή u .
- ♦ Παραστάσεις του x που βρίσκονται σε **ημ**, **συν**, **ln** ή είναι **εκθέτες** σε εκθετικές συναρτήσεις, είναι υποψήφιες για αντικατάσταση.

ii. Για να υπολογίσουμε το $\int_1^{e^\pi} \text{συν}(\ln x) dx$, έχουμε

α' τρόπος

Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = (\ln x)' dx \Leftrightarrow du = \frac{1}{x} dx$

Αλλά $u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u$.

Για $x = 1$ προκύπτει $u = \ln 1 = 0$.

Για $x = e^\pi$ προκύπτει $u = \ln e^\pi = \pi$.

Άρα

$$\int_1^{e^\pi} \text{συν}(\ln x) dx = \int_0^\pi \text{συν}(\ln x) \cdot x \cdot \frac{1}{x} du = \int_0^\pi \text{συν} u \cdot e^u du.$$

Είναι :

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{e^\pi} \text{συν}(\ln x) dx = \int_0^\pi e^u \text{συν} u du = \int_0^\pi (e^u)' \text{συν} u du = \left[e^u \text{συν} u \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^u (\text{συν} u)' du \\
&= e^\pi \text{συν} \pi - e^0 \text{συν} 0 - \int_0^\pi e^u (-\eta\mu u) du = -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^u \eta\mu u du \\
&= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi (e^u)' \eta\mu u du = -e^\pi - 1 + \left[e^u \eta\mu u \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^u (\eta\mu u)' du \\
&= -e^\pi - 1 + e^\pi \eta\mu \pi - e^0 \eta\mu 0 - \int_0^\pi e^u \text{συν} u du = -e^\pi - 1 - I
\end{aligned}$$

Άρα

$$I = -e^\pi - 1 - I \Leftrightarrow 2I = -e^\pi - 1 \Leftrightarrow I = \frac{-e^\pi - 1}{2}.$$

β' τρόπος

Είναι :

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{e^\pi} \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = \int_1^{e^\pi} (x)' \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = \left[x \sigma\upsilon\nu(\ln x) \right]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x (\sigma\upsilon\nu(\ln x))' dx \\
&= e^\pi \sigma\upsilon\nu(\ln e^\pi) - \sigma\upsilon\nu(\ln 1) - \int_1^{e^\pi} x \frac{\eta\mu(\ln x)}{x} dx = e^\pi \sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0 - \int_1^{e^\pi} \eta\mu(\ln x) dx \\
&= -e^\pi - 1 - \int_1^{e^\pi} (x)' \eta\mu(\ln x) dx = -e^\pi - 1 - \left[x \eta\mu(\ln x) \right]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} x (\eta\mu(\ln x))' dx \\
&= -e^\pi - 1 - (e^\pi \eta\mu(\ln e^\pi) - \eta\mu(\ln 1)) + \int_1^{e^\pi} x \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} \right) dx \\
&= -e^\pi - 1 - e^\pi \eta\mu\pi + \eta\mu 0 - \int_1^{e^\pi} \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = -e^\pi - 1 - I
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I = -e^\pi - 1 - I \Leftrightarrow 2I = -e^\pi - 1 \Leftrightarrow I = \frac{-e^\pi - 1}{2}.$$

iii. Για να υπολογίσουμε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \ln(1+\eta\mu x) dx$ θέτουμε
 $u = 1 + \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x = u - 1$ οπότε $du = (1 + \eta\mu x)' dx = \sigma\upsilon\nu x dx$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = 1 + \eta\mu 0 \Leftrightarrow u = 1$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $u = 1 + \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = 2$

Επομένως :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \ln(1+\eta\mu x) dx &= \int_1^2 2\eta\mu x \ln(1+\eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x dx \\
&= \int_1^2 2(u-1) \ln u du = \int_1^2 (2u-2) \ln u du = \int_1^2 (u^2-2u)' \ln u du = \\
&= \left[(u^2-2u) \ln u \right]_1^2 - \int_1^2 (u^2-2u) (\ln u)' du = (2^2-2 \cdot 2) \ln 2 - (1^2-2 \cdot 1) \ln 1 - \int_1^2 \frac{u^2-2u}{u} du \\
&= -\int_1^2 (u-2) du = -\left[\frac{u^2}{2} - 2u \right]_1^2 = -\left[\frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \right] = -\left(2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

376. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^5 x dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x \sigma\upsilon\nu^3 x dx$$

Λύση

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^5 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^4 x \sigma\upsilon\nu x dx = \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \eta\mu^2 x)^2 \sigma\upsilon\nu x dx
\end{aligned}$$

Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = (\eta\mu x)' dx \Leftrightarrow du = \sigma\upsilon\nu x \, dx$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $u = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

Για $x = \pi$ προκύπτει $u = \eta\mu\pi = 0$

Επομένως

$$I_1 = \int_1^0 (1 - u^2)^2 du = \int_1^0 (1 - 2u^2 + u^4) du = \left[u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right]_1^0 = 0 - \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = -\frac{8}{15}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x \, \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x \, \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu^2 x)^2 \, \sigma\upsilon\nu^2 x \, \eta\mu x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \, \sigma\upsilon\nu^2 x \, \eta\mu x \, dx \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du = -\eta\mu x \, dx \Leftrightarrow -du = \eta\mu x \, dx$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $u = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$

Επομένως

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^0 (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int_1^0 (1 - 2u^2 + u^4) u^2 du = \int_0^1 (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= \left[\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - 0 = \frac{8}{105} \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x \, \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx$$

Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = (\eta\mu x)' dx \Leftrightarrow du = \sigma\upsilon\nu x \, dx$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = \eta\mu 0 = 0$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $u = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

$$\text{Οπότε } I_3 = \int_0^1 u^5 \cdot (1 - u^2) du = \int_0^1 (u^5 - u^7) du = \left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{24}$$

377. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx$ ii. $\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \epsilon\phi^5 x dx$

Λύση

i. Έχουμε :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\eta\mu^2 x)^2}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \eta\mu x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \eta\mu x dx$$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du = (\sigma\upsilon\nu x)' dx \Leftrightarrow du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow -du = \eta\mu x dx$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

Για $x = \frac{\pi}{3}$ προκύπτει $u = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Επομένως :

$$I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2u^2 + u^4}{u^4} (-du) = \int_1^{\frac{1}{2}} -\left(\frac{1}{u^4} - 2\frac{1}{u^2} + 1\right) du = \int_1^{\frac{1}{2}} (-u^{-4} + 2u^{-2} - 1) du$$

$$= \left[-\frac{u^{-3}}{-3} + 2\frac{u^{-1}}{-1} - u\right]_1^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{3u^3} - 2\frac{1}{u} - u\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\frac{1}{8}} - 2\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3\cdot 1} - 2\frac{1}{1} - 1\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 = \frac{5}{3}$$

ii. Έχουμε :

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \varepsilon\varphi^5 x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\eta\mu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^5 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^5 x} \eta\mu x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{(\eta\mu^2 x)^2}{\sigma\upsilon\nu^5 x} \eta\mu x dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{\sigma\upsilon\nu^5 x} \eta\mu x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^5 x} \eta\mu x dx$$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du = (\sigma\upsilon\nu x)' dx \Leftrightarrow du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow -du = \eta\mu x dx$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

Για $x = \frac{\pi}{3}$ προκύπτει $u = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Επομένως :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1 - 2u^2 + u^4}{u^5} (-du) = \int_{\frac{1}{2}}^1 -\left(\frac{1}{u^5} - 2\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u}\right) du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-u^{-5} + 2u^{-3} - \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \left[-\frac{u^{-4}}{-4} + 2\frac{u^{-2}}{-2} - \ln|u|\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[\frac{1}{4u^4} - \frac{1}{u^2} - \ln|u|\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} - 1 - \left(4 - 4 - \ln \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} - \ln 2$$

378. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^6 x} dx$$

Λύση

Έχουμε :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^6 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)^2 \cdot (\varepsilon\varphi x)' dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} \right)^2 \cdot (\epsilon \phi x)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon \phi^2 x + 1)^2 \cdot (\epsilon \phi x)' dx$$

Θέτουμε $u = \epsilon \phi x$ οπότε $du = (\epsilon \phi x)' dx$

Για $x = 0$ προκύπτει $u = \epsilon \phi 0 = 0$

Για $x = \frac{\pi}{4}$ προκύπτει $u = \epsilon \phi \frac{\pi}{4} = 1$

Επομένως :

$$I = \int_0^1 (u^2 + 1)^2 du = \int_0^1 (u^4 + 2u^2 + 1) du = \left[\frac{u^5}{5} + 2 \frac{u^3}{3} + u \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{28}{15}$$

379. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\text{i. } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma \nu x} dx \quad \text{ii. } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma \nu^3 x} dx$$

Λύση

$$\text{i.} \quad \text{Είναι } I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma \nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma \nu x}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma \nu x}{1 - \eta \mu^2 x} dx .$$

Θέτουμε $u = \eta \mu x$ οπότε $du = \sigma \nu x dx$.

Για $x = 0$ προκύπτει $u = \eta \mu 0 = 0$

Για $x = \frac{\pi}{6}$ προκύπτει $u = \eta \mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\text{Επομένως } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - u^2} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} du .$$

Αναλύουμε το $\frac{1}{(1 - u)(1 + u)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Έχουμε :

$$\frac{1}{(1 - u)(1 + u)} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} \Leftrightarrow 1 = A + uA + B - Bu \Leftrightarrow 1 = (A - B)u + A + B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - u} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + u} \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - u} du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + u} du \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - u)'}{1 - u} du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 + u)'}{1 + u} du = -\frac{1}{2} \left[\ln |1 - u| \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[\ln |1 + u| \right]_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ln 3$$

ii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\varepsilon\phi x)' \cdot \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \left[\varepsilon\phi x \cdot \frac{1}{\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varepsilon\phi x \left(\frac{1}{\sin x} \right)' dx = \left[\frac{\eta\mu x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varepsilon\phi x \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} dx \\ &= \left[\frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x}{\sin x} \cdot \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} dx = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} - \frac{\eta\mu 0}{\sin^2 0} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2 x}{\sin^3 x} dx \\ &= \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx = \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx = \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^3 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin x} dx \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{2}{3} - I + \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα : } I = \frac{2}{3} - I + \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow 2I = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow I = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3$$

Το τέχνασμα της προσθαφαίρεσης I+J, I-J

380. Αν

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\eta\mu x - \sin x} dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} dx,$$

να βρείτε τα ολοκληρώματα I + J και I - J και στη συνέχεια τα I και J.

Λύση

Έχουμε :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\eta\mu x - \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x}{\eta\mu x - \sin x} + \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\eta\mu x - \sin x)'}{\eta\mu x - \sin x} dx = \left[\ln |\eta\mu x - \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \ln \left| \eta\mu \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right| - \ln |\eta\mu 0 - \sin 0| = \ln \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| - \ln |-1| = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| = \ln \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\eta\mu x - \sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x}{\eta\mu x - \sin x} - \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \eta\mu x}{\eta\mu x - \sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x - \sin x}{\eta\mu x - \sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 dx = - \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι : } \begin{cases} I + J = \ln \frac{\sqrt{3}-1}{2} & (1) \\ I - J = -\frac{\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$2I = \ln \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$2J = \ln \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow J = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi}{12}$$

Υπαρξη μέσα σε ολοκλήρωμα γινομένου με παράγοντα $f'(x)$ ή $f''(x)$.

381. Οι παράγωγοι $f'(x)$ και $f''(x)$ της συνάρτησης $f(x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_0^1 (2f'(x) + xf''(x))dx = 2$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και έχει οριζόντια εφαπτομένη στη θέση $x_0=1$, να αποδείξετε ότι διέρχεται και από το σημείο $B(1, 5)$.

Λύση

Το $A(0, 3)$ ανήκει στην C_f άρα $f(0)=3$.

Η C_f δέχεται στο $x_0 = 1$ οριζόντια εφαπτομένη, άρα $f'(1) = 0$.

Για να δείξουμε ότι η C_f διέρχεται από το $B(1, 5)$, αρκεί να δείξουμε ότι $f(1)=5$.

Έχουμε :

$$\int_0^1 (2f'(x) + xf''(x))dx = 2 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f'(x)dx + \int_0^1 xf''(x)dx = 2$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x)]_0^1 + \int_0^1 x(f'(x))'dx = 2$$

$$\Leftrightarrow 2[f(1) - f(0)] + [xf'(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)'f'(x)dx = 2$$

$$\stackrel{f(0)=3}{\Leftrightarrow} 2f(1) - 2 \cdot 3 + 1 \cdot f'(1) - 0 \cdot f'(0) - \int_0^1 f'(x)dx = 2$$

$$\Leftrightarrow 2f(1) - 6 + f'(1) - [f(x)]_0^1 = 2$$

$$\stackrel{f'(1)=0}{\Leftrightarrow} 2f(1) - 6 + 0 - [f(1) - f(0)] = 2$$

$$\stackrel{f(0)=3}{\Leftrightarrow} 2f(1) - 6 - f(1) + 3 = 2 \Leftrightarrow f(1) = 5$$

Άρα η C_f διέρχεται από το $B(1, 5)$.

Παρατήρηση

Η ύπαρξη μέσα σ' ένα ολοκλήρωμα **γινομένου συναρτήσεων** όπου ο ένας παράγοντας είναι $f'(x)$ ή $f''(x)$ οδηγεί σε εφαρμογή ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

382. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και ισχύει $f'(0)=f'(\pi)=3$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx = -6$$

Λύση

α' τρόπος

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \cdot \sin x \, dx &= \int_0^{\pi} (f(x) \cdot \sin x + f''(x) \cdot \sin x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \cdot \sin x \, dx = \int_0^{\pi} f(x) \cdot (\eta \mu x)' \, dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \cdot \sin x \, dx \\ &= [f(x) \cdot \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \eta \mu x \, dx + [f'(x) \cdot \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot (\sin x)' \, dx \\ &= f(\pi) \cdot \eta \mu \pi - f(0) \cdot \eta \mu 0 - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \eta \mu x \, dx + f'(\pi) \cdot \sin \pi - f'(0) \cdot \sin 0 + \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \eta \mu x \, dx \\ &= -f'(\pi) - f'(0) = -3 - 3 = -6 \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cdot \sin x \, dx &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \cdot \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \cdot \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx + [f'(x) \cdot \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot (\sin x)' \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx + f'(\pi) \cdot \sin \pi - f'(0) \cdot \sin 0 - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot (-\eta \mu x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx - f'(\pi) - f'(0) + \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \eta \mu x \, dx \quad \begin{matrix} f'(\pi)=f'(0)=3 \\ = \end{matrix} \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx - 3 - 3 + [f(x) \cdot \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x) \cdot (\eta \mu x)' \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx - 6 + f(0) \cdot \eta \mu 0 - f(\pi) \cdot \eta \mu \pi - \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx - \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx - 6 = -6 \end{aligned}$$

383. Έστω f συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει εφαπτομένη ευθεία στο $x_0 = 1$ την $y = -9$ και ισχύει $2 \int_0^1 x^3 f''(x^2) \, dx = 10$.

Να βρείτε το $f(0)$.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon: y = -9$ εφάπτεται της C_f στο $M(1, f(1))$ άρα

- ♦ $M(1, f(1))$ ανήκει στην $\varepsilon \Leftrightarrow f(1) = -9$ και
- ♦ $f'(1) = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow f'(1) = 0$

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 x^3 f''(x^2) dx &= 10 \Leftrightarrow \int_0^1 2x f''(x^2) x^2 dx = 10 \\
&\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x^2))' x^2 dx = 10 \Leftrightarrow [f'(x^2) x^2]_0^1 - \int_0^1 f'(x^2) (x^2)' dx = 10 \\
&\Leftrightarrow f'(1) - 0 - \int_0^1 f'(x^2) 2x dx = 10 \Leftrightarrow f'(1) - \int_0^1 (f(x^2))' dx = 10 \\
&\Leftrightarrow f'(1) - [f(x^2)]_0^1 = 10 \Leftrightarrow f'(1) - f(1) + f(0) = 10 \\
&\Leftrightarrow 0 - (-9) + f(0) = 10 \Leftrightarrow f(0) = 1
\end{aligned}$$

Αναγωγικοί (αναδρομικοί) τύποι

384. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^v x dx, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

i. Να αποδείξετε ότι $I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2}$, $v > 2$.

ii. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$.

Λύση

i. Είναι :

$$\begin{aligned}
I_v &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^v x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{v-1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu x)' \sin^{v-1} x dx \\
&= [\eta \mu x \sin^{v-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x (\sin^{v-1} x)' dx \\
&= \eta \mu \frac{\pi}{2} \sin^{v-1} \frac{\pi}{2} - \eta \mu 0 \sin^{v-1} 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x (v-1) \sin^{v-2} x (\sin x)' dx \\
&= -(v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \sin^{v-2} x (-\eta \mu x) dx = (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \sin^{v-2} x dx \\
&= (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{v-2} x dx = (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{v-2} x - \sin^v x) dx \\
&= (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{v-2} x dx - (v-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^v x dx = (v-1) I_{v-2} - (v-1) I_v
\end{aligned}$$

Επομένως :

$$I_v = (v-1) I_{v-2} - (v-1) I_v \Leftrightarrow I_v + (v-1) I_v = (v-1) I_{v-2} \Leftrightarrow I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2}$$

ii. Θέλουμε να υπολογίσουμε το I_5 . Είναι $I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2}$.

Οπότε : Για $v = 5$ έχουμε : $I_5 = \frac{4}{5} I_3$. Για $v = 3$ έχουμε : $I_3 = \frac{2}{3} I_1$

$$\text{Είναι : } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$\text{Άρα } I_3 = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Αν σε ένα ολοκλήρωμα I_v η ολοκληρώσιμη συνάρτηση έχει παράγοντα που είναι δύναμη με εκθέτη τον $v \in \mathbb{N}^*$, τότε εφαρμόζοντας τους κανόνες ολοκλήρωσης βρίσκουμε μια σχέση που συνδέει το I_v με άλλο ολοκλήρωμα που είναι της ίδιας μορφής αλλά με μικρότερο εκθέτη.

Η σχέση αυτή λέγεται **αναγωγικός (ή αναδρομικός) τύπος**.

Αν εφαρμόσουμε τον αναγωγικό τύπο, μια ή περισσότερες φορές, καταλήγουμε σε απλό ολοκλήρωμα που μπορεί εύκολα να υπολογιστεί.

- ♦ Πολύ συχνά οι αναγωγικοί τύποι αποδεικνύονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

385. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I_v = \int_1^e \frac{(\ln x)^v}{x(1 + \ln x)} dx, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

i. Να αποδείξετε ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{v+1}$.

ii. Να υπολογίσετε το I_3 .

Λύση

i. $I_v + I_{v+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^v}{x(1 + \ln x)} dx + \int_1^e \frac{(\ln x)^{v+1}}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^v (1 + \ln x)}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^v}{x} dx$

Θέτουμε $u = \ln x$, οπότε $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x = e$ προκύπτει $u = 1$, ενώ για $x = 1$ προκύπτει $u = 0$.

$$\text{Άρα } I_v + I_{v+1} = \int_0^1 u^v du = \left[\frac{u^{v+1}}{v+1} \right]_0^1 = \frac{1}{v+1}$$

ii. Είναι $I_{v+1} = \frac{1}{v+1} - I_v$.

Οπότε : Για $v = 2$ έχουμε : $I_3 = \frac{1}{3} - I_2$

Για $v = 1$ έχουμε : $I_2 = \frac{1}{2} - I_1$

Είναι : $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$ Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x} dx$.

Για $x = e$ προκύπτει $u = 1$, ενώ για $x = 1$ προκύπτει $u = 0$.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{u}{1+u} du = \int_0^1 \frac{(u+1)-1}{u+1} du = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u+1} \right) du = [u]_0^1 - [\ln(u+1)]_0^1 = 1 - \ln 2$$

Οπότε $I_2 = \frac{1}{2} - (1 - \ln 2) = -\frac{1}{2} + \ln 2$ και

$$I_3 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{5}{6} - \ln 2$$

Παρατήρηση

Πολλές φορές για την απόδειξη αναγωγικών τύπων είναι προτιμότερο να έχουμε στο πρώτο μέλος όλα τα I_v , I_{v+1} , I_{v-1} ή I_{v-2} .

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΕ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

386. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και για κάθε $x \in [-1, 1]$

ισχύει: $f(x) - 2f(-x) = 3x^2 + 10x + 2$ να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x)dx = -6$.

Λύση

Έχουμε: $f(x) - 2f(-x) = 3x^2 + 10x + 2 \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 + 10x + 2 + 2f(-x)$

Οπότε:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (3x^2 + 10x + 2 + 2f(-x))dx = \int_{-1}^1 (3x^2 + 10x + 2)dx + \int_{-1}^1 2f(-x)dx \\ &= \left[x^3 + 5x^2 + 2x \right]_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 f(-x)dx = (1 + 5 + 2) - (-1 + 5 - 2) + 2 \int_{-1}^1 f(-x)dx \\ &= 8 - 2 + 2 \int_{-1}^1 f(-x)dx = 6 + 2 \int_{-1}^1 f(-x)dx \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = -x$, οπότε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = 1$ προκύπτει $u = -1$, ενώ για $x = -1$ προκύπτει $u = 1$

Επομένως:

$$I = 6 + 2 \int_1^{-1} f(u)(-du) \Leftrightarrow I = 6 - 2 \int_1^{-1} f(u)du$$

$$\Leftrightarrow I = 6 + 2 \int_{-1}^1 f(u)du \Leftrightarrow I = 6 + 2 \int_{-1}^1 f(x)dx \Leftrightarrow I = 6 + 2I \Leftrightarrow I - 2I = 6 \Leftrightarrow I = -6$$

Μεθοδολογία

Όταν μέσα σ' ένα ορισμένο ολοκλήρωμα έχουμε τη σύνθεση συναρτήσεων $f(g(x))$ τότε συνήθως προχωράμε σε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u = g(x)$ καταλήγοντας στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(u)du$ το οποίο ως γνωστό είναι το ίδιο με το $\int_a^b f(x)dx$.

387. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$f(a+x) + f(a-x) = 2\beta, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι $\int_0^{2a} f(x)dx = 2a\beta$.

Λύση

Θέτουμε στη δοθείσα σχέση όπου x το $a-x$ ώστε να προκύψει το $f(x)$ οπότε έχουμε :

$$f(a+a-x)+f(a-a+x)=2\beta \Leftrightarrow f(2a-x)+f(x)=2\beta \Leftrightarrow f(x)=2\beta-f(2a-x)$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{2a} (2\beta - f(2a-x))dx = \int_0^{2a} 2\beta dx - \int_0^{2a} f(2a-x)dx \\ &= 2\beta [x]_0^{2a} - \int_0^{2a} f(2a-x)dx = 4a\beta - \int_0^{2a} f(2a-x)dx \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = 2a - x$, οπότε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = 2a$ προκύπτει $u = 0$, ενώ για $x = 0$ προκύπτει $u = 2a$

Επομένως :

$$\begin{aligned} I &= 4a\beta - \int_{2a}^0 f(u)(-du) \Leftrightarrow I = 4a\beta - \int_0^{2a} f(u)du \Leftrightarrow I = 4a\beta - \int_0^{2a} f(x)dx \\ &\Leftrightarrow I = 4a\beta - I \Leftrightarrow 2I = 4a\beta \Leftrightarrow I = 2a\beta \end{aligned}$$

388. i. Αν f συνάρτηση άρτια και συνεχής στο $[-a, a]$ ($a > 0$), να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

ii. Αν f συνάρτηση περιττή και συνεχής στο $[-a, a]$ ($a > 0$), να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \eta \mu x}{1 + \eta \mu^2 x} dx$.

Λύση

i. Έχουμε : $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ (1)

Αλλά f άρτια οπότε $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-a, a]$ οπότε το $\int_{-a}^0 f(x)dx$ γίνεται

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{-a}^0 f(-x)dx \quad \text{και με την αντικατάσταση}$$

$$u = -x \quad \text{έχουμε} \quad du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

$$\text{Για } x = 0 \quad \text{προκύπτει} \quad u = 0$$

$$\text{Για } x = -a \quad \text{προκύπτει} \quad u = a$$

$$\text{Επομένως : } \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(u)(-du) = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx$$

$$\text{Επομένως από την (1) παίρνουμε} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

ii. Αφού f περιττή θα είναι $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$ για κάθε $x \in [-a, a]$

$$\text{οπότε} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a -f(-x)dx$$

$$\text{Θέτουμε } u = -x \quad \text{οπότε} \quad du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

$$\text{Για } x = a \quad \text{προκύπτει} \quad u = -a. \quad \text{Για } x = -a \quad \text{προκύπτει} \quad u = a$$

$$\text{Επομένως : } \int_{-a}^a f(x)dx = \int_a^{-a} -f(u)(-du) = \int_a^{-a} f(u)du = -\int_{-a}^a f(u)du = -\int_{-a}^a f(x)dx$$

$$\text{Άρα } 2\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

iii. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 \eta \mu x}{1 + \eta \mu^2 x}$, $x \in [-1, 1]$ έχουμε :

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \eta \mu(-x)}{1 + \eta \mu^2(-x)} = \frac{x^2(-\eta \mu x)}{1 + \eta \mu^2 x} = \frac{-x^2 \eta \mu x}{1 + \eta \mu^2 x} = -f(x)$$

$$\text{Άρα η } f \text{ είναι περιττή οπότε λόγω β) ερωτήματος } \int_{-1}^1 \frac{x^2 \eta \mu x}{1 + \eta \mu^2 x} dx = 0$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Χαρακτηριστικό γνώρισμα στα ολοκληρώματα αυτής της εφαρμογής είναι η ολοκλήρωση σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$.

Η α ν τ ι κ α τ ά σ τ α σ η $u = \alpha + \beta - x$

389.i. Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι : } \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x)dx$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα . $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\epsilon \phi x) dx$

Λύση

i. Θέτουμε $u = \alpha + \beta - x$ οπότε $du = (\alpha + \beta - x)' dx = -dx$

$$\text{Για } x = \beta \text{ προκύπτει } u = \alpha + \beta - \beta = \alpha$$

$$\text{Για } x = \alpha \text{ προκύπτει } u = \alpha + \beta - \alpha = \beta$$

$$\text{Οπότε : } \int_a^\beta f(\alpha + \beta - x)dx = \int_\beta^\alpha f(u)(-du) = -\int_\beta^\alpha f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u)du = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

ii. $\underline{\Delta \nu}$ $f(x) = \ln(\epsilon \phi x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, τότε :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \stackrel{i.}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\epsilon \phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sigma \phi x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon \phi x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [\ln 1 - \ln(\epsilon \phi x)]dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\epsilon \phi x)dx = -I \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

Α ν τ ί σ τ ρ ο φ η σ υ ν ά ρ τ η σ η κ α ι ο ρ ι σ μ έ ν ο ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α

390. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{2017} + x - 1$.

i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$.

Λύση

i. ♦ Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 2017x^{2016} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι «1 – 1» συνάρτηση και συνεπώς αντιστρέφεται.

♦ Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2017} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2017} = -\infty$

και επειδή η f είναι γν. αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$, η f θα έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $\mathbb{R}$.

ii. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Οπότε αφού η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η f^{-1} .

Οπότε η f^{-1} είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$.

Μεθοδολογία

Σε ορισμένο ολοκλήρωμα που περιέχει την αντίστροφη $f^{-1}(x)$ μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$,

- θέτουμε $x = f(u)$, οπότε
- $dx = f'(u)du$

Για την εύρεση των νέων ορίων ολοκλήρωσης εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η f είναι (ως αντιστρέψιμη) “1 – 1”.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$ θέτουμε

$$x = f(u) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = u. \text{ Οπότε } dx = f'(u)du.$$

$$\text{Για } x = -1 \quad \text{έχουμε : } -1 = f(u) \Leftrightarrow f(0) = f(u) \xrightarrow{f: "1-1"} \Leftrightarrow u = 0$$

$$\text{Για } x = 1 \quad \text{έχουμε : } 1 = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \xrightarrow{f: "1-1"} \Leftrightarrow u = 1$$

Επομένως :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx &= \int_0^1 f^{-1}(f(u))f'(u)du = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 u(2017u^{2016} + 1)du \\ &= \int_0^1 (2017u^{2017} + u)du = 2017 \left[\frac{u^{2018}}{2018} \right]_0^1 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2017}{2018} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Αν μια συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και συνεχής σε ένα διάστημα A τότε και η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της το $f(A)$.
- ♦ Θυμίζουμε :
- $x = f(u) \Leftrightarrow u = f^{-1}(x)$ • $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$ • $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in f(A)$.

391. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A = [0, a]$ με σύνολο τιμών $f(A) = [0, b]$. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt = \alpha\beta.$$

Λύση

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, \alpha]$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και «1-1») στο $A = [0, \alpha]$. Οπότε το σύνολο τιμών είναι $f(A) = [f(0), f(\alpha)]$.

Αλλά $f(A) = [0, \beta]$, συνεπώς: $f(0) = 0$ (1) και $f(\alpha) = \beta$ (2)

Στο $\int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt$ θέτουμε $t = f(x)$, οπότε $dt = f'(x)dx$.

Για $t = 0$ έχουμε: $0 = f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(0) = f(x) \stackrel{f: "1-1"}{\Leftrightarrow} x = 0$

Για $t = \beta$ έχουμε: $\beta = f(x) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(\alpha) = f(x) \stackrel{f: "1-1"}{\Leftrightarrow} x = \alpha$

$$\text{Άρα } \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt = \int_0^{\alpha} f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int_0^{\alpha} xf'(x)dx = \int_0^{\alpha} tf'(t)dt.$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt &= \int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\alpha} tf'(t)dt = \int_0^{\alpha} f(t)dt + [tf(t)]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} (t)'f(t)dt \\ &= \int_0^{\alpha} f(t)dt + (\alpha f(\alpha) - 0 \cdot f(0)) - \int_0^{\alpha} f(t)dt = \alpha f(\alpha) = \alpha\beta \end{aligned}$$

392. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$.

Λύση

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ και με

πρόσθεση κατα μέλη παίρνουμε: $f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Επομένως η f είναι «1-1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Είναι $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, οπότε $y^3 + y = f^{-1}(y)$, $y \in D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $x = f^{-1}(u)$, οπότε

$$dx = (f^{-1}(u))'du \Leftrightarrow dx = (u^3 + u)'du \Leftrightarrow dx = (3u^2 + 1)du$$

Για $x = 0$ προκύπτει: $0 = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(u) = f^{-1}(0) \stackrel{f^{-1}: "1-1"}{\Leftrightarrow} u = 0$

Για $x = 2$ προκύπτει: $2 = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(u) = f^{-1}(2) \stackrel{f^{-1}: "1-1"}{\Leftrightarrow} u = 1$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(f^{-1}(u))(3u^2 + 1)du = \int_0^1 u(3u^2 + 1)du = \int_0^1 (3u^3 + u)du \\ &= 3 \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Μέθοδοι υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Ασκήσεις

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με κατά παράγοντες ολοκλήρωση

1900. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x) e^x dx \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{e^{2x}} dx \quad I_3 = \int_0^1 x^2 3^x dx$$

1901. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2) \eta \mu x dx \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 3x) \sigma \upsilon \nu 4x dx$$

1902. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 (x^3 - 2x) \ln x dx & I_2 &= \int_1^e 8x \ln \sqrt{x} dx & I_3 &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \\ I_4 &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx & I_5 &= \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx & I_6 &= \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx \\ I_7 &= \int_1^e x \ln^2 x dx & I_8 &= \int_{-1}^0 \ln(x+2) dx & I_9 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1-x}{1+x} dx \\ I_{10} &= \int_1^2 x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx & I_{11} &= \int_1^e x \ln(xe^x) dx & I_{12} &= \int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx \end{aligned}$$

1903. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta \mu x dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sigma \upsilon \nu 4x dx \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sigma \upsilon \nu x}{e^x} dx$$

1904. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta \mu^2 x} dx & I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sigma \upsilon \nu x)}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx & I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu x \ln(1 + \sigma \upsilon \nu x) dx \\ I_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x e \varphi^2 x dx & I_5 &= \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx & I_6 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sigma \varphi x)}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx \\ I_7 &= \int_e^{e^2} \left(\ln x + \frac{1}{x^2} \right) e^x dx & I_8 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x \eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu^3 x} dx & I_9 &= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx \end{aligned}$$

1905. Για τη συνάρτηση $f(x) = 3ax^2 + \beta x \sigma \upsilon \nu x$ ισχύουν $f'(0)=1$ και

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \pi^3 - 2. \text{ Να βρείτε τα } a, \beta \in \mathbb{R}.$$

1906. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με :

$$f''(x) = 6e^{x^3} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = f'(1) = 2.$$

$$\text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

1907. i. Να βρείτε τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

ii. Να υπολογίσετε το $\int_1^e \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

1908. Δίνεται μια συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$, $0 \leq x \leq 2$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του **θεωρήματος Rolle** στο διάστημα $[0, 2]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει :

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

iii. Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

iv. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$.

v. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

(2009)

Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων με αλλαγή μεταβλητής

1909. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^1 (x+1)(x^2+2x+5)^3 dx$$

$$I_2 = \int_0^1 (2x^4 - 3x + 5)^3 (8x^3 - 3) dx$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{x+2}{(x^2+4x)^3} dx$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2} dx$$

$$I_5 = \int_0^1 (2x+5)(x+1)^4 dx$$

$$I_6 = \int_0^1 (x-2)^2 (x-1)^5 dx$$

$$I_7 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$I_9 = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

$$I_{10} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$$

$$I_{12} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}}$$

$$I_{13} = \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2+\ln x} dx$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\varepsilon \varphi x}}{\sin^2 x} dx$$

$$I_{15} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\eta \mu x} \sin x dx$$

$$I_{16} = \int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx$$

$$I_{17} = \int_0^1 [e^x \sin(e^x+1) + e^{-x} \eta \mu(e^{-x}+2)] dx$$

$$I_{18} = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 e^{x^3} - e^{\sin x} \eta \mu x) dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{e^x+2} dx$$

$$I_{21} = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \frac{x^2}{\sin^2 x^3} dx$$

$$I_{23} = \int_e^{e^4} \frac{3 \ln x + \sqrt{\ln x}}{x \ln x} dx$$

$$I_{25} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$$

$$I_{27} = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$I_{29} = \int_{-2 \ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2e^{-x}+e^{-2x}}} dx$$

$$I_{31} = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x \ln x} dx$$

$$I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2\eta\mu x + 1) \sigma\nu x}{(\eta\mu x - 1)^3} dx$$

$$I_{35} = \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)} dx$$

$$I_{37} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx$$

$$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \eta\mu x + \varepsilon\varphi^7 x}{\sigma\nu^2 x} dx$$

$$I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\eta\mu x} \sigma\nu x dx$$

$$I_{26} = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{\sqrt{3+x \ln x}} dx$$

$$I_{28} = \int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$I_{30} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_{32} = \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$I_{34} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x \ln(\eta\mu x) dx$$

$$I_{36} = \int_1^e \frac{\ln x + 3}{x \ln x + x} dx$$

$$I_{38} = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + x e^{-x}} dx$$

1910. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \sigma\nu x e^{\sigma\nu x} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} e^{2x} \eta\mu e^x dx$$

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\nu \frac{1}{x}}{x^3} dx$$

$$I_5 = \int_0^1 e^{x+3} \ln(e^x + 5) dx$$

$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \ln(2 + \sigma\nu x) dx$$

$$I_7 = \int_0^3 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$I_8 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$I_9 = \int_0^{\pi^2} \sigma\nu \sqrt{x} dx$$

$$I_{10} = \int_1^{e^{\pi}} \eta\mu (\ln x) dx$$

1911. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$, $x > 0$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα : $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$.

(2008)

1912. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu^2 x + 5\sigma\nu x + 6} dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu x \sigma\nu x}{\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2} dx \quad I_3 = \int_2^3 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx$$

$$I_4 = \int_2^3 \frac{3e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{3e^{4x} - e^{3x}}{e^x - 1} dx$$

$$I_6 = \int_{e^2}^{e^3} \frac{2 \ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx$$

1913. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1+e^x} dx$$

Ο λ ο κ λ ή ρ ω σ η τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ ώ ν σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν

1914. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^5 x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x \sin^2 x dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \eta \mu^7 x \sin^3 x dx$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} \sqrt{\eta \mu x} \sin^5 x dx$$

1915. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\eta \mu^7 x} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varepsilon \varphi^3 x dx$$

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma \varphi^3 x dx$$

1916. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^4 x} dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu^4 x} dx$$

1917. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 - \eta \mu x} dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \varepsilon \varphi^2 x}{x + \varepsilon \varphi x} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta \mu x}{\sin x} dx$$

1918. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx$

ii. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \eta \mu x} dx$

Τ ο τ έ χ ν α σ μ α τ η ς π ρ ο σ θ α φ α ί ρ ε σ η ς I + J, I - J

1919. Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \eta \mu x} dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sin x + \eta \mu x} dx$

να βρείτε τα ολοκληρώματα : $A + B$, $A - B$, A και B

Υ πα ρ ξ η σ ε ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α γ ι ν ο μ έ ν ο υ μ ε π α ρ ά γ ο ν τ α $f'(x)$ ή $f''(x)$.

1920. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, \beta]$ και

ισχύει $f(a)=f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta x f''(x) dx = \beta f'(\beta) - a f'(a)$.

1921. Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύουν $f(a)=f(\beta)=g(a)=g(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_a^\beta f''(x) g(x) dx = \int_a^\beta f(x) g''(x) dx$$

1922. Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, \pi]$ και $g(\pi)=e^{-\pi}$.

Αν $\int_0^\pi (g(x) + g'(x)) e^x dx = 2$ να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g για $x=0$.

(1992)

1923. Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, 1]$ και ικανοποιεί τη

σχέση $\int_0^1 xg'(x)dx = 1993 - \int_0^1 g(x)dx$, να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g για $x=1$.

(1992)

- 1924.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 \frac{f(x) - f''(x)}{e^x} dx = 1$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$ και η γραφική της παράσταση εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1, 0)$, να υπολογίσετε την $f(0)$.

- 1925.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει

$$\int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x))dx = -\frac{8}{3}, \text{ να υπολογίσετε το } f(2)$$

(1994)

- 1926.** Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή f'' στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = -2$$

και η f παρουσιάζει στο $x_0=\pi$ τοπικό ακρότατο.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, 2016)$.

- 1927.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^3 xf''(x)dx$, αν γνωρίζουμε ότι η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A(-2, f(-2))$ και $B(3, f(3))$ της C_f είναι κάθετη της ευθείας $\varepsilon: 2x+4y+3=0$, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 3 τέμνει τον άξονα $x'x$ υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$ και στο σημείο με τετμημένη -2 η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

- 1928.** Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(1, 0)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f''(x)dx$

ii. Αν $f''(x) = \frac{3}{\sqrt{1+x^3}}$ να υπολογίσετε το $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- 1929.** Θεωρούμε τη δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με f'' συνεχή και $f(0) \neq 0$ για την οποία ισχύει $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \eta \mu x dx = 0$. Να αποδείξετε ότι η

εξίσωση $f(x) - \eta \mu x \sin \frac{x}{2} f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

- 1930.** Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$. Αν $f(3)=6$ και $f(5)=10$, να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3, 5)$, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. $\int_0^\xi xf''(x)dx = f(0)$

1931. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(0)=f(1)$. Αν η f'' είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε :

$$\int_0^{\xi} x f''(x) dx = f(0) - f(\xi)$$

1932. Έστω συνάρτηση $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη

με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^{\alpha} x f''(x) dx = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = f'(\alpha)$

1933. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

Αν ισχύει : $\int_0^2 (x f''(x) + 3f'(x)) dx = 6$ τότε :

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

ii. Να βρείτε το $\int_0^2 2f'(x) e^{f^2(x) + \ln f(x)} dx$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f'(\xi) = 1$.

Αναγωγικοί (αναδρομικοί) τύποι

1934. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^1 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$

i. Να αποδείξετε ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{v}(e^v - 1)$, $v \in \mathbb{N}^*$.

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_1 , I_2 , I_3 .

1935. i. Αν $I_v = \int_0^1 \frac{x^v}{x^2+1} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$, $v > 2$.

ii. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx$.

1936. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^2 \frac{x^v}{x^2+1} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$

i. Να αποδείξετε ότι $I_{v+2} + I_v = \frac{2^{v+1}}{v+1}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $S = I_1 + I_2 + 2I_3 + I_4 + I_5$.

1937. Δίνεται $I_v = \int_1^e x \ln^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $I_v = \frac{e^2}{2} - \frac{v}{2} I_{v-1}$, για κάθε $v > 1$.

ii. Να υπολογίσετε το I_4 .

1938. i. Αν $I_v = \int_0^1 x^v e^{\alpha x} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι

$$I_v = \frac{e^{\alpha}}{\alpha} - \frac{v}{\alpha} I_{v-1}, \quad v > 1.$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^4 e^{2x} dx$.

1939. i. Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^v \sin x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι

$$I_v = \frac{\pi^v}{2^v} - v(v-1)I_{v-2}, \quad \text{για κάθε } v > 2$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx$. **i.** Αν

$I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι για κάθε $v > 2$ ισχύει

$$I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2}$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x dx$. Θέτουμε $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x dx$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $v > 2$ ισχύει $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$.

ii. Να υπολογίσετε το I_5 .

(1991)

1942. i. Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^v x} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι :

$$I_v = \frac{2^{v-2} \sqrt{3}}{v-1} + \frac{v-2}{v-1} I_{v-2}, \quad v > 2$$

ii. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^6 x} dx$.

1943. Δίνεται $I_v = \int_0^1 \frac{x^v}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$

i. Να αποδείξετε ότι : $I_v = \frac{\sqrt{2}}{v} - \frac{v-1}{v} I_{v-2}$, για κάθε $v > 2$.

ii. Να υπολογίσετε το I_5 .

1944. Δίνεται $I_v = \int_0^1 x^v \sqrt{x^2+1} dx$, $v \in \mathbb{N}$.

i. Να αποδείξετε ότι : $I_v = \frac{2\sqrt{2}}{v+2} - \frac{v-1}{v+2} I_{v-2}$, για κάθε $v > 2$.

ii. Να υπολογίσετε το I_5 .

1945. Δίνονται τα ολοκληρώματα $I_v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^v x}{\sin x} dx$, $K_v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu^v x \cdot \sin x dx$

α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα K_v

β. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I_{v+2} - I_v$

γ. Να υπολογίσετε τα I_1, I_3 .

