

II

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΤΑΞΗΣ Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ II • ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Περιέχει

Θεωρία - Μεθοδολογία
Λυμένες ασκήσεις 180
Ασκήσεις για λύση 942
ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
Β - Γ - Δ

72

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα έκδοση έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές της Γ' Λυκείου στη μελέτη τους παρέχοντας άφθονο υλικό και να τους διευκολύνει στην **κατανόηση-εμπέδωση** των διαφόρων εννοιών αποσπασματικά ανά ενότητες ώστε να **ανταποκριθούν με επιτυχία** στα **ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ** ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ **ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ** ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ.

Η δομή του είναι τέτοια ώστε να είναι στο πνεύμα των θεμάτων του νέου συστήματος.

Περιέχει ΣΕ ΚΑΘΕ ΕΝΟΤΗΤΑ ΚΑΘΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Συνοπτικά τη θεωρία και παρατηρήσεις στον τρόπο επίλυσης των ασκήσεων
- Ασκήσεις λυμένες με Παρατηρήσεις-Μεθοδολογία
- Ασκήσεις για λύση

Στις λυμένες ασκήσεις και στις ασκήσεις για λύση έχουν τοποθετηθεί κάποιες επικεφαλίδες όχι για να καθοδηγήσουν τον λύτη αλλά για να περιορίσουν την απέραντη «ασκησιολογία».

Στο τέλος έχουν προστεθεί

72 ΓΕΝΙΚΑ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ-ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΘΕΜΑΤΑ

με διαβάθμιση Β-Γ-Δ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ

2016-2017-2018

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II

• Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.	5
• Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	35
• Κανόνες De l' Hospital.	63
• Τοπικά ακρότατα συνάρτησης.	83
Χωρίς το θεώρημα της σελ. 264 (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ 2 ^{ΗΣ} ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ)	
• Κυρτότητα-Σημεία καμπίς συνάρτησης.	196
(Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους).	
• Ασύμπτωτες	224
• Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	251

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

• Αρχική συνάρτηση-Παράγουσα	257
• Ορισμένο ολοκλήρωμα	269
•* Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	290

Υπόδειξη-Οδηγία*

<<Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ όπου Δ διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε $a \in \Delta$ η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f >> και με τη βοήθεια αυτής αποδεικνύεται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης.

Η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το **Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού** και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Για το λόγο αυτό **δεν θα διδαχθούν ασκήσεις** που αναφέρονται στην παραγωγή της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ και γενικότερα της συνάρτησης $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$

• Εμβадόν επιπέδου χωρίου χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας	335
• Ολοκλήρωμα και διάταξη	362

72 ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ-ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ	385
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ- 2016 & ΟΜΟΓΕΝΩΝ	412
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2017	419
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2018	424
Απαντήσεις-Υποδείξεις	431

Καλή επιτυχία!

Μην εξαναγκάζεις στο να μάνεις τα
"πρόγραμμα σωστά" αλλά προσπαθείς να
μάνεις τα "σωστά πρόγραμμα".

Οι έξυπνοι άνθρωποι συνεχίζουν να
δεν διατηρούν!

Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί
χωρίς τη σωστή στρατηγική. Η στρατηγική
είναι η λεωφόρος που οδηγεί στην επίτευξη.

Οι νικητές διαθέτουν δύο πρόγραμμα.
Ξεμάθαρους στόχους
και επιθυμία να πετύχουν.

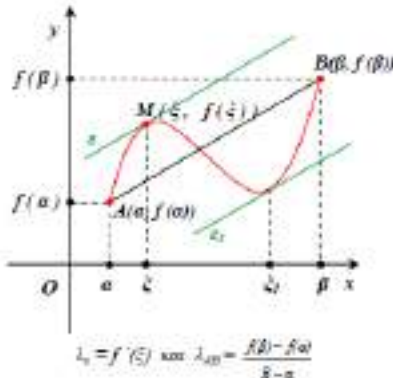
Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι
το πιο πολύτιμο, το πιο ακριβό, το πιο
πεπερασμένο αγαθό.

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ. του Lagrange)

Αν μια συνάρτηση f είναι :

- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$



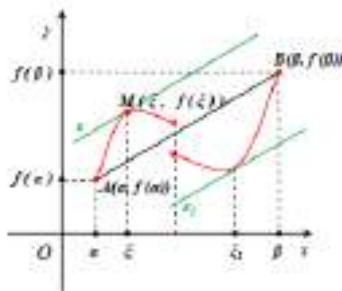
Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι **παράλληλη** της ευθείας AB , όπου $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Παρατηρήσεις :

1. Το θεώρημα του **Rolle** είναι ειδική περίπτωση του **Θεωρήματος μέσης τιμής** αφού αν θέσουμε $f(a) = f(\beta)$ προκύπτει το **Θ. Rolle**.
2. Οι παρατηρήσεις που δώσαμε για τις υποθέσεις του **Θ. Rolle** (εκτός φυσικά της ισότητας των άκρων τιμών) ισχύουν και για το **Θ.Μ.Τ.**
3. Το **αντίστροφο** του θεωρήματος **δεν ισχύει**.

Δηλαδή αν υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$, αυτό δε σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) .



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Υποθέσεις και συμπέρασμα Θ.Μ.Τ.

240. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0, 2]$ και έπειτα να βρείτε τον αριθμό ξ του **Θ.Μ.Τ.**

Λύση

- ♦ Για κάθε $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{3-x^2}{2} \right)' = -x$.
- ♦ Για κάθε $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$.
- ♦ Για το σημείο $x_0 = 1$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2-2}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x-1}{2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = -1$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$.

Συνεπώς η f είναι :

- ♦ συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[0, 2]$
 - ♦ παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$
- οπότε εφαρμόζεται για την f το **Θ.Μ.Τ.** στο $[0, 2]$.

Υπάρχει συνεπώς $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$

- Αν $\xi \in (0, 1)$ τότε : $f'(\xi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\xi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$ (δεκτή)
- Αν $\xi \in [1, 2)$ τότε :
 $f'(\xi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi^2 = 2 \Leftrightarrow \xi = \sqrt{2}$ (δεκτή) ή $\xi = -\sqrt{2}$ (απορ.)

Υπαρξη ξ ώστε $f'(\xi) = c$ ($c \in \mathbb{R}$)

241. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

α' τρόπος

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με : $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

Οπότε για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στο διάστημα $[0, 1]$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta - \delta = 1 \quad (\text{αφού } \alpha + \beta + \gamma = 0)$$

β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $h'(x) = f'(x) - 1$

Είναι :

- $h(0) = f(0) - 0 = \delta$
- $h(1) = f(1) - 1 = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta - 1 = \delta$ (αφού $\alpha + \beta + \gamma = 0$)

Άρα $h(0) = h(1)$, οπότε ισχύει για την h **Θ. Rolle** στο $[0, 1]$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε : $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$

Μεθοδολογία

Για την αντιμετώπιση θεμάτων ύπαρξης $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$, ($c \in \mathbb{R}^*$) συνήθως εφαρμόζουμε :

- **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[\alpha, \beta]$
- **Θ. Rolle** για την $g(x) = f(x) - cx$ στο $[\alpha, \beta]$
- **Θ. Bolzano** για την $h(x) = f'(x) - c$ στο $[\alpha, \beta]$

242. Ένα αυτοκίνητο αναχωρεί από την πόλη Α στη 1 μ.μ. και φθάνει στην πόλη Β, που απέχει 366 Km από την Α, στις 4 μ.μ.

Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης η ταχύτητα του αυτοκινήτου ξεπέρασε το ανώτατο επιτρεπτό όριο ταχύτητας που είναι 120 Km/h. (Θεωρήστε ότι η οδός που συνδέει τις δύο πόλεις είναι ευθεία)

Λύση

Έστω $S(t)$, $t \in [1, 4]$ η συνάρτηση θέσης του αυτοκινήτου πάνω στον άξονα AB με αρχή το A , όπου t σε ώρες. Τότε $S(1) = 0 \text{ Km}$ και $S(4) = 366 \text{ Km}$

Η $S(t)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στο διάστημα $[1, 4]$ άρα υπάρχει

$$t_0 \in (1, 4) \text{ τέτοιο ώστε : } S'(t_0) = \frac{S(4) - S(1)}{4 - 1} \Leftrightarrow v(t_0) = 122 \text{ Km/h}$$

Δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η ταχύτητα $v(t_0)$ του αυτοκινήτου είναι 122 Km/h

άρα **υπερβαίνει το ανώτατο επιτρεπόμενο όριο ταχύτητας.**

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

- Το $\frac{S(4) - S(1)}{4 - 1}$ είναι η **μέση ταχύτητα** του αυτοκινήτου.
- Το **Θ.Μ.Τ.** μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει κάποια χρονική στιγμή $t_0 \in (t_1, t_2)$, όπου $[t_1, t_2]$ το χρονικό διάστημα της κίνησης ενός κινητού, κατά την οποία η ταχύτητα του κινητού είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του.

Θ . Μ . Τ . και ανισότητες

243. Α. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 2017$ και $-1 \leq 2f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (1, 3)$. Να αποδείξετε ότι $2016 \leq f(3) \leq 2018$.

Β. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} < \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta < \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}$.

Γ. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1, 7]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 7)$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, 7)$, να αποδείξετε ότι $f(1) + f(7) > f(3) + f(5)$.

Δ. Να αποδείξετε ότι $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\beta - \alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ε. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$

Λύση

Α. Η f είναι :

- συνεχής στο $[1, 3]$
- παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ με $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Επομένως από το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(3) - 2017}{2} \quad (1)$$

Όμως για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Το $\xi \in (1, 3)$ συνεπώς έχουμε :

$$-\frac{1}{2} \leq f'(\xi) \leq \frac{1}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2} \leq \frac{f(3) - 2017}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq f(3) - 2017 \leq 1 \Leftrightarrow 2016 \leq f(3) \leq 2018.$$

Το Θ.Μ.Τ. και η απόδειξη ανισοτήτων

Με τη βοήθεια του **Θ.Μ.Τ.** είναι δυνατή η απόδειξη ανισοτήτων με μία ή δύο μεταβλητές. Αυτό γίνεται ως εξής :

1^{ov}. Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση f σε κατάλληλο διάστημα $[a, \beta]$. Η εύρεση της συνάρτησης αυτής καθώς και του διαστήματος γίνεται ύστερα από προσεκτική μελέτη της ζητούμενης ανισότητας ή κάποιας ισοδύναμής της.

2^{ov}. Εφαρμόζουμε για την f το **Θ.Μ.Τ.**, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

3^{ov}. Δημιουργούμε μια ανισότητα για το $f'(\xi)$ δηλαδή μια σχέση της μορφής $A < f'(\xi) < B$ η οποία

- πιθανόν να προκύπτει από τα δεδομένα
- δημιουργείται κατασκευαστικά από τη σχέση $a < \xi < \beta$
- προκύπτει από τη σχέση $a < \xi < \beta$ και τη μονοτονία της f' .
- συνεπάγεται από γνωστές ανισότητες όπως : $|\eta \mu \xi| \leq 1$, $|\sigma \nu \xi| \leq 1$ κ.τ.λ.

4^{ov}. Αντικαθιστώντας παίρνουμε $A < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < B$ η οποία, πιθανόν ύστερα από κάποιες απλοποιήσεις, μας δίνει τη ζητούμενη.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \phi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή $0 < a < \beta < \frac{\pi}{2}$ η f είναι :

- συνεχής στο $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f'(x) = \frac{1}{\sigma \nu x}$.

Επομένως από το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma \nu^2 \xi} = \frac{\varepsilon \phi a - \varepsilon \phi \beta}{a - \beta} \quad (1)$$

Θα δημιουργήσουμε μια ανισότητα για την $f'(\xi) = \frac{1}{\sigma \nu^2 \xi}$. Έχουμε :

$$a < \xi < \beta \Leftrightarrow \sigma \nu a > \sigma \nu \xi > \sigma \nu \beta \Leftrightarrow [\text{αφού } \sigma \nu \text{ γν. φθιν. στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)]$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu^2 a > \sigma \nu^2 \xi > \sigma \nu^2 \beta \Leftrightarrow [\text{αφού } \sigma \nu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma \nu^2 a} < \frac{1}{\sigma \nu^2 \xi} < \frac{1}{\sigma \nu^2 \beta} \quad [\text{αφού } \sigma \nu^2 x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)]$$

Οπότε λόγω και της **(1)** παίρνουμε $\frac{1}{\sigma \nu^2 a} < \frac{\varepsilon \phi a - \varepsilon \phi \beta}{a - \beta} < \frac{1}{\sigma \nu^2 \beta}$

Επειδή $a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$ έχουμε :

$$\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha} > \varepsilon \varphi \alpha - \varepsilon \varphi \beta > \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} < \varepsilon \varphi \alpha - \varepsilon \varphi \beta < \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}$$

Γ. Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται :

$$\begin{aligned} f(1) + f(7) > f(3) + f(5) &\Leftrightarrow f(7) - f(5) > f(3) - f(1) \Leftrightarrow \frac{f(7) - f(5)}{2} > \frac{f(3) - f(1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} > \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα μας οδηγεί να εφαρμόσουμε **Θ.Μ.Τ.** για την f στα διαστήματα $[1, 3]$ και $[5, 7]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 7]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 7)$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα $[1, 3]$ και $[5, 7]$, συνεπώς υπάρχουν :

- $\xi_1 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$.
- $\xi_2 \in (5, 7)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{f(7) - f(5)}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } \xi_1 < \xi_2 \quad \overset{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) &\Leftrightarrow \frac{f(3) - f(1)}{2} < \frac{f(7) - f(5)}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(1) + f(7) > f(3) + f(5) \end{aligned}$$

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $\alpha = \beta$, τότε η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα.
- Αν $\alpha \neq \beta$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$.

Η f είναι **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$ και **παραγωγίσιμη** στο (α, β) με παράγωγο $f'(x) = \sigma \nu x$, επομένως από το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \sigma \nu \xi = \frac{\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Αλλά για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\sigma \nu \xi| \leq 1$ οπότε λόγω της **(1)** έχουμε :

$$\left| \frac{\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \stackrel{|\beta - \alpha| > 0}{\Leftrightarrow} |\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha| \leq |\beta - \alpha|$$

Ε. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $x > 0$ και το διάστημα $[x, x+1]$. Η f είναι **συνεχής** στο $[x, x+1]$ και **παραγωγίσιμη** στο $(x, x+1)$ με παράγωγο $f'(t) = \frac{1}{t}$.

Επομένως από το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } x < \xi < x+1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Για απόδειξη ανισοτήτων μιας μεταβλητής υπάρχουν μεθοδολογίες όπου εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία και τα ακρότατα κατάλληλης συνάρτησης.
Αν παρ' όλα αυτά θέλουμε να την αντιμετωπίσουμε με **Θ.Μ.Τ.** κατάλληλα είναι διαστήματα της μορφής: $[0, x]$, $[x, 0]$, $[x, x+1]$ κ.τ.λ.

244. Για τη συνάρτηση f υποθέτουμε ότι είναι :

- συνεχής στο $[-a, a]$ με $a > 0$.
- $f(a) = a$ και $f(-a) = -a$.
- παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in (-a, a)$.

Να βρείτε το $f(0)$.

Λύση

Η f είναι :

- **συνεχής** στα διαστήματα $[-a, 0]$ και $[0, a]$.
- **παραγωγίσιμη** στα διαστήματα $(-a, 0)$ και $(0, a)$.

Άρα από το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχουν $x_1 \in (-a, 0)$ και $x_2 \in (0, a)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-a)}{0 - (-a)} = \frac{f(0) + a}{a} \quad f'(x_2) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a - f(0)}{a}$$

Αλλά $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in (-a, a)$.

Συνεπώς :

$$\left\{ \begin{array}{l} |f'(x_1)| \leq 1 \\ |f'(x_2)| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{f(0) + a}{a} \right| \leq 1 \\ \left| \frac{a - f(0)}{a} \right| \leq 1 \end{array} \right. \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} |f(0) + a| \leq a \\ |a - f(0)| \leq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a \leq f(0) + a \leq a \\ -a \leq a - f(0) \leq a \end{array} \right.$$

$$\text{Οπότε } \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \cdot \text{Επομένως } f(0) = 0$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Επειδή ζητείται το $f(0)$ και γνωρίζουμε τις τιμές $f(-a)$ και $f(a)$ εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ.** στο $[-a, 0]$ και $[0, a]$.

245. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και γνησίως αύξουσα

παράγωγο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, $x \neq 1$.

Να αποδείξετε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$.

Λύση

Για κάθε $x \neq 1$ είναι $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x-1} \right)' = \frac{f'(x)(x-1) - f(x)}{(x-1)^2} \quad (1)$

♦ Για $x > 1$ η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$.
Σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 1}$$

Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $1 < \xi < x$, επομένως :

$$\xi < x \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1} < f'(x) \stackrel{x-1>0}{\Leftrightarrow} f(x) < f'(x)(x-1) \Leftrightarrow f'(x)(x-1) - f(x) > 0$$

♦ Για $x < 1$ η f είναι συνεχής στο $[x, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$.
Σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{-f(x)}{1 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 1}$$

Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x < \xi < 1$, επομένως :

$$x < \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < \frac{f(x)}{x-1} \stackrel{x-1<0}{\Leftrightarrow} f'(x)(x-1) > f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-1) - f(x) > 0$$

Επομένως για κάθε $x \neq 1$ είναι $f'(x)(x-1) - f(x) > 0$ και επειδή $(x-1)^2 > 0$
από την (1) προκύπτει : $g'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$.

246. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k > 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Λύση

Για κάθε $x > 0$ η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$.
Σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(\xi) > k \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} > k \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) - f(0) > kx \Leftrightarrow f(x) > kx + f(0)$$

και κατά συνέπεια $f(x) \geq kx + f(0)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [kx + f(0)] = +\infty$ αφού $k > 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Παρατηρήσεις

❖ Αν ισχύουν:

• $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

❖ Αν ισχύουν:

• $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

• $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Οι παραπάνω προτάσεις δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο αλλά δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να τις χρησιμοποιούν **αναπόδεικτα**.

Χωρισμός διαστήματος σε υποδιαστήματα για εφαρμογή Θ.Μ.Τ.

247. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[a, \beta]$ και επιπλέον $f(a)=a$ και $f(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=a+\beta-x_0$.

ii. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$.

Λύση

i. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f(x_0) = a + \beta - x_0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - a - \beta = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-a-\beta$, $x \in [a, \beta]$

Η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$h(a)=f(a)+a-a-\beta=-\beta, \quad h(\beta)=f(\beta)+\beta-a-\beta=\beta-a=-(a-\beta)$$

$$\text{Άρα } h(a)h(\beta)=-(a-\beta)^2 < 0$$

Επομένως από **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - a - \beta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = a + \beta - x_0$$

ii. Αυτό το ερώτημα αυτόνομο θα ήταν δύσκολο. Δε θα είχαμε τρόπο να βρούμε το σημείο x_0 για να χωρίσουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε δύο υποδιαστήματα.

Όμως έχει προηγηθεί το **α)** ερώτημα το οποίο μας έχει δώσει το x_0 .

Έτσι θα εφαρμόσουμε **Θ.Μ.Τ.** (αφού το συμπέρασμα δεν προδιαθέτει για **Θ. Rolle**) στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

Η f είναι συνεχής στα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα (a, x_0) και (x_0, β) .

Θα υπάρχουν λοιπόν $x_1 \in (a, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \stackrel{i.}{=} \frac{a + \beta - x_0 - a}{x_0 - a} = \frac{\beta - x_0}{x_0 - a}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} \stackrel{i.}{=} \frac{\beta - (a + \beta - x_0)}{\beta - x_0} = \frac{x_0 - a}{\beta - x_0}$$

$$\text{Επομένως} \quad f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \frac{\beta - x_0}{x_0 - a} \cdot \frac{x_0 - a}{\beta - x_0} = 1$$

Μεθοδολογία

Για την αντιμετώπιση θεμάτων ύπαρξης δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ για τα οποία ισχύει μια ιδιότητα όπου υπάρχουν $f'(x_1)$ και $f'(x_2)$, τότε συνήθως χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε δύο υποδιαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ όπου και εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.**

Συχνά το x_0 είναι αυτό που υπάρχει από κάποιο προηγούμενο ερώτημα.

248. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a)=f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ ώστε : $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Λύση

Θεωρούμε το μέσο $\frac{a+\beta}{2}$ του διαστήματος $[a, \beta]$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα $\left[a, \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε από

Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1 \in \left(a, \frac{a+\beta}{2}\right)$ και $x_2 \in \left(\frac{a+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+\beta}{2} - a} = \frac{f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - f(a)}{\frac{\beta-a}{2}}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{a+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-a}{2}}$$

Επομένως :

$$f'(x_1) + f'(x_2) = \frac{f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - f(a) + f(\beta) - f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-a}{2}} = 0, \text{ αφού } f(a)=f(\beta)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Μια άλλη διατύπωση του ζητουμένου είναι : « Να δείξετε ότι σε δύο τουλάχιστον σημεία της C_f οι εφαπτομένες έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης και συνεπώς σχηματίζουν παραπληρωματικές γωνίες με τον άξονα $x'x$ ».

249. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) .

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, \beta)$ ώστε να ισχύει :

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 3 \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Λύση

Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε 3 υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta-a}{3}$.

Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα : $[a, a+d]$, $[a+d, a+2d]$, $[a+2d, \beta]$

Επομένως υπάρχουν : $\xi_1 \in (a, a+d)$, $\xi_2 \in (a+d, a+2d)$, $\xi_3 \in (a+2d, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύουν :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(a+d) - f(a)}{a+d-a} = \frac{f(a+d) - f(a)}{d}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha+2d) - f(\alpha+d)}{\alpha+2d - \alpha - d} = \frac{f(\alpha+2d) - f(\alpha+d)}{d}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(\alpha+2d)}{\beta - \alpha - 2d} = \frac{f(\beta) - f(\alpha+2d)}{d}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{f(\alpha+d) - f(\alpha)}{d} + \frac{f(\alpha+2d) - f(\alpha+d)}{d} + \frac{f(\beta) - f(\alpha+2d)}{d} =$$

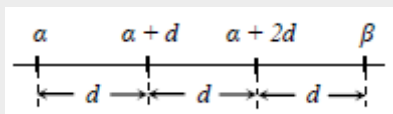
$$\stackrel{d=\frac{\beta-\alpha}{3}}{=} \frac{f(\alpha+d) - f(\alpha) + f(\alpha+2d) - f(\alpha+d) + f(\beta) - f(\alpha+2d)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} = 3 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Μεθοδολογία

- Αν θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \lambda$

τότε χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - \alpha}{3}$ και

εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[\alpha, \alpha+d], [\alpha+d, \alpha+2d], [\alpha+2d, \beta]$.



- Ανάλογα για να αποδείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_n) = \lambda$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε διαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - \alpha}{n}$ και εφαρμόζουμε σε καθένα **Θ.Μ.Τ.**

250. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$.

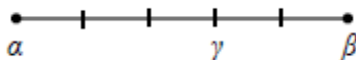
Λύση

Επειδή για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο $[\alpha, \beta]$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

Το πλάτος του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ είναι $\beta - \alpha$. Επίσης $3+2=5$

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε 5 υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - \alpha}{5}$ και

$$\text{παίρνουμε } \gamma = \alpha + 3d = \alpha + 3 \frac{\beta - \alpha}{5} = \frac{5\alpha + 3\beta - 3\alpha}{5} = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}.$$



Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$, επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} 3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) &= 3 \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} + 2 \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\alpha)=f(\beta)}{=} \\ &= 3 \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\frac{2\alpha + 3\beta}{5} - \alpha} + 2 \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \frac{2\alpha + 3\beta}{5}} = 3 \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\frac{3\beta - 3\alpha}{5}} + 2 \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\frac{2\beta - 2\alpha}{5}} \\ &= 3 \cdot 5 \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{3(\beta - \alpha)} + 2 \cdot 5 \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{2(\beta - \alpha)} = 5 \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\beta - \alpha} + 5 \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{5f(\gamma) - 5f(\beta) + 5f(\beta) - 5f(\gamma)}{\beta - \alpha} = 0 \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής : $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) = \lambda$, τότε χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε υποδιαστήματα πλάτους

$d = \frac{\beta - \alpha}{\kappa_1 + \kappa_2}$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ όπου $\gamma = \alpha + \kappa_1 d$.



251. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, όπου $\alpha < \beta$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει : $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 5f'(\xi_3) = 0$

Λύση

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε $2+3+5=10$ υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - \alpha}{10}$

και παίρνουμε : $\gamma_1 = \alpha + 2d = \alpha + 2 \frac{\beta - \alpha}{10} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{5} = \frac{5\alpha + \beta - \alpha}{5} = \frac{4\alpha + \beta}{5}$

και $\gamma_2 = \alpha + (2+3)d = \alpha + 5 \frac{\beta - \alpha}{10} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{2\alpha + \beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο $[\alpha, \beta]$).

Επομένως ισχύουν για την f οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα

$[\alpha, \gamma_1]$, $[\gamma_1, \gamma_2]$, $[\gamma_2, \beta]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \gamma_1)$, $\xi_2 \in (\gamma_1, \gamma_2)$, $\xi_3 \in (\gamma_2, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύουν :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma_1) - f(\alpha)}{\gamma_1 - \alpha} = \frac{f(\gamma_1) - f(\alpha)}{\frac{4\alpha + \beta}{5} - \alpha} = \frac{f(\gamma_1) - f(\alpha)}{\frac{4\alpha + \beta - 5\alpha}{5}} = 5 \cdot \frac{f(\gamma_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 f'(\xi_2) &= \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{\alpha + \beta - \frac{4\alpha + \beta}{2}} = \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{5\alpha + 5\beta - 8\alpha - 2\beta} = \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{-3\alpha + 3\beta} = \frac{10}{3} \cdot \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{\beta - \alpha} \\
 f'(\xi_3) &= \frac{f(\beta) - f(\gamma_2)}{\beta - \gamma_2} = \frac{f(\beta) - f(\gamma_2)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f(\gamma_2)}{2\beta - \alpha - \beta} = 2 \cdot \frac{f(\beta) - f(\gamma_2)}{\beta - \alpha} \quad \text{Οπότε :} \\
 2f(\xi_1) + 3f(\xi_2) + 5f(\xi_3) &= 2 \cdot 5 \cdot \frac{f(\gamma_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} + 3 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{\beta - \alpha} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{f(\beta) - f(\gamma_2)}{\beta - \alpha} \\
 &= 10 \cdot \left(\frac{f(\gamma_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} + \frac{f(\gamma_2) - f(\gamma_1)}{\beta - \alpha} + \frac{f(\beta) - f(\gamma_2)}{\beta - \alpha} \right) \\
 &= 10 \cdot \frac{f(\gamma_1) - f(\alpha) + f(\gamma_2) - f(\gamma_1) + f(\beta) - f(\gamma_2)}{\beta - \alpha} \\
 &= 10 \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{f(\beta)=f(\alpha)}{=} 10 \cdot \frac{f(\alpha) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0
 \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \kappa_3 f'(\xi_3) = \lambda$,

τότε χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε υποδιαστήματα πλάτους $d = \frac{\beta - \alpha}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}$ και

εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\alpha, \gamma_1], [\gamma_1, \gamma_2], [\gamma_2, \beta]$, όπου $\gamma_1 = \alpha + \kappa_1 d$ $\gamma_2 = \alpha + (\kappa_1 + \kappa_2)d$

252. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-5) = -2$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει $x_0 \in (-5, 1)$, ώστε $f(x_0) = 1$.
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-5, 1)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2.$$

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[-5, 1]$ (ως παραγωγίσιμη).

Είναι $-2 < 1 < 4 \Leftrightarrow f(-5) < 1 < f(1)$

Άρα από **Θ.Ενδιαμέσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-5, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$. **(1)**

ii. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[-5, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

Οπότε από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχουν $\xi_1 \in (-5, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοια, ώστε :

$$\begin{aligned}
 f'(\xi_1) &= \frac{f(x_0) - f(-5)}{x_0 - (-5)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1 - (-2)}{x_0 + 5} = \frac{3}{x_0 + 5} \quad \text{και} \\
 f'(\xi_2) &= \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{4 - 1}{1 - x_0} = \frac{3}{1 - x_0}
 \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2 με $-5 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ τέτοιοι, ώστε :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{1}{\frac{3}{x_0+5}} + \frac{1}{\frac{3}{1-x_0}} = \frac{x_0+5}{3} + \frac{1-x_0}{3} = \frac{x_0+5+1-x_0}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Παρατήρηση

Το x_0 με το οποίο χωρίζουμε διάστημα για να εφαρμόσουμε στο β) ερώτημα το **Θ.Μ.Τ.** προκύπτει και από εφαρμογή του **Θ. Bolzano** για την $g(x)=f(x)-1$ στο $[-5, 1]$

253. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f(5)=20$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 5)$, με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1)=6$ και $f(x_2)=12$.

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 5)$, ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = 2$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[1, 5]$, ως παραγωγίσιμη. Είναι
 $2 < 6 < 12 < 20 \Leftrightarrow f(1) < 6 < f(5)$

Άρα από **Θ. Ενδιαμέσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_1) = 6$$

Επίσης ισχύει $6 < 12 < 20 \Leftrightarrow f(x_1) < 12 < f(5)$

Άρα από **Θ. Ενδιαμέσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (x_1, 5)$, άρα $x_2 > x_1$, ώστε $f(x_2)=12$.

ii. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[1, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, 5]$.

Οπότε από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x_1)$, $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_3 \in (x_2, 5)$ τέτοια, ώστε :

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} = \frac{6 - 2}{x_1 - 1} = \frac{4}{x_1 - 1} \\ f'(\xi_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 6}{x_2 - x_1} = \frac{6}{x_2 - x_1} \\ f'(\xi_3) &= \frac{f(5) - f(x_2)}{5 - x_2} = \frac{20 - 12}{5 - x_2} = \frac{8}{5 - x_2} \end{aligned}$$

Επομένως :

$$\begin{aligned} \frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} &= \frac{2}{\frac{4}{x_1 - 1}} + \frac{3}{\frac{6}{x_2 - x_1}} + \frac{4}{\frac{8}{5 - x_2}} \\ &= \frac{2(x_1 - 1)}{4} + \frac{3(x_2 - x_1)}{6} + \frac{4(5 - x_2)}{8} = \frac{x_1 - 1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{5 - x_2}{2} \\ &= \frac{x_1 - 1 + x_2 - x_1 + 5 - x_2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

254. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(a) \neq f(\beta)$,

ii. Υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 διαφορετικά μεταξύ τους και $\xi \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = \frac{9}{f'(\xi)}$$

Λύση

i. Αν $f(a) = f(\beta)$, σύμφωνα με το θεώρημα

Rolle για την f στο $[a, \beta]$, υπάρχει,

$\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι

$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

ii. Επειδή $2+3+4=9$, θεωρούμε τον αριθμό :

$$d = \frac{f(\beta) - f(a)}{9}$$

καθώς και τους αριθμούς γ_1, γ_2 του διαστήματος $[f(a), f(\beta)]$, με $\gamma_1 < \gamma_2$,

για τους οποίους ισχύει ότι :

$$\gamma_1 - f(a) = 2d, \quad \gamma_2 - \gamma_1 = 3d, \quad f(\beta) - \gamma_2 = 4d$$

Σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχουν

$$x_2 \in (a, \beta), \text{ με } f(x_2) = \gamma_2 \quad \text{και} \quad x_1 \in (a, x_2) \text{ με } f(x_1) = \gamma_1$$

Προφανώς είναι $x_1 < x_2$ αφού $x_1 \in (a, x_2)$.

Στα διαστήματα $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, \beta]$ το **Θ.Μ.Τ.** εξασφαλίζει ότι υπάρχουν

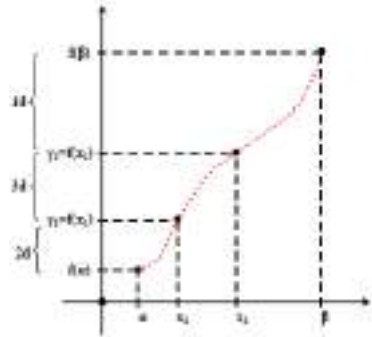
$$\xi_1 \in (a, x_1), \quad \xi_2 \in (x_1, x_2) \quad \text{και} \quad \xi_3 \in (x_2, \beta)$$

τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{\gamma_1 - f(a)}{x_1 - a} = \frac{2d}{x_1 - a} \\ f'(\xi_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{x_2 - x_1} = \frac{3d}{x_2 - x_1} \\ f'(\xi_3) &= \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - x_2} = \frac{f(\beta) - \gamma_2}{\beta - x_2} = \frac{4d}{\beta - x_2} \end{aligned}$$

Είναι :

$$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = \frac{2(x_1 - a)}{2d} + \frac{3(x_2 - x_1)}{3d} + \frac{4(\beta - x_2)}{4d} =$$



$$= \frac{(x_1 - \alpha) + (x_2 - x_1) + (\beta - x_2)}{d} = \frac{\beta - \alpha}{d} = \frac{\beta - \alpha}{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{9}} = \frac{9(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (1)$$

και τα ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι προφανώς διαφορετικά μεταξύ τους .

Όμως η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , οπότε σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

$$\text{Επομένως η σχέση (1) δίνει: } \frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = \frac{9}{f'(\xi)}$$

η οποία είναι η ζητούμενη ισότητα.

Μεθοδολογία

- Αν $f(\alpha) < f(\beta)$ και θέλουμε σχέση μορφής: $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \dots + \frac{\lambda_v}{f'(\xi_v)} = \mu$

τότε χωρίζουμε πρώτα το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$ σε v διάστημα ανάλογα με τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$ θεωρώντας τα σημεία $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{v-1} \in (f(\alpha), f(\beta))$ για τα οποία ισχύει:

$$\frac{\gamma_1 - f(\alpha)}{\lambda_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\lambda_2} = \dots = \frac{f(\beta) - \gamma_{v-1}}{\lambda_v} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\lambda} \text{ όπου } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_v \neq 0$$

Από το **Θ.Ε.Τ.** υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_{v-1} \in (\alpha, \beta)$ ώστε:

$$f(x_1) = \gamma_1, f(x_2) = \gamma_2, \dots, f(x_{v-1}) = \gamma_{v-1}$$

- Εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ.** στα v διαστήματα $[\alpha, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{v-1}, \beta]$ και καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση.

Ρίζα της f'' και πρόσημο $f''(\xi)$.

255. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f που είναι συνευθειακά, τότε να αποδείξετε ότι:

- υπάρχουν δύο σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες της είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

Έστω $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ τα τρία συνευθειακά σημεία της C_f με $\alpha < \beta < \gamma$. Τότε οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB και $A\Gamma$ (όπου

$AB \not\parallel y'y$ και $A\Gamma \not\parallel y'y$, αφού η f είναι συνάρτηση) είναι ίσοι.

$$\text{Δηλαδή } \lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \quad (1)$$

- i. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** για την f στα διαστήματα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, συνεπώς υπάρχουν :

$$x_1 \in (a, \beta) \text{ ώστε } f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a},$$

$$x_2 \in (\beta, \gamma) \text{ ώστε } f'(x_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

και λόγω της **(1)** είναι $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Αυτό όμως σημαίνει ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $M_1(x_1, f(x_1))$ και $M_2(x_2, f(x_2))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

- ii. Για την f' ισχύουν :

- ♦ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως παραγωγίσιμη (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη)
- ♦ είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)
- ♦ $f'(x_1) = f'(x_2)$

Επομένως από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Παρατηρήσεις

- Ο λόγος $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$ παραπέμπει σε **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[a, \beta]$.
Ομοίως ο λόγος $\frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$ παραπέμπει σε **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[\beta, \gamma]$.
- Το συμπέρασμα $f''(\xi) = 0$ μας προδιαθέτει να εφαρμόσουμε **Θ. Rolle** για την f' σε κατάλληλο διάστημα.

256. Η f είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(a) = f(\beta) = 0$. Αν υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ ώστε $f(\gamma) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$. Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα αυτά και συνεπώς :

- υπάρχει $\xi_1 \in (a, \gamma)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} \stackrel{f(a)=0}{=} \frac{f(\gamma)}{\gamma - a} > 0, \text{ αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και } a < \gamma \Leftrightarrow \gamma - a > 0.$$
- υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\beta)=0}{=} \frac{-f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0, \text{ αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και } \gamma < \beta \Leftrightarrow \beta - \gamma > 0.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [a, \beta]$ (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$). Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0,$$

αφού $f'(\xi_2) < 0$, $f'(\xi_1) > 0 \Leftrightarrow -f'(\xi_1) < 0$ και $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_2 - \xi_1 > 0$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ξ ώστε $f''(\xi) = 0$ τότε μάλλον θα εφαρμόσουμε

Θ. Rolle για την f' (σε κατάλληλο διάστημα).

Αν όμως θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ξ ώστε $f''(\xi) > 0$ ή $f''(\xi) < 0$, τότε μάλλον θα εφαρμόσουμε **Θ.Μ.Τ.** για την f' (σε κατάλληλο διάστημα).

Λύση εξισώσεων – ανισώσεων με τη βοήθεια Θ.Μ.Τ.

257. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

Λύση

Έχουμε

$$3^x + 4^x = 2^x + 5^x \Leftrightarrow \frac{3^x - 2^x}{3 - 2} = \frac{5^x - 4^x}{5 - 4} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, $t > 0$.

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα $[2, 3]$ και $[4, 5]$ αφού είναι

- συνεχής στα $[2, 3]$ και $[4, 5]$ και
- παραγωγίσιμη στα $(2, 3)$ και $(4, 5)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 3)$ και $\xi_2 \in (4, 5)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3^x - 2^x}{3 - 2} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{5^x - 4^x}{5 - 4}$$

Οπότε η **(1)** ισοδύναμα γίνεται

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Leftrightarrow x \xi_1^{x-1} = x \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή}$$

$$\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad (\text{αφού } 0 < \frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1).$$

Ασκήσεις

Υποθέσεις και συμπέρασμα Θ.Μ.Τ.

- 1153.** Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει το **θεώρημα**, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

- i. $f(x) = 2\ln x$, $[1, e]$
- ii. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, $[-1, 2]$
- 1154.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ \beta x^2 + 2x + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$ και στο διάστημα $[0, 2]$ να εφαρμόζεται το **Θ.Μ.Τ.** Στη συνέχεια να βρείτε το $\xi \in (0, 2)$ που προκύπτει από το **Θ.Μ.Τ.**

- 1155.** Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι :

i. Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ εφαρμόζεται το **Θ.Μ.Τ.** στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

Υπαρξη ξ ώστε $f'(\xi) = c$ ($c \in \mathbb{R}^*$)

- 1156.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1)=13$ και $f(3)=7$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη στο διάστημα $(1, 3)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $3x + y - 5 = 0$.

- 1157.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$ με $\alpha < \beta$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $2x - 2y + 7 = 0$.

- 1158.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ με

$3f(2)=2f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi)=f(2)$.

- 1159.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και τέτοια ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $P(\xi+1, f(\xi)+1)$.

- 1160.** Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2)=6$.

Να αποδείξετε ότι :

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f παράλληλες στην ευθεία $3x - y + 7 = 0$.

- 1161.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη .
 Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y=3x-5$ και στο σημείο της $B(3, f(3))$ έχει εξίσωση $y=-x+7$.
- Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f'(1)$, $f(3)$ και $f'(3)$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f'(\xi) = 3$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$, ώστε $f''(x_0) = -2$.
- 1162.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $[f(\beta)-f(\alpha)][f(\gamma)-f(\beta)] < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- 1163.** Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < 0 < \beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .
 Αν ισχύει $f(\alpha) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5\alpha$, να αποδείξετε ότι :
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .
 - Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης C_f της f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x-5y+2010=0$.
 - Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha+\beta)$.

(2010)

- 1164.** Δίνεται συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(1, 7)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ »
 - Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-6+f(x^2-8)) = -2$
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x+2y-3=0$.

Θ.Μ.Τ. και ανισότητες

- 1165.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι :
- ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** για την f στο διάστημα $[e, e^2]$.
 - υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 0$.
- 1166.** Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$.
- 1167.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ισχύει ότι $3 \leq f'(x) \leq 7$ για κάθε $x \in (0, 3)$. Αν το σημείο $A(0, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι $11 \leq f(3) \leq 23$.
- 1168.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1169. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Αν $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$ να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

1170. i. Να αποδείξετε ότι $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

1171. Να αποδείξετε ότι

i. $|\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. $|\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta| < 2|\alpha - \beta|$ για κάθε α, β με $0 < \alpha < \beta < 1$.

1172. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $2^\alpha \ln 2 < \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} < 2^\beta \ln 2$

1173. Για κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, με $\alpha \leq \beta$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\beta - \alpha}{\eta \mu^2 \beta} \leq \sigma \varphi \alpha - \sigma \varphi \beta \leq \frac{\beta - \alpha}{\eta \mu^2 \alpha}.$$

1174. Να αποδείξετε ότι $\sigma \varphi \beta < \frac{\ln(\eta \mu \beta) - \ln(\eta \mu \alpha)}{\beta - \alpha} < \sigma \varphi \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ με $\alpha < \beta$.

1175. Αν $0 \leq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $(\beta - \alpha) \epsilon \varphi \alpha < \ln \frac{\sigma \nu \alpha}{\sigma \nu \beta} < (\beta - \alpha) \epsilon \varphi \beta$.

1176. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}} < \beta e$.

1177. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με παράγωγο γνησίως φθίνουσα στο Δ . Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

1178. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(8) + f(11) < f(9) + f(10)$.

1179. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha+1) + f(\alpha+2) > f(\alpha) + f(\alpha+3)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

1180. Να αποδείξετε ότι :

i. $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

ii. Η εξίσωση $x + \ln x = \frac{x}{e} + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, e)$.

1181. Να αποδείξετε ότι :

i. $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$ για κάθε $x < 0$

ii. $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ για κάθε $x > 0$

- iii. $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ για κάθε $x > 0$
- 1182.** Να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- 1183.** Να αποδείξετε ότι $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ για κάθε $x > -1$.
- 1184.** Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$
- 1185.** Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln(x+1)}{x+1} < \frac{1}{2} \ln^2(x+1) - \frac{1}{2} \ln^2 x < \frac{\ln x}{x}$ για κάθε $x > e$.
- 1186.** Να αποδείξετε ότι $\ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} < \ln \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x \geq 2$.
- 1187.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
- $f'(x) < f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) + f(x+1) < f(x-1) + f(x+2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) + f(3x) > 2f(2x)$, για κάθε $x > 0$.
 - $xf(x) + f(x^3) > (x+1)f(x^2)$, για κάθε $x > 1$.
 - $e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x + 1)f(e^{2x})$, για κάθε $x > 0$.
- 1188.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
- $$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- 1189.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=3$ και
- $$|f'(x)| \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι $4-x \leq f(x) \leq x+2$ για κάθε $x \geq 1$.
 - Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x}{x^2 + 1}$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [2, 3]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3\xi - 4$.
- 1190.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και
- $$|f'(x)| \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$
- Να αποδείξετε ότι $-x \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.
 - Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x) + 2x}$.
- 1191.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι :
- $$f'(x) < \frac{f(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 0$$
- 1192.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f της οποίας η παράγωγός της f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

- i. $f'(x) < \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < f'(\alpha)$ για κάθε $x > \alpha$.
- ii. $(x-\alpha)f'(x) + f(\alpha) < f(x) < f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$, για κάθε $x > \alpha$.
- iii. η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $x > \alpha$ έχει αρνητική παράγωγο.
- 1193.** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- 1194.** Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$ και γνησίως αύξουσα παράγωγο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-x}{x}$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
- 1195.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(2)=0$ και γνησίως φθίνουσα παράγωγο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$, $x \neq 2$. Να αποδείξετε ότι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2$.
- 1196.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου k κάποιος πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = (k-1)x$ σε ένα ακριβώς σημείο.
- 1197.** Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με
- $$f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε:
- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lambda^2$ ii. $\lambda = \frac{1}{2}$
- γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) > \frac{1}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με
- $$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{f(4)-f(3)}{f(2)}$$
- E.M.E 2016**
- 1198.** Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 2]$ με $f(0)=f(2)=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε
- $$|f''(x_0)| > |f(1)-1|.$$
- 1199.** Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$

με $|f''(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι $\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}\right| < \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$.

1200. Έστω συνάρτηση $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 3]$.

Να αποδείξετε ότι $f(-1) \leq f(x) \leq f(3)$ για κάθε $x \in [-1, 3]$.

1201. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-1, 2]$. Αν $f(2)=3$ και $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in [-1, 2]$, τότε να αποδείξετε ότι :

i. $-3 \leq f(-1) \leq 9$

ii. για κάθε $x \in [-1, 2]$ ισχύει $2x - 1 \leq f(x) \leq -2x + 7$.

Χωρισμός διαστήματος σε υποδιαστήματα για εφαρμογή Θ.Μ.Τ.

1202. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=2$, $f(2)=4$ και $f(4)=3$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(\xi_1, f(\xi_1))$ και $B(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

1203. Έστω η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

(2001)

1204. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$, να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)=\gamma$.

ii. υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda)=1$.

1205. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f(0)=\alpha$, $\alpha > 0$ και $f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\alpha x_0$.

ii. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=\alpha^2$.

1206. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=\beta^2$ και $f(\beta)=\alpha^2$, όπου $\alpha \neq -\beta$.

Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=(\alpha+\beta)x_0-\alpha\beta$.

ii. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=(\alpha+\beta)^2$.

1207. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0)=2017$ και $f(1)=2015$.

Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

- ii. υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0, 1)$ τέτοιοι ώστε $\frac{1}{f'(\alpha)} + \frac{1}{f'(\beta)} = -1$.

1208. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3)=4$ και $f(13)=16$.

Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (3, 13)$, με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1)=6$ και $f(x_2)=10$.
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (3, 13)$, ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = 5$.

1209. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η εξίσωση $2f(x)=f(\alpha)+f(\beta)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι, ώστε :

$$\frac{1}{2f'(\xi_1)} + \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

1210. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $5f(x_0)=2f(\alpha)+3f(\beta)$.
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$.

1211. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ και ισχύει :

$$f(0)+f(2)=f(1)+f(3)$$

- i. Αν αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.
- ii. Αν η f είναι «1-1» και η f' είναι συνεχής, να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 3)$.

1212. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(3) \neq 0$ και $3f(1)=9f(3)=f(5)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 5)$, ώστε $f'(\xi) = 0$.

1213. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)=\alpha$, $f(2)=\beta$, $f(4)=\alpha+\beta$ και $f(5)=2\alpha+4$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = 4$.
- ii. Υπάρχει $\xi \in (1, 5)$, ώστε $f'(\xi) = 2$.

1214. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$$\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta) \text{ με } \xi_1 < \xi_2, \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1)f'(\xi_2) > 0.$$

1215. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με παράγωγο f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο ώστε } \frac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x_0} > 0.$$

1216. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0)=0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = (1 - \xi)f'(\xi)$.

ii. υπάρχει $x_0 \in (0, \xi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < \frac{f'(\xi)}{\xi}$.

1217. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ με $f(1) = f(6)$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0.$$

1218. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

1219. Έστω μια συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[0, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.

1220. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε

$$2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2).$$

1221. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(0) = f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 3)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$$

1222. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(\alpha) = \beta + 3\alpha$ και $f(\beta) = \alpha + 3\beta$, όπου $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6$$

1223. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 5)$ και ισχύει $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 5)$ τέτοια ώστε:

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$$

1224. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε θετικούς κ και λ υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε $\kappa f'(\xi_1) + \lambda f'(\xi_2) = 0$.

1225. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle** στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 0.$$

1226. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $f(1) \neq 0$ και $f(1) + f(2) = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 2)$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{-1}{f(1)}$

1227. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, ώστε : $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

1228. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν $f(a) < f(\beta)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$$\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta) \text{ με } \xi_1 \neq \xi_2, \text{ τέτοια ώστε : } \frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$$

1229. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν $f(a) < f(\beta)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, \beta)$ διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε :

$$\frac{1}{4f'(\xi_1)} + \frac{1}{3f'(\xi_2)} + \frac{5}{12f'(\xi_3)} = \frac{\beta - a}{f(\beta) - f(a)}$$

1230. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία

ισχύει:
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \eta \mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} = 4$$

Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει ότι $g'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$ και $B\left(2, \frac{14}{3}\right)$ να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 3$.

iii. Υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε $\frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1) \cdot f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$.

iv. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho+1) - f(\rho) = 2$.

Ρίξα της f'' και πρόσημο $f''(\xi)$

1231. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει :

$$f(1) + f(4) = f(2) + f(3).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

1232. Έστω $a > 0$ και μια συνάρτηση g η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-a, a]$ και τέτοια ώστε $g(-a) + g(a) = 2g(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-a, a)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$.

1233. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (2, 6)$ τέτοιος, ώστε $f''(x_0) = 0$.

1234. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και οι αριθμοί $f(a)$, $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$, $f(\beta)$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής

προόδου. Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

1235. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ τέτοια, ώστε $f(1)=f(0)+\mu$ και $f'(1)=f'(0)=\mu$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά μεταξύ τους $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)$.

1236. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μια ευθεία ε με εξίσωση $y=ax+\beta$, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι τετμημένες των σημείων αυτών, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

1237. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε τέμνει το πολύ σε δύο σημεία τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f .

1238. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+2x+4)e^x$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά πάνω στη γραφική παράσταση της f .

1239. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ με $\alpha < \beta$ δύο σημεία της γραφικής της παράστασης. Έστω $M(\kappa, \lambda)$ σημείο της ευθείας που ορίζουν τα σημεία A και B με $\kappa \notin [\alpha, \beta]$. Αν η f' είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι :

- i. Το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το M

1240. Έστω μια συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ τέμνει τη C_f στο $B(\beta, f(\beta))$, $\beta > \alpha$ να αποδείξετε ότι

- i. η f' δεν είναι «1-1».
- ii. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

1241. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln f(x)$. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$.
- ii. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2$.

1242. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta)=f'(\beta)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$

1243. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=f(3)=0$

και $f(2) > 0$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε : $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
- ii. Υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε : $f''(\xi) < 0$.

1244. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ με $f(α)=f(β)=0$. Αν $γ \in (α, β)$ και $f(γ) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f''(ξ) > 0$.

1245. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[α, β]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $(α, β)$. Αν ισχύει $f(α)=f(β)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $γ \in (α, β)$, $δ \in (α, β)$, έτσι ώστε $f(γ) \cdot f(δ) < 0$, να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(α, β)$.
- ii. Υπάρχουν σημεία $ξ_1, ξ_2 \in (α, β)$ τέτοια ώστε $f''(ξ_1) < 0$ και $f''(ξ_2) > 0$.
- iii. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

(2003)

1246. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ και ο αριθμός $γ \in (α, β)$ ώστε $f(α) < f(β) < f(γ)$.

Να δείξετε ότι :

- i. Η f δεν είναι "1-1".
- ii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(α, β)$.
- iii. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (α, β)$ ώστε $f''(ξ) < 0$.

1247. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $f(0)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι :

- i. υπάρχουν $ξ_1, ξ_2 \in (0, 2)$ με $ξ_1 < ξ_2$ τέτοια ώστε $f'(ξ_1) - f'(ξ_2) = 2f(1)$.
- ii. υπάρχει $ξ \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f''(ξ)| > |f(1)|$.

1248. Η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση C_f τέμνει την διχοτόμο $(δ)$ του πρώτου τεταρτημορίου σε τρία διαφορετικά σημεία. Να αποδείξετε ότι:

- i. υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f παράλληλες στην $(δ)$.
- ii. υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων.

1249. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1, 1]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε $f(-1) < f(1)$, $f'(-1) < 0$ και $f'(1) < 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

1250. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$.

α. Αν $f(α) - f(β) = α^3 - β^3$

- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ ώστε $f'(x_0) = 3x_0^2$
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$ ώστε $f'(ξ) = \frac{f(α) - f(β)}{ξ - β}$.

β. Αν $f(α) = β$ και $f(β) = α$, να αποδείξετε ότι :

- i. υπάρχει $c \in (α, β)$ ώστε $f(c) = c$.
- ii. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (α, β)$ ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$.

Λύση εξισώσεων – ανισώσεων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

1251. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa \in (2, 3)$ και $\lambda \in (4, 5)$ τέτοια ώστε :

$$3^a - 2^a = a\kappa^{a-1} \text{ και } 5^a - 4^a = a\lambda^{a-1}$$

ii. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ αν ισχύει :

$$f(3)+f(4)=f(2)+f(5)$$

iii. Να βρείτε τις τιμές του $a > 0$ για τις οποίες :

$$3^a + 4^a > 2^a + 5^a.$$

1252. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $7^x + 4^x = 5^x + 6^x$

ii. $6^x + 9^x = 7^x + 8^x$

iii. $2^x + 9^x = 6^x + 7^x$

Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

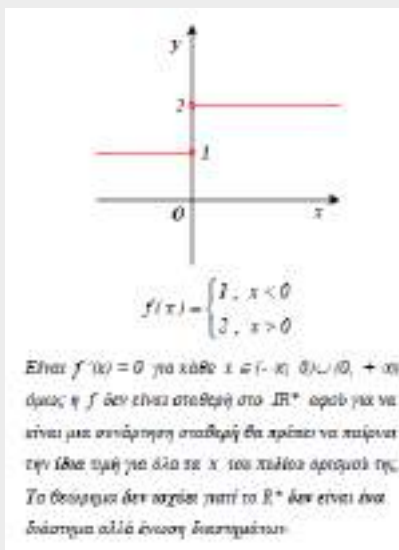
Αν :

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Παρατηρήσεις :

- Το θεώρημα ισχύει μόνο σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων ή σε άλλο σύνολο.



- Αν το Δ είναι ανοιχτό διάστημα, η ύπαρξη της συνέχειας δεν απαιτείται αφού καλύπτεται από την ύπαρξη της παραγώγου στο Δ .

Αν το Δ είναι κλειστό, τότε στα κλειστά άκρα του Δ δεν μας ενδιαφέρει καν η ύπαρξη της παραγώγου.

- Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος, δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ , τότε έχει παράγωγο μηδέν στο διάστημα αυτό.

Πόρισμα

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν :

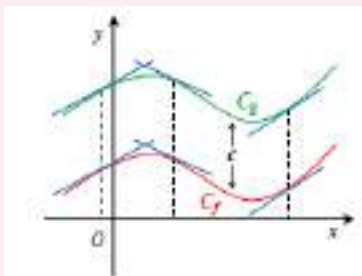
- η f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει :

$$f(x)=g(x)+c$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν δύο συναρτήσεις έχουν σε κάθε σημείο τους με την ίδια τετμημένη παράλληλες εφαπτομένες ($f'(x)=g'(x)$), τότε οι γραφικές τους παραστάσεις είναι «παράλληλες», δηλαδή η μία προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης.



Παρατηρήσεις :

- Γνωρίζουμε ότι αν δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι ίσες, τότε έχουν και ίσες παραγώγους.
Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει. Δηλαδή αν δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους, τότε δεν είναι ίσες, αλλά διαφέρουν κατά μια σταθερά c .
- Το παραπάνω πόρισμα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Ισχύει το αντίστροφο του πορίσματος.
Δηλαδή αν $f(x) = g(x) + c$, τότε $f'(x) = (g(x) + c)' = g'(x)$.
Αρκεί οι f και g να είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σταθερή συνάρτηση - Εύρεση συνάρτησης

258. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$f'(x) = \eta \mu x f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) e^{\sigma \nu x}$ είναι σταθερή.
- Αν $f(0) = 1$ να βρείτε την f .

Λύση

- Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και $e^{\sigma \nu x}$ (σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x και $\sigma \nu x$) με παράγωγο :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(x) e^{\sigma \nu x})' = f'(x) e^{\sigma \nu x} + f(x) e^{\sigma \nu x} (\sigma \nu x)' \\ &= f'(x) e^{\sigma \nu x} + f(x) e^{\sigma \nu x} (-\eta \mu x) \\ &= e^{\sigma \nu x} [f'(x) - \eta \mu x f(x)] = e^{\sigma \nu x} [\eta \mu x f(x) - \eta \mu x f(x)] = 0 \end{aligned}$$

Άρα $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

- Επειδή η g είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε :

$$g(x) = c \Leftrightarrow f(x) e^{\sigma \nu x} = c \Leftrightarrow f(x) = c e^{-\sigma \nu x}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = c e^{-\sigma \nu 0} \Leftrightarrow f(0) = c e^{-1} = \frac{c}{e}$$

$$\text{Αλλά } f(0) = 1, \text{ οπότε } \frac{c}{e} = 1 \Leftrightarrow c = e.$$

$$\text{Άρα } f(x) = e e^{-\sigma \nu x} \Leftrightarrow f(x) = e^{1 - \sigma \nu x}, x \in \mathbb{R}.$$

259. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν

$$f(0)=0, \quad g(0)=1, \quad f'(x)=g(x) \quad \text{και} \quad g'(x)=-f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. η συνάρτηση $\varphi(x)=[f(x)-\eta\mu x]^2+[g(x)-\sigma\upsilon\nu x]^2$ είναι σταθερή.
- ii. $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

- i. Αν $\varphi(x)=(f(x)-\eta\mu x)^2+(g(x)-\sigma\upsilon\nu x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ τότε είναι :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2(f(x)-\eta\mu x)(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x) + 2(g(x)-\sigma\upsilon\nu x)(g'(x)+\eta\mu x) \\ &= 2(f(x)-\eta\mu x)(g(x)-\sigma\upsilon\nu x) + 2(g(x)-\sigma\upsilon\nu x)(-f(x)+\eta\mu x) \\ &= 2(f(x)-\eta\mu x)(g(x)-\sigma\upsilon\nu x) - 2(g(x)-\sigma\upsilon\nu x)(f(x)-\eta\mu x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα $\varphi(x)=c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii. Για $x=0$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= (f(0)-\eta\mu 0)^2 + (g(0)-\sigma\upsilon\nu 0)^2 = 0^2 + (1-1)^2 = 0 \\ \varphi(0) &= c \end{aligned} \right\} \quad \text{άρα } c = 0$$

Επομένως $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ή ισοδύναμα $(f(x)-\eta\mu x)^2+(g(x)-\sigma\upsilon\nu x)^2=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

συνεπώς $f(x)-\eta\mu x=0$ και $g(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$, ή

$$f(x)=\eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x)=\sigma\upsilon\nu x$$

260. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι

- i. Η συνάρτηση $h(x)=[g(x)]^2+[g'(x)]^2$ είναι σταθερή.
- ii. $f(x)=\eta\mu x$.

Λύση

- i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g'(x)=f'(x)-\sigma\upsilon\nu x$ και $g''(x)=f''(x)+\eta\mu x$.

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2g'(x)g(x) + 2g'(x)g''(x) = 2g'(x)[g(x)+g''(x)] \\ &= 2[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x][f(x)-\eta\mu x + f''(x)+\eta\mu x] = 2[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x] \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως $h(x)=c \Leftrightarrow [g(x)]^2+[g'(x)]^2=c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii. Για $x=0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} [g(0)]^2+[g'(0)]^2 &= c \Leftrightarrow [f(0)-\eta\mu 0]^2+[f'(0)-\sigma\upsilon\nu 0]^2 = c \\ &\Leftrightarrow 0^2+(1-1)^2 = c \Leftrightarrow c=0 \end{aligned}$$

Συνεπώς $[g(x)]^2+[g'(x)]^2=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $[g(x)]^2 \geq 0$ και $[g'(x)]^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι :

$$g(x)=0 \quad \text{και} \quad g'(x)=0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f(x)-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

261. Έστω $\kappa \in \mathbb{N}^*$ με $\kappa > 1$ και οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$|f(x)-g(y)| \leq |x-y|^\kappa \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. $f=g$
- ii. Η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Λύση

i. Για $y=x$ η δοθείσα σχέση γίνεται :

$$|f(x)-g(x)| \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $|f(x)-g(x)| \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι :

$$|f(x)-g(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f=g.$$

ii. Λόγω α) ερωτήματος έχουμε : $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^k$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Θέτοντας } y = x_0 \text{ παίρνουμε : } |f(x)-f(x_0)| \leq |x-x_0|^k$$

$$\text{Για κάθε } x \neq x_0 \text{ έχουμε : } \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq \frac{|x-x_0|^k}{|x-x_0|}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \leq |x-x_0|^{k-1} \Leftrightarrow -|x-x_0|^{k-1} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0|^{k-1}$$

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0|^{k-1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} (-|x-x_0|^{k-1}) = 0$$

$$\text{Οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής είναι : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x_0) = 0$

Άρα $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή σε διάστημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο μηδέν σε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού.

Εύρεση συνάρτησης από ισότητα παραγώγων

262. Έστω f, g δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν :

$$f(0) = g(0) = 1, \quad f(1)=3, \quad g(1)=2 \text{ και } f''(x)=g''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=g''(x)$ άρα $(f'(x))'=(g'(x))'$, οπότε :

$$f'(x)=g'(x)+c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ ή } f'(x)=(g(x)+cx)', \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα $f(x) = g(x) + cx + c_1$ (1), $x \in \mathbb{R}$, $c_1 \in \mathbb{R}$

$$\bullet \text{ Για } x=0 \text{ από (1) παίρνουμε } f(0)=g(0)+c_1 \Leftrightarrow 1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

Οπότε η (1) γίνεται $f(x)=g(x)+cx$, $x \in \mathbb{R}$ (2)

$$\bullet \text{ Για } x=1 \text{ από (2) παίρνουμε } f(1)=g(1)+c \Leftrightarrow 3=2+c \Leftrightarrow c=1$$

Επομένως από (2) έχουμε $f(x)=g(x)+x$, $x \in \mathbb{R}$

263. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $f'(x) = 3x - \sin x + \frac{2}{x}$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(\pi) = \frac{3\pi^2}{2}$
 ii. $f'(x) = x(2\sin x - x\eta\mu x)$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
 iii. $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$
 iv. $f'(x) = \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x}$, $x \in \Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
 v. $f''(x) = e^x - \eta\mu x$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(0) = f(0) = 1$

Λύση

- i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$f'(x) = 3x - \sin x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2\right)' - (\eta\mu x)' + (2\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - \eta\mu x + 2\ln x\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \eta\mu x + 2\ln x + c$$

$$\text{Είναι } f(\pi) = \frac{3\pi^2}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\pi^2 - \eta\mu\pi + 2\ln\pi + c = \frac{3\pi^2}{2} \Leftrightarrow c = -2\ln\pi$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \eta\mu x + 2\ln x - 2\ln\pi, \quad x > 0$$

- ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = 2x\sin x - x^2\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' \Leftrightarrow f'(x) = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 \sin x + c$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow 0^2 \sin 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Άρα } f(x) = x^2 \sin x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^x x}{(e^x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x)'e^x - (e^x)'x}{(e^x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x} + c$$

$$\text{Είναι } f(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{0}{e^0} + c = 2 \Leftrightarrow c = 2. \quad \text{Άρα } f(x) = \frac{x}{e^x} + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- iv. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sin x} + c$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} + c = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + c = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} + c = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} + c = \sqrt{2} \Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ε. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f''(x) = e^x - \eta \mu x \Leftrightarrow (f'(x))' = (e^x + \sigma \nu \nu x)' \Leftrightarrow f'(x) = e^x + \sigma \nu \nu x + c_1$$

$$\text{Είναι } f'(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 + \sigma \nu \nu 0 + c_1 = 1 \Leftrightarrow 1 + 1 + c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 = -1$$

$$\text{Άρα } f'(x) = e^x + \sigma \nu \nu x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (e^x + \eta \mu x - x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x + \eta \mu x - x + c_2.$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 + \eta \mu 0 - 0 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

$$\text{Επομένως } f(x) = e^x + \eta \mu x - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

264. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $x f'(x) = f(x) \ln f(x), \quad f(x) > 0, \quad x \in \Delta = (0, +\infty) \quad \text{και} \quad f(1) = e^2.$

ii. $f'(x) - 2x e^{-f(x)} = 0, \quad x \in \Delta = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(1) = 1.$

iii. $x f'(x) = e^{\frac{1}{x}} (x-1) \quad x \in \Delta = (0, +\infty) \quad \text{και} \quad f(1) = e.$

Λύση

i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$x f'(x) = f(x) \ln f(x) \Leftrightarrow x \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln f(x) \Leftrightarrow x \frac{f'(x)}{f(x)} - \ln f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(\ln f(x))' - (x)' \ln f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(\ln f(x))' - (x)' \ln f(x)}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln f(x)}{x} \right)' = 0$$

$$\text{Άρα: } \frac{\ln f(x)}{x} = c \Leftrightarrow \ln f(x) = cx, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } \ln f(1) = c \Leftrightarrow \ln e^2 = c \Leftrightarrow 2 \ln e = c \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = e^{2x}, \quad x > 0.$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) - 2x e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x \frac{1}{e^{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = 2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + c$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } e^{f(1)} = 1^2 + c \Leftrightarrow e^1 = 1 + c \Leftrightarrow c = e - 1.$$

$$\text{Οπότε } e^{f(x)} = x^2 + e - 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2 + e - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

iii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$xf'(x) = e^{\frac{1}{x}}(x-1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}}{x} \Leftrightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x) = (x)'e^{\frac{1}{x}} + x\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x)'e^{1/x} + x(e^{1/x})' \Leftrightarrow f'(x) = (xe^{1/x})' \Leftrightarrow f(x) = xe^{\frac{1}{x}} + c$$

$$\text{Αλλά } f(1) = e \Leftrightarrow e + c = e \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, x > 0.$$

Θυμηθείτε

- $f'(x) + g'(x) = (f(x) + g(x))'$ $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'$
- $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$, $\text{av } g(x) \neq 0$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(\frac{1}{f(x)}\right)'$, $\text{av } f(x) \neq 0$
- $vf^{v-1}(x)f'(x) = (f^v(x))'$ $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$, $\text{av } f(x) > 0$
- $e^{f(x)}f'(x) = (e^{f(x)})'$ $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$, $\text{av } f(x) > 0$

265. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα
 $f(x+y) + f(x+2y) = 2f(x) + 3y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν $f(1)=4$, να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας (αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι παραγωγίσιμες και οι $f(x+y)$, $f(x+2y)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων) θεωρώντας ως **μεταβλητή το y** και το x ως **σταθερά**.

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι :

$$f'(x+y)(x+y)' + f'(x+2y)(x+2y)' = 0 + (3y)' \Leftrightarrow f'(x+y) + 2f'(x+2y) = 3$$

Για $y=0$ η παραπάνω σχέση δίνει : $f'(x) + 2f'(x) = 3 \Leftrightarrow f'(x) = 1$

Άρα $f'(x) = (x)' \Leftrightarrow f(x) = x + c$. Για $x=1$ έχουμε : $f(1) = 1 + c$.

Αλλά $f(1)=4$ οπότε $4 = 1 + c \Leftrightarrow c = 3$. Άρα $f(x) = x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Ισότητες της μορφής $f'(g(x)) = h(x)$

266. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

$$f(0) = -2 \text{ και } f'(x^5 + x) = 6x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι : $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

Η σχέση $f'(x^5+x)=6x$ για $x=1$ δίνει $f'(2)=6$.

Για να βρούμε το $f(2)$ πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης

$$f'(x^5+x)=6x \text{ με το } (x^5+x)'=5x^4+1 \neq 0$$

Έτσι έχουμε :

$$f'(x^5+x)(5x^4+1)=6x(5x^4+1) \text{ ή } (f(x^5+x))'=30x^5+6x$$

$$\text{ή } (f(x^5+x))'=(5x^6+3x^2)'$$

Αρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $f(x^5+x)=5x^6+3x^2+c$

Για $x=0$ η τελευταία σχέση δίνει : $f(0)=c \Leftrightarrow c=-2$

Οπότε : $f(x^5+x)=5x^6+3x^2-2$. Για $x=1$ παίρνουμε : $f(2)=5+3-2 \Leftrightarrow f(2)=6$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $y-6=6(x-2) \Leftrightarrow y=6x-6$

267. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν :

$$f(1)=1 \text{ και } f'(e^{-x})=\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

Λύση

α' τρόπος

Είναι $f'(e^{-x})=\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με $(e^{-x})'=-e^{-x}$ οπότε διαδοχικά έχουμε :

$$-e^{-x}f'(e^{-x})=e^{-x}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \text{ ή } (e^{-x})'f'(e^{-x})=-e^{-x}\eta\mu x + e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{ή } (f(e^{-x}))'=(e^{-x}\eta\mu x)'$$

Αρα είναι : $f(e^{-x})=e^{-x}\eta\mu x + c$

Για $x=0$ έχουμε : $f(1)=c \Leftrightarrow c=1$. Συνεπώς $f(e^{-x})=e^{-x}\eta\mu x + 1$

Θέτουμε $e^{-x}=\omega$, όπου $\omega>0$. Οπότε $-x=\ln\omega \Leftrightarrow x=-\ln\omega$ και

$$f(\omega)=\omega\eta\mu(-\ln\omega)+1 \Leftrightarrow f(\omega)=-\omega\eta\mu(\ln\omega)+1, \quad \omega>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι :

$$f(x)=1-x\eta\mu(\ln x), \quad x>0$$

β' τρόπος

Θέτουμε $e^{-x}=u \Leftrightarrow -x=\ln u \Leftrightarrow x=-\ln u$ με $u>0$

Οπότε $f'(u)=\eta\mu(-\ln u)-\sigma\upsilon\nu(-\ln u) \Leftrightarrow f'(u)=-\eta\mu(\ln u)-\sigma\upsilon\nu(\ln u), \quad u>0$

Είναι : $f'(u)=-(u)'\eta\mu(\ln u)-\sigma\upsilon\nu(\ln u)(\ln u)'\Leftrightarrow f'(u)=-(u)'\eta\mu(\ln u)-(\eta\mu(\ln u))'u$

$$\Leftrightarrow f'(u)=-(u\eta\mu(\ln u))'$$

$$\text{Αρα } f(u)=-u\eta\mu(\ln u)+c$$

Για $u=1$, έχουμε : $f(1)=-\eta\mu 0+c \Leftrightarrow 1=c$

Αρα $f(u)=-u\eta\mu(\ln u)+1, \quad u>0$.

Επομένως $f(x)=1-x\eta\mu(\ln x), \quad x>0$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης είναι ευκολότερος ο α' τρόπος ή ο β' τρόπος.

Εδώ μάλλον είναι προτιμότερος ο α' τρόπος.

Ισότητα παραγώγων σε ένωση διαστημάτων

268. Για συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = xf'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν επιπλέον ισχύει $f(2)=2$, να αποδείξετε ότι $f(x)=x$.

Λύση

Έχουμε : $f(x) = xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0$

Για $x \neq 0$ είναι : $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$

Άρα :

$$\bullet \quad \frac{f(x)}{x} = c_1, \text{ για κάθε } x > 0 \quad \bullet \quad \frac{f(x)}{x} = c_2, \text{ για κάθε } x < 0$$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} c_1 x, & x > 0 \\ c_2 x, & x < 0 \end{cases}$. Είναι $f(2) = 2 \Leftrightarrow 2c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = 1$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ c_2 x, & x < 0 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο 0) συνεπώς ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Από τη σχέση $f(x) = xf'(x)$ για $x = 0$ προκύπτει $f(0) = 0$. Επομένως :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{c_2 x}{x} = c_2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } c_2 = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση

Είναι $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Δεν μπορούμε να γράψουμε

ότι $\frac{f(x)}{x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ αφού το θεώρημα απ' όπου προκύπτει ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή προϋποθέτει η παράγωγός της να μηδενίζεται για κάθε x που ανήκει σε ένα διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων όπως είναι το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

269. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$(x-2)f'(x) = 2x^2 - 5x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(3)=7$, να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Για $x \neq 2$ παίρνουμε :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x-2)(2x-1)}{x-2} \Leftrightarrow f'(x) = 2x-1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^2 - x)'$$

$$\text{Άρα : } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + c_1, & x < 2 \\ x^2 - x + c_2, & x > 2 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής και στο 2. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 2 + c_2 = f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ f(2) = 2 + c_2 \end{cases}$$

Ακόμη έχουμε : $f(3) = 7 \Leftrightarrow 9 - 3 + c_2 = 7 \Leftrightarrow c_2 = 1$ οπότε $c_1 = 1$ και $f(2) = 3$

$$\text{Επομένως : } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ x^2 - x + 1, & x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x^2 - x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Είναι: $f'(x) = (x^2 - x)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Δεν μπορούμε να γράψουμε ότι $f(x) = x^2 - x + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ αφού το θεώρημα απ' όπου προκύπτει ότι οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά προϋποθέτει οι παράγωγοί τους να είναι ίσες για κάθε x που ανήκει σε ένα διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων όπως είναι το $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Τ ο τ έ χ ν α σ μ α π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ο ύ μ ε $e^{G(x)}$

270. Να βρείτε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε καθεμία από τις περιπτώσεις :

i. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\pi) = 1$ και $f'(x) + f(x)\eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1-e}{e}$ και $x^2 f'(x) - f(x) = 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) + \eta\mu x f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + (-\sigma\upsilon\nu x)' f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow e^{-\sigma\upsilon\nu x} f'(x) + e^{-\sigma\upsilon\nu x} (-\sigma\upsilon\nu x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\sigma\upsilon\nu x} f'(x) + (e^{-\sigma\upsilon\nu x})' f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-\sigma\upsilon\nu x})' = 0$$

Άρα : $f(x)e^{-\sigma\upsilon\nu x} = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{\sigma\upsilon\nu x}$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x = \pi$ από την (1) έχουμε : $f(\pi) = ce^{\sigma\upsilon\nu\pi} \Leftrightarrow 1 = ce^{-1} \Leftrightarrow c = e$

Άρα $f(x) = ee^{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f(x) = e^{1+\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$x^2 f'(x) - f(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{\frac{1}{x}}$ παίρνουμε :

$$e^{\frac{1}{x}} f'(x) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{x}} f(x) \right)' = \left(-e^{\frac{1}{x}} \right)' \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

Για $x = 1$ έχουμε : $ef(1) = -e + c \Leftrightarrow e \frac{1-e}{e} = -e + c \Leftrightarrow 1 - e = -e + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι : $e^{\frac{1}{x}} f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + 1 \Leftrightarrow f(x) = -1 + e^{-\frac{1}{x}}$

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να βρούμε την f από μια ισότητα της μορφής $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = h(x)$ (1) τότε βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση G της g (δηλαδή μια συνάρτηση G για την οποία ισχύει $G'(x) = g(x)$), οπότε η (1) γίνεται : $f'(x) + G'(x) \cdot f(x) = h(x)$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$e^{G(x)} f'(x) + e^{G(x)} G'(x) f(x) = e^{G(x)} h(x) \Leftrightarrow e^{G(x)} f'(x) + (e^{G(x)})' f(x) = e^{G(x)} h(x) \\ \Leftrightarrow (f(x) e^{G(x)})' = e^{G(x)} h(x)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση του 2^{ov} μέλους.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης ισούται με τον εαυτό της

271. Να βρείτε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ για την οποία ισχύουν } f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu x \text{ και } f(0) = 2.$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει : } f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) &= f'(x)\sigma\upsilon\nu x \\ \Leftrightarrow f(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x &= f'(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x \\ \Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' &= f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f(x)\sigma\upsilon\nu x)' = f(x)\sigma\upsilon\nu x \end{aligned}$$

Επομένως : $f(x)\sigma\upsilon\nu x = ce^x$.

