

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Όρια πολυωνυμικών - ρητών συναρτήσεων

99.

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 + 3x^2 + x + 1) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 2x^2 + x - 3)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 7}{2x^2 + x + 3} \right) \quad \text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x^2-3)}{3x^2 + 1 - 2x^4 + x}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 + 2}{x^2 - 1} - \frac{3x^2}{x-1} \right) \quad \text{vi. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^{15} (x-2)^{17}}{(x^2 - x + 1)^{14}}$$

Λύση

i. Η $f(x) = -2x^5 + 3x^2 + x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι πολυωνυμική.

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 + 3x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5) = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = -2 \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

ii. Η $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x - 3$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι πολυωνυμική.

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 2x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = 5 \cdot (-\infty) = \boxed{-\infty}$$

iii. Η $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 7}{2x^2 + x + 3}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι ρητή. Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 7}{2x^2 + x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = \boxed{2}$$

iv. Η $f(x) = \frac{(x-1)(x^2-3)}{3x^2 + 1 - 2x^4 + x}$ είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$

και είναι ρητή.

Οπότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x^2-3)}{3x^2 + 1 - 2x^4 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x - x^2 + 3}{3x^2 + 1 - 2x^4 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-2x^4} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = \boxed{0} \end{aligned}$$

- v. Η $f(x) = \frac{x^4+2}{x^2-1} - \frac{3x^2}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του αθροίσματος γιατί προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$. Στις περιπτώσεις αυτές κάνουμε τις πράξεις (ομώνυμα) και αναγόμενους στο όριο της ρητής συνάρτησης.

Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4+2}{x^2-1} - \frac{3x^2}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+2-3x^2(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-3x^3-3x^2+2}{x^2-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

- vi. Επειδή οι μεγάλες δυνάμεις απαγορεύουν οποιαδήποτε πράξη, το αντιμετωπίζουμε ως εξής :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^{15}(x-2)^{17}}{(x^2-x+1)^{14}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]^{15} \left[x \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right]^{17}}{\left[x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{14}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{15} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{15} x^{17} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{17}}{x^{28} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{14}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{32} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{15} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{17}}{x^{28} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{14}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^4 \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^{15} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{17}}{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{14}} \right) = (+\infty) \cdot \frac{(1-0)^{15}(1-0)^{17}}{(1-0+0)^{14}} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

100.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|3x^5 - x + 1| - 1}{|1 + x - x^5| + x^5 - 3}$.

Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Λύση

Η f ορίζεται σε διαστήματα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \beta)$, οπότε έχουν νόημα τα ζητούμενα όρια.

i. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5) = +\infty. \text{ Άρα } 3x^5 - x + 1 > 0 \text{ στην περιοχή του } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - x^5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5) = -\infty. \text{ Άρα } 1 + x - x^5 < 0 \text{ στην περιοχή του } +\infty.$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - x + 1 - 1}{-1 - x + x^5 + x^5 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - x}{2x^5 - x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{2x^5} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

ii. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5) = -\infty. \text{ Άρα } 3x^5 - x + 1 < 0 \text{ στην περιοχή του } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x - x^5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = +\infty. \text{ Άρα } 1 + x - x^5 > 0 \text{ στην περιοχή του } -\infty.$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 + x - 1 - 1}{1 + x - x^5 + x^5 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 + x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -3 \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

Ο ρ ι α ά ρ ρ η τ ω ν σ υ ν α ρ τ η σ ε ω ν
101.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + \sqrt{x^2 + 3})$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 3} + 5x - 1)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x + 6} - 2x)$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x + 3)$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x + 3)$

Λύση

i. Η $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$, θα είναι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \boxed{+\infty}$

ii. Η $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 3}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Είναι : • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$

Οπότε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + \sqrt{x^2 + 3}) = (+\infty) + (+\infty) = \boxed{+\infty}$

iii. Η $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 3} + 5x - 1$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Επειδή $x \rightarrow -\infty$, θεωρούμε ότι $x < 0$.