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΕ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1946. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

1947. Αν $\alpha, \beta > 0$ να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \int_0^1 x^\beta (1-x)^\alpha dx$.

1948. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad \text{ii. } \int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)dx = \gamma \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

1949. α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο $[-a, a]$, τότε να αποδείξετε

$$\text{ότι } \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 1} dx$.

1950. α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-a, a]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f(-x)dx$$

β. Αν $f(x) = \frac{\sin x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } f(x)+f(-x)=\sin x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{ii. } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 1$$

1951. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2^x + 1}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(-x)=x^2+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{a^3}{3} + a$

1952. i. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και

τέτοια ώστε $f(x)f(-x)=1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

Αν $I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1+f(x)} dx$, $v \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}$ ισχύουν

$$\text{α. } I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v} f(x)}{1+f(x)} dx \quad \text{β. } 2 I_v = \frac{2}{2v+1}$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{x^{2016}}{1+e^x} dx$

1953. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^4}{e^x + 1}\right)$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(4-x)=4-f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 f(x)dx$

1954. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu^{\nu} x}{\eta\mu^{\nu} x + \sigma\upsilon\nu^{\nu} x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(\frac{\pi}{2} - x) = 1 - f(x)$, για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

1955. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(a + \beta - x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,

να αποδείξετε ότι $\int_a^{\beta} x f(x) dx = \frac{a + \beta}{2} \int_a^{\beta} f(x) dx = (a + \beta) \int_a^{\frac{a+\beta}{2}} f(x) dx$.

1956. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει ότι : $f(x) + f(a + \beta - x) = c$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, $c \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $\int_a^{\beta} f(x) dx = (\beta - a) f(\frac{a + \beta}{2}) = \frac{\beta - a}{2} (f(a) + f(\beta))$

(1996)

1957. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) + f(a - x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in [0, a].$$

Έστω $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a - x)} dx$ και $J = \int_0^a \frac{f(a - x)}{f(x) + f(a - x)} dx$.

a. Να αποδείξετε ότι :

i. $I = J$ **ii.** $I + J > 0$.

β. Να βρείτε τις τιμές των I και J .

1958. i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιττή, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (a > 0)$$

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και άρτια, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (a > 0)$$

iii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_{-1}^1 x^3 e^{x^2} \ln(x^2 + 1) dx \quad I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx \quad I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x \sin x + e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx$$

1959. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 6x + 6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x+3) = f(x) + 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 2$.

Να αποδείξετε ότι:

iii. $\int_0^1 f(x + \kappa) dx = \int_{\kappa}^{\kappa+1} f(x) dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

iv. $\int_0^3 f(x) dx = 9$

v. $\int_x^{x+3} f(t) dt = 6x + 9, \quad x \in \mathbb{R}.$

vi. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^9 f(t) dt$.

vii. Αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, να τη βρείτε.

1960. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

a.
$$\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx$$

β. Αν ισχύει $4 \int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2017$,

τότε υπάρχει $\xi \in (1, 7)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \frac{2017}{6}$.

Η αντιστατάσταση $u = \alpha + \beta - x$

1961. i. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x)dx$$

ii. Έστω $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{e^x + 1} dx$ και $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^x + 1} dx$.

Να αποδείξετε ότι $I=J$ και στη συνέχεια να βρεθεί το I .

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \eta \mu x}{1 + \sigma \nu x} \right) dx$

iv. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta-x)} dx = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

1962. i. Αν η f είναι συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[-1, 1]$, τότε να

αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{5x \eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx$.

1963. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma \nu x) dx$$

1964. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu^6 x}{\eta \mu^6 x + \sigma \nu^6 x} dx$$

Αντίστροφη συνάρτηση και ορισμένο ολοκλήρωμα

1965. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x) dx$.

1966. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x + \eta \mu x}$, $x \geq 0$.

- i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- iv. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\sqrt{\eta}} x f^{-1}(x) dx$.

1967. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii. $\int_1^e f(x) dx + \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = e^2 + e - 1$

1968. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x) dx$.

1969. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A = [\alpha, \beta]$. Αν $f(A) = [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta^2 - \alpha^2$$

1970. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right]$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι : } \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_{1/\beta}^{1/\alpha} f^{-1}(x) dx = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$$

1971. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } I = \int_0^e f(x) dx.$$

1972. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει

$$f^5(x) + 5f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ τότε:}$$

- α. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- β. Να βρείτε την f^{-1} και να υπολογίσετε το

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx \text{ όταν } f(\alpha) = -1 \text{ και } f(\beta) = 1.$$

*** Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

*Θεώρημα

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in \Delta$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει :

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Θεώρημα (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

Παρατηρήσεις :

1. Τελικά το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι αριθμός ή συνάρτηση ; Αν και τα δύο άκρα είναι αριθμοί και η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα έχει μοναδική μεταβλητή αυτή που υπάρχει στο διαφορικό d , όπως στο $\int_a^\beta f(x)dx$, τότε είναι αριθμός. Αν όμως το ένα ή και τα δύο άκρα είναι μεταβλητά, όπως στο $\int_a^x f(t)dt$, τότε είναι συνάρτηση.
2. Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι ένας μηχανισμός δημιουργίας νέων συναρτήσεων και μάλιστα με καλύτερες ιδιότητες από τις συναρτήσεις που χρησιμοποιεί. Πράγματι η f είναι **συνεχής** στο διάστημα Δ η F όμως είναι **παραγωγίσιμη** στο Δ και ως τέτοια έχει καλύτερη «συμπεριφορά».

Παραδείγματα :

- Τα ολοκληρώματα $\int_a^\beta f(x)dx$, $\int_a^\beta f(t)dt$, $\int_a^\beta f(u)du$ είναι **αριθμοί** (και συγκεκριμένα ο ίδιος αριθμός)
- Τα ολοκληρώματα $\int_a^x f(t)dt$, $\int_a^x f(u)du$ είναι **συνάρτησεις του x** (και συγκεκριμένα η ίδια συνάρτηση)
- Τα ολοκληρώματα $\int_a^t f(x)dx$, $\int_a^t f(u)du$ είναι (η ίδια) **συνάρτηση του t** .
- Τα ολοκληρώματα $\int_a^\beta f(xt)dt$, $\int_a^\beta f(xu)du$ είναι (η ίδια) **συνάρτηση του x** .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

393. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν G είναι μια παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι :

$$G(x) - G(-x) = x^3 + x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-2}^2 \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} dx.$$

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} (G(x) - G(-x))' &= G'(x) - G'(-x)(-x)' = G'(x) + G'(-x) = \\ &= g'(x) + g'(-x) = \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} + \frac{e^{-x} + 3(-x)^2}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} + \frac{\frac{1}{e^x} + 3x^2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \\ &= \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} + \frac{\frac{1 + 3x^2 e^x}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} + \frac{1 + 3x^2 e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 3x^2 + 1 + 3x^2 e^x}{e^x + 1} = \\ &= \frac{3x^2(e^x + 1) + e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x + 1)(3x^2 + 1)}{e^x + 1} = 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$(G(x) - G(-x))' = (x^3 + x)'$$

επομένως

$$G(x) - G(-x) = x^3 + x + c$$

Για $x = 0$ προκύπτει $G(0) - G(0) = c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα

$$G(x) - G(-x) = x^3 + x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. α' τρόπος

Είναι :

$$I = \int_{-2}^2 \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} dx = \int_{-2}^2 g(x) dx = \int_{-2}^2 G'(x) dx = \left[G(x) \right]_{-2}^2 = G(2) - G(-2).$$

Για $x = 2$ λόγω του **α)** ερωτήματος έχουμε :

$$G(2) - G(-2) = 2^3 + 2 = 10$$

Επομένως

$$I = \int_{-2}^2 \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} dx = 10$$

β' τρόπος

$$\text{Είναι } I = \int_{-2}^2 \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} dx$$

Θέτουμε $u = -x \Leftrightarrow x = -u$ οπότε $du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$

Για $x = -2$ προκύπτει $u = 2$ ενώ για $x = 2$ προκύπτει $u = -2$.

Οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{-2} \frac{e^{-u} + 3(-u)^2}{1 + e^{-u}} (-du) = \int_{-2}^2 \frac{\frac{1}{e^u} + 3u^2}{1 + \frac{1}{e^u}} du = \int_{-2}^2 \frac{1 + 3u^2 e^u}{e^u + 1} du \\ &= \int_{-2}^2 \frac{1 + 3x^2 e^x}{e^x + 1} dx \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} 2I &= I + I = \int_{-2}^2 \frac{e^x + 3x^2}{1 + e^x} dx + \int_{-2}^2 \frac{1 + 3x^2 e^x}{e^x + 1} dx = \\ &= \int_{-2}^2 \frac{e^x + 3x^2 + 1 + 3x^2 e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^2 \frac{3x^2(e^x + 1) + e^x + 1}{e^x + 1} dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{(e^x + 1)(3x^2 + 1)}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^2 (3x^2 + 1) dx = \left[x^3 + x \right]_{-2}^2 \\ &= (2^3 + 2) - [(-2)^3 - 2] = 10 - (-10) = 20 \end{aligned}$$

Άρα

$$2I = 20 \Leftrightarrow I = 10$$

394. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο 0 , επομένως η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(t) = \int_t^1 f(x) dx$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, η G είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[0, +\infty)$, οπότε

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = G(0) = \int_0^1 f(x) dx$$

Αλλά για κάθε $t > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_t^1 f(x) dx = \int_t^1 (x \ln x) dx = \int_t^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx \\ &= 0 - \frac{1}{2} t^2 \ln t - \int_t^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} \int_t^1 x dx = -\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^1 \\ &= -\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} \right) = -\frac{1}{2} t^2 \ln t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2} t^2 \ln t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{4}$$

$$\text{γιατί } \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^2 \ln t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\ln t)'}{\left(\frac{1}{t^2}\right)'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-2}{t^4}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} t^2 \right) = 0$$

Ασκήσεις

1973. Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν :

- i. $f'(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
- ii. $2f'(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

1974. Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν :

- i. $f'(x) = \frac{\ln x + f(x)}{x}$, $x > 0$ και $f(1) = e - 1$
- ii. $f''(x) = \frac{f'(x)}{x} + xe^x$, $x > 0$ και $f'(1) = e$, $f(1) = 0$

1975. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$.

- i. Αν $f'(x) = \ln x$, $x > 0$, να βρείτε την f
- ii. Αν $f'(x) > \ln x$, $x > 0$, να δείξετε ότι : $f(x) + x > x \ln x$, $x > 1$

1976. Έστω G μια αρχική της συνάρτησης $g(x) = x^{2017} \ln(e^x + 1)$ στο $\mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = G(x) - G(-x)$.
- ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-3}^3 x^{2017} \ln(1 + e^x) dx$

1977. Έστω G μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $g(x) = \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1}$.

- i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = G(x) - G(-x)$.
- ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \eta \mu x}{e^x + 1} dx$

1978. Έστω G μια παράγουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$ της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και

$$f(x) = G(\sigma f x) - G(\epsilon f x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2x + \frac{\pi}{2}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2 + 1} dt$

1979. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

F1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

F2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

F3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε :

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f(x_0 - \frac{\pi}{4}) \operatorname{erf} x_0$$

(2013)

1980. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$
- $f'(0) < f(1) - f(0)$ και
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

A3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x g(x)}$.

A4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$

A5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$

είναι $E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ και στη

συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\int_0^\xi f(t) dt = 2$.

(2011)

1981. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} + a, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x, & x > 0 \end{cases}$.

i. Να βρείτε το a ώστε η f να είναι συνεχής.

iii. Για $a = 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

1982. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και F μια αρχική της f με

την ιδιότητα $F(x)f(-x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

1983. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και F μια αρχική της f με

την ιδιότητα $F(x)f(2-x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $g(x) = F(x)F(2-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

1984. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και F μια αρχική της

f με την ιδιότητα $F(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x$ για κάθε $x > 0$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο της $M(1, F(1))$.

ii. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $g(x) = F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

1985. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, που ικανοποιούν τις σχέσεις :

- $F(0) = 0, \quad f(0) = \frac{1}{2}$ και

- $F(x) + 2f(x) + (1 + e^{-x})f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την F .

ii. Να δείξετε ότι η F έχει ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο.

1986. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Αν F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση :

$$F(e^x + 1) + F(x + 1) = F(e^x) + F(x + 2)$$

1987. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $F(x^2 + 1) + F(4x - 3) = x^4 + 20x^2 - 24x + 10$, $x \in \mathbb{R}$,

Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $(-3, 5)$.

1988. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f(1) = 1, \quad f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

- $f(x) + x^2 \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω επιπλέον, η συνάρτηση F η οποία είναι μια αρχική της f με $F(1) = 0$.

i. Να λύσετε την ανίσωση : $F(x^3 + 9) + F(-2) > F(x^3 + 6)$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)(e^{x-1} - 1)}{(x-1)^4}$.

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

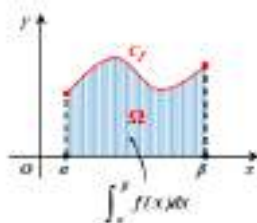
Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$.

Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ είναι :

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x)| dx$$

Πιο αναλυτικά :

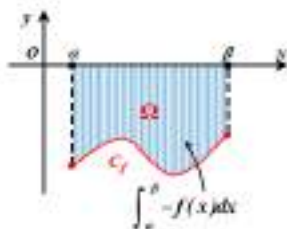
- ♦ Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$,



τότε :

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$$

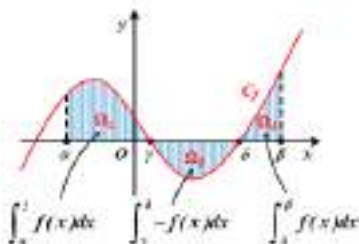
- ♦ Αν $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$,



τότε :

$$E(\Omega) = \int_a^\beta -f(x) dx$$

- ♦ Αν η $f(x)$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, τότε αν για παράδειγμα η C_f είναι όπως στο παρακάτω σχήμα,



θα ισχύει :

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\delta -f(x) dx + \int_\delta^\beta f(x) dx$$

όπου γ, δ είναι οι ρίζες της f στο $[a, \beta]$.

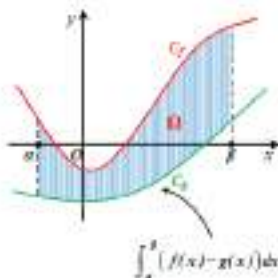
Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$.

Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ είναι :

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

Πιο αναλυτικά :

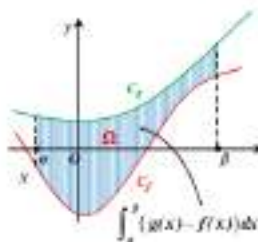
- ♦ Αν $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$,



τότε :

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

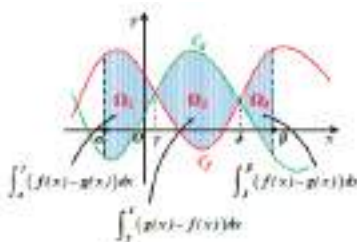
- ♦ Αν $f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε :



τότε :

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (g(x) - f(x)) dx$$

- ♦ Αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, τότε αν για παράδειγμα οι C_f, C_g είναι όπως στο παρακάτω σχήμα,



θα ισχύει : $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) =$

$$= \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x)) dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

όπου τα γ, δ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[a, \beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , $x'x$ & $x=a$, $x=b$.

395. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x+2$, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών με εξισώσεις $x=0$ και $x=3$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως πολωνυμική.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E = \int_0^3 |f(x)| dx$

- ♦ $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.
- ♦ Πίνακας προσήμου της f :

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$			+	-	+	

Επομένως :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 -f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^3 \\
 &= \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) - 0 \right] - \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \right] + \left[\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) \right] \\
 &= \frac{11}{6} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Το εμβαδόν E που περικλείεται από τη C_f (f συνεχής), τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$ ($a < b$) είναι : $\int_a^b |f(x)| dx$

Οπότε :

- Βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) της $f(x)$.
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f .

Αν για παράδειγμα είναι :

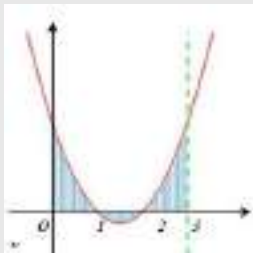
x	a	ρ_1	ρ_2	b
$f(x)$		+	-	+

τότε :

$$E = \int_a^{\rho_1} f(x)dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} -f(x)dx + \int_{\rho_2}^{\beta} f(x)dx$$

Παρατήρηση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο παρακάτω σχήμα



Το σχήμα **δεν** είναι απαραίτητο για τη λύση της άσκησης.

396. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ 3 - \ln x, & x > 1 \end{cases} \text{ και των ευθειών } y=0, x=-3, x=e.$$

Λύση

Η ευθεία $y = 0$ είναι ο άξονας $x'x$.

Άρα ζητάμε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -3$ και $x = e$. Είναι :

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική και λογαριθμική αντίστοιχα.
- Στο $x_0 = 1$ είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2) = 4 - 1 = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - \ln x) = 3 - \ln 1 = 3$$

$$f(1) = 4 - 1 = 3$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ και επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και συνεπώς

είναι συνεχής (**άρα και ολοκληρώσιμη**) στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[-3, e]$.

Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$ είναι και **ολοκληρώσιμη** στο $[a, \beta]$. Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_{-3}^e |f(x)|dx = \int_{-3}^1 |f(x)|dx + \int_1^e |f(x)|dx = \int_{-3}^1 |4 - x^2|dx + \int_1^e |3 - \ln x|dx$$

Πρόσημο του $4 - x^2$

x	$-\infty$	-3	-2	1	2	$+\infty$	
$4-x^2$	-	-	0	+	+	0	-

Πρόσημο του $3 - \ln x$

x	0	1	e	e^7	$+\infty$
$3 - \ln x$		+	+	+	-

Οπότε :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-3}^{-2} -(4-x^2)dx + \int_{-2}^1 (4-x^2)dx + \int_1^e (3-\ln x)dx = \\
 &= \left[-4x + \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{-2} + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 + \int_1^e 3dx - \int_1^e \ln x dx = \\
 &= \left(-4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) - \left(-4 \cdot (-3) + \frac{(-3)^3}{3} \right) + 4 - \frac{1}{3} - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) + \\
 &+ [3x]_1^e - \int_1^e (x)' \ln x dx = \\
 &= 8 - \frac{8}{3} - 12 + \frac{27}{3} + 4 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 3e - 3 - [x \ln x]_1^e + \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= 14 - \frac{17}{3} + 3e - (e - 0) + [x]_1^e = \frac{25}{3} + 3e - e + e - 1 = \frac{22}{3} + 3e \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

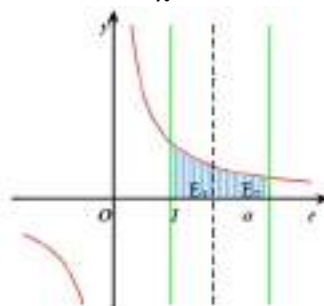
397. Να βρείτε την κατακόρυφη ευθεία $x = a$ η οποία διχοτομεί την επιφάνεια που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Λύση

α' τρόπος

Για κάθε $x \in [1, e]$ είναι $f(x) > 0$.

Προφανώς για τη ζητούμενη ευθεία $x = a$ ισχύει $1 < a < e$.



Η ευθεία $x = a$ διχοτομεί τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του παραπάνω σχήματος αν και μόνο αν :

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_1^a f(x)dx = \int_a^e f(x)dx \Leftrightarrow \int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_a^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow [\ln x]_1^a = [\ln x]_a^e$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha - \ln 1 = \ln e - \ln \alpha \Leftrightarrow 2 \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{e}$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\varepsilon : x = \sqrt{e}$.

β' τρόπος

Επειδή $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, e]$ το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$ είναι :

$$E = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

Η ευθεία $x = \alpha$ διχοτομεί το E αν και μόνο αν :

$$E_1 = \frac{E}{2} \Leftrightarrow \int_1^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^{\alpha} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow [\ln x]_1^{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha - \ln 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{e}$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\varepsilon : x = \sqrt{e}$.

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και $x'x$.

398. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \end{aligned}$$

◆ Πίνακας προσήμου της f :

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
x^2-1	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

Επομένως :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 -f(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \dots = \frac{37}{12} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

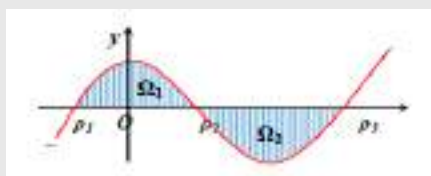
Για να βρούμε το εμβαδόν E του επίπεδου χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της (συνεχούς) συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$:

- Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Αν για παράδειγμα $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ οι ρίζες της, τότε : $E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x)| dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} |f(x)| dx$

- Βρίσκουμε το πρόσημο της f στα διαστήματα που δημιουργούν οι ρίζες αυτές. Έστω ότι είναι :

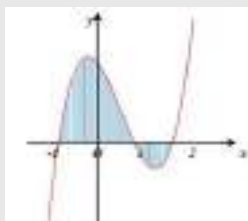
x	ρ_1	ρ_2	ρ_3
$f(x)$	0	+	0



- Άρα $E = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x) dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} -f(x) dx$
- Άρα $E = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x) dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} -f(x) dx$

Παρατήρηση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο παρακάτω σχήμα



Το σχήμα δεν είναι απαραίτητο για τη λύση της άσκησης.

399. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 2, & x \leq 0 \\ 2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$ και τον άξονα

x' .

Λύση

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική.
- Στο $x_1 = 0$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - 2x) = 2 \\ f(0) &= -0^2 - 0 + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$.

- Στο $x_2 = 1$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - 2x) = 2 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x + 3) = 1 - 4 + 3 = 0 \\ f(1) &= 1 - 4 + 3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_2 = 1$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$.

Τα σημεία τομής (συγκεκριμένα οι τετμημένες τους) της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Έχουμε :

♦ Αν $x \in (-\infty, 0]$ τότε : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 1$ (απορ.)

♦ Αν $x \in (0, 1)$ τότε : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (απορ.)

♦ Αν $x \in [1, +\infty)$ τότε : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx \\ &= \int_{-2}^0 |-x^2 - x + 2| dx + \int_0^1 |2 - 2x| dx + \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx \end{aligned}$$

Πίνακες προσήμων

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$-x^2 - x + 2$		-	0	+	
			-	0	-

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$2 - 2x$		+		
			+	0
				-

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	-
			-	0
				+

Επομένως

$$E = \int_{-2}^0 (-x^2 - x + 2) dx + \int_0^1 (2 - 2x) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^0 + \left[2x - x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\
&= 0 - \left(-\frac{-8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) + (2 - 1) - 0 + (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \\
&= -\frac{8}{3} + 2 + 4 + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 8 - \frac{7}{3} = \frac{17}{3} \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , $x'x$ & $x = a$.

400. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$. Άρα το ένα άκρο ολοκλήρωσης είναι το 0. Για τα άλλα άκρα βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

$$\text{Είναι : } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι : } E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{e^x} \right| dx = \int_0^1 \frac{|x-1|}{e^x} dx$$

Αλλά για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $x-1 \leq 0$ και συνεπώς :

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^1 \frac{1-x+1}{e^x} dx = \int_0^1 (-x+1)e^{-x} dx = \int_0^1 (-x+1)(-e^{-x})' dx \\
&= \left[(-x+1)(-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (-x+1)'(-e^{-x}) dx = \left[\frac{x-1}{e^x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \\
&= 0 - \frac{-1}{e^0} - \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 1 + \left[\frac{1}{e^x} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Όταν ζητάμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f , τον $x'x$ και μια κατακόρυφη ευθεία $x = a$, τότε ένα άκρο ολοκλήρωσης είναι το a και τα άλλα τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$, δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

401. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

Λύση

i. Για να είναι η f ολοκληρώσιμη συνάρτηση αρκεί να είναι συνεχής. Έχουμε :

- Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο $(1, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως ρητή.
- Στο $x=1$ είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1, \quad f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο 1.

Επομένως η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$ και συνεπώς είναι **ολοκληρώσιμη**.

ii. Ζητάμε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f , τον $x'x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=2$. Το 2 είναι το ένα άκρο ολοκλήρωσης.

Το άλλο θα είναι το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον $x'x$. Έχουμε :

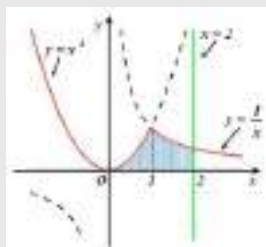
- Αν $x < 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (δεκτή)
- Αν $x \geq 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ (αδύνατη)

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\ &= \int_0^1 |x^2| dx + \int_1^2 \left| \frac{1}{x} \right| dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [\ln x]_1^2 = \frac{1}{3} + \ln 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Όλα γίνονται πιο εύκολα αν κάνουμε τη γραφική παράσταση της f η οποία είναι:



Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g & $x=a$, $x=b$.

402. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 3$

Λύση

Οι f , g είναι συνεχείς (πολυωνυμικές) στο $[-1, 3]$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E(\Omega) = \int_{-1}^3 |f(x) - g(x)| dx$

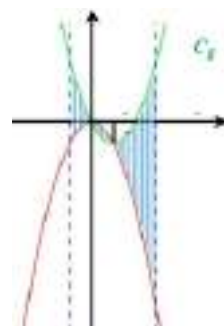
Έχουμε :

- ♦ $f(x) - g(x) = -x^2 - (x^2 - 2x) = -x^2 - x^2 + 2x = -2x^2 + 2x$
- ♦ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x = 0$
 $\Leftrightarrow -2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$
- ♦ Πίνακας προσήμου της $f(x) - g(x)$:

x	-1	0	1	3	
$f(x)-g(x)$	-	0	+	0	-

Επομένως :

$$\begin{aligned}
 E(\Omega) &= \int_{-1}^0 (g(x) - f(x))dx + \int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \int_1^3 (g(x) - f(x))dx \\
 &= \int_{-1}^0 (2x^2 - 2x)dx + \int_0^1 (-2x^2 + 2x)dx + \int_1^3 (2x^2 - 2x)dx \\
 &= \left[\frac{2x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - x^2 \right]_1^3 \\
 &= 0 - \left(-\frac{2}{3} - 1 \right) + \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) - 0 + \left(\frac{54}{3} - 9 \right) - \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \\
 &= \frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{3} + 1 + 18 - 9 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{34}{3} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$



Μεθοδολογία

Το εμβαδόν E που περικλείεται από C_f , C_g (f , g συνεχείς) και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) είναι :

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

Οπότε :

- Θεωρούμε τη διαφορά $\Delta(x) = f(x) - g(x)$.
- Βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) της $\Delta(x)$ (ή ισοδύναμα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$).
- Βρίσκουμε το πρόσημο της $\Delta(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν για παράδειγμα είναι :

x	α	ρ_1	ρ_2	β	
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	+

$$\text{τότε : } E = \int_{\alpha}^{\rho_1} (f(x) - g(x))dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (-f(x) + g(x))dx + \int_{\rho_2}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$$

Παρατήρηση :

Όταν ζητείται το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f , C_g και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$ μας ενδιαφέρει μόνο :

- Η συνέχεια των f , g
- Το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ στο $[a, \beta]$ και **όχι** το πρόσημο καθεμιάς των f , g στο $[a, \beta]$.

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g .

403. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - x^2$

Λύση

Οι f , g είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές) στο $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \diamond f(x) = g(x) &\Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E(\Omega) = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 |2x^2 - 4x| dx$

♦ Πίνακας προσήμου της $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	+

Επομένως :

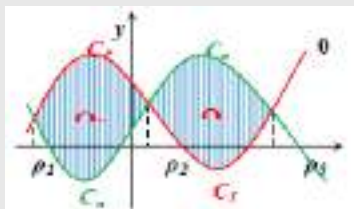
$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 - 0 \\ &= \frac{8}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το εμβαδόν E του επίπεδου χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των (συνεχών) συναρτήσεων f και g :

- Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ οι ρίζες της.
- Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ στα διαστήματα που δημιουργούν οι ρίζες αυτές.
- Έστω :

x	ρ_1	ρ_2	ρ_3		
$f(x) - g(x)$	0	+	0	-	0

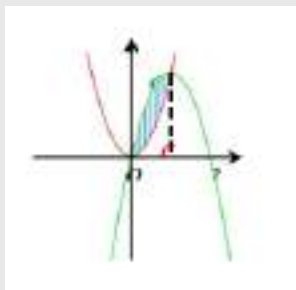


Οπότε :

$$E = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} (g(x) - f(x)) dx$$

Παρατήρηση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του παρακάτω σχήματος (το οποίο πάντως **δεν** είναι απαραίτητο για τη λύση της άσκησης).



Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g & $x = a$.

404. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x} - 2$ και $g(x) = x^2 - e^x$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f , C_g και της ευθείας $x = 1$.

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = e^{-x} - 2 - x^2 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε :

$$h'(x) = -e^{-x} - 2x + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h''(x) = e^{-x} - 2 + e^x = \frac{1}{e^x} - 2 + e^x = \frac{1 - 2e^x + e^{2x}}{e^x} = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Επειδή η h' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η h' θα είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $h'(0) = 0$, οπότε :

• Αν $x < 0$ $\stackrel{h' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h'(x) < h'(0) \Leftrightarrow h'(x) < 0$ άρα η h είναι γν. φθίν. στο $(-\infty, 0]$.

• Αν $x > 0$ $\stackrel{h' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ άρα η h είναι γν. αύξ. στο $[0, +\infty)$.

Επομένως :

- Αν $x < 0$ $\overset{\text{h γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Αν $x > 0$ $\overset{\text{h γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Αν $x = 0$ τότε $h(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = g(0)$.

Άρα $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)

- ii. Λόγω α) ερωτήματος οι C_f και C_g τέμνονται στο (μοναδικό) σημείο με τετμημένη $x = 0$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (e^{-x} - 2 - x^2 + e^x) dx \\ &= [-e^{-x}]_0^1 - 2[x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [e^x]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 - 2 - \frac{1}{3} + e - 1 = -\frac{1}{e} + e - \frac{7}{3} \\ &= \frac{3e^2 - 7e - 3}{3e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Όταν ζητάμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων και μια κατακόρυφη ευθεία $x = a$, τότε το a είναι το ένα άκρο ολοκλήρωσης και το άλλο θα είναι η τετμημένη του σημείου τομής των C_f και C_g , δηλαδή η λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

Παρατήρηση :

Τα παραπάνω έχουν ιδιαίτερη σημασία αν δεν είναι εύκολο να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και εφαπτομένες της

405. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

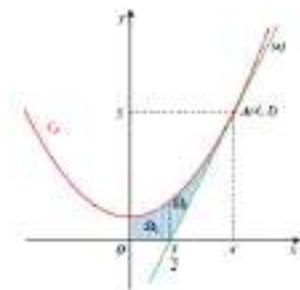
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(4, f(4))$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο A , τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.

Λύση

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{2}x$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(4, f(4))$ έχει εξίσωση :
 $\varepsilon: y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - 5 = 2(x - 4) \Leftrightarrow y = 2x - 3$

- ii. Κάνουμε τη γραφική παράσταση της f που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω.



Η εφαπτομένη $\varepsilon: y = 2x - 3$ της C_f στο $A(4, 5)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Για τον υπολογισμό του εμβαδού που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της στο A και τους άξονες $x'x$ και $y'y$, έχουμε :

α' τρόπος

Από το B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον $y'y$, οπότε το χωρίο του οποίου το εμβαδόν θέλουμε να υπολογίσουμε χωρίστηκε σε δύο χωρία Ω_1 και Ω_2 . Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 [f(x) - (2x - 3)] dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - 2x + 3\right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} + [x]_0^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{3}{2}}^4 - [x^2]_{\frac{3}{2}}^4 + 4[x]_{\frac{3}{2}}^4 \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{27}{8} + \frac{3}{2} + \frac{1}{12} \left(64 - \frac{27}{8}\right) - \left(16 - \frac{9}{4}\right) + 4\left(4 - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{9}{32} + \frac{3}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{485}{8} - \frac{55}{4} + 10 = \frac{37}{12} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

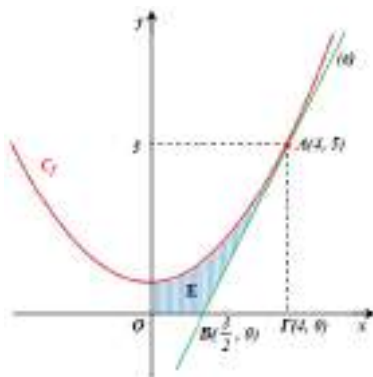
Εδώ δε βρήκαμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - y$ για τον υπολογισμό του $E(\Omega_2)$ γιατί βοηθηθήκαμε από το σχήμα. Όμως θα μπορούσαμε να πούμε, αν δεν κάναμε σχήμα, ότι είναι

$f(x) \geq y$, γιατί η f έχει $f''(x) = \frac{1}{2} > 0$, οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω που

σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία της εφαπτομένης.

β' τρόπος

Το ζητούμενο εμβαδόν E προκύπτει αν από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ (ο $y'y$) και $x=4$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Οπότε :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^4 f(x)dx - (AB\Gamma) = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx - \frac{1}{2}(B\Gamma)(A\Gamma) \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 + [x]_0^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{3} + 4 - \frac{25}{4} = \frac{64}{12} + \frac{48}{12} - \frac{75}{12} = \frac{37}{12} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

Εμβαδόν από γραφικές παραστάσεις τριών τουλάχιστον συναρτήσεων

406. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y=-1$ και $y=1$.

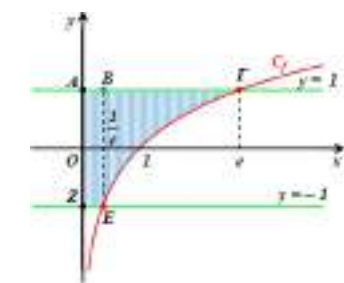
Λύση

Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία οι ευθείες $y=1$ και $y=-1$ τέμνουν την $y=\ln x$, λύνοντας τα συστήματα :

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα $\Gamma(e, 1)$

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} = \frac{1}{e} \\ y = -1 \end{cases}$$



Άρα $E(\frac{1}{e}, -1)$

α' τρόπος

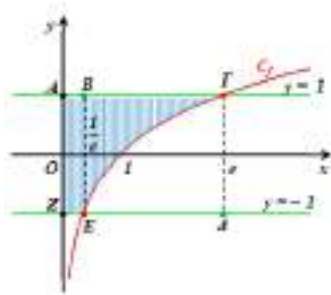
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το άθροισμα του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $ABEZ$ και του χωρίου που περικλείεται από τις συναρτήσεις

$y = 1$, $y = \ln x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{1}{e}$. Οπότε :

$$\begin{aligned} E &= (ZE)(AZ) + \int_{\frac{1}{e}}^e (1 - \ln x) dx = \frac{1}{e} \cdot 2 + \int_{\frac{1}{e}}^e dx - \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx = \frac{2}{e} + [x]_{\frac{1}{e}}^e - [x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^e \\ &= \frac{2}{e} + \left(e - \frac{1}{e}\right) - \left[(e \ln e - e) - \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right)\right] = \frac{2}{e} + e - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \ln e^{-1} - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

β' τρόπος

Το ζητούμενο εμβαδόν μπορεί να βρεθεί από τη διαφορά του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΓΔΖ μείον το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = \ln x$, $y = -1$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = e$.



Οπότε :

$$\begin{aligned} E &= (ΑΓ)(ΑΖ) - \int_{\frac{1}{e}}^e [\ln x - (-1)] dx \\ &= e \cdot 2 - \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^e dx = 2e - [x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^e - [x]_{\frac{1}{e}}^e \\ &= 2e - \left[(e \ln e - e) - \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right)\right] - \left(e - \frac{1}{e}\right) = 2e + \frac{1}{e} \ln e^{-1} - \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Εμβαδόν από γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης.

407. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \eta \mu x$ με $x \in [0, \pi]$.

- Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} της οποίας το πεδίο ορισμού είναι επίσης το $[0, \pi]$.
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1} και των ευθειών $x = 0$ και $x = \pi$ είναι $4\tau.μ$.

Λύση

i. Είναι $f'(x) = 1 + \sigma \nu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$
και επειδή η f είναι συνεχής στο $A = [0, \pi]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$.

- $f(0) = 0$

- $f(\pi) = \pi$

Άρα $f(A) = [0, \pi]$

- Η f ως γνησίως αύξουσα είναι 1-1 άρα ορίζεται η f^{-1} .

- $D_{f^{-1}} = f(A) = [0, \pi]$

ii. Είναι : $f(x) = x \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \overset{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x=0 \quad \text{ή} \quad x=\pi$

Άρα η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ στα σημεία $O(0, 0)$ και $M(\pi, \pi)$.

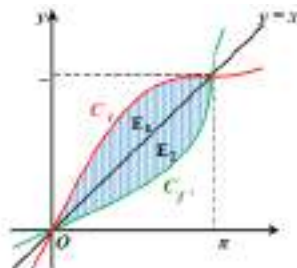
Επίσης $f(x) - x = \eta\mu x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ που σημαίνει ότι $f(x) \geq x$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ στο $[0, \pi]$.

α' τρόπος

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Οπότε $E_1 = E_2$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = 2E_1 = 2 \int_0^\pi (f(x) - x) dx \\ &= 2 \int_0^\pi \eta\mu x dx = 2[-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi \\ &= -2[\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0] = -2(-1 - 1) = 4 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$



β' τρόπος

Είναι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, άρα $f^{-1}(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Οπότε $f(x) \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ και επομένως :

$$E = \int_0^\pi (f(x) - f^{-1}(x)) dx = \int_0^\pi f(x) dx - \int_0^\pi f^{-1}(x) dx$$

Για το $\int_0^\pi f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $x = f(u) \Leftrightarrow u = f^{-1}(x)$, οπότε $dx = f'(u) du$.

Για $x = 0$: $0 = f(u) \Leftrightarrow f(0) = f(u) \quad \overset{f: "1-1"}{\Leftrightarrow} u = 0$

Για $x = \pi$: $\pi = f(u) \Leftrightarrow f(\pi) = f(u) \quad \overset{f: "1-1"}{\Leftrightarrow} u = \pi$

Επομένως $\int_0^\pi f^{-1}(x) dx = \int_0^\pi f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_0^\pi u f'(u) du = \int_0^\pi x f'(x) dx$.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\pi f(x) dx - \int_0^\pi x f'(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx - [x f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi (x)' f(x) dx \\ &= \int_0^\pi f(x) dx - [\pi f(\pi) - 0 f(0)] + \int_0^\pi f(x) dx = 2 \int_0^\pi f(x) dx - \pi^2 \\ &= 2 \int_0^\pi (x + \eta\mu x) dx - \pi^2 = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x \right]_0^\pi - \pi^2 \\ &= 2 \left[\left(\frac{\pi^2}{2} - \sigma\upsilon\nu\pi \right) - (0 - \sigma\upsilon\nu 0) \right] - \pi^2 = 2 \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 \right) - \pi^2 = \pi^2 + 4 - \pi^2 = 4 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Ασκήσεις

Εμβαδόν που περικλείεται από C , x' & $x = \alpha$, $x = \beta$.

1989. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x' , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :

i. $f(x) = x^2 - 6x + 8$ και τις ευθείες $x=1$, $x=5$.

ii. $f(x) = \ln x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$, $x=e$.

iii. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ και τις ευθείες $x=3$, $x=5$.

iv. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ και τις ευθείες $x=1$, $x=2$.

v. $f(x) = x \ln x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x=e$.

1990. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x, \text{ όπου } m \in \mathbb{R}, m > 0.$$

i. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν $m=10$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(2004)

1991. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , \text{ αν } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2 & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=2$.

1992. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^x - e & , \text{ αν } x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x} & , \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=e$.

(1991)

1993. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} ax^2 & , \text{ } x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3} & , \text{ } x > 3 \end{cases}$.

i. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -\frac{1}{9}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

(2001)

1994. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

- i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$.

(1999)

1995. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$, $x > 0$.

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$, $x=\lambda+1$, όπου $\lambda > 0$, είναι $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$.
- ii. Να προσδιορίσετε την τιμή λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

(2001)

1996. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 9x^2 \ln x$, $x > 0$.

- i. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\lambda \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $E(\lambda) = 17$.

1997. Να βρείτε την κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon : x=a$ η οποία διχοτομεί την επιφάνεια που

ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{4}{x^2}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

1998. Αν A το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$, τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του a ώστε η ευθεία $x=a$ να χωρίζει το A σε δύο ισομβαδικά χωρία.

1999. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ για την

οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = \frac{2017}{e}$.

- i. Να βρείτε τον τύπο της f .
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

2000. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{x^4 + (1-x)^4}$, $x \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

2001. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1$, $x > 0$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3^{5-1}$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

2002. α. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{x-1} - x$, τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$, $\lambda > 0$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και x' .

2003. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα x' όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4$

ii. $f(x) = x^3 - x$

iii. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

iv. $f(x) = xe^x - ex$

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , x' & $x = a$.

2004. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x' , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :

i. $f(x) = \ln x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$.

ii. $f(x) = x^3 + 1$ και τον άξονα $y'y$.

2005. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)e^x + \ln(x+1) - 1$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και την ευθεία $x=1$.

2006. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x' .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακρότατου της f .

(2001)

2007. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την h ως προς την **κυρτότητα**.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε την **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την **πλάγια ασύμπτωτη** της στο $-\infty$.

iv. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα x' και την ευθεία $x=1$.

(2014)

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g και $x = \beta$.

- 2008.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x^2$, $g(x) = 3x^2 - 6x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 3$.
- 2009.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, $y = x$.
- 2010.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta \mu x$, $g(x) = -\sigma \nu x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = \pi$.
- 2011.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.
- Να βρείτε την ασύμπτωτη ε της C_f στο $+\infty$.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ε και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$.
- 2012. i.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$.
- ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x (x^2 + 2)$, $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.
- 2013. α.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)e^x + 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να βρείτε το πρόσημο της f .
- β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = xe^x + 1$, $h(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2e^x)$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.
- 2014.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = -\ln x + x + 2$, $g(x) = -e^x + x$ και των ευθειών $x = 1$, $x = e$.

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και C_g .

- 2015.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
- $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2$.
 - $f(x) = (x - 4)^2$ και $g(x) = -x(x - 4)$.
- 2016.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας ε , όταν :
- $f(x) = x^2$ και $\varepsilon : y = 1$.
 - $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ και $\varepsilon : 2x - y - 1 = 0$.
 - $f(x) = \frac{2}{x}$ και $\varepsilon : y = -x + 3$.
- 2017.** Δίνεται η συνάρτηση f και η ευθεία (ε) με $f(x) = \sqrt{x + a}$ και $\varepsilon : y = x + a, a > 0$.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f και την ευθεία (ε) είναι ανεξάρτητο του a .