Επειδή $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ είναι : $f(x) = \frac{ce^x}{\sigma\upsilon\nu x}$

Για $x = 0$ έχουμε : $f(0) = \frac{ce^0}{\sigma\upsilon\nu 0} \Leftrightarrow c = 2$. Άρα $f(x) = \frac{2e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

Μεθοδολογία

Αν στην προσπάθεια εντοπισμού μιας συνάρτησης f καταλήξουμε στην ισότητα $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in D_f$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(x) = ce^x$, $x \in D_f$ το οποίο μπορούμε να δικαιολογήσουμε με ένα από τους παρακάτω τρόπους :

1^{ov}. Από εφαρμογή του σχολικού : αν $f'(x) = f(x)$ τότε $\frac{f(x)}{e^x} = c \Leftrightarrow f(x) = ce^x$.

2^{ov}. Είναι: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} \cdot 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^x$$

3^ο. Αν γνωρίζουμε ότι $f(x) > 0$ τότε : $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (x)'$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = x + c_1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x+c_1} \Leftrightarrow f(x) = e^{c_1} \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = ce^x$$

Όταν για τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης είναι απαραίτητο αυτή να διατηρεί σταθερό πρόσημο.

272. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = -1$. Αν ισχύει $2g'(x) - g(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της g .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε :

$$2g'(x) - g(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow 2g'(x)g(x) - g^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow (g^2(x))' - g^2(x) = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow (g^2(x))'e^{-x} - g^2(x)e^{-x} = e^{2x}e^{-x} \Leftrightarrow (g^2(x))'e^{-x} + g^2(x)(e^{-x})' = e^x$$

$$\Leftrightarrow (g^2(x)e^{-x})' = (e^x)' \Leftrightarrow g^2(x)e^{-x} = e^x + c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } g^2(0)e^0 = e^0 + c \stackrel{g(0)=-1}{\Leftrightarrow} 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα : } g^2(x)e^{-x} = e^x \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{e^x}{e^{-x}} \Leftrightarrow g^2(x) = e^{2x} \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αλλά η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) και ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή έχουμε ότι $g(0) = -1 < 0$ θα είναι : $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε από την (1) προκύπτει $g(x) = -e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Από την ισότητα $g^2(x) = e^{2x}$ προκύπτουν για την g οι εξής (άπειροι) πιθανοί τύποι :

$$\bullet \quad g(x) = e^x \quad \bullet \quad g(x) = -e^x \quad \bullet \quad g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in \Delta \\ -e^x, & x \in \mathbb{R} - \Delta \end{cases}$$

Ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης, κάποιους απορρίπτουμε και κάποιους (ή κάποιον) δεχόμαστε.

Εύρεση συνάρτησης από τη f''

273. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει : $f(x) = xf'(x) + x^2f''(x)$, για κάθε $x > 0$.

Αν $f(2) = \frac{3}{2}$ και $f(1) = \frac{5}{2}$, να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

Για κάθε $x > 0$, έχουμε :

$$f(x) = xf'(x) + x^2 f''(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = -x^2 f''(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -f''(x)$$

$$\text{Άρα } \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (-f'(x))' \quad \text{Οπότε } \frac{f(x)}{x} = -f'(x) + c_1$$

$$\text{Επομένως } f(x) = -xf'(x) + xc_1 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = xc_1 \Leftrightarrow (xf(x))' = \left(\frac{1}{2} x^2 c_1 \right)'$$

$$\text{Άρα } \mathbf{xf(x) = \frac{1}{2} x^2 c_1 + c_2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} xc_1 + \frac{1}{x} c_2}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(2) = \frac{3}{2} \\ f(1) = \frac{5}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + \frac{1}{2} c_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} c_1 + c_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 3 - 2c_1 \\ c_1 + 2(3 - 2c_1) = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 3 - 2c_1 \\ c_1 + 6 - 4c_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 3 - 2c_1 \\ -3c_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \\ c_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{7}{3} \\ c_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \frac{x}{6} + \frac{7}{3x} \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \frac{x^2 + 14}{6x}, \quad x > 0.}$$

Α σ κ ή σ ε ι ς

Σταθερή συνάρτηση – Εύρεση συνάρτησης

- 1253.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)\eta\mu x + g(x)\sigma\upsilon\nu x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- 1254.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, με θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύουν $f'(x) = f(x)\ln g(x)$, $g'(x) = -g(x)\ln f(x)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = (\ln f(x) - \eta\mu x)^2 + (\ln g(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- 1255.** Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση : $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση : $h(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 + f(x)\eta\mu x + f'(x)\sigma\upsilon\nu x$
- 1256.** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{f(x)} + \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή, να αποδείξετε ότι και η f είναι σταθερή.
- 1257.** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι : $f'(x) = f(x) + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -8$
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = [f(x) + 9]e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της g .
 - iii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- 1258.** Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν $f(0) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x) - 2x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- 1259.** Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει : $x^2 f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$ είναι σταθερή.
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- 1260.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.
 - iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να αποδείξετε ότι $h = \varphi$.

1261. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + xf'(x) = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x) + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι :

$$f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad x \neq 0.$$

- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$1 - \sigma\upsilon\nu x = x\eta\mu x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε :

$$\xi\eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = 1 + \frac{2}{\pi^2}\xi^2.$$

(2011)

1262. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f'(x) = f(x) + g(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = g(x) - f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $h(x) = [f(x)e^{-x} - \eta\mu x]^2 + [g(x)e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x]^2$ είναι σταθερή.
- ii. Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

1263. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(-x)f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)f(-x)$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

1264. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 2f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f'(0) = 2$, να αποδείξετε ότι $f^2(x) + f^2(-x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1265. Για μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $xf'(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Αν επιπλέον $f(1) = 3$, να αποδείξετε ότι $f^2(x) + f^2\left(\frac{1}{x}\right) = 18$ για κάθε $x > 0$.

1266. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = g(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = -f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. Οι f και g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο.
- ii. $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή.
- iv. Αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, τότε η g έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

(1996)

1267. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f' συνεχή και $f'(0) = 2$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 4$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$f''(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- iii. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις g και h , με

$$g(x) = [f'(x) - f(x)]e^x \text{ και } h(x) = [f'(x) + f(x)]e^{-x}$$
είναι σταθερές και να βρείτε τη συνάρτηση f .

- 1268.** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
- i. Η συνάρτηση $h(x) = [g(x)]^2 + [g'(x)]^2$ είναι σταθερή.
ii. $f(x) = \sin x$.

- 1269.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f''(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Αν $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$ και $g(x) = f(x) - \alpha \sin x - \beta \cos x$ να αποδείξετε ότι :
- i. η συνάρτηση $h(x) = (g'(x))^2 + (g(x))^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
ii. $f(x) = \beta \cos x + \alpha \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- 1270.** Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| \leq (g(x) - g(y))^2$,
όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

- 1271.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|f(x) - f(y)| + \sin(x - y) \leq 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
να αποδείξετε ότι αυτή είναι σταθερή.

- 1272.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, ώστε να ισχύει

$$|e^x f(y) - e^y f(x)| \leq (x - y)^2, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-x}$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Εύρεση συνάρτησης από ισότητα παραγώγων

- 1273.** Έστω f και g συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν

$$f(0) = g(0) \text{ και } f'(x) = g'(x) + \sin x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) + \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 1274.** Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει

$$f'(x) = g'(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = g(0),$$
τότε να αποδείξετε ότι:
- i. $f(x) = g(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
ii. Οι εφαπτομένες στα $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ τέμνονται στον άξονα $y'y$.
- 1275.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f''(x) = g''(x) + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Αν οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ και οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλες, να λύσετε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.
- 1276.** Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , για τις οποίες υποθέτουμε ότι :
- είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ και $f''(x) = g''(x)$

- $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$

Να αποδείξετε ότι :

- για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f(x) - g(x) = cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$.
- αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο κλειστό $[\rho_1, \rho_2]$.

(1989)

1277. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- $f'(x) = 2e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 2e$.
- $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$.
- $f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$.
- $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \Delta = (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.
- $f'(x) = \sigma\upsilon\nu 3x + 2xe^{x^2+1}$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.
- $f''(x) = 2x - \eta\mu x - \frac{1}{x^2}$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f'(1) = \sigma\upsilon\nu 1$, $f(1) = \eta\mu 1$.
- $f''(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $f(0) = 1$.

1278. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f όταν ισχύουν οι ισότητες :

$$f^{(3)}(x) = 24 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = 8 \text{ και } f''(1) = 18$$

1279. Για μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ισχύει :

$$x [e^x f'(x) + \ln x] = 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1. Να βρείτε τον τύπο της.

1280. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- $f'(x) = \sigma\phi x f(x)$, $x \in \Delta = (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- $x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$.
- $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.
- $f'(x) - e^x \sqrt{f(x)-1} = 0$, $f(x) > 1$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.
- $f'(x)\sigma\upsilon\nu x = 1 + f(x)\eta\mu x$, $x \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 1$.
- $xf'(x) = \frac{1}{x^2} - 2f(x)$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$.
- $1 + xf'(x) = xe^{-f(x)}$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$.
- $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + x^2$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 2$.
- $f'(x)\sigma\upsilon\nu x + 3f(x)\eta\mu x = 0$, $f(x) > 0$, $x \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

1281. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) = 9$.

1282. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $\frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0$ για κάθε $x > 1$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : x - y = 1$, να βρείτε την f .

1283. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα :
 $f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

i. να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

ii. να βρείτε τον τύπο της f .

1284. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(-1) = -\frac{1}{e^2}$

- $xf'(x) = f(x) + x^2(2e^{2x} - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$

E.M.E 2016

1285. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x) + 2xf(x) = e^{x-x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x^2}f(x) - xe^x - \eta\mu x}{x} = -1$, να βρείτε την f .

1286. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = \frac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1287. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) = 0$ και

- $2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x \in (0,1)$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0,1]$

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii. το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f^{-1}(x))$

1288. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \ln f(x) + 2xf'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- $f(x) > 0, \quad x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = e$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

1289. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $g^2(x) = g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 2$
- $g(1) = -1$

Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

1290. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1) = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$ και
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$, για κάθε $x, y > 0$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \alpha x$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφική παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

1291. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι :

- i. $f(1) = 0$
- ii. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 είναι και στο $(0, +\infty)$.
- iii. αν $f'(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f .

1292. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο a με $a > 0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(xy) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y > 0$
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$

a. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x > 0$

ii. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$

iii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{af'(a)}{f(a)}, \text{ για κάθε } x > 0$$

β. Αν η ευθεία $\varepsilon: x - 2\sqrt{a}y + a = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(a, f(a))$, να βρείτε τον τύπο της f .

1293. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $(0, +\infty)$ με

$f(1) = g(1) = 0$, ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύουν

$$f'(x) = -e^{g(x)} \text{ και } g'(x) = -e^{f(x)}.$$

- i.** Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$
- ii.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x > 0$.
- iii.** Να βρείτε τον τύπο της f στο $(0, +\infty)$.

Ισότητες της μορφής $f'(g(x)) = h(x)$

1294. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x^3 + x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 2$.

1295. Αν για τη συνάρτηση g ισχύουν $g(2) = 10$ και $g'(x+x^3) = 8x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τον αριθμό $g(0)$.

1296. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x^2) = 3x - 1$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f .

1297. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(e^x) = 2xe^{x^2-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

1298. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf'(\ln x) = x^2 - 1$, για κάθε $x > 0$. Αν $f(0) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

1299. Οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν :

- $f(g(x)) = x$ και $f'(g(x)) = x$ για κάθε $x > 0$.
- $f(1) = e^{2016}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

1300. Οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν :

- $f(g(x)) = x - \frac{1}{x}$ και $f'(g(x)) = x + \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.
- $g(1) = 2016$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

Ισότητα παραγώγων σε ένωση διαστημάτων

1301. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = 2 \text{ και } xf'(x) = -3f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

- i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

1302. Έστω μια συνάρτηση f με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ 3x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Αν $f(1) = 2$, να βρείτε την f .

1303. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2$ και

$$(x-1)f'(x) = 2x^2 - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την f .

1304. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$x^2 f'(x) = x^2 \sin x - 1 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Αν $f(\pi) = f(-\pi) = 0$, να βρείτε την f .

1305. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$ και $f(1) = e = -f(-1)$.

ii. $f'(x) - 1 = \frac{f(x)}{x}$ και $f(-1) = 2f(1) = 1$.

1306. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$

και ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Το τέχνασμα πολλαπλασιασμού με $e^{g(x)}$.

1307. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = 3f(x)$, $f(x) > 0$ και $f(0) = 1$.

ii. $f'(x) = 3x^2 f(x)$ και $f(0) = 1$.

iii. $f'(x) = 2f(x) + 3$ και $f(0) = 1$.

iv. $2f'(x) = 3f(x) + 2$ και $f(0) = 0$.

v. $f'(x) + 2xf(x) = x$ και $f(0) = 1$.

vi. $f'(x) + \sin x f(x) = \sin x$ και $f(0) = 2$.

1308. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει :

$$f(x) = 1 + x^2 f'(x) \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

i. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

1309. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια, ώστε :

$$f(x) - 2f'(x) + f''(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν g συνάρτηση με $g(x) = f'(x) - f(x)$ και $g(0) = 1$, τότε :

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{g(x)}{e^x} - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

- ii. να βρείτε η συνάρτηση g .
- iii. να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f αν $f(0) = 1$.

1310. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ είναι}$$

σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 2(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f .

1311. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f(1) = \frac{1}{e} \quad \text{και} \quad xf'(x) + 1 = -2x^2(f(x) + \ln x), \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

1312. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f(x) + 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

1313. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f'(0) = 2, \quad f(0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h)}{h} = 2f'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

1314. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y) = e^{-y}f(x) + e^{-x}f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Θεωρούμε επίσης και την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $g'(x^3 + 1) = -x^3 e^{-x^3 - 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(0) = f(0)$

Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
- iii. $f = g$

Η παράγωγος μιας συνάρτησης ισούται με τον εαυτό της

- 1315.** Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$g'(x) \sin x + g(x) \eta \mu x = g(x) \sigma \upsilon \nu x \quad \text{και} \quad g(0) = 1992.$$

(1992)

- 1316.** Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, \pi)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f'(x) \eta \mu x = f(x)(\sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x), \text{ για κάθε } x \in (0, \pi) \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

- 1317.** Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f(x)g(x)$,
 $g(x) \neq 0$ και $f(0) = g(0)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x g(x)$.

- 1318.** Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(x)(1 + x^2) - 2xf(x) = (1 + x^2)f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 1319.** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και

$$f'(x) = f(x) \ln f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = e$, να βρείτε την f .

- 1320.** Έστω μια συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και
 ισχύουν $x(f'(x) - f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \geq 0$ και $f(1) = e$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

- 1321.** Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = g(0) = 1$ και για
 τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$f'(x)g(x) = -1 \text{ και } f(x)g'(x) = 1.$$

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = e^x$.

ii. αν η ευθεία $\varepsilon: x = x_0$ τέμνει τις C_f και C_g στα σημεία A και B αντίστοιχα,
 τότε οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα A, B τέμνονται κάθετα.

- 1322.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x)f'(-x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = 1$ να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)f'(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 1323.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και

$$\text{ικανοποιεί τις συνθήκες } f(1) = 1 \text{ και } f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

- 1324.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία
 ισχύει $f'(x) = e^{2x} f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} \text{ είναι σταθερή στο } \mathbb{R}.$$

iv. Να βρείτε τον τύπο της f .

- 1325.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 1$ και $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .

- 1326.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x-y) = \frac{f(x)+x}{f(y)+y} - x+y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $f'(x) = f(x) + x - 1$
- $f(x) = e^x - x$

- 1327.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = -\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} = 1 + f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Να αποδείξετε ότι:
 - Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1)$
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \ln^2\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

E.M.E 2016

- 1328.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει

$$|e^y f(x) - e^x f(y)| \leq (x-y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τον τύπο της f .

- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x^2+x)}{3\ln 2x-5}$.

- Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις g, h στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $g(1) = h(1) = 0$, ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύουν

$$g'(x) = -f(h(x)) \text{ και } h'(x) = -f(g(x))$$

- Να αποδείξετε ότι $g(x) = h(x)$ για κάθε $x > 0$.
- Να βρείτε τον τύπο της g στο $(0, +\infty)$.

Όταν για τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης είναι απαραίτητο αυτή να διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- 1329.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $f(x)f'(x) - \eta\mu x = 0$, $f(x) \neq 0$ και $f(0) = -\sqrt{2}$.
- ii. $f(x)f'(x) - x = 0$ και $f(0) = 1$.
- iii. $f'(x)f(x) - e^x \sqrt{1+f^2(x)} = 0$ και $f(0) = \sqrt{3}$.
- iv. $f'(x)f(x) - xf^2(x) = x$ και $f(0) = \sqrt{e-1}$.
- v. $f'(x) = \frac{e^{2x} + e^x}{f(x)-1}$, $f(x) \neq 1$ και $f(0) = 3$.

1330. Να βρείτε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $[f(x) - e^x][f'(x) - e^x] = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

1331. Να βρείτε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

1332. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(-x)f(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να προσδιορίσετε.
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.
- iv. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

1333. Να βρείτε τις δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $f(x)g(x) = 1$ και $f'(x)g'(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1334. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$, $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $(x^2 + 1)^2 (f'(x) - 1) - x(f(x) - x)^3 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

1335. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(0) = g(0) = 1$
- $f(x)g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g .

1336. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(0) = g(0) = 1, \quad f(x) \neq x, \quad g(x) \neq x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$
- $f'(x) - 1 = \frac{x}{g(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f = g$ και στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f .

1337. Έστω $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις :

- $f(0) = g(0) = 1$
- $f(x)g(x) \neq 0, \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$
- $f'(x) + f^2(x)g(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$
- $g'(x) + g^2(x)f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$

Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g .

Εύρεση συνάρτησης από τη f''

1338. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f''(2x - 1) = 12x - 6 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f έχει στο σημείο $M(1, f(1))$ εφαπτομένη με εξίσωση $y = 3x - 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

1339. Να βρείτε την συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε :

$$x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$\text{και } f'(1) = 2, \quad f(1) = 1.$$

1340. Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $xf'(x) + x^2 f''(x) = 2, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 2$

Να βρείτε την f .

1341. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f(1) = e, \quad f'(1) = 0 \quad \text{και}$
- $f(x) + (x - 2)f'(x) = xf''(x), \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

1342. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$
- $f'(-1) < 1 < f'(1)$
- $f(0) = 1$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- 1343.** Να βρείτε την συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 2e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = f(0) = 1.$$

- 1344.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(0) = f'(0) = 0$ και
- $(x^2 + 1)f''(x) = 2(1 - xf'(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

- 1345.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f(1) = 1$ και
- $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}, \quad x > 0$$

- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

- 1346.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = 0$ και $f'(1) = -1$

για την οποία ισχύει $f''(x) = e^{2f(x)}$, για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

- 1347.** Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(0) = f'(0) = 1$ και $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 1348.** Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x) - f(x) = (4x + 2)e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = f(0) = 0$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια, ώστε

$$f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 3.$$

- 1349.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4f''(x)(f(x))^3 = -1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $2f'(1) = f(1) = 1$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ii. Να αποδείξετε ότι

$$(2f(x)f'(x))^2 = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

iii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

1350. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = 4 \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2, \quad x > 0.$$

Αν είναι $f'(1) = 0$ και $f(1) = -1$, να βρείτε την f .

1351. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = f''(1) = 0$, $f'(1) = 2$ και τέτοια ώστε

$$f'''(x) = \frac{2-x}{x^3} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (x+1) \cdot \ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Κανόνες De L' Hospital

Θεώρημα 1^ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Θεώρημα 2^ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Παρατηρήσεις :

- Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για τα πλευρικά όρια $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$ καθώς και για τα όρια $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις.
- Τα θεωρήματα μπορούν να εφαρμοστούν περισσότερες από μια φορές.
- Για να εφαρμοστούν τα θεωρήματα, **δεν** μας ενδιαφέρει αν οι f και g είναι ή όχι παραγωγίσιμες στο x_0 .

Είναι όμως **απαραίτητο** να είναι παραγωγίσιμες «**κοντά στο x_0** ».

- Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση μεταξύ των πηλίκων $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$.

Κατά την εφαρμογή των θεωρημάτων παραγωγίζουμε χωριστά αριθμητή και παρονομαστή και όχι σαν πηλίκο.

- Η σχέση $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν είναι ισότητα με τη γενική έννοια. Το μόνο για το οποίο είμαστε βέβαιοι και εξασφαλίζεται από το θεώρημα **De L' Hospital** είναι ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, πεπερασμένο ή άπειρο, τότε υπάρχει και το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **δεν** υπάρχει, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ **ενδέχεται** να υπάρχει,

πρέπει όμως να υπολογιστεί με άλλο τρόπο.

- Οι κανόνες **De L' Hospital** εφαρμόζονται μόνο όταν πληρούνται οι προϋποθέσεις.

Παραδείγματα:

Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα **De L' Hospital** στο όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$, τότε θα βρούμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Όμως το αποτέλεσμα αυτό είναι **λανθασμένο** γιατί εφαρμόσαμε τον κανόνα **De L' Hospital** χωρίς να έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Το **σωστό** είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

♦ Στο όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) = (+\infty) + 0 = +\infty$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα **De L' Hospital** προκύπτει :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &\stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \dots \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήξαμε ξανά στο αρχικό όριο. Έτσι, όσες φορές και να εφαρμόσουμε

τον κανόνα **De L' Hospital** η απροσδιοριστία $\frac{+\infty}{+\infty}$ θα παραμείνει.

Ωστόσο το πρόβλημα αντιμετωπίζεται εύκολα ως εξής :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

♦ Στο όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 \quad \text{ως “μηδενική· φραγμένη”}.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα **De L’ Hospital** προκύπτει :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}}{\sigma\upsilon\nu x} \end{aligned}$$

στο οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ και επομένως δεν μπορούμε να συνεχίσουμε.

Το όριο βρίσκεται ως εξής :

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 \quad \text{ως “μηδενική· φραγμένη”}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

♦ Στο όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1 + 0) = +\infty$$

$$\text{Όμοια } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \eta\mu x) = +\infty$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα **De L’ Hospital** προκύπτει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \eta\mu x)'}{(x - \eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

στο οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ και επομένως δεν μπορούμε να συνεχίσουμε.

Το όριο βρίσκεται ως εξής :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\eta\mu x}{x}}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 0$ ως “μηδενική· φραγμένη”.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Μορφή $\frac{0}{0}$)

274. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\sin x - 2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(x+2)\ln(x+1)}{(x+4)\eta\mu x}$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x - 1$ είναι παραγωγίσιμες και :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

Άρα και : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ είναι η παράγωγος του $\ln x$ στη θέση 1.

Στα επόμενα παραδείγματα για λόγους συντομίας θα εφαρμόζουμε τυπικά τους κανόνες **De L' Hospital**, χωρίς να αναφερόμαστε στις υποθέσεις, οι οποίες όμως θα πρέπει να ισχύουν.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\sin x - 2} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4)'}{(x^2 + 2\sin x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x - 2\eta\mu x} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x^3)'}{(2x - 2\eta\mu x)'} =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{2 - 2\sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(12x^2)'}{(2 - 2\sin x)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2\eta\mu x} = 12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 12 \cdot 1 = \mathbf{12}
\end{aligned}$$

iii. Είναι : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(x + 2)\ln(x + 1)}{(x + 4)\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{\eta\mu x} \cdot \frac{(x + 2)\ln(x + 1)}{x + 4} \right]$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 2)\ln(x + 1)}{x + 4} = \frac{2 \cdot 0}{4} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(x + 2)\ln(x + 1)}{(x + 4)\eta\mu x} = 1 \cdot 0 = \mathbf{0}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ αλλά την ευθύνη γι' αυτό την έχει από τον παρονομαστή το $\eta\mu x$ και από τον αριθμητή το $e^x - 1$ και το $\ln(x + 1)$.

Έτσι δημιουργήσαμε και υπολογίσαμε χωριστά το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x}$.

Μπορούμε βέβαια να βρούμε το όριο αν υπολογίσουμε χωριστά το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{\eta\mu x}$.

(Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$)

275. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)\ln x}{e^{2x}}$

Λύση

$$i. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\ln(1 + e^{-x}))'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^x + 1} = \frac{-1}{0 + 1} = \mathbf{-1}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Είναι:} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \end{array} \right)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(\eta\mu x))'}{(\ln x)'} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Είναι:} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\eta\mu x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \end{array} \right)$$

$$\text{iii. } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)\ln x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{e^x} \right)$$

Είναι :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)'}{(e^x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 + 2x + 1)'}{(e^x)'}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6x + 2)'}{(e^x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0, \quad (\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

Άρα $A = 0$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Αν και από την αρχή έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$, αν δεν χωρίσουμε το όριο οι πράξεις θα είναι πολύ περισσότερες.

(Μορφή $0 \cdot \infty$)**276.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\kappa \ln x)$, όπου $\kappa > 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 - 1)e^x]$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2^+} [(1 - e^{-x+2}) \ln(x-2)]$

Λύση

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\kappa \ln x) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\kappa}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\kappa})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\kappa x^{-\kappa-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\kappa} \cdot x^\kappa \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 - 1) \cdot e^x] &\stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 1)'}{(e^{-x})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

iii. α' τρόπος

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1 - e^{-x+2}) \cdot \ln(x-2)] \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1 - e^{-x+2}}{x-2} \cdot (x-2) \cdot \ln(x-2) \right]$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - e^{-x+2}}{x-2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1 - e^{-x+2})'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{-x+2}}{1} = e^0 = 1 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-2) \cdot \ln(x-2)] &\stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x-2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\ln(x-2))'}{\left(\frac{1}{x-2}\right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-1}{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{-1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x-2)] = 0 \end{aligned}$$

Άρα :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1 - e^{-x+2}) \cdot \ln(x-2)] &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1 - e^{-x+2}}{x-2} \cdot (x-2) \cdot \ln(x-2) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - e^{-x+2}}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-2) \cdot \ln(x-2)] = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^+} [(1 - e^{-x+2}) \cdot \ln(x-2)] &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{1 - e^{-x+2}}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\ln(x-2))'}{\left(\frac{1}{1 - e^{-x+2}}\right)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-e^{-x+2}}{(1 - e^{-x+2})^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{- (1 - e^{-x+2})^2}{(x-2) \cdot e^{-x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(1 - e^{-x+2})^2}{((x-2) \cdot e^{-x+2})'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(1 - e^{-x+2}) \cdot e^{-x+2}}{e^{-x+2} - (x-2) \cdot e^{-x+2}} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Η απροσδιόριστη μορφή $0 \cdot \infty$ ανάγεται σε $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ αν γράψουμε :

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ή} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

οπότε μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον κανόνα De L' Hospital.

Θέλει όμως προσοχή ποιον παράγοντα θα κατεβάσουμε στον παρονομαστή.

Συνήθως είναι προτιμότερο :

- Ο $\ln x$ να παραμένει στον αριθμητή.
- Η e^x να κατεβαίνει στον παρονομαστή ως e^{-x} .
- Η $\epsilon f x$ να κατεβαίνει στον παρονομαστή ως $\sigma f x$.
- Η $\sigma f x$ να κατεβαίνει στον παρονομαστή ως $\epsilon f x$.

(Μορφή $\infty - \infty$)

277. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x} - \frac{e^x}{\eta \mu x} \right) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^{1000} - \ln x)$$

Λύση

$$\begin{aligned}
\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x} - \frac{e^x}{\eta \mu x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x \sin^2 x - x e^x}{x \eta \mu x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\frac{(\eta \mu x \sin^2 x - x e^x)'}{(x \eta \mu x)'}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - 2 \eta \mu^2 x \sin x - e^x - x e^x}{\eta \mu x + x \sin x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0} \right) (\sin^3 x - 2\eta\mu^2 x \sin x - e^x - xe^x)'}{(\eta\mu x + x \sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\sin^2 x \eta\mu x - 4\eta\mu x \sin^2 x + 2\eta\mu^3 x - e^x - e^x - xe^x}{\sin x + \sin x - x\eta\mu x} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

ii. α' τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \stackrel{(+\infty) - (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right] = (+\infty)(1-0) = +\infty,$$

$$\text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

β' τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{x}. \text{ Θέτουμε } u = \frac{e^x}{x}.$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Άρα όταν } x \rightarrow +\infty, \text{ το } u \rightarrow +\infty. \text{ Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^{1000} - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \cdot \left(1 - \frac{x^{1000}}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1-0-0) = +\infty$$

γιατί:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000}}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{1000}}} \right)^{1000} = 0, \text{ γιατί:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{1000}}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{\left(e^{\frac{x}{1000}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{x}{1000}} \cdot \frac{1}{1000}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000}{e^{\frac{x}{1000}}} = 0,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{1000}} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Μεθοδολογία

Η απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$ μπορεί να αναχθεί στις μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ αν:

- κάνουμε τις πράξεις.
- βγάλουμε κοινό παράγοντα και γράψουμε :

$$f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) \quad \text{ή} \quad f(x) - g(x) = g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ μπορεί να βρεθεί αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το $\ln x$ οπότε γίνεται :

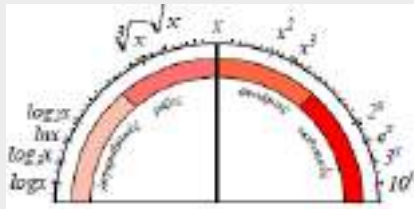
$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x \cdot \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right) \right] = +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty$$

Δε συμβαίνει όμως το ίδιο αν στο όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 - \ln x)$ βγάλουμε κοινό παράγοντα το

$$\ln x, \text{ αφού : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x \cdot \left(\frac{e^x}{\ln x} - \frac{x^2}{\ln x} - 1 \right) \right] = (+\infty) \cdot (+\infty - \infty - 1) = ;$$

Γενικά προτιμάμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα την πιο «γρήγορη» συνάρτηση.

Οι σχετικές «ταχύτητες» με τις οποίες αυξάνονται οι βασικές συναρτήσεις, όταν το $x \rightarrow +\infty$, φαίνονται στο παρακάτω «ταχύμετρο» :



Κατά συνέπεια τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000}}{e^x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ είναι μηδέν αφού στο $+\infty$ η

δύναμη x^{1000} και ο $\ln x$ είναι ασήμαντα σε σχέση με το e^x .

Πάντως το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000}}{e^x}$ μπορούσε να υπολογιστεί και εφαρμόζοντας 1000!!! φορές τον κανόνα **De L' Hospital**.

Συνέχεια, παραγωγισιμότητα & De L' Hospital

278. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$ η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & \text{αν } -1 < x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Λύση

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x+1))'}{(x)'} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1 = f(0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επίσης :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} \stackrel{DL'H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x+1) - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{2x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας **De L' Hospital** είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την εύρεση ορίων που οδηγούν σε απροσδιοριστία κάθε μορφής. Όμως όριο μπορεί, εκτός των άλλων, να συναντήσουμε και :

- ♦ στην μελέτη ως προς την συνέχεια και την παράγωγο μιας συνάρτησης f
- ♦ στην εύρεση ασυμπτωτών της C_f
- ♦ στην εύρεση του συνόλου τιμών της f .

Σ' αυτές τις περιπτώσεις η συμβολή του κανόνα **De L' Hospital** είναι καθοριστική.

Εύρεση παραμέτρων

279. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma}{x^2} = 1.$$

Λύση

Επειδή : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$ πρέπει: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (1)

διότι διαφορετικά το όριο θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Με $\alpha + \beta + \gamma = 0$ θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x - \beta e^{-x}}{2x}$$

Επειδή : $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha e^x - \beta e^{-x}) = \alpha - \beta$ πρέπει: $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (2)

διότι διαφορετικά το όριο θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Με $\alpha = \beta$ θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - \beta e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - ae^{-x}}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{DL'H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ae^x - ae^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + ae^{-x}}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Άρα $a = 1$. Από (2): $\beta = 1$. Από (1): $\gamma = -2$

Όταν δεν γνωρίζουμε αν είναι συνεχείς οι $f'(x)$, $f''(x)$

280. Αν η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$ και είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, να βρείτε

το όριο:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x - xe^x}$$

Λύση

Είναι: $f'(0)=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=1$

Με $x \neq 0$ διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με x^2 , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x - xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x - xe^x}{x^2}}$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - xe^x}{x^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x - xe^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - e^x - xe^x}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - e^x - xe^x)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x - e^x - e^x - xe^x}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x - xe^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - xe^x}{x^2}} = \frac{f'(0)}{-1} = -1$$

Παρατηρήσεις

♦ Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$ το οποίο οδηγεί στη μορφή

$$\frac{0}{0},$$

αλλά μια από τις f, g δεν παραγωγίζεται σε μια περιοχή του x_0 παρά μόνο στο x_0 ,

τότε **δεν** μπορούμε να εφαρμόσουμε κανόνα **De L' Hospital**.

Σε τέτοιες περιπτώσεις συνήθως διαιρούμε τον ένα ή και τους δύο όρους του κλάσματος με

$x - x_0$ και κάνουμε χρήση του ορισμού της παραγώγου.

♦ Το ζητούμενο όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, αφού η f είναι συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη. Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κανόνα **De L'**

Hospital γιατί δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0 και όχι σε μια περιοχή του μηδενός.

Αλλά και να γνωρίζαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ πάλι θα αποφεύγαμε να εφαρμόσουμε **De L' Hospital**, αφού μετά θα έπρεπε να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ το οποίο δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι είναι ίσο με $f'(0)$ αφού δεν ξέρουμε αν η f' είναι συνεχής στο 0 .

281. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι :

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 4f(x-2h) + 3f(x-3h)}{h^2} = 6f''(x)$$

Λύση

Η f ως παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής, οπότε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-2h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-3h) = f(x)$$

Οδηγούμαστε έτσι σε μορφή $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε κανόνα **De L' Hospital** και έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h)(x+h)' - 4f'(x-2h)(x-2h)' + 3f'(x-3h)(x-3h)'}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + 8f'(x-2h) - 9f'(x-3h)}{2h} \end{aligned}$$

Η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) οπότε οδηγούμαστε ξανά σε μορφή $\frac{0}{0}$.

Αλλά δεν θα εφαρμόσουμε ξανά κανόνα **De L' Hospital** γιατί μη γνωρίζοντας αν η f'' είναι συνεχής συνάρτηση δεν θα μπορέσουμε να βρούμε το όριο που θα προκύψει μετά την εφαρμογή του κανόνα. Γι' αυτό θα στηριχθούμε στον ορισμό της παραγώγου σύμφωνα με τον οποίο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f''(x)$.

Για τη δημιουργία αυτών των παραστάσεων έχουμε :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) + 8f'(x-2h) - 8f'(x) - 9f'(x-3h) + 9f'(x)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + 8 \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{h} - 9 \frac{f'(x-3h) - f'(x)}{h} \right] \end{aligned}$$

Είναι :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f''(x)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-2 \cdot \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{-2h} \right) \stackrel{t=-2h}{=} -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x+t) - f'(x)}{t} = -2f''(x)$

$$\bullet \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-3h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-3 \frac{f'(x-3h) - f'(x)}{-3h} \right) \stackrel{\omega = -3h}{=} -3 \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f'(x+\omega) - f'(x)}{\omega} = -3f''(x)$$

Επομένως:

$$L = \frac{1}{2} [f''(x) + 8(-2f''(x)) - 9(-3f''(x))] = \frac{1}{2} [f''(x) - 16f''(x) + 27f''(x)] = 6f''(x)$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Επισημαίνουμε ότι η μεταβλητή παραγώγισης κατά την εφαρμογή του κανόνα **De L' Hospital** είναι το h .
- ♦ **Προσοχή!** Αν προχωρούσαμε σε εφαρμογή του κανόνα για δεύτερη φορά, τότε ο υπολογισμός του τελικού ορίου θα απαιτούσε τη συνέχεια της f'' η οποία όμως δε δίνεται.