Για $x < 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + 5x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5x - 1 \right) \\ &\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5x - 1 \right) \\ &\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5 - \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= (-\infty) \cdot \left(-\sqrt{4 + 0 + 0} + 5 - 0 \right) = (-\infty) \cdot (-2 + 5) = (-\infty) \cdot 3 = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

iv. Η $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5x + 6} - 2x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 6} - 2x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 5x + 6} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 5x + 6 - 4x^2}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right)} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 6}{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 2x} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

♦ Μορφή $(+\infty) + (-\infty) = ;$

♦ Μεγιστοβάθμιοι όροι της f

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{4x^2 + x + 3} & + & (5x - 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{4x^2} & + & 5x = \\ 2|x| & + & 5x \quad \begin{array}{l} (x < 0) \\ = \\ (x \rightarrow -\infty) \end{array} \\ -2x & + & 5x = \\ & & 3x \neq 0 \end{array}$$



Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

Μεθοδολογία

♦ Μορφή $(+\infty) - (+\infty) = ;$

♦ Μεγιστοβάθμιοι όροι της f

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{4x^2 + 5x + 6} & - & 2x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{4x^2} & - & 2x = \\ 2|x| & - & 2x \quad \begin{array}{l} (x > 0) \\ = \\ (x \rightarrow +\infty) \end{array} \\ 2x & - & 2x = \\ & & 0 \end{array}$$



Συζυγής παράσταση

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(5 + \frac{6}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(5 + \frac{6}{x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 2} = \frac{5 + 0}{\sqrt{4 + 0 + 0} + 2} = \boxed{\frac{5}{4}}
\end{aligned}$$

▼. Η $f(x) = \sqrt{9x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\sqrt{9x^2 + 4x + 3} - 3x\right) - \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x\right) + 3 \\
&= \frac{\left(\sqrt{9x^2 + 4x + 3}\right)^2 - (3x)^2}{\sqrt{9x^2 + 4x + 3} + 3x} - \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} + 3 \\
&= \frac{9x^2 + 4x + 3 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 4x + 3} + 3x} - \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} + 3 \\
&= \frac{|x| \cdot \sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 3x}{x \cdot \sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 3x} - \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} + 3 \\
&\stackrel{x>0}{=} \frac{4x + 3}{x \cdot \sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 3x} - \frac{2x + 2}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} + 3 \\
&= \frac{x \left(4 + \frac{3}{x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 3\right)} - \frac{x \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} + 3 \\
&= \frac{4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 3} - \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} + 3
\end{aligned}$$

Επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4 + 0}{3 + 3} - \frac{2 + 0}{1 + 1} + 3 = \frac{2}{3} - 1 + 3 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Μεθοδολογία

♦ Μορφή $(+\infty) - (+\infty) - (+\infty) =$;

♦ Μεγιστοβάθμιοι όροι της f

$$\sqrt{9x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x + 3$$

$$\begin{aligned}
&\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \\
&\sqrt{9x^2} \quad - \quad \sqrt{x^2} \quad - \quad 2x = \\
&3|x| \quad - \quad |x| \quad - \quad 2x \stackrel{x>0}{=} \\
&3x \quad - \quad x \quad - \quad 2x = \\
&(3x - 3x) - (x - x) = 0
\end{aligned}$$



Συζυγείς παραστάσεις

vi. Όπως στο ε) ερώτημα, αλλά τώρα για $x < 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \cdot \sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x + 3 \\ &= -x \cdot \sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x + 3 \\ &= x \cdot \left(-\sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2 + \frac{3}{x} \right) \end{aligned}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= (-\infty) \left(-\sqrt{9+0+0} + \sqrt{1+0+0} - 2 + 0 \right) = \\ &= (-\infty) (-3 + 1 - 2) = (-\infty) (-4) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

♦ Μορφή $(+\infty) - (+\infty) - (-\infty) = ;$

♦ Μεγιστοβάθμιοι όροι της f

$$\begin{aligned} \sqrt{9x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x + 3 \\ \sqrt{9x^2} - \sqrt{x^2} - 2x = \\ 3|x| - |x| - 2x \stackrel{x < 0}{=} \\ -3x + x - 2x = \\ -4x \neq 0 \end{aligned}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο με το μεγαλύτερο εκθέτη.

102.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 4x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

Λύση

i. Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 4x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2} \right)} - x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 4x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 4 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 4} = \frac{2 - 1}{1 + 4} = \boxed{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

ii. Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x})^2 \right] (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\left[(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2 \right] (\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2-x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(x+1-x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \left(\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + \sqrt{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right)}{2 \left(\sqrt{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} + \sqrt{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

Παραμετρικά όρια

103.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο στο $-\infty$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + \lambda x + 3}{\lambda x + 2}.$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι ρητή και οι συντελεστές των μεγαλύτερων δυνάμεων του x σε αριθμητή και παρονομαστή θα είναι αντίστοιχα οι $\lambda - 1$ και λ , εφόσον είναι διάφοροι του μηδενός.

Οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 0$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda - 1)x^2}{\lambda x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot x \right) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot (-\infty)$$

• Αν $\frac{\lambda - 1}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$ ή $\lambda