2018. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις σχέσεις $f''(x) - g''(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση $G(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

(1997)

2019. Για μια συνάρτηση f ισχύει $f''(x) = 4e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$.

α. Να βρείτε τον τύπο της f .

β. Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^{2x} - 2x = 2x^2 + 1$ έχει μοναδική ρίζα.

δ. Αποδείξτε ότι η ευθεία $y = -2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ και υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του διαγράμματος της f , της ασύμπτωτης της f στο $-\infty$, της $x = -1$ και του y' .

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f , C_g & $x = a$.

2020. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$ και την ευθεία $x = 0$.

(1996)

2021. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2 - 2x$, $g(x) = \ln x$ και την ευθεία $x = 2$.

2022. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \ln x$ και την ευθεία $x = 2$.

2023. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δύο φορές

παραγωγίσιμες με $f''(x) = g''(x) - \frac{1}{x^2}$, για κάθε $x > 0$. Αν οι εφαπτομένες στο

κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι παράλληλες, να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την C_g και την ευθεία $x = e$.

Εμβαδόν που περικλείεται από C_f και εφαπτομένες της.

2024. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\sqrt{x}$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, 4)$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

2025. Από το σημείο $A(2, -3)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 προς την

παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$. Να βρείτε :

α. οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 .

β. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της παραβολής και των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 .

2026. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση

της $f(x)=e^x$, τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.

2027. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=2\ln x$, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.

2028. Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x$ στο σημείο $A(1,e)$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία ε , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-1$.

2029. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,0)$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και $x=e$.

2030. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2}{2}-x\ln x$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(e,f(e))$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=1$.

2031. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\geq 0$. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της f ώστε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της C_f στο M και τον άξονα $x'x$ να είναι $E=\frac{2}{3}$ τ.μ.

2032. Δίνεται ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=x^2-7x+\alpha$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα διαφορετικά σημεία M, N . Αν οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία M, N τέμνονται κάθετα, τότε να βρείτε :

i. Ο αριθμός α .

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και από τις εφαπτομένες της C_f στα σημεία M, N .

2033. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) = 1 + \frac{x}{e} \int_1^e f(x) dx, \text{ για κάθε } x > 0$$

a. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, $x > 0$.

β. Έστω $\alpha \in (0, +\infty)$ και το σημείο $A\left(\frac{1}{\alpha}, f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση ε της εφαπτομένης της C_f στο A .

ii. Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ε και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$, να βρείτε το α ώστε το $E(\alpha)$ να είναι ελάχιστο και το ελάχιστο αυτό εμβαδόν.

2034. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$ για κάθε $x > 0$.

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα **A2.** και **A3.** δίνεται ότι $f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.
- β.** Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(2014)

2035. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax - 1$ όπου $a > 1$.

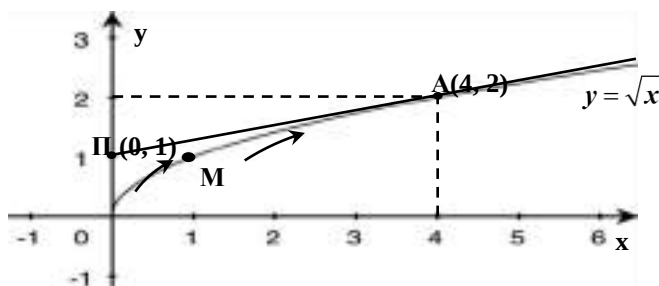
- α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(0, f(0))$.
- β.** Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.
- γ.** Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x=a > 1$.

i. Να αποδείξετε ότι $E(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

2036. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0, 1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$.

F1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο : $x(t) = 16t$

F2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει

οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4, 2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A .

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, κατά την οποία η

απόσταση $d = (ΠΜ)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy

(2011)

Εμβαδόν από γραφικές παραστάσεις τριών τουλάχιστον συναρτήσεων

2037. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \ln x$ του $y'y$ και των ευθειών $\varepsilon_1 : y=1$ και $\varepsilon_2 : y=2$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ και την ευθεία $\varepsilon : y=2$.

iii. $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{e}{x}$ και την ευθεία $\varepsilon : y = 2$.

iv. $f(x) = \ln x$, $g(x) = -\ln x$ και $h(x) = 1$.

2038. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(0, f(0))$ της γραφικής παράστασης της f .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$ και $y=1$.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$.

(2008)

2039. Το χωρίο Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^3$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=8$, χωρίζεται από την ευθεία $y=\alpha^3$, $\alpha \in (0, 2)$

σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να προσδιορίσετε τον α .

Εμβαδόν από γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης

2040. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 – 1».
- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
- γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

(2006)

2041. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

2042. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-1+\ln x$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=e$.

2043. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$, $x \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

2044. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

(2003)

2045. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(1)=1, f(2)=0, \int_1^2 f(x) dx = 1$$

Αν είναι $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=x$.

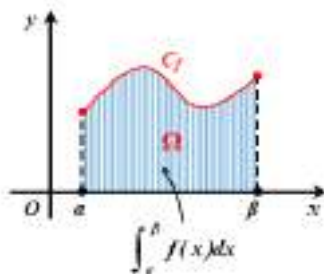
2046. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο τέτοια ώστε να ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.
- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την $C_{f^{-1}}$.

Ολοκλήρωμα και διάταξη

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε το $\int_a^\beta f(x)dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = \beta$. Επομένως :

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε: $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$



Παρατηρήσεις

1. Αν $f(x) \geq 0$, τότε: $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$ μόνο αν $a \leq \beta$
2. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή αν $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Παράδειγμα

Είναι $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά $\int_1^0 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{1}{3} < 0$

Είναι $\int_0^2 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^2 = \frac{2}{3} \geq 0$, χωρίς να ισχύει $x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Θεώρημα

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν

- ♦ $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και
- ♦ η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(x)dx > 0.$$

Συνέπεια :

Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε: $\int_a^\beta f(x)dx > 0$

Αν για τις συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,

να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$.

Παρατηρήσεις

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μέλη ανισότητες συναρτήσεων αρκεί η σχέση μεταξύ των ορίων ολοκλήρωσης να είναι καθορισμένη. Δηλαδή αν f, g συνεχείς στο διάστημα Δ και $\kappa, \lambda \in \Delta$, τότε ισχύουν :

♦ Αν $a < \beta$ τότε $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$

♦ Αν $a > \beta$ τότε $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$

Εννοείται ότι δεν ισχύουν αντιστρόφως οι παραπάνω συνεπαγωγές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ολοκλήρωση ανισοτήτων

408. Α. Να αποδείξετε ότι

$$\int_a^\beta x^e dx \leq \int_a^\beta e^x dx, \text{ όπου } 0 < a < \beta.$$

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3+2\sin x} dx \leq \frac{5\pi}{6}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $2e \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{2e^3}{3}$.

Δ. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$, να αποδείξετε ότι

$$\left| \int_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

Λύση

Α. Αρκεί να δείξουμε ότι : $x^e \leq e^x$, για κάθε $x \in [a, \beta]$

$$\text{Αλλά } x^e \leq e^x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow e \ln x \leq x \ln e \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow x - e \ln x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - e \ln x$, $x > 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < e$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Άρα το $f(e) = e - e \ln e = 0$ είναι το ελάχιστο της f και επομένως :

$$f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow x - e \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e \ln x \Leftrightarrow x \geq \ln x^e \Leftrightarrow e^x \geq x^e \text{ για κάθε } x > 0$$

Οπότε αφού $0 < \alpha < \beta$, είναι $x^e \leq e^x$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και συνεπώς είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^e dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} e^x dx.$$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$, όπου $\alpha < \beta$ αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Β. α' τρόπος

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \sin 0 \geq \sin x \geq \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \geq \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 2 \sin x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 + 2 \geq 3 + 2 \sin x \geq 3 + 0 \Leftrightarrow 5 \geq 3 + 2 \sin x \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{3 + 2 \sin x} \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{5} \leq \frac{5}{3 + 2 \sin x} \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{5}{3 + 2 \sin x} \leq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3 + 2 \sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3} dx \Leftrightarrow [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3 + 2 \sin x} dx \leq \frac{5}{3} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3 + 2 \sin x} dx \leq \frac{5}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3 + 2 \sin x} dx \leq \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{3 + 2 \sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ Είναι :

$$f'(x) = \frac{-5(3 + 2 \sin x)'}{(3 + 2 \sin x)^2} = \frac{10 \eta \mu x}{(3 + 2 \sin x)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα f γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{3 + 2 \sin 0} \leq \frac{5}{3 + 2 \sin x} \leq \frac{5}{3 + 2 \sin \frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{5}{3 + 2 \sin x} \leq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Οπότε όπως στον **α' τρόπο** :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3+2\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3} dx \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{3+2\sin x} dx \leq \frac{5\pi}{6}$$

Μεθοδολογία

Για την απόδειξη ανισοτήτων της μορφής $A \leq \int_a^b f(x) dx \leq B$, όπου $a < b$ προσπαθούμε να βρούμε μια ανισότητα της μορφής $m \leq f(x) \leq M$ και να την ολοκληρώσουμε. Προς τούτο, έχουμε :

α' τρόπος (συνθετική μέθοδος)

- Θέτουμε το x στο διάστημα ολοκλήρωσης $a \leq x \leq b$.

Με επιτρεπτές πράξεις (προσθέσεις, πολ/σμούς, υψώσεις, ρίζες και αντιστροφές μελών) μορφοποιούμε τους όρους της $a \leq x \leq b$ ώστε να προκύψει η $m \leq f(x) \leq M$.

β' τρόπος (με χρήση ολικών ακροτάτων)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ και βρίσκουμε το μέγιστο M και το ελάχιστό της m τα οποία υπάρχουν σίγουρα εφόσον η f είναι συνεχής στο **κλειστό** διάστημα $[a, b]$. Οπότε $m \leq f(x) \leq M$.

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in [1, 3]$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$$

x	0	1	3
f'(x)	-	0	+
f(x)			

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ άρα

$$1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow e \leq \frac{e^x}{x} \leq \frac{e^3}{3}$$

Άρα:

$$\int_1^3 e dx \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq \int_1^3 \frac{e^3}{3} dx \Leftrightarrow e[x]_1^3 \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e^3}{3}[x]_1^3$$

$$\Leftrightarrow e(3-1) \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e^3}{3}(3-1) \Leftrightarrow 2e \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{2e^3}{3}$$

Παρατηρήσεις

Αν στην προσπάθειά μας να συνθέσουμε με τον α' τρόπο την ανισότητα $m \leq f(x) \leq M$, προσθέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη ανισότητες, τότε είναι πιθανό να **μην** καταλήξουμε στο ζητούμενο αφού αυτές οι πράξεις δεν ισχύουν αντιστρόφως.

Για παράδειγμα, στο Γ της εφαρμογής η συνθετική μέθοδος **δεν** οδηγεί στο ζητούμενο αφού είναι

$$1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow e \leq e^x \leq e^3 \quad (1)$$

$$1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε : $\frac{e}{3} \leq \frac{e^x}{x} \leq e^3$

$$\text{Οπότε : } \int_1^3 \frac{e}{3} dx \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq \int_1^3 e^3 dx \Leftrightarrow \frac{2e}{3} \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \leq 2e^3$$

Επομένως ο β' τρόπος είναι «ισχυρότερος», έχει όμως συνήθως περισσότερες πράξεις.

Δ. Αφού η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, θα είναι και η $|f|$.

Για κάθε $x \in [a, \beta]$, είναι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\text{Άρα } -\int_a^\beta |f(x)| dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta |f(x)| dx$$

$$\text{Οπότε } \left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx.$$

409. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 \eta \mu x + 2x \sigma \upsilon \nu x \text{ και } g(x) = 2\eta \mu x.$$

Αν $0 \leq a < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$.

Λύση

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται : $\int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx > 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 \eta \mu x + 2x \sigma \upsilon \nu x - 2\eta \mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι :

$$h'(x) = 2x \eta \mu x + x^2 \sigma \upsilon \nu x + 2 \sigma \upsilon \nu x + 2x(-\eta \mu x) - 2 \sigma \upsilon \nu x = x^2 \sigma \upsilon \nu x > 0, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Επομένως για } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow h(0) \leq h(x) \leq h\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

Άρα για κάθε $x \in [a, \beta] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι

♦ **$h(x) \geq 0$** και επειδή

♦ η h δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$ (αφού αν $h(x)=0$ για κάθε

$x \in [a, \beta] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε η h θα ήταν σταθερή στο $[a, \beta]$ που είναι άτοπο αφού

η h είναι γνησίως αύξουσα)

θα είναι :

$$\begin{aligned} \int_a^\beta h(x)dx > 0 &\Leftrightarrow \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx \end{aligned}$$

410. Έστω

$f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη τιμή 2 . Αν $\int_1^3 f(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3 f^2(x)dx \leq 4$ **ii.** $\int_1^3 xf(x)dx \leq 4$

Λύση

i. Για κάθε $x \in [1, 3]$, έχουμε $-1 \leq f(x) \leq 2$ οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - 2 \leq 0 \\ f(x) + 1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (f(x) - 2)(f(x) + 1) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) + 2 - f^2(x) \geq 0$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_1^3 (f(x) + 2 - f^2(x))dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 2dx - \int_1^3 f^2(x)dx \geq 0 \\ \Leftrightarrow 0 + 2[x]_1^3 - \int_1^3 f^2(x)dx &\geq 0 \Leftrightarrow 2(3-1) \geq \int_1^3 f^2(x)dx \Leftrightarrow \int_1^3 f^2(x)dx \leq 4 \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in [1, 3]$, έχουμε $-1 \leq f(x) \leq 2$ οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq 2 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) - 2 \leq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (f(x) - 2)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow xf(x) - f(x) - 2x + 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) + 2x - xf(x) - 2 \geq 0$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_1^3 (f(x) + 2x - xf(x) - 2)dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 2xdx - \int_1^3 xf(x)dx - \int_1^3 2dx \geq 0 \\ \Leftrightarrow 0 + [x^2]_1^3 - \int_1^3 xf(x)dx - 2[x]_1^3 &\geq 0 \Leftrightarrow 8 - \int_1^3 xf(x)dx - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^3 xf(x)dx \leq 4 \end{aligned}$$

Εύρεση άκρων ολοκλήρωσης

411. Έστω f μια συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ και :

$$\int_{\alpha}^{f(\alpha)} e^{-x^2} dx = \int_{\beta}^{f(\beta)} e^x \ln(e^x + 1) dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 1$.

Λύση

Είναι $e^{-x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε

- Αν $\alpha < f(\alpha)$, τότε $\int_{\alpha}^{f(\alpha)} e^{-x^2} dx > 0$ άτοπο.

- Αν $\alpha > f(\alpha)$, τότε :

$$\int_{f(\alpha)}^{\alpha} e^{-x^2} dx > 0 \Leftrightarrow -\int_{\alpha}^{f(\alpha)} e^{-x^2} dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{f(\alpha)} e^{-x^2} dx < 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα $f(\alpha) = \alpha$ **(1)**

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι : $e^x > 0 \Leftrightarrow e^x + 1 > 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) > 0 \Leftrightarrow e^x \ln(e^x + 1) > 0$

Οπότε, αν $\beta < f(\beta)$ ή $\beta > f(\beta)$ θα είναι :

$$\int_{\beta}^{f(\beta)} e^x \ln(e^x + 1) dx > 0 \quad \text{ή} \quad \int_{\beta}^{f(\beta)} e^x \ln(e^x + 1) dx < 0, \text{ άτοπο. Άρα } f(\beta) = \beta \text{ **(2)**}$$

Είναι :

- Η f συνεχής στο $[α, β]$ ως παραγωγίσιμη.
- Η f παραγωγίσιμη στο (α, β) .

Άρα από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} \stackrel{(2)}{=} 1$$

Παρατηρήσεις

Ως γνωστό $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$. Αλλά αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \\ \text{και} \\ f(x) > 0 \text{ για} \\ \text{κάθε } x \in [\alpha, \beta] \end{array} \right\} \text{ τότε } \alpha = \beta$$

Το παραπάνω για να το χρησιμοποιήσετε πρέπει πρώτα να το αποδείξετε.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ & $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

412.i. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ τέτοια ώστε να είναι

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta] \text{ και } \int_a^\beta f(x)dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ii. Έστω g μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε να

$$\text{είναι } g(x) \geq \sin x, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 1.$$

$$\text{Να αποδείξετε ότι } g(x) = \sin x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Λύση

i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$, δηλαδή ότι η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[a, \beta]$. Τότε επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε

$$x \in [a, \beta], \text{ θα ισχύει } \int_a^\beta f(x)dx > 0, \text{ άτοπο αφού } \int_a^\beta f(x)dx = 0.$$

Επομένως $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Ισχύει

Αν

$$\bullet f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta] \quad \text{και} \quad \bullet \int_a^\beta f(x)dx = 0$$

τότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση στο $[a, \beta]$, δηλαδή : $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
Το παραπάνω για να το χρησιμοποιήσετε πρέπει πρώτα να το αποδείξετε.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = g(x) - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, αφού από υπόθεση έχουμε $g(x) \geq \sin x$ για

κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Έχουμε :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - \sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$1 - [\eta \mu x]_0^{\pi/2} = 1 - \eta \mu \frac{\pi}{2} = 0$$

Επομένως για την f ισχύουν

$$\bullet \quad f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } \bullet \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0.$$

Οπότε σύμφωνα με το i. ερώτημα θα ισχύει :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = \sin x, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ο ρ ι α ο λ ο κ λ η ρ ω μ ά τ ω ν

413. i. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt.$$

ii. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Λύση

i Για $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt &= \int_1^x \ln t \left(\frac{-1}{t} \right)' dt = \left[\frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x (\ln t)' \cdot \frac{-1}{t} dt = -\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln 1}{1} - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot \frac{-1}{t} dt \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \left[\frac{1}{t} \right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\ln x}{x} \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \right] = -0 - 0 + 1 = 1.$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στο i. της εφαρμογής ισχύουν ό,τι ισχύει για τα ορισμένα ολοκληρώματα παρόλο που το ένα άκρο είναι μεταβλητή και όχι σταθερός αριθμός. Αλλά το αποτέλεσμα είναι συνάρτηση του x και όχι σταθερός αριθμός.

i. Για $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} x \leq t \leq x+1 &\Leftrightarrow x^2 \leq t^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow 1+x^2 \leq 1+t^2 \leq 1+(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} &\leq \sqrt{1+t^2} \leq \sqrt{1+(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $x < x+1$ θα είναι

$$\begin{aligned}
& \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} dt \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_x^{x+1} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} \int_x^{x+1} dt \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} [t]_x^{x+1} \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} [t]_x^{x+1} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (x+1-x) \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} (x+1-x) \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}
\end{aligned}$$

Είναι :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+2x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 0$.

Παρατηρήσεις

♦ Αν το ολοκλήρωμα στο ii. της εφαρμογής ήταν πιο απλό, θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε σαν ένα ορισμένο ολοκλήρωμα παρόλο που τα άκρα ολοκλήρωσης είναι μεταβλητά και όχι σταθεροί αριθμοί. Αλλά και πάλι το αποτέλεσμα θα ήταν συνάρτηση του x .

♦ Προσοχή!!

Όταν ολοκληρώσαμε την ανισότητα θεωρήσαμε ως μεταβλητή ολοκλήρωσης το t . Γι' αυτό άλλωστε οι παραστάσεις του x μπορούν να περάσουν εκτός των ολοκληρωμάτων.

414. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x}{x^x}, \quad x > 0.$$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt$.

Λύση

i. Είναι $f(x) = \frac{e^x}{x^x} = \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = e^{x - x \ln x}$. Οπότε :

$$f'(x) = e^{x-x\ln x} (x - x\ln x)' = e^{x-x\ln x} (1 - \ln x - 1) = -e^{x-x\ln x} \ln x. \text{ Έχουμε :}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε :

$$x \leq t \leq x+1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(t) \geq f(x+1) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^x} \geq \frac{e^t}{t^t} \geq \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}}$$

Επειδή $x < x+1$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} \frac{e^x}{x^x} dt &\geq \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}} dt \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^x} \int_x^{x+1} dt &\geq \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt \geq \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}} \int_x^{x+1} dt \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^x} \cdot [t]_x^{x+1} &\geq \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt \geq \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}} \cdot [t]_x^{x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^x} \cdot (x+1-x) &\geq \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt \geq \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}} \cdot (x+1-x) \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^x} &\geq \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt \geq \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}} \end{aligned}$$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1-\ln x)}$ Θέτουμε $u = x(1-\ln x)$ οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1-\ln x)] = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \text{ δηλαδή όταν } x \rightarrow +\infty \text{ το } u \rightarrow -\infty$$

.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$. Ομοίως :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{(x+1)^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^{(x+1)\ln(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+1-(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x+1)[1-\ln(x+1)]} \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0, \quad \left(\text{όπου } u = (x+1)[1-\ln(x+1)] \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = -\infty \right) \end{aligned}$$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^t} dt = 0$.

415. Αν $x > 1$ να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \ln 2.$$

Λύση

Για κάθε $x > 1$, έχουμε $\left. \begin{array}{l} x \leq t \leq x^2 \\ t \ln t > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t} \Leftrightarrow \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$

Οπότε αφού για $x > 1$ είναι $x^2 > x$ θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln t} dt &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln t} dt \\ \Leftrightarrow x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \\ \Leftrightarrow x [\ln(\ln t)]_x^{x^2} &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 [\ln(\ln t)]_x^{x^2} \\ \Leftrightarrow x [\ln(\ln x^2) - \ln(\ln x)] &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 [\ln(\ln x^2) - \ln(\ln x)] \\ \Leftrightarrow x [\ln(2 \ln x) - \ln(\ln x)] &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 [\ln(2 \ln x) - \ln(\ln x)] \\ \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{2 \ln x}{\ln x}\right) &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 \ln\left(\frac{2 \ln x}{\ln x}\right) \Leftrightarrow x \ln 2 \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 \ln 2. \end{aligned}$$

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln 2) = \ln 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 \ln 2) = \ln 2$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \ln 2.$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Το όριο μπορεί να υπολογιστεί (πάλι με το κριτήριο παρεμβολής) κάνοντας χρήση της

ανισότητας $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$, για κάθε $x > 1$

(η οποία αποδεικνύεται εύκολα με Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = \ln t$ στο $[1, x]$).

416. Αν φ συνεχής στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^t \varphi(x) dx = 0, \quad x \in [0, 1]$$

Λύση

Επειδή η φ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, θα έχει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M .

Οπότε για κάθε $u \in [0, 1]$, έχουμε :

$$m \leq \varphi(u) \leq M.$$

Για $t > 0$ είναι $x^t \geq 0$ οπότε έχουμε :

$$m x^t \leq \varphi(x) \leq M x^t \text{ τότε}$$

$$\int_0^1 m x^t dx \leq \int_0^1 x^t \varphi(x) dx \leq \int_0^1 M x^t dx$$

$$\Leftrightarrow m \left[\frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_0^1 \leq \int_0^1 x^t \varphi(x) dx \leq M \left[\frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_0^1 \Leftrightarrow m \frac{1}{t+1} \leq \int_0^1 x^t \varphi(x) dx \leq M \frac{1}{t+1}$$

Έχουμε :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m}{t+1} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M}{t+1} = 0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^t \varphi(x) dx = 0.$$

Ο ρ ι ο ε μ β α δ ο ύ

417. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

- i.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E_1(\lambda)$ του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda > 1$.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E_2(\lambda)$ του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda > 1$.
- iii.** Να υπολογίσετε τα όρια :
 - α.** $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_1(\lambda)$
 - β.** $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_2(\lambda)$

Λύση

- i.** Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 είναι :

$$E_1(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^\lambda = \ln \lambda - \ln 1 = \ln \lambda$$

- ii.** Είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$ οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω_2 είναι :

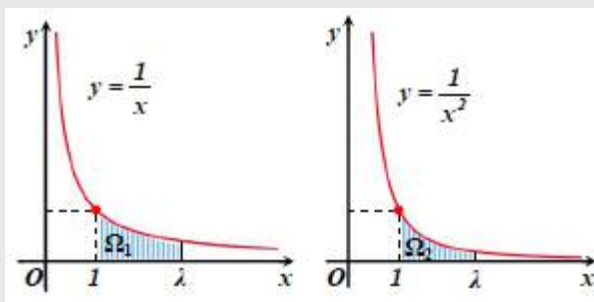
$$E_2(\lambda) = \int_1^\lambda g(x) dx = \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- iii. α.** $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln \lambda = +\infty$

$$\text{β. } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_2(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ είναι παρόμοιες



Εκ πρώτης όψεως τα εμβαδά Ω_1 και Ω_2 , καθώς και το λ τείνει στο $+\infty$, φαίνεται να μεγαλώνουν απεριόριστα και συνεπώς τα

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_1(\lambda) \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_2(\lambda)$$

θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι είναι και τα δύο ίσα με $+\infty$.

Όμως ο ισχυρισμός αυτός για το $E_2(\lambda)$ είναι εσφαλμένος. Δεν πρέπει να εμπιστευόμαστε τις αισθήσεις μας αλλά τη λογική μας.

Μια εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι η g μειώνεται πολύ πιο γρήγορα από ότι η f καθώς το x τείνει στο άπειρο και «προλαβαίνει να φράξει» τις τιμές της.

Μια άλλη εξήγηση στηρίζεται στο ότι το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v} + \dots \quad \text{δε συγκλίνει,}$$

ενώ το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{v^2} + \dots \quad \text{συγκλίνει.}$$

418. Να αποδείξετε ότι :

i. $t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \geq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ii. $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e\sqrt{e^2-1}}{2}$.

Λύση

i. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε :

$$\begin{aligned} t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 t^2 e^{2x} dx - \int_1^2 2t \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \geq 0 \\ \Leftrightarrow \int_1^2 \left(t^2 e^{2x} - 2t \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(te^x - \frac{1}{x} \right)^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει αφού $\left(te^x - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0$.

ii. Για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι $e^{2x} > 0$, οπότε $\int_1^2 e^{2x} dx > 0$.

Οπότε το $t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το t και θετικό συντελεστή στο t^2 . Επειδή λόγω α) ερωτήματος ισχύει

$$t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

έχουμε ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου είναι αρνητική ή μηδέν.

Επομένως

$$\begin{aligned} \Delta \leq 0 &\Leftrightarrow \left(-2 \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 - 4 \int_1^2 e^{2x} dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 - 4 \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 + 4 \left(\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 + 2e^2(e^2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow 4 \left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 - e^2(e^2 - 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 \leq \frac{e^2(e^2 - 1)}{4} \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \sqrt{\frac{e^2(e^2 - 1)}{4}} \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e\sqrt{e^2 - 1}}{2} \end{aligned}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Αν $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις, με $f(x) \neq 0$, επειδή για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ισχύει $(tf(x) - g(x))^2 \geq 0$ έχουμε: $\int_\alpha^\beta (tf(x) - g(x))^2 dx \geq 0$ απ' όπου προκύπτει ότι

$$t^2 \int_\alpha^\beta f^2(x) dx - 2t \int_\alpha^\beta f(x)g(x) dx + \int_\alpha^\beta g^2(x) dx \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Άρα πρέπει $\Delta \leq 0$, οπότε $\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_\alpha^\beta f^2(x) dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x) dx$

(Ανισότητα Bunyakovsky – Cauchy – Schwarz)

Ολοκλήρωμα και διάταξη

Ασκήσεις

Ολοκλήρωση ανισοτήτων

2047. Α. Έστω f, g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$.

Να αποδείξετε ότι :

α. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

β. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$ τότε

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx \leq \frac{\pi e}{2}$

Γ. Να αποδείξετε ότι $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 (e^{x^2} + e^{1-x^2}) dx \leq 1+e$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{2} \ln 2}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \ln 2$

2048. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\eta \mu x}}{3 + \eta \mu x} dx \leq \frac{\pi e}{8}$

2049. Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_2^5 \frac{x}{\ln x} dx \geq 3e$

ii. $\int_e^{3e} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right) dx \geq 4e$

2050. Να αποδείξετε ότι :

i. $4 \leq \int_1^3 2^x dx \leq 16$

ii. $\frac{1}{3e} \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+2} dx \leq \frac{1}{2}$

iii. $1-e \leq \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^0 e^{1-x^2} dx \leq e-1$

iv. $-4 \leq \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1} dx \leq 4$

2051. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{1}{e+1} \leq \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx \leq 1$

ii. $\frac{e-1}{e^2} \leq \int_1^e \frac{x + \ln^2 x}{x^2} dx \leq e^2 - 1$

2052. Να αποδείξετε ότι :

i. $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$

ii. $\int_1^{10} (x^2 + 1)^{x^2+1} dx \geq \int_1^{10} e^{x^2} dx$

2053. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$

ii. $\int_1^{17} x^e dx \leq \int_1^{17} e^x dx$

2054. Έστω $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν :

- $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$.
- $\int_1^2 \left(\int_1^2 f(x)f(t) dx \right) dt = 12 + \int_1^2 f(u) du$.

Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)dx$.

2055. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, 1]$ και τέτοια ώστε $f(x) \geq x f'(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Να αποδείξετε ότι $2 \int_0^1 f(x)dx \geq f(1)$.

2056. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Να αποδείξετε ότι :

i. $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha+\beta-x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

ii. $\int_a^\beta f(x)dx \geq (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

iii. $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

iv. $f(x) \leq \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

v. $2 \int_a^\beta f(x)dx \leq (\beta - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)]$

2057. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii. $2 \int_a^\beta f(x)dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$

(1997)

2058. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$ με

$$f(1) = -1 \text{ και } f(2) = 1. \text{ Να αποδείξετε ότι : } 0 \leq \int_1^2 f^2(x)dx \leq 1.$$

2059. Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_a^\beta e^{x^2} dx \geq \int_a^\beta (x^2 + 1)dx$, όπου $\alpha \leq \beta$.

ii. $\int_0^1 \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 (e^x - 1)dx$

iii. $\int_0^\alpha \frac{|\eta \mu x|}{x^2 + 1} dx \leq \int_0^\alpha \frac{x}{x^2 + 1} dx$, για κάθε $\alpha > 0$.

iv. $\int_a^{a+v} x^x dx \geq \int_a^{a+v} e^{x-1} dx$ όπου $\alpha > 0$ και $v \in \mathbb{N}^*$.

2060. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$, $x \in \mathbb{R}$ όπου v μη μηδενικός φυσικός αριθμός.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

ii. Να αποδείξετε ότι $2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} xe^{-vx} dx \leq e$

(1993)

2061. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{-v} \ln x$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $v \int_1^e f(x) dx \leq e - 1$.

2062. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f έχει ένα ακρότατο του οποίου να βρείτε το είδος και την τιμή του.

ii. $\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{1}{2e}$ όπου k θετικός ακέραιος

2063. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν :

$$2f'(x) = -3xf^2(x) \text{ με } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{10} f(x) dx \leq 10$.

2064. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$, όπου

$$0 < \alpha < \beta \text{ να αποδείξετε ότι } \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{f(\alpha)} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \leq \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{f(\beta)}.$$

2065. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 1$.
Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9) dx > 0$

ii. $\int_1^3 f^2(x) dx > 4 \int_1^3 f(x) dx - 8$

2066. A. Έστω οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$. Αν υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο

ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$, να αποδείξετε ότι $\int_a^{\beta} f(x) dx > \int_a^{\beta} g(x) dx$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2}$, $x \in [0, 2]$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $3 < \int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx < 5$.

2067. Έστω μια συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή στο $[0, 2]$ και τέτοια ώστε $f(1) = f'(1) = 1$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) - x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$.

2068. Δίνεται η $f(x) = \ln \frac{1+e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

i. Η f είναι κυρτή.

ii. $\int_0^1 \ln(1+e^x) dx > \frac{1}{4} + \ln 2$.

2069. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = 2 - e^{-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2}) dx > 2$

2070. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$. Αν ισχύει $\int_1^2 f(x) dx = -3$ να αποδείξετε ότι

η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' x σε ένα τουλάχιστον σημείο

2071. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\int_0^1 f(x) dx = -2$ να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2072. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f'' είναι συνεχής και «1-1» να αποδείξετε ότι :

i. $f'(0) = f'(2) = 0$ ii. $f'(1) \neq 0$ iii. $\int_0^2 f(x) f''(x) dx < 0$

2073. Έστω $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή -2

και μέγιστη τιμή το 1. Αν $\int_0^2 f(x) dx = 0$, να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^2 f^2(x) dx \leq 4$ ii. $-4 \leq \int_0^2 x f(x) dx \leq 2$

2074. Δίνεται συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία

Ισχύουν $f(1) = f(3) = 4$ και $\int_1^3 f(x) dx < 4$.

Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3 (f(x) - x) dx < 0$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις στο διάστημα $(1, 3)$.

iii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f'(\xi) = \frac{2016}{2017}$

2075. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

α. Να δείξετε ότι: i. $f(0) = 0$ ii. $f'(0) = 1$

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι:

i. $xf(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$. ii. $\int_0^1 f(x) dx < f(1)$.

(2005)

2076. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

i. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

- ii. Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- iii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι :
- $$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$$

(2002)

2077. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1) = 1 \text{ και } f'(x) + 2xf(x) = 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

- i. Να βρείτε τον τύπο της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι :
- $$\frac{\alpha - 1}{2\alpha^2} f(\alpha) < \int_1^\alpha \frac{f(x)}{2x^2} dx < \frac{\alpha - 1}{2}, \text{ για κάθε } \alpha > 1.$$
- iii. Για κάθε $\alpha > 1$ να αποδείξετε ότι $\int_1^\alpha \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) f(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{e^{1-\alpha^2}}{2\alpha}$
- iv. Να αποδείξετε ότι $2e \int_1^\alpha e^{-t^2} dt < 1$, για κάθε $\alpha > 1$

Εύρεση άκρων ολοκλήρωσης

2078. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - \frac{1}{3}x^3 - x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν ισχύει $\int_{\ln \alpha}^{\alpha-1} f(x) dx = 0$, να βρείτε το θετικό αριθμό α .

2079. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$, για κάθε και $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$.

A1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

- A2.** α. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(2015)

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ & $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

2080. i. Να αποδείξετε ότι αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $\int_a^\beta f(x) dx = 0$,

τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ii. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Αν είναι $\int_a^\beta f^2(x) dx = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

iii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και

$$\int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$$

να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

iv. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_0^1 f(x)(2e^x - f(x))dx = \frac{e^2 - 1}{2}$$

2081. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. $\int_0^1 f^2(x)dx + 1 \leq 2 \int_0^1 f(x)dx, \quad \Delta = [0, 1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{3} \leq 2 \int_0^1 xf(x)dx, \quad \Delta = [0, 1]$

iii. $4 \int_0^3 xf(x)dx = \int_0^3 f^2(x)dx + 36, \Delta = [0, 3]$

2082. Έστω $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν :

- $f(x) \geq \frac{1}{x} + 1$, για κάθε $x \in [1, e]$ και

- $\int_1^e f(x)dx = e$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

2083. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο.

Αν $f(0) = 1$ και $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 f^2(x)dx = f^2(1) - 1$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$$

2084. Η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο

$[0, 2]$ και ισχύουν :

$$\int_0^2 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^2 f(x)dx = \frac{64}{3} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^5 + 16(f(x))^3 - 2^{11}}{x - 2} \in \mathbb{R}$$

A. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(2) = 4$

ii. $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2]$

B. i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία M_1, M_2 της C_f ώστε για κάθε σημείο M της C_f να ισχύει: $(AM_1) \leq (AM) \leq (AM_2)$, όπου $A(3, 0)$.

ii. Να βρείτε τα M_1, M_2 .

Όρια ολοκληρωμάτων

2085. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I(\lambda) = \int_1^\lambda \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) dx$, με $\lambda > 1$.

i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

2086. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

ii. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(a) = \int_a^0 g(x) dx$, $a \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{a \rightarrow -\infty} I(a)$.

(2004)

2087. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$

a. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t) dt$.

β. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$.

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(1999)

2088. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^4 f(x) dx$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^4 f(t) e^{tx} dt$.

Όριο εμβαδού

2089. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ και Ω το χωρίο που σχηματίζεται από τη C_f ,

τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$, με $0 < \lambda \neq 1$.

a. Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω .

β. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) \quad \text{ii. } \lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$$

2090. i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τις

γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{e}{x}$, $g(x) = \ln x$ και την ευθεία $x = t > 0$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(t)}{t^2}$.

2091. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x - 1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$ και $x = \lambda > 0$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

- iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$.
- iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα $x'x$.

2092. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = -2 + \frac{2}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = 3 \ln x, \quad x > 0.$$

- i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) - g(x)$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=\lambda$ όπου $\lambda > 0$.
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- iv. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

2093. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, όπου $x \geq 0$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες.
- ii. Έστω ε η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτη ε και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=2\alpha$, όπου $\alpha > 0$.
- iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

2094. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ με πεδίο ορισμού το $A = [2, +\infty)$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την οποία και να προσδιορίσετε.
- iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση της f , την οριζόντια ασύμπτωτη της f και τις ευθείες $x=2$, $x=\alpha > 2$.
- iv. Να βρεθεί το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ-ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

1ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

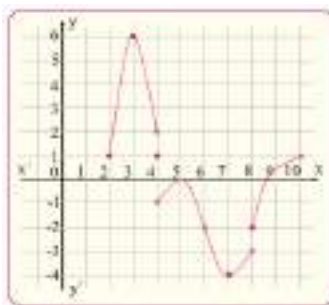
- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι **γνησίως αύξουσα**, τα διαστήματα στα οποία είναι **γνησίως φθίνουσα** και τα **ακρότατα** της f .
- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι **κυρτή**, τα διαστήματα στα οποία η f είναι **κοίλη** και να προσδιορίσετε τα **σημεία καμπής** της γραφικής παράστασης.
- B3.** Να βρείτε τις **ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης της f .
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη **γραφική παράσταση** της f .
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

Μονάδες (6+9+7+3)=25

2ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f



- B1.** Να βρείτε το **πεδίο ορισμού** και το **σύνολο τιμών** της f
- B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω **όρια**.

α. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

δ. $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$

ε. $\lim_{x \rightarrow 10} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω **όρια**

α. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)}$

β. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{f(x)}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

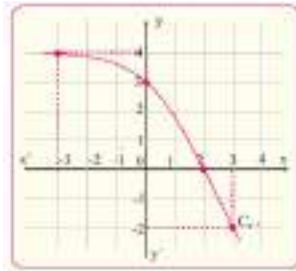
- B5.** Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (2+7+9+3+4)=25

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$



B1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2f(0) - f^{-1}(0) - 3f^{-1}(2) + f(4)$$

B2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(|x| - 1) + 3) = 0$.

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(0)\sqrt{x+3} - f(-2)}{x - f^{-1}(3)}$.

B4. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(3)x^2 - \alpha x + \beta + f^{-1}(-3)}{x - 2} = -5$$

$$\text{Μονάδες } (6+6++6+7)=25$$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + \ln(x+1) - \ln 2$ και $g(x) = \ln \frac{x(x+1)}{2}$.

B1. Να εξετάσετε αν $f=g$ και στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$.

B2. Να υπολογίσετε τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

B3. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f .

B4. Να βρείτε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

B5. Να βρείτε αν υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

B6. Να βρείτε την εξίσωση (η) της εφαπτομένης της f^{-1} στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

B7. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε) , (η) και (δ) διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

B8. Να υπολογίσετε τα όρια της g στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

B9. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της g .

B10. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και f^{-1} και των εφαπτομένων (η) και (δ) .

B11. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 f(x) dx$ και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες $(3+2+3+2+2+2+1+2+4+2+2)=25$

5ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με: $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x)$.

B1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$, ισχύει: $\frac{1}{x+1} < f(x) < 1$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία**

B3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$ ισχύει: $(1+\alpha)^\beta > (1+\beta)^\alpha$.

B4. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\ln 2} \leq \int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{2}{\ln 3}$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

6ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - x$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

B2. Αν $\kappa > \lambda > 1$, να αποδείξετε ότι $\kappa \cdot e^\lambda < \lambda \cdot e^\kappa$.

B3. Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{|x+3|+1}{5|x+3|+6} + 4|x+3| < -5$

B4. Να βρείτε την εξίσωση της **εφαπτομένης** που διέρχεται από το $O(0,0)$.

B5. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)-1}{2} \geq \sin x$

B6. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το **σύνολο τιμών** της f και στην συνέχεια να λύσετε για τις διάφορες τιμές του α την εξίσωση $f(x) = \alpha$

Μονάδες $(3+3+3+4+5+7)=25$

7ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x + 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

B2. Να βρείτε το **πλήθος των ριζών** της $f(x) = 0$.

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την **κυρτότητα** και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι:
 $f(x) + f(x+6) < 2f(x+3)$ για κάθε $x > 0$

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ παρουσιάζει **ακρότατο**.

Μονάδες $(3+6+9+7)=25$

8ο**Θ Ε Μ Α Β**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_f .
B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
B5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{1-x_0}$.
B6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , και τις ευθείες $y = x$, $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες $(4+4+4+4+4+5) = 25$ **9ο****Θ Ε Μ Α Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$.

- B1.** Να βρείτε (αν υπάρχει) την αντίστροφη της f .
B2. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.
B3. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} και την κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 - x}$$

Μονάδες $(6+9+10) = 25$ **10ο****Θ Ε Μ Α Β**

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$F^2(x) + 4e^x = 4 + 2e^x F(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

- B1.** Να βρείτε τον τύπο της F .
B2. Να βρείτε την αντίστροφη της F (αν αυτή υπάρχει).
B3. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.
B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{-1} F^{-1}(x) dx$.

Μονάδες $(7+6+4+8) = 25$ **11ο****Θ Ε Μ Α Β****STUDY FOR EXAMS 2016**

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } 0 < f(x) < 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x) + 1}$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .
B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.
B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x^3 + 1)) = f(g(4x^2 + 2x))$ έχει δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.
B4. Να επιλυθεί η ανίσωση $(\text{fog})(x^3 + 4) > (\text{fog})(3x^2)$

Μονάδες $(5+5+10+5)=25$

12ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$, $x > 0$.