Θεωρητική άσκηση

282. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = 2017 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*,$$

να αποδείξετε ότι $\ell = 2017$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = \frac{f(x)e^x}{e^x}$. Οπότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)e^x}{e^x}$

Αλλά: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \neq 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Συνεπώς έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{+\infty}$ και επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)e^x + f(x)e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + f(x)) = 2017$$

Άρα $\ell = 2017$

A σ κ ή σ ε ι ς

Μ ο ρ φ ή $\frac{0}{0}$

1352. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\eta\mu x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\eta\mu^2 x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2} \right)}{x(\eta\mu x - x)}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^3 \eta\mu x}$

1353. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x^2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \eta\mu^3 x}{x^5}$

Μ ο ρ φ ή $\frac{\infty}{\infty}$

1354. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+e^{-x})}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x \ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu 3x)}{\ln(\eta\mu 5x)}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\ln(\eta\mu x)}$

Μ ο ρ φ ή $0 \cdot \infty$

1355. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x (2 - x^2)]$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\epsilon\phi x \cdot \ln x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$

v. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln^2 x)$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right]$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(x+1)]$

ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

x. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right)$

xi. $\lim_{x \rightarrow 1^+} [(e^{x-1} - 1) \cdot \ln(x-1)]$

xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \ln x \right]$

Μορφή $\infty - \infty$ **1356.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{1}{x-e} - \frac{1}{\ln x - 1} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right)$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right)$ **ix.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1 - \sin x} - \frac{1}{x} \right)$

1357. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - e^x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \ln(x^2 + 1)]$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^{x+1})$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 1) - e^{x^2+1}]$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - \ln x^2)$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - x]$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + e^{-x}) - x]$

ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - e - x \ln(x-1)]$

1358. i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$, εφαρμόζεται Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση $f(t) = e^{\sqrt{t}}$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x)$.

1359. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 0$

• $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$

α. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$

β. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

E.M.E 2016**Συνέχεια, παραγωγισιμότητα & DeL' Hospital**

1360. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{1-\sin x} + x, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}, & x > 0 \end{cases}$.

1361. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0 οι συναρτήσεις :

$$\begin{aligned} \text{i. } f(x) &= \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 1 \\ x - \ln x, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 & \text{ii. } f(x) = \begin{cases} 1 + x - x^2, & x \leq 0 \\ e^x + x^2, & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \\ \text{iii. } f(x) &= \begin{cases} \frac{\eta \mu^2(\pi x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \end{aligned}$$

1362. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $|f(x) - \ln x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x > 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

1363. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ικανοποιείται η σχέση :

$$xf(x) + e^{\eta \mu x} = f(x)\eta \mu x + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1364. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta \mu 2x} = 5$.

i. Να βρείτε το $f(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

iii. Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

(2000)

Εύρεση παραμέτρων

1365. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax - \eta \mu x + 2, & x < 0 \\ \beta + \ln(1 + x^4), & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα a και $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$.

1366. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και β ώστε να υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - a) + \beta e^x - 1}{x^2} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ae^{1-x} + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1}$$

1367. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και β όταν ισχύουν :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x + \beta \sin 2x - 1}{x^2} = 4 \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{a}{e^x - 1} - \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

1368. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1}$.

ii. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

iii. Για $a = -1$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(2001)

1369. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

ότι $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$, με $x \in (0, \pi)$, είναι σταθερή.

β. Αν $h: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$$

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \lambda x}{x^3} = -\frac{1}{6}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε :

i. να βρείτε τον τύπο της f .

ii. να αποδείξετε ότι οι γραφική παράσταση της f και η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία στο διάστημα $(0, \pi)$.

Όταν δεν γνωρίζουμε αν είναι συνεχείς οι $f'(x)$, $f''(x)$

1370. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{e^x - 1} = 2f'(0)$$

1371. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} = 4$$

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x - e^x}{1 - \sin x}$.

1372. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f''(0) = 1$

και $f(0) = f'(0) = 0$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{1 - \sin x}$

1373. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$f(0) = f'(0) = -1$ και $f''(0) = 2$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x + 1}{1 - \sin x}$.

1374. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2016$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \eta\mu x - x}$.

1375. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι $f(0) = f'(0) = 0$ ενώ

$f''(0) = 2$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + f(x)}{f'(x) \ln(x+1)} = 1$.

1376. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

1377. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη.

i. Να αποδείξετε ότι : $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}$

ii. Αν επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6h^2} = x + 2$

και $f'(1) = f(1) = 10$, τότε να βρείτε τον τύπο της f .

1378. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

Αν ισχύει

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3xt + x) + f(x - xt) - 2f(x) - 2xt}{2t},$$

να βρείτε τον τύπο της f .

1379. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+2h) + 5f(x-2h) - 3f(x-3h) - 5f(x+h)}{h^3} = 10f^{(3)}(x)$$

Θ Ε Ω Ρ Η Τ Ι Κ Ε Σ Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1380. Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο

και τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f(x+2) + x}{x-1} = 1$.

Να αποδείξετε ότι $\frac{f'(1)}{f(1)} + \frac{f'(3)}{f(3)} = 0$

1381. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x - \eta \mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

1382. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$e^{f(x)} + f(x) = \eta \mu x - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^4} = -\infty$.

1383. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει τις ιδιότητες :

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(f(x)) + e^{f(x)} = e(e^x - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} = \frac{e}{2 + 2e}$.

1384. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x f'(x)] = 2017$$

Av $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, δείξτε ότι :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2017$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(x)] = 0$

1385. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a. Να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $f(0) + f(1) = 1$.

ii. υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) + x_0 = 1$.

β. Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της

C_f

στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

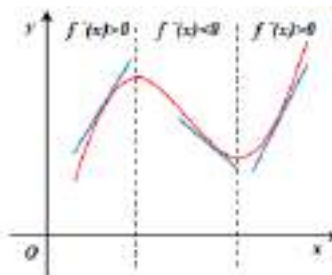
ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$.

Μονοτονία Συνάρτησης

Θεώρημα

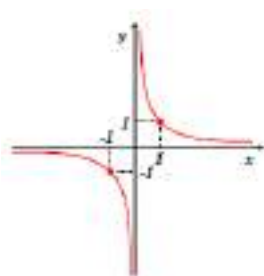
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- ♦ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- ♦ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .



Παρατηρήσεις :

1. Στα άκρα του Δ δεν μας ενδιαφέρει ούτε το πρόσημο της f' ούτε καν η ύπαρξή της. Το μόνο απαραίτητο είναι η συνέχεια της f στα άκρα του Δ , εφόσον βέβαια κάποιο από αυτά είναι κλειστό. Τονίζουμε επίσης ότι η μονοτονία σε σημείο δεν έχει κανένα νόημα.
2. Το θεώρημα ισχύει **μόνο σε διάστημα** και **όχι** σε ένωση διαστημάτων ή σε οποιοδήποτε άλλο σύνολο.
3. Αν αντί για διάστημα Δ έχουμε το σύνολο $A = \Delta_1 \cup \Delta_2$, στο οποίο η f είναι συνεχής και η f' έχει το ίδιο πρόσημο στα εσωτερικά των Δ_1 και Δ_2 , τότε **δεν** προκύπτει ότι η f είναι γνησίως μονότονη στα A , αλλά ότι είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 και φυσικά με το ίδιο είδος μονοτονίας.



$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Όμως η f **δεν είναι γνησίως φθίνουσα** στο σύνολο $\mathbb{R}^*$, αφού $-1 < 1$ και $f(-1) < f(1)$.

Η f είναι γν. φθίνουσα κατά διαστήματα δηλαδή

f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και f γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

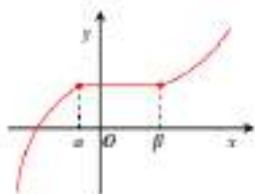
4. Αν $f'(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι αύξουσα στο Δ .
Αν $f'(x) \leq 0$ στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι φθίνουσα στο Δ .

Αν όμως

- $f'(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του Δ και
- η f' μηδενίζεται σε **πεπερασμένο πλήθος** σημείων του Δ τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα**.

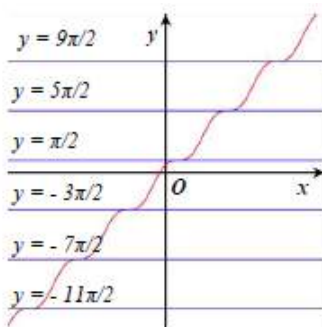
Ομοίως αν

- $f'(x) \leq 0$ στο εσωτερικό του Δ και
- η f' μηδενίζεται σε **πεπερασμένο πλήθος** σημείων του Δ τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα**.



$f'(x) \geq 0$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Η f είναι αύξουσα.



$f(x) = x + \sin x$.

$f'(x) = 1 - \eta\mu x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, -\frac{11\pi}{2}, \dots$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

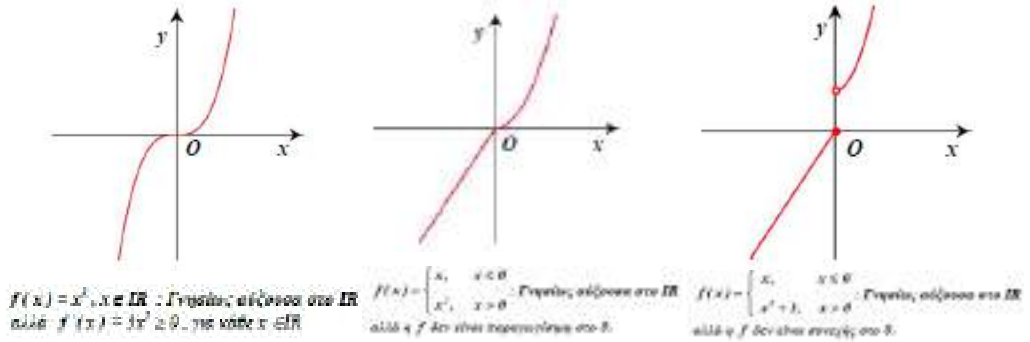
5. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Δηλαδή αν, για παράδειγμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ αυτό δεν σημαίνει πως η παράγωγός της είναι θετική στα εσωτερικά σημεία του Δ .

Τι συμβαίνει τότε ; Αυτό που σίγουρα συμβαίνει είναι ότι η f δεν μπορεί να έχει αρνητική παράγωγο, διότι τότε θα ήταν γνησίως φθίνουσα.

Οτιδήποτε άλλο μπορεί να συμβαίνει.

- Μπορεί να είναι $f'(x) \geq 0$
- Μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη
- Μπορεί να μην είναι ούτε και συνεχής.



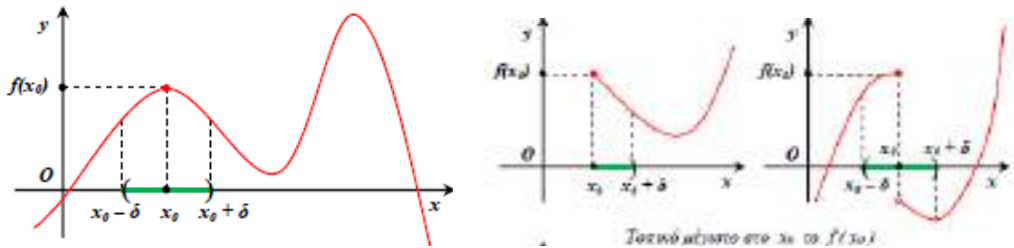
Ακρότατα Συνάρτησης

Ορισμός

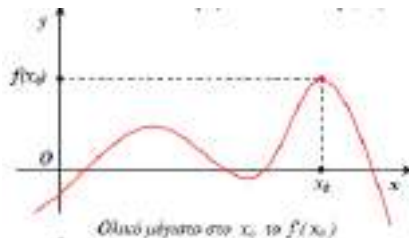
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε :

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .



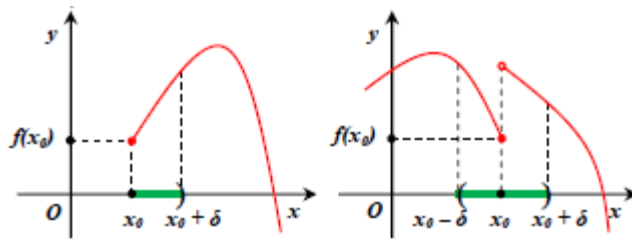
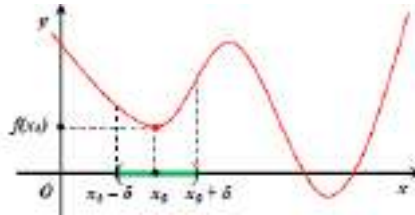
Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο** το $f(x_0)$.



Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε :

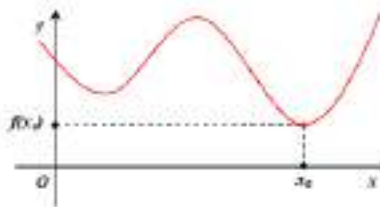
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .



Τοπικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο** το $f(x_0)$.

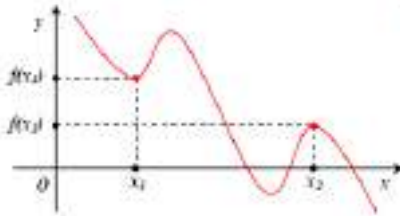


Ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$

Παρατηρήσεις :

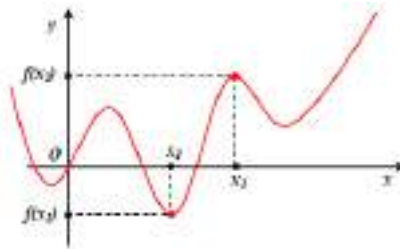
1. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα**, ή απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**.
2. Το **μέγιστο** και το **ελάχιστο** μιας συνάρτησης f λέγονται και **ολικά ακρότατα** της f .
3. Ένα **ολικό ακρότατο** είναι και **τοπικό**, αφού όντας ακρότατο σε όλο το πεδίο ορισμού θα είναι ακρότατο και στην άμεση γειτονιά του. Έτσι ο κατάλογος όλων των τοπικών ακροτάτων θα συμπεριλαμβάνει αυτομάτως και όποια ολικά ακρότατα υπάρχουν.
4. Ένα **τοπικό όμως ακρότατο δεν είναι και ολικό**.
5. Υπάρχει περίπτωση ένα **τοπικό** ελάχιστο να είναι μεγαλύτερο από ένα **τοπικό** μέγιστο. Αντιστοίχως, ένα **τοπικό** μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα **τοπικό** ελάχιστο.

Όμως το **ολικό** μέγιστο είναι πάντα **μεγαλύτερο** από το ολικό ελάχιστο (και προφανώς από κάθε τοπικό ελάχιστο) μιας συνάρτησης f , εκτός αν η f είναι σταθερή, οπότε το ελάχιστο και το μέγιστο είναι ίσα.



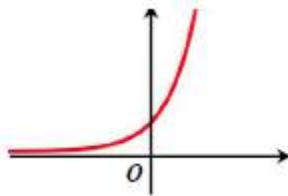
Το τοπικό ελάχιστο $f(x_1)$ είναι μεγαλύτερο από το $f(x_2)$ που είναι τοπικό μέγιστο. Το τοπικό μέγιστο $f(x_2)$ είναι μικρότερο από το $f(x_1)$ που είναι τοπικό ελάχιστο.

6. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα **δεν** είναι κατ' ανάγκη και το μέγιστο της συνάρτησης f . Αντιστοίχως, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα **δεν** είναι κατ' ανάγκη και το ελάχιστο της συνάρτησης f . Αν όμως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f . Αντιστοίχως, αν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα της f .



Για την f που έχει την παραπάνω γραφική παράσταση το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα $f(x_1)$ είναι και ολικό ελάχιστο, ενώ το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα $f(x_2)$ δεν είναι ολικό μέγιστο.

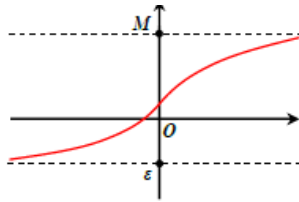
7. Μια συνάρτηση δεν έχει οπωσδήποτε τοπικό ή ολικό ακρότατο.



Η συνάρτηση $y = e^x$ δεν έχει κανενός είδους (τοπικό ή ολικό) ακρότατο.

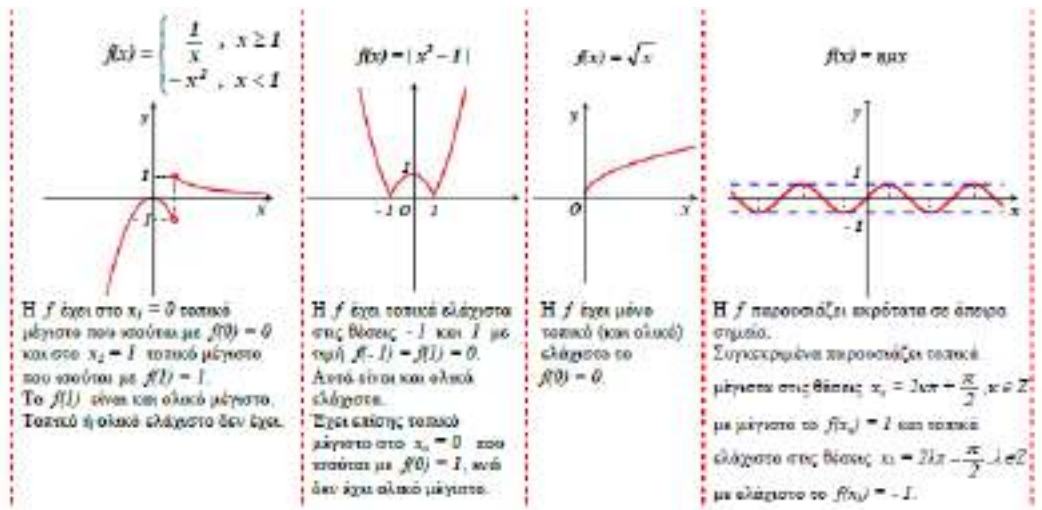
8. Αν $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **δεν** σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό ή ολικό μέγιστο, γιατί δεν είναι βέβαιο ότι το M ανήκει στο σύνολο τιμών της f , πράγμα που απαιτείται από τον ορισμό.

Ομοίως αν $f(x) \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δεν σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό ή ολικό ελάχιστο.



Είναι $\varepsilon \leq f(x) \leq M$ αλλά η f δεν έχει κανενός είδους (τοπικό ή ολικό) ακρότατο.

Παραδείγματα

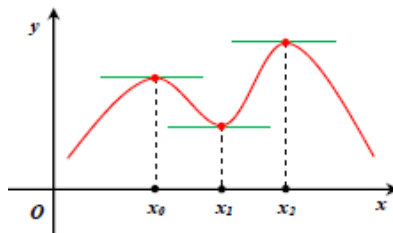


Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και επιπλέον :

- το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ
- η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0
- η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

τότε ισχύει : $f'(x_0) = 0$

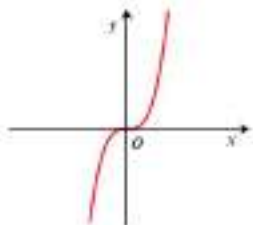


Παρατηρήσεις:

1. Γεωμετρικά το θεώρημα του **Fermat** σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2. Το θεώρημα του **Fermat** δεν ισχύει αντιστρόφως.

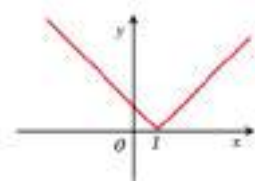
Δηλαδή αν ισχύει $f'(x_0) = 0$ αυτό δεν σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .



Η $f(x) = x^3$ έχει $f'(x) = 3x^2$ με $f'(0) = 0$, όμως δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.

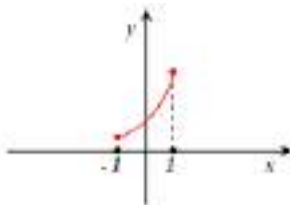
3. Αν στο x_0 εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 (γιατί αν παρουσίαζε από Θ. Fermat θα ήταν $f'(x_0) = 0$).

4. Ακρότατα μπορεί να υπάρχουν και σε σημεία, όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη.



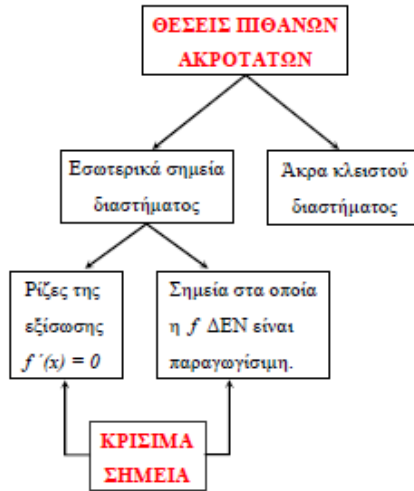
Η $f(x) = |x - 1|$ έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

5. Ακρότατα επίσης μπορεί να υπάρχουν και στα άκρα κλειστού διαστήματος.

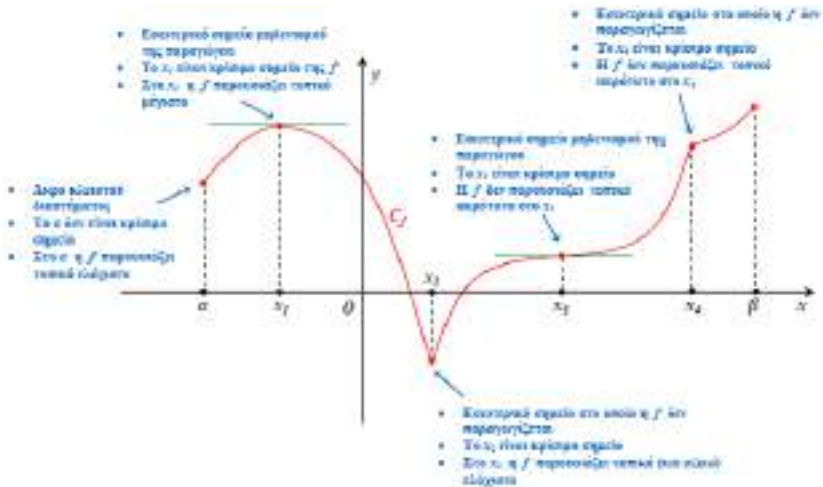


Η $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ και μέγιστο στο $x_2 = 1$.

6. Απ' όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα **πιθανά** ακρότατα μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
 - ♦ Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
 - ♦ Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
 - ♦ Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).
7. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ .

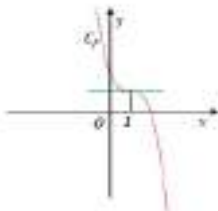


$$f : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$$

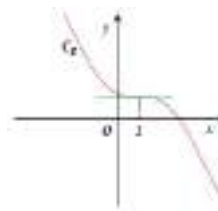


8. Ένα κρίσιμο σημείο ή ένα άκρο του πεδίου ορισμού δεν είναι πάντα και ακρότατο.

Παράδειγματα

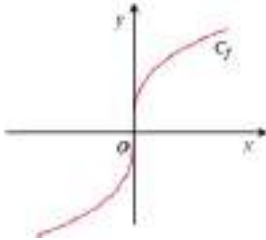


$$f(x) = -(x-1)^2 + 1,$$

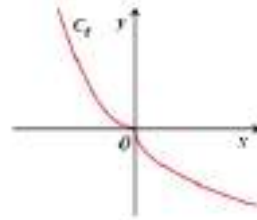


$$g(x) = \eta\mu(x-1) - x + 2$$

- Το 1 είναι κρίσιμο σημείο των f και g αφού $f'(1) = g'(1) = 0$.
- Καμία δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$.

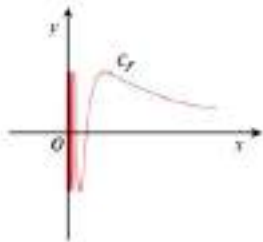


$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

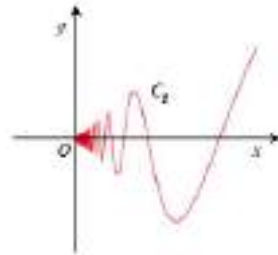


$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Το 1 είναι κρίσιμο σημείο των f και g αφού δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$.
- Καμία δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.



$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} x\eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Το 0 είναι άκρο κλειστού διαστήματος των πεδίων ορισμού των f και g .
- Καμία δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.

Η επιβεβαίωση ή η απόρριψη των πιθανών ακροτάτων (και ειδικότερα των κρίσιμων σημείων) γίνεται με τη μελέτη της μονοτονίας της f .

Θεώρημα (Κριτήριο της μονοτονίας)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \text{Αν} \quad f'(x) > 0 \text{ στο } (\alpha, x_0) \\ \text{και} \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta) \end{array} \right\} \text{τότε το } f(x_0) \text{ είναι τοπικό μέγιστο της } f \\ & \left. \begin{array}{l} \text{Αν} \quad f'(x) < 0 \text{ στο } (\alpha, x_0) \\ \text{και} \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (x_0, \beta) \end{array} \right\} \text{τότε το } f(x_0) \text{ είναι} \\ & \hspace{10em} \text{τοπικό ελάχιστο της } f \end{aligned}$$

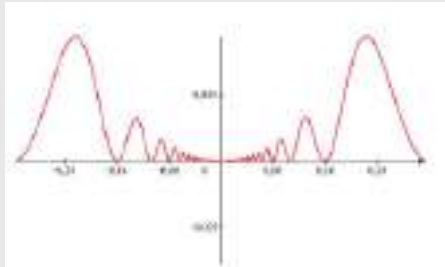
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Παρατηρήσεις

1. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό αν μια συνάρτηση f η οποία είναι
 - παραγωγίσιμη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ (αυτό σημαίνει ότι στο x_0 δε μας ενδιαφέρει αν η f είναι ή όχι παραγωγίσιμη , όχι ότι απαγορεύεται να είναι)
 - συνεχής στο x_0 και
 - το είδος της μονοτονίας αλλάζει εκατέρωθεν του σημείου x_0 , τότε το σημείο αυτό είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f .

2. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Αν για παράδειγμα μια συνάρτηση f παίρνει την μέγιστη τιμή της σε ένα σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητο να αλλάζει το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του σημείου x_0 .



Η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu^2 \frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει στο σημείο $x_0 = 0$ τοπικό (ολικό) ελάχιστο χωρίς η παράγωγος να διατηρεί σταθερό πρόσημο δεξιά και αριστερά του σημείου 0.

Ακόμη σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta)$ υπάρχουν άπειρα σημεία όπου η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας & ακροτάτων

283. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

- i. $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x - 2$ ii. $f(x) = x \ln x + x$ iii. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
 iv. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ v. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 4 \ln x$

Λύση

- i. Η $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x - 2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) σ' αυτό ως πολυωνυμική με παράγωγο :
- $$f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

Είναι:

- ♦ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 30x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4$
 ♦ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 30x - 24 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$
 ♦ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 30x - 24 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 4$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Οπότε

- ♦ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[4, +\infty)$
 ♦ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 4]$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την μονοτονία μιας συνάρτησης f :

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f (εκτός αν η μονοτονία της f ζητείται σε κάποιο διάστημα $\Delta \subseteq D_f$) και εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής.
- Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ (εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη)
- Βρίσκουμε τα πρόσημα της $f'(x)$ στο D_f

Παρατηρήσεις

- ♦ Συχνά για την εύρεση του προσήμου της $f'(x)$ απαιτείται η εύρεση των ριζών (αν υπάρχουν) της $f'(x)$.
 Για το λόγο αυτό πολύ συχνά λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$
- ♦ Συνήθως τα πρόσημα της f' και τη μονοτονία της f τα συγκεντρώνουμε στον **πίνακα μονοτονίας** της f , στον οποίο τοποθετούμε τα άκρα του D_f , και τις ρίζες της $f'(x)$ (αν υπάρχουν). (Αν υπάρχουν και σημεία ασυνέχειας, πρέπει να τοποθετηθούν και αυτά.)
 Σε κάθε διάστημα Δ που η f είναι συνεχής και στο εσωτερικό του η f' είναι θετική (αντίστοιχα αρνητική) η f είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα).

Τονίζουμε ότι τα διαστήματα μονοτονίας της f στα σημεία που είναι ρίζες της f' είναι **κλειστά**.

- ii. Η $f(x) = x \ln x + x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) σ' αυτό με παράγωγο $f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$

Είναι:

- ♦ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$
- ♦ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2}$
- ♦ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -2 \Leftrightarrow x < e^{-2}$

x	$-\infty$	e^{-2}	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παραπάνω πίνακα. Οπότε **Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e^{-2}, +\infty)$**

Παρατηρήσεις

Για τα πρόσημα της $f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$ στο (i) της εφαρμογής δεν ήταν απαραίτητο να λύσουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$

Μπορούσαμε να τοποθετήσουμε κατ' ευθείαν τα πρόσημα στον πίνακα προσημών της f' , αφού είναι γνωστοί οι κανόνες προσήμου ενός τριωνύμου (όπως και ενός πρωτοβάθμιου πολυωνύμου)

Αυτό **δεν** μπορούμε να το κάνουμε για την $f'(x) = \ln x + 2$

στο (ii) της εφαρμογής αφού δεν έχουμε κανόνες προσήμων για την παράσταση $\ln x + 2$.

Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι να λύσουμε τις ανισώσεις $\ln x + 2 > 0$ και $\ln x + 2 < 0$

- iii. Η $f(x) = \frac{e^x}{x}$ είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο σύνολο

$$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	+	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+
x^2	+	+	+	+
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Παρατηρήσεις

- ♦ Η διπλή γραμμή στον πίνακα προσήμων σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.
- ♦ Τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = \frac{e^x}{x}$ που έχουν άκρο το 1 είναι και τα δύο **κλειστά** στο 1, αλλά κανένα διάστημα δεν είναι κλειστό στο 0 στο οποίο η f δεν ορίζεται.
- ♦ Η $f(x) = \frac{e^x}{x}$ είναι γν. φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, 1]$ **δεν** είναι όμως γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

iv. Η $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο σύνολο

$$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρήσεις

Η $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ όχι όμως και στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$

(Άλλωστε αν η $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ ήταν γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$, θα είχε το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}^*$, αλλά η f έχει δύο ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$).

Γενικά ισχύουν :

- Αν μια συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα (α, β) και (β, γ) **δεν συνεπάγεται** ότι είναι γν. αύξουσα και στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$.

Αυτό ισχύει μόνο όταν $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στα διαστήματα (α, β) και (β, γ) **δεν συνεπάγεται** ότι είναι γν. φθίνουσα και στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$.

Αυτό ισχύει μόνο όταν $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$

- Αν όμως μια συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα (αντίστοιχα γν. φθίνουσα) σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma)$ τότε η f είναι γν. αύξουσα (αντίστοιχα γν. φθίνουσα) και στο διάστημα $(\alpha, \beta] \cup [\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$.

v. Η $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 4 \ln x$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής)

στο διάστημα $A = (0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = x - 4 + \frac{4}{x} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \frac{(x-2)^2}{x}$$

Είναι: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

Οπότε η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(0, 2]$ και $[2, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$.

284. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 13$

ii. $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2}$

iii. $\varphi(x) = x^{\frac{1}{x}}$

iv. $h(x) = \ln(x^2 - 2x)$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα είναι και συνεχής) με παράγωγο:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) =$$

$$\stackrel{\text{συν. Horner}}{=} 4(x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Είναι :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } [(x=2 \text{ ή } x=3)]$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$4(x-1)$	-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	0
$f'(x)$	-	+	-	+	+
$f(x)$		T.E. 4	S T.M.	T.E. 4	

Η f παρουσιάζει :

- Τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$, το $f(1) = 4$.
- Τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2$, το $f(2) = 5$.
- Τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = 3$, το $f(3) = 4$.

Παρατήρηση

Το $f(1) = f(3) = 4$ προφανώς είναι και ολικό ελάχιστο (απλώς ελάχιστο) της f , αφού λόγω της μονοτονίας της η f δεν παίρνει τιμή κάτω από το 4.

Για να εξετάσουμε αν το $f(2) = 5$ είναι και ολικό μέγιστο της f χρειαζόμαστε τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού. Είναι :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

Είναι φανερό (και μόνο γνωρίζοντας το ένα από τα δύο όρια) ότι η f παίρνει τιμές και πάνω από το 5. Άρα το $f(2) = 5$ είναι μόνο τοπικό μέγιστο.

(Στην ουσία βρήκαμε ότι το σύνολο τιμών είναι $f(A) = [4, +\infty)$, οπότε $f_{\min} = 4$ ενώ δεν υπάρχει $f_{\max}$.)

- ii. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με παράγωγο :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2+2x-4)}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{2x^3+2x^2-4x+2x^2+2x-4-2x^3-4x^2+8x-x^2-2x+4}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{-x^2+4x}{(x^2+x-2)^2} \end{aligned}$$

Είναι :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$$

Επειδή $(x^2+x-2)^2 > 0$, για κάθε $x \in A$, το πρόσημο της $g'(x)$ ταυτίζεται με το πρόσημο του αριθμητή $-x^2+4x$.

Οπότε έχουμε :

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$			T.E. 2			10/9 T.M.	

Η g παρουσιάζει :

- Τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$, το $g(0) = 2$.
- Τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 4$, το $g(4) = \frac{10}{9}$.

Παρατήρηση

Για να εξετάσουμε αν τα $g(0) = 2$ και $g(4) = \frac{10}{9}$ είναι ολικά ακρότατα βρίσκουμε τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

Απ' όπου (αν και δεν είναι απαραίτητη η εύρεση όλων των ορίων) προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A) = \mathbb{R}$.

Άρα όλα τα ακρότατα είναι τοπικά και κανένα ολικό.

iii. Είναι $\varphi(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Η φ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

παράγωγο : $\varphi'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$ Είναι :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

x	0	e	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$		$e^{\frac{1}{e}}$ MAX	

Η φ παρουσιάζει στο $x_0 = e$ (ολικό) μέγιστο το $\varphi(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Δεν είναι λάθος να γράψουμε ότι η φ παρουσιάζει στο $x_0 = e$ **τοπικό** μέγιστο το $\varphi(e) = e^{\frac{1}{e}}$, αφού ένα ολικό ακρότατο είναι και τοπικό. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει.

iv. Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με παράγωγο

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}.$$

Είναι : $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$2x-2$	-		- 0 +		+
x^2-2x	+		-		+
$h'(x)$	-				+
$h(x)$					

Από τη μονοτονία της h προκύπτει ότι **δεν έχει ακρότατα**.

285. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = x + \ln(\sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ii. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = 1 + \frac{(\sin x)'}{\sin x} = 1 + \frac{-\eta\mu x}{\sin x} = 1 - \epsilon\phi x$$

$$\text{Είναι : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \epsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \epsilon\phi x > 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \epsilon\phi x < 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	Τ.Ε.		

Η f παρουσιάζει :

• Στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

• Στο $x_2 = \frac{\pi}{4}$ (ολικό) μέγιστο το

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Παρατηρήσεις

♦ **Προσοχή !**

Τα άκρα κλειστών διαστημάτων του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, είναι πιθανά ακρότατά της.

♦ Επειδή είναι : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{\pi}{2} + (-\infty) = -\infty$ η $f(x)$ παίρνει τιμές μικρότερες του $f(0) = 0$ και επομένως το $f(0) = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f και όχι ολικό.

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-2, 2]$, είναι συνεχής στο A και παραγωγίσιμη στο $A' = (-2, 2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{Είναι : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{2}$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ ταυτίζεται με το πρόσημο του $2 - x^2$, αφού $\sqrt{4 - x^2} > 0$, για κάθε $x \in A' = (-2, 2)$. Επομένως :

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2		
f'(x)		-	0	+	0	-
f(x)	0	T.E.	-2	T.M.	2	T.E.

Η f παρουσιάζει :

- Στο $x_1 = -2$ τοπικό μέγιστο το $f(-2) = 0$.
- Στο $x_2 = -\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο το $f(-\sqrt{2}) = -2$
- Στο $x_3 = \sqrt{2}$ τοπικό μέγιστο το $f(\sqrt{2}) = 2$
- Στο $x_4 = 2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 0$.

Η ελάχιστη τιμή της f είναι το $f(-\sqrt{2}) = -2$ και το παρουσιάζει στη θέση $x_2 = -\sqrt{2}$.

Η μέγιστη τιμή της f είναι το $f(\sqrt{2}) = 2$ και το παρουσιάζει στη θέση $x_3 = \sqrt{2}$.

Παρατηρήσεις

Γενικά το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν ταυτίζεται με το (ολικό) μέγιστο της συνάρτησης, ούτε το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα με το (ολικό) ελάχιστο.

Αν όμως μια συνάρτηση **έχει μέγιστο και ελάχιστο**, όπως για παράδειγμα μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, τότε :

- Το μέγιστο είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά ακρότατα.
- Το ελάχιστο είναι το μικρότερο από τα τοπικά ακρότατα.

286. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση :

$$f(x) = x + e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1) - 2\eta\mu x, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Λύση

Για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1) + e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - 2\sigma\upsilon\nu x = \\ &= 1 + e^x\eta\mu x + e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x + e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x = \\ &= 1 + 2e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x - 2\sigma\upsilon\nu x = \\ &= (1 - e^x) - 2\sigma\upsilon\nu x(1 - e^x) = \\ &= (1 - e^x)(1 - 2\sigma\upsilon\nu x) \end{aligned}$$

Οπότε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \quad \text{ή} \quad 1 - 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \left[x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{3} \right]$$

Για το πρόσημο της f' χρειάζεται να βρούμε τα πρόσημα των $1 - e^x$ και $1 - 2\sigma\upsilon\nu x$. Είναι :

- $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$
- $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Για την $\varphi(x)=1-2\sin x$ έχουμε ότι είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi)$ και μηδενίζει στα $-\frac{\pi}{3}$ και $\frac{\pi}{3}$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

Είναι :

- $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, άρα $1-2\sin x > 0$ για κάθε $x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$.
- $\varphi(0)=1-2\sin 0=-1<0$, άρα $1-2\sin x < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.
- $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-2\sin\frac{\pi}{2}=1>0$, άρα $1-2\sin x > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\pi$	$-\pi/3$	0	$\pi/3$	π
$1-e^x$	+	+	0	-	-
$1-2\sin x$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Επομένως :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Η f παρουσιάζει :

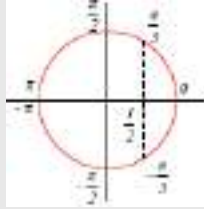
- Στο $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}+1}{2e^{\frac{\pi}{3}}} + \sqrt{3}$.
- Στο $x_2 = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.
- Στο $x_1 = \frac{\pi}{3}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{(\sqrt{3}-1)e^{\frac{\pi}{3}}}{2} - \sqrt{3}$.

Παρατηρήσεις

Είναι προτιμότερο η f' να γράφεται ως γινόμενο παραγόντων αφού έτσι είναι ευκολότερο να βρούμε το πρόσημό της.

♦ Αν για τον προσδιορισμό του προσήμου της f' πρέπει να λυθεί τριγωνομετρική ανίσωση τότε είναι προτιμότερο το πρόσημο της f' να βρίσκεται με τη μέθοδο της επιλεγμένης τιμής.

- ♦ Το πρόσημο του $1-2\sin x$ στο $(-\pi, \pi)$ μπορεί να βρεθεί και με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.



Είναι :

• $\sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ • $\sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

287. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση
 $f(x) = e^{-4x} - e^{-5x}, \quad x \in \mathbb{R}$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^{-4x}(-4x)' - e^{-5x}(-5x)' = -4e^{-4x} + 5e^{-5x}$$

Είναι:

♦ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4e^{-4x} + 5e^{-5x} = 0 \Leftrightarrow 5e^{-5x} = 4e^{-4x} \Leftrightarrow \frac{e^{-5x}}{e^{-4x}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^{-5x+4x} = \frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \ln \frac{5}{4}$$

♦ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4e^{-4x} + 5e^{-5x} > 0 \Leftrightarrow 5e^{-5x} > 4e^{-4x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{e^{-5x}}{e^{-4x}} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{4} \Leftrightarrow x < \ln \frac{5}{4}$

♦ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -4e^{-4x} + 5e^{-5x} < 0 \Leftrightarrow 5e^{-5x} < 4e^{-4x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{e^{-5x}}{e^{-4x}} < \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} < \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^x > \frac{5}{4} \Leftrightarrow x > \ln \frac{5}{4}$

Επομένως

x	$-\infty$	$\ln \frac{5}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		MAX	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \ln \frac{5}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο

$$\left[\ln \frac{5}{4}, +\infty\right)$$

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = \ln \frac{5}{4}$ μέγιστο το

$$\begin{aligned} f\left(\ln \frac{5}{4}\right) &= e^{-4\ln \frac{5}{4}} - e^{-5\ln \frac{5}{4}} = \left(e^{\ln \frac{5}{4}}\right)^{-4} - \left(e^{\ln \frac{5}{4}}\right)^{-5} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-4} - \left(\frac{5}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4^4}{5^4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4^4}{5^5} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Αν το πρόσημο της f' δεν μπορεί να βρεθεί με κανόνες προσήμων (όπως π.χ. σ' ένα τριώνυμο) ούτε είναι εύκολο να βρούμε τιμές της παραγώγου σε σημεία εκτός των ριζών της (ώστε από το πρόσημο τους να συμπεράνουμε το πρόσημο της f') τότε είναι προτιμότερο να λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$

288. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1} \ln x - \ln(x+1) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} \\ &= \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} \end{aligned}$$

♦ Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε

$$x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x \ln x < x \cdot 0 \Leftrightarrow x \ln x < 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1) \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow -(x+1) \ln(x+1) < 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$x \ln x - (x+1) \ln(x+1) < 0$$

και επειδή $x > 0$ και $x+1 > 0$ και $\ln^2 x > 0$, θα είναι

$$f'(x) = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} < 0$$

♦ Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε

$$x < x+1 \quad (1) \quad \text{οπότε} \quad \ln x < \ln(x+1) \quad (2)$$

Επειδή όλα τα μέλη των (1) και (2) είναι θετικά πολλαπλασιάζονται κατά μέλη παίρνουμε

$$x \ln x < (x+1) \ln(x+1) \Leftrightarrow x \ln x - (x+1) \ln(x+1) < 0$$

και επειδή $x > 0$ και $x+1 > 0$ και $\ln^2 x > 0$ θα είναι

$$f'(x) = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} < 0$$

Επομένως ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και συνεπώς **η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.**

Παρατηρήσεις

- Αν οι ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ δεν είναι εύκολο να λυθούν, το πρόσημο της f' μπορεί να βρεθεί συνθέτοντας την f' ξεκινώντας από ανισοτικές σχέσεις που ισχύουν.
- Ενώ είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ επειδή αυτό είναι **ένωση διαστημάτων** και όχι ένα διάστημα.

289. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{\pi x} + 1 - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Λύση

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \pi e^{\pi x} - \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \pi e^{\pi x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $x \leq 0$, τότε $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0$

και επειδή $\pi e^{\pi x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι $\pi e^{\pi x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

♦ Αν $x > 0$, τότε $\sqrt{x^2} = x$, οπότε :

$$x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi e^{\pi x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > \pi e^{\pi x} - 1 \Leftrightarrow f'(x) > \pi e^{\pi x} - 1 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } x > 0 \Leftrightarrow \pi x > 0 \Leftrightarrow e^{\pi x} > e^0 \Leftrightarrow \pi e^{\pi x} > \pi \Leftrightarrow \pi e^{\pi x} - 1 > \pi - 1 > 0$$

Οπότε από (1) παίρνουμε ότι $f'(x) > 0$.

Επομένως είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Μερικές φορές το πρόσημο της παραγώγου f' βρίσκειται ξεκινώντας από το x να ανήκει σε κατάλληλα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της f και συνθέτοντας την f' .

290. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq 4 \\ 3x^2 - 4x, & 0 < x < 4 \end{cases}$$

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Λύση

Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ και $(4, +\infty)$ ως πολυωνυμική σε καθένα από αυτά.

- Για το σημείο $x = 0$, έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 4x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - 4x) = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ και συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

- Για το σημείο $x = 4$, έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x^2 - 4x) = 32$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 + 4x) = 32 = f(4)$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$ και συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x = 4$.

Επομένως η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

- ♦ Για κάθε $x < 0$ ή $x > 4$ είναι :

$$f'(x) = (x^2 + 4x)' = 2x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

- ♦ Για κάθε $0 < x < 4$ είναι :

$$f'(x) = (3x^2 - 4x)' = 6x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$2/3$	4	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+			+
$6x-4$			-	0	+	
$f(x)$						

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[0, \frac{2}{3}]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 0]$, $[\frac{2}{3}, +\infty)$

Παρατήρηση

Για την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης f μας ενδιαφέρει το πρόσημο της f' στο εσωτερικό των διαστημάτων στα οποία η f ορίζεται. Συνεπώς **δεν χρειάζεται να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της f στα σημεία αλλαγής του τύπου της** ($x_1 = 0$ και $x_2 = 4$) Εκείνο όμως που είναι απαραίτητο είναι να μελετήσουμε τη **συνέχεια της f** , ειδικά στα σημεία αλλαγής του τύπου της.

291. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - e, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως διαφορά συνεχών.

Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική.

Στο $x = 1$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x - x - e) = -1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x + 2) = -1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Επομένως η f είναι συνεχής και στο 1 άρα είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$.

♦ Αν $x < 1$, τότε $f'(x) = (e^x - x - e)' = e^x - 1$

♦ Αν $x > 1$, τότε $f'(x) = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4$

Είναι :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+		
$2x - 4$				-	0
$f(x)$		T.E. 1-e	-1 T.M.	T.E. -2	

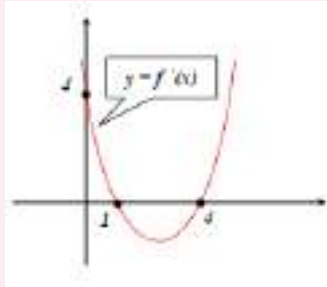
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε παρουσιάζει :

- Στο $x = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 1 - e$.
- Στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = -1$.
- Στο $x = 2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -2$.

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητος ο έλεγχος της ύπαρξης παραγώγου στο $x_0 = 1$, γιατί αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η συνέχεια της f στο $x_0 = 1$ και το είδος της μονοτονίας της εκατέρωθεν.

292. Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- i. Να βρείτε τη μονοτονία και τις θέσεις των τοπικών ακρότατων της f .
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(0) = 1$.

Λύση

- i. Στο διάστημα $(1, 4)$ η γραφική παράσταση της f' βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, συνεπώς $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$.
 Στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(4, +\infty)$ η γραφική παράσταση της f' βρίσκεται πάνω από τον $x'x$, συνεπώς $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.
 Επομένως :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	↗		TM	↘		TE	↗

Η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[4, +\infty)$.

Η f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $[1, 4]$.

Η f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο και στο $x = 4$ τοπικό ελάχιστο.

- ii. Η f' είναι μια παραβολή με ρίζες 1 και 4. Συνεπώς θα έχει τύπο της μορφής :
 $f'(x) = a(x-1)(x-4)$

Επίσης από το σχήμα παίρνουμε ότι : $f'(0) = 4 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$

Άρα $f'(x) = (x-1)(x-4) \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 5x + 4$

Οπότε : $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x \right)'$ και επομένως : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c$

Επειδή $f(0) = 1$ είναι $c = 1$, οπότε : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1, x \in \mathbb{R}$

293. i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = (x-a)^v + x^v$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$, v : άρτιος.

- ii. Να αποδείξετε ότι: $10000^{100} > 9000^{100} + 1000^{100}$.

Λύση

- i. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
 $f'(x) = v(x-a)^{v-1} + vx^{v-1}$

Είναι :

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad f'(x) > 0 &\Leftrightarrow v(x-\alpha)^{v-1} + vx^{v-1} > 0 \Leftrightarrow v(x-\alpha)^{v-1} > -vx^{v-1} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{v \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} (x-\alpha)^{v-1} > -x^{v-1} \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή ο v είναι άρτιος, ο $v-1$ θα είναι περιττός, οπότε η (1) ισοδύναμα γίνεται :

$$(x-\alpha)^{v-1} > (-x)^{v-1} \Leftrightarrow x-\alpha > -x \Leftrightarrow 2x > \alpha \Leftrightarrow x > \frac{\alpha}{2}$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right)$

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad f'(x) < 0 &\Leftrightarrow v(x-\alpha)^{v-1} + vx^{v-1} < 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^{v-1} < (-x)^{v-1} \\ &\Leftrightarrow x-\alpha < -x \Leftrightarrow 2x < \alpha \Leftrightarrow x < \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{\alpha}{2}\right]$

ii. Για $\alpha=10000$ και $v=100$ η f του α ερωτήματος γίνεται $f(x)=(x-10000)^{100} + x^{100}$
Οπότε :

x	$-\infty$	5000	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Παρατηρούμε ότι : $f(0) = 10000^{100}$

$$f(1000) = 9000^{100} + 1000^{100}$$

Είναι $0 < 1000 < 5000$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 5000]$ θα έχουμε : $0 < 1000 \Leftrightarrow f(0) > f(1000) \Leftrightarrow 10000^{100} > 9000^{100} + 1000^{100}$

Παρατηρήσεις

◆ Η απόδειξη μιας ανισότητας ενώ έχει προηγηθεί μελέτη μονοτονίας μιας συνάρτησης f , το πιθανότερο είναι να προκύπτει από εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας στη σχέση $a > b$ ή $a < b$

Προσοχή! Τα α, β πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο διάστημα μονοτονίας της f .

◆ Επίσης είναι: $f(10000) = 10000^{100}$ $f(9000) = 1000^{100} + 9000^{100}$

$$\left. \begin{array}{l} 5000 < 9000 < 10000 \\ \text{και} \\ f \text{ γν.αυξ. στο } [5000, +\infty) \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα } f(9000) < f(10000) \Leftrightarrow 1000^{100} + 9000^{100} < 10000^{100}$$

Εύρεση τιμών παραμέτρων

294. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 + 3\mu x^2 + (3\mu + 4)x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 9x^2 + 6\mu x + 3\mu + 4$

Η μονοτονία της f καθορίζεται από το πρόσημο της f' που είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 36\mu^2 - 36(3\mu + 4) = 36(\mu^2 - 3\mu - 4)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 3\mu - 4 > 0 \Leftrightarrow \mu < -1$ ή $\mu > 4$, τότε η f' έχει δύο άνισες ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$. Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επειδή θέλουμε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η περίπτωση $\Delta > 0$ αποκλείεται.

♦ Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 3\mu - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < \mu < 4$, τότε είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα.

♦ Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$ ή $\mu = 4$, τότε :

• Αν $\mu = -1$ έχουμε $f'(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\frac{1}{3}$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα

στα διαστήματα $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{1}{3}, +\infty)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

• Αν $\mu = 4$ έχουμε $f'(x) = 9x^2 + 24x + 16 = (3x + 4)^2$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (-\frac{4}{3}, +\infty)$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

και επειδή η f είναι συνεχής στο $-\frac{4}{3}$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άρα τελικά η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\mu \in [-1, 4]$

Παρατήρηση

• Αν $f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα $f'(x) \leq 0$) για κάθε $x \in \Delta$ και

- ο μηδενισμός της $f'(x)$ συμβαίνει σε **μεμονωμένα** σημεία του Δ (πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους) και όχι σε υποδιαστήματα $(\alpha, \beta) \subseteq \Delta$, τότε η f είναι **γνησίως** αύξουσα (αντίστοιχα **γνησίως** φθίνουσα) στο Δ .
Οπότε επειδή η $f'(x)$ στη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι ένα τριώνυμο το οποίο αν μηδενίζει θα μηδενίζει σε μεμονωμένα σημεία, η f είναι **γνησίως** αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν :

$$f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mu \in [-1, 4]$$

Επειδή όμως η παραπάνω θεωρία δεν αναφέρεται στο σχολικό, προτιμήστε την πιο αναλυτική λύση της άσκησης κατά την οποία απαιτούμε $f'(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ και **εξετάζουμε χωριστά τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες είναι $f'(x) = 0$.**

Μονοτονία & Λύση εξισώσεων - ανισώσεων

295. Δίνετε η συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (x-1)e^x$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $f(x^2 + 1) = 2x^2 - 2xe^{2x} + e^{2x}$

ii. $\eta \mu^2 x - 2(\eta \mu x - 1)e^{\eta \mu x} = 1$

γ. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $x^4 - x^2 < 2(x^2 - 1)e^{x^2} - 2(x-1)e^x$

ii. $x^2 - 2 > 2(x-1)e^x$

Λύση

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}2x - [(x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'] = x - e^x - (x-1)e^x = \\ &= x - e^x - xe^x + e^x = x(1 - e^x). \end{aligned}$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - e^x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$1 - e^x$	+	0	-
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$		1	

Είναι:

$$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$$1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως είναι **γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$**

β. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$f(x^2 + 1) = 2x^2 - (2x-1)e^{2x} \Leftrightarrow f(x^2 + 1) = \frac{1}{2}(2x)^2 - (2x-1)e^{2x} \Leftrightarrow f(x^2 + 1) = f(2x)$$

Η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως μονότονη (γν. φθίνουσα) συνάρτηση.

Επομένως

$$f(x^2 + 1) = f(2x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$\eta\mu^2 x - 2(\eta\mu x - 1)e^{\eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\eta\mu^2 x - (\eta\mu x - 1)e^{\eta\mu x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\eta\mu x) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - (1-1)e^1 = \frac{1}{2}$$

Επομένως από την (1) ισοδύναμα παίρνουμε

$$f(\eta\mu x) = f(1) \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

γ. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &< 2(x^2 - 1)e^{x^2} - 2(x-1)e^x \Leftrightarrow x^4 - 2(x^2 - 1)e^{x^2} < x^2 - 2(x-1)e^x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - (x^2 - 1)e^{x^2} &< \frac{1}{2}x^2 - (x-1)e^x \Leftrightarrow f(x^2) < f(x) \quad \begin{matrix} f: \gamma\psi. \varphi\theta. \\ \end{matrix} \Leftrightarrow x^2 > x \\ \Leftrightarrow x^2 - x > 0 &\Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} x^2 - 2 > 2(x-1)e^x &\Leftrightarrow x^2 - 2(x-1)e^x > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - (x-1)e^x > 1 \Leftrightarrow f(x) > 1 \\ \Leftrightarrow f(x) > f(0) &\quad \begin{matrix} f(0)=1 \\ f: \gamma\psi. \varphi\theta. \end{matrix} \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

296. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 4]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$

και $0 < f(0) < 4$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y = -x + 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 4)$

ii. Υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $3f(x_1) = f(1) + f(2) + f(3)$

Λύση

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = -x + 4 \Leftrightarrow f(x) + x - 4 = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 4)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - 4, x \in [0, 4]$

♦ **Ύπαρξη ρίζας**

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 4]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (f : συνεχής ως παραγωγίσιμη)
- $g(0) = f(0) + 0 - 4 = f(0) - 4 < 0$ (αφού $f(0) < 4$)
 $g(4) = f(4) + 4 - 4 = f(4)$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$. Οπότε ισχύει: $0 < 4 \Leftrightarrow f(0) < f(4)$

Αλλά $f(0) > 0$ οπότε και $f(4) > 0 \Leftrightarrow g(4) > 0$

Επομένως $g(0) \cdot g(4) < 0$ οπότε από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x - 4 = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 4)$

♦ **Μοναδικότητα της ρίζας**

Η $g(x) = f(x) + x - 4$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 4]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + 1$

Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) + 1 > 1$

$$\text{Άρα } g'(x) > 1 > 0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$ (άρα και “1-1”) και επομένως η λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι **μοναδική**

ii. Η f είναι συνεχής στο $(0, 4)$ και γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$0 < 1 < 4 \Leftrightarrow f(0) < f(1) < f(4) \quad (1)$$

$$0 < 2 < 4 \Leftrightarrow f(0) < f(2) < f(4) \quad (2)$$

$$0 < 3 < 4 \Leftrightarrow f(0) < f(3) < f(4) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη τις (1), (2) και (3) παίρνουμε

$$3f(0) < f(1) + f(2) + f(3) < 3f(4) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3} < f(4)$$

Άρα από το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 4)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(x_1) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3} \Leftrightarrow 3f(x_1) = f(1) + f(2) + f(3).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και “1-1”) συνεπώς το x_1 είναι μοναδικό

297. A. Να λύσετε τις εξισώσεις **i.** $x^2 + \ln x = 1$ **ii.** $e^x [x + 1 + \ln(x^2 + 1)] = 1$

B. Να λύσετε τις ανισώσεις **i.** $\frac{1}{x} - \ln x > 1$ **ii.** $2^x + 3^x + 4^x \leq 9^x$

Λύση

A. i. Η εξίσωση $x^2 + \ln x = 1$ γράφεται: $x^2 + \ln x - 1 = 0$, με $x \in (0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x - 1$, $x > 0$.

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Είναι :

- $f(1) = 0$
- $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η f είναι “1-1”. Έχουμε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1.$$

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε μια εξίσωση $f(x) = 0$ ή μια ανίσωση $f(x) > 0$ στο διάστημα Δ η οποία δεν λύνεται με γνωστές μεθόδους τότε :

- βρίσκουμε προφανή ρίζα x_0 της f στο Δ .
- αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ (άρα και “1-1”) οπότε :

$$\diamond f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$$

$$\diamond \text{ Αν } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \Delta, \text{ τότε : } f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0 \text{ και } x \in \Delta$$

$$\diamond \text{ Αν } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \Delta, \text{ τότε : } f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0 \text{ και } x \in \Delta$$

ii. Η εξίσωση $e^x [x + 1 + \ln(x^2 + 1)] = 1$ ισοδύναμα γράφεται :

$$x + 1 + \ln(x^2 + 1) = e^{-x} \Leftrightarrow x + 1 + \ln(x^2 + 1) - e^{-x} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \ln(x^2 + 1) - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Είναι

- $f(0) = 1 + \ln 1 - e^0 = 0$ δηλαδή το 0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} - e^{-x}(-x)' = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} + e^{-x} = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} + e^{-x}$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι « 1 - 1 » και συνεπώς η **ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική.**

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Για το **A ii)** της εφαρμογής μια πρώτη προσπάθεια είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x [x + 1 + \ln(x^2 + 1)] - 1$$

Γρήγορα διαπιστώνουμε ότι δεν οδηγούμαστε σε λύση, διότι αντιμετωπίζουμε πρόβλημα με το πρόσημο της

$$f'(x) = e^x [x + \ln(x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 + 1} + 2]$$

Για τον λόγο αυτό μετασχηματίζουμε την εξίσωση, ενέργεια που κάνουμε σε παρόμοιες περιπτώσεις για την επίλυση εξισώσεων αλλά και ανισώσεων.

B. i. Η ανίσωση γράφεται $\frac{1}{x} - \ln x - 1 > 0$, με $x \in (0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, $x > 0$. Είναι :

- $f(1) = 0$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε : $\frac{1}{x} - \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \stackrel{f \text{ γν. φθίν.}}{\Leftrightarrow} x < 1$.

Αλλά επειδή $x > 0$, τελικά έχουμε ότι η ανίσωση αληθεύει για **$x \in (0, 1)$** .

ii. Η ανίσωση $2^x + 3^x + 4^x \leq 9^x$, επειδή $9^x > 0$, ισοδύναμα γράφεται :

$$\begin{aligned} \frac{2^x}{9^x} + \frac{3^x}{9^x} + \frac{4^x}{9^x} &\leq \frac{9^x}{9^x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{3}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{3}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 1 \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{3}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι :

- $f(1) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} - 1 = \frac{9}{9} - 1 = 0$

$$\bullet \quad f'(x) = \left(\frac{2}{9}\right)^x \ln \frac{2}{9} + \left(\frac{3}{9}\right)^x \ln \frac{3}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^x \ln \frac{4}{9}$$

Επειδή: $\left(\frac{2}{9}\right)^x > 0$, $\left(\frac{3}{9}\right)^x > 0$, $\left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$ και

$$\frac{2}{9} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{2}{9} < 0, \quad \frac{3}{9} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{9} < 0, \quad \frac{4}{9} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{4}{9} < 0$$

συμπεραίνουμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η (1) ισοδύναμα γίνεται $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

298. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - 2\sqrt{x}$, $\alpha > 0$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο και να βρείτε την τιμή του.
- ii. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η τιμή του μέγιστου να είναι η ελάχιστη δυνατή.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με :

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\alpha}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\alpha - \sqrt{x}}{x}$$

Είναι :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x = \alpha^2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x < \alpha^2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x > \alpha^2$$

x	0	α^2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		Μέγιστο	

Η f παρουσιάζει (ολικό) **μέγιστο στο $x_0 = \alpha^2$** με τιμή :

$$f(\alpha^2) = \alpha \ln \alpha^2 - 2\sqrt{\alpha^2} = 2\alpha \ln \alpha - 2\alpha$$

ii. Θεωρούμε την τιμή του ακρότατου σαν συνάρτηση του α και τη μελετάμε.

$$\text{Έστω} \quad h(\alpha) = 2\alpha \ln \alpha - 2\alpha, \quad \alpha > 0$$

$$\text{Είναι} \quad h'(\alpha) = 2 \ln \alpha + 2 - 2 = 2 \ln \alpha$$

$$h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

α	0	1	$+\infty$
$h'(\alpha)$		-	+
$h(\alpha)$		Ελάχιστο -2	

Άρα για $\alpha=1$ η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστη και ισούται με $h(1) = -2$.

Μέγιστα - Ελάχιστα αποστάσεων & εμβαδών

299. A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2 - 1$, $x > 0$.

Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i. Να βρείτε το σημείο A της γραφικής παράστασης της g , το οποίο απέχει

τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $B(0, 1)$. Μετά, να βρείτε την απόσταση αυτή.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην εφαπτομένη ε της C_g στο A .

Λύση

A. Η $x = 1$ είναι προφανής ρίζα.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

και συνεπώς η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

- Αν $0 < x < 1$ τότε $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Αν $x > 1$ τότε $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

B. i. Έστω $A(x, \ln x)$ σημείο της C_g .

Είναι

$$(AB) = \sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2} = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 2\ln x + 1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 2\ln x + 1}, \quad x > 0.$$

$$h'(x) = \frac{2x + 2\frac{\ln x}{x} - 2\frac{1}{x}}{2\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 2\ln x + 1}} = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 2\ln x + 1}} = \frac{f(x)}{x\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 2\ln x + 1}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

Αρα η $h(x)$ δηλαδή η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη όταν $x = 1$ και συνεπώς $A(1, 0)$. Η ελάχιστη απόσταση είναι $h(1) = \sqrt{2}$

ii. Είναι $\lambda_{AB} = \frac{1-0}{0-1} = -1$ και $\lambda_\varepsilon = g'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Άρα $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow AB \perp \varepsilon$

Κρίσιμα σημεία συνάρτησης

300. Έστω η συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$.

Αν $f(a)=f(\beta)$ να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

- ♦ Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β) τότε σε ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη, οπότε το x_0 θα είναι κρίσιμο σημείο της f .
- ♦ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και είναι $f(a)=f(\beta)$ μπορεί να εφαρμοστεί το **Θ. Rolle** για την f στο $[a, \beta]$ και συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f .

Επομένως η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

Παρατήρηση

Ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι **κρίσιμο σημείο** της f όταν :

- το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f .
- η f είναι συνεχής στο x_0 και
- $f'(x_0)=0$ ή η f δεν παραγωγίζεται στο x_0 .

Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών εξίσωσης

301. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=1-x+\ln x$.

Λύση

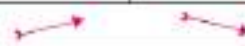
Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$

και είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, σ' αυτό ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x + \ln x) = 1 - 0 + (-\infty) = -\infty$.
- $f(1) = 0$.

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + \ln x) \stackrel{(-\infty + \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) \right] = (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, 1]$ οπότε

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 0]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = (1, +\infty)$ οπότε

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, 0).$$

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 0]$

Μεθοδολογία

Για την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f :

- βρίσκουμε τα διαστήματα $A_1, A_2, \dots$ στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη και
- βρίσκουμε τα $f(A_1), f(A_2), \dots$

Το σύνολο τιμών $f(A)$ της f είναι η ένωση των $f(A_1), f(A_2), \dots$.

Δηλαδή :

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots$$

302. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2}.$$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ii. Η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iii. Η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

iv. Η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Λύση

Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 2) \cup (2, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - x}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 4 - x}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

Έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	-	0	+	
$f(x)$								

Οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[4, +\infty)$** και **γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[1, 2)$ και $(2, 4]$.**

Αν $A_1 = (0, 1]$, $A_2 = (1, 2)$, $A_3 = (2, 4]$ και $A_4 = (4, +\infty)$,

θα βρούμε τα

$$f(A_1), f(A_2), f(A_3) \text{ και } f(A_4).$$

Έχουμε :

♦ Αν $x \in A_1 = (0, 1]$, τότε :

- f συνεχής γνησίως αύξουσα στο A_1
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} \right) = (-\infty) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -\infty$
- $f(1) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{Άρα } f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right].$$

♦ Αν $x \in A_2 = (1, 2)$, τότε :

- f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_2
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} \right) = 0 - 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} \right) \stackrel{x-2 < 0}{=} \ln 2 + (-\infty) + \frac{3}{2} = -\infty$

$$\text{Άρα } f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$$

♦ Αν $x \in A_3 = (2, 4]$, τότε :

- f συνεχής γνησίως φθίνουσα στο A_3
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} \right) \stackrel{x-2 > 0}{=} \ln 2 + (+\infty) + \frac{3}{2} = +\infty$
- $f(4) = \ln 4 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2\ln 2 + 2$

$$\text{Άρα } f(A_3) = [2\ln 2 + 2, +\infty).$$

♦ Αν $x \in A_4 = (4, +\infty)$, τότε :

- f συνεχής γνησίως αύξουσα στο A_4

- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \ln 4 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2\ln 2 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} \right) = (+\infty) + 0 + \frac{3}{2} = +\infty$

Άρα

$$f(A_4) = (2\ln 2 + 2, +\infty).$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = \\ &= \left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup \left(-\infty, \frac{1}{2} \right) \cup [2\ln 2 + 2, +\infty) \cup (2\ln 2, +\infty) \\ &= \left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [2\ln 2 + 2, +\infty) \end{aligned}$$

Παράτηρηση:

Ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας της f συμπληρωμένος με τις οριακές τιμές και τα ακρότατα της f αποκαλύπτει το σύνολο τιμών της f .

x	0	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$1/2$	$-\infty$	$2\ln 2 + 2$	$+\infty$

$$\text{Σύνολο τιμών : } \left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [2\ln 2 + 2, +\infty)$$

β. i. Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ έχουμε :

♦ Το $0 \in f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_1 = (0, 1]$, η οποία είναι και μοναδική στο A_1
αφού η f είναι γνησίως αύξουσα (άρα «1-1») στο A_1 .

♦ Το $0 \in f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$ άρα

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_2 = (1, 2)$, η οποία είναι και μοναδική στο A_2
αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα «1-1») στο A_2 .

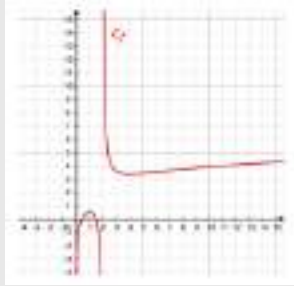
♦ Το $0 \notin f(A_3) = [2\ln 2 + 2, +\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_3

♦ Το $0 \notin f(A_4) = (2\ln 2 + 2, +\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_4

Επομένως

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο $A_1 = (0, 1]$ και μία στο $A_2 = (1, 2)$.

Παρατήρηση



Γραφικά το ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες σημαίνει ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία.

ii. Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2}$ έχουμε :

♦ Το $\frac{1}{2} \in f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_1 = (0, 1]$, η οποία είναι και μοναδική στο A_1 αφού η f είναι γνησίως αύξουσα (άρα «1 – 1») στο A_1 .

♦ Το $\frac{1}{2} \notin f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ δεν έχει ρίζα στο A_2 .

♦ Το $\frac{1}{2} \notin f(A_3) = [2\ln 2 + 2, +\infty)$,

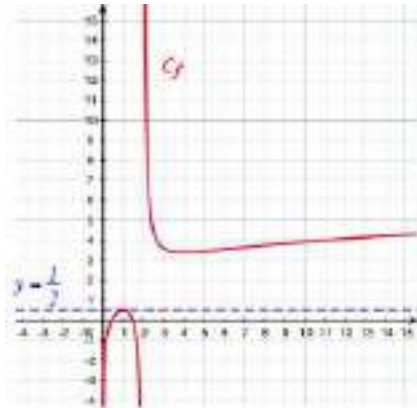
άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ δεν έχει ρίζα στο A_3 .

♦ Το $\frac{1}{2} \notin f(A_4) = (2\ln 2 + 2, +\infty)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ δεν έχει ρίζα στο A_4 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μια ακριβώς ρίζα (η οποία προφανώς είναι η $x=1$).

Π α ρ α τ ή ρ η σ η



Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2}$ είναι το πλήθος των κοινών σημείων της

C_f και της ευθείας $y = \frac{1}{2}$

iii. Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2$ έχουμε :

$$\text{Το } 2 \notin f(A) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2\ln 2 + 2, +\infty)$$

άρα η εξίσωση $f(x)=2$ δεν έχει ρίζα στο A

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη στο $A = (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η



Το ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη γραφικά σημαίνει ότι η C_f και η ευθεία $y = 2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

iv. Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 4$ έχουμε :

♦ Το $4 \notin f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

άρα η εξίσωση $f(x) = 4$ δεν έχει ρίζα στο A_1 .

♦ Το $4 \notin f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

άρα η εξίσωση $f(x) = 4$ δεν έχει ρίζα στο A_2 .

♦ Το $4 \in f(A_3) = [2\ln 2 + 2, +\infty)$

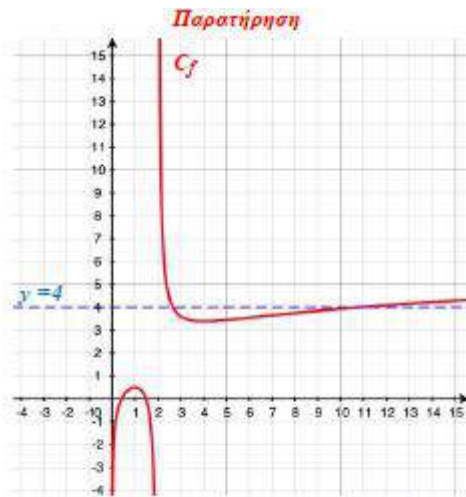
(γιατί $4 > 2\ln 2 + 2 \Leftrightarrow 2\ln 2 < 2 \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow 2 < e$ που ισχύει.)

άρα η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_3 = (2, 4]$, η οποία είναι και μοναδική στο A_3 αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα «1-1») στο A_3 .

♦ Το $4 \in f(A_4) = (2\ln 2 + 2, +\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_4 = (4, +\infty)$, η οποία είναι και μοναδική στο A_4 αφού η f είναι γνησίως αύξουσα (άρα «1-1») στο A_4 .

Επομένως

η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο $A_1 = (2, 4]$ και μια στο $A_2 = (4, +\infty)$.



Γραφικά το ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει δύο ρίζες σημαίνει ότι η ευθεία $y = 4$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία.

303. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4}$$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 12x + 4a = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=a$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

- i. Η $f(x) = \frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ και είναι

παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 12x)'(x^2 - 4) - (x^2 - 4)'(x^3 - 12x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{(3x^2 - 12)(x^2 - 4) - 2x(x^3 - 12x)}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 12x^2 - 12x^2 + 48 - 2x^4 + 24x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 + 48}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ είναι $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+
$f(x)$				

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$

Για την εύρεση του συνόλου τιμών υπολογίζουμε τα όρια

- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{16}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 12x}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^3 - 12x}{x-2} \right] \stackrel{x < -2}{=} \stackrel{x+2 < 0}{=} (-\infty) \cdot \frac{16}{-4} = (-\infty)(-4) = +\infty \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 12x}{(x-2)(x+2)} \stackrel{\left(\frac{16}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^3 - 12x}{x-2} \right] \\ &= \stackrel{x > -2}{=} \stackrel{x+2 > 0}{=} (+\infty) \cdot \frac{16}{-4} = (+\infty)(-4) = -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 12x}{(x-2)(x+2)} \stackrel{\left(\frac{-16}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^3 - 12x}{x+2} \right]$$

$$\stackrel{x < 2}{=} \stackrel{x-2 < 0}{=} (-\infty) \cdot \frac{-16}{4} = (-\infty)(-4) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 12x}{(x-2)(x+2)} \stackrel{\left(\frac{-16}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^3 - 12x}{x+2} \right]$$

$$\stackrel{x > 2}{=} \stackrel{x-2 > 0}{=} (+\infty) \cdot \frac{-16}{4} = (+\infty)(-4) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

· Η f είναι συνεχής στο A και λόγω μονοτονίας έχουμε

$$\blacklozenge \text{ Av } x \in A_1 = (-\infty, -2) \text{ τότε}$$

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\blacklozenge \text{ Av } x \in A_2 = (-2, 2) \text{ τότε}$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\blacklozenge \text{ Av } x \in A_3 = (2, +\infty) \text{ τότε}$$

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$



Παρατηρήσεις

Εφόσον $f(A_1)=\mathbb{R}$, για την εύρεση του συνόλου τιμών **δεν** είναι απαραίτητη η εύρεση των $f(2)$ και $f(A_3)$ αφού όποια διαστήματα και να είναι τα $f(A_2)$ και $f(A_3)$ το σύνολο τιμών θα είναι

$$f(A) = \mathbb{R} \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}$$

Η εύρεση των $f(A_2)$ και $f(A_3)$ είναι όμως απαραίτητη για το ii) ερώτημα

ii. Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 12x + 4\alpha = 0$

Ισοδύναμα γράφεται $x^3 - 12x = \alpha x^2 - 4\alpha \Leftrightarrow x^3 - 12x = \alpha(x^2 - 4)$ (1)

Οι αριθμοί 2 και -2 **δεν** αποτελούν ρίζες της εξίσωσης (1) αφού

$$\bullet \text{ για } x = 2 \text{ προκύπτει } 8 - 24 = 0 : \text{Αδύνατη.}$$

$$\bullet \text{ για } x = -2 \text{ προκύπτει } -8 + 24 = 0 : \text{Αδύνατη.}$$

Επομένως η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

Έχουμε

- ♦ $a \in f(A_1) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in A_1 = (-\infty, -2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = a$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα (την x_1) στο A_1 η οποία είναι μοναδική στο A_1 αφού η f είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα (άρα και «1-1») στο A_1 .
- ♦ $a \in f(A_2) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in A_2 = (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = a$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα (την x_2) στο A_2 η οποία είναι μοναδική στο A_2 αφού η f είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα (άρα και «1-1») στο A_2 .
- ♦ $a \in f(A_3) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in A_3 = (2, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = a$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα (την x_3) στο A_3 η οποία είναι μοναδική στο A_3 αφού η f είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα (άρα και «1-1») στο A_3 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = a$, συνεπώς και ισοδύναμη της $x^3 - ax^2 - 12x + 4a = 0$, έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Οι εξισώσεις $x^3 - 12x = a(x^2 - 4)$ (1) και $\frac{x^3 - 12x}{x^2 - 4} = a$ (2) ορίζονται για διαφορετικές τιμές του x .