- B1.** Να εξετάσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και να βρείτε τα **ακρότατά** της.
B2. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει **μοναδικό σημείο καμπής** για κάποιο μάλι στα x_0 του διαστήματος $(1, 2)$.
B3. Να βρείτε τα **όρια**:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}, \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}.$$

Μονάδες $(5+10+10)=25$

13ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^x$, $g(x) = \beta + \alpha \ln x$, $x > 0$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν **κοινή εφαπτομένη** στο $x_0 = 1$.

- B1.** Να βρείτε τα α, β .
B2. Να εξετάσετε τις f, g ως προς την **κυρτότητά** τους.
B3. Να αποδείξετε ότι $x^x \geq \ln x + 1$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει το “=”;

Μονάδες $(8+8+9)=25$

14ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα **μονοτονίας** και τα **ακρότατα** της f .
B2. Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της f .

B3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq f'(x) < \frac{2}{3}$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει **μία μόνο ρίζα** στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες $(6+4+6+9)=25$

15ο

Θ Ε Μ Α Β

STUDY FOR EXAMS 2016

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$

- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
B2. Να βρείτε το πρόσημο της f .
B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

B5. Αν $h(x) = \ln \frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = h(x_0)$

B6. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$

Μονάδες $(3+4+5+4+5+4)=25$

16ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει

$$e^x f'(x) = g'(x) - g(x) \text{ και } g(0) = f(0) = 0$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.

B2. Αν η f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ την ευθεία $y = x-2$,

να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{g(x) - x^2 e^x} = -\frac{1}{2}$.

B3. Αν $g'(x) > g(x)$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\int_0^1 f(x) dx}{f(e)} > 1$.

Μονάδες $(6+9+10)=25$

17ο

Θ Ε Μ Α Β

Σημείο M που ανήκει στη γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, κινείται ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του ως προς την τετμημένη του να είναι ίσος με το διπλάσιο του γινομένου των συντεταγμένων του. Αν το σημείο $(0, \lambda)$ με $\lambda > 0$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε:

B1. Να βρείτε τον **τύπο** της f .

B1. Να αποδείξετε ότι η **εφαπτομένη** της f στο $(1, f(1))$ διέρχεται από **σταθερό σημείο** για κάθε $\lambda > 0$.

B3. Να αποδείξετε ότι: $\lambda^2 \leq \int_0^\lambda f(x) dx \leq \lambda^2 e^{\lambda^2}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

18ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, $f(0)=1$ και

$$f(x) = x \ln x + 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο 0 .

B2. Να αποδείξετε ότι η f **δεν παραγωγίζεται** στο 0 .

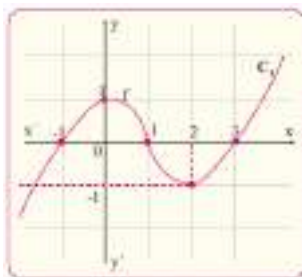
B3. Αν $\lambda \in (0, 1)$ να υπολογίσετε το $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x) dx$.

B4. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$.

Μονάδες $(5+5+7+8)=25$

19ο**Θ Ε Μ Α Β**

Δίνεται παρακάτω η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Θεωρούμε τη συνάρτηση $g = \frac{1}{f}$



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

B2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

B3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

B4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της C_g

B5. Να βρείτε το πρόσημο της g και τη μονοτονία της.

B6. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της g .

Μονάδες $(4+4+5+4+4+4)=25$

20ο**Θ Ε Μ Α Β****Σ Ε Ρ Ι Φ Η Σ Κ.**

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(x) = xe^{-x}$, $x \geq 0$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο $[0, +\infty)$.

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο $[0, +\infty)$

B3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2 - x = \ln 2 - \ln x$

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)f(\eta\mu x))$

Μονάδες $(5+7+6+7)=25$

21ο**Θ Ε Μ Α Β****Ε Λ Ε Υ Θ Ε Ρ Ι Ο Υ Π.**

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(x) = (e^x - 1) \cdot \ln x.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

B2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

B3. α. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στο διάστημα $[1, +\infty)$ (μον. 3) και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(1, f(1))$ (μον. 2).

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}$

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει:

$$e^{x_0} \cdot \ln(e \cdot x_0^{x_0}) = 1.$$

Μονάδες [5+5+(5+4)+6]=25

22ο

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = (x-a)^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

της οποίας η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$.

B1. Να αποδείξετε ότι $a=1$

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}

B3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$ και την ευθεία $y=x$, $x \in [1, +\infty)$

B4. Αν ένα σημείο K , κινείται στην C_f έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του να ισούται με 2 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του την χρονική στιγμή στην οποία η τεταγμένη του είναι ίση με 9 μονάδες μήκους.

Μονάδες (5+7+7+6)=25

23ο

Θ Ε Μ Α Β

ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ Β.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

που για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την

$$f(x+y) = f(x)\sqrt{1+f^2(y)} + f(y)\sqrt{1+f^2(x)}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

B3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

B4. Αν $f'(x) = \sqrt{1+f^2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

B5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

B6. Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$g'(x) = f^{-1}(x),$$

τότε να αποδείξετε ότι $g(-1) = g(1)$.

Μονάδες (3+3+4+5+5+5)=25

24ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$f^2(x) = \left[x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) \right]^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ3. Αν $f(x) = x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κοίλη.

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^2 + 3x) - f(x^2 + 3x + 4) = f(4e^{-x} - 4) - f(4e^{-x}) \text{ όταν } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες (6+8+5+6)=25

25ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\sin x) > f\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)$.

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$ του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) f^{-1}(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) f^{-1}(x) dx$.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

26ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύουν:

$$\bullet f(0) = 3 \text{ και } F(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \bullet f(x)F(-x) = 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να βρείτε το $F(0)$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

Γ3. Να βρείτε τον τύπο της f .

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_F , $x = 0$ και $x = 1$

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \infty} [xf(x)]$.

Μονάδες (4+4+6+5+6)=25

27ο**Θ Ε Μ Α Γ****ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ Β.**

Η μη μηδενική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 2015 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x-2y) = f(x) - 2f(y)$.

Γ1. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο 0.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής**.

Γ4. Αν επιπλέον η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **μοναδική** λύση τότε

i. να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση **1-1**,

ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(5)$.

Μονάδες $(2+7+9+3+4)=25$

28ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \ln(x^2 + 1)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Γ2. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **μία μόνο** πραγματική λύση.

Γ4. Να βρείτε το σύνολο: $f([-1, 1])$.

Γ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$ αν γνωρίζετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Γ6. Να βρείτε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον οριζόντιο άξονα, τον κατακόρυφο άξονα και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Μονάδες $(3+4+4+6+4+4)=25$

29ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^4 + 2a^2x^2 + 4a$, $a < 0$

Γ1. Να βρείτε τη **μέγιστη τιμή** της f .

Γ2. Να βρείτε την **ελάχιστη τιμή** του a για την οποία ισχύει $f(x) \leq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Να βρείτε για ποια τιμή του a το **εμβαδόν** του χωρίου το οποίο περικλείεται

από τη C_f και την εφαπτομένη ευθεία της f στο $x_0 = -a$ ισούται με $\frac{16}{15}$ τ.μ

Μονάδες $(6+9+10)=25$

30ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Γ1. Να αποδείξετε ότι $e^x > x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax + xe^{-x}$.

Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η γραφική παράσταση της

f να έχει στο σημείο $(0, f(0))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 7 = 0$.

Γ3. Για $a=1$:

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν $x \rightarrow +\infty$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ της περιοχής που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\lambda$, ($\lambda > 0$).
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Μονάδες $[3+5+5+(3+4+5)]=25$

31ο

Θ Ε Μ Α Γ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + 2 - 2x = f'(x) \quad (1) \quad f''(x) + f(x) = 2x + 6e^x \quad (2)$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι **αντιστρέψιμη**.

Γ2. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μία μόνο** πραγματική λύση.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f , στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $\mathbb{R}$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό.

Γ5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον οριζόντιο άξονα, τον κατακόρυφο άξονα και την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

Γ6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της με τετμημένη 0 .

Γ7. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες $(4+4+3+3+4+3+4)=25$

32ο

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

- $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } g(1) = 1 \text{ και}$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \frac{g^4(a)}{x^2 + 3g^2(a)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η g **αντιστρέφεται**.

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $2 \int_1^2 (g \circ g) \circ g^{-1}(x) dx = g(3)$.

Γ3. Να βρείτε τον **γεωμετρικό** τόπο των σημείων **καμπής** της συνάρτησης f .

Γ4. Να αποδείξετε ότι **δεν** υπάρχει τιμή του a ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα σημεία καμπής να είναι **παράλληλες**.

Γ5. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον

κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, \alpha)$ για $\alpha < 4$.

Μονάδες $(5+4+4+6+6)=25$

33ο

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$ και $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$, $x > 0$

Γ1. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και ότι τέμνει την C_f σε σημείο A του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_g , την (ε) και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες $(4+6+7+8)=25$

34ο

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x(1+e^{-x})$ $g(x) = 1+(1-x)e^{-x}$

Γ1. Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Γ2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη g και να δείξετε ότι: $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = g(x)$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (δ) με εξίσωση $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

Γ6. Να βρείτε σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς τη (δ) .

Γ7. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ να είναι μία παράγουσα της $h(x) = xe^{-x}$.

Γ8. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_g , της (δ) και της ευθείας με εξίσωση $x = 2$.

Μονάδες $(2+3+3+3+3+2+5+4)=25$

35ο

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = a$ ($a > 0$) τέμνει τη C_f σε δύο σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f είναι κάθετες.

Γ3. Να βρείτε το εμβαδό $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την

ευθεία $y = a$, $a > 0$.

Γ4. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{E(a)}{a^2}$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{E(a)}{e^{a+1} + 2}$.

Γ5. Να βρείτε για ποια τιμή του a είναι $E(a) = \frac{1}{2} \tau.μ..$

Μονάδες $(5+4+5+6+5)=25$

36ο

Θ Ε Μ Α Γ

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x} dx$, $t \in [1, +\infty)$.

Γ1. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του $I(t)$.

Γ2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx \text{ και } k(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx, t \in [1, +\infty)$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι. $0 \leq k(t) < 1$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι. $0 \leq J(t) - I(t) \leq k(t)$.

Γ5. Να αποδείξετε ότι. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2} = \frac{1}{2}$.

Μονάδες $(5+6+3+5+6)=25$

37ο

Θ Ε Μ Α Γ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ Γ.

Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες: $f(1) = 0$ $f'(1) = 1$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) = 2\ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση: $g(x) = 2xf(x) + x^2f'(x) - x(2\ln x + 1)$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x > 0$

Γ3. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

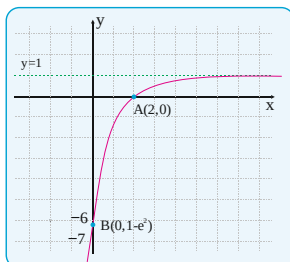
ii. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{for} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με 1 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $x(t_0) = 2 \text{ cm}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ με $\alpha < \beta$.

Μονάδες $[3+4+(4+5)+9]=25$

38ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας **παραγωγίσιμης** συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία Α και Β, έχει **οριζόντια ασύμπτωτη** την ευθεία $y=1$ και έχει τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν το **εμβαδόν του χωρίου** Ω το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f' και τους άξονες $x'x$, $y'y$ είναι $E(\Omega) = f(0) + e - 2$ **τ.μ.** τότε :

Γ1. Να βρείτε τα όρια : i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

Γ3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha + \beta - 1) + f(\alpha - \beta + 1) = 4 - 2e$

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f'(3)(x - 3) + f(3)$

και να βρείτε το **σύνολο τιμών** της f .

Γ5. Να βρείτε τα όρια : i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$

Γ6. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1) + E(\Omega) < 0$

$$\text{Μονάδες} \quad [(2+2)+2+4+4+(3+3)+5] = 25$$

39ο**Θ Ε Μ Α Γ****ΜΑΥΡΟΦΥΔΗΣ Β.**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, παραγωγίσιμη στο 0 ώστε:

• η f είναι γνησίως μονότονη • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} > 0$ • $f(1) = 1$

• Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται της $(\varepsilon): y = \frac{1}{4}$ στο $x_0 = 0$

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$.

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 4f(x) - 1}{\eta \mu x \cdot f(x)}$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$

Γ5. Αν επιπλέον, για κάθε $x, y \in [0,1]$ ισχύει:

$$8f(x)[2f(x)-1]=9x^4-1+[f(y)-y]\left(f(x)-\sqrt{f(x)}\cdot\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2}\right)$$

τότε να βρείτε τον τύπο της f .

$$\text{Μονάδες } [(2+2)+4+4+5+8]=25$$

40ο**ΘΕΜΑ Γ****ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Π.**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $\int_0^1 f(x)dx = e - 1$
- Η g είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
- $f(x) - g'(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(1) - g(0) = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g'(x) = 1$ έχει μια μόνο ρίζα ξ , η οποία μάλιστα ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ3. Αν ξ είναι η ρίζα της εξίσωσης $g'(x) = 1$, τότε:

α. Να δείξετε ότι για κάθε $x > \xi$ ισχύει $f(x) > e^x$ και για κάθε $x < \xi$ ισχύει $f(x) < e^x$.

β. Να δείξετε ότι: $\int_0^\xi |f(x) - e^x| dx = \int_\xi^1 |f(x) - e^x| dx$, (1)

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1); (μονάδες 2)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x) - g'(x)}$.

$$\text{Μονάδες } [4+5+(6+4+2)+4]=25$$

41ο**ΘΕΜΑ Γ****ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Π.**

$$\text{Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $k=0$.

Γ2. i. Να βρείτε την παράγωγο της f .

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να εξετάσετε αν παρουσιάζει καμπή.

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει: $\frac{f(x+1) - f(x)}{x} > 1 + \ln x^2$

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{f(x)}{x^2} \right) \cdot \eta \mu x \right)$

$$\text{Μονάδες } [3+(3+4)+3+6+6]=25$$

42ο**ΘΕΜΑ Γ****Ε.Μ.Ε 2016**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f : (0,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\ln 2} \text{ και } f(e) = \frac{1}{e},$$

η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
- $f'(x) = -(\ln x + 1) \cdot f^2(x)$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f .

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ και την ευθεία $x = 4$.

Μονάδες (6+5+6+8)=25

43ο

ΘΕΜΑ Γ

Ε.Μ.Ε 2016

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση

$$(2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1} = x + 2.$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοια, ώστε $\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e-1$

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x} dx < \frac{4}{3}$

Μονάδες (6+7+4+8)=25

44ο

ΘΕΜΑ Γ

ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ Β.

Έστω η πολυωνμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f''(x) = 3 + 2x - x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε ακόμη και την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τέτοια ώστε

$$0 \leq 2g'(x) - 2^{x+1} \ln 2 \leq g(1) - g(0) - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερός πραγματικός αριθμός c ώστε

$$g(x) - 2^x = c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. Αν επιπλέον $f(x) \leq 2 - c^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Γ4. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $q: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τέτοια ώστε

$$q(x) - q'(x)(x^2 - 2x - 1 + 2^x) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

$$\text{Μονάδες } (7+4+6+8)=25$$

45ο**Θ Ε Μ Α Γ****ΜΑΥΡΟΦΥΔΗΣ Β.**

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f παρουσιάζει σε μοναδική θέση $x_0 \in \mathbb{R}$ ελάχιστη τιμή, ίση με $\frac{7}{4}$ και $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + 4, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

Γ3. « Αν $g(a)g(b) = \frac{3249}{256}, a, b \in \mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι $a = b$.

Γ4. Να βρείτε το $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν $f(x_0) + f(-1 - x_0) = \frac{7}{2}$.

Γ5. Αν η f είναι συνεχής και $f\left(-\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$.

Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα.

Γ6. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)f(y) - 2xf(x)f'(y) = f(x)f'(y) - 2yf(x)f(y)$$

τότε να βρείτε τον τύπο της f

$$\text{Μονάδες } (5+5+5+5+5)=25$$

46ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Δίνεται $f: [e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$$xf'(x) + xf(x) + e^{-x} = 0 \text{ για κάθε } x \geq e \text{ με } f(e) = 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1 - \ln x}{e^x}, x \geq e$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Γ3. Να αποδείξετε ότι το κρίσιμο σημείο είναι θέση ολικού ελαχίστου και να εξετάσετε αν η f έχει ολικό μέγιστο.

Γ4. Να ορίσετε την σύνθεση της f με τη $g(x) = 1 - \ln(-x), x < 0$.

Γ5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h με $h(x) = 1 - \ln(\ln x - 1) + x, x > e$.

$$\text{Μονάδες } (5+5+5+5+5)=25$$

47ο**Θ Ε Μ Α Γ**

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(x) \cdot e^{x+f(x)} = 2x - x^2$

και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει **τύπο** $f(x) = 2\ln x - x$.

Γ2. Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της συνάρτησης f και τις **ασύμπτωτές** της.

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $2\ln \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 3} = 2x - 1$.

Γ4. Να βρείτε το **πλήθος των ριζών** της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$.

Γ5. Να βρείτε σημείο της C_f , το οποίο απέχει **ελάχιστη απόσταση** από την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Μονάδες $(6+5+4+5+5)=25$

48ο

ΘΕΜΑ Γ

Ε.Μ.Ε 2016

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση :

$$f^3(x) + f(x) = x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρείτε την **τιμή** της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και να βρείτε το **πρόσημό** της.

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την **κυρτότητα**.

Γ4. Αν $a > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{f(a)}{a} + f\left(\frac{1}{a}\right) < 1 + \frac{1}{a}$

Γ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x + 2}$

έχει μια **τουλάχιστον ρίζα** στο διάστημα $(-2, 0)$.

Γ6. Να αποδείξετε ότι το **εμβαδόν** E του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ είναι $E(\Omega) = \frac{5}{4}$

Μονάδες $(2+4+4+5+5+5)=25$

49ο

ΘΕΜΑ Γ

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ Ν.

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

- $e^{f'(x)} - e^{f(x)} = (f''(x))^2 - (f(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι
- $f(0) = 0$ και • $f'(0) = 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: i. $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ii. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

Γ3. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^2 + 1) + f(e^x) > f(2x) + f(x)$.

Μονάδες $[(3+3)+5+6+8]=25$

50ο

ΘΕΜΑ Γ

ΠΑΠΑΓΡΗΓΟΡΑΚΗΣ Μ.

Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$ και ισχύει ότι:

$$f(x)f(-x) = -x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} - \{0\}$$

- Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και ισχύει ότι $g(f(x)) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(5^x - 1 - 2 \cdot 2^x) = 0$

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} g\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{x^2}\right)$ Μονάδες (7+5+7+6)=25

51ο

ΘΕΜΑ Γ

ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α.

Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + 9 \leq 6f(x^2)$ (1). Να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Γ2. Η συνάρτηση f' δεν είναι γνησίως μονότονη.

Γ3. Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει:

$$[2f(\alpha) + 1][2f(\beta) + 1][2f(\gamma) + 1] \geq 64. \quad (2)$$

Γ5. Η εξίσωση: $\frac{2f^2(x) + 1}{x} = \frac{3f(x^2 + 1) - 4}{1 - x}$ (3) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες (5+5+5+5+5)=25

52ο

ΘΕΜΑ Γ

ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για τις οποίες, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \leq 2x \leq e^{f(x)} - e^{-f(x)} \quad (1)$$

53ο

ΘΕΜΑ Γ

ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α.

Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 \cdot 10^{x^4 - x^2 + 4x - 4} + x - 2 = 0$. (1)

54ο

ΘΕΜΑ Γ

ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α.

Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda, \text{ όπου } \lambda \in \mathbf{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } \xi \in \mathbf{R} \text{ με } f'(\xi) = 0.$$

55ο

ΘΕΜΑ Γ

ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α.

Να βρείτε τη συνάρτηση f , οι οποίες είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα

$[0, 1]$ και για τις οποίες ισχύει: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2) dx$.

56ο**Θ Ε Μ Α Δ**

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Δ2.** Να λύσετε την εξίσωση $2e^x = x^2 + 2$
- Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον $x'x$, τον $y'y$ και τη $x=1$, όπου $g(x) = 2e^x - x^2 - 2$.
- Δ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον $x'x$, τον $y'y$ και τη $x=t$, όπου $t > 0$.
- Δ5.** Αν $E(t)$ το προηγούμενο εμβαδόν, να βρείτε το όριο: $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$

Μονάδες $(4+5+5+5+6) = 25$ **57ο****Θ Ε Μ Α Δ****ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ Β.**

- Δ1.** Για την γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει $g(g(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε:
- Η συνάρτηση με τύπο $h(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι «1-1».
 - Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = x$.
- Δ2.** Αν για την κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $f'(1) = 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x - f'(y)) - f(y - f'(x)) \leq 0$, τότε:
- να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει στην θέση $x_0 = 1$ ακρότατο και να προσδιορίσετε το είδος του.
 - να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'(f'(x) + 1) = x - 1$.
 - να βρείτε τον τύπο της f , όταν η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

Μονάδες $[(2+2)+(6+7+8)] = 25$ **58ο****Θ Ε Μ Α Δ****ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ Β.**Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{y} - \frac{xf(y)}{y^2} \quad \text{για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

και είναι παραγωγίσιμη στο 1, με $f'(1) = 1$.

- Δ1.** Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.
- Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - x - \frac{1}{x}}$
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)}{x}$.
- Δ5.** Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι

$$(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4) \ln \sqrt[4]{x^e} \geq -1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες (5+5+5+5+5)=25

59ο

Θ Ε Μ Α Δ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x, x \in \mathbb{R}$.

- Δ1. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.
 ii. Να αποδείξετε ότι: $e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x(x^4 + x^2 + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Δ2. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.
 ii. Να λύσετε την ανίσωση: $2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0$

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42$, με $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$

Δ4. i. Να αποδείξετε ότι: $3 \int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4$

ii. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0 , το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 |f^{-1}(x)| dx$

Μονάδες [(2+4)+(2+4)+5+(4+4)]=25

60ο

Θ Ε Μ Α Δ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ Γ.

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$
 Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2f(1)$
 Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45°

Δ4. i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = 0$

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x) dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

Δ5. i. Να υπολογίσετε την παράσταση: $K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_0^{f(\frac{1}{2})} f^{-1}(x) dx$, όπου $\lambda > \frac{1}{2}$

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^\lambda}$ Μονάδες [3+3+4+(3+4)+(4+4)]=25

61ο**Θ Ε Μ Α Δ**

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$(1+e^x)f'(x)=f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $0 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(0,1)$.

Δ4. Αν $M(a, f(a))$ και $N(-a, f(-a))$, όπου $a > 0$, είναι σημεία της C_f , να αποδείξετε ότι :

- i. Οι εφαπτόμενες της C_f στα M και N είναι παράλληλες.
- ii. Το σημείο καμπής A της C_f είναι μέσο του ευθ. τμήματος MN .

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες των x και y και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες $[4+5+4+(4+4)+4]=25$

62ο**Θ Ε Μ Α Δ**

Έστω η **συνεχής και γνησίως φθίνουσα** συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ • $f(0)=1$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-\lambda$ και

$$x=\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \text{ είναι } E(\lambda)=\left| \frac{a^\lambda - f(\lambda)}{\ln a} \right|, a > 1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι με $a > 1$ είναι: i. $f(x) > a^x$, για $x < 0$ ii. $f(x) \leq a^x$ για $x \geq 0$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=a^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x \cdot a^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $a > 1$.

- i. Αν ισχύει $h(x) \leq h(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $a=e$.
- ii. Για $a=e$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ για τους οποίους ισχύει: $(\kappa - \lambda + 1)e^{\lambda - \kappa} + (\eta \mu \kappa - \lambda + 1)e^{\lambda - \eta \mu \kappa} = 2$.

Μονάδες $[3+(2+3)+7+(5+5)]=25$

63ο**Θ Ε Μ Α Δ****ΜΑΥΡΟΦΥΔΗΣ Β.**

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ και

- F μία αρχική της f στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $F(0)=0$.

- Η f είναι τέτοια ώστε να ισχύει $f(0)=0$ και για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ να ικανοποιεί την $f'(x)=e^{2f(x)}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f^2(x)+1$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > \frac{\pi}{3}$ και ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1$

Δ4. Αν x_0 ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{x_0} f(x) \sqrt{1+f^2(x)} dx.$$

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx < \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

Δ6. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x)f'\left(\frac{1}{2}\right) > f'(x+1)f'\left(-\frac{1}{2}\right)$

Δ7. Έστω η συνάρτηση $q(x) = \sin x \cdot f(x) - \eta \mu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι η q είναι σταθερή και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες $(3+3+3+4+4+4+4)=25$

64ο

Θ Ε Μ Α Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{ση } f'(x) + \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x+1}, \text{ για κάθε } x > 0$$

Αν $f(1) = 2 \int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx + \ln\left(1 + \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}\right)$, τότε :

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2\ln 2$ και $f(x) = (x+1)\ln \frac{x+1}{x}$, $x > 0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Δ3. Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της f .

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι **κυρτή** και ότι :

$$f(x) + f(2016-x) \geq 2f(1008), \quad x \in (0, 2016).$$

Δ5. Να αποδείξετε ότι

i. $t^2 \int_1^2 f(x) dx - 2t + \int_1^2 \frac{dx}{f(x)} \geq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ii. $\int_1^2 f(x) dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx \geq 1$

Μονάδες $[4+4+4+4+(5+4)]=25$

65ο

Θ Ε Μ Α Δ

Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο συνάρτηση για την οποία ισχύουν

• $f(0)=1$ • $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = f^2(1) - 1$

και $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει :

$$xg'(x) + 2g(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$

Δ2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η συνάρτηση

$$H(x) = (\alpha x + \beta)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

να είναι μια **αρχική** της συνάρτησης $h(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Δ3. Να βρείτε την **παράγωγο** συνάρτηση της g και να αποδείξετε ότι η $g'(x)$ είναι **συνεχής** στο διάστημα $A=[0, 1]$.

Δ4. Να μελετήσετε την g ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

Δ5. Να βρείτε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες $(5+5+5+5+5)=25$

66ο

Θ Ε Μ Α Δ

ΜΑΥΡΟΦΥΔΗΣ Β.

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = xe^x - 2x + \int_0^2 |g(x)| dx \text{ και } g(x) = x^2 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right) x$$

Δ1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 |g(x)| dx$ όταν $\int_0^2 |g(x)| dx \in \mathbb{Z}$.

Δ2. Αν $f(x) = xe^x - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=m$, $m > 0$

Δ3. Να δείξετε ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Δ4. Αν η τετμημένη του σημείου $A(m, f(m))$, αυξάνεται με ρυθμό $1 - e^{-t}$, $t > 0$

μονάδες ανά δευτερόλεπτο και $m(0) = 1$, να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή για την οποία ο ρυθμός μεταβολής του E που υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα, ως προς τον χρόνο t , μεγιστοποιείται.

Μονάδες $(7+6+5+7)=25$

Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

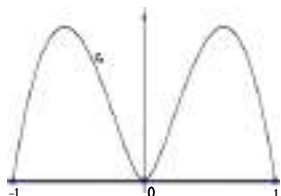
- $f(0) = 0$
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ και
- $x \cdot f'(x) - f(x) = -4x^2 \cdot (1 + \ln|x|)$ για κάθε $x \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f'(0) = 0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. (x \cdot \ln|x|)' = \ln|x| + 1 \text{ για κάθε } x \neq 0. \quad \beta. f(x) = \begin{cases} -4x^2 \cdot \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Αν η καμπύλη του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-1, 1]$,



τότε:

Δ3. α. Να βρείτε τα ακρότατα της f στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

β. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού k , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\frac{k}{x^2} + 2\ln x^2 = 0$ που ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

Δ4. α. Αφού δικαιολογήσετε ότι η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad a > 0.$$

β. Να αποδείξετε ότι, αν F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $\beta > 1$

$$\text{ισχύει: } \frac{F(\beta) - F(-1)}{2} < \int_0^1 f(x) dx \quad \text{Μονάδες } [2 + (2+7) + (4+3) + (3+4) = 25]$$

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$

και $f'(1) = 0$, η οποία για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $(a + \beta)e^{\frac{2}{a+\beta}} \leq ae^{\frac{1}{a}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}}$, για κάθε $a, \beta \in (0, +\infty)$

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = \frac{f(x)}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

- Δ5. i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{f(x)}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι μια αρχι

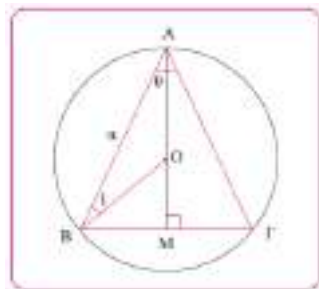
κή της h στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e h(x) dx$.

Μονάδες $[5+4+5+4+(4+3)] = 25$

69ο

Θ Ε Μ Α Δ

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1. Η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών είναι θ και $AB = A\Gamma = \alpha$. Φέρνουμε το ύψος AM .



Δ1. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .

συναρτήση της γωνίας θ

Δ2. Να υπολογίσετε αν υπάρχει, το όριο:

$$\alpha. \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{AB - \sqrt{2}}{OM}, \quad \beta. \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{OM}{BM}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E(\theta) = \eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{E(\theta)}$, όπου $E(\theta)$ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $[7+(3+3)+6+6] = 25$

70ο

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[0, 4]$ με

$$f(1) = 1 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 4].$$

- η g ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \int_{9-f(4)}^{f(2)+f(3)} g(x) dx = 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 4)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχεται μοναδική εφαπτομένη της C_f .

Δ3. Αν ακόμα γνωρίζετε ότι $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{h^2 + h}{h + 3} \right) \left[f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right] = \frac{16}{13}$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. f'(1) = \frac{16}{13} \quad \beta. \int_0^1 f(x) dx > \frac{5}{13} \quad \gamma. \int_1^2 x f'(x-1) dx < \frac{24}{13}$$

71ο**ΘΕΜΑ Δ****ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ Ν.**

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει

$$f'(x+y) > f'(x) \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και για κάθε } y > 0.$$

Ακόμη δίνονται ότι ισχύουν $e^{f(0)} = f^2(0) + 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

Δ1. Να δείξετε ότι

i. $f(0)=0$

ii. $f'(0)=0$

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ iv. $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x^2)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 f(x^4) + x f(x^6) = 2f(x^8)$, $x > 0$

iii. Αν είναι $f(1)=1$ να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)f(x^2)dx > \frac{2(4\sqrt{2}-1)}{5}$

iv. Αν η ευθεία (ε): $y = x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

72ο**ΘΕΜΑ Δ****ΠΑΠΑΓΡΗΓΟΡΑΚΗΣ Μ.**

Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν ότι:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και ισχύει

$$f(0) = -1, f(2) = 1 \text{ και } f'(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 2]$$

- Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 1$ και ισχύει ότι

$$g(xy) = xg(y) + yg(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: i. $f(x) = x - 1$, $x \in [0, 2]$

ii. η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ότι $g(x) = x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g στρέφει κοίλα άνω και να λύσετε την ανίσωση

$$g(x) \leq f(x) \text{ στο διάστημα } (0, 2)$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $0 < \alpha < \beta$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha \right) g(\alpha) \leq 2 \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \leq \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta} \right) g(\beta)$$

Δ4. Αν G είναι μια αρχική της g , να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, \sqrt{2})$ ώστε

$$G(2) = G(\xi^2) + 2\xi^2 \cdot \ln \xi \cdot g(\xi^2)$$

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το

$f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f

στο $[\alpha, \beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά

στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ. Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε

$x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .
- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης f .
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες $(6+9+7+3)=25$

- Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Γ3.** Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.
- Γ4.** Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \text{ όταν } x \in [0, +\infty).$$

Μονάδες $(4+8+4+9)=25$

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = \pi$

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ και $f'(0) = 1$.

Δ2. α. Να δείξετε ότι η f **δεν** παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)}$.

Δ4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$.

Μονάδες $[(4+3)+(4+2)+6+6] = 25$

Ε Π Α Ν Α Λ Η Π Τ Ι Κ Ε Σ 2 0 1 6

Θ Ε Μ Α Α

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες $(7+4+4) = 15$

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$.

β. Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε. Για κάθε συνάρτηση f , συνεχή στο $[a, \beta]$, ισχύει:

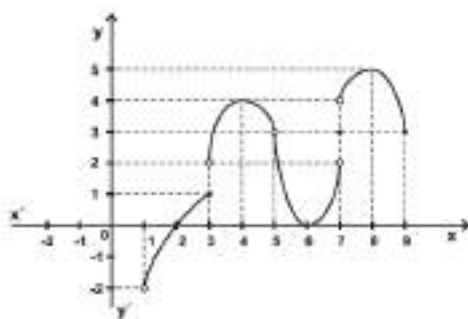
$$\text{αν } \int_a^\beta f(x)dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [a, \beta].$$

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

Θ Ε Μ Α Β

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 7} f(x) \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(2 + 7 + 9 + 3 + 4) = 25$

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$.

Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Μονάδες $[(2+4)+9+4+6] = 25$

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Δ2. Να δείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$$

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι $(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$, για κάθε $x > 1$.

Μονάδες $[(3+2)+8+(3+4)+5] = 25$

Θ Ε Μ Α Α

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει.

$$(\varepsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Μονάδες 10

A2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

β. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .

γ. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = - \int_\beta^a f(x) dx$$

Μονάδες 5 x 2 = 10

Θ Ε Μ Α Β

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax - 1}{x + 1}$, $x \neq -1$ όπου το a είναι ένας πραγματικός αριθμός.

B1. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

Αν $a = 3$ τότε:

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

B3. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.

B4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες (5+6+7+7)=25

Θ Ε Μ Α Γ

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}, \quad x > 2.$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2, +\infty)$.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=x+1$, $x=\lambda$ και $x=\lambda+1$ με $\lambda > 2$.

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in (2, +\infty)$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$.

Μονάδες (6+6+8+5)=25

Θ Ε Μ Α Δ

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.

Μονάδες (8+7+5+5)=25

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ν' αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = 0.$$

β. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ. Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

ε. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες $[7 + (1 + 3) + 4 + 10] = 25$

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

B2. Αν $h(x) = (fog)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες $(5+6+7+7)=25$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε.

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1,$$

όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, και

- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}.$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi.$$

Μονάδες (8+6+4+7)=25

Θ Ε Μ Α Δ

2017

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

- Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.
- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από
- τη γραφική παράσταση της f ,
 - τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$,
 - τον άξονα $y'y$ και
 - την ευθεία $x = \pi$.
- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση

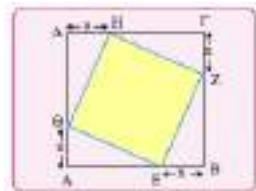
$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}.$$

Μονάδες (5+6+6+8)=25

Θ Ε Μ Α Β

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2017

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



B1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

B2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x)=2x^2-4x+4$, $0 \leq x \leq 2$

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

B4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

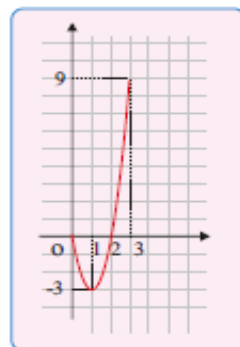
Μονάδες $(6+4+9+6)=25$

Θ Ε Μ Α Γ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2017

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα:
- $f(0)=2$, $f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$, $f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν τα,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2}$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το

$$\text{όριο } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}.$$

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες $(8+8+5+4)=25$

Θ Ε Μ Α Δ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2017

$$\text{Δίνεται συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(-\frac{\pi}{2} - x) = f(-\frac{\pi}{2} e^{-x})$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Μονάδες $(2+2+8+7+6)=25$

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη. »

- α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
- β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.
- β.** Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- γ.** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$
- δ.** Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- ε.** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- B1.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- B2.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει)

Μονάδες $(8+4+6+7)=25$

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8π , το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους $x\pi$, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8π , ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\pi^2$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha > 1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2,$$

τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει

τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}$$

Μονάδες $(3+7+6+9)=25$

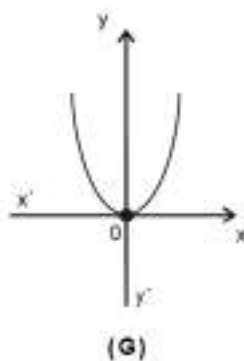
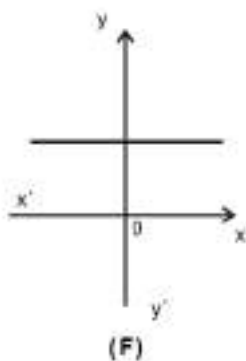
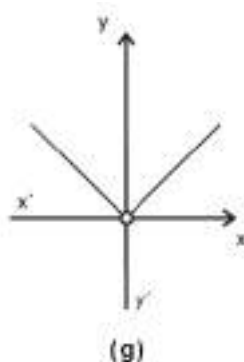
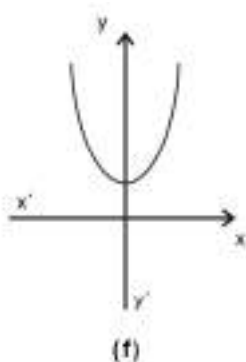
A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

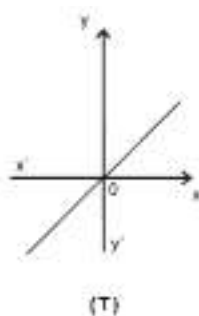
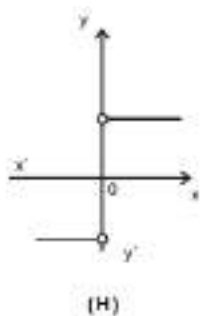
Μονάδες 7

A2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 4

A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T .





Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0 \text{ »}.$$

- α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
- β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες $(3+6+7+9)=25$

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = 2\eta\mu x - x$$

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx.$$

Γ4. α. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ (μονάδες 2)}$$

β. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]. \text{ (μονάδες 5)}$$

Μονάδες (5+5+8+7)=25

Θ Ε Μ Α Δ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2018

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) > 2^{f(x)} - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \cdot \ln 2$ να αποδείξετε ότι

$$\ln 2 < F(1) < \ln \left(\frac{2^{e+1}}{e+1} \right).$$

Μονάδες (5+5+5+5+5)=25

Υποδείξεις - Απαντήσεις

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

- 1153.** α) $\xi = e - 1$, β) Δεν ισχύει **Θ.Μ.Τ.**
- 1154.** $\alpha = \beta = 3$, $\xi = 1$
- 1155.** β) το ξ από το α) ερώτημα
- 1156.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[1, 3]$
- 1157.** Από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = -1$, οπότε ...
- 1158.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[2, 3]$.
- 1159.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[\alpha, \beta]$
- 1160.** α) Θέστε $x=0$ στην $f(-x) = -f(x)$ β) **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$
- 1161.** α) $f(1) = -2$, $f'(1) = 3$, $f(3) = 4$ και $f'(3) = -1$ β) **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[1, 3]$ γ) **Θ.Μ.Τ.** για την f' στο $[1, 3]$
- 1162.** **Θ.Μ.Τ.** στα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και Bolzano στο $[\xi_1, \xi_2]$
- 1163.** **A.** **Θ.** Bolzano στο διάστημα (α, β) **B.** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -5$. Οπότε **Θ. Μ. Τ. Γ. Θ. Ενδιάμεσος**
- Τιμών για την f ή **Θ.** Bolzano για την $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.
- 1164.** α) Αν υπάρχουν $\alpha < \beta$ με $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε ... άτοπο, β) $x=3$ ή $x=-3$ γ) **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[-2, 1]$.
- 1165.** β) Δείξτε ότι $\frac{f(e^2) - f(e)}{e^2 - e} < 0$
- 1166.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[\alpha, \beta]$.
- 1167.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[0, 3]$
- 1168.** α) Είναι $\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$ που ισχύει,
β) Διακρίνετε τις περιπτώσεις $\alpha = \beta$ και $\alpha \neq \beta$ και εφαρμόστε **Θ.Μ.Τ.**
- 1169.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$
- 1170.** i) Αν $x=y$ τότε ισχύει η ισότητα. Αν $x < y$, **Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = \sin t$ στο $[x, y]$ ii) 0
- 1171.** i) Αν $\alpha = \beta$ τότε ισχύει η ισότητα. Αν $\alpha < \beta$, **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \sin^2 x$ στο $[\alpha, \beta]$
ii) **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = x \sin x$ στο $[\alpha, \beta]$. Είναι $|f'(x)| = |\sin x - x \cos x| \leq |\sin x| + |x| |\cos x| < 2$
- 1172.** **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = 2^x$ στο $[\alpha, \beta]$.
- 1173.** Αν $\alpha = \beta$ τότε ισχύει η ισότητα. Αν $\alpha < \beta$, **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \sin x$ στο $[\alpha, \beta]$.
- 1174.** **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \ln(\eta \mu x)$ στο $[\alpha, \beta]$
- 1175.** **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \ln(\sin x)$ στο $[\alpha, \beta]$.
- 1176.** **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = x \ln x$ στο $[\alpha, \beta]$
- 1177.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και χρήση της μονοτονίας της f'
- 1178.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[8, 9]$ και $[10, 11]$
- 1179.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[\alpha, \alpha + 1]$ και $[\alpha + 1, \alpha + 2]$.
- 1180.** α) **Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \ln x$ στο $[2, e]$,
β) **Θ. Bolzano** για την $g(x) = x + \ln x - \frac{x}{e} - 2 \ln x$ στο $[2, e]$
- 1181.** α) **Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = e^t$ στο $[x, 0]$, β) **Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = e^t$ στο $[0, x]$,
γ) **Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = \ln t$ στο $[1, x + 1]$

- 1182. Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = \ln t$ στο $[1, x]$ και στο $[x, 1]$
- 1183. Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \sqrt{x+1}$ στο $[x, 0]$ και $[0, x]$.
- 1184. Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = \ln t$ στο $[x, x+1]$.
- 1185. Θ.Μ.Τ.** για την $f(x) = \ln^2 x$ στο $[x, x+1]$
- 1186. Θ.Μ.Τ.** για την $f(t) = \ln t$ στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$.
- 1187. i. Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[x, x+1]$.
 ii. **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[x, x+1]$.
 iii. **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x-1, x]$ και $[x+1, x+2]$.
 iv. **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$.
 v. **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x, x^2]$ και $[x^2, x^3]$.
 vi. **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[e^x, e^{2x}]$ και $[e^{2x}, e^{3x}]$.
- 1188. Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$.
- 1189. α)** Για $x=1$ ισχύει η ισότητα. Για $x > 1$ **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[1, x]$ $\beta)$ 0
 γ) **Θ. Bolzano** για την $h(x) = f(x) - 3x + 4$ στο $[2, 3]$.
- 1190. α)** Για $x=0$ ισχύει η ισότητα. Για $x > 0$ **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[0, x]$ $\beta)$ 0
- 1191. Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[0, x]$
- 1192. i) Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[a, x]$. ii) Από i) ερώτημα με πολλαπλασιασμό με $x-a$
 iii) Είναι $g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2} < 0$, λόγω ii) ερωτήματος.
- 1193. Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[0, x]$.
- 1194. Με Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[0, x]$ δείξτε ότι $xf'(x) > f(x)$
- 1195. Με Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[2, x]$ και $[x, 2]$ δείξτε ότι $f'(x)(x-2) - f(x) < 0$
- 1196. Αν** $g(x) = f(x) - (k-1)x$ τότε με χρήση **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x, 0]$ και $[0, x]$ δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ οπότε...
- 1197. α)** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \dots$
- $\beta)$ i) Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = \dots$
- ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{\frac{x}{4}}{x} \right) = \lambda - \frac{1}{4}$, οπότε....
- γ) **ΘΜΤ** στα $[x, 0]$ και $[0, x]$... Τελικά $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- δ) **Θ. Bolzano** για την $g(x) = f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$
- στα $[-1, 0]$ & $[0, 1]$ και Vieta
- 1198. ΘΜΤ** για την f στα $[0, 1]$, $[1, 2]$ και για την f' στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 απο τα πρώτα **Θ.Μ.Τ.** για τα οποία ισχύει $|x_2 - x_1| < 2$.

- 1199.** ΘΜΤ για την f στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$ και για την f' στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 από τα πρώτα Θ.Μ.Τ. για τα οποία ισχύει $|x_2 - x_1| < |\beta - \alpha|$.
- 1200.** ΘΜΤ για την f στα $[-1, x]$ & $[x, 3]$
- 1201.** i. ΘΜΤ για την f στο $[-1, 2]$ ii. ΘΜΤ για την f στο $[x, 2]$
- 1202.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[1, 2], [2, 4]$
- 1203.** α) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - 2x$ στο $[\alpha, \beta]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ όπου x_0 από α) ερώτημα
- 1204.** α) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x$ στο $[\alpha, \beta]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$ όπου x_0 από το α) ερώτημα
- 1205.** α) Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - ax$ στο $[0, 1]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0, x_0], [x_0, 1]$
- 1206.** α) Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ στο $[\alpha, \beta]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$
- 1207.** α) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - 2016$ στο $[0, 1]$ (ή ενδιαμέσων τιμών για την f), β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0, x_0], [x_0, 1]$ όπου x_0 από α) ερώτημα
- 1208.** α) Θ.Ε.Τ. για την f στα $[3, 13]$ και $[x_1, 13]$ β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[3, x_1], [x_1, x_2]$ και $[x_2, 13]$.
- 1209.** α) Θ. Bolzano για την $g(x) = 2f(x) - f(\alpha) - f(\beta)$ ή Θ.Ε.Τ. για την f , στο $[\alpha, \beta]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$ όπου x_0 η ρίζα του α. ερωτήματος.
- 1210.** α) Θ. Bolzano για την $g(x) = 5f(x) - 2f(\alpha) - 3f(\beta)$ στο $[\alpha, \beta]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$ και $[\alpha, \beta]$.
- 1211.** α) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0, 1]$ και $[2, 3]$, β) Θ. Bolzano για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.
- 1212.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[1, 3]$ και $[3, 5]$ και Θ. Bolzano για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.
- 1213.** α. Θ.Μ.Τ. για την f στα $[1, 2]$ και $[4, 5]$ β. Θ. Bolzano για την $g(x) = f'(x) - 2$ στο $[\xi_1, \xi_2]$.
- 1214.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ όπου x_0 από Θ. Bolzano για την f στο $[\alpha, \beta]$
- 1215.** Το x_0 από Θ. Bolzano για την f στο $[\alpha, \beta]$. Στη συνέχεια Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.
- 1216.** α) Θ. Rolle για την $g(x) = (1-x)f(x)$ στο $[0, 1]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, \xi]$.
- 1217.** i) Θ. Rolle στο $[1, 6]$ ii) Θ.Μ.Τ. στα $[1, 2]$ και $[2, 6]$
- 1218.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$.
- 1219.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[1, 2], [2, 3]$.
- 1220.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, \beta], \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$
- 1221.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0, 1], [1, 2]$ και $[2, 3]$.
- 1222.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\alpha, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3} \right], \left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3}, \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{3} \right], \left[\alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{3}, \beta \right]$.
- 1223.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0, 2], [2, 5]$.
- 1224.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\alpha, \alpha + \kappa \frac{\beta-\alpha}{\kappa+\lambda} \right], \left[\alpha + \kappa \frac{\beta-\alpha}{\kappa+\lambda}, \beta \right]$.
- 1225.** Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, \gamma_1], [\gamma_1, \gamma_2], [\gamma_2, \beta]$ όπου $\gamma_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{6}, \gamma_2 = \alpha + 3\frac{\beta-\alpha}{6}$

- 1226.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[1, x_0]$ και $[x_0, 2]$ όπου x_0 από **Θ. Bolzano** για την f στο $[1, 2]$
- 1227.** Από **Θ.Ε.Τ.** για την f στο $[0, 1]$ υπάρχει $x_0 \in (0, 1) : f(x_0) = \frac{1}{2}$ οπότε **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[0, x_0], [x_0, 1]$
- 1228.** Αν $d = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{5}$ και $\gamma = f(\alpha) + 2d$ από **Θ.Ε.Τ.** υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = \gamma$.
Μετά **Θ.Μ.Τ.** στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ για τα ξ_1 και ξ_2 και στο $[\alpha, \beta]$ για το ξ .
- 1229.** Αν $d = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{12}$ και $\gamma_1 - f(\alpha) = 3d$ και $\gamma_2 - \gamma_1 = 4d$ και $f(\beta) - \gamma_2 = 5d$
από **Θ.Ε.Τ.** υπάρχουν $x_2 \in (\alpha, \beta) : f(x_2) = \gamma_2$ και $x_1 \in (\alpha, x_2) : f(x_1) = \gamma_1$.
Μετά **Θ.Μ.Τ.** στα $[\alpha, x_1], [x_1, x_2]$ και $[x_2, \beta]$.
- 1230.** α) Είναι $f(1) = 2 > 0$ και f συνεχής, άρα ... β) **Θ.Ε.Τ.** για την g στο $[1, 2]$ γ) **Θ.Μ.Τ.** για την g στα $[1, \xi]$ και $[\xi, 2]$ δ) **Θ.Μ.Τ.** για την $h(x) = g(x+1) - g(x)$ στο $[0, 1]$
- 1231.** **Θ. Rolle** για την f στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 από **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[1, 2], [3, 4]$
- 1232.** **Θ. Rolle** για την g στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 από **Θ.Μ.Τ.** για την g στα $[-a, 0], [0, a]$
- 1233.** **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[2, 4]$ και $[4, 6]$ και **Θ. Rolle** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$
- 1234.** **Θ. Rolle** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου ξ_1, ξ_2 από **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
- 1235.** **Θ. Rolle** για την f' στα $[0, \xi]$ και $[\xi, 1]$ όπου ξ από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[0, 1]$
- 1236.** **Θ. Rolle** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου ξ_1, ξ_2 από **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$
- 1237.** Έστω ότι την τέμνει σε τρία σημεία και ... άτοπο.
- 1238.** Έστω ότι υπάρχουν και με 2 **Θ.Μ.Τ.** και ένα **Θ. Rolle** καταλήξετε σε άτοπο, αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 1239.** i) Έστω ότι $M \in C_f$ οπότε από **Θ.Μ.Τ** $f'(x_1) = f'(x_2) \dots$ άτοπο, ii) **Θ. Rolle** για την $h(x) = \frac{f(x) - \lambda}{x - \kappa}$ στο $[\alpha, \beta]$
- 1240.** α) Από **Θ.Μ.Τ.** προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \neq \alpha$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f'(\alpha)$, β) **Θ. Rolle** για την f' στο $[\alpha, \xi]$.
- 1241.** α) **Θ.Μ.Τ.** για την g στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.
β) **Θ.Μ.Τ.** για την g' στο διάστημα $[x_1, x_2]$.
- 1242.** **Θ.Μ.Τ.** για την f' στο $[\gamma, \beta]$ όπου γ από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[\alpha, \beta]$
- 1243.** α) **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[1, 2]$ και $[2, 3]$, β) **Θ.Μ.Τ.** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.
- 1244.** **Θ.Μ.Τ.** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου ξ_1, ξ_2 από **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.
- 1245.** α) **Θ. Bolzano** για την f στο $[\gamma, \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$, β) Αν $\gamma = \delta$, τότε $f(\gamma) = f(\delta)$, οπότε ... άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\gamma < \delta$ και εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την f στα διαστήματα $[\alpha, \gamma], [\gamma, x_0], [x_0, \delta], [\delta, \beta]$ και για την f' στα $[x_1, x_2]$ και $[x_3, x_4]$ όπου x_1, x_2, x_3, x_4 από τα **Θ.Μ.Τ.** για την f . γ) **Θ. Bolzano**
- 1246.** i. Από το **Θ. Ενδιαμέσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\delta \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f(\delta) = f(\beta)$ ενώ $\delta < \gamma < \beta$ ii. **Θ. Rolle** για την f στο (δ, β) iii. **Θ.Μ.Τ** για την f στα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ και **Θ.Μ.Τ** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$
- 1247.** α) **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$, β) **Θ.Μ.Τ.** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$. Είναι $|\xi_2 - \xi_1| < 2$.

- 1248.** i. Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, όπου $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ τα σημεία τομής C_f και $y = x$.
 ii. Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$
- 1249.** Θ.Μ.Τ. για την f' στα $[-1, \xi]$ και $[\xi, 1]$ όπου ξ από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1, 1]$ και Θ. Bolzano για την f'' στο $[\xi_1, \xi_2]$, όπου ξ_1, ξ_2 από τα Θ.Μ.Τ. για την f' .
- 1250.** α. i. Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - x^3$ στο $[\alpha, \beta]$
 ii. Θ. Rolle για την $h(x) = (x - \beta)f(x) - f(\alpha)x$ στο $[\alpha, \beta]$
 β. i. Θ. Bolzano για την $\varphi(x) = f(x) - x$ στο $[\alpha, \beta]$
 ii. Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, c]$ και $[c, \beta]$.
- 1251.** α. Θ.Μ.Τ. για την f στα $[2, 3]$, $[4, 5]$ β. $\alpha = 0$ ή $\alpha = 1$ γ. $0 < \alpha < 1$
- 1252.** i. $x = 0$ ή $x = 1$. ii. $x = 0$ ή $x = 1$ iii. Θέστε $x = 2y$. Τελικά $x = 0$ ή $x = 2$

Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

- 1253.** Δείξτε ότι $h'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
1254. Δείξτε ότι $h'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
1255. Δείξτε ότι $h'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
1256. Δείξτε ότι αν $g'(x) = 0$, τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
1257. α) Δείξτε ότι $g'(x) = 0$, β) $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, γ) $f(x) = e^x - 9$
1258. α) Είναι $g'(x) = 0$, β) $f(x) = e^{2x}$
1259. α) $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, β) $f(x) = e^{1/x}$
1260. i) Είναι $g'(x) = 0$ ii) $f(x) = e^{-2x}$ iii) Είναι $(h(x) - \varphi(x))' = -2(h(x) - \varphi(x))$ οπότε...
1261. Δ.1. Δείξτε ότι $g'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Δ.2. Είναι $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε
 Δ.3. Θ. Bolzano για την $h(x) = x \cdot \eta \mu x + \sigma \nu \nu x - 1$ στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
 Δ.4. Θ. Bolzano για την $\Phi(x) = x \cdot \eta \mu x + \sigma \nu \nu x - 1 - \frac{2}{\pi^2} x^2$ στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
1262. α) Δείξτε ότι $h'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. β) $f(x) = e^x \eta \mu x$ και $g(x) = e^x \sigma \nu \nu x$.
1263. $g(x) = 1$
1264. Δείξτε ότι $(f^2(x) + f^2(-x))' = 0$, άρα ...
1265. Δείξτε ότι η $g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή
1266. α) Είναι $f''(x) = -f(x)$: συνεχής ως παραγωγίσιμη Ομοίως για την g β) $f''(x) = -f(x)$
 γ) Είναι $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δ) Η ύπαρξη από Θ. Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$. Η μοναδικότητα από Θ. Rolle για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ και άτοπο
1267. $f(x) = e^x - e^{-x}$
1268. Δείξτε ότι η $g(x) = f(x) - \sigma \nu \nu x$ είναι η μηδενική συνάρτηση.
1269. α) Δείξτε ότι $(g'(x))^2 + (g(x))^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, β) Προκύπτει από το α) ερώτ.
1270. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$, οπότε ...

- 1271.** Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$, άρα ...
- 1272.** i) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0$ για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$. ii) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
- 1273.** Είναι $f'(x) = (g(x) + \eta \mu x)'$ οπότε ...
- 1274.** i) Είναι $f'(x) = (g(x) + x)'$ οπότε ii) Δείξτε ότι $f(x_0) = g(x_0) + x_0$
- 1275.** $0 < x < 2$
- 1276.** β) **Θ. Bolzano** για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$
- 1277.** i) $f(x) = 2e^x + \ln x + \frac{1}{x} - 1$, ii) $f(x) = e^x \eta \mu x + 3$, iii) $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x} - \frac{1}{\pi}$,
 iv) $f(x) = -\frac{1}{\eta \mu x} + 4$, v) $f(x) = \frac{1}{3} \eta \mu 3x + e^{x^2+1} + 1 - e$,
 vi) $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \eta \mu x + \ln x - 2x + \frac{5}{3}$, vii) $f(x) = \ln(\sigma \upsilon \nu x) + 3x + 1$
- 1278.** $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
- 1279.** $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, x > 0$
- 1280.** i) $f(x) = \eta \mu x$, ii) $f(x) = -\ln x$, iii) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, iv) $f(x) = \frac{1}{4}(e^x + 1)^2 + 1$,
 v) $f(x) = \frac{x+1}{\sigma \upsilon \nu x}$, vi) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, vii) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{2x}$, viii) $f(x) = \frac{1}{2} x(x^2 + 3)$,
 ix) $f(x) = 8 \sigma \upsilon \nu^3 x$
- 1281.** $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x \dots$ άρα $f(x) = (x^2 + 2)^2$
- 1282.** $f(x) = \frac{e}{\ln x}, x > 1$
- 1283.** α) Η f είναι δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ β) $f(x) = x$
- 1284.** Για $x \neq 0$ η σχέση ισοδύναμα γράφεται: $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (e^{2x} - x)' \Rightarrow \dots$
- 1285.** $f(x) = e^{x-x^2}, x \in \mathbb{R}$
- 1286.** Αφού βρείτε ότι $\ln f(x) + f(x) = x + e^x$, να κάνετε χρήση της $H(t) = t + \ln t$. Τελ $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
- 1287.** α) Είναι $f'(x) = (\ln x - \sqrt{1-x})'$, $x \in (0,1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$
 β) i) $(-\infty, 0]$ ii) Είναι $0 < f^{-1}(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 f^{-1}(x) \leq x^2$ άρα ...
- 1288.** α) Η σχέση γράφεται $\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln f(x) + \sqrt{x} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} \ln f(x))' = 0 \dots$
 β) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}, x > 1$
- 1289.** $g(x) = -\frac{1}{x}, x > 0$ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, x > 0$

1290. α) Αφού παραγωγίσουμε ως προς y και θέσουμε $y = 1$ παίρνουμε $f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha$,

οπότε...β) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)x$, οπότε...

1291. α) θέστε $x = y = 1$, β) δείξτε με τον ορισμό ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1)$,

γ) $f(x) = x \ln x$, $x > 0$

1292. α) i) Θέστε $x=y=1$ και μετά $y = \frac{1}{x}$ ii) Η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για

κάθε $x > 0$ με $f(0) = 0$ iii) Στο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέστε $h = \frac{x\alpha}{x_0}$ β) $f(x) = \sqrt{x}$

1293. γ) $f(x) = -\ln x$

1294. $y = 4x - 1$

1295. $g(0) = 0$

1296. $f(x) = 2x\sqrt{x} - x$, $x > 0$

1297. $f(x) = x^{\ln x} + 1$, $x > 0$

1298. $f(x) = e^x + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

1299. $f(x) = e^{x+2015}$, $g(x) = \ln x - 2015$

1300. $f(x) = e^{x-2016} - e^{2016-x}$, $g(x) = \ln x + 2016$

1301. i) $g(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x > 0 \\ -\frac{2}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$

1302. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x < 0 \\ x^3 - x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

1303. $f(x) = x^2 + x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

1304. $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi}, & x < 0 \\ \eta\mu x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi}, & x > 0 \end{cases}$

1305. α) $f(x) = \frac{\ln|x| + e}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, β) $f(x) = \begin{cases} x \ln(-x) - x, & x < 0 \\ x \ln x + \frac{x}{2}, & x > 0 \end{cases}$

1306. Είναι $(xf(x))' = (e^x)'$, άρα $xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x < 0 \\ e^x + c_2, & x > 0 \end{cases}$ και αφού f συνεχής....

1307. i) $f(x) = e^{3x}$, ii) $f(x) = e^{x^3}$, iii) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$, iv) $f(x) = \frac{2}{3}(e^{\frac{3}{2}x} - 1)$,

v) $f(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{-x^2})$, vi) $f(x) = \frac{e^{\eta x} + 1}{e^{\eta x}}$,

- 1308.** α) $f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x}}, x > 0$ β) 1
- 1309.** α) Δείξτε ότι $h(x) = 1, x \in \mathbb{R}$, β) $g(x) = xe^x + e^x$, γ) $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)e^x$
- 1310.** α) Δείξτε ότι $f''(x) = f(x)$ και μετά ότι $g'(x) = 0$
 β) Είναι $f'(x) + f(x) = 4e^x$ και πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με e^x
 γ) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4}\right), x \in D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$
- 1311.** Αν $g(x) = f(x) + \ln x$, τότε είναι $g'(x) + 2xg(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$
 Τελικά $f(x) = e^{-x^2} - \ln x, x > 0$.
- 1312.** Είναι $f'(x) = f(x) + 1 \dots \dots$ Τελικά $f(x) = 2e^x - 1$.
- 1313.** Είναι $f''(x) = f'(x) \dots \dots$ Τελικά $f(x) = 2e^x - 1$.
- 1314.** α) Είναι $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dots = -f(x) + e^{-x}$ β) Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με e^x γ) Θέστε $x^3 + 1 = t$, οπότε $g'(t) = (1-t)e^{-t}, t \in \mathbb{R}$, οπότε ...
- 1315.** $g(x) = 1992e^{\sin x}$
- 1316.** $f(x) = e^x \eta \mu x$
- 1317.** Η σχέση γράφεται $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)}{g(x)}$
- 1318.** $f(x) = (1 + x^2)e^x, x \in \mathbb{R}$
- 1319.** $f(x) = e^{e^x}, x \in \mathbb{R}$
- 1320.** $f(x) = xe^x, x \geq 0$
- 1321.** α) Πρώτα δείξτε ότι $f(x)g(x) = c$, β) Δείξτε ότι $f'(x_0)g'(x_0) = -1$
- 1322.** α) Δείξτε ότι $(f(x)f(-x))' = 0$, β) Δείξτε ότι $f'(x) = f(x)$
- 1323.** Είναι
$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{x^2} f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{-1}{x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(*)} \dots \dots \dots f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$
 Τελικά $f(x) = x, x > 0$
- 1324.** δ) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
- 1325.** α) Δείξτε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$,
 β) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
- 1326.** i) Παραγωγίστε ως προς y και θέστε $y = 0$ ii) Είναι $(f(x) + x)' = f(x) + x$, οπότε...
- 1327.** α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $(1 - e^{-f(x)})' = 1 - e^{-f(x)} \Rightarrow \dots$
 β) Προφανής ρίζα η $x=1$
- Για $0 < x < 1$ είναι: $f(x^2) + f(\ln x) > f(x) + f(0)$
 - Για $x > 1$ είναι: $f(x^2) + f(\ln x) < f(x) + f(0)$

γ) i) Θεώρημα Bolzano ii) ΘΜΤ στα $[0, x_0], [x_0, 1]$

1328. i) Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Για $y = x_0$ η δοθείσα σχέση δίνει

$$\begin{aligned} |e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)| &\leq (x - x_0)^2 \Leftrightarrow |e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{e^{x_0} f(x) - e^x f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{e^{x_0} f(x) - e^{x_0} f(x_0) + e^{x_0} f(x_0) - e^x f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0| \Leftrightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{e^{x_0} (f(x) - f(x_0)) - f(x_0) (e^x - e^{x_0})}{x - x_0} \leq |x - x_0| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq e^{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \leq |x - x_0| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-x_0} f(x_0) \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{-x_0} |x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq e^{-x_0} f(x_0) \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} + e^{-x_0} |x - x_0| \end{aligned}$$

ii) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2+x}}{3\eta\mu 2x - 5} = -\infty$

iv) α) Είναι $g''(x) = h''(x)$ οπότε... β) $g(x) = -\ln x, x > 0$

1329. i) $f(x) = -\sqrt{4 - 2\sin x}$ ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, iii) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 2e^x}$,

iv) $f(x) = \sqrt{e^{x^2+1}} - 1$, v) $f(x) = e^x + 2$

1330. $f(x) = e^x + 1$

1331. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$

1332. α) Θέστε $x=0$ β) Αν υπάρχει ρ ώστε $f(\rho)=0$ τότε ... $\rho=0$, άτοπο. Άρα...

γ) Δείξτε ότι $g'(x) = 0$ δ) Είναι $g(x) = 1$ άρα $f(x)f'(x) = x \Leftrightarrow \dots$

1333. Αφού δείξετε ότι $[g'(x)]^2 = [g(x)]^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, βρείτε $g(x) = e^x$ και $f(x) = e^{-x}$ ή $g(x) = e^{-x}$ και $f(x) = e^x$

1334. Αν $g(x) = f(x) - x$, τότε είναι $\left(\frac{1}{g^2(x)}\right)' = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' \Leftrightarrow \dots$

Τελικά $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, x \in \mathbb{R}$.

1335. Είναι $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$ Τελικά $f(x) = g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

1336. Αν $\varphi(x) = f(x) - x$ και $h(x) = g(x) - x$, τότε είναι

$\varphi'(x)h(x) = h'(x)\varphi(x) \Leftrightarrow \dots$ Τελικά $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, x \in \mathbb{R}$.

1337. Είναι $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$ ή $(\ln f(x))' = (\ln g(x))' \Leftrightarrow \dots$

Τελικά $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x \in [0, +\infty).$

1338. $f(x) = x^3$

1339. Η σχέση γράφεται $f''(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)'$ άρα ... και τελικά $f(x) = x \ln x + x, \quad x > 0$

1340. Η σχέση γράφεται $(xf'(x))' = (2 \ln x)'$, οπότε... Τελικά $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x$

1341. Η σχέση γράφεται $((x-1)f(x))' = (xf'(x))'$ άρα ... και τελικά $f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0$

1342. Είναι $(f'(x)-1)^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$, οπότε...

1343. $f(x) = e^x$

1344. $f(x) = \ln(x^2+1), \quad x \in \mathbb{R}.$

1345. i. Είναι $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x) \dots \dots \dots$ ii. $f(x) = x, \quad x > 0$

1346. $f(x) = -\ln x, \quad x > 0$

1347. Προσθέστε και στα δυο μέλη το $f'(x) \dots \dots \dots f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

1348. α) Είναι $f''(x) - f(x) = (4x+2)e^x \Leftrightarrow f''(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 4x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} + f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 4x+2$$

$$\Leftrightarrow (f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x})' = (2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow \dots$$

β) Θ.Μ.Τ. για την f' στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$

1349. α) Αν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε ... άτοπο.

β) $4f''(x)(f(x))^3 = -1 \Leftrightarrow 4f''(x)(f(x))^3 f'(x) = -f'(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4f''(x)f'(x) = -(f(x))^{-3}f'(x) \Leftrightarrow \left[2(f'(x))^2\right]' = \left[-\frac{(f(x))^{-2}}{-2}\right]', \text{ άρα...}$$

γ) $f(x) = \sqrt{x}$

1350. $f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x, \quad x > 0$

1351. Είναι $f^{(3)}(x) = \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)'$, $f''(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)'$, $f'(x) = (\ln x + x \ln x)'$ οπότε...

Κανόνες De L' Hospital

1352. i) $\ln a$, ii) 4, iii) $\frac{1}{2}$, iv) $\frac{1}{2}$, v) $\frac{3}{2}$, vi) 1, vii) 1, viii) $-\frac{1}{4}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - \sin x}{x^4} \cdot \frac{1}{\frac{\eta \mu x}{x}} \right] = \frac{1}{12}$

1353. i) $\frac{1}{6}$, ii) 3, iii) $\frac{1}{2}$

1354. i) 0, ii) 0, iii) 1, iv) 1, v) 0, vi) 0, vii) e^2 , viii) 1 ix) 1

1355. i) 0, ii) 0, iii) 0, iv) $+\infty$, v) 0, vi) 1, vii) 0, viii) 0, ix) 1, x) 0, xi) 0, xii) 0

1356. i) $\frac{1}{2}$, ii) $-\infty$, iii) 0, iv) $\frac{1}{3}$ v) $+\infty$, vi) $+\infty$, vii) $\frac{1}{2}$, viii) $+\infty$, ix) $+\infty$,

1357. i) $+\infty$, ii) $-\infty$, iii) $-\infty$, iv) $+\infty$, v) $-\infty$, vi) $+\infty$, vii) 0, viii) 0 ix) $+\infty$

1358. ii) $+\infty$

1359. α) Είναι $f(1)=1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ β) Θεωρώντας το y (ή το x) ως

μεταβλητή παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσεις.

$$\gamma) \text{ Είναι } \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(\ln|x| + \frac{1}{x^2} \right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} \ln|x| + \frac{1}{x^2} + c_1, & x < 0 \\ \ln|x| + \frac{1}{x^2} + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

με $f(1)=f(-1)=1$ και η f είναι συνεχής στο 0.

1360. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$

1361. i) Είναι $f'(1)=0$, ii) Είναι $f'(0)=1$, iii) Είναι $f'(1)=\pi^2$

1362. $y = x - 1$

1363. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

1364. α) $f(0)=0$, β) $f'(0)=12$, γ) $h'(0)=f'(0)$

1365. $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

1366. i) $\alpha = 2$, $\beta = 1$ ii) $\alpha = -1$, $\beta = -4$

1367. i) $\alpha = 4$, $\beta = -3$, ii) $\alpha = 1$, $\beta = 3$

1368. α) 1, β) $\alpha = -1$, γ) **Θ. Rolle** για την f στο $[1, 2]$

1369. A. Είναι $g'(x) = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ και δείξτε ότι $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$ για

κάθε $x \in (0, \pi)$. B. **Θ. Rolle** για την $H(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$, $x \in [0, \pi]$ Γ. i. $f(x) = \eta\mu x$

ii. Η ύπαρξη με **Θ. Bolzano** για την $\varphi(x) = x\eta\mu x - 1$ στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και

$[\frac{\pi}{2}, 0]$. Για τη μοναδικότητα θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \eta\mu x - \frac{1}{x}$ για την οποία

υποθέτουμε ότι έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ και από διαδοχικά **Rolle**άτοπο.

1370. Διαιρέστε με x και εκμεταλλευτείτε το $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Ο κανόνας **De L'**

Hospital δε θα δώσει αποτέλεσμα γιατί δε γνωρίζουμε αν η f' είναι συνεχής στο 0

1371. α) $f(0) = 1$, β) $f'(0) = 0$, γ) 7

1372. 3

1373. 2

1374. 1008

1375. Διαιρέστε με x^2 και εφαρμόστε όπου είναι εφικτό **De L' Hospital** έχοντας υπόψη

$$\text{ότι } f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 2$$

1376. Εφαρμόστε μια φορά De L' Hospital και κάντε χρήση του ορισμού

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

1377. α) Θέστε $u = -x$ β) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + 8$.

1378. $f(x) = x \ln x + 2x$, $x > 0$

1379. Εφαρμόστε δυο φορές **De L' Hospital** και κάντε χρήση του ορισμού

$$f^{(3)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}.$$

1380. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} [f'(x)f(x+2) + f(x)f'(x+2) + 1] = 1 \dots\dots$

1381. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{1 - \sin x}{5f^4(x) + 3f^2(x) + 1}$

1382. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^{f(x)} + 1} \cdot \frac{\sin x - 1}{x^4} \right] = -\infty$

1383. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{ef(x)}{1 + f(x)e^{f(x)}} \cdot \frac{e^x - 1}{2x} \right] = \dots$

1384. α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x} = \dots$, β) Θέστε $g(x) = f(x) + xf'(x)$, οπότε ...

1385.

Μονοτονία – Ακρότατα Συνάρτησης

1386. i) f γν. αύξουσα στο $(-\infty, -2], [1, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[-2, 1]$,

ii) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

iii) f γν. αύξουσα στα $[-1, 0], [1, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στα $(-\infty, -1], [0, 1]$,

iv) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$,

v) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0], [2, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στα $[0, 1], (1, 2]$,

vi) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 3], [7, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στα $[3, 5], (5, 7]$,

vii) f γν. αύξουσα στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, f γν. φθίνουσα στα $[-2, -\sqrt{2}], [\sqrt{2}, 2]$,

viii) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 2)$, f γν. αύξουσα στο $(4, +\infty)$,

ix) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -\ln 2]$, f γν. αύξουσα στο $[-\ln 2, +\infty)$,

x) f γν. αύξουσα στο $(0, \sqrt{e}]$, f γν. φθίνουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$,

xi) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0], [1, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$,

xii) f γν. αύξουσα στα $(0, 1], [2, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[1, 2]$,

xiii) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, xiv) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

xv) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0], [1, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$,

xvi) f γν. φθίνουσα στο $(0, \sqrt{e}]$, f γν. αύξουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$,

xvii) f γν. αύξουσα στα $(0, e^{-3}]$, $[e, \infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[e^{-3}, e]$,

- xviii) f γν. αύξουσα στο $(0, \ln 2]$, f γν. φθίνουσα στο $[\ln 2, +\infty)$,
- xix) f γν. αύξουσα στα $\left(0, \frac{1}{e}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, f γν. φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right]$,
- xx) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- 1387.** i) Τ.ελάχιστο το $f(1) = -2$, Τ.μέγιστο το $f(3) = 5$.
 ii) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$,
 Ελάχιστο το $f(1) = 0$.
 iii) f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$, f γνησίως φθίνουσα στα $[1, 2)$,
 $(2, 3]$, Τ.μέγιστο το $f(1) = 2$, Τ.ελάχιστο το $f(3) = 6$.
 iv) Τ.μέγιστο το $f(4) = 1$, Τ.ελάχιστο το $f(16) = 25$.
 v) f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$, f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, Τ.μέγιστο
 το $f(1) = 1$, Ελάχιστο το $f(2) = 0$.
 vi) Τ.ελάχιστο το $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$, Τ.μέγιστο το $f(3) = 2$.
 vii) f γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, f γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, Ελάχιστο το
 $f(-1) = f(1) = 0$, Μέγιστο το $f(0) = 1$.
 viii) Τ.μέγιστο το $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 5$, Τ.ελάχιστο το $f(-2) = f(0) = f(2) = 4$.
 ix) f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$, $[1, +\infty)$, f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$,
 Τ.ελάχιστο το $f(1) = e$.
 x) Ελάχιστο το $f(-1) = f(1) = e$, Τ.ελάχιστο το $f(1) = e$.
 xi) Τ.μέγιστο το $f(4) = 4\ln 2$. xii) Δεν υπάρχουν.
- xiii) f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$,
 ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-1}{2e}$.
- xiv) f γνησίως αύξουσα στα $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$, $[1, +\infty)$, f γνησίως φθίνουσα στο
 $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$, Τ.μέγιστο το $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$, Τ.ελάχιστο το $f(1) = 0$.
- xv) Τ.ελάχιστο το $f(0) = 1$, Τ.μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.
- xvi) Τ.ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3-2\sqrt{3}}{4}$, Τ.μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0$.
- 1388.** α) $f(2) = -2$ $f(3) = -3$ β) $\lambda_{OA} = \lambda_{OB} = -1$
- 1389.** $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$
- 1390.** f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -3]$, $[1, +\infty)$, f γν. αύξουσα στο $[-3, 1]$,
 f' γν. αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, f' γν. φθίνουσα στο $[-1, +\infty)$.
- 1391.** α) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[3, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στα $[-1, 1)$, $(1, 3]$,
 β) f' γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$ και γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$,
- 1392.** α) $f'(x) = (x-2)\ln x$, β) γν. αύξουσα στο $(0, 1]$, γν. φθίνουσα στο $[1, 2]$,
 γν. αύξουσα στο $[2, +\infty)$ Τ.μέγιστο το $f(1) = \frac{7}{4}$, Τ.ελάχιστο στο $f(2) = 3 - \ln 4$
- 1393.** A. $D_f = [-3, 3]$ B. α) Για $x \in (-3, 3)$ είναι $f'(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 9}{\sqrt{9 - x^2}}$

β) $f'(-3) = 0$

Γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$\left[\frac{3}{2}, 3\right]$. Δ. Τοπικό ελάχιστο : $f(-3) = 0$ Τοπικό μέγιστο :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + 3\right)\sqrt{9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \quad \text{Τοπικό ελάχιστο : } f(3) = 0.$$

1394. α) f γν. φθίνουσα στα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, f γν. αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$,

β) f γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, f γν. φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$,

γ) f γν. φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, f γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

δ) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

1395. i) f γν. αύξουσα στο $(-\infty, 5]$ και γν. φθίνουσα στο $[5, +\infty)$

ii) f γν. αύξουσα στο $(-\infty, 3]$ και γν. φθίνουσα στο $[3, +\infty)$

iii) f γν. αύξουσα στο $(-\infty, \frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2 - \alpha}]$ και γν. φθίνουσα στο $[\frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2 - \alpha}, +\infty)$

iv) f γν. αύξουσα στο $(0, \frac{e^2}{a}]$ και γν. φθίνουσα στο $[\frac{e^2}{a}, +\infty)$

1396. i) f γν. αύξουσα ii) f γν. αύξουσα iii) f γν. φθίνουσα iv) f γν. αύξουσα

1397. α) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$,

β) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[0, 2]$,

γ) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$,

δ) f γν. φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$, f γν. αύξουσα στα $[-2, 0]$, $[2, +\infty)$

1398. i) Τ.ελάχιστο το $f(-2) = -7$, Τ.μέγιστο το $f(1) = 2$ Τ.Ελάχιστο το $f(3) = -2$.

ii) Τ.μέγιστο το $f(-2) = 4$, Τ.ελάχιστο το $f(2) = -4$. iii) Ελάχιστο το $f(1) = -1$.

1399. g γν. φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

1400. Δείξτε ότι $f'(x) = \frac{x(e^x - 1)}{1 + f^2(x)} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

1401. α) Ελάχιστο της f το $f(a)$, β) Είναι $x + 1 > x$ και f' γν. αύξουσα

1402. Ελάχιστο το $f(0) = 0$

1403. α) Είναι $((x^2 + 1)f(x))' = (e^x)'$, άρα ..., β) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

1404. β) Μέγιστο το $h\left(\frac{\ln 4 - \ln \alpha}{4 - \alpha}\right)$, ελάχιστο το $h(0) = 0$, γ) $x_2 = 2x_1$

1405. α) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, β) Είναι $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow \dots$

1406. α) f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$, f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$, β) Λόγω α) είναι $f(\alpha) < f(\beta)$.

1407. α) f γν. φθίνουσα στα $(-\infty, 1)$, $(1, 2]$, f γν. αύξουσα στο $[2, +\infty)$,

β) $\alpha < \beta < 1 \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \dots$

1408. α) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 500]$, f γνησίως αύξουσα στο $[500, +\infty)$,

β) Είναι $0 < 100 < 500$ άρα $f(0) > f(100) \Leftrightarrow \dots$

- 1409.** α) f γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$, f γνησ. αύξουσα στο $[e, +\infty)$, β) $\sqrt[n]{v} > \sqrt[n+1]{v+1}$
1410. α) f γν. αύξουσα στο $(0, e]$, f γν. φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, ολικό μέγιστο το $f(e)$
 β) Είναι $f(3) > f(5) > f(6)$
1411. α) f γν. αύξουσα στο $[0, e]$, f γν. φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, β) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$
1412. α) η f είναι γν. αύξουσα στο $A=(0, +\infty)$, β) Ισχύει: $x < x+1 \Leftrightarrow f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow \dots$
1413. α) Είναι

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h-1} \stackrel{u=\frac{x}{h}}{=} \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{\frac{x}{u} - 1} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{\frac{x-u}{u}} = \lim_{u \rightarrow x} \left(-u \frac{f(u) - f(x)}{u-x} \right) = -x f'(x) \dots$$

β) f γν. φθίν. στο $(0, +\infty)$, γ) Λόγω α) από $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ έχουμε $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > f(1)$.

- 1414.** Α. Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[2, 3]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = f(3) - f(2), \text{ οπότε...}$$

Β. **Θ.Μ.Τ.** και **Θ. Bolzano** για την f στο $[1, 2]$

Γ. **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[1, x_0]$ και $[x_0, 3]$

Δ. i. **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[2, x]$, $x > 2$

$$\text{ii. Για κάθε } x > 2 \text{ είναι } 0 \leq \frac{\ln x}{f(x)} \leq \frac{\ln x}{x-1} \text{ οπότε...}$$

- 1415.** Α. i. 2016 ii. 2016 iii. 1 Β. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[x, 2x]$ οπότε...

$$\Gamma. \text{ Είναι } g'(x) = \dots = \frac{2f'(2x) - f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0 \text{ γιατί...}$$

$$\Delta. \text{ Είναι } 0 < x < 2x \Rightarrow g(x) < g(2x) \Rightarrow \dots$$

$$E. \text{ Είναι } g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (1, 2016), \text{ οπότε...}$$

- 1416.** Α. Παραγωγίζοντας τα μέλη της δοθείσας έχουμε

$$f'(f(x))f'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0, \text{ οπότε...}$$

Β. $x = 2$ Γ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha) \geq \alpha$ άτοπο

Δ. **Θ.Μ.Τ** σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ Ε. Έστω ότι υπάρχει

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ ώστε } f(x_0) > x_0 - 1$$

$$\Rightarrow f(x_0) + 1 > x_0 \quad \Rightarrow \quad \overset{(f \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R})}{f(f(x_0) + 1)} > f(x_0) \dots \dots \dots \text{άτοπο.}$$

- 1417.** α. Η ύπαρξη της ρίζας x_0 με Bolzano στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ και η μοναδικότητα με μονοτονία.

β. f γν. φθίνουσα στο $(0, x_0)$ και γν. αύξουσα $(x_0, +\infty)$

- 1418.** α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = f'(1) \dots$

β. Για $x \neq 1$ είναι $g'(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + f(1)}{(x-1)^2}$ και

$$h(x) = f'(x)(x-1) - f(x) + f(1) > 0 \text{ για } x \neq 1.$$

1419. $\alpha \in [-4, 4]$

1420. $\lambda \geq 1$

1421. $\alpha \in (-\infty, -1]$

1422. Δείξτε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1423. α) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, β) $0 < x < 1$

1424. α) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, β) $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = 1$, γ) $x < -1$ ή $x > 1$

1425. α) f γν. αύξουσα $(0, +\infty)$, β) $x = \frac{\pi}{4}$

1426. α) f γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, β) $x < 2$ ή $x > 3$

1427. Αν $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, $x \in (\alpha, \beta]$, δείξτε ότι $g(x) < g(\alpha)$.

$$\text{Είναι } g'(x) = \frac{(x - \alpha)f'(x) - (f(x) - f(\alpha))}{(x - \alpha)^2} \text{ και } \Theta.M.T. \text{ για την } f \text{ στο } [\alpha, x]$$

1428. i) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ii) $x = 4$, iii) $x > 1$

1429. α) f γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, β) $x \neq 0$

1430. α) Δείξτε ότι $f'(x) > 0$ διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x \geq 0$ και $x < 0$, β) i. $x = 0$,

$$\text{ii. } \theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \gamma) \quad x < 1$$

1431. α) Πρέπει $f'(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . β) Θέστε $x = 1$ γ) θέστε όπου x το $f'(x)$ δ) Είναι $xf''(x) + f'(x) = 0$, οπότε...

1432. α) $A(-1, \alpha - 1)$, $B(0, \alpha)$, $\Gamma(1, \alpha - 1)$, β) **Θ. Bolzano** για την ύπαρξη μονοτονίας για τη μοναδικότητα.

1433. α) Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, β) **Θ. Bolzano** για την f στο $[0, 1]$ και λόγω μονοτονίας της f

1434. α) Είναι $f'(x) = \frac{-\eta\mu x}{3f^2(x) + 1} < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, β) **Θ. Bolzano** ή $x = \frac{\pi}{2}$

προφανής. Μοναδικότητα λόγω μονοτονίας

1435. Η ύπαρξη από **Θ. Bolzano** για την $g(x) = f(x) + x \ln x - x$ και η μοναδικότητα από μονοτονία της g .

1436. Η ύπαρξη από **Θ. Bolzano** για την $g(x) = f(x) - x + e^x$ και η μοναδικότητα από μονοτονία της g .

1437. α) Η $f'(x)$ είναι συνεχής και χωρίς ρίζες άρα... β) $x = 1$ γ) Αν $g(\alpha) = 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = \dots\dots\dots = 1$$

1438. α) Είναι $f'(0) = 1$ β) Ολικό μέγιστο το $f(2) = 1$ γ) $\Theta.M.T.$ για την f στο $[2, 4]$ και μονοτονία της f' .

1439. α) Είναι $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0 \Leftrightarrow -5 + \frac{e^5}{4} > 0 \Leftrightarrow e^5 > 20$, ισχύει, $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow -\ln 4 + 1 < 0 \Leftrightarrow e < 4$,

$$\text{ισχύει } f(e^5) > 0 \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{4e^5} > 0, \text{ ισχύει } \beta) y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \quad \gamma) f \text{ γνησίως φθίνουσα στο}$$

$\left(0, \frac{1}{4}\right]$ και f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

δ) **Θ. Bolzano** στα $\left[\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right]$ και $\left[\frac{1}{4}, e^5\right]$ και μονοτονία της f .