Η (1) ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ η (2) ορίζεται για κάθε $x \neq -2$ και $x \neq 2$.

Οπότε αν το 2 ή το -2 είναι ρίζες της (1) δεν μπορεί να είναι δεκτές ρίζες της (2) λόγω των περιορισμών που έχει η εξίσωση (2) και επομένως δεν μπορεί να θεωρηθούν σ' αυτή την περίπτωση ισοδύναμες εξισώσεις.

Αν όμως η (1) δεν έχει ρίζες το 2 ή το -2 τότε οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες.

304. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 = 0 \quad \text{έχει δύο μόνο ρίζες και μάλιστα αρνητικές.}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2).$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
x	-	-	0	+	+		
x^2+x-2	+	0	-	-	0	+	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{5}{3}$	1	$\frac{7}{12}$	$+\infty$		

- ♦ Αν $x \in A_1 = (-\infty, -2]$, τότε :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \\ f(-2) = -\frac{5}{3} \\ f \text{ συνεχής και γν.φθίνουσα στο } A_1 \end{array} \right\} \text{ Άρα } f(A_1) = \left[-\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

Το $0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, -2]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$. Δηλαδή το x_1 είναι ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, -2]$ η οποία είναι και μοναδική αφού η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$.

- ♦ Αν $x \in A_2 = (-2, 0)$, τότε :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{5}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ f \text{ συνεχής και γν.αύξουσα στο } A_2 \end{array} \right\} \text{ Άρα } f(A_2) = \left(-\frac{5}{3}, 1 \right)$$

Το $0 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει (αφού είναι και γν. αύξουσα στο A_2) μοναδική ρίζα στο $A_2 = (-2, 0)$.

- ♦ Αν $x \in A_3 = [0, 1]$, τότε :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = \frac{7}{12} \\ f \text{ συνεχής και γν.φθίνουσα στο } A_3 \end{array} \right\} \text{ Άρα } f(A_3) = \left[\frac{7}{12}, 1 \right]$$

Το $0 \notin f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_3 .

- ♦ Αν $x \in A_4 = (1, +\infty)$, τότε :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{7}{12} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \\ f \text{ συνεχής και γν.αύξουσα στο } A_4 \end{array} \right\} \text{ Άρα } f(A_4) = \left(\frac{7}{12}, +\infty \right)$$

Το $0 \notin f(A_4)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_4 .

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες μια στο διάστημα $(-\infty, -2)$ και μια στο $(-2, 0)$ δηλαδή και οι δύο είναι αρνητικές.

Παρατηρήσεις 2

- ♦ Από τον πίνακα με τα διαστήματα μονοτονίας της f συμπληρωμένο με τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα αυτών των διαστημάτων (αν είναι κλειστά) ή τα όρια (αν είναι ανοιχτά), μπορούμε να βρούμε το πλήθος των ριζών της f καθώς και ένα διάστημα στο οποίο ανήκει κάθε μια ρίζα της.
- ♦ Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε :

x	$-\infty$	ρ_1	-2	ρ_2	0	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	0	$-5/3$	0	1	$7/12$	$+\infty$

Διαπιστώνουμε ότι :

- στο $(-\infty, -2)$ έχουμε μια μοναδική (λόγω μονοτονίας) ρίζα αφού η f ξεκινάει από το $+\infty$ για να καταλήξει σε αρνητική τιμή (το $-5/3$).

Άρα η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με σύνολο τιμών (όπως κάναμε στην άσκηση) αλλά και με

Θ. Bolzano αφού : $f(-3) = \frac{39}{12} > 0$ και $f(-2) = \frac{-5}{3} < 0$

- στο $(-2, 0)$ έχουμε επίσης ρίζα αφού η f ξεκινάει με αρνητική τιμή (το $-5/3$) και καταλήγει σε θετική (το 1). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί και με Θ. Bolzano αφού :

$$f(-2) = \frac{-5}{3} < 0 \text{ και } f(0) = 1 > 0$$

- στο $(0, 1)$ δεν υπάρχει ρίζα αφού η f ξεκινάει από τη θετική τιμή 1, είναι γνησίως φθίνουσα και καταλήγει στην επίσης θετική τιμή $7/12$. Το σύνολο τιμών της f στο διάστημα αυτό είναι η καλύτερη απόδειξη ότι δεν έχει ρίζα.
- στο $(1, +\infty)$ επίσης δεν υπάρχει ρίζα αφού η f ξεκινάει από τη θετική τιμή $7/12$, είναι γνησίως αύξουσα και πηγαίνει στο $+\infty$.

305. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^3 + 3x^2 + 1 - \alpha = 0$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $2x^3 + 3x^2 + 1 = \alpha$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(x) = \alpha$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $g'(x) = 6x^2 + 6x$. Είναι :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ή } x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 0]$. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

Οπότε :

♦ Αν $x \in A_1 = (-\infty, -1]$ τότε αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 , θα είναι

$$g(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] = (-\infty, 2]$$

♦ Αν $x \in A_2 = (-1, 0)$ τότε αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 θα είναι

$$g(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \right) = (1, 2)$$

♦ Αν $x \in A_3 = [0, +\infty)$ τότε αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο A_3 τότε

$$g(A_3) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [1, +\infty)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

❖ Αν $\alpha < 1$ τότε $\alpha \in g(A_1) = (-\infty, 2]$, $\alpha \notin g(A_2)$, $\alpha \notin g(A_3)$

Άρα υπάρχει $x_0 \in A_1 = (-\infty, -1]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = \alpha$ δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ στο A_1 η οποία είναι μοναδική στο A_1 αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1 - 1» στο A_1 .

Επειδή $\alpha \notin g(A_2)$ και $\alpha \notin g(A_3)$ η εξίσωση $g(x) = \alpha$ δεν έχει άλλη ρίζα.

❖ Αν $\alpha = 1$ τότε $\alpha = 1 \in g(A_1)$, $\alpha = 1 \notin g(A_2)$, $\alpha = 1 \in g(A_3)$

Λόγω μονοτονίας η εξίσωση $g(x) = \alpha$ έχει δύο ακριβώς ρίζες μια στο

$$A_1 = (-\infty, -1] \text{ και μια στο } A_3 = [0, +\infty)$$

❖ Αν $1 < \alpha < 2$ τότε $\alpha \in g(A_1)$, $\alpha \in g(A_2)$, $\alpha \in g(A_3)$

Άρα η εξίσωση $g(x) = \alpha$, λόγω και της μονοτονίας της g έχει τρεις ακριβώς ρίζες μια στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$, μια στο $A_2 = (-1, 0)$ και μια στο $A_3 = [0, +\infty)$.

❖ Αν $\alpha = 2$ τότε $\alpha = 2 \in g(A_1)$, $\alpha = 2 \notin g(A_2)$, $\alpha = 2 \in g(A_3)$

Άρα η εξίσωση $g(x) = \alpha$ λόγω και της μονοτονίας της g έχει δύο ακριβώς ρίζες μια στο $A_1 = (-\infty, -1]$ και μια στο $A_3 = [0, +\infty)$.

❖ Αν $\alpha > 2$ τότε $\alpha \notin g(A_1)$, $\alpha \notin g(A_2)$, $\alpha \in g(A_3)$

Άρα η εξίσωση $g(x) = \alpha$ λόγω και της μονοτονίας της g έχει μια μόνο ρίζα στο $A_3 = [0, +\infty)$.

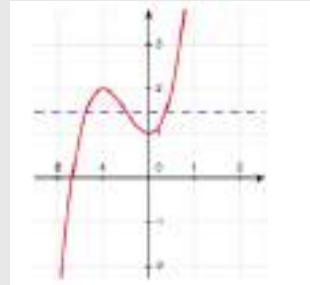
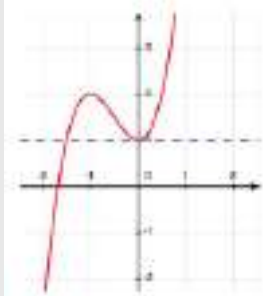
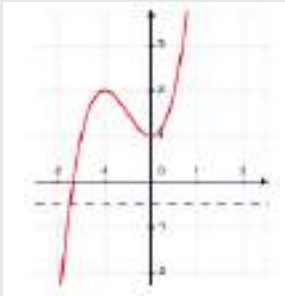
Επομένως η εξίσωση $2x^3 + 3x^2 + 1 - \alpha = 0$ έχει

- μια ρίζα όταν $\alpha < 1$ ή $\alpha > 2$
- δύο ρίζες όταν $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$
- τρεις ρίζες όταν $1 < \alpha < 2$.

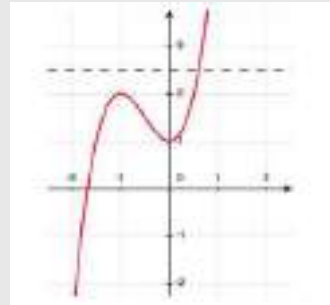
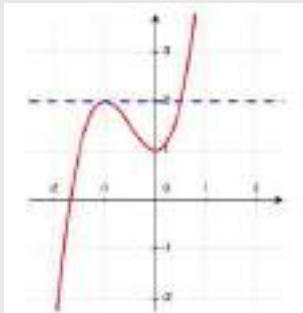
Παρατηρήσεις

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ είναι όσα και τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g και της οριζόντιας ευθείας $y = \alpha$. Οπότε :

- Αν $a < 1$ η εξίσωση $g(x) = a$ έχει μια μόνο ρίζα αφού η $y = a$ τέμνει την C_g σε ένα μόνο σημείο.
- Αν $a = 1$ η εξίσωση $g(x) = a$ έχει δύο ακριβώς ρίζες αφού η $y = 1$ έχει με την C_g δύο κοινά σημεία.
- Αν $1 < a < 2$ η εξίσωση $g(x) = a$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες αφού η $y = a$ τέμνει την C_g σε τρία σημεία.



- Αν $a = 2$ η εξίσωση $g(x) = a$ έχει δύο ακριβώς ρίζες αφού η $y = 2$ έχει με την C_g δύο κοινά σημεία.
- Αν $a > 2$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα αφού η $y = a$ τέμνει την C_g σε ένα μόνο σημείο.



306. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{3} \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$.

Λύση

Η f είναι **συνεχής** στο **κλειστό** διάστημα $\Delta = [0, \pi]$.

Επομένως παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ άρα τα κρίσιμα σημεία της είναι τα σημεία του $(0, \pi)$ στα οποία η $f'(x)$ είναι ίση με μηδέν.

Έχουμε :

$$f'(x) = 2\eta\mu x \cos x - \sqrt{3} \cos x = \cos x (2\eta\mu x - \sqrt{3})$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ και στα άκρα 0 και π .

Είναι :

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu^2 \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu^2 \frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 - \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu^2 \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\eta\mu \frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{4}, \quad f(\pi) = 0$$

Η μικρότερη από τις παραπάνω τιμές είναι το $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$ που είναι το ελάχιστο της f και η μεγαλύτερη το $f(0) = f(\pi) = 0$ που είναι το μέγιστο της f .

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\Delta) = \left[-\frac{3}{4}, 0\right]$.

Παρατήρηση 1

Είναι $1 - \sqrt{3} > -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{4} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{7}{4} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{49}{16} > 3 \Leftrightarrow 49 > 48$, που ισχύει.

Μεθοδολογία

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$** , τότε παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής :

1^ο. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .

2^ο. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.

3^ο. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο

Παρατήρηση 2

Αφού η f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα, έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της χρειαζόμαστε μόνο τα ολικά της ακρότατα, τα οποία μπορούμε να βρούμε (όπως περιγράψαμε) και χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της f , η οποία πάντως μπορεί να βρεθεί όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π			
$\sigma\upsilon\nu x$		+	+	0	-	-		
$2\eta\mu x - \sqrt{3}$		-	0	+	+	0	-	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$-3/4$	$1-\sqrt{3}$	$-3/4$	0			

Τα παραπάνω όμως θα ήταν απαραίτητα αν μας ζητούσαν να μελετήσουμε την f ως προς τα ακρότατά της.

307. Έστω συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$f(1) = -2, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 6 \quad \text{και} \quad f(5) = 4$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 4) \cup (4, 5)$ και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 3$, τότε :

- i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο τα οποία και να προσδιορίσετε.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση ενώ η εξίσωση $f(x) = 7$ είναι αδύνατη.

Λύση

i. Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $A = [1, 5]$ θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο.

Οι θέσεις των πιθανών ακροτάτων είναι

- ♦ Τα κρίσιμα σημεία της f , που είναι
 - Το 3 (εσωτερικό σημείο και (μοναδική) ρίζα της παραγώγου)
 - Το 4 (εσωτερικό σημείο στο οποίο η f δεν είναι παραγωγίσιμη)
- ♦ Τα άκρα του διαστήματος $[1, 5]$ δηλαδή το 1 και το 5

$$\text{Είναι } f(1) = -2, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 6 \quad \text{και} \quad f(5) = 4$$

Η μικρότερη από τις παραπάνω τιμές είναι το $f(1) = -2$ που είναι και το ολικό ελάχιστο της f και η μεγαλύτερη είναι το $f(4) = 6$ που είναι το ολικό μέγιστο της f .

- ii. Λόγω α) ερωτήματος η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f([1, 5]) = [-2, 6]$
 Το $0 \in f(A)$ άρα υπάρχει $x_1 \in A = [1, 5]$ ώστε $f(x_1) = 0$.
 Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο A .
 Το $7 \notin f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 7$ δεν έχει λύση στο A .

Εύρεση προσήμου συνάρτησης.

308. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων

- i. $f(x) = \ln x + 2x - \frac{1}{x} - 1$
- ii. $f(x) = 1 - 2x - \sin x$
- iii. $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$
- iv. $f(x) = x - x \ln x - 1$

Λύση

i. Η $f(x) = \ln x + 2x - \frac{1}{x} - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι

παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} + 2 + \frac{1}{x^2}$

Έχουμε:

♦ **Μονοτονία της f**

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ έπεται ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$.

♦ **Ρίζα της f** $f(1) = \ln 1 + 2 - 1 - 1 = 0$

Οπότε:

- Αν $0 < x < 1$ τότε $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Αν $x > 1$ τότε $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Τα παραπάνω περιγράφονται από τον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

ii. Η $f(x) = 1 - 2x - \sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = -2 + \eta\mu x$

Εχουμε:

♦ **Μονοτονία της f**

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -2 + \eta\mu x \leq -1 < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = \mathbb{R}$.

♦ **Ρίζα της f**

Είναι $f(0) = 1 - 2 \cdot 0 - \sin 0 = 1 - 1 = 0$. Οπότε:

- Αν $x < 0$ τότε $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Αν $x > 0$ τότε $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

Παρατήρηση

Τα παραπάνω περιγράφονται από τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

iii. Η $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 2e^{2x} - 2$

♦ **Μονοτονία της f**

Είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 2 < 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

♦ **Ρίζα της f**

Είναι: $f(0) = e^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Επομένως

- Αν $x < 0$ τότε $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Αν $x > 0$ τότε $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$

Παρατήρηση

Τα παραπάνω περιγράφονται από τον

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

iv. Η $f(x) = x - x \ln x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη

σ' αυτό (αρα και συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 1 - (\ln x + x \frac{1}{x}) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

♦ Μονοτονία της f

Είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

♦ Ρίζα της f

Είναι: $f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Επομένως

• Αν $0 < x < 1$ τότε $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

• Αν $x > 1$ τότε $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Παρατηρήσεις

Τα παραπάνω περιγράφονται από τον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Μεθοδολογία

Η γνώση της μονοτονίας και των ριζών μιας συνάρτησης f μας επιτρέπει την αναγνώριση του προσήμου της. Πιο συγκεκριμένα :

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και μηδενίζεται στο $x = a$, τότε είναι αρνητική αριστερά του a και θετική δεξιά του a .

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενίζεται στο $x = a$, τότε είναι θετική αριστερά και αρνητική δεξιά του a .

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

- ♦ Αν μια συνάρτηση μηδενίζεται στο $x = a$ και
- $$\left. \begin{array}{l} f \text{ γν. φθίνουσα αριστερά του } a \\ f \text{ γν. αύξουσα δεξιά του } a \end{array} \right\} \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ για } x \neq a$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

- ♦ Αν μια συνάρτηση μηδενίζεται στο $x = a$ και

f γν. αύξουσα αριστερά του a } τότε $f(x) < 0$ για $x \neq a$
 f γν. φθίνουσα δεξιά του a }

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτουν με εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας για $x < a$ και $x > a$.

309. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Αν υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ να βρείτε το πρόσημο της f .

Λύση

Επειδή για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι $f''(x) > 0$ έπεται ότι η f' είναι γν. αύξουσα στο (a, β) .

- ♦ Αν $a < x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.
Οπότε αφού η f είναι συνεχής στο $(a, x_0]$ θα είναι γν. φθίνουσα στο $(a, x_0]$.
 - ♦ Αν $x_0 < x < \beta$ είναι $f'(x_0) < f'(x) \Leftrightarrow 0 < f'(x)$.
Οπότε αφού η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta)$ θα είναι γν. αύξουσα στο $[x_0, \beta)$.
Επομένως :
 - ♦ Αν $a < x < x_0$ τότε $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
 - ♦ Αν $x_0 < x < \beta$ τότε $f(x_0) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Παρατήρηση

Όλα προκύπτουν εύκολα αν κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	a	x_0	β
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	+	0	+

310. Έστω μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Αν $f(a) = f(\beta) = 0$ να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα (a, β) .

Λύση

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ η f' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[a, \beta]$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ άρα και συνεχής, και $f(a) = f(\beta)$.

Επομένως ισχύει για την f το **Θ. Rolle** στο $[a, \beta]$ και συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.
Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα (άρα και $f'' > 0$) το ξ θα είναι μοναδικό.
Έχουμε:

- ♦ Αν $a \leq x < \xi$ τότε $f'(x) < f'(\xi) \stackrel{f'(\xi)=0}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[a, \xi]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a, \xi]$.
- ♦ Αν $\xi < x \leq \beta$ τότε $f'(\xi) < f'(x) \stackrel{f'(\xi)=0}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0$ και αφού η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[\xi, \beta]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi, \beta]$.

Οπότε:

- ♦ Αν $a < x \leq \xi$ τότε $f(a) > f(x) \stackrel{f(a)=0}{\Leftrightarrow} f(x) < 0$
- ♦ Αν $\xi \leq x < \beta$ τότε $f(x) < f(\beta) \stackrel{f(\beta)=0}{\Leftrightarrow} f(x) < 0$

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$

Παρατήρηση

Όλα προκύπτουν εύκολα αν κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	a	ξ	β
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-	0

Όταν για την εύρεση της μονοτονίας μιας f απαιτείται η $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$

311. Να μελετήσετε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = x^2 + x - \eta \mu x + 1$

ii. $f(x) = 2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x$

Λύση

- i. Η $f(x) = x^2 + x - \eta \mu x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (άρα είναι συνεχής) με παράγωγο $f'(x) = 2x + 1 - \sigma \nu x$. Επειδή δεν είναι εύκολη η αναγνώριση του προσήμου της f' συνεχίζουμε την παραγωγή. Έχουμε: $f''(x) = 2 + \eta \mu x$

Είναι: $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού $-1 \leq \eta \mu x \leq 1$)

Επομένως

- η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- $f'(0) = 2 \cdot 0 + 1 - \sigma \nu 0 = 1 - 1 = 0$.

Οπότε:

- ♦ Αν $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

- ♦ Αν $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
 Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Μεθοδολογία

Αν δεν είναι εύκολο να βρεθεί απ' ευθείας το πρόσημο της f' τότε πολλές φορές ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία :

- ♦ Βρίσκουμε την f'' (ή και την $f^{(3)}$) και το πρόσημο αυτής, οπότε γνωρίζουμε τη μονοτονία της f' (της f'')
 ♦ Βρίσκουμε τις ρίζες της f' (συνήθως προφανείς). Η γνώση της μονοτονίας και των ριζών της f' επιτρέπει την αναγνώριση του προσήμου της.
 Αυτό επιτυγχάνεται με εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας της f' για $x < \rho$ και $x > \rho$, όπου ρ : ρίζα της f'

Παρατήρηση

Όλα προκύπτουν εύκολα αν κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

- ii. Η $f(x) = 2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσμη σ αυτό (άρα και συνεχής) με παράγωγο

$$f'(x) = 4x \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} - 6x + 4 = 4x \ln x + 2x - 6x + 4 = 4x \ln x - 4x + 4$$

Επειδή το πρόσημο της f' δεν είναι εύκολα αναγνωρίσιμο συνεχίζουμε την

Παραγωγή. Έχουμε: $f''(x) = 4 \ln x + 4x \cdot \frac{1}{x} - 4 = 4 \ln x + 4 - 4 = 4 \ln x$.

Είναι:

α' τρόπος:

- ♦ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- ♦ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4 \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- ♦ $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 4 \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Άρα

- ♦ Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- ♦ $f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$

Επομένως

- ♦ Αν $0 < x < 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
 Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$
- ♦ Αν $x > 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
 Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$

Παρατήρηση

Όλα προκύπτουν εύκολα αν κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$			

β' τρόπος:

Συνεχίζουμε την παραγωγή

$$f^{(3)}(x) = (4\ln x)' = \frac{4}{x} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Οπότε

- ♦ Η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και
- ♦ $f''(1) = 4\ln 1 = 0$

Επομένως

- Αν $0 < x < 1$ τότε $f''(x) < f''(1) \Leftrightarrow f''(x) < 0$
άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$
- Αν $x > 1$ τότε $f''(x) > f''(1) \Leftrightarrow f''(x) > 0$
άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Επειδή είναι $f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$ έχουμε

- Αν $0 < x < 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$
- Αν $x > 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$

Παρατήρηση

Όλα προκύπτουν εύκολα αν κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	0	1	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	+		+
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

312. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$f'(x) + x^2 + 2x + 2 = g'(x) + 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(0) = g(0)$ να αποδείξετε ότι :

i. οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

ii. οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Λύση

i. Είναι $f'(x) + x^2 + 2x + 2 = g'(x) + 2e^x \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

♦ Η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα την $x = 0$, αφού $h(0) = f(0) - g(0) = 0$.

Άρα οι C_f , C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (με τετμημένη 0).

♦ Είναι : $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$

$$h''(x) = 2e^x - 2x - 2$$

$$h^{(3)}(x) = 2e^x - 2$$

$$h^{(4)}(x) = 2e^x > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

• άρα $h^{(3)}$: γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε :

$$x < 0 \Leftrightarrow h^{(3)}(x) < h^{(3)}(0) \Leftrightarrow h^{(3)}(x) < 0 \quad \text{άρα } h'' \text{ γν. φθίνουσα στο } (-\infty, 0]$$

$$x > 0 \Leftrightarrow h^{(3)}(x) > h^{(3)}(0) \Leftrightarrow h^{(3)}(x) > 0 \quad \text{άρα } h'' \text{ γν. αύξουσα στο } [0, +\infty)$$

• $x < 0 \Leftrightarrow h''(x) > h''(0) \Leftrightarrow h''(x) > 0$ άρα h' γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

$$x > 0 \Leftrightarrow h''(x) > h''(0) \Leftrightarrow h''(x) > 0 \quad \text{άρα } h' \text{ γν. αύξουσα στο } [0, +\infty)$$

• $x < 0 \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \Leftrightarrow h'(x) < 0$ άρα h γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

$$x > 0 \Leftrightarrow h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0 \quad \text{άρα } h \text{ γν. αύξουσα στο } [0, +\infty)$$

• $x < 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

$$x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$$

Άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$,

συνεπώς οι C_f , C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Παράτηρηση

Όλα προκύπτουν εύκολα αν κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h^{(4)}(x)$	+		+
$h^{(3)}(x)$	- $\nearrow$	0	$\searrow$ +
$h''(x)$	+ $\searrow$	0	$\nearrow$ +
$h'(x)$	- $\nearrow$	0	$\searrow$ +
$h(x)$	+ $\searrow$	0	$\nearrow$ +

ii. Για $x = 0$ η δοσμένη σχέση δίνει : $f'(0) + 2 = g'(0) + 2 \Leftrightarrow f'(0) = g'(0)$

που σημαίνει ότι οι C_f και C_g έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη.

Εύρεση μονοτονίας με χρήση βοηθητικής συνάρτησης.

313. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x - 1}.$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Αν $1 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\beta} - \frac{\ln \beta}{\alpha}$.

Λύση

- i. Πρέπει $x > 0$ και $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Άρα $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x \ln x)'(x - 1) - x \ln x(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x - 1) - x \ln x}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x \ln x - \ln x + x - 1 - x \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Θέτουμε $g(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$

Είναι :

- $g(1) = 0$
- $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$, $x > 0$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

Οπότε :

- ♦ Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$, επομένως για κάθε $0 < x < 1$ είναι

$$g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0.$$

- ♦ Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ επομένως για κάθε $x > 1$ είναι

$$g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0.$$

Άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\text{Οπότε : } f'(x) = \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(x - 1)^2} > 0, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Μεθοδολογία

Αν η παράγωγος f' έχει ή παίρνει τη μορφή $\frac{g(x)}{h(x)}$

και το πρόσημο του παρονομαστή $h(x)$ είναι γνωστό, τότε μελετάμε τη συνάρτηση του αριθμητή $g(x)$ (**βοηθητική συνάρτηση**) της οποίας βρίσκουμε το πρόσημο.

iii. Προσπαθούμε αρχικά να βρούμε τι σχέση έχει η δοσμένη ανισότητα με την f . Η ανισότητα γράφεται :

$$\begin{aligned} \ln \frac{\alpha}{\beta} &< \frac{\ln \alpha}{\beta} - \frac{\ln \beta}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \ln \alpha - \ln \beta &< \frac{\alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta}{\alpha \beta} \quad \alpha \beta > 0 \\ \Leftrightarrow \alpha \beta (\ln \alpha - \ln \beta) &< \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta \\ \Leftrightarrow \alpha \beta \ln \alpha - \alpha \beta \ln \beta &< \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta \\ \Leftrightarrow \alpha \beta \ln \alpha - \alpha \ln \alpha &< \alpha \beta \ln \beta - \beta \ln \beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha (\beta - 1) &< \beta \ln \beta (\alpha - 1) \quad \begin{matrix} \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \\ \beta > 1 \Leftrightarrow \beta - 1 > 0 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1} &< \frac{\beta \ln \beta}{\beta - 1} \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \quad (1) \end{aligned}$$

Είναι • $1 < \alpha < \beta$ και

• f γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Άρα $f(\alpha) < f(\beta)$.

Ισχύει λοιπόν η σχέση (1) άρα θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Παρατηρήσεις

♦ Αν πρόκειται να εφαρμόσουμε τον ορισμό της μονοτονίας μιας συνάρτησης f στην ανισότητα $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$ πρέπει τα α και β να βρίσκονται στο ίδιο διάστημα μονοτονίας της f .

♦ Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(0,1)$ η σχέση $\ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\beta} - \frac{\ln \beta}{\alpha}$ ισχύει και για κάθε $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Απόδειξη ανισοτήτων.

314. Να αποδείξετε ότι :

i. $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x > 0$ **ii.** $e^x > x + \frac{x^3}{3}$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με :

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1-x-1+x^2+x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

Είναι : • $h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

• h συνεχής στο $[0, +\infty)$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Οπότε :

$$\text{Για } x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$$

Μεθοδολογία

Μια ασφαλής και παραγωγική μέθοδος για την απόδειξη ανισοτήτων της μορφής

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

είναι η εξής :

- Θεωρούμε τη διαφορά των συναρτήσεων f και g δηλαδή τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in A \subseteq \Delta$$

και βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της

- Ξεκινώντας από τους περιορισμούς του x κάνουμε χρήση του ορισμού της μονοτονίας.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x) = \varepsilon \phi x - x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με : $h'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 - x^2$

Επειδή το πρόσημο της h' δεν είναι φανερό συνεχίζουμε την παραγωγή.

Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με :

$$h''(x) = \frac{2\sin x \eta \mu x}{\sin^4 x} - 2x = \frac{2\eta \mu x}{\sin^3 x} - 2x$$

Η h είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με :

$$\begin{aligned} h^{(3)}(x) &= \frac{2\sin x \sin^3 x - 2\eta \mu x 3\sin^2 x (-\eta \mu x)}{\sin^6 x} - 2 = \frac{2\sin^4 x + 6\eta \mu^2 x \sin^2 x}{\sin^6 x} - 2 \\ &= \frac{2\sin^2 x + 6\eta \mu^2 x}{\sin^4 x} - 2 = \frac{2\sin^2 x + 6\eta \mu^2 x - 2\sin^4 x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{2\sin^2 x + 6(1 - \sin^2 x) - 2\sin^4 x}{\sin^4 x} = \frac{6 - 4\sin^2 x - 2\sin^4 x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{-2(\sin^4 x + 2\sin^2 x - 3)}{\sin^4 x} = \frac{-2(\sin^2 x + 3)(\sin^2 x - 1)}{\sin^4 x} \\ &= \frac{2(\sin^2 x + 3)(1 - \sin^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{2(\sin^2 x + 3)\eta \mu^2 x}{\sin^4 x} \end{aligned}$$

Είναι $h^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

♦ Άρα η h'' είναι γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $h''(0) < h''(x) \Leftrightarrow 0 < h''(x)$

♦ Άρα η h' είναι γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $h'(0) < h'(x) \Leftrightarrow 0 < h'(x)$

♦ Άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $h(0) < h(x) \Leftrightarrow 0 < \varepsilon\phi x - x - \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x > x + \frac{x^3}{3}$

Παρατηρήσεις

• Είναι $\sin^4 x + 2\sin^2 x - 3 \stackrel{\sin^2 x = \omega}{=} \omega^2 + 2\omega - 3 = (\omega+3)(\omega-1) = (\sin^2 x + 3)(\sin^2 x - 1)$.

♦ Αν και η ζητούμενη ανισότητα στο α) της εφαρμογής ζητείται να ισχύει για $x > 0$, θεωρήσαμε ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης h το $[0, +\infty)$ ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $h(0) = 0$.

Ομοίως στο β) της εφαρμογής ενώ η ανισότητα ζητείται να ισχύει στο ανοιχτό $(0, \frac{\pi}{2})$,

θεωρήσαμε για την h ως πεδίο ορισμού το **κλειστό στο 0** διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$. (Το $\frac{\pi}{2}$ δεν μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της h λόγω της $\varepsilon\phi x$ που υπάρχει στον τύπο της)

• Αν το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$ (και κατά συνέπεια η μονοτονία της h) δεν είναι φανερό πολλές φορές συνεχίζουμε την παραγωγή μέχρι να βρούμε το πρόσημο της $h''(x)$, $h^{(3)}(x)$, ... και μετά ακολουθούμε την αντίστροφη πορεία.

315. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{e}{x}\right)^x \leq e$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$			T.E. e	

απ' όπου προκύπτει ότι :

- ♦ Η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $[1, +\infty)$
 - ♦ Η f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
 - ♦ Η f παρουσιάζει στο σημείο $x=1$ τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = e$.
- ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο το $f(1) = e$. Άρα για κάθε $x > 0$ θα ισχύει :

$$f(x) \geq e \Leftrightarrow xe^x \geq e \Leftrightarrow e^x \geq \frac{e}{x} \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln\left(\frac{e}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln e \geq \ln\left(\frac{e}{x}\right) \Leftrightarrow \ln e \geq x \cdot \ln\left(\frac{e}{x}\right) \Leftrightarrow \ln e \geq \ln\left(\frac{e}{x}\right)^x \Leftrightarrow e \geq \left(\frac{e}{x}\right)^x$$

Παρατηρήσεις

Αν και η f παρουσιάζει στο $\mathbb{R}^*$ μόνο ένα τοπικό ακρότατο (ελάχιστο) το $f(1) = e$, αυτό δεν είναι και ολικό ελάχιστο γιατί η f παίρνει και μικρότερες του e τιμές αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Αν όμως περιορίσουμε την f στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ τότε, στο Δ , η f έχει το $f(1) = e$ ολικό ελάχιστο.

316. Να αποδείξετε ότι

$$\sin x \cdot \ln \frac{\sin x}{e} \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Λύση

Η ανίσωση γράφεται :

$$\sin x \cdot \ln \frac{\sin x}{e} \geq -1 \Leftrightarrow \sin x \cdot (\ln(\sin x) - \ln e) \geq -1 \Leftrightarrow \sin x \cdot \ln(\sin x) - \sin x + 1 \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x) = \sin x \cdot \ln(\sin x) - \sin x + 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Η f είναι παραγωγίσιμη με :

$$f'(x) = -\eta_{\mu x} \cdot \ln(\sin x) + \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} (\sin x)' - \eta_{\mu x} = -\eta_{\mu x} \cdot \ln(\sin x) - \eta_{\mu x} + \eta_{\mu x}$$

$$= -\eta\mu x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x) \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \text{ ή } \ln(\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=0 \Leftrightarrow x=0$$

Είναι : • $\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

• $\ln(\sigma\upsilon\nu x) > 0 \Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x) > \ln 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > 1$ αδύνατη

$$\ln(\sigma\upsilon\nu x) < 0 \Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x) < \ln 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < 1 \text{ ισχύει για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$-\eta\mu x$	+	0	-
$\ln(\sigma\upsilon\nu x)$	-		-
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		Ελάχιστο 0	

Άρα η f παρουσιάζει στο $x=0$ (ολικό) ελάχιστο το $f(0)=0$.

Επομένως : $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \sigma\upsilon\nu x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \geq -1, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Η ανίσωση μπορούσε να αποδειχθεί και στηριζόμενοι στη μονοτονία της f ως εξής :

• Αν $x < 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) > f(0) = 0$
f γν.φθίνουσα

• Αν $x \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) \geq f(0) = 0$
f γν.αύξουσα

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Αν όμως η f έχει (ολικό) ακρότατο είναι προτιμότερο να στηριχθούμε σ' αυτό, οπότε :

- Αν $f(x_0)$ (ολικό) μέγιστο στο Δ τότε : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$
- Αν $f(x_0)$ (ολικό) ελάχιστο στο Δ τότε : $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$

317. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -e^x + x$ και $g(x) = x^3 + 6x^2$.

Να αποδείξετε ότι, αν $x \in [-1, 2]$ τότε $f(x) < g(x)$.

Λύση

α' τρόπος

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 2]$ με $f'(x) = -e^x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -e^x + 1 < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

x	-1	0	2
f'(x)	+	0	-
f(x)			

Άρα η f στο $[-1, 2]$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(0) = -1$

Επομένως είναι $f(x) \leq -1$ για κάθε $x \in [-1, 2]$

- ♦ Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 2]$ με $g'(x) = 3x^2 + 12x$
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -4$

x	-1	0	2
g'(x)	-	0	+
g(x)			

Άρα η g στο $[-1, 2]$ παρουσιάζει ελάχιστο το $g(0) = 0$

Επομένως είναι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 2]$

Συνεπώς για κάθε $x \in [-1, 2]$ έχουμε: $f(x) \leq -1 < 0 \leq g(x)$

Άρα **$f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [-1, 2]$**

β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x) = x^3 + 6x^2 + e^x - x$, $x \in [-1, 2]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 3x^2 + 12x - 1 + e^x$

Επειδή το πρόσημο της $h'(x)$ δεν είναι φανερό προχωράμε σε δεύτερη παράγωγο.