1440. Α. $f'(x) = 3 - \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Β. **Θ. Bolzano** για την f στο $[0, \pi]$

Γ. $x = 2$ ή $x = 4$ Δ. 3

1441. α) $x = 1$, β) $x = 1$, γ) $x = 1$, δ) $x = 0$, ε) $x = 0$

1442. α) $1 < x < 2$, β) $0 < x < 1$, γ) $x \geq 1$

1443. α) Παραγωγίστε τα δύο μέλη και δείξτε ότι $f'(x) < 0$, β) $x = 1$

1444. $M(1, 1)$ με $f'(1) = g'(1) = 5$

1445. α) f γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, β) $x = 2$

1446. i. Είναι $e^x > x$, οπότε.... ii. $x = 0$ ή $x = 1$

iii. Αφαιρέστε κατά μέλη και θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$.

1447. α) Δείξτε ότι $f'(x) = 0$ β) $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

1448. f γνησίως φθίνουσα $(-\infty, -\ln 2]$, f γνησίως αύξουσα $[-\ln 2, +\infty)$, Ελάχιστο το $f(-\ln 2) = 1$.

1449. f γνησίως φθίνουσα $(0, \sqrt{e}]$, f γνησίως αύξουσα $[\sqrt{e}, +\infty)$, Ελάχιστο το $f(\sqrt{e}) = 1$.

1450. α. Είναι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ οπότε.... β. Είναι $3 < 5 \Leftrightarrow 3x > 5x \Leftrightarrow f(3x) < f(5x)$ γ.

Μοναδική ρίζα η $x = 0$.

1451. α. f γνησίως αύξουσα β. Προφανής η $x = 1$ Για $x < 1$ είναι

$x > x^5 \Leftrightarrow f(x) > f(x^5)$...

1452. α) Ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$ β) $\alpha = \beta = \gamma = 1$

1453. Ευθεία $y = x + \ln 2$

1454. α) • Αν $\alpha > 0$, τότε : $f(0) = 0$ Τ. μέγιστο και $f\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = \frac{-4\alpha^3}{27}$ Τ. ελάχιστο

• Αν $\alpha < 0$, τότε : $f(0) = 0$ Τ. ελάχιστο και $f\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = \frac{-4\alpha^3}{27}$ Τ. μέγιστο

β) Τα σημεία $(0, 0)$ και $\left(\frac{2\alpha}{3}, \frac{-4\alpha^3}{27}\right)$ επαληθεύουν την $y = -\frac{1}{2}x^3$

1455. $\alpha = 1$

1456. $\lambda = 1$

1457. Η f έχει ολικό μέγιστο το $M(\alpha) = \alpha^a e^a$. Το $M(\alpha)$ έχει για $\alpha = \frac{1}{e^2}$ ολικό ελάχιστο.

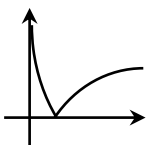
1458. α) $AM = \sqrt{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2} + x$ β) $M(4, 2)$ γ) i) $y = \frac{1}{4}x + 1$ ii) 90°

1459. α) $M(4, 2)$ β) $f'(4) = 1$ και $\lambda_{AM} = -1$

1460. α) i) 0 ii) $+\infty$ β) $M(2, 2)$ γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = -2$ έχει μοναδική ρίζα το $\sqrt{2}$

1461. α) $y = -\frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{\alpha}$ A(2α, 0) B(0, $\frac{2}{\alpha}$) β (OAM)=2 γ) Γ(α, 0) Δ(0, $\frac{1}{\alpha}$)

Π(α)=2(α+ $\frac{1}{\alpha}$), α=1, M(1, 1)

1462. i)  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$ ii) $x_1 \cdot x_2 = e^\alpha \cdot e^{-\alpha} = 1$

iii) $\varepsilon_A : y = e^{-\alpha}x - 1 + \alpha$, $\varepsilon_B : y = -e^\alpha x + 1 + \alpha$, οπότε

iv) Το (OMN) μεγιστοποιείτε για α=1 οπότε $\varepsilon_A : y = e^{-1}x$

1463. Αν $f'(\alpha) = 0$ τότε... άτοπο.

1464. Υπάρχουν γ, δ τέτοιοι ώστε $f(\gamma) = f(\delta)$. Αν f παραγωγίσιμη, εφαρμόζουμε **Θ. Rolle** στο $[\gamma, \delta]$. Αν όχι, πάλι έχουμε κρίσιμο σημείο

1465. x_1, x_2 ρίζες της $f'(x)$ οπότε $x_1 + x_2 = \frac{-2\beta}{3\alpha}$

1466. Με εφαρμογή του **Θ.Bolzano** για την f' στο $[\alpha, \beta]$ προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ρίζα $\rho \in [\alpha, \beta]$

1467. i. $x_1 = 0, x_2 = 1$ ii. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ iii. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

1468. i. $x_1 = 2, x_2 = 3$ ii. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 4$

iii. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 4$

1469. i. $g(0) = 0$. Αν $x < 0 : g(x) < 0$. Αν $x > 0 : g(x) > 0$ ii. $x_1 = 0$

iii. Στη θέση $x_1 = 0$ Τ. Ελάχιστο το $f(0)=0$ iv. Ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$

1470. i) $f(A) = (-\infty, -1]$, ii) $f(A) = (-\infty, 0]$, iii) $f(A) = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$, iv) $f(A) = \mathbb{R}$,

v) $f(A) = [1, +\infty)$, vi) $f(A) = \mathbb{R} - \{2\}$, vii) $f(A) = (1, 3]$,

viii) $f(A) = [1/3, 3]$ ix) $f(A) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

1471. Το $f(2)=1$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(4)=5$ είναι τοπικό ελάχιστο.

$f(A) = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

1472. $f(\Delta) = [0, e]$

1473. $f(\Delta) = [-31, 28]$

1474. $f(A) = \left[\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right]$

1475. $\lambda = 2$

1476. α) $f(A) = [-2, +\infty)$, β) $0 \in f(A)$ και f γν. αύξουσα στο A

1477. α) $f(A) = [2, +\infty)$ β) i) $1 \notin f(A)$ ii) Η $x=1$ μοναδική λύση iii) $3 \in f(A_1)$ και $3 \in f(A_2)$

1478. α) Η f είναι γν. αύξουσα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

β) $0 \in f(A)$ και f είναι γν. αύξουσα. Είναι $\rho = -1 - \frac{2}{1+e^\rho}$ οπότε...

1479. α) f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$, β) $f(A) = \mathbb{R}$ και f γν. αύξουσα.

1480. α) τρεις ακριβώς ρίζες, β) δύο ακριβώς ρίζες, γ) μια ακριβώς ρίζα

1481. Δύο αρνητικές και μια θετική ρίζα

1482. α) $v=3$, β) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$, γ) Ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$, δ) Αρνητική

1483. Η f είναι γν. μονότονη, γιατί η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, άρα και “1-1”,

οπότε ...

- 1484.** α) Αν $g(x_1) = g(x_2)$, τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow \dots$, β) Αν $h(x) = x^3 - 3x + 1$ είναι :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
h(x)	$-\infty$				$+\infty$

Μια ρίζα στο $(-\infty, -1)$ μια στο $(0, 1)$ και μια στο $(1, +\infty)$ ή **Θ. Bolzano** σε κατάλληλα διαστήματα

- 1485.** Γ1. f γν. αύξουσα Γ2. Η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{e^3}{2}$, οπότε....

- 1486.** Γ1. f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$ $f(A) = [1, +\infty)$

Γ3. Η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{3}{2}$ με $\frac{3}{2} \in f(\Delta_1) = (0, 1]$ και $\frac{3}{2} \in f(\Delta_2) = [1, +\infty)$,

οπότε.... Γ4. **Θ. Bolzano** για την $g(x) = xf'(x) - f(x) + \frac{3}{2}$ στο $[x_1, 1]$.

Η μοναδικότητα απο τη μονοτονία της g

- 1487.** Γ.1 Η δοθείσα σχέση γράφεται $[f(x) + x^2]' = (x^2)'$ οπότε ...

Γ.2 Η εξίσωση γίνεται $g(x) = 0$ και έχει ακριβώς μια ρίζα.

- 1488.** Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Γ2. $f(A) = [0, e^{\frac{1}{e}}]$

Γ3. i) $f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow \dots$

ii) Είναι $x^4 = 4^x \Leftrightarrow f(x) = f(4) = f(2)$, οπότε...

- 1489.** i) $D_f = (5, +\infty)$. ii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (5, +\infty)$. iii) $f(A) = \mathbb{R}$
iv) $2006 \in f(A)$ και η f είναι γν. αύξουσα.

- 1490.** I) $k = 3$

II) α) Η f είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$.

β) $f((-\infty, 0]) = (-\infty, 10]$ γ) **Θ. Bolzano** για την $g(x) = f(x) - a + 5$ στο $[0, 1]$ και g γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$.

- 1491.** α) $0 \in f(\Delta_1)$ όπου $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και f γν. φθιν. στο Δ_1 . $0 \in f(\Delta_2)$ όπου $\Delta_2 = [0, +\infty)$ και f γν. αύξ. στο Δ_2 β) Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το $O(0, 0)$ αν και μόνο αν $f(\xi) = 0$, οπότε ...

- 1492.** α) $f(A) = \mathbb{R}$, β) Επειδή η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 4x + a = 0$ δεν έχει ρίζες το -1 ή το 1 η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x) = a$.

- 1493.** α) $f(A) = \mathbb{R}$ β) Μια ρίζα $\rho \in (-1, +\infty)$.

- 1494.** i. Γν. αύξουσα ii. $f(A) = (0, 1)$ iii. $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

- 1495.** α) $f(A) = \mathbb{R}$ β) Δυο ρίζες $\rho_1 \in (-\infty, -1)$ και $\rho_2 \in (-1, +\infty)$.

- 1496.** α. Προφανής $x = 0$ και η $h(x) = e^{-x} - x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα

β. i. Είναι $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0$

ii. Είναι $e^{-f(x)} = f(x) + 1 - x > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ iii. $f(A) = [0, +\infty)$

1497. α) $A = (0,1) \cup (1, +\infty)$ $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Το $0 \in f(A_1) = f((0,1)) = \mathbb{R}$ και το $0 \in f(A_2) = f((1,+\infty)) = \mathbb{R}$ και f γν. φθίνουσα

στα A_1 και A_2 . γ) Οι $\varepsilon_A: y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha$ και $\varepsilon_B: y = e^\beta x + e^\beta - \beta e^\beta$ ταυτίζονται όταν:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ -1 + \ln \alpha = e^\beta - \beta e^\beta \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln \alpha = 0 \quad \delta) \text{ Συνέπεια του } \gamma) \text{ ερωτήματος.}$$

1498. α) f γνησίως αύξουσα στα $\Delta_1 = (-\infty, 1)$ και $\Delta_1 = (1, +\infty)$ β) Δύο ακριβώς ρίζες μια στο Δ_1 και μια στο Δ_2 γ) η εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \ln x$ στο σημείο $B(\beta, \ln \beta)$ με $\beta > 0$ ταυτίζεται με την εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$ στο σημείο $A(\alpha, e^\alpha)$ αν ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. δ) Ακριβώς δύο όσες είναι και οι ρίζες της f .

1499. α) Η g είναι γν. αύξουσα στο $(0, 1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ Ολικό μέγιστο το

$$g(1)=2 \quad g(A)=(-\infty, 2]. \quad \beta) \text{ Η } f \text{ παρουσιάζει μέγιστο στο } x=p \text{ με τιμή } f(p) = \frac{1}{p}$$

1500. i. $0 \notin \varphi(A_1) = \left[-\frac{1}{e} - 1, -1 \right)$ και $0 \in \varphi(A_2) = \left(-\frac{1}{e} - 1, +\infty \right)$. Αν $-1 < x_0 \leq 0$

τότε αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 θα είναι $\varphi(x_0) \leq \varphi(0) \Leftrightarrow 0 \leq -1$,

άτοπο. ii. Αν $x \in \Delta = [x_0, +\infty) = [-e^{x_0} - x_0, +\infty)$. Το $0 \in h(\Delta)$ επομένως

υπάρχει $\rho \in \Delta = [x_0, +\infty)$, τέτοιο ώστε $h(\rho) = 0$. Είναι

$$h(-\rho) = (-\rho-1)e^{-\rho} - (-\rho+1) = \frac{-\rho-1}{e^\rho} + \rho - 1 = \frac{-(\rho+1) + (\rho-1)e^\rho}{e^\rho} = \frac{h(\rho)}{e^\rho} = 0$$

και $-\rho \in (-\infty, x_0)$

iii. $\varepsilon_1: y = e^{x_1}x - e^{x_1}x_1 + e^{x_1}$, $\varepsilon_2: y = \frac{1}{x_2}x - 1 + \ln x_2$. Οι ε_1 και ε_2 να ταυτίζονται,

αν και μόνο αν

$$\begin{cases} e^{x_1} = \frac{1}{x_2} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 + \ln x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 + \ln x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 + \ln e^{-x_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ (x_1-1)e^{x_1} - (1+x_1) = 0 \end{cases}$$

1501. α) Η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, 1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ Ολικό μέγιστο

το $f(1)=1/2$ β) Το $0 \in f((0, 1)) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$ και $0 \in f((1, +\infty)) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$

γ) **Θ.Μ.Τ.** στα $[\rho_1, 1]$ και $[1, \rho_2]$ όπου $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$, οπότε...

δ) Είναι $g'(x) = \frac{2xf(x)}{e^{2x}}$ και η g παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στο ρ_1 και

ένα τοπικό μέγιστο στο ρ_2 .

1502. α) f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$, f γν. φθίνουσα στο $[0, 2]$,

β) $\forall -1 < \alpha < 3$, τότε $f(0) > 0$ και $f(2) < 0$, άρα ...

1503. α) $\alpha = -3$ β) 3 ρίζες πραγματικές και άνισες

1504. $0 < \alpha < 4$

1505. β) $-5 < \lambda < 0$

1506. i) f γν.φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και f γν. αύξουσα στο $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ Ολικό ελάχιστο

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e^2} \text{ ii) α) όχι β) ναι 1 ρίζα.}$$

1507. • $\forall \alpha < -2$ ή $\alpha > 2$ τότε 1 ρίζα • $\forall \alpha = -2$ ή $\alpha = 2$ τότε 2 ρίζες

• $\forall -2 < \alpha < 2$ τότε 3 ρίζες.

1508. • $\forall \alpha < 0$ ή $\alpha > 4$ τότε 1 ρίζα • $\forall \alpha = 0$ ή $\alpha = 4$ τότε 2 ρίζες

• $\forall 0 < \alpha < 4$ τότε 3 ρίζες

1509. α) Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ Ολικό ελάχιστο το $f(1)=e^{-1}$ β) $\forall \kappa < e^{-1}$ η εξίσωση είναι αδύνατη. $\forall \kappa = e^{-1}$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση. $\forall e^{-1} < \kappa < 1$ η εξίσωση έχει δύο ακριβώς λύσεις. $\forall \kappa \geq 1$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση. γ) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[e^{-1}, 1]$ και $[1, e]$

1510. Δ.1. Είναι $f(-2) = \frac{5}{12}$ και $f'(-2) = \frac{5}{18}$ Δ.2. f γνησίως αύξουσα στα

$(-\infty, 0)$, $[2, 4]$ και $(4, +\infty)$ f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2]$. Τοπικό

ελάχιστο το $f(2) = \frac{3}{4}$. Δ.3. $f(A) = \mathbb{R}^*$

Δ.4. $\forall \kappa=0$ τότε καμία ρίζα $\forall f(x) = 2x^3 - 3(\alpha+2)x^2 + 6\alpha x^2 + 6\alpha^2 x + \beta$ τότε 1 ρίζα $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε 2 ρίζες $\forall f$ τότε 3 ρίζες.

1511. α. $x_0 = 2$ β. 5

γ. • $\forall \alpha, \beta$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

• $\forall f(x) = e^{ax} - 2x - 1$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x \in \mathbb{R}$.

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες,

• $\forall \alpha = 0$ τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

• $\forall C_f$ τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο $e^{2x} \geq 2x + 1$

δ. Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+1]$

1512. α) Από Θ Fermat... άτοπο β) $f(A) = [-1, 2]$ γ) Το 3 δεν ανήκει στο $f(A)$ δ) Θ.Μ.Τ. για τη f στα $[2, 3]$ και $[3, 4]$

1513. i) Αξιολογούμε το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών. ii) Το ολικό ελάχιστο είναι ο μικρότερος και το ολικό μέγιστο ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς : $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(7)$.

1514. i. $f(6)=-1$ $f(3)=2$ ii. Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $x \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

iii. Έχουμε $g(0) = g'(0) = 0$ απ' όπου προκύπτει ότι $g''(0) = 8$ για κάθε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} \dots\dots$

iv. $f(A)=\mathbb{R}$ v. $f(x) = 8\ln(x-1) + \kappa x^2 + \mu$ $x_0 = 2$ 0

Άρα $\kappa, \mu \in \mathbb{R} \quad x-1 \leq e^{\frac{x^2}{4}-1}$. Ομοίως $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 - 10x + 8$ οπότε ...

- 1515.** i) Αν $0 < x < 1$ τότε $f(x) < 0$. Αν $x > 1$ τότε $f(x) > 0$
 ii) Αν $x < 0$ τότε $f(x) < 0$. Αν $x > 0$ τότε $f(x) > 0$
 iii) Αν $x < 0$ τότε $f(x) > 0$. Αν $x > 0$ τότε $f(x) < 0$
 iv) Αν $x < 0$ τότε $f(x) > 0$. Αν $x > 0$ τότε $f(x) < 0$
 v) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ vi) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
 vii) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ viii) $f(x) < 0$ για κάθε $x \neq 1$
- 1516.** α) $f(x) < 0$ αν $x < 1$ και $f(x) > 0$ αν $x > 1$, β) $x > 0$
- 1517.** α) $g(x) < 0$ για $x < 0$ και $g(x) > 0$ για $x > 0$,
 β) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- 1518.** α) $g(x) < 0$ για $0 < x < 1$, $g(x) > 0$ για $x > 1$, β) Είναι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ οπότε ...
- 1519.** α) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς δεν έχει ακρότατα $f(x) > 0$ για $x > 0$, $f(x) < 0$ για $x < 0$,
 β) Το $g(0) = 0$ ελάχιστο της g
- 1520.** α) Ελάχιστο το $f(1) = 0$. Το 1 μοναδική ρίζα της f . $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$.
 β) g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- 1521.** i) Γν. φθίν. στο f και γν. αύξ. στο $x_1 = 1$ Ολικό ελάχιστο το $x_2 = 2$ ii) $f(A) = \mathbb{R}$
- 1522.** α) g γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, g γν. φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, β) f γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, f γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
- 1523.** $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
- 1524.** $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
- 1525.** Είναι $f'(1) = f(1) = 0$ και f' γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 1526.** α) Από $f'(\alpha) = 0$ και f' γν. αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$, βρείτε το πρόσημο της f' και συνεπώς τη μονοτονία της f ,
 β) Αν $f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$, $x \in [1, +\infty)$ δείξτε ότι $f(1) = f'(1) = 0$ και $f''(x) > 0$, οπότε λόγω α) ...

1527.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f^{(3)}$	+		+
f''	-	0	+
f'	+	0	+
f	-	0	+

- 1528.** α) **Θ. Rolle** για την f στο $[\alpha, \beta]$, β) Είναι $f'(\xi) = 0$ και f' γν. φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.
- 1529.** Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ και f' γν. αύξουσα στο $[0, 1]$.
- 1530.** f' γν. αύξουσα ενώ $f'(\xi) = 0$ από **Θ. Rolle**, οπότε βρείτε το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f
- 1531.** Υποθέστε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f''(x) > 0$. Τότε η f' είναι γν. αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επίσης η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Με αυτές τις ιδιότητες καταλήγετε σε αντίφαση.
- 1532.** Από **Θ. Rolle** υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, οπότε ...
- 1533.** α) $x = 1$, β) f γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, f γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$, Μέγιστο το $f(0) = f(2)$, ελάχιστο το $f(1)$.

- 1534.** α) Είναι $f(x)=0$, οπότε ... β) Είναι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, οπότε ...
- 1535.** i) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ii) f γν. αύξ. στο $(-\infty, 0]$, f γν. φθίν. στο $[0, +\infty)$ iii) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$ iv) f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- 1536.** f γν. φθίν. στο $[0, +\infty)$
- 1537.** i) f γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ ii) $x=1$ iii) Διακρίνετε τις περιπτώσεις $x>1$ και $x<1$.
- 1538.** α) g γν. αύξουσα $g(x)<0$ για $0<x<1$, $g(x)>0$ για $x>1$, β) f γνησίως φθίνουσα $(0, 1]$, f γνησίως αύξουσα $[1, +\infty)$, $f(1)=0$ τοπικό αλλά και ολικό ελάχιστο της f . γ) Είναι $f(x) \geq f(1)$... δ) $x=1$.
- 1539.** i) f γνησίως αύξουσα ii) $x=1$ iii) Για $x>1$ είναι $f(x)>1$...
- 1540.** i) H f είναι γν. φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$ ii) $f(A)=[0, +\infty)$ iii) Μοναδική λύση $x=0$ iv) $\alpha=0$ και $\beta=1$
- 1541.** α) f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$, f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$, β) $f(A)=[-1, +\infty)$, γ) 2 ακριβώς ρίζες
- 1542.** α) f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$, β) Αν $0<x<1$, τότε $f(x)<0$, Αν $x>1$, τότε $f(x)>0$
- 1543.** α) H f παρουσιάζει στο $x=0$ ελάχιστο, το $f(0)=\beta-1$.
β) Αν $\beta-1>0$ η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$. Αν $\beta-1=0$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$. Αν $\beta-1<0$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- 1544.** A. i. H g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.
 H g παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$ μέγιστο το $\frac{2}{e}$
- ii. Είναι $f(x) \leq \frac{1}{e} < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε....
- B. i. f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ & γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
 H f παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο το $f(0)=0$
- ii. $f(A)=[0, +\infty)$ iii. $x<0$
- 1545.** i. $f(A)=[-1, +\infty)$ ii. Είναι $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow f(x)=2012$ οπότε
iii. Θ. Bolzano για την $g(x)=f'(x)+f(x)-2012$ στο $[x_1, x_2]$ ή Θ. Rolle για την $h(x)=e^x(f(x)-2012)$ στο $[x_1, x_2]$
- 1546.** i) f γν. αύξουσα στο $(0, 1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$
ii) f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$
iii) f γν. φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
iv) f γν. φθίνουσα στο $(-1, 0)$ και $(0, +\infty)$
- 1547.** α) f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$, f γν. αύξ. στο $[1, +\infty)$, β) Είναι $f(x)>f(1) \Leftrightarrow \dots$
- 1548.** α) γν. φθίν. Χρησιμοποιήστε την βοηθητική συνάρτηση $h(x)=\ln x+1-x$, $x \in (0, 1]$,
β) Είναι $f(\alpha)>f(\beta) \Leftrightarrow \dots$
- 1549.** α) η f είναι γν. αύξουσα β) Είναι $f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow \dots$
- 1550.** i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=1=f(0)$ και $f'(x)=\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$ με $h(x)=xe^x - e^x + 1 > 0$ για
κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- ii. Είναι $g'(x)=2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e)$ και η $G(x)=xe^x - e^x - e$, $x > 0$

από Θ. Bolzano και μονοτονία έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.

1551. i) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x+1) - e^{-x} - 1$, $x \geq 0$ και δείξτε ότι f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

ii) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x \operatorname{erf} x + 1 - \frac{1}{\operatorname{erf} x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και δείξτε ότι f γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,

iii) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ ή την $f(x) = (1+x)e^x - 1$ και δείξτε ότι f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

iv) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(1+x) - 1$ και δείξτε ότι f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

v) Θεωρήστε την $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ και δείξτε ότι είναι γν. αύξουσα στο $[0, 1)$.

1552. Η ανίσωση γράφεται $x \ln x - x + 1 \geq 0$ οπότε θεωρήστε την $f(x) = x \ln x - x + 1$ και δείξτε ότι παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1) = 0$

1553. i. f γν. αύξουσα στο $[\gamma, \delta]$ $f_{\min} = f(\gamma)$, $f_{\max} = f(\delta) = 0$ ii. Είναι $f(\gamma) < f(\delta)$ οπότε....

1554. Αν $h(x) = xe^x - e^x + 2$ δείξτε ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1555. Εφαρμογή της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$ για x το $\frac{1}{x}$ ή κάντε χρήση του ακρότατου της $f(x) = x \ln x - x + 1$

1556. α) f γν. αύξουσα στο $(0, e]$, f γν. φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$,

β) i) $\pi > e \stackrel{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \dots$ ii) $\alpha + 1 > \alpha \geq e$ άρα ...

iii) $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \dots$ iv) $f(x) \leq \frac{1}{e} < 1$ άρα ...

1557. Η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε....

1558. α) Αν $h(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$ τότε η h είναι γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ άρα ... ,

β) Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ λόγω του α) ερωτ. γ) Είναι $f(\alpha) = f(\beta)$ οπότε ...

1559. α) Αν $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$, $x \geq 0$ τότε η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

β) g γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

1560. α) Αν $[\alpha, \beta]$ δείξτε ότι για $x \geq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) > 0$,

β) Παραγωγίστε την ισότητα και χρησιμοποιήστε το α)

1561. α) Αν $f(x) = e^x - x + 1$ τότε να δείξετε ότι $f(x) \geq f(0) = 2 > 0$,

β) Η $g(x) = 2e^x + 2x - x^2 - 2$ λόγω α) έχει $g'(x) > 0$

1562. α) Δείξτε ότι αν $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, τότε $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$

β) Η ύπαρξη ρίζας από σύνολο τιμών, η μοναδικότητα λόγω μονοτονίας.

1563. Α. Δείξτε ότι $g(x) \geq g(1)$ όπου $g(x) = x^2 - 2\ln x - 1$,

B. α) Είναι $f'(x) = \frac{g(x)+3}{x^2} > 0$ λόγω Α., β) $M\left(e, \frac{e^2+2}{e}\right)$,

γ) Θ. Bolzano για την f στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ και μονοτονία της f

1564. α) $A = (0, 1)$, β) ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$,

γ) $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Για $x = \alpha$ και $1 - x = \beta$ προκύπτει το ζητούμενο

1565. α) $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [0, +\infty)$

β) Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1) = \frac{4}{e}$ και στο $x_2 = 1$

ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$. γ) Η f στο διάστημα $(-\infty, 1)$ έχει μέγιστο

το $f(-1) = \frac{4}{e}$ οπότε.... δ) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1, 1]$

1566. Α. Αν θέσουμε όπου x το $-x$, έχουμε:

$$f(-x) \geq e^{-x} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) \leq e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{οπότε...}$$

Β i. Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1]$ και **γνησίως αύξουσα** στο

$[1, +\infty)$. Η g παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = e$

ii. $g(A) = [e, +\infty)$ iii. Είναι $g(\alpha)g(\beta) + g(\beta)g(\gamma) + g(\gamma)g(\alpha) \geq 3e^2$ με $\alpha\beta\gamma = e$

1567. Αν $h(x) = f(x) - g(x)$ τότε h : γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

1568. Αν $h(x) = f(x) - g(x)$ τότε h : γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

1569. Δείξτε ότι το 1 είναι ελάχιστο της f

1570. Μονοτονία της $h(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$ ή **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[x, a]$ και $[a, x]$.

1571. Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε g γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

1572. α. Οι $g(x) = x^2 + 1 - f(x)$ και $h(x) = f(x) - e^x$ είναι γν. φθίνουσες στο $[0, +\infty)$, οπότε...

β. $f(A) = [1, +\infty)$ γ. **Θ. Bolzano** για την $\varphi(x) = f(x) - 2x^2$ στο $[1, 2]$.

1573. α) $f(x) = xe^{-x}$, β) Δείξτε ότι $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1574. Αν $g(x) = f(x) \sin x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

1575. Αν $h(x) = f(x) - \ln g(x) - 1$, $x \geq 0$, τότε h γν. φθίνουσα $[0, +\infty)$.

1576. i) Αν $f'(1) = f'(5)$, τότε $f^{(3)}(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε ...,

ii) Θεωρήστε την $xf''(x) = f'(x)$ $x \in (-\infty, 0]$ και δείξτε ότι $h''(x) < 0$,

iii) Αν $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ τότε $f^{(3)}(x) < 0$ για $x > 1$,

iv) Δείξτε ότι $f^{(4)}(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1577. Είναι $f(x) = e^{2x} - 2e^2 \ln x + \ln^2 x - e^2$, $f'(x) = \frac{2xe^{2x} - 2e^2 + 2 \ln x}{x}$

με $g(x) = 2xe^{2x} - 2e^2 + 2 \ln x$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

1578. Αν $g(x) = f(x) + \sin x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $g''(x) > 0$ άρα g' γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε ...

1579. Αν $h(x) = f(x) - g(x)$ τότε $h^{(3)}(x) > 0$ οπότε ...

1580. α) $f'(x) = \frac{I}{I + e^{-f(x)}}$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ ή με τη μονοτονία

των $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$ και $h(x) = f(x) - xf'(x)$ Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται να δείξετε ότι $f''(x) > 0$

1581. α) Η $g(x) = e^x + x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i) Είναι $f'(x) = \frac{I}{I + e^{f(x)}} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Προκύπτει από τη μονοτονία των συναρτήσεων $h(x) = \frac{x}{2} - f(x)$ και

$\varphi(x) = f(x) - xf'(x)$ ή με Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f''(x) < 0$.

1582. α) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$, β) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x-1, x+1]$

1583. α) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$ β) Κριτήριο Παρεμβολής.

1584. Είναι $g'(x) = \frac{f'(x)(x-\alpha) - f(x) + f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}$ και με Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, x]$

δείξτε ότι $f'(x) > \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

1585. i. Η $g(x) = f'(x) - f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα με $g(1) = 0$

ii. Η $h(x) = f(x)e^{-x+1}$ έχει ελάχιστο το $h(1) = 1$

1586. Είναι $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ και με Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ αν $x > 0$ στο

$[x, 0]$ αν $x < 0$ δείξτε ότι $xf'(x) - f(x) < 0$

1587. Με μονοτονία της f ή με Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$.

1588. Αν $f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) = 0$, τότε g γν. φθίνουσα $(0, +\infty)$.

1589. Αν $g(x) = xf(x)$, τότε g γν. αύξουσα $[0, +\infty)$.

1590. Αν $g(x) = xf(x) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1591. Αν $g(x) = e^{-2x}f(x)$, τότε g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1592. Δείξτε ότι $f(x)e^{-x} > 1$, μελετώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = f(x)e^{-x}$, $x \geq 0$

1593. Η συνάρτηση $g(x) = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε...

1594. i. Κάντε χρήση της συνάρτησης $h(x) = f(x)e^x - e^{2x}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι $g'(x) = 2e^{2x}f(x)(f'(x) + f(x)) - 4$ και $f'(x) + f(x) > 2e^x > 2$ και $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 0$

1595. α) Θ.Μ.Τ. για την $h(x) = \ln x$ στο $[x, x+1]$ ή μονοτονία της $f(x)$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ β. Είναι $g'(x) = g(x)f(x) > 0$

1596. α) i) Η $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{I}{x}$ είναι γν. αύξουσα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ή Θ.Μ.Τ. για

την $y = \ln x$ στο $[x, x+1]$

ii) Δείξτε ότι $f'(x) < \frac{I}{x} - \frac{2x+I}{x(x+I)} < 0$ β) 1 γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

μοναδική ρίζα (έστω α) αφού $0 \in f(A) = \mathbb{R}$ και f γν. φθίνουσα, άρα...

1597. Α. i. Για οποιοδήποτε $x_0 > 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{u = \frac{x}{x_0}}{=} \lim_{x = ux_0 \quad u \rightarrow 1} \frac{f(ux_0) - f(x_0)}{ux_0 - x_0} = \dots = \frac{-f(x_0)}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} \dots$$

ii. για κάθε $x > 0$ έχουμε : $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \dots$

B. Είναι $g'(x) = \frac{x + \ln x - 3}{x^2}$ Από Θ. Bolzano για την $h(x) = \ln x + x - 3$ υπάρχει

ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e^2)$ ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ln \xi + \xi - 3 = 0$

Οπότε....

Γ. Είναι $g(x) \geq g(\xi)$ και

$$g(\xi) = \ln \xi - \frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi} - 2 = 3 - \xi - \frac{3 - \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi} - 2 = 1 - \xi - \frac{3 - \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi} = \dots = \frac{-(\xi - 1)^2}{\xi}$$

Δ. Θ. Bolzano για την $H(x) = g(x) + g'(x)$ στο $[\xi, e^2]$

1598. i) $f\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}$ ii) $\lambda = \frac{1}{e}$

1599. α) $f(e^{\lambda-1}) = 1 - e^{\lambda-1}$ β) $y = -x + 1$ γ) $\lambda = 1$ δ) Η $y = x - 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $A(1, 0)$

1600. i) $f(0) = \ln 2 - \lambda$ ii) $\lambda_{\min} = \ln 2$

1601. $M = \frac{e^2}{4}$

1602. A. i. Για $x=y=0$ βρείτε $f(0)=1$. Παραγωγίζοντας ως προς y θεωρώντας το x σταθερά και μετά για $y=0$

ii. Είναι $(f(x) + x)' = f(x) + x$, οπότε... B. $\alpha = e - 1$.

1603. A. Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης ως προς y , θεωρώντας το x σταθερά, και μετά για $y=1$ βρίσκουμε $f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha \Leftrightarrow \dots$

B. Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ είναι: $y = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)x$, οπότε... Γ. $\alpha = \frac{1}{e^2}$ Δ. $\alpha = 1$

1604. $\alpha = 2$, $\beta = 3$

1605. $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$, Τ. μέγιστο το $f(2) = -5$, Τ. ελάχιστο το $f(3) = -\frac{13}{2} + 2 \ln 2$

1606. α) $\alpha=0$ β) Τ. Μέγιστο με τιμή 2 γ) Μοναδική ρίζα. $f(A)=\mathbb{R}$.

1607. $\alpha = \frac{1}{8}$ ή $\alpha = 1$

1608. α. $\lambda = 0$, β. i. f γν. αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[-1, 1]$, Τ. Μέγιστο το $f(-1)=3$ και Τ. Ελάχιστο το $f(1)=-1$

ii. $y=9x+17$ και $y=9x-15$ iii. Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - \sqrt{x}$ στο $[0, 1]$.

1609. $\alpha = \frac{-3}{2e}$

1610. α) $\alpha = \frac{1}{2}$, β) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Ολικό ελάχιστο $f(0) = 2$

1611. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

1612. Δεν υπάρχουν. Για $\lambda = 4$ και $\mu = 6$ είναι $f'(x) = 12x(x-1)^2$ και η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

1613. $\alpha = 1$

1614. Η f' έχει τρεις ρίζες άρα η f'' θα έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε ...

1615. Από **Θ. Rolle** η f' έχει 2 ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει $x_1 + x_2 = \frac{2a}{3}$ και

$$x_1 x_2 = \frac{-2a}{3}$$

1616. $\alpha = -3$

1617. Αν x_0 θέση ακρότατου, τότε $f'(x_0) = 0 \dots$ άτοπο.

1618. Αν x_0 θέση ακρότατου, τότε $f'(x_0) = 0 \dots$ άτοπο.

1619. Είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1620. Αν x_0 θέση ακρότατου, τότε $f'(x_0) = 0 \dots$ άτοπο.

1621. Αν x_0 θέση ακρότατου, τότε $f'(x_0) = 0 \dots$ άτοπο.

1622. α) Αν x_0 θέση ακρότατου, τότε $f'(x_0) = 0 \dots$ άτοπο. β) Δείξτε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γ) **Θ. Bolzano**

1623. Δείξτε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1624. Δείξτε ότι f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

1625. Δείξτε ότι f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1626. $\alpha \in [-2, 4]$

1627. $-3 \leq \alpha \leq 6$

1628. $\alpha = e$

1629. Η $f(x) = a^x - x^a$ παρουσιάζει στο $x = a$ ελάχιστο, συνεπώς ...

1630. $\alpha = 2$

1631. Η $f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο οπότε....

1632. Η $f(x) = \alpha^x + \beta^x - \gamma^x - \delta^x$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, οπότε ...

1633. $m = 10$

1634. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

1635. α) Είναι $f(x) \geq f(0)$ άρα η f παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο, συνεπώς ...

1636. i. Για $x=0$ και $x=1$ βρείτε $f(1)=f(4)=2$ ii. Από **Θ. Fermat** είναι $g'(1)=g'(4)=0$ όπου $g(x) = f^2(3x+1) + 4 - 4f(2x^2+x+1)$ οπότε ... $f'(1)=f'(4)=0$
iii. **Θ. Rolle** για την f' στο $[1, 4]$

1637. Δείξτε ότι $\beta^2 = \alpha\gamma$

1638. $f(0) = 1$

1639. $y = x + 1$

1640. α) $f'(-1) = 2$, β) $y = 2x$

1641. Η $g(x) = f(2x) - 2e^{-2x}$ παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο. Άρα ...

1642. Από **Θ. Fermat** είναι $g'(0) = 0$ όπου $g(x) = f(x) + 1 - x^2$ - συνx οπότε ... $f'(0) = 0$

1643. Από **Θ. Fermat** είναι $g'(0) = 0$ όπου $g(x) = f(x)e^{ax}$

1644. Είναι $g(x) \leq g(0)$ όπου $g(x) = f(1+x) - f(1-x) - x^2$. Άρα από **Θ. Fermat** ...