Είναι: $h''(x) = 6x + 12 + e^x$

Για κάθε $-1 \leq x \leq 2$ είναι $-6 \leq 6x \leq 12 \Leftrightarrow 6 \leq 6x + 12 \leq 24$

Άρα $h''(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 2]$

Οπότε h' γν. αύξουσα και παρατηρούμε ότι $h'(0) = 0$. Έχουμε:

- Για $-1 \leq x < 0$ είναι $h'(x) < h'(0) \Leftrightarrow h'(x) < 0$
- Για $0 < x \leq 2$ είναι $h'(0) < h'(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0$

Επομένως:

x	-1	0	2
h'(x)	-	0	+
h(x)			

Άρα η h έχει στο $[-1, 2]$ ελάχιστο το $h(0) = 1$. Συνεπώς $h(x) \geq 1 > 0$

άρα $g(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [-1, 2]$

318. Να αποδείξετε ότι :

i. $x+1 > e^{\frac{2x}{x+2}}$, για κάθε $x > 0$ **ii.** $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} > 0$, για κάθε $x > 1$

Λύση

i. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$x+1 > e^{\frac{2x}{x+2}} \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln e^{\frac{2x}{x+2}} \Leftrightarrow \ln(x+1) > \frac{2x}{x+2} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$, $x \in [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 4 - 4x - 4}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (αφού η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$)

Οπότε για $x > 0$ είναι : $h(x) > h(0) \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+1 > e^{\frac{2x}{x+2}}$

Παρατήρηση

Τονίζουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις μετασχηματίζουμε πρώτα τη δοσμένη ανισότητα (π.χ. λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη ή διαιρώντας και τα δύο μέλη με κατάλληλο θετικό όρο) σε μια ισοδύναμη ανισότητα και στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση της διαφοράς.

Με τον τρόπο αυτό η παραγωγή διευκολύνεται και η όλη μελέτη γίνεται απλούστερη.

Στη συγκεκριμένη άσκηση πολύ δύσκολα θα καταλήγαμε στο ζητούμενο αν

χρησιμοποιούσαμε την συνάρτηση : $h(x) = x+1 - e^{\frac{2x}{x+2}}$, $x \geq 0$ ή την $h(x) = (x+2)\ln(x+1) - 2x$, $x \geq 0$

ii. α' τρόπος

Η ανισότητα διαδοχικά γράφεται :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} > 0 &\Leftrightarrow \ln \frac{x-1}{x} > -\frac{1}{x-1} \\ \Leftrightarrow \ln(x-1) - \ln x > -\frac{1}{x-1} &\Leftrightarrow \ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1} \quad (1) \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της (1) θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $t > 0$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[x-1, x]$ για κάθε $x > 1$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x-1, x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln x - \ln(x-1) \quad (2)$$

Όμως για κάθε $x > 1$ είναι :

$$x-1 < \xi < x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x-1} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Άρα } \ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} > 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Σε αρκετές περιπτώσεις με χρήση του Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα αποδεικνύεται συντομότερα η ζητούμενη ανισότητα.

β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}, \quad x \in (1, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{x(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$.

Άρα η h είναι γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} \right] = 0$$

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$		0

Επειδή η h είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ και λόγω της μονοτονίας συμπεραίνουμε ότι

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} > 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

319. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$.

Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η

συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left[f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right] \quad (1), \quad x > 0$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ άρα από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad (2)$$

Όμως $0 < \xi < x$ οπότε $f'(\xi) < f'(x)$ αφού f' γν. αύξουσα.

Επομένως λόγω της (2) έχουμε : $\frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x} > 0$

Οπότε από (1) είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η g είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Αν δινόταν ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ (οπότε f' γν. αύξουσα) τότε μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η g είναι γν. αύξουσα αν θεωρούσαμε τη συνάρτηση

$$h(x) = xf'(x) - f(x), \quad x \geq 0$$

με : $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Οπότε η h είναι γν. αύξουσα και συνεπώς :

$$x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

320. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $[1, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει $f(1) = g(1)$ και $f'(x)x - f(x) < x^2 g'(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι $f(x) < xg(x)$ για κάθε $x > 1$.

Λύση

Η δοθείσα σχέση για κάθε $x \geq 1$, διαδοχικά γίνεται :

$$\begin{aligned} f'(x)x - f(x) < x^2 g'(x) &\Leftrightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} < g'(x) \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' - g'(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} - g(x) \right)' < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} - g(x), \quad x \in [1, +\infty)$

Λόγω της (1) είναι $h'(x) < 0$ για κάθε $x \geq 1$ οπότε η h είναι γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Οπότε για κάθε $x > 1$ είναι :

$$\begin{aligned} h(x) < h(1) &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - g(x) < f(1) - g(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - g(x) < 0 \Leftrightarrow [\text{αφού } f(1) = g(1)] \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < xg(x) \quad [\text{αφού } x \geq 1 > 0] \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Τα δεδομένα της άσκησης μας οδηγούν στη συνάρτηση που πρέπει να θεωρήσουμε για να αποδείξουμε το ζητούμενο.

Ολικό μέγιστο $\leq \lambda \in \mathbb{R}$ ή Ολικό ελάχιστο $\geq \lambda \in \mathbb{R}$

321. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α , ώστε να ισχύει

$$\frac{x}{e^x} \leq \alpha \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.

Είναι

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Μέγιστο

Η f παρουσιάζει στο $x = 1$ (ολικό) μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{e}$.

Συνεπώς θα ισχύει: $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για να ισχύει $\frac{x}{e^x} \leq \alpha$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $\frac{1}{e} \leq \alpha$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$\frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e} \leq \alpha$$

Αφού $\alpha \geq \frac{1}{e}$ η ελάχιστη τιμή του α είναι $\alpha = \frac{1}{e}$.

Μεθοδολογία

Έστω μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει **μέγιστο το M** και **ελάχιστο το m** .

Επειδή τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $f(x) \leq M$ και $f(x) \geq m$

♦ Για να ισχύει $f(x) \leq \lambda$ για κάθε $x \in \Delta$ πρέπει $M \leq \lambda$ ώστε να είναι $f(x) \leq M \leq \lambda$

♦ Για να ισχύει $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in \Delta$ πρέπει $m \geq \lambda$ ώστε να είναι

$$f(x) \geq m \geq \lambda \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Εύρεση τιμών παραμέτρων, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

322. Α. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - a \ln x + \beta x - 2$. Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

B. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6ax^2 + 6ax - 1$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = 0$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .

Λύση

A. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $A = (0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x} + \beta$$

Αφού η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα (εσωτερικά σημεία του A) $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$, λόγω του **Θ. Fermat** θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \alpha + \beta = 0 \\ 8 - \frac{\alpha}{4} + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ -\alpha + 4\beta = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ -(\beta + 2) + 4\beta = -32 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ -\beta - 2 + 4\beta = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ 3\beta = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ \beta = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι $\alpha = -8$ και $\beta = -10$.

B. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $A = \mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = 6x^2 + 6ax + 6a^2 + 6a.$$

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο (εσωτερικό σημείο του A) $x_0 = 0$, λόγω του **Θ. Fermat** θα ισχύει:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 6a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow 6a(a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } a = -1$$

♦ Αν $a = 0$ τότε $f(x) = 2x^3 - 1$ οπότε $f'(x) = 6x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Συνεπώς (αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

♦ Αν $a = -1$ τότε $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6x - 1 = 2x^3 - 3x^2 - 1$, οπότε

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		T.M.		T.E.	

Απο τον πίνακα μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (τοπικό μέγιστο) στο $x_0 = 0$.

Άρα η ζητούμενη τιμή είναι η $\alpha = -1$.

Παρατήρηση

Το **Θ. Fermat** δεν ισχύει αντιστρόφως.

Δηλαδή αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 τοπικό ακρότατο τότε η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι **αναγκαία** όχι όμως και ικανή.

Επομένως αν

- από την εκφώνηση της άσκησης δεν είναι βέβαιο ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση x_0

ή

- οι τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν από την (αναγκαία) συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι περισσότερες από μία τότε πρέπει να κάνουμε επαλήθευση αντικαθιστώντας τις τιμές στην f εξακριβώνοντας ότι εκατέρωθεν του x_0 η f αλλάζει μονοτονία και συνεπώς έχουμε τοπικό ακρότατο.

323. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Να προσδιορίσετε τους α και $\beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η f έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -2 .

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{\beta \frac{1}{x} \sqrt{x} - \beta \ln x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{\beta}{\sqrt{x}} - \frac{\beta \ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{2\beta - \beta \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{\alpha x + 2\beta - \beta \ln x}{2x\sqrt{x}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Αφού το $x_0 = 1$ (εσωτερικό σημείο του A) είναι θέση τοπικού ακρότατου της f ,

από **Θ. Fermat** θα είναι : $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 0 \quad (1)$

Ακόμη είναι : $f(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha = -2$. Οπότε από **(1)** προκύπτει ότι $\beta = 1$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.

Η f δεν έχει ακρότατα

324. Α. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$f^2(x) + x^2 = 1 + 2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Β. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x) + 8f(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2} + 2017, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Λύση

A. Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \alpha$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο α) και το $x_0 = \alpha$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του **Fermat** θα ισχύει $f'(\alpha) = 0$ **(1)**

Παραγωγίζοντας τη σχέση που μας δίνεται παίρνουμε : $2f(x)f'(x) + 2x = 2f(x) + 2xf'(x)$

Η τελευταία σχέση για $x = \alpha$ δίνει :

$$2f(\alpha)f'(\alpha) + 2\alpha = 2f(\alpha) + 2\alpha f'(\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha = 2f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha \quad (2)$$

Επίσης για $x = \alpha$ η δοσμένη σχέση δίνει :

$$f^2(\alpha) + \alpha^2 = 1 + 2\alpha f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 = 1 + 2\alpha^2 \Leftrightarrow 0 = 1 \quad \text{Άτοπο}$$

Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα

B. Παραγωγίζοντας τη σχέση που μας δίνεται, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 8f'(x) = e^x + (x-1)e^x - x \Leftrightarrow f'(x)[3f^2(x) + 8] = e^x + xe^x - e^x - x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x(e^x - 1)}{3f^2(x) + 8}$$

Όμως $3f^2(x) + 8 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και :

- για $x < 0$ είναι $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$ οπότε $x(e^x - 1) > 0$.
- για $x > 0$ είναι $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$ οπότε $x(e^x - 1) > 0$.

Επομένως είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) θα είναι **γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.**

Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f , δεν έχει τοπικά ακρότατα σ' ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ τότε ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους :

♦ Θεωρούμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τοπικό ακρότατο, οπότε από **Θ. Fermat** $f'(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε **άτοπο**.

♦ Δείχνουμε ότι η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ , οπότε η f είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ και συνεπώς δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Από ανισοϊσότητα σε ισότητα με Fermat

325. Αν $a > 0$ και

$$a^x \geq \left(\frac{ax}{v} \right)^v \quad \text{για κάθε } x > 0, \text{ όπου } v \in \mathbb{N}^*,$$

να αποδείξετε ότι $a = e$.

Λύση

Είναι : $\alpha^x \geq \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v \Leftrightarrow \alpha^x - \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v \geq 0$ **(1)** για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x) = \alpha^x - \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v, \quad x > 0$

Τότε η **(1)** γράφεται : $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$

Παρατηρούμε όμως ότι $f(v) = 0$, οπότε έχουμε : $f(x) \geq f(v)$ για κάθε $x > 0$

Άρα :

- Η f παρουσιάζει στο v ελάχιστο (το $f(v) = 0$)
- Το v είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0, +\infty)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (άρα και στο v) με παράγωγο :

$$f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - v \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^{v-1} \frac{\alpha}{v} = \alpha^x \ln \alpha - \alpha \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^{v-1}$$

Οπότε σύμφωνα με το **Θεώρημα του Fermat**, είναι :

$$\begin{aligned} f'(v) = 0 &\Leftrightarrow \alpha^v \ln \alpha - \alpha \left(\frac{\alpha v}{v}\right)^{v-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha^v \ln \alpha - \alpha^v = 0 \Leftrightarrow \alpha^v (\ln \alpha - 1) = 0 \stackrel{\alpha^v > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια συναρτησιακή ανισοσύμμετρη της μορφής

$$f(x) \leq g(x) \text{ ή } f(x) \geq g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

(απαραίτητο το $\Rightarrow$) και ζητείται (έμμεσα ή άμεσα) να αποδειχθεί μια ισότητα αριθμών ή να βρεθεί η τιμή μιας παραμέτρου, τότε έχουμε ικανές ενδείξεις για να ανατρέξουμε στο **Θεώρημα του Fermat**.

Οπότε:

- ♦ Φέρνουμε όλους τους όρους στο α' μέρος και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in \Delta$$

για την οποία προφανώς θα ισχύει $h(x) \geq 0$ ή $h(x) \leq 0$.

- ♦ Βρίσκουμε σημείο x_0 εσωτερικό του Δ με $h(x_0) = 0$.

Αν τώρα η h παραγωγίζεται στο x_0 , τότε πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat στο x_0 οπότε

$$h'(x_0) = 0.$$

Η σχέση αυτή μας οδηγεί στη ζητούμενη ισότητα.

Όταν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα.

326. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) < f(a) < f(\beta) < f(x_2)$$

τότε :

- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0 = f'(\xi_2)$.
- Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο **κλειστό** διάστημα $[α, β]$. Άρα η f θα παίρνει στο $[α, β]$ μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

• Το $f(α)$ ή το $f(β)$ **δεν** μπορεί να είναι το μέγιστο της f αφού τότε θα έπρεπε να ισχύει :

$$f(x) \leq f(α) \text{ ή } f(x) \leq f(β) \text{ για κάθε } x \in [α, β] \text{ \textbf{άτοπο} , αφού υπάρχει } x_2 \in (α, β) \text{ τέτοιο ώστε : } f(x_2) > f(β) > f(α)$$

• Το $f(α)$ ή το $f(β)$ **δεν** μπορεί να είναι το ελάχιστο της f αφού τότε θα έπρεπε να ισχύει :

$$f(x) \geq f(α) \text{ ή } f(x) \geq f(β) \text{ για κάθε } x \in [α, β] \text{ \textbf{άτοπο} , αφού υπάρχει } x_1 \in (α, β) \text{ τέτοιο ώστε : } f(x_1) < f(α) < f(β)$$

• Άρα τα ακρότατα της f θα παρουσιάζονται σε εσωτερικά σημεία του $(α, β)$ έστω στα ξ_1, ξ_2 . Τότε όμως από **Θ. Fermat** (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$) θα ισχύει : **$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.**

Παρατηρήσεις

Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας f οδηγεί συνειρμικά σε Θ. Rolle για την f ή σε Θ. Bolzano για την f' .

Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε και το Θ. Fermat, ειδικά όταν από τα δεδομένα (f συνεχής σε κλειστό διάστημα) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατα

ii. Είναι $\xi_1 \neq \xi_2$ γιατί αν $\xi_1 = \xi_2$, τότε $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, δηλαδή το μέγιστο της f ταυτίζεται με το ελάχιστό της που σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο $[α, β]$, **άτοπο**, αφού

$$f(x_1) < f(α) < f(β) < f(x_2)$$

Οπότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\xi_1 < \xi_2$ και αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[α, β]$, ισχύει το **Θ. Rolle για την f'** στο $[\xi_1, \xi_2]$ και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (α, β)$ τέτοιο ώστε **$f''(\xi) = 0$.**

327. Δίνεται συνάρτηση $f : [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ και ισχύει $f'(α)f'(β) < 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Λύση

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ και συνεπώς έχει μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή.

Είναι $f'(α)f'(β) < 0$, οπότε χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω

$$f'(α) < 0 \text{ και } f'(β) > 0$$

Οπότε :

♦ $f'(α) < 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow α^+} \frac{f(x) - f(α)}{x - α} < 0$ και συνεπώς για $x > α$ και κοντά στο $α$ είναι $x - α > 0$ οπότε $f(x) - f(α) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(α)$ επομένως υπάρχει $x_1 > α$ ώστε $f(x_1) < f(α)$.

Άρα η f δεν παρουσιάζει το ελάχιστο στη θέση $α$.

- ♦ $f'(\beta) > 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} > 0$ και συνεπώς για $x < \beta$ και κοντά στο β είναι $x - \beta < 0$ οπότε $f(x) - f(\beta) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\beta)$ επομένως υπάρχει $x_2 < \beta$ ώστε $f(x_2) < f(\beta)$.

Άρα η f δεν παρουσιάζει το ελάχιστο ούτε στη θέση β .

Άρα η f παρουσιάζει **ελάχιστο** σε ένα ξ το οποίο είναι **εσωτερικό σημείο του διαστήματος (α, β)** και αφού η f είναι **παραγωγίσιμη** στο $[\alpha, \beta]$, άρα και στο ξ , από το **Θ. Fermat** προκύπτει ότι : $f'(\xi) = 0$

Όταν $m = M$ τότε η f είναι σταθερή

328. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)f'(x), \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι :

$$f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο **κλειστό** διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Άρα η f θα παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Αρκεί να δείξουμε ότι $M = m = 0$.

Τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή m η f θα παρουσιάζει :

- ♦ Στα άκρα α, β του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Αλλά $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
Οπότε $m = M = f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
- ♦ Σε εσωτερικό σημείο x_0 του $[\alpha, \beta]$, οπότε λόγω Θ. Fermat $f'(x_0) = 0$.
Αλλά $f(x_0) = (x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)f'(x_0) = 0$. Οπότε $m = M = f(x_0) = 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει : $M = m = 0$.

Παρατηρήσεις

Για να δείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σταθερή με τιμή c , αρκεί να δείξουμε ότι η ελάχιστη τιμή της m και η μέγιστη τιμή της M είναι ίσες με c .

Προβλήματα

329. Μια αεροπορική εταιρεία εκτιμά ότι αν το εισιτήριο προς μια πόλη είναι 300 €, τότε θα μεταφέρει 50.000 επιβάτες το χρόνο. Αν για κάθε αύξηση 1 €, πέρα από τα 300 €, χάνει 100 πελάτες το χρόνο, τότε :

- i. να βρείτε ποια πρέπει να είναι η τιμή του εισιτηρίου έτσι, ώστε η εταιρεία να επιτύχει **μεγιστοποίηση των εσόδων** της.
- ii. να βρείτε ποια είναι τα **μέγιστα έσοδα** της εταιρείας.

Λύση

- i.** Ας συμβολίσουμε με x την τιμή του εισητηρίου και $E(x)$ τα έσοδα που θα πραγματοποιήσει η εταιρεία.

Έχουμε :

Για $x = 300$ η εταιρεία θα έχει 50.000 πελάτες

Για $x > 300$ τότε : • $(x - 300) \text{ €}$ είναι η αύξηση του εισητηρίου.

• $(x - 300) \cdot 100$ είναι οι πελάτες που χάνει.

• $50.000 - (x - 300) \cdot 100$ είναι οι πελάτες της.

Επομένως τα έσοδα της εταιρείας θα είναι :

$$\begin{aligned} E(x) &= [50.000 - (x - 300) \cdot 100]x = (50.000 - 100x + 30.000)x = \\ &= 80.000x - 100x^2, \quad x \geq 300 \end{aligned}$$

Ζητείται το x ώστε το $E(x)$ να γίνει μέγιστο.

Είναι :

$$E'(x) = 80.000 - 200x$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 80.000 - 200x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{80.000}{200} \Leftrightarrow x = 400$$

x	300	400	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$			

Άρα για $x = 400$ (τιμή εισητηρίου) η $E(x)$ (έσοδα της εταιρείας) παρουσιάζει μέγιστο.

- ii.** Τα μέγιστα έσοδα της εταιρείας θα είναι :

$$E(400) = 80.000 \cdot 400 - 100 \cdot 400^2 = 32.000.000 - 16.000.000 = 16.000.000 \text{ €}$$

330. Σε ένα βαθμολογικό κέντρο φτάνουν 1600 γραπτά Πανελλαδικών Εξετάσεων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 2 €. Τη διόρθωση συντονίζει ένας σχολικός σύμβουλος που αμείβεται με 20 € την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών κάθε βαθμολογητής παίρνει επιπλέον ως επίδομα 40 €, ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

- i.** Να αποδείξετε ότι το κόστος $K(x)$ για τη διόρθωση όλων των γραπτών δίνεται από τη συνάρτηση :

$$K(x) = 40 \left(x + \frac{16}{x} + 160 \right)$$

όπου x ο αριθμός των διορθωτών στο βαθμολογικό κέντρο.

- ii.** Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο ;
- iii.** Να βρείτε το ελάχιστο αυτό κόστος και η συνολική διάρκεια διόρθωσης των γραπτών.

Λύση

- i. Επειδή θα διορθώσουν 1600 γραπτά από δύο φορές το καθένα, δηλαδή συνολικά 3200 γραπτά, προς 2 € το ένα, το κόστος για τη διόρθωση είναι :

$$3200 \cdot 2 = 6400 \text{ €}$$

- ♦ Η διόρθωση θα διαρκέσει $\frac{3200}{100x} = \frac{32}{x}$ ημέρες, διότι κάθε βαθμολογητής διορθώνει την ημέρα 100 γραπτά.

- ♦ Η αμοιβή του σχολικού συμβούλου είναι $\frac{32}{x} \cdot 20 = \frac{640}{x}$ ευρώ.

- ♦ Το κόστος για τα επιδόματα είναι $40x$ €, διότι υπάρχουν x βαθμολογητές που ο καθένας παίρνει επίδομα 40€.

Άρα το συνολικό κόστος για τη διόρθωση των γραπτών είναι :

$$K(x) = 6400 + \frac{640}{x} + 40x \Leftrightarrow K(x) = 40 \left(x + \frac{16}{x} + 160 \right)$$

- ii. Είναι :

♦ $K'(x) = 40 \left(1 - \frac{16}{x^2} \right) = 40 \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2}$

♦ $K'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	0	4	$+\infty$
K'(x)	-	0	+
K(x)			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι ελάχιστο κόστος έχουμε για $x = 4$.

Για να είναι λοιπόν το κόστος της διόρθωσης ελάχιστο, πρέπει να προσληφθούν **4 διορθωτές**.

- iii. Το ελάχιστο κόστος είναι : $K(4) = 40 \left(4 + \frac{16}{4} + 160 \right) = 40 \cdot 168 = \mathbf{6720 \text{ €}}$

Η διόρθωση θα διαρκέσει $\frac{32}{x} = \frac{32}{4} = \mathbf{8 \text{ ημέρες}}$.

- 331.** Σε κώνο με ύψος u και ακτίνα βάσης r , να εγγραφεί κύλινδρος με μέγιστο όγκο. Με τι ισούται ο μέγιστος αυτός όγκος ;

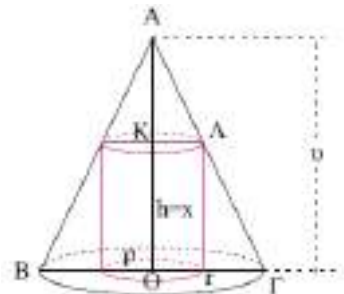
Λύση

Ο όγκος V του κυλίνδρου είναι : $V = E_{\text{βάσης}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

Πρέπει να επιλέξουμε ως μεταβλητή ένα από τα ρ ή h και να εκφράσουμε το V ως συνάρτηση αυτής της μεταβλητής.

Επιλέγουμε ως μεταβλητή το h , το οποίο συμβολίζουμε με x .

Για να εκφράσουμε όμως τον όγκο V ως συνάρτηση του x , πρέπει αρχικά να εκφράσουμε



το ρ ως συνάρτηση του x .

Τα τρίγωνα $AK\Lambda$ και $AO\Gamma$ είναι όμοια, επομένως :

$$\frac{AK}{AO} = \frac{K\Lambda}{O\Gamma} \Leftrightarrow \frac{v-x}{v} = \frac{\rho}{r} \Leftrightarrow rv - rx = v\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{r(v-x)}{v}$$

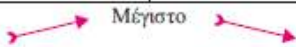
(τα v, r δεδομένα)

Οπότε ο όγκος του κυλίνδρου γράφεται :

$$V(x) = \pi \frac{r^2(v-x)^2}{v} x, \quad 0 < x < v$$

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{\pi r^2}{v^2} [x(v-x)^2]' = \frac{\pi r^2}{v^2} [(v-x)^2 + x2(v-x)(v-x)] = \\ &= \frac{\pi r^2}{v^2} (v-x)(v-x-2x) = \frac{\pi r^2}{v^2} (v-x)(v-3x) = \frac{\pi r^2}{v^2} (x-v)(3x-v) \end{aligned}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = v \text{ (απορ.)} \quad \text{ή} \quad x = \frac{v}{3}$$

x	0	$v/3$	$+\infty$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$			

Άρα ο όγκος V του κυλίνδρου γίνεται μέγιστος όταν το ύψος του x γίνει ίσο με $\frac{v}{3}$.

$$\text{Τότε θα είναι} \quad \rho = \frac{r\left(v - \frac{v}{3}\right)}{v} = \frac{r2v}{3v} = \frac{2}{3}r$$

Οπότε :

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi \rho^2 x = \pi \left(\frac{2}{3}r\right)^2 \frac{v}{3} = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3} \pi r^2 v\right) = \frac{4}{9} V_{\text{κώνου}}$$

Μονοτονία Συνάρτησης

Ασκήσεις

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας

1386. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων :

i. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

ii. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

iii. $f(x) = x^4 - 2x^2$

iv. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1$

v. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

vi. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

vii. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

viii. $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)$

ix. $f(x) = 2e^x - x + 1$

x. $f(x) = x(3 - 2\ln x)$

xi. $f(x) = (x - 2)e^x - \frac{x^2}{2} + x + 1$

xii. $f(x) = x^2(2\ln x - 1) - 8x(\ln x - 1)$

xiii. $f(x) = 2^x + x - 1$

xiv. $f(x) = e^x + x + \sin x$

xv. $f(x) = 2xe^{-x} + (x - 1)^2$

xvi. $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 5$

xvii. $f(x) = x \ln^2 x - 3x + 2$

xviii. $f(x) = \ln(e^x - 1) - 2x + 1$

xix. $f(x) = (x^2 - x) \ln x + \frac{x^2}{2}$

xx. $f(x) = \frac{x^2}{2} - x \sin x + \eta \mu x$

1387. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

ii. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

iii. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

iv. $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

v. $f(x) = x - 2\sqrt{x - 1}$

vi. $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$

vii. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

viii. $f(x) = x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}$

ix. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

x. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$

xi. $f(x) = \ln(8x - x^2)$

xii. $f(x) = \ln(x^2 - 8x)$

xiii. $f(x) = x^2 \ln x$

xiv. $f(x) = x \ln^2 x$

xv. $f(x) = 2\sin x - \sin 2x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

xvi. $f(x) = \eta \mu^2 x - \eta \mu x, \quad x \in (0, \pi]$

1388. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 30$.

i. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία της C_f με τετμημένες τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f και το $O(0, 0)$ είναι συνευθειακά.

1389. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a^2 - a$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f έχει δύο αντίθετα τοπικά ακρότατα.

1390. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 2$.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις f και f' .

1391. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

- i. $f(x)$ ii. $f'(x)$.

1392. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$, $x > 0$.

- i. Να βρείτε την παράγωγο f' της f για κάθε $x > 0$.
 ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(1992)

1393. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

B. Να βρείτε την παράγωγο της f :

α. στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$

β. στο σημείο $x_0 = -3$.

Γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Δ. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

(2010)

1394. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων :

i. $f(x) = -x - 2\sin x$, $x \in [0, \pi]$ ii. $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$

iii. $f(x) = x^2 + 2\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ iv. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - \eta\mu x$

1395. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

i. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-\frac{x+5}{14}} - \frac{7}{4}e^{-\frac{x}{7}}$ ii. $f(x) = \frac{e^{-x+3}}{(1+e^{-x+3})^2}$

iii. $f(x) = e^{-2x} - e^{-\alpha x}$, $\alpha > 2$ iv. $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$, $\alpha > 0$

1396. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων

i. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x > 2$ ii. $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+2)}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - e^x$ iv. $f(x) = \ln(x^2+1) - e^{-x}$

1397. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 3 \\ 2x - 3, & x > 3 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$

iii. $f(x) = |x-1|$ iv. $f(x) = |x^2 - 4|$

1398. Να εξετάσετε ως προς τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$ ii. $f(x) = x^3 - 3x|x|$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 2 \\ \ln(x-1), & x > 2 \end{cases}$

1399. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και η

$$\text{συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{x^2}, \quad x \neq 0. \text{ Αν για κάθε } x \neq 0 \text{ ισχύει } f'(x) < 2xg(x),$$

να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

1400. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι :

$$f(x) + \frac{1}{3}(f(x))^3 = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1401. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την :

$$g(x) = f'(x)(x - \alpha) - f(x) + f(\alpha)$$

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1402. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = e^x - x - 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα ακρότατα της f .

1403. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } f(0) = 1$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(2000)

1404. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{-4x} - e^{-ax}$, $x \geq 0$, $a > 4$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$

ii. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)$.

iii. Αν x_1 είναι ρίζα της παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δευτέρης παραγώγου της $h(x)$ να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1, x_2 .

(1998)

1405. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι $4e^{2x} \geq x^2 + 4$ για κάθε $x \geq 0$.

1406. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $e < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\ln \alpha - 1}{\ln \beta - 1} < \frac{\beta}{\alpha}$.

1407. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x-1}$ ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $\alpha < \beta < 1$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} < \frac{\alpha-1}{\beta-1}$.

1408. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - 1000)^{100} + x^{100}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $1000^{100} > 900^{100} + 100^{100}$.

1409. i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[n]{n}$ και $\sqrt[n+1]{n+1}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $n \geq 3$.

1410. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$, $x > 0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

1411. i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

1412. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ είναι γνησίως μονότονη.

ii. Να αποδείξετε ότι $\ln x \ln(x+2) < \ln^2(x+1)$ για κάθε $x > 0$.

1413. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 0$ για την

$$\text{οποία ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h-1} = \frac{1}{x} + x - 2$$

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\ln \alpha - \ln \beta > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.

1414. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2) < f'(x) < f(3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε

$$\frac{f(3) - f(1)}{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)} = 2$$

δ. Αν $f(2) = 1$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } f(x) > x - 1 \text{ για κάθε } x > 2. \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0.$$

1415. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $H f'$ είναι γνησίως αύξουσα
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2016$
- $f'(0) = 1$

α. Να βρείτε τα όρια **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

- β.** Για οποιαδήποτε $x > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x, 2x)$, ώστε

$$f(2x) = f(x) + xf'(\xi)$$
- γ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- δ.** Να αποδείξετε ότι $2f(x) + f(4x) > 3f(2x)$ για κάθε $x > 0$.
- ε.** Να αποδείξετε ότι $x + f(x) < f(2x) < 2016x + f(x)$ για κάθε $x > 0$.
- 1416.** Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(f(x)) = x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 0.$$
- α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β.** Να λύσετε την εξίσωση $f(3x) + f(x+4) = f(6) + f(2x+2)$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε

$$(f'(x_1))^{2016} (f'(x_2))^{2017} = 1.$$
- ε.** Αν επιπλέον ισχύει $f(x+1) = f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 1417. α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = 1 - 4x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.
- β.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 2x + x \ln x$.

- 1418.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, & x \neq 1 \\ f'(1), & x = 1 \end{cases} \text{ είναι :}$$

- α.** συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- β.** γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση τιμών παραμέτρων

- 1419.** Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3ax^2 + 12x + 2$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 1420.** Έστω $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 1421.** Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + a^2) + ax + 1$, $x \in \mathbb{R}$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- 1422.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\lambda x^2}{2} + (\lambda^2 - \lambda + 1)x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ-ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

- 1423. i.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=2x+\sin x$.
- ii.** Να λύσετε την ανίσωση $2x(x-1) < \sin x - \sin x^2$.
- 1424.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x$.
- i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3$.
- iii.** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} + x^2 > 2$.
- 1425.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
- i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii.** Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση $\ln(\varepsilon \phi x) = \sin^2 x - \eta \mu^2 x$.
- 1426.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$ με $0 < \alpha < 1$.
- i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii.** Να λύσετε την ανίσωση $\alpha^{x^2+4} - \alpha^{5x-2} < x^2 - 5x + 6$.
- 1427.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) , να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (a, \beta)$, ισχύει
- $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$
- 1428.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.
- i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση : $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$
- iii.** Να λύσετε την ανίσωση : $x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$.
- 1429.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f^3(x) + f(x) = e^{1-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- i.** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii.** Να λύσετε την ανίσωση $f(\eta \mu^2 x) > f(x^2)$.
- 1430. α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{-x} + 1$ είναι γνησίως αύξουσα.
- β.** Να λύσετε τις εξισώσεις
- i.** $e^x \ln(x^2 + 1) = 1 - e^x$ **ii.** $\ln \frac{1 + \eta \mu^2 \theta}{1 + \sigma \nu^2 \theta} = e^{-\eta \mu \theta} - e^{-\sigma \nu \theta}$
- γ.** Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{1+x^2}{2} < e^{-x} - \frac{1}{e}$.
- 1431.** Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι
- i.** η f είναι γνησίως αύξουσα, **ii.** $f'(1) = 1$,
- iii.** $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$, **iv.** $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
- 1432.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- i.** Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα

της f και $x_1 < x_2 < x_3$ να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.

- ii. Αν $0 < a < 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-1, 0)$.

(1995)

1433. Να αποδείξετε ότι :

- i. η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.
 ii. η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(2001)

1434. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f^3(x) + f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Να αποδείξετε ότι :

- i. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.
 ii. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, \pi)$.

1435. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

1436. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με $1 - e < f(x) < -1$ και $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = x_0 - e^{x_0}$.

1437. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
 ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

iii. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

(2004)

1438. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{kx - x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ της οποίας η εφαπτομένη της

γραφικής της παράστασης στο σημείο $O(0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$

- i. Να αποδείξετε ότι $k = 4$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.
 iii. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, 4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB όπου $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$.

(2005)

1439. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$, $x \in (0, +\infty)$.

- i. Να αποδείξετε ότι : $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ και $f(e^5) > 0$.

- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

- iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
 iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(2007)

1440. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + \sin x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.
 Γ. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2 + 8) = f(6x)$.
 Δ. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x}$.

(2010)

1441. Να λύσετε τις εξισώσεις :

- i. $x^2 + x + \ln x = 2$ ii. $\sqrt{10-x} - \ln x = 3$ iii. $\ln x + e^x + x = 1 + e$
 iv. $x^2 + 3x + 4 = 4e^{-x}$ v. $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$

1442. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i. $x^3 + \ln(x-1) < 8$ ii. $\ln \frac{1}{x} + 1 > \sqrt{x}$ iii. $e^x + \ln x \geq e$

1443. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x) + f(x) = e^{-x} - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1-x)$.

1444. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3\ln x$, $x > 0$ και $g(x) = 4x - 3 + \ln x$, $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη.

1445. Αν α, β, γ πλευρές ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1,$$

- i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 ii. να λύσετε την εξίσωση $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x$.
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $5^x + 12^x = 13^x$.

1446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $2(e^{x^2} - e^x) = x^4 - x^2$.
 iii. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ισχύουν $2e^\alpha = \alpha^2 + \beta$ και $2e^\beta = \beta^2 + \alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

1447. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(x) > -1 \text{ και } e^{f(x)} + \sqrt{1+f(x)} = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

1448. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x) + \sqrt{f(x)} = 2e^x - x + 1 - \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- 1449.** Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\ln f(x) + e^{f(x)} = 2x \ln x - 3x + 2\sqrt{e} + e$, για κάθε $x > 0$.
Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- 1450.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
- Ισχύει $f(3x) + f(8x) < f(5x) + f(10x)$ για κάθε $x < 0$.
- Η εξίσωση $f(3x) + f(8x) = f(5x) + f(10x)$ έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

- 1451.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x + x^2 - 1$, $x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

- 1452.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x + 2$, $x > 0$.

- Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .
- Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α , β και γ , αν ισχύει η σχέση :
 $\ln(\alpha\beta\gamma) + 3 = \alpha + \beta + \gamma$

- 1453.** Δίνεται $f(x) = \ln(e^x + \lambda e^{-x})$, $\lambda > 0$. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι τοπικό ακρότατο, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του A .

- 1454.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- Να αποδείξετε ότι τα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση
 $y = -\frac{1}{2}x^3$.

- 1455.** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$ ώστε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = (x+1)e^{-\alpha x}$ να γίνεται ελάχιστο.

- 1456.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda > 0$ ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = e^{\lambda x} - x$ να γίνεται μέγιστο.

- 1457.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^a e^{2a-x}$, $x > 0$, όπου $a \in (0, +\infty)$.
Να βρείτε την τιμή του a ώστε το μέγιστο της f να γίνεται ελάχιστο.

Μέγιστα - Ελάχιστα αποστάσεων & εμβαδών

- 1458.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, ένα σημείο της γραφικής παράστασης της

$M(x, \sqrt{x})$ με $x > 0$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

- Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση AM .
- Να βρείτε το σημείο M , ώστε η απόσταση AM να είναι ελάχιστη.
- Για την παραπάνω τιμή του x να βρείτε :
 - Την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M .
 - Τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M με την ευθεία AM .

1459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ και το σημείο $A(2, 4)$.

- i. Να βρείτε σημείο M της C_f , ώστε η απόσταση AM να είναι ελάχιστη.
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο M .

1460. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$, με $x > 0$.

- i. Να βρείτε τα όρια $\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2}$
- ii. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο $O(0, 0)$ τη μικρότερη απόσταση.
- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 6$. (2007)

1461. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x > 0$ και το μεταβλητό σημείο

$M(a, f(a))$ της C_f . Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τους άξονες Ox , Oy στα σημεία A , B αντίστοιχα.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων A , B ως συνάρτηση του a .
- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAM , όπου O είναι η αρχή των αξόνων, είναι σταθερό.
- iii. Έστω Γ , Δ οι προβολές του σημείου M στους άξονες Ox , Oy αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του M ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ να είναι ελάχιστη.

1462. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$.

- i. Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της f και να βρείτε την παράγωγό της.
- ii. Αν $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$, $a > 0$, αποδείξτε ότι $x_1 x_2 = 1$.
- iii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_A και ε_B της C_f στα $A(e^a, a)$ και $B(e^{-a}, a)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $a > 0$.
- iv. Έστω M και N τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι όταν το εμβαδόν του τριγώνου OMN γίνεται μέγιστο η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Κρίσιμα σημεία συνάρτησης

1463. Να αποδείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τη σχέση $f^2(x) + 2f(x) = x^3 + x + e^x$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.

1464. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ αλλά όχι αντιστρέψιμη, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

1465. Αν x_1 και x_2 είναι κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, όπου $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$.

1466. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$ τέτοιοι ώστε $\alpha f'(\alpha) + \beta f'(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$.

1467. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

- i. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα κρίσιμα σημεία της f .
- ii. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .
- iii. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

1468. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 |x-3|$, $x \in [1, 4]$.

- i. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα κρίσιμα σημεία της f .
- ii. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .
- iii. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

1469. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, έχει την ιδιότητα

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Αν $g(x) = e^x + x - 1$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ και το πρόσημο της g .
- ii. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .
- iii. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- iv. Να εξετάσετε αν η f έχει ολικό ελάχιστο.

Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών εξίσωσης

1470. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

i. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x}$ ii. $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

iii. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$ iv. $f(x) = x + \sin x + \ln x$

v. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ vi. $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$

vii. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 4x + 5}$ viii. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ ix. $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$

1471. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + \frac{1}{x-3}$.

Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της f .

1472. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{-x}$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-1, 3]$.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

1473. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-2, 2]$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

1474. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \eta \mu^2 x - \sqrt{2} \sin x + 2\sqrt{2}, \quad x \in [0, \pi].$$

1475. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x}{x^2 + x + 1}$. Να βρείτε το $\lambda \in (0, +\infty)$, ώστε η f

να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[-2, \frac{2}{3}\right]$.

1476. Αν $f(x) = \varepsilon\phi x + \eta\mu x - x - 2$, $x \in A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε :

- i. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο A .

1477. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

- a. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β. Να αποδείξετε ότι
 - i. η εξίσωση $f(x) = 1$ είναι αδύνατη,
 - ii. η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία λύση
 - iii. η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

1478. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{2}{1+e^x}$.

- i. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε :
 $f(\rho) = 0$ και $f(-\rho) = 4$

1479. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση
 $f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + 2015$.

- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + x^2 + 2015 = 4x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1480. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων :

- i. $2x^3 - 6x + 1 = 0$
- ii. $x^2 = \sin x + x\eta\mu x$
- iii. $e^{-x} = x + 2015$

1481. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ καθώς και το πρόσημο αυτών.

1482. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

- i. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.
- ii. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.
- iii. Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.
- iv. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

1483. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση
 $f(e^{-x}) - f(x + \alpha) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

1484. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι « $1 - 1$ ».

- i. Να αποδείξετε ότι η g είναι « $1 - 1$ ».
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

(2002)

1485. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μια ακριβώς ρίζα.

(2015)

1486. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 .
- iii. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο

$$M\left(0, \frac{3}{2}\right).$$

(2015)

1487. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε :

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ.1 Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ.2 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

(2013)

1488. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- α.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.
- β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- γ. i.** Να αποδείξετε ότι για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$
- ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

(2014)

1489. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 5) + 2x - 12$.

- i.** Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;
- ii.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- iv.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο

ορισμού της συνάρτησης f .

(2006)

1490. Για $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

B. Για $k = 3$

i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

iii. και για κάθε $a \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

(2006)

1491. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ που άγονται από την αρχή των αξόνων.

1492. Να αποδείξετε ότι :

i. η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii. η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 4x + a = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = a$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

1493. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+1} e^x$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

1494. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

1495. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

1496. α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} = x + 1$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα την οποία και να βρείτε.

β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η

οποία ικανοποιεί την ιδιότητα $f(x) + 1 = x + e^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$. Αν

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

1497. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- iv. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

(2006)

1498. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- iii. Αν α είναι ρίζα της f , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$ στο σημείο $A(\alpha, g(\alpha))$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της $h(x) = \ln x$.
- iv. Πόσες κοινές εφαπτομένες έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h ;

2006

1499. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1} \quad \text{και} \quad g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$$

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho > 1$ για το οποίο ισχύει

$$f(x) \leq \frac{1}{\rho} \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

E.M.E 2016

1500. Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x) = xe^x - 1$ και $h(x) = (x-1)e^x - (x+1)$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα της οποίας να βρείτε το πρόσημο.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες αντίθετες.
- iii. Να βρείτε το πλήθος των κοινών εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$.

1501. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 \ln x}{e^{2x}}.$$

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες
 $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοια, ώστε
 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -\ln(\rho_1 \rho_2)$.
- iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

Ε.Μ.Ε 2016

1502. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha + 1$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Αν $-1 < \alpha < 3$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες, μια αρνητική και δύο θετικές.

1503. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + 2$, $a \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

- i. Να βρείτε τον a .
- ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, αν $0 < \kappa < 4$.

1504. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + a = 0$ να έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0, 2)$.

1505. Δίνεται η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 6x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

1506. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{2x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- ii. Για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = a$. (1)

α. Έχει η εξίσωση (1) λύση όταν $a = -\frac{1}{8}$;

β. Έχει η εξίσωση (1) λύση όταν $a > 0$; Αν ναι, πόσες ρίζες έχει;

1507. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x = a$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

1508. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
 $x^3 - 3x + 2 - a = 0$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

1509. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x \ln x - x}$, $x > 0$

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x} = \kappa$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ τέτοια, ώστε να ισχύει :

$$f(\xi_1) \ln \xi_1 + e f(\xi_2) \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

Ε.Μ.Ε 2016

1510. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x - \beta}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η

γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(-2, \frac{5}{12}\right)$ δέχεται

εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.
- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0$ (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

(2011)

1511. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
- ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a .
- iv. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

(2008)

1512. Δίνεται συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με $f(2) = f(4) = 2$ και $f(3) = -1$.

Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 3$, τότε :

- i. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο διάστημα $(2, 3)$
 - ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ είναι αδύνατη.
 - iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = -9$.
- 1513.** Έστω συνάρτηση $f: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $f(1) = 1$, $f(7) = 7$, $f(4) = 4$ και $f(2) + f(6) = 26$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 5) \cup (5, 7)$ και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 4$, να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει $x_0 \in [2, 6]$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 13$
 - ii. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)$ και ολικό μέγιστο το $f(5)$.
- 1514.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με την f' συνεχή στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L \in (-\infty, 0) \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in (-\infty, 0)$$

$$\bullet f(0) = 5 \quad \bullet f(1 + f(x)) - f(x) = 2x - 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρεθούν οι τιμές $f(6)$ και $f(3)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- v. Να αποδείξετε ότι $L = m = -1$.

Εύρεση προσήμου συνάρτησης

1515. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων

- iii. $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$
- ii. $f(x) = 4x - 3\eta\mu x$
- iii. $f(x) = 2 - 3x - 2\sigma\upsilon\nu x$
- iv. $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$
- v. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$
- vi. $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$
- vii. $f(x) = \ln x - x + 1$
- viii. $f(x) = e^x - e^x$

1516. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 2x - 3$.

- i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $1 + \ln(3 - 2x) < x$.

1517. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα :

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τύπο $g(x) = e^x + x - 1$.

- i. Να βρείτε το πρόσημο της g .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1518. i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$.

- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2+x\ln x}{1+x}$, παρουσιάζει ένα μόνο ακρότατο, το οποίο και να βρεθεί.

1519. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = 2x - \eta\mu x$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

- ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 1$

1520. i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ex$.

Να εξετάσετε την f ως προς τα ακρότατα, να βρείτε τις ρίζες της f και το πρόσημό της.

- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = 2e^{x-1} - x^2$ ως προς τη μονοτονία.

1521. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x) = x - \ln x$.

- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$

1522. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(x) = x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}, \quad x \neq 0$$

- i. Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της g .

- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- 1523.** Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\beta) = f'(\alpha) = 0$, η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- 1524.** Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f'(\beta) = 0$, η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να βρείτε το πρόσημο της f στο (α, β) .
- 1525.** Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον $x'x$ στο $x_0 = 1$ και ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \neq 1$.
- 1526.** Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$.
- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > \alpha$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $2x \ln x < x^2 - 1$ για κάθε $x > 1$.
- 1527.** Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ και $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- 1528.** Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι :
- i. Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
- 1529.** Έστω μια συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f(1) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
- 1530.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδειχθεί ότι $f(x) < 1$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
- 1531.** Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) \leq 0$.
- 1532.** Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta)$, $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$.
- 1533.** Έστω η συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύουν :
- $$f(x) = f(2-x) \text{ και } f''(x) \neq 0$$
- i. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- ii. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $f(0) > f(1)$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- 1534.** Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$.
- i. Αν η f έχει μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$ την $f(\alpha)$, να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) \leq 0$.
- ii. Αν η f έχει ελάχιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$ την $f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $f'(\beta) \leq 0$.

Όταν για την εύρεση της μονοτονίας μιας f απαιτείται η $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$,....

- 1535.** Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων :
- i. $f(x) = 4e^x + x^4 + 6x^2 - 4x + 1$ ii. $f(x) = -4\eta\mu x - 3x^2 + 4x + 1$
- iii. $f(x) = e^{2x}(x-1)^2$ iv. $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-2} - 2x \ln x + x$
- 1536.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^4}{12}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- 1537.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $2 \ln x = \frac{x^2 - 1}{x}$.
- iii. Αν $0 < x \neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.
- 1538.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} - \ln^2 x$.
- i. Να βρείτε την μονοτονία και το πρόσημο της συνάρτησης
 $g(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- iii. Να αποδείξετε ότι $(x-1)^2 \geq x \ln^2 x$ για κάθε $x > 0$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- 1539.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 2x + 1$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} + \ln x = 2x - 1$.
- iii. Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι $(2x - 1 - \ln x)e^{1-x} < 1$.
- 1540.** Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει
 $e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2$
να υπολογίσετε τους α, β .
- 1541.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x \ln x - \ln x - 2x$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .
- 1542.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(2 \ln x - 3) + 4x - 1$
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- 1543.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \sin x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.
- α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .
- β. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του β , το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- 1544. A.** Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x}{e^x}$
- i. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να αποδείξετε ότι $e^x > 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- B.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{2x}) < f(4x^2 + 1)$.
- 1545.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \ln x - 1$, $x > 0$.
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
 iii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2. να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

(2012)

Εύρεση μονοτονίας με χρήση βοηθητικής συνάρτησης

1546. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

- i. $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \ln x$ ii. $f(x) = \frac{2+x \ln x}{1+x}$
 iii. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ iv. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ v. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}, x > 0$

1547. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

ii. Για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι $\ln \sqrt{x} < x - \sqrt{x}$.

1548. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $0 < \alpha < \beta < 1$ ισχύει $a^{\alpha(1-\beta)} > \beta^{\beta(1-\alpha)}$.

1549. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} < \frac{\alpha}{\beta}$.

1550. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2$, $x \in (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δυο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μια θέση τοπικού μεγίστου.

(2014)

Απόδειξη ανισοτήτων

1551. Να αποδείξετε ότι :

i. $\sqrt{x} + \ln(x+1) > e^{-x} - 1$, για κάθε $x > 0$

ii. $x e^{\alpha x} + 1 > \frac{1}{\sin x}$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

iii. $e^x > \frac{1}{1+x}$, για κάθε $x > 0$

iv. $e^x > 1 + \ln(1+x)$, για κάθε $x > 0$

v. $\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}$, για κάθε $0 < x < 1$

1552. Να αποδείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

1553. i. Αν $0 < \gamma < \delta$, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\frac{\delta}{x}\right) - \frac{\delta}{x} + 1, x \in [\gamma, \delta]$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^\gamma > e^{\gamma-\delta}$

1554. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = xe^x$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x - 2$.

1555. Να αποδείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

1556. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι :

i. $e^\pi > \pi^e$

ii. $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a \geq e$

iii. $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$.

iv. $\ln x < x$ για κάθε $x > 0$.

1557. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(x^2+1)f'(x) > 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) > f(0)(x^2+1)$ για κάθε $x > 0$.

ii. $f(x) < f(0)(x^2+1)$ για κάθε $x < 0$.

1558. Να αποδείξετε ότι :

i. $1 - \frac{1}{x} - \ln x < 0$ για κάθε $x > 1$.

ii. η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

iii. αν $\alpha, \beta > 1$ και $(\alpha-1)\ln\beta = (\beta-1)\ln\alpha$, τότε $\alpha = \beta$.

1559. i. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία η $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ με $x \in (0, +\infty)$.

1560. i. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

ii. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$f^5(x) + 2f^3(x) + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(1999)

1561. Να αποδείξετε ότι :

- i. $e^x - x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μία λύση.

(1994)

1562. i. Να αποδείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x \ln x = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

1563. A. Να αποδείξετε ότι $x^2 - 2\ln x - 1 \geq 0$, για κάθε $x > 0$.**B.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$, $x > 0$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε σημείο M της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη x_0 που ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

1564. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^x (1-x)^{1-x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να βρείτε τα ακρότατα της f .
- iii. Να αποδείξετε ότι $a^a \cdot \beta^\beta \geq \frac{1}{2}$, όπου $a, \beta > 0$ με $a + \beta = 1$.

1565. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1-x)^2 e^x$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.
- iii. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί μικρότεροι του 1, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha-1)^2 (\beta-1)^2 e^{\alpha+\beta+2} \leq 16$$

- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $ef'(\xi) = -2$.

1566. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x)f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ **B.** Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .
- iii. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1$
να αποδείξετε ότι $\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$

1567. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f'(x) = g'(x) + x(e^x - 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = g(0)$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$.**1568.** Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το

διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(1996)

1569. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(f(x))^3 + 3f(x) + x = e^x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1570. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $a \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1571. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) < e^x - x$, για κάθε

$$x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } f(0) = 1, \text{ να αποδείξετε ότι } \frac{x^2}{2} + f(x) < e^x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1572. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει: $2x < f'(x) < e^x$ για κάθε $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 1 < f(x) < e^x$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

1573. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, ώστε

$$f'(x) + f(x) = e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1}{e}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1574. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \sin x > f(x) \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(x) \sin x > 1$, για κάθε $x > 0$.

1575. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(0) = g(0) = 1, \quad g(x) > 0 \text{ και } f'(x)g(x) < g'(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) < 1 + \ln g(x)$ για κάθε $x > 0$.

1576. Να αποδείξετε ότι :

i. $\sin x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, για κάθε $x > 0$

ii. $\ln(1 + e^x) < \ln 2 + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2}$, για κάθε $x < 0$

iii. $6x^2 \ln x < 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, για κάθε $x > 1$

iv. $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, για κάθε $x > 0$

1577. Να αποδείξετε ότι : $e^{2x} - 2e^2 \ln x + \ln^2 x \geq e^2$, για κάθε $x > 0$

1578. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(x) > \sin x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) + \sin x > 1$.

1579. Οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $[0, a]$ και είναι τρεις φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα αυτό. Αν ισχύουν

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0) \text{ και } f^{(3)}(x) > g^{(3)}(x) \text{ για κάθε } x \in (0, a)$$

να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in (0, a)$.

1580. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

i. Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.

(2002)

1581. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x = 1$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

ii. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) + e^{f(x)} = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. $xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}$, για κάθε $x < 0$.

1582. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$

ii. $2f'(x-1) < f(x+1) - f(x-1) < 2f'(x+1)$

1583. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$ για κάθε $x \geq 1$.

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

1584. Δίνεται η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με παράγωγο f' γνησίως

αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

1585. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση δέχεται στο σημείο $A(1,1)$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$. Επίσης ισχύει ότι $f''(x) > f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < f(x)$ για κάθε $x < 1$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x > 1$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq e^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1586. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και η f' είναι

γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, είναι

γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

1587. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f'(\beta) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(\alpha) > f(\beta)$.

1588. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\pi) = 0$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $xf'(x) < f(x) + x^2 \sin x$, να αποδείξετε ότι $f(x) < x \ln x$ για κάθε $x > \pi$.

1589. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f'(x) > -\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

1590. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $xf'(x) > e^x - f(x)$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > \frac{e^x - 1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

1591. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) > 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > e^{2x}$ για κάθε $x > 0$.

1592. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \geq 0$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(x) > e^x$ για κάθε $x > 0$.

1593. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(0) = 0$ να αποδείξετε ότι $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

1594. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) + f(x) > 2e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) > 1$ για κάθε $x > 0$

ii. Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)e^{2x} - 4x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

1595. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x > 0$.

1596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$, $x > 0$

α. i. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $a \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(a+1)^a = a^{a+1}$.

(2006)

1597. A. Δίνεται ότι για μια συνάρτηση f ισχύει :

$$f(xy) = \frac{1}{x}f(y) + \frac{1}{y}f(x) \dots, \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$, να αποδείξετε ότι

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$

ii. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (x-1)f(x) + \frac{2}{x} - 2$

B. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Αν ξ είναι η θέση του ελαχίστου να αποδείξετε ότι :

Γ. $g(x) + \frac{(\xi-1)^2}{\xi} \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

Δ. Υπάρχει $x_1 > \xi$ τέτοιο ώστε : $g(x_1) + g'(x_1) = 0$

Ολικό μέγιστο $\leq \lambda \in \mathbb{R}$ ή Ολικό ελάχιστο $\geq \lambda \in \mathbb{R}$

1598. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} - x$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$

- i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .
- ii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $e^{\lambda x} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1599. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, f(x))$ όπου x η θέση ελάχιστου της f , κινείται σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- iii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $x \ln x \geq \lambda x - 1$ για κάθε $x > 0$.
- iv. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (iii) να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x - 1$ εφαπτεται της γραφικής παράστασης της $g(x) = x \ln x$.

1600. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x) - x - \lambda$, $x \geq 0$,

- i. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f .
- ii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\ln(1 + e^x) \leq x + \lambda$, για κάθε $x \geq 0$

1601. Έστω η συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Να βρείτε την

μεγαλύτερη τιμή του M ώστε να ισχύει $f(x) \geq M$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

1602. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$, για την οποία ισχύουν

- $f(x) + x \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x - y) = \frac{f(x) + x}{f(y) + y} - x + y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

- i. $f'(x) = f(x) + x - 1$
- ii. $f(x) = e^x - x$

B. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του a , ώστε να ισχύει :

$$f(x) \geq ax, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } a > -1$$

1603. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1) = 1 - a$, $a > 0$ και
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + ax - ay - \frac{ax}{y}$ για κάθε $x, y > 0$

A. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln x - ax$, $x > 0$

B. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δ. Αν $g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x})$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, να βρείτε την τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

Εύρεση τιμών παραμέτρων ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

1604. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\beta x + 2\alpha - \beta - 3$.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε στη θέση $x = 1$ να έχει τοπικό μέγιστο το 2.

1605. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \ln(x-1) - \beta x^2 - 4x + 1$$

να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακρότατων αυτών.

1606. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3(\alpha - 1)x^2 + 6\alpha^2 x + 1$ η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο.

i. Να βρείτε τις τιμές του α .

ii. Να βρείτε το είδος του ακροτάτου της f στο $x_0 = -1$ καθώς και η τιμή του.

iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f καθώς και το σύνολο τιμών της

1607. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A\left(0, \frac{9}{2}\right)$.

Αν M τυχαίο σημείο της C_f και η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη όταν $x = 2$, να βρείτε την τιμή του α .

1608. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ .

β. Για $\lambda = 0$:

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$.

(2009)

1609. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \alpha[f(x)]^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το $f(1) = e$, να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$ να είναι κάθετη στην ευθεία: $2x - 3y + 1 = 0$.

1610. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x + 2^x$, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 0$, τότε:

i. να βρείτε τον αριθμό α .

ii. για την τιμή του α που βρήκατε, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

1611. Να βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση f , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f^{(3)}(x) = 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

• Στο $x_1 = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το -2

- Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο $x_2 = 1$ είναι παράλληλη του άξονα $x'x$.

- 1612.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 2\lambda x^3 + \mu x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$
 Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε στο $x_0 = 1$ η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, επίσης η κλίση της f στο 3 να είναι εξαπλάσια της κλίσης της f στο 2.
- 1613.** Αν το $f(a)$ είναι τοπικό ακρότατο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + x^3 = 3xf(x) - 1$ τότε να βρείτε το a .
- 1614.** Αν η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + ax^3 + \beta x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τρία τοπικά ακρότατα να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > 8\beta$.
- 1615.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + ax^2 + 2ax + 3a$ με ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.
 Να αποδείξετε ότι :
- $a \in (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$
 - η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο στα σημεία x_1, x_2 για τα οποία ισχύει $(1+x_1)(1+x_2) = 1$.
- 1616.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a}$, $a < 0$. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η τιμή για την οποία η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο να είναι διπλάσια της τιμής για την οποία παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Η f δεν έχει ακρότατα

- 1617.** Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- 1618.** Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + \ln(1+f^2(x)) = e^x + x^3 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- 1619.** Αν $\alpha^2 < 2\beta$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.
- 1620.** Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + xf(x) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- 1621.** Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $3x^2f(x) - f^3(x) = 2x^3 - 1$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
- 1622.** Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ διάστημα $(0, 1)$.
- (2001)
- 1623.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2e^x - x^2 - 2x + 2016$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
- 1624.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f^3(x) + 3f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x + x - \frac{x^2}{4}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

1625. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$\frac{1}{3}f^3(x) + f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 2016, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

1626. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση :

$$f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 3x + a^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα.

1627. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + (a+6)x + 3$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να μην έχει ακρότατα.

Από ανισοϊσότητα σε ισότητα με Fermat

1628. Να βρείτε την τιμή του $a > 0$ ώστε να ισχύει $a^{2x} \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1629. Αν για κάθε $x > 0$ είναι $a^x \geq x^a$ όπου $0 < a \neq 1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

1630. Να βρείτε τον αριθμό a αν για κάθε $x > -1$ ισχύει $2(x+1) \cdot \ln(x+1) \leq x^2 + ax$.

1631. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει :

$$a^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να αποδείξετε ότι } a\beta = e^5.$$

1632. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq \gamma^x + \delta^x$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta$.

1633. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$ όπου $m \in \mathbb{R}, m > 0$. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1634. Αν $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\eta\mu a)^{x-1} + (2\sigma\upsilon\nu a)^{\ln x} \geq 2$, να βρείτε την τιμή του a .

1635. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \kappa a^x + \lambda \beta^x + \mu \gamma^x$ όπου $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ και κ, λ, μ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

i. Αν $f(x) \geq \kappa + \lambda + \mu$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $a^\kappa \cdot \beta^\lambda \cdot \gamma^\mu = 1$.

ii. $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1636. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(3x+1) + 4 \leq 4f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f δεν αντιστρέφεται.

ii. Η f' δεν αντιστρέφεται.

iii. Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

1637. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x$ να αποδείξετε ότι οι α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

1638. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ και η $g(x) = e^x - xf(x), \quad x < 1$.

Αν ισχύει $g(x) \leq 1$, για κάθε $x < 1$ να βρείτε την τιμή $f(0)$.

1639. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$f(x) \leq e^x + \ln(x^2 + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$.

- 1640.** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$, για την οποία ισχύουν: $f(-1) = -2$ και $e^{x+1}f(x) \leq -2$, για κάθε $x < 0$

i. Να βρείτε η $f'(-1)$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-1, -2)$.

- 1641.** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να είναι $f(0) = 2$ και $f(2x) \geq 2e^{-2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = -2$.

- 1642.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + 1 \geq x^2 + \sin x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

- 1643.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)e^{\alpha x} \geq f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}.$$

Αν η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \alpha)$ να

αποδείξετε ότι $f'(0) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$.

- 1644.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$f(1+x) - f(1-x) \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$.

- 1645.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{\alpha}{x} + \alpha$, $x > 0$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

ii. να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

iii. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\ln(2\lambda^2 + 2) - \frac{1}{\lambda^2 + 3} > \ln(\lambda^2 + 3) - \frac{1}{2\lambda^2 + 2}$$

- 1646.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ και $f(x) \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

- 1647.** Έστω συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την

οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν η f έχει δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 με

$0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

- 1648.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x^2) - f^2(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η f δεν αντιστρέφεται.

ii. Η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο x_0 .

iii. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(0, f(0))$, $B(1, f(1))$ είναι παράλληλες.

iv. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία της γραφικής παράστασης της f' στα οποία οι εφαπτομένες τους είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

- 1649.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 9 \leq 6f(x^2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. Η εξίσωση $f'''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα
- ii. Η εξίσωση $f''(x) = f'(x)$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

1650. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$2f(x) \geq f(1) + f(2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

- i. $f(1) = f(2)$.
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f'' στο σημείο $M(\xi, f''(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

1651. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) \leq \frac{f(1) + f(5)}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. $f'(1) = f'(5)$.
- ii. Η εξίσωση $xf''(x) = f'(x)$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

1652. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) \leq \frac{3f(2) + 2f(3)}{5}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$ στο οποίο η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.
- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

1653. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 4x + 8$ και $g(x) = \sin x + x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{2}{x}\right) = 5$.

γ. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε

$$4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25\alpha^4$$

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 g(x)}{f(x)}$

ε. Θεωρούμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $h(1) = 8$
- $h'(3) = 6$
- $h(g(x)) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 1$

1654. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f'(x)) \geq (x - \alpha)^2$, $\alpha \neq 0$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \alpha$ και $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $f''(\alpha) = 0$.

1655. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $|f''(x)| \leq 2016$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
Αν $c \in (0, 1)$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f , να αποδειχθεί ότι $|f'(0)| + |f'(1)| \leq 2016$.

Όταν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα

1656. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[1, e]$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = 2$ και $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το $[-1, 4]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2, x_3 διαφορετικά μεταξύ τους που ανήκουν στο $(1, e)$, τέτοια ώστε :

α. $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 4$ **β.** $f'(x_1) = f'(x_2) = f''(x_3) = 0$

1657. Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 2]$.

Αν $f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = 1$, να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

ii. Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

1658. Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[-1, 2]$ και $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 1$, να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

ii. Η εξίσωση $f'(x) = (x^2 + 1)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

1659. Έστω συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε $f([1, 4]) = [-1, 2]$.

Αν $f(1) = f(4) = \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση f' δεν είναι «1 - 1»

ii. Υπάρχει $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

1660. Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(1) < f(0) < f(5) < f(4)$

Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0, 5)$ με $\alpha < \beta$ τέτοια, ώστε $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

ii. Υπάρχει $\xi \in (0, 5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) = 0$

1661. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε

$$g(x) = 1 + f^2(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

1662. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αν $f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma)$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1663. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f'(\alpha) > 0$ και $f'(\beta) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1664. Δίνεται μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f'(\alpha) < \lambda < f'(\beta)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \lambda x, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $g'(x_0) = 0$.

1665. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$, $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το $[-1, 4]$.

Να αποδείξετε ότι:

A. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε :

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

B. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε : $f''(\xi) = 0$

Γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) [f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0$$

Δ. Η ευθεία $\varepsilon: y = -x + e + 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0 \in (1, e)$.

E. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ για τα οποία ισχύει :

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$$

1666. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) > 0$.

Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\gamma) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- i.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα (α, β) .
- ii.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $2\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.
- iii.** Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa \neq \lambda$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda) < 0$.
- iv.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

E.M.E 2016

Όταν $m = M$ τότε η f είναι σταθερή.

1667. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x) = (x^2 - x)f'(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

1668. Δίνεται συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει $f(x) = (x^2 - 5x + 4)f'(x) + 2$, για κάθε $x \in [1, 4]$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1669. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{a}{4}x^3$, όπου το x διατρέχει το ανοιχτό διάστημα $(0, +\infty)$

και η παράμετρος a παίρνει τιμές στο κλειστό $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$.

Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x \in (0, +\infty)$.

i. Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(a)$.

ii. Να βρείτε την τιμή του $a \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το $M(a)$ γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

(1993)

1670. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t ,

σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου A ένας θετικός αριθμός.

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει

η συγκεκριμένη μηχανή, δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$.

Υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής, να γίνεται μέγιστο.

(1995)

1671. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου a και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες.

Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών a και β .

ii. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

(2000)

1672. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του όπου $t \geq 0$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$:

i. να βρείτε τη συνάρτηση f .

- ii. σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη ;
- iii. να αποδείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται ότι $\ln 11 \cong 2,4$)

(2000)

1673. Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος t μήνες μετά την εισαγωγή

$$\text{του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο } P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}.$$

- i. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.
- ii. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.
- iii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.
- iv. Να αποδείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

(2000)

1674. Οι αθροιστικές πωλήσεις ενός τύπου αυτοκινήτου δίνονται συναρτήσει του χρόνου (σε μήνες από την έναρξη των πωλήσεων) από τη συνάρτηση :

$$f(t) = \frac{10000}{1 + e^{-t+10}} + 10, \quad t \in [0, 20]$$

Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης των πωλήσεων γίνεται μέγιστος και η μέγιστη αυτή τιμή.

1675. Βιομηχανία παράγει x μονάδες προϊόντος την ημέρα και τις πουλάει στην

τιμή $T(x) = 55 - \frac{1}{4}x$ € ανά μονάδα. Το συνολικό κόστος παραγωγής είναι

$K(x) = 2.500 + 25x$ € την ημέρα και για κάθε μονάδα προϊόντος που πουλάει η βιομηχανία πληρώνει φόρο φ €.

- i. Να βρείτε τις μονάδες (συναρτήσει του x) που πρέπει να παράγει ημερησίως η βιομηχανία ώστε το ημερήσιο κέρδος της να γίνει μέγιστο.
- ii. Με δεδομένη την πρόθεση της βιομηχανίας να μεγιστοποιήσει το ημερήσιο κέρδος, να προσδιορίσετε το φ ώστε το κράτος να εισπράττει κάθε μέρα το μέγιστο φόρο.

1676. Βιοτεχνία παράγει x μονάδες ενός προϊόντος ημερησίως, τις οποίες πουλάει με την τιμή $T(x) = 3000 - 2x$ €/μονάδα. Το ημερήσιο κόστος παραγωγής είναι :

$$K(x) = 2200x + 20000 \text{ €}$$

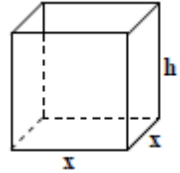
και η παραγωγή δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 300 μονάδες την ημέρα.

Λόγω ανταγωνισμού, η βιοτεχνία αναγκάζεται να κάνει διαφημιστική καμπάνια για το προϊόν, η οποία της κοστίζει $x + 20$ €/μονάδα προϊόντος την ημέρα.

- α. Να βρείτε το επίπεδο παραγωγής πριν και μετά τη διαφημιστική καμπάνια που κάνει το κέρδος της βιοτεχνίας μέγιστο.
- β. Ποια η επίπτωση της διαφημιστικής καμπάνιας της βιοτεχνίας :

- i. στον καταναλωτή του προϊόντος ;
- ii. στα κέρδη της βιοτεχνίας, έχοντας δεδομένη την πρόθεση της βιοτεχνίας να μεγιστοποιεί το κέρδος της ;

1677. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κλειστή μεταλλική δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς x και ύψους h . Ο όγκος της V πρέπει να είναι 1000 dm^3 . Κάθε μία από τις 6 έδρες κοστίζει $a \text{ €}$ ανά dm^2 , ενώ η συγκόλληση των εδρών κατά μήκος των ακμών κοστίζει $\beta \text{ €}$ ανά dm .



- i. Να αποδείξετε ότι το κόστος κατασκευής της δεξαμενής, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 2ax^2 + 8\beta x + \frac{4000a}{x} + \frac{4000\beta}{x^2}$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι οι διαστάσεις της δεξαμενής που ελαχιστοποιούν το κόστος κατασκευής είναι ανεξάρτητες των a , β .
- 1678.** Ένα μεγάλο τυπογραφείο θέλει να εκτυπώσει 100.000 πανομοιότυπες αφίσες για τους Ολυμπιακούς αγώνες. Για τον σκοπό αυτό ενοικιάζει μηχανές, που η καθεμία εκτυπώνει 100 αφίσες την ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης της κάθε μηχανής ανέρχονται σε 20€. Επιπλέον το τυπογραφείο, για κάθε ώρα εκτύπωσης, έχει πρόσθετα έξοδα 50 €.
- i. Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία, ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος.
 - ii. Ποιο είναι το ελάχιστο αυτό δυνατό κόστος ;

Κυρτότητα - Σημεία Καμπής Συνάρτησης

Ορισμός

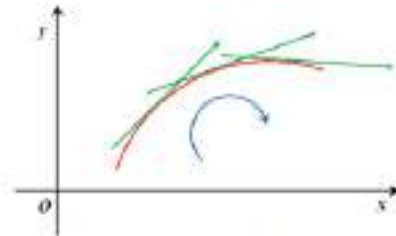
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ θα λέμε ότι :

Η συνάρτηση f στρέφει **τα κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Η συνάρτηση f στρέφει **τα κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .



Όταν η f' είναι κυρτή, τότε καθώς το x αυξάνει, η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά.

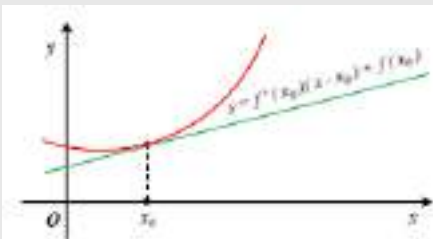


Όταν η f' είναι κοίλη, τότε καθώς το x αυξάνει, η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά την αρνητική φορά.

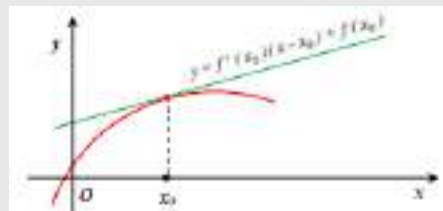
Παρατηρήσεις :

Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\curvearrowright$ και ότι είναι κοίλη το $\curvearrowleft$.

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Αν η f είναι κυρτή τότε :
 $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$



Αν η f είναι κοίλη τότε :
 $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$

Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο βρίσκεται «πάνω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

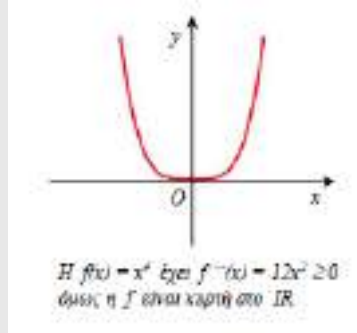
Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Παρατήρηση :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι κυρτή (ή κοίλη) δεν ισχύει (οποσδήποτε) $f''(x) > 0$ (ή $f''(x) < 0$). Τι μπορεί να ισχύει ;

Μπορεί να είναι $f''(x) \geq 0$ ή μπορεί να μην είναι δεύτερη φορά παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο του διαστήματος.

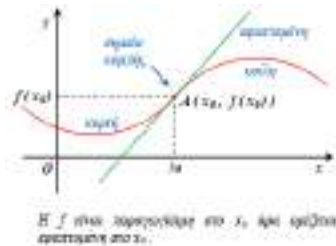
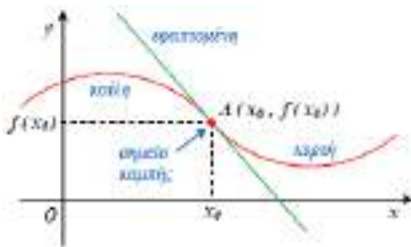


Σημεία Καμής

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν :

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμής της γραφικής παράστασης της f .



Παρατηρήσεις :

- Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμής**.
- Στα σημεία καμής η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη.
- Μπορεί μια συνάρτηση f να **έχει σημείο καμής** στη θέση x_0 , **χωρίς** να είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 . Τότε έχουμε την περίπτωση της **κατακόρυφης εφαπτομένης**.
- Είναι φανερό ότι, αφού η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$, η f θα είναι **συνεχής** στο x_0 .

Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις :

Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν **δεν** είναι θέσεις σημείων καμπής.

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Δηλαδή αν ισχύει $f''(x_0) = 0$ αυτό **δεν** σημαίνει ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .

Πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι :

τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και

τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Δεν νοείται (ούτε ορίζεται) σημείο καμπής σε άκρο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης (πολύ δε περισσότερο σε σημείο που η f δεν ορίζεται).

Τοπικά ακρότατα – Σημεία καμπής (Ομοιότητες – Διαφορές)

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και **παραγωγίσιμη στο εσωτερικό** του Δ .

Υπόθεση	Συμπέρασμα
$f'(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ	f γνησίως αύξουσα στο Δ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
$f'(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ	f γνησίως φθίνουσα στο Δ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
$f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ	f κυρτή στο Δ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
$f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ	f κοίλη στο Δ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
Η f έχει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0	$f'(x_0) = 0$ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
Η f παρουσιάζει καμπή στο εσωτερικό σημείο x_0	$f''(x_0) = 0$ ή δεν υπάρχει $f''(x_0)$ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
f' γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ	f κυρτή στο Δ
f' γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ	f κοίλη στο Δ