1645. α) Παρατηρήστε ότι $f(1) = 0$ και **Θ. Fermat**, β) f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$, f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$, γ) Μοναδική ρίζα η $x = 1$, δ) $\lambda < -1$ ή $\lambda > 1$

- 1646.** Είναι $G(x) = f(x) - 2x - 1 \geq 0 = G(1) = G(2)$, άρα από Fermat $G'(1) = G'(2) = 0$
άρα
- 1647.** **Θ. Fermat** $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$ και από **Θ. Rolle** υπάρχει $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$
- 1648.** α) Είναι $f(0) = f(1) = 1$ β) **Θ. Rolle** για την f στο $[0, 1]$ γ) Δείξτε ότι $f'(0) = f'(1) = 0$
δ) **Θ. Rolle** για την f' στα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$
- 1649.** α) Είναι $f(0) = f(1) = 3$. Από **Θ. Rolle** υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.
Από **Θ. Fermat** για την $G(x) = f^2(x) + 9 - 6f(x^2) \leq 0 = G(0) = G(1)$,
δείξτε ότι $f'(0) = f'(1) = 0$ οπότε...
β) **Θ. Rolle** για την $H(x) = e^{-x} f'(x)$ στα $[0, \xi]$ και $[\xi, 1]$.
- 1650.** α) Θέτοντας $x=1$ και $x=2$ δείξτε ότι $f(1) = f(2)$, β) Είναι $f(x) \geq f(1) = f(2)$, οπότε ...
- 1651.** α) Θέτοντας $x=1$ και $x=5$ δείξτε ότι $f(1) = f(5)$, οπότε $f(x) \leq f(1) = f(5)$, άρα
απο Fermat... β) **Θ. Rolle** για την $G(x) = \frac{f'(x)}{x}$ στα $[1, \xi]$, $[\xi, 5]$ όπου $\xi \in (1, 5)$
ώστε $f'(\xi) = 0$
- 1652.** α) Θέτοντας $x=2$ και $x=3$ δείξτε ότι $f(2) = f(3)$, β) Είναι $f(x) \leq f(2) = f(3)$,
οπότε ...
- 1653.** α) Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γν. αύξουσα στο $[-1, +\infty)$ Ολικό
ελάχιστο το $f(-1) = 5$ β) $x = -2$ γ) Αν $\alpha = 0$ τότε $\dots f(\beta) = 0 \dots$ άτοπο. Αν $\alpha \neq 0$ τότε είναι
 $f\left(\frac{2}{\alpha}\right) f(\beta) = 25 \Leftrightarrow \dots \alpha = -2$ και $\beta = -1$
δ) 1 ε) $y = 4x + 4 + \infty$ ii) **Θ.Μ.Τ.** για την h' στο $[1, 3]$
- 1654.** Η $G(x) = f(f'(x)) - (x - \alpha)^2 \geq 0 = G(\alpha)$, άρα από **Θ. Fermat**....
- 1655.** **Θ.Μ.Τ** για την f' στα $[0, c]$, $[c, 1]$
- 1656.** α) Τα -1 και 4 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f , άρα ..., β) Η f έχει
μέγιστο το 4 και ελάχιστο το -1
- 1657.** α) Η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στα x_1 και x_2 διαφορετικά των α και β . Άρα
..., β) **Θ. Rolle** για την $f'(x)$ $[x_1, x_2]$.
- 1658.** α) Η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στα x_1 και x_2 διαφορετικά των α και β . Άρα
..., β) **Θ. Bolzano** για την $g(x) = f'(x) - (x^2 + 1)f(x)$ στο $[x_1, x_2]$.
- 1659.** i) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$
ii) **Θ. Bolzano** για την $h(x) = x f(x) + f'(x)$ στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$
- 1660.** α) Η παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στις θέσεις α και β οι οποίες δεν είναι το
 0 και το 5 . Συνεπώς απο Fermat... β) **Θ. Rolle** για την $G(x) = e^{x^2} f'(x)$ στο $[\alpha, \beta]$
- 1661.** Είναι $g(x) \geq 1$ και επειδή $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x_0) = 1$. Άρα ...
- 1662.** Είναι $f(\alpha) < f(\gamma)$ και $f(\beta) < f(\gamma)$. Άρα τα α και β δεν είναι θέσεις μεγίστου. Άρα ...
- 1663.** Είναι $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ άρα ... $f(x) > f(a)$ και ομοίως $f(x) > f(\beta)$.
Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο σε $x_0 \in (\alpha, \beta)$
- 1664.** Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο το οποίο δείξτε ότι
δεν το παρουσιάζει στο α ή στο β .
- 1665.** Α. **Θ. Fermat** Β. **Θ. Rolle** Γ. **Θ. Bolzano** Δ. **Θ. Bolzano**
Ε. **Θ. Μ.Τ.** στα $[1, c_0]$, $[c_0, e]$

1666. α) **Θ. Bolzano** στα $[α, γ]$ και $[γ, β]$ β) **Θ. Rolle** για την $h(x) = e^{x^2} f(x)$ στο

$$[x_1, x_2] \quad \gamma) \text{ **Θ.Μ.Τ.** στα } [α, γ] \text{ και } [γ, β] \quad \delta) \text{ Είναι } f'(\kappa) = \lim_{x \rightarrow \kappa^+} \frac{f(x) - f(\kappa)}{x - \kappa} < 0$$

$$\text{άρα.... και } f'(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} > 0, \text{ άρα.....και από } \text{**Θ. Fermat**.....}$$

1667. Η f παρουσιάζει μέγιστο M και ελάχιστο m στις θέσεις $0, 1$ ή σε $\alpha < \beta < 1$ με $f(x) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση $m=M=0$

1668. Η f παρουσιάζει μέγιστο M και ελάχιστο m στις θέσεις $1, 4$ ή σε $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Σε κάθε περίπτωση $m = M = 2$. Άρα $f(x) = 2$

$$\text{1669. } \alpha) x_0 = \frac{8}{3a}, M(a) = \frac{64}{27a^2}, \beta) \alpha = \frac{2}{9}, M\left(\frac{2}{9}\right) = 48$$

$$\text{1670. } t = 28$$

$$\text{1671. } \alpha) \alpha = 5, \beta = 6, \beta) 3 \leq t \leq 12$$

$$\text{1672. } \alpha) f(t) = 8\ln(t+1) - 2t, t \geq 0, \beta) t = 3$$

$$\text{1673. } \alpha) P(0) = \frac{76}{25} \text{ χιλ. δρχ.}, \beta) 0 \leq t \leq \frac{25}{2}, \gamma) t = \frac{25}{2}, \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} P(t) = 4 > \frac{76}{25}$$

$$\text{1674. } t = 10, f'(10) = 2.500$$

$$\text{1675. } \alpha) x = 60 - 2\varphi, \beta) \varphi = 15^\circ$$

$$\text{1676. } \alpha) x_{\text{πριν}} = 200 \text{ μονάδες}, x_{\text{μετά}} = 130 \text{ μονάδες}, \beta) \text{ i) } T(200) = 2600, \\ T(130) = 2740 \text{ Επίπτωση } 140 \text{ € ii) Κέρδη πριν: } 60.000\text{€, Κέρδη μετά: } 31.400 \text{ €}$$

$$\text{1677. } \alpha) \text{ Είναι } V = x^2 h \Leftrightarrow 1000 = x^2 h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{x^2}, \beta) x = 10 \text{ dm}$$

$$\text{1678. } \alpha) 50, \beta) 2000 \text{ €..}$$

Κυρτότητα – Σημεία Καμψής Συνάρτησης

1679. i) Η f κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$. Σημείο καμψής το $K(1, f(1))$.

ii) Η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $[0, 1)$ Η f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στα διαστήματα $(-1, 0]$, $(1, +\infty)$ Σημείο καμψής είναι το $O(0, 0)$

iii) Κοίλη στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, κυρτή στο $[-1, 1]$, Σημεία καμψής τα $K_1(-1, \ln 2)$, $K_2(1, \ln 2)$.

iv) Κοίλη στο $\mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία καμψής.

v) Κυρτή στα $(-\infty, -3]$, $[-1, +\infty)$, κοίλη στο $[-3, -1]$, Σημεία καμψής τα $K_1(-3, 10e^{-3})$, $K_2(-1, 2e^{-1})$. vi) Κυρτή στα $(0, 1]$ και $[e, +\infty)$, κοίλη στο $[1, e]$, Σημεία καμψής τα $K_1(1, 1)$, $K_2(e, 4e^2 + 1)$.

vii) Κοίλη στα $(-\infty, -1]$, $[0, 2]$, κυρτή στα $[-1, 0]$, $[2, +\infty)$, Σημεία καμψής τα $K_1(-1, 6)$, $K_2(0, 4)$, $K_3(2, -12)$. viii) Κοίλη στα $(-\infty, -2]$, $[1, 3]$, κυρτή στα $[-2, 1]$, $[3, +\infty)$, Σημεία καμψής τα $K_1(-2, 14)$, $K_2(3, -41)$.

$$\text{1680. } A\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right), O(0, 0), B\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

1681. α) Βρίσκουμε την f' και αντικαθιστούμε, β) είναι

$$g''(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = - \left[\frac{2}{(x-\alpha)^2} + \frac{3}{(x-\beta)^2} + \frac{4}{(x-\gamma)^2} \right] < 0$$

1682. α) f κοίλη στο $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$, f κυρτή στο $\left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ β) $y = 2(\alpha - 1)x - \alpha + 2$, $\alpha = 2$

1683. α) $A = (0, +\infty)$, f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, f γνησίως αύξουσα στο

$$\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right). \text{ Ελάχιστο το } f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}, \quad \beta) \text{ } f \text{ κοίλη στο } (0, e^{-\frac{3}{2}}], f$$

$$\text{κυρτή στο } [e^{-\frac{3}{2}}, +\infty) \text{ σημείο καμπής } K\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right) \gamma) \quad f(A) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

1684. α. Είναι $f(x) \geq f(0)$ οπότε από Θ. Fermat..... β. i. Είναι $f''(x) > 0$ ii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(0) = 0$, οπότε... iii. **Θ. Bolzano** για την $g(x) = [f(\beta) - 1](x - 2) + [f(\gamma) - 1](x - 1)$ στο $[1, 2]$

1685. Α. Είναι $f'(x) = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Β. $x=1$ ή $x=2$

Γ. Σ.Κ. $A(-1, -2 + \ln 2)$ $B(1, 2 + \ln 2)$ Οι εφαπτόμενες

$\varepsilon_A: y = x - 1 + \ln 2$ και $\varepsilon_B: y = 3x - 1 + \ln 2$ τέμνονται στο

$$\Gamma(0, -1 + \ln 2)$$

1686. Δείξτε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1687. Δείξτε ότι $(g \circ f)''(x) > 0$, $x \in \Delta$

1688. i. Είναι $g''(x) = e^{x-f(x)} \left[(1-f'(x))^2 - f''(x) \right]$ οπότε...

$$\text{ii. Av } x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ τότε } g''(x) = e^{x-2x^2} \left[(1-4x)^2 - 4 \right] < 0$$

1689. Η f'' είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$

1690. Είναι $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $f^{(3)}(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ οπότε ...

$$\mathbf{1691.} \quad y = 2 - x^2$$

$$\mathbf{1692.} \quad y = \frac{3}{2x}, x > 0$$

1693. Σημείο καμπής το $K\left(\frac{-\beta}{3\alpha}, f\left(\frac{-\beta}{3\alpha}\right)\right)$.

1694. i. Σημείο καμπής το $K(-\alpha, f(-\alpha))$. ii. Η $f'(x) = 3x^2 + 6\alpha x + \beta$ έχει $\Delta > 0$ τότε

$$f'(-\alpha) < 0 \quad \text{iii. Η } f'(x) = 3x^2 + 6\alpha x + \beta \text{ έχει } \Delta \leq 0 \text{ τότε } f'(-\alpha) \geq 0$$

1695. $K(\sin 2\alpha, \eta \mu^2 2\alpha)$, $y = 1 - x^2$

1696. α) Τ. Μέγιστο το $A(-1, 2-2\eta \mu^2 \theta)$ Τ. Ελάχιστο το $B(1, -2-2\eta \mu^2 \theta)$ Σ. Καμπής το $\Gamma(0, -2\eta \mu^2 \theta)$ β) $0 \in f(A_1) = (-\infty, 2-2\eta \mu^2 \theta]$ και f γν. αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$
 $0 \in f(A_2) = (-2-2\eta \mu^2 \theta, 2-2\eta \mu^2 \theta)$ αι f γν. φθίνουσα στο $A_2 = (-1, 1)$
 $0 \in f(A_3) = [2-2\eta \mu^2 \theta, +\infty)$ και f γν. αύξουσα στο $A_3 = [1, +\infty)$

γ) Οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ επαληθεύουν την εξίσωση $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

1697.

x	0	1	3	5	7	9	10	
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-
f(x)		↗	↘	↗	↘	↗	↘	
	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.	

x	0	2	4	6	8	10	
f'(x)							
f(x)							
		σ.Κ.	σ.Κ.	σ.Κ.	σ.Κ.		

- 1698.** i) Λόγω της συνέχειας της f στο $[0, 8]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0, 2]$ και $[4, 6]$ και γνησίως φθίνουσα στα $[2, 4]$ και $[6, 8]$. Τα σημεία 0, 4, 8 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων και τα 2, 6 θέσεις τοπικών μεγίστων της f
 ii) η f είναι κυρτή στα $[0, 1]$, $[3, 5]$ και $[7, 8]$ και κοίλη στα $[1, 3]$ και $[5, 7]$.

iii) α) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) = 2$,

β) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(f(x) - f(7))'}{(x - 7)'} = \lim_{x \rightarrow 7} f'(x) = -\infty$

1699. Αν $x > 0$ τότε $f''(x) > 0$ Αν $x < 0$ τότε $f''(x) < 0$

1700. α) Μέγιστο το $g(1) = -1$, β) $f''(x) = g(x) - 2 \leq -3$ λόγω α). Άρα ...

1701. Είναι $f''(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ όπου $g(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$ με $g(0) = 0$ και

$$g'(x) = x^2 e^x > 0 \text{ για } x \neq 0$$

1702.

1703. α) Είναι $g'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. β) Ισχύουν: $f'(x_0) = 0$ και $f(x_0) = 0$. Οπότε :

x	x_0
g''	+
g'	↗
g	↘

ελάχ.

$$g(x) \geq g(x_0) \Leftrightarrow \dots$$

- 1704.** α) **Θ.Μ.Τ.** στο $[\alpha, \beta]$, β) $g''(x) = f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γ) Η g στρέφει τα κοίλα κάτω άρα g' γν. φθίνουσα Αν $x < x_0 \Rightarrow \dots$ Αν $x > x_0 \Rightarrow \dots$ δ) Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta = 0$ και δείξτε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ $g(x) > 0$
1705. α) Η f γν. φθίνουσα στα $(0, 1]$ και $[2, +\infty)$, γν. αύξουσα στο $[1, 2]$. Τ. ελάχιστο το $f(1)$, Τ. μέγιστο το $f(2)$, β) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$: $f''(x_0) = 0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f'' αλλάζει πρόσημο.

1706. i) Η $g(x) = 2x^2 \ln x + 1$ έχει ολικό ελάχιστο το $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0$

ii) f γν. αύξουσα με προφανή ρίζα το 1 iii) f'' γν. αύξουσα και από Θ. Bolzano
υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ ώστε $f''(x_0) = 0$ οπότε.....

1707. i. Θ. Bolzano και η g είναι γν. αύξουσα ii. Είναι $f''(x) = e^x g(x)$ οπότε.....

1708. Γ.1. Είναι $(e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))'$ και $(e^x - x)f'(x) = e^x - 1$ οπότε

Γ.2. f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Γ.3. Είναι $f''(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$. Αν $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$ δείξτε με

σύνολο τιμών ή Θ. Bolzano ότι η $h(x)$ έχει 2 ακριβώς ρίζες εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο.

Γ.4. Θ. Bolzano για την $\Phi(x) = f(x) - \sin x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η μοναδικότητα

από την μονοτονία της Φ ..

1709. α) Θ. Μ. Τ. στα διαστήματα $[a, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ β) Θ. Μ. Τ. στο διάστημα

$[\xi_1, \xi_2]$ γ) i) Θ. Rolle στο $[a, \beta]$ ii) Αφού $f'(x_0) = 0$ και η f' είναι γνησίως
αύξουσα ...

1710. α) Αν η f παρουσιάζει δύο διαφορετικά σημεία καμπής τότε η f'' έχει δύο
τουλάχιστον ρίζες. Αλλά η f'' είναι γν. αύξουσα (αφού $f^{(3)}(x) > 0$) άρα άτοπο ,

β) Είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$, όπου $\xi \in (x_1, x_2)$

(από Θ.Μ.Τ.). Οπότε η f' έχει 3 ρίζες, η f'' θα έχει 2 ρίζες, άτοπο αφού $f^{(3)}(x) > 0$

1711. α) Αφού το $P(x)$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε το $P'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$ έχει
δύο τουλάχιστον ρίζες (Εφαρμογή του Θ. Rolle σε διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$),
και αφού είναι δευτέρου βαθμού έχει δύο ακριβώς ρίζες $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$.
Επειδή $a > 0$ στο x_1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, ενώ στο x_2 παρουσιάζει τοπικό
ελάχιστο ,

β) Το $P'(x)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες άρα $\Delta > 0$ γ) $P''(x) = 6ax + 2\beta$. Τότε $P''(x_1)$
 $+ P''(x_2) = 6a(x_1 + x_2) + 4\beta$. Από το άθροισμα των ριζών δευτεροβάθμιας

εξίσωσης γνωρίζουμε ότι $x_1 + x_2 = \frac{-2\beta}{3a}$. Άρα $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$. Αν $P''(x_1)$

$= 0$ τότε και $P''(x_2) = 0$ άτοπο αφού $P''(x)$ είναι 1^{ου} βαθμού, δ) Θ. Rolle.,

1712. α) i) Διαιρώντας με x^2 παίρνουμε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)'$ οπότε...

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και f συνεχής iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

β) Γν. φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{e^2}\right]$ και γν. αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ τοπικό μέγιστο το

$$f(0)=0 \text{ και ολικό ελάχιστο το } f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2} \quad \gamma) \text{ Είναι } f''(x)=\frac{1}{x} > 0.$$

Αν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία A, B, Γ τότε $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$ και με τη βοήθεια $\Theta.M.T.$ και Rolleάποπο. δ) Από $\Theta.$ Fermat $\kappa=2$

- 1713.** Α. i. η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του $\Theta.M.T.$ σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2], [3, 5]$, οπότε ...ii. η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του $\Theta.M.T.$ στο $[\xi_1, \xi_2]$,
iii. η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ οπότε... Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) + f(\alpha + \beta - x) - 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), x \in \mathbb{R} \text{ για την οποία για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } \varphi(x) \leq \varphi_{\max} = 0$$

- 1714.** Α. Η g είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $g(f(x)) = g(\ln x)$, οπότε... Γ. Η h είναι γνησίως
αύξουσα στο $x \in (0, e^2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $x \in [e^2, +\infty)$. $h(A) = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right]$

$$\Delta. \ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow \dots \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$Ε. η h \text{ είναι κοίλη στο διάστημα } \left(0, e^{\frac{5}{2}}\right] \text{ και κυρτή στο διάστημα } \left[e^{\frac{5}{2}}, +\infty\right) \text{ και}$$

$$h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5} \text{ για κάθε } x > 0.$$

- 1715.** Α. Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 1$,

$$\text{άρα } \dots f''(x) > \frac{(f'(x))^2 + 2f^2(x)}{f(x)} > 0 \quad \text{Β. Οι } g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x, \quad x \geq 1 \text{ και}$$

$$h(x) = \ln f(x) - x^2, \quad x \geq 1 \text{ είναι γνησίως αύξουσες στο } [1, +\infty) \text{ οπότε } \dots \Gamma.$$

$$f(A) = [e, +\infty) \quad \Delta. x = 1$$

- 1716.** Α. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x) - 4f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{h^2} \stackrel{DLH}{=} \dots$

$$= \frac{3}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \dots$$

$$\text{Β. Είναι } f''(x) + e^{f''(x)} > 1 \Leftrightarrow h(f''(x)) > h(0) \text{ όπου } h(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R} \dots$$

Γ. Έστω $x > 1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο $[x+2, 2x+1]$ Έστω $x < 1$ Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο $[2x+1, x+2]$ Επομένως ο αριθμός $x_0 = 1$ η ρίζα της εξίσωσης

$$\Delta. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } \varphi(x) = f(x+1) - f(x).$$

$$\text{Είναι } \varphi(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), 2016\right) \text{ οπότε } \dots$$

$$Ε. Η f \text{ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο } [x, x+1] \dots$$

$f'(x) < 2016$ Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $g'(x) \geq \min g'(x) \Rightarrow g'(x) \geq 2016$.

1717.

1718.

1719.

1720. $\alpha = 4, \beta = 3$

1721. $\alpha = 5, \beta = 4$

1722. $\alpha = -3, \beta = -24$

1723. α) $\alpha = 3, \beta = -10$, β) Αν $A(-1, 128), B(0, 1), \Gamma(1, -126)$ τα σημεία καμπής, δείξτε ότι $AB \parallel B\Gamma$, γ) -120

1724. $f'\left(-\frac{\lambda}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 0$

1725.

1726.

1727. Αν $f''(x_0) = 0$, τότε βρείτε $g'(x_0) = 2$, οπότε ...

1728. Αν παρουσιάζει καμπή στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$, οπότε ... άτοπο.

1729. Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 τότε $f''(x_0) = 0$, οπότε ... άτοπο.

1730. Η $f''(x) = 4x^2 + 4ax + 2a^2 - 4a + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16(-a^2 + 4a - 5)$ όπου το $-a^2 + 4a - 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = -4 < 0$. Άρα ... Άλλος τρόπος :
 $f''(x) = (2x + a)^2 + (a - 2)^2 + 1 > 0$, Άρα ...

1731. Έστω ότι έχει καμπή στο x_0 οπότε $f''(x_0) = 0$ και καταλήξτε σε άτοπο

1732. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = f''(1) = -1 \neq 0$

1733. Είναι $f''(x) = \frac{\alpha^x \beta^x (\ln \alpha - \ln \beta)^2}{(\alpha^x + \beta^x)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1734. $\alpha \in [-4, 4]$

1735. $\alpha \in [-2, 2]$

1736. $\alpha \leq -2$

1737. Α. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathbb{R}$ καμπή, τότε, δεδομένου ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι $f''(x_0) = 0$ άτοπο Β. Επειδή είναι $f''(0) = 1 > 0$ και η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(a + b - x), x \in \mathbb{R}$.

1738.

1739. α) $f''(x) < 0$, για κάθε $x > 1$, β) $y = \frac{1}{e}x - 1$, γ) Είναι $f(x) \leq \frac{1}{e}x - 1$, για κάθε $x > 1$.

1740. α) f κυρτή β) $y = x + 2$, γ) Είναι $f(x) \geq x + 2$, κάθε $x \in \mathbb{R}$

1741. α) $f''(x) > 0$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, β) $y = x$ και $y = x - 1$,
 γ) Είναι $f(x) \geq x > x - 1 \geq g(x)$, άρα...

1742. α) $\alpha = \beta = 1$, β) Η f κυρτή, η g κοίλη, γ) Η $y = x$ κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g . Είναι $g(x) \leq x \leq f(x)$

1743. α) $K(0, 0)$, β) $y = 3x$, γ) Στο $[0, +\infty)$ η f είναι κυρτή, άρα ...

1744.

1745.

1746. α) Δείξτε ότι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, β) Είναι $g(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- 1747.** α. $f(1)=2$ $f'(1)=1$ $f(3)=2$ $f'(3)=-1$ β. Ισχύει για την f το Θ. Rolle στο $[1, 3]$
 άρα υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ άρα... γ. Η f είναι κοίλη και
 $\varepsilon: y=x+1$, $\delta: y=-x+5$ είναι εφαπτόμενες της C_f . Άρα...

- 1748.** α) Είναι $\left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = (-e^x)' \Leftrightarrow \dots\dots$ β) Η f είναι γν. φθίνουσα και κυρτή

γ) Η $h(x)=2f(x)+x-\ln 4$ έχει ελάχιστο το $h(0)=0$ ή η C_f βρίσκεται κάτω από την
 εφαπτομένη της στο σημείο $O(0, 0)$ δ) $f(\mathbb{R})=(0, +\infty)$ ε)
 $f^{-1}(x)=-\ln(e^x-1)$, $x>0$ i) $+\infty$ ii) $-\infty$

- 1749.** α. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[2, x]$, οπότε....
 β. Αν $h(x) = (2x-9)f(x+6) - (7x-32)f(x)$, τότε
 $h(4) = 8(g(4) - g(10))$ και $h(5) = 9(g(11) - g(5))$
 γ. i. $f(3) = -3$ και $f'(3) = 0$ ii. Γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$ και γνησίως
 αύξουσα στο $[3, +\infty)$. Τοπικό μέγιστο το $f(2) = 0$ και ολικό ελάχιστο το $f(3) = -3$
 iii. Είναι $f(x) \geq f'(4)(x-4) + f(4)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(4)(x-4) + f(4)) = +\infty$.

$$\text{Τελικά } f(A) = [-3, +\infty)$$

- 1750.** Δ1. Δείξτε ότι $f(0)=g(0)$ και $f'(0)=g'(0)$ Δ2 Η $\varphi(x)=g(x)-\beta x+3$
 παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$ οπότε.... Δ3. Είναι $f'(0)=g'(0)=\beta$ και f'
 γν. αύξουσα Δ4. Η f είναι κυρτή και έχει εφαπτομένη την $y=\beta x-3$ οπότε...

- 1751.** Γ1. Η f είναι συνεχής οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\Gamma 2. \text{ Είναι } f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{και με την βοήθεια της}$$

$$g(x) = xe^x - e^x + 1 \text{ δείξτε ότι } f'(x) > 0. \quad D_{f^{-1}} = f(A) = (0, +\infty)$$

- Γ3. $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x + 1$ και αφού η f είναι κυρτή είναι $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1$ με την ισότητα να
 ισχύει μόνο για $x=0$ Γ4. 0

- 1752.** Δ1. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε ... $x_1 = x_2$. Θέστε $f(x)=y$, οπότε Δ2. Κυρτή στο $\mathbb{R}$
 Δ3. i) Παραγωγίζοντας την $f(f^{-1}(x)) = x$ παίρνουμε $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$
 ii) Είναι $(AB) = \sqrt{2} (f^{-1}(x) - x) \geq 3\sqrt{2}$, για $x=0$

- 1753.** Α. ανισότητα Jensen, Β. Εφαρμογή του Α. ερωτήματος για την $f(x) = (e^x + 2)^v$,
 Γ. Εφαρμογή του Α. ερωτήματος για την $g(x) = e^{f(x)}$ Δ. Εφαρμογή του Α.
 ερωτήματος για την $f(x) = x \ln x$

- 1754.** Α. ανισότητα Jensen, Β. Εφαρμογή του Α. ερωτήματος για την f

- 1755.** Α. Ανισότητα Jensen Β. i. f κυρτή ii. Η ανισότητα γράφεται

$$f(\ln \alpha) + f(\ln \beta) \geq 2f\left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right) \text{ οπότε } \dots\dots$$

1756. Α. Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός α τέτοιος ώστε $f(\alpha)=0$. Για $x=\alpha$ και $y=1$
Για $x=y=1$...Β. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $y=1$

$$\Gamma. g''(x) = 2016 \cdot 2015 \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2014} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2016 \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2015} \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\Delta. \Theta.M.T. \text{ για την } g \text{ στα διαστήματα } \left[x, \frac{x+y}{2}\right], \left[\frac{x+y}{2}, y\right]$$

$$E. 2g\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2016} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{2016} \Leftrightarrow \dots$$

1757. α) Είναι $\left(\frac{g'}{g}\right)' > 0$, β) αν $x_1 < x_2$ εφαρμόστε **Θ.M.T.** για την $f(x) = \ln(g(x))$ στο

$$\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$$

1758. **Θ.M.T.** για την f στα $[-2, 2]$ και $[2, 5]$ και f' γν. φθίνουσα

1759. **Θ.M.T.** στα $\left[0, \frac{3x}{4}\right]$ και $\left[\frac{3x}{4}, x\right]$ και f' γνησίως αύξουσα $[0, +\infty)$

1760. α) η f είναι γν. αύξουσα και κοίλη στο $(0, +\infty)$.

β) Είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Η f είναι γν. αύξουσα με

$$0 \in f(A) \text{ άρα έχει μοναδική ρίζα στο } (0, +\infty). \quad \gamma) \text{ Είναι: } g'(x) = \frac{f(x)}{(x+2)^2}. \text{ Αν } x_0$$

η ρίζα της $f(x)$ τότε $g'(x) > 0$ για $x > x_0$ και $g'(x) < 0$ για $0 < x < x_0$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = x_0$ άρα $g(x) \geq g(x_0)$ για κάθε $x > 0$.

δ) **Θ.M.T.** στα διαστήματα $[x+1, x+4], [x-2, x+1]$

Ασύμπτωτες Συνάρτησης

1761. i) $x=2, y=3x+7$, ii) $x=0, y=x$, iii) $y=2x$, iv) $x=0, y=3x+2$,
v) $x=1, x=-1$, vi) $x=3, y=1$, vii) $x=1, x=2, y=0$, viii) $y=0$,
ix) $y=x+2$ στο $+\infty$ και $y=-x-2$ στο $-\infty$, x) $y=0, y=-2x$,
xi) $x=1, y=3x+2, y=3$, xii) $x=2, y=x-1, y=x$

1762. i) $y=-x$ ii) $x=0, y=x+1$ iii) $x=0, x=e, y=0$ iv) Πλάγια ασύμπτωτη $y=x$
στο $\pm\infty$ v) $x=\frac{1}{e}, y=\frac{1}{2}x - \frac{1}{2e}$ στο $\pm\infty$

1763. i) $x=-2, x=1$, ii) $x=1, x=3$

1764. i) $y=2$, ii) $y=0$, iii) $y=2$

1765. $x=0, y=1$

1766. Α. Κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0(y'y)$. Β. Είναι $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$, για

$x > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε Γ. Αν

$\Delta_1 = (0, 1)$ τότε $f(\Delta_1) = (-2, +\infty)$. Αν $\Delta_2 = [1, +\infty)$ τότε

$f(\Delta_2) = [-2, +\infty)$. **A.** Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ με $x_1 < 1 < x_2$ και

Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$. Το ξ είναι μοναδικό γιατί η

$g(x) = xf'(x) - f(x)$, $x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι: $(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$ και διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων γιατί οι συντεταγμένες του O επαληθεύουν την εξίσωση της (ε) .

1767. A. Τοπικό μέγιστο: $f(-1) = -6$ Τοπικό ελάχιστο: $f(1) = 6$

B. Κατακόρυφη ο $y'y$ και πλάγια $y = 3x$

Γ. $\varepsilon: y = 6$ **A.** $M(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$

1768. I) $\lambda = 0$ **II)** α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\beta) y = \frac{1}{4}x - 2$

1769. A. $\mathbb{R}^*$ **B.** $k=1$ **Γ** α. Ο $y'y$ και η ευθεία $y = x + 2$ **β.** Γν. αύξουσα.

1770. α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ **β.** Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
 $\gamma. x=0, y=x, y=2.$

1771. Γ.1. f γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο

$[1, +\infty)$. **Γ.2.** $y = \frac{7}{2}x - 2$ **Γ.3.** Κατακόρυφη ο άξονας $y'y$. **Γ.4.** 0

1772. Γ.1 Η δοθείσα σχέση γράφεται $[x^2f(x) - x^3 + f(x)]' = 0$, οπότε... Είναι

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x=0$$

Γ.2 Πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ η $y=x$ **Γ.3** $-1 \leq x \leq 1$

1773. Γ1. Η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ **Γ2.** $x > 0$ **Γ3.** $y = 0$ και $y = x$.

1774. α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 1) = 0$, **β)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$

1775. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (3x + 2)] = 0$

1776. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 5)] = 0$

1777. α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$, **β)** Τα σημεία με τετμημένες $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

1778. $\varepsilon: y = x$. C_f και ε έχουν άπειρα κοινά σημεία της μορφής $(k\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

1779. α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ $f'(2) = -\frac{1}{2}$ **β.** $y = \frac{1}{2}$ **γ.** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \right] = 0$$

1780. α. Δείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=1$ **β.** Ο άξονας $y'y$ **γ.** i. $k = -\frac{1}{2}$,

ii. **Θ. Bolzano**

1781. A. $\lambda = -1$ **B.** α. f γν. αύξουσα $f(A) = (-\infty, 0)$ **β.** $x = -1$, και $y = 0$ **γ.** Το $-\alpha^2 \in f(A)$ άρα... Η μοναδικότητα λόγω μονοτονίας της f .

1782. Η σχέση γράφεται $2x + 3 \leq f(x) \leq 2x + 3 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 0 \leq f(x) - (2x + 3) \leq \frac{1}{x^2}$ και κρ.

παρεμβολής. Βέβαια μπορείτε να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x]$

διακρίνοντας περιπτώσεις $x < 0$ ή $x > 0$ και φυσικά το κρ. παρεμβολής.

1783. Αφού δείξετε ότι $e^x - x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, βρείτε κατακόρυφη της C_f την $x = 0$.

1784. α) Μοναδική ρίζα $x = 1$, β) $x = 1, y = 0$

1785. Α. Είναι $f'(1) = \frac{2 - \ln \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \ln \alpha = 2 \Leftrightarrow \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Β. i. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e^2]$ και γνησίως φθίνουσα στο

$$[e^2, +\infty) \text{ και παρουσιάζει μέγιστο το } f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

ii. $f(A) = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$ Η $x = 0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** και η $y = 0$

οριζόντια ασύμπτωτη.

iii. Είναι $\ln(\sqrt{k})^{\sqrt{k+1}} > \ln(\sqrt{k+1})^{\sqrt{k}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(k) > f(k+1)$ που ισχύει γιατί...

1786. Α. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - 2(x+1) - (f(x) - 2x) + 2] = \dots$

Β. ζ: $y = 4x + 20$ Γ. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$ Δ. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$H(x) = f(x+1) - f(x), x \in \mathbb{R} \text{ με } H(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x), 2\right) \dots$$

1787. $y = 2x + 1$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

1788. $y = 3x + 4$

1789. $y = -2x - 1$

1790. 2

1791. $\frac{4}{7}$

1792. α) i) 2, ii) $-\frac{5}{7}$

1793. α) 2 και 5, β) $\mu = 2$

1794. $\alpha = -2$

1795. $\mu = 9$

1796. $y = -2$

1797. $\alpha = 2, \beta = -5$

1798. $\alpha = 3, \beta = -4$

1799. $\alpha = 3, \beta = 1$

1800. α) $\alpha = 4$, β) $\alpha = 0$, γ) **Θ. Rolle** για την f στο $[1, 2]$

1801. α) Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, β) **Θ. Rolle** για την f στο $[1, 2]$,

$$\gamma) y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

1802. $\alpha = 1, \beta = 9, \gamma = 6$

1803. $\alpha = 5, \beta = 6$, οριζόντια ασύμπτωτη $y = 1$

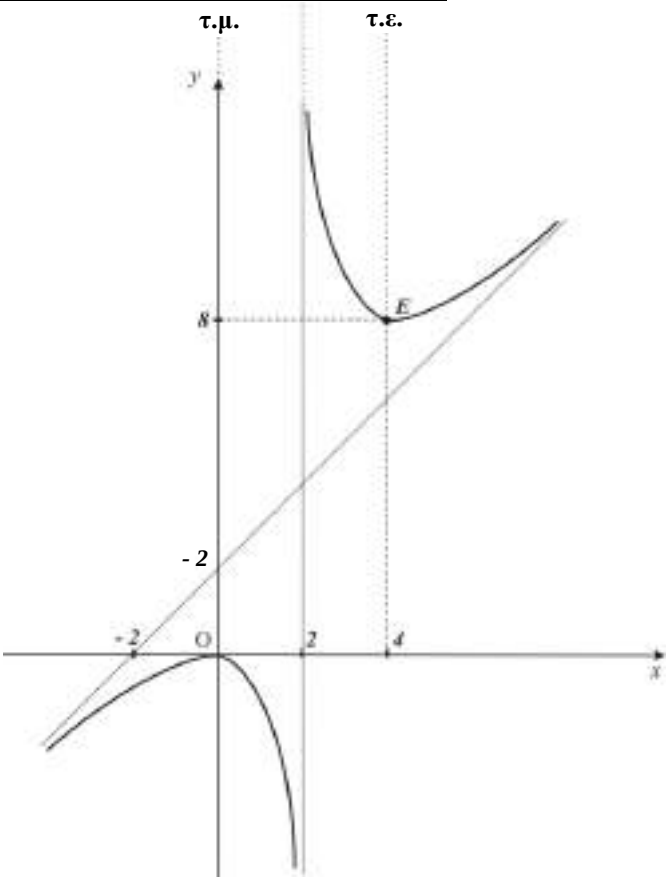
1804. $\alpha = 5$ ή $\alpha = 7$

- 1805. $\alpha = 1$ ή $\alpha = -2$
- 1806. $\alpha = 4, \beta = 0$
- 1807. $\alpha = 3, \beta = 2$
- 1808. $\alpha = 2, \beta = -1$

Μελέτη Συνάρτησης

1809.

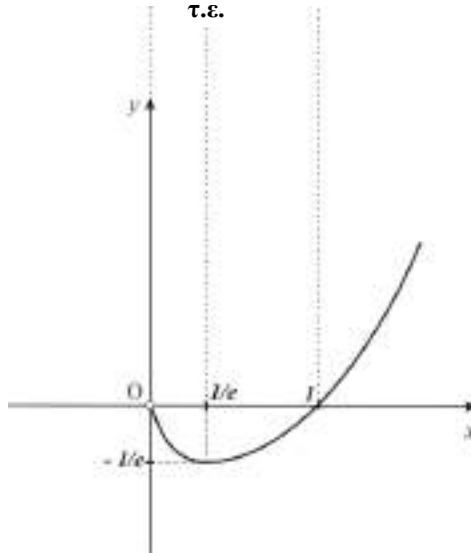
x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	
$f''(x)$	-	-	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	0		8	$+\infty$



1810.

x	0	1/e	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	+	+
$f''(x)$		+	+	+
f(x)		0	0	$+\infty$

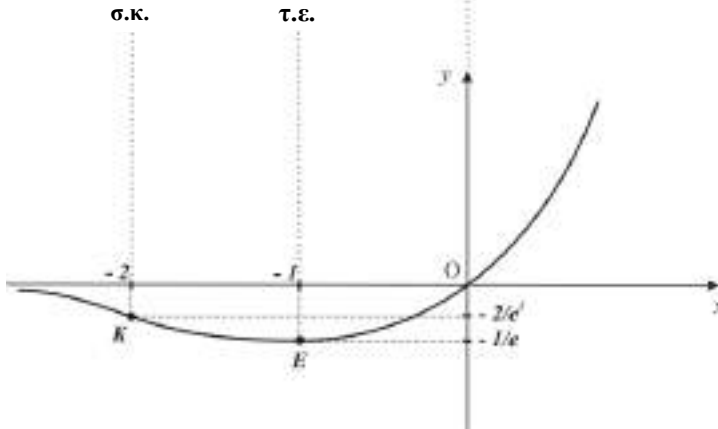
τ.ε.

**1811.**

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	- 0 +	+	+	+
$f''(x)$	- 0 +	+	+	+	+
f(x)	0	$-\frac{2}{e^2}$	$-\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

σ.κ.

τ.ε.



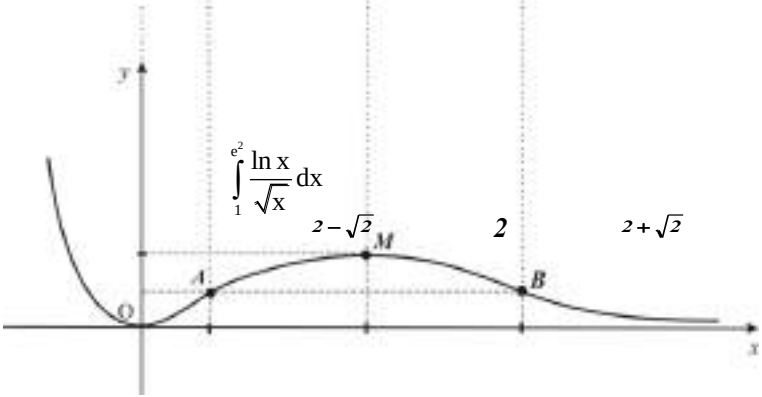
1812.

x	$-\infty$		0	$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$	2	$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx$	$+\infty$
f'(x)	-		0	+	+	0	-
f''(x)	+		+	0	-	-	0
f(x)	$+\infty$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

ελάχιστο σ.κ.

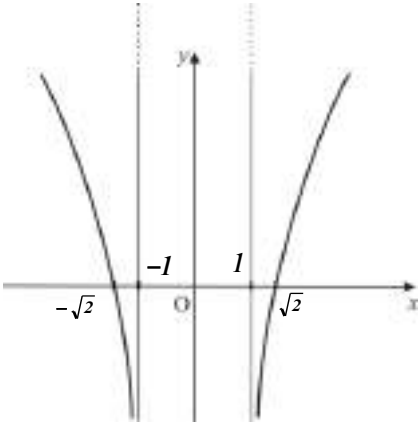
τ.μ.

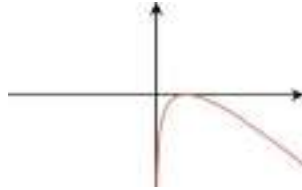
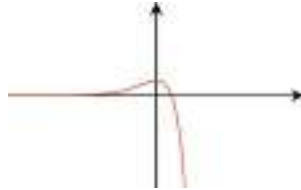
σ.κ.



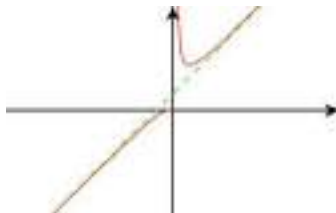
1813.

x	- 1		1
f '(x)	-		+
f ''(x)	-		-
f(x)	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



1814.**1815.****1816.**

Αν $\lambda \leq 0$ μια ακριβώς ρίζα $x = 1$ Αν $0 < \lambda < 1$ δύο ακριβώς ρίζες Αν $\lambda = 1$ μοναδική ρίζα
 Αν $\lambda > 1$ αδύνατη

1817.

Αν $\lambda < 0$ μια ακριβώς ρίζα Αν $0 \leq \lambda < e$ αδύνατη
 Αν $\lambda = e$ μοναδική ρίζα $x = 1$ Αν $\lambda > e$ δύο ακριβώς ρίζες

Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση

- 1818.** i) $F(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 7x + c$, ii) $F(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x + c$,
 iii) $F(x) = 3x - 5\ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$, iv) $F(x) = 2x^2 + 9x - 8\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$
 v) $F(x) = 2x^2\sqrt{x} - 3x\sqrt[3]{x} + c$ vi) $F(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \ln|x| + c$
 vii) $F(x) = \frac{2}{5}\eta\mu 5x - \frac{1}{2}e^{2x} + c$ viii) $F(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{e^{3x+1}}{3} + c$
 ix) $F(x) = -2\sqrt{e^{-x}} - 2\ln|x| - \sigma\phi x + c$ cx) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - 2\varepsilon\phi x + 3\sqrt{x} + c$
 xi) $F(x) = -\sigma\upsilon\nu x - x + \sigma\phi x + c$ xii) $F(x) = -e^{-x} + 2e^{\frac{-5x}{2}} - e^{-3x} + c$
 xiii) $F(x) = \ln|\eta\mu x| + c$ xiv) $F(x) = -\sigma\phi x - x + c$,
 xv) $F(x) = x + 4\ln|x+1| + c$ xvi) $F(x) = -5\ln|2-x| + x + c$,
 xvii) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 6x + 5| + c$ xviii) $F(x) = x - \ln(x^2 + 1) + c$,
 xix) $F(x) = \ln(e^x + 1) + \ln|e^x + x| + c$ xx) $F(x) = \ln(1 + e^x) + c$,
 xxi) $F(x) = x + \ln(1 + e^x) + c$ xxii) $F(x) = \ln|e^x + x| - x + c$,
- 1819.** $F(x) = \begin{cases} e^x + c, & x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c, & x < 0 \end{cases}$
- 1820.** $F(x) = \begin{cases} e^x - x + c, & x \geq 0 \\ \eta\mu x - x + 1 + c, & x < 0 \end{cases}$
- 1821.** $f(x) = -\frac{1}{x^4} + 3, x > 0$
- 1822.** $f(x) = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 3x - 1$
- 1823.** $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
- 1824.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
- 1825.** $f(x) = -\frac{1}{x} + 3x - 4, x > 0$
- 1826.** $f(x) = e^{2x} + e^x + 1, x \in \mathbb{R}$
- 1827.** $f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x - \frac{1}{3}, x > 0$
- 1828.** $f(10) = 54$
- 1829.** $f(x) = \ln(x^2 + x + 3)$
- 1830.** $f(x) = e^{2x^2 - 3x - 2}$
- 1831.** $f(x) = e^{\eta\mu x + x^2}, x \in \mathbb{R}$
- 1832.** $f(x) = \frac{e^x}{x} + 1, x > 0$
- 1833.** $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

- 1834.** $f(x) = x, \quad x > 0$
1835. $f(x) = -\ln x, \quad x > 0$
1836. $f(x) = e^{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$
1837. $f(x) = 1 + xe^{-x} - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad F(x) = x - xe^{-x} + c, \quad x \in \mathbb{R}$
1838. $f(x) = 3x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$
1839. α) $f(0)=2, f(2)=-6$ β) i) Θ. Bolzano για την f στο $[0, 2]$ ii) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 2]$
1840. α) $f(1)=-1, f(3)=3$ β) i) Θ. Bolzano για την f στο $[1, 3]$ ii) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, x_0]$ και $[x_0, 3]$ όπου x_0 από προηγούμενο ερώτημα.
1841. $f(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$
1842. $f(x)=3x^2+4$
1843. $f(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$
1844. α) είναι $(e^{f(x)})' = (\frac{1}{2}e^x)'$ άρα β) $h(x) = \frac{1}{2019} x^{2019}, \quad x \in \mathbb{R}$
1845. Θ. Rolle για την F .
1846. Στην ισότητα $f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = 2xf(x^2)$ θέστε $x=0$ και $x=1$.
1847. Θ. Rolle για την $g(x) = F(x) - \frac{x^2}{2}$ στο $[-1, 1]$
1848. α. $F(0) = \frac{1}{2}$ β. $g(x) = \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$ γ. $f(x) = 2e^{4x}, \quad x \in \mathbb{R}$
1849. Θ. Μ.Τ. για την $F(x)$ στο $[\alpha, \beta]$
1850. Από Θ.Fermat είναι $f'(0) = 1$. Επίσης $f'(x) = 2x + c \dots$
1851. α. 0 β. $f(x) = e^{x-2} + 2x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- 1852.** $I_1=9, I_2 = -\frac{1}{2}, I_3 = \frac{11}{12} \quad I_4 = -9 \quad I_5 = -\frac{31}{6} + \ln 2 \quad I_6 = \frac{5}{2} - \ln 2, \quad I_7 = 4a^2 + \ln 3, \quad I_8 = 4\ln 2,$
 $I_9 = \frac{38}{3}, \quad I_{10} = \frac{186}{5} \quad 16 \quad I_{11} = 16, \quad I_{12} = \frac{1}{2^{10}} \quad I_{13} = \frac{14}{3} \quad I_{14} = \frac{4}{3}, \quad I_{15} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi},$
 $I_{16} = 2e - \frac{2}{e} - 2\sqrt{e^{-5}} + 2 \quad I_{17} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}, \quad I_{18} = \frac{2}{\ln 2} + 3\ln 2 + 1,$
 $I_{19} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{32}{5}\right) \quad I_{20} = \pi \quad I_{21} = \ln \frac{1+e}{2}, \quad I_{22} = 2(1 + \sqrt{e} - \sqrt{2}) \quad I_{23} = 2\ln \frac{1+e}{2} - 1$
 $I_{24} = 1 + (e-1)\ln \frac{1+e}{2}, \quad I_{25} = \frac{1}{2} \ln 2, \quad I_{16} = \frac{4-\pi}{4}, \quad I_{27} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad I_{28} = \frac{1}{2} \ln 3,$
1853. $I_1 = -e^{\pi/2}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0 \quad I_4 = \frac{e^2 - 2e}{2} \quad I_5 = \frac{4}{\pi^2}, \quad I_6 = \frac{1}{e} \quad I_7 = \frac{e^2 - 2e}{2}, \quad I_8 = \frac{1}{e^2}.$
1854. i) $\frac{1}{3} \ln 4$ ii) 0 iii) $\ln \frac{9}{8}$ iv) $5\ln 2 - 3\ln 3$ v) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \ln 3 - 2\ln 2$ vi) $\ln \frac{4}{3}$
vii) $11\ln 2 - 6\ln 3$ viii) $2 + 2\ln 5 - 2\ln 2$
1855. α) $\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \beta) \quad \frac{1}{2} \ln 2$

1856. α) $\alpha = -2$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$, β) $2\ln\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

1857. i) $14y$ ii) $9x^2$ iii) $6x^2y$

1858. i) $x = 1$ ή $x = 3$, ii) $x = 1$ iii) $1 \leq x \leq 5$

1859. $\int_1^2 f(x)dx = 1$ ή $\frac{1}{2}$

1860. 10

1861. Είναι $g(x) = \int_0^1 f^2(t)dt - 2x \int_0^1 t^2 f(t)dt + x^2 \int_0^1 t^4 dt$ που είναι μια 2^{ου} βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση.

1862. i. Ελάχιστο το $f(0) = -1 + \int_0^1 g(t)dt$ ii. Είναι $\int_0^1 g(t)dt = 6$ οπότε ...

1863. α) $\lambda = 0$ β) $\frac{1}{2} \ln 2$

1864. $f(x) = -x^3 + 3x$

1865. α) $\alpha = -1$, $\beta = 3$, β) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, γ) 4

1866. 5

1867. $1 - \sqrt{3}$

1868. 2

1869. Δείξτε ότι $f'(0) = 1$

1870. -5

1871. $\alpha = 0$ ή $\alpha = 2$

1872. Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση γράφεται $(\eta \mu x e^{f(x)})'$.

1873. α) Είναι $\int_a^b (e^{f(x)})' dx = 0$, οπότε ..., β) Θ. Rolle

1874. Είναι $\int_1^e \ln \frac{\alpha}{\beta} dx = 0$.

1875. Είναι $\int_1^3 \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3} dx - \int_1^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \dots$

1876. Το α' μέλος γράφεται $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2 + 1) \sigma \nu x - 2 \chi \eta \mu x}{(x^2 + 1)^2} dx$, οπότε ...

1877. Είναι $\int_a^b \ln t dt + \int_a^b (\ln \mu - \ln t) dt = \dots$

1878. $\kappa = \pm 4$

1879. $\kappa = 8$

1880. i) 14 ii) 50

1881. ii) 2

1882. α) 3 β) 2 γ) 1

1883. α) -3, β) 3, γ) -1, δ) 6

1884. $e + \frac{10}{3}$

1885. 5π

1886. α) $\alpha = 3$, $\beta = 5$ β) $\frac{17}{2}$

1887. $\alpha = 2$, $\beta = 4$

1888. $I_1 = \frac{19}{3}$, $I_2 = \frac{\pi^2}{2} - 4$, $I_3 = 10$, $I_4 = e - 2 + \frac{1}{e}$

1889. α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \dots$ β. $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi + \alpha - \beta$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \gamma. \quad \frac{\pi^3}{3} + \frac{3\pi^2}{2}$$

1890. $\ln 2$

1891. 5

1892. α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \dots$ β) $y = -2x$

γ) Δείξτε ότι $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dots$ δ) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \dots$

1893. i. $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow [f(x)f'(x)]' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \dots$

ii. $I = \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1) - \frac{1}{4} \ln(e^2 - 2) - \frac{1}{4} \ln(e - 1)$

1894. α) ΘΜΤ για την f στο $[0, 4]$ β) Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{4}$

1895. i) $f(x) = x - 1$ ii) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4(1 - \ln 2)}$ iii) $f(x) = -e^x + \frac{e}{e - 2}$

iv) $f(x) = x^2 + 8$, $x \in \mathbb{R}$ v) $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$

1896. $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

1897. $f(x) = \frac{2}{3 - e} e^x + \frac{1 - e}{3 - e}$, $x \in \mathbb{R}$

1898. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

1899. α. Θέστε $\int_0^2 f(t) dt = c$ και βρείτ $c = 2$. Οπότε $\dots$ β. Θέστε $-h = u$ οπότε $\dots$

γ. i) Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - 2g(x) + g(x - h)}{h^2} = g''(x)$ οπότε $\dots$ ii Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1900. $I_1 = -4$ $I_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2}$ $I_3 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{4}{\ln^3 3}$

1901. $I_1 = 1$, $I_2 = 3 - \pi$, $I_3 = \frac{\pi}{16}$

1902. $I_1 = \frac{9}{16}$ $I_2 = e^2 + 1$, $I_3 = \frac{1 - \ln 2}{2}$, $I_4 = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} \ln 2$, $I_5 = 8 \ln 2 - 4$, $I_6 = \frac{8}{9} e^3 + \frac{4}{9}$,

$$I_7 = \frac{e^2 - 1}{4}, \quad I_8 = 2 \ln 2 - 1, \quad I_9 = -\frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2, \quad I_{10} = \frac{3}{2} \ln 3 - 2 \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$I_{11} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^3}{3} - \frac{1}{12} \quad I_{12} = 2e - 2$$

$$\textbf{1903.} \quad I_1 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} \quad I_2 = \frac{e^{2\pi} - 1}{10} \quad I_3 = 1 + e^{-\pi}$$

$$\textbf{1904.} \quad I_1 = \left[-x \sigma \varphi x + \ln |\eta \mu x| \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_2 = \left[\varepsilon \varphi x \ln(\sigma \nu x) + \varepsilon \varphi x - x \right]_0^{\pi/4} = \dots = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{4 - \pi}{4}$$

$$I_3 = \left[\eta \mu x \ln(1 + \sigma \nu x) + x - \eta \mu x \right]_0^{\pi/2} = \dots = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_4 = \left[x \varepsilon \varphi x + \ln |\sigma \nu x| - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/4} = \dots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$$

$$I_5 = \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \dots = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

$$I_6 = \left[\varepsilon \varphi x \ln(\sigma \varphi x) + \varepsilon \varphi x \right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \dots = -\frac{\sqrt{3} + 3}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \ln 3$$

$$I_7 = \left[\left(\ln x - \frac{1}{x} \right) e^x \right]_e^{e^2} = \dots = \left(2 - \frac{1}{e^2} \right) e^{e^2} - \left(1 - \frac{1}{e} \right) e^e$$

$$I_8 = \left[x \varepsilon \varphi^2 x - \varepsilon \varphi x + x \right]_0^{\pi/4} = \dots = \frac{\pi}{2} - 1 \quad I_9 = \left[\frac{x}{\ln x} \right]_e^{e^2} = \dots = \frac{e^2 - 2e}{2}$$

$$\textbf{1905.} \quad \alpha = \beta = 1$$

$$\textbf{1906.} \quad I = \int_0^1 (x)' f(x) dx = \dots = e$$

$$\textbf{1907.} \quad \alpha) \quad \alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0 \quad \beta) \quad \frac{e^2}{e^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2}$$

$$\textbf{1908.} \quad \alpha) \text{ Είναι } g(0) = g(2) \text{ οπότε } \beta) \text{ Από α ερώτημα υπάρχει } \xi \in (0, 2) \text{ ώστε } g'(\xi) = 0$$

$$\text{οπότε... } \gamma) \text{ Θέστε } x = \xi \text{ στη δοσμένη σχέση και } g(0) = 0$$

$$\delta) g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - f(x)e^{-2x})' = 0 \dots \dots \varepsilon) \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

$$\textbf{1909.} \quad I_1 = 8^3 - \frac{5^4}{8}, \quad I_2 = 4^3 - \frac{5^4}{4}, \quad I_3 = \frac{1}{100} - \frac{1}{576}, \quad I_4 = \frac{5}{12}, \quad I_5 = \frac{2^6}{3} + \frac{3 \cdot 2^5}{5} - \frac{14}{15}, \quad I_6 = -\frac{97}{168},$$

$$I_7 = \frac{11}{8} + \ln 2, \quad I_8 = \frac{e-1}{e+1}, \quad I_9 = 5, \quad I_{10} = 4, \quad I_{11} = \sqrt{12} - \sqrt{7}, \quad I_{12} = 2\sqrt{1+e} - 2\sqrt{2},$$

$$I_{13} = \frac{1}{2} e(e-1), \quad I_{14} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1), \quad I_{15} = e-1, \quad I_{16} = \frac{2^{\ln 2} - 1}{\ln 2},$$

$$I_{17} = \eta\mu(e+1) + \sigma\nu(e^{-1}+2) - \eta\mu 2 - \sigma\nu 3, \quad I_{18} = 1, \quad I_{19} = e^{3\pi/2} - e, \quad I_{20} = 4\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

$$I_{21} = \frac{1}{3}, \quad I_{22} = \sqrt{2} + \frac{1}{8}, \quad I_{23} = 11, \quad I_{24} = \frac{3}{4}, \quad I_{25} = \frac{16}{105},$$

$$I_{26} = 2\sqrt{3+e} - 2\sqrt{3}, \quad I_{27} = \frac{14\sqrt{2}-10}{3}, \quad I_{28} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad I_{29} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}\ln\frac{3}{2},$$

$$I_{30} = \frac{8\sqrt{2}-4}{3}, \quad I_{31} = 1 - \ln 2, \quad I_{32} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}, \quad I_{33} = \frac{3}{2}, \quad I_{34} = -\frac{1}{8}\ln^2 2,$$

$$I_{35} = \frac{1}{2}\ln\frac{\ln 5}{\ln 2}, \quad I_{36} = 1 + 2\ln 2, \quad I_{37} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{2e}\right), \quad I_{38} = \ln(1+e)$$

1910. $I_1 = \frac{1}{2}, \quad I_2 = 2 + 4e, \quad I_3 = -e^\pi \sigma\nu e^\pi + \eta\mu e^\pi + \sigma\nu 1 - \eta\mu 1, \quad I_4 = 1 + \frac{\pi}{2},$

$$I_5 = e^3[(e+5)\ln(e+5) - 6\ln 6 + 1 - e], \quad I_6 = -2\ln 2 + 3\ln 3 - 1, \quad I_7 = 4\ln 4 - 4,$$

$$I_8 = 2, \quad I_9 = -4, \quad I_{10} = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

1911. α. f γν. αύξουσα στο $(0, e]$ f γν. φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ β. 1 γ. $e^2 + 1$

1912. $I_1 = \ln\frac{9}{8}, \quad I_2 = 4\ln 3 - 6\ln 2, \quad I_3 = \frac{1}{2}\ln\frac{(e^2-3)(e^3-1)}{(e^2-1)(e^3-3)}, \quad I_4 = \ln\frac{e^2-1}{e^3-1} + 2\ln\frac{e^2-2}{e^3-2},$

$$I_5 = e^6 + e^4 - e^3 + e^2 - 2e + 2\ln(e+1), \quad I_6 = \ln\frac{3}{8}$$

1913. $I_1 = \frac{5\ln 2 - 3\ln 3}{3}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\ln 3, \quad I_3 = 4 - \ln 3 - 2\sqrt{2} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

1914. $I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{8}{15}, \quad I_3 = \frac{2}{15}, \quad I_4 = 0, \quad I_5 = 0,$

1915. $I_1 = \frac{7}{3} - 1, \quad I_2 = \frac{2^5}{3} - \frac{1}{6} + 9, \quad I_3 = \frac{1}{6} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{2} + \ln 2,$

1916. $I_1 = \frac{4}{3}, \quad I_2 = \frac{4}{3}$

1917. $I_1 = \frac{3}{2}, \quad I_2 = \ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4} + 1\right), \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{\sigma\nu x(1+\eta\mu x)} dx = \dots$

1918. α) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\eta\mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\eta\mu x}{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)} dx = \dots = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\epsilon\phi x - \frac{1}{\sigma\nu x}\right)' dx = \dots$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\eta\mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\epsilon\phi x - \frac{1}{\sigma\nu x}\right)' dx = \dots$

1919. $A+B = \frac{\pi}{4}, \quad A-B = \frac{\ln 2}{2}, \quad A = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4}, \quad B = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$

1920. Είναι $\int_a^\beta x(f'(x))' dx = \dots$ κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

1921. Είναι $\int_a^\beta (f'(x))'g(x)dx = \dots$ κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

1922. $g(0) = -1$

1923. $g(1) = 1993$

1924. $f(0) = 1$

1925. $f(2) = -\frac{1}{3}$

1926. $y = 2x + 2016$

1927. $I = -7$

1928. i. Είναι $\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f''(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (f'(x))' dx = \dots$ ii. $\sqrt{2} - 1$.

1929. Πρώτα δείξτε ότι $f(\pi) = -f(0)$ και μετά Θ. Bolzano.

1930. i) Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[3, 5]$ ii) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

1931. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

1932. Θ.Μ.Τ. για την f ή Θ. Rolle για την $h(x) = f(x) - xf'(a)$ στο $[0, a]$

1933. i) $f(2) = 4$ ii) $e^{16} - e$ iii) Από ΘΜΤ για την f στο $[0, 2]$ υπάρχει x_0 ώστε

$f'(x_0) = \frac{3}{2}$. Από Θ.Ε.Τ για την f' στο $[x_0, 2]$ προκύπτει το ζητούμενο.

1934. β) $I_1 = \ln \frac{e+1}{2}$, $I_2 = (e-1) - \ln \frac{e+1}{2}$, $I_3 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - e + \ln \frac{e+1}{2}$

1935. β) $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$

1936. β) $\frac{26}{3}$

1937. α) Το I_v γράφεται $I_v = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^v x dx$, οπότε ..., β) $I_4 = \frac{e^2 - 3}{4}$

1938. β) $\frac{2e^2 - 3}{2}$

1939. α) $I_v = \int_0^{\pi/2} x^v (\eta \mu x)' dx = \dots$ β) $\frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$.

1940. α) $I_v = \int_0^{\pi/2} \eta \mu^v x dx = \int_0^{\pi/2} \eta \mu x \eta \mu^{v-1} x dx = \int_0^{\pi/2} (-\sigma \nu x)' \eta \mu^{v-1} x dx = \dots$ β) $\frac{8}{15}$

1941. α) $I_v = \int_0^{\pi/2} \epsilon \phi^v x dx = \int_0^{\pi/2} \epsilon \phi^2 x \epsilon \phi^{v-2} x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} \epsilon \phi^{v-2} x dx = \dots$

β) $I_5 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

1942. α) $I_v = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sigma \nu^{v-2} x} \cdot \frac{1}{\sigma \nu^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sigma \nu^{v-2} x} \cdot (\epsilon \phi x)' dx = \dots$ β) $I_6 = \frac{72\sqrt{3}}{15}$

1943. α) Είναι $I_v = \int_0^1 x^{v-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{v-1} (\sqrt{x^2+1})' dx = \dots$

$$\beta) I_5 = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{8(\sqrt{2}-1)}{15}$$

$$\mathbf{1944.} \alpha) I_v = \int_0^1 \frac{x^v(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{v+1}(\sqrt{x^2+1})' + \int_0^1 x^{v-1}(\sqrt{x^2+1})' dx = \dots$$

$$\beta) I_5 = \frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{8\sqrt{2}}{35} + \frac{8(2\sqrt{2}-1)}{105}$$

$$\mathbf{1945.} \alpha. \frac{1}{v+1} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{v+1} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{v+1} \right] \quad \beta. \frac{1}{v+1} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{v+1} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{v+1} \right]$$

$$\gamma. I_1 = \frac{1}{2} \ln 2 \quad I_3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\mathbf{1946.} \text{ Θέστε } u = 1 - x$$

$$\mathbf{1947.} \text{ Θέστε } u = 1 - x$$

$$\mathbf{1948.} \alpha) \text{ Θέστε } u = x - \gamma, \quad \beta) \text{ Θέστε } u = \frac{x}{\gamma}$$

$$\mathbf{1949.} \text{ i) Βλέπε αντίστοιχη εφαρμογή} \quad \text{ii) } 0$$

$$\mathbf{1950.} \alpha) \text{ Θέστε } u = -x, \quad \beta) \text{ ii) Ολοκληρώστε την i) και χρησιμοποιήστε το } \alpha)$$

$$\mathbf{1951.} \alpha) f(x) + f(-x) = \frac{x^2+1}{2^x+1} + \frac{x^2+1}{\frac{1}{2^x}+1} = \dots \beta) \text{ Είναι}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx + \int_{-a}^a f(-x) dx = \int_{-a}^a (x^2+1) dx \text{ και θέστε } u = -x \text{ στο κατάλληλο ολοκλήρωμα}$$

$$\mathbf{1952.} \text{ i) } \alpha) \text{ Είναι } I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1 + \frac{1}{f(-x)}} dx \text{ και θέτουμε } u = - \text{χοπότε,}$$

$$\beta) \text{ Είναι } 2 I_v = I_v + I_v = \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}}{1+f(x)} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^{2v}f(x)}{1+f(x)} dx = \text{ii) } \frac{1}{2017}$$

$$\mathbf{1953.} \beta) 8$$

$$\mathbf{1954.} \alpha) \text{ Είναι } \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \eta\mu x \text{ και } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sigma\upsilon\nu x. \quad \beta) \frac{\pi}{4}.$$

$$\mathbf{1955.} \text{ Θέστε } \alpha + \beta - x = u$$

$$\mathbf{1956.} \text{ Είναι } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} [c - f(\alpha + \beta - x)] dx = \dots \text{ θέστε } u = \alpha + \beta - x$$

$$\mathbf{1957.} \alpha) \text{ i) Θέτουμε } u = \alpha - x. \text{ ii) } I + J = \alpha > 0 \quad \beta) I = J = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbf{1958.} \alpha), \beta) \text{ Βλέπε αντίστοιχη εφαρμογή} \quad \gamma) I_1 = 0, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 2 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

- 1959.** i. Θέστε όπου $x, x+1$. ii. του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 3]$ και $[3, 6]$
 iii. στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x+\kappa)dx$ θέτουμε $u=x+\kappa$
 iv. $\int_0^1 (f(x)+f(x+1)+f(x+2))dx = \int_0^1 (6x+6)dx \Rightarrow \dots$
 v. $\int_x^{x+1} (f(t)+f(t+1)+f(t+2))dt = \int_x^{x+1} (6t+6)dt \Rightarrow \dots$
 vi. $\int_0^9 f(t)dt = \int_0^3 f(t)dt + \int_3^6 f(t)dt + \int_6^9 f(t)dt = \dots 81$
 vii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x)+f(x+1)+f(x+2)=6x+6 \Rightarrow \frac{f(x)+f(x+1)+f(x+2)}{x} = 6 + \frac{6}{x} \Rightarrow \dots$$

Τελικά $y=2x$

- 1960.** α. Θέστε $u=2x+1$ β. Αν F αρχική της f τότε $F(7)-F(1)=2017$, οπότε.....

- 1961.** β) $I=1$, γ) 0 , δ) Θέστε $u=a+\beta-x$

- 1962.** α) Θέστε $u=\pi-x$ β) $\frac{5\pi}{4} \ln 3$

- 1963.** Θέστε $u=\frac{\pi}{2}-x$

- 1964.** $I_1=\frac{1}{3}$ $I_2=\frac{\pi}{4}$ $I_3=0$

- 1965.** α) Γν. αύξουσα β) f 1-1 γ) $\mathbb{R}$ δ) $\frac{9}{4}$

- 1966.** α) f γν. αύξουσα, β) $f(A)=[0, +\infty)$, γ) $f: "1-1"$, δ) $2\pi^2$

- 1967.** α) Δείξτε ότι η f είναι γν. αύξουσα, β) Θέστε στο $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$, όπου $x=f(u)$.

- 1968.** Θέστε $x=f(u)$ ενώ επειδή f γν. φθίνουσα θα είναι $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$.

- 1969.** Στο $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$ θέστε $x=f(u)$ αφού πρώτα λόγω μονοτονίας και $f(A)$ βρείτε
 ότι
 $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$.

- 1970.** Λόγω συνόλου τιμών και μονοτονίας της f είναι $f(\alpha)=\frac{1}{\beta}$ και $f(\beta)=\frac{1}{\alpha}$.

$$\text{Στο ολοκλήρωμα } \int_{1/\beta}^{1/\alpha} f^{-1}(x)dx \text{ θέστε } x=f(u) \Leftrightarrow u=f^{-1}(x)$$

- 1971.** $\frac{3}{2}$

- 1972.** α. Είναι $f'(x)=\frac{1}{5f^4(x)+5} > 0$ β. $f^{-1}(x)=x^5+5x, x \in \mathbb{R}$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$

Η συνάρτηση ολοκλήρωμα

- 1973.** i) $f(x)=2e^x-x-1, x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2, x \in \mathbb{R}$

- 1974.** i) $f(x)=e^x-\ln x-1, x > 0$ ii) $f(x)=xe^x-e^x, x > 0$

- 1975.** i) $f(x)=x \ln x-x, x > 0$ ii) Η $g(x)=f(x)-x \ln x+x$ είναι γν. αύξουσα στο

(0, +∞)

1976. α) $f(x) = \frac{1}{2019} x^{2019}, x \in \mathbb{R}$ β) $\frac{3^{2019}}{2019}$

1977. α) $f(x) = \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x, x \in \mathbb{R}$ β) 1

1978. α) Είναι $f'(x) = -2$ οπότε..... β) $\frac{\pi}{6}$

1979. Γ1. Είναι $\left((f(x) + x)^2 \right)' = (x^2)'$ οπότε.... Γ2. Ακριβώς μια ρίζα

Γ3. Θ. Bolzano για την $h(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \epsilon \phi x$ στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

1980. Δ.1. $y = x$ Δ.2. Είναι $f'(0) < f'(\xi)$ όπου ξ από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 1]$.

Η $f''(x)$ διατηρεί πρόσημο οπότε Δ.3. Είναι $g'(0) = 0$ και g' γνησίως

αύξουσα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x g(x)} = +\infty$. Δ.4. Είναι $g(x) \geq 0$ και το "=" μόνο για $x = 0$ ή

C_f πάνω από την εφαπτομένη της $y = x$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δ.5. $\int_0^1 f(x) dx = e - 2$, Θ. Bolzano για την $h(x) = \int_0^x f(t) dt - 2$ στο $[1, 2]$.

1981. i. $\alpha = 0$ ii. $I = \int_{-1}^0 x e^{-x} dx + \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 t^2 \ln t dt = \dots = -\frac{10}{9}$

1982. α) Δείξτε ότι $g'(x) = 0$. β) $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

1983. α) Δείξτε ότι $g'(x) = 0$. β) $f(x) = e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$

1984. α) $y = 2x - 1$ β) Δείξτε ότι $g'(x) = 0$. γ) $f(x) = 2x$

1985. i. $F(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ ii. $F'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$, όπου $g(x) = e^x + 1 - x e^x$ οπότε....

1986. Με την βοήθεια της $G(x) = F(x+1) - F(x)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $e^x = x + 1$, οπότε $x = 0$

1987. Θ. Bolzano για την f στο $[-3, 5]$

1988. α) $x < -2$ β) $+\infty$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

1989. i) 4, ii) $\frac{3 - \ln 2}{2}$, iii.) $12 + \ln 3$, iv) $2\sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$, v) $\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{2}$,

1990. α) $m = 10$, β) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 10} - \frac{3}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 5}$

1991. 6

1992. $\frac{5}{3}$

1993. β) $y = -x + 5 - e$, γ) $\frac{7}{27}$

1994. i) f γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ii) $E = \frac{20}{3} - 4 \ln 2$ τ.μ.

1995. α) $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)dx = \dots$, β) $\lambda = 1$

1996. i) $E(\lambda) = 3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1$ ii) Θ . Bolzano

1997. $\varepsilon : x = \frac{4}{3}$

1998. $\alpha = \ln \frac{e+1}{2}$

1999. α) $f(x) = 2017e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$, β) $E = 2017 \frac{\sqrt{e}-1}{e}$

2000. ii) $\frac{1}{2}$

2001. α. f γν. φθίνουσα στο $(0, e]$ και γν. αύξουσα στο $[e, +\infty)$ β. $x=0$
 γ. Θ . Bolzano για την $g(x) = f(x) - 3^{x-1}$ στο $[1, 4]$ δ. $E = 2e(1+e)$

2002. α. Η $g(x) = e^x - x - 1$ έχει ελάχιστο το $g(0)=0$ β. $E(\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{e} - \frac{\lambda^2}{2}$ γ. $+\infty$

2003. i) $\frac{32}{3}$, ii) $\frac{1}{2}$, iii) $\frac{71}{6}$, iv) $\frac{e}{2} - 1$

2004. α) $1 - \frac{2}{e}$, β) $\frac{3}{4}$

2005. α) $x = 0$ β) $e - 2 + 2\ln 2$

2006. α) $A\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e}\right)$, β) $E = \frac{-5 + 2e\sqrt{e}}{18e\sqrt{e}}$

2007. $E = e + (e+1) \ln \frac{2}{e+1}$ τ.μ.

2008. 34

2009. α) $\frac{-2}{e^2} + 2$, β) $\frac{-1}{e^2} + 1$

2010. $2\sqrt{2}$

2011. α) $y = x$, β) $\frac{1}{2}$

2012. B. $3e - \frac{91}{12}$

2013. α) i. f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ii. $f(x) < 0$ για $x < 0$, $f(x) > 0$ για $x > 0$, β) $4 - e - \frac{3}{e}$

2014. $e^e + e - 3$

2015. α) $\frac{1}{12}$, β) $\frac{8}{3}$

2016. α) $\frac{4}{3}$, β) $\frac{32}{3}$, γ) $\frac{3}{2} - 2\ln 2$

2017. $E = \int_{-\alpha}^{-\alpha+1} (\sqrt{x+\alpha} - (x+\alpha)) dx = \frac{1}{6}$

2018. α) $G(x) = 2x^2 - 4x$, β) $\frac{8}{3}$

2019. α. $f(x) = e^{2x} - 2x + 1$ β. Η $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$ έχει ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$ οπότε...

γ. Η $h(x) = e^{2x} - 2x - 2x^2 - 1$ είναι γν. αύξουσα με $h(0)=0$

δ. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 1)) = 0$, $E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$

2020. $\frac{2}{3}$

2021. $2\ln 2$

2022. $\frac{5}{3} - 2\ln 2$

2023. $E = \frac{e^2 - 2e - 1}{2}$

2024. $\frac{7}{3}$

2025. α) $\varepsilon_1: y = 3x - 9$, $\varepsilon_2: y = -x - 1$, β) $\frac{32}{3}$

2026. $\frac{e-2}{2}$

2027. $e - 2$

2028. $\frac{e^2 - 2}{2e}$

2029. $\frac{e^4 - 2e^3 + 2e - 1}{2e^2}$

2030. $\frac{2e^3 - 9e^2 + 18e - 17}{12}$

2031. $M(2, 4)$

2032. α) $\alpha = 12$, β) $E = \frac{1}{12}$

2033. α. Αν $c = \int_1^e f(x)dx$ τότε για κάθε $x > 0$ έχουμε $xf(x) = 1 + \frac{x}{e}c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} + \frac{c}{e}$

Οπότε: $c = \int_1^e f(x)dx \Leftrightarrow c = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{c}{e} \right) dx \Leftrightarrow \dots$

β. i. $y = -\alpha^2 x + 2\alpha + 1$ ii. $E(\alpha) = \frac{3\alpha^2}{2} - 2\alpha + \ln 2$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $E\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \frac{2}{3}$

2034. Δ1. $f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$ Δ2. Η f^{-1} είναι κυρτή. $E = 4e - \frac{21}{2}$

Δ3. α) Παραγωγίστε την ισότητα $f(f^{-1}(x)) = x$ β) $x=0$ $d_{\min} = 3\sqrt{2}$

2035. α. $y = (1 - \alpha)x$ β. $f_{\min} = g(\alpha) = \alpha - \alpha \ln \alpha - 1 < 0$ για $\alpha > 1$

$$\gamma. \text{ i. } E = \int_0^a (e^x - ax - 1 - (1-a)x) dx = \dots \quad \text{ii. } +\infty$$

2036. Γ.1. Είναι $x'(t) = (16t)'$ άρα $x(t) = 16t$ και $x(0) = 0$ Γ.2. Η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $\Pi(0, 1)$ έχει σημείο επαφής το $A(4, 2)$ $t_0 = \frac{1}{4} \text{ min} = 15 \text{ sec}$

$$\Gamma.3. E = \frac{2}{3} \text{ m}^2. \quad \Gamma.4. \text{ Είναι } d(t) = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1} \text{ με}$$

$$d'(t) = \frac{256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t} \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}} \quad \text{Av } g(t) = 256t\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - 2, \quad t \geq 0,$$

δείξτε ότι έχει μοναδική ρίζα $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$ με Θ. Bolzano στο $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ και

εκατέρωθεν του t_0 η g αλλάζει πρόσημο

$$\mathbf{2037.} \text{ i) } e^2 - e, \quad \text{ii) } \frac{3}{2} - \ln 2, \quad \text{iii) } (e-2)(1-\ln 2), \quad \text{iv) } \frac{(e-1)^2}{e}$$

$$\mathbf{2038.} \alpha. y=x \quad \beta. \frac{\pi-3}{2} \tau. \mu \quad \gamma. \text{ Av } h(x) = \eta \mu x - x + \frac{3}{2} x^2 \text{ τότε } h''(x) > 0 \text{ οπότε ...}$$

$$\mathbf{2039.} \alpha = \sqrt[4]{8}$$

$$\mathbf{2040.} \alpha) f \text{ γν. αύξουσα} \quad \beta) f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2} \quad \gamma) \text{ i) } A(2,2) \quad B(3,3) \quad \text{ii) } \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{2041.} \alpha) f \text{ γν. αύξουσα, οπότε ...}, \quad \beta) 8$$

$$\mathbf{2042.} \beta) E = \frac{e^2 + 2e - 3}{2}$$

$$\mathbf{2043.} \beta) 3/2$$

2044. α) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, f κοίλη στο $(-\infty, 0]$, f κυρτή στο $[0, +\infty)$, f “1-1” ως γν. μονότονη, β) Αρκεί να δείξετε ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γ) $\varepsilon : y=x$, δ) $\frac{25}{12}$

$$\mathbf{2045.} \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{2046.} \alpha. f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} > 0 \quad \beta. \frac{5}{8} \quad \gamma. \frac{1}{2}$$

Ολοκλήρωμα και διάταξη

2047. Α. α) Είναι $f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ οπότε

β) Είναι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ οπότε

$$B. \text{ Είναι } f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ και } f_{\max} = f(0) = e \text{ όπου } f(x) = e^{\sin x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Gamma. \text{ Είναι } f_{\min} = 2\sqrt{e} \text{ και } f_{\max} = 1 + e \text{ όπου } f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}, \quad x \in [0,1]$$

$$\Delta. \text{ Είναι } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \eta \mu x \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ οπότε } \frac{\sqrt{2}}{2x} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{ άρα ...}$$

2048. Είναι $f_{\min} = f(0) = \frac{1}{3}$ και $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e}{4}$ όπου $f(x) = \frac{e^{\eta\mu x}}{3 + \eta\mu x}$

2049. i) Η $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ έχει στο $[2, 5]$ ελάχιστο το $f(e) = e$, άρα ...,

ii) Δείξτε ότι η $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, 3e]$

2050. i) Είναι $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2^x \leq 2^3$, άρα ...,

ii) Η $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, οπότε ...,

iii) Η $f(x) = e^{x^2} - e^{1-x^2}$ είναι γν. αύξουσα στο $[0, 1]$, οπότε ...,

iv) Η $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$ έχει στο $[-1, 1]$ ελάχιστο το $f(-1)=2$ και μέγιστο το $f(1)=2$

2051. i) Από την $0 \leq x \leq 1$ συνθέστε την $\frac{1}{e+1} \leq \frac{x^2+1}{e^x+1} \leq 1$, οπότε ...,

ii) Από την $1 \leq x \leq e$ συνθέστε την $\frac{1}{e^2} \leq \frac{x + \ln^2 x}{x^2} \leq e+1$, οπότε ...

2052. α) Η ανίσωση γράφεται $x \ln x \geq x - 1$ οπότε θεωρήστε $f(x) = x \ln x - x + 1$ και δείξτε ότι έχει ελάχιστο, β) Όπου x στο α) θέστε $x^2 + 1$ και ολοκληρώστε

2053. α) Η $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x - 2$ έχει μέγιστο το $f(0)=0$ άρα...

β) Είναι $\sqrt{x^3+1} \leq \frac{x^3+2}{2}$ οπότε...

2054. -3

2055. Αφού ολοκληρώσετε την ανισότητα εφαρμόστε κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο β' μέλος

2056. i) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(a+\beta-x)-2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$, $x \in [a, \beta]$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

το $g\left(\frac{a+\beta}{2}\right)=0$. ii) Απο το i) ολοκληρώνοντας και θέτοντας $u=a+\beta-x$

iii) Θ. Μ. Τ. για την f στα διαστήματα $[a, x]$ και $[x, \beta]$

iv) Για $x = a$ και $x = \beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα. Για κάθε $x \in (a, \beta)$ από β) ερώτημα. v) Ολοκληρώστε το προηγούμενο ερώτημα

2057. α) Θεωρήστε $h(x) = f(x) - f(a) - f'(\beta)(x-a)$ και δείξτε ότι είναι γν. φθίνουσα στο $[a, \beta]$ ή Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, x]$, β) Ολοκληρώστε το α)

2058. i) Η $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα ... ,

ii) Δείξτε ότι $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$ είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε...,

iii) Είναι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε, iv) Δείξτε ότι: $\frac{x^x}{e^{x-1}} \geq 1$ για κάθε $x > 0$

2059. Είναι $-1 \leq f(x) \leq 1$ άρα $0 \leq f^2(x) \leq 1$ οπότε ...

2060. i) f γν. αύξουσα στο $(-\infty, \frac{1}{v}]$ και γν. φθίνουσα στο $[\frac{1}{v}, +\infty)$ Μέγιστο το $f\left(\frac{1}{v}\right)$

Σ. Καμπής $K\left(\frac{2}{v}, \frac{2}{ve^2}\right)$ ii) Είναι $f\left(\frac{2}{v}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{v}\right)$ οπότε

2061. α) f γν. αύξουσα στο $(0, e^{1/v}]$ και γν. φθίνουσα στο $[e^{1/v}, +\infty)$.

Μέγιστο το $f(e^{1/v}) = \frac{1}{ve}$, β) Είναι $f(x) \leq f(e^{1/v})$, άρα ...

2062. α) Μέγιστο το $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$, β) Είναι $f(x) \leq \frac{1}{2e}$, άρα ...

2063. α) $f(x) = \frac{4}{3x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$

2064. Είναι $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(\beta)}{x}$, οπότε ...

2065. i) Είναι $\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9) dx = \int_1^3 (f(x) - 3)^2 dx$ οπότε.....

ii) Είναι $\int_1^3 f^2(x) dx > 4 \int_1^3 f(x) dx - 8 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \int_1^3 (f(x) - 2)^2 dx$ οπότε.....

2066. A. Αν $h(x) = f(x) - g(x)$, τότε είναι $h(x) \geq 0$ και $h(x_0) \neq 0$, δηλαδή η h δεν είναι παντού ίση με 0, άρα ..., B. α) f γν. φθίνουσα στο $[0, 2]$ $f_{\min} = \frac{3}{2}$, $f_{\max} = \frac{5}{2}$,

β) Είναι $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ με $f(1) \neq \frac{3}{2}$ και $f(1) \neq \frac{5}{2}$, άρα λόγω A. ...

2067. α) $y = x$ β) Η C_f ως κυρτή συνάρτηση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, γ) Είναι $f(x) - x \geq 0$ και η $f(x) - x$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 2]$. Άρα ...

2068. α) $f''(x) > 0$ β) Η $y = \frac{1}{2}x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$, οπότε....

2069. i) f γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ ελάχιστο το $f(0) = 1$, μέγιστο το $f(-1) = f(1) = 2 - \frac{1}{e}$

ii) Ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα

2070. Αν $f(x) \neq 0$ τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο με $f(0) = 4 > 0$. Οπότε

2071. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αν $f(x) > 0$ τότεάτοπο.

2072. i) Θ. Fermat ii) Αν $f'(1) = 0$ τότε Θ. Rolle και άτοπο

iii) Είναι $\int_0^2 f(x)f''(x)dx = -\int_0^2 [f'(x)]^2 dx$ οπότε...

2073. i. Είναι $(f(x) + 2)(f(x) - 1) \leq 0$ οπότε... ii. Είναι $x(f(x) - 1) \leq 0$ οπότε....

2074. α) Είναι $\int_1^3 (f(x) - x) dx < 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx < 4$. β) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x$

στα $[1, x_0]$ και $[x_0, 3]$ όπου επειδή $\int_1^3 h(x) dx < 0$ υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ ώστε $h(x_0) < 0$

γ) Υπάρχουν $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$ & $f'(\xi_2) = 1$ οπότε $f'(\xi_1) < \frac{2016}{2017} < f'(\xi_2)$, άρα.....

2075. α. i. Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^2}$ οπότε ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dots = 1$ β. $\lambda = 8$

γ. i. Κάντε χρήση της συνάρτησης $g(x) = e^x f(x)$ η οποία είναι γν. αύξουσα

ii. Ολοκληρώστε την $f'(x) > f(x)$

2076. α) Είναι $h(x) - g(x) > 0$, οπότε ..., β) i) $f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}}$,

ii) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ ή με μονοτονία κατάλληλης συνάρτησης,

iii) Ολοκληρώστε τη σχέση του α)

2077. i. $f(x) = e^{1-x^2}$ ii. Είναι $1 \leq x \leq \alpha \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{2\alpha^2} \leq \frac{f(x)}{2x^2} \leq \frac{1}{2}$, οπότε ...

$$\text{iii. } \int_1^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) f(x) dx = \int_1^{\alpha} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} \left(\frac{1}{x}\right)' f(x) dx = \dots \text{ iv. Δείξτε ότι } \int_1^{\alpha} f(t) dt < \frac{1}{2}$$

2078. α) Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 6$, άρα ..., β) $\alpha = 1$.

2079. Δ1. $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \dots \Delta 2.$ α) Η f είναι κυρτή

στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$. Συμπίπτει το $O(0, 0)$ β) $\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2}$

2080. α) Αν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$ τότε ... άτοπο β) Είναι $f^2(x) \geq 0$ και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = 0, \text{ οπότε } \dots \gamma) \text{ Είναι } \int_0^1 (f(x) - x)^2 dx \geq 0 \text{ και } (f(x) - x)^2 \geq 0, \text{ άρα } \dots$$

δ) Η ισότητα γίνεται $\int_0^1 (f(x) - e^x)^2 dx = 0$ και επειδή $(f(x) - e^x)^2 \geq 0$ και λόγω α) ..

Τελικά $f(x) = e^x$.

2081. i) $f(x) = 1, x \in [0, 1]$ ii) $f(x) = x, x \in [0, 1]$ iii) $f(x) = 2x, x \in [0, 3]$

2082. $f(x) = \frac{1}{x} + 1, x \in \mathbb{R}$

2083. Είναι $[f'(x) - f(x)]^2 \geq 0$ και $\int_0^1 [f'(x) - f(x)]^2 dx = 0$, οπότε...

2084. Α. i. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 2} \left((f(x))^5 + 16(f(x))^3 - 2^{11} \right) = 0 \Leftrightarrow (f(2))^5 + 16(f(2))^3 - 2^{11} = 0$

$$\Leftrightarrow g(f(2)) = g(4), \text{ όπου } g(x) = x^5 + 16x^3 - 2^{11}, x \in \mathbb{R} \dots$$

$$\text{ii. Έχουμε: } \int_0^2 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^2 f(x) dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \dots$$

Β. i. Η συνάρτηση $\varphi(x) = (AM) = \sqrt{x^4 + (x-3)^2}$, $x \in [0, 2]$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, ότι η φ παρουσιάζει στο $[0, 2]$ ελάχιστο και μέγιστο. ii. $M_1(1, 1)$ και $M_2(2, 4)$

2085. α) $-\frac{1+\lambda}{e^{\lambda}} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 1 + \frac{2}{e}$ β) $-1 + \frac{2}{e}$

2086. α) Θ. Rolle για την g στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, β) $I(\alpha) = (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^{\alpha} + 7$, $\gamma) 7$

2087. α) $6 - \ln 2$ β) i. Είναι $1 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow \dots$, ii. $6 - \ln 2$

2088. α) $6 + \ln 3$ β) $+\infty$

2089. α) $E(\lambda) = 1 - \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}$ β) i) 1 ii) $+\infty$

2090. α) Αν $t=e$, τότε $E=0$, Αν $t \in (0, e)$ ή $t \in (e, +\infty)$ τότε $E(t) = t \ln t - t - e \ln t + e$, β) 0

2091. α) $E(\lambda) = \lambda \ln \lambda - 2\lambda + e$ β) e γ) $y = \frac{1}{e^2}x$ δ) $\frac{e^2}{2} - e$

2092. α) $h(x) > 0$ β) $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln \lambda + 1 - \lambda e$ γ) 0 δ) $+\infty$

2093. α) $\Gamma v.$ αύξουσα, $\varepsilon: y = x$, β) $E(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{4\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 1}$, γ) $\ln 2$

2094. α) $\Gamma v.$ φθίνουσα, β) Ο άξονας $x'x$, γ) $E(\alpha) = -\frac{1}{\ln \alpha} + \frac{1}{\ln 2}$, δ) $\frac{1}{\ln 2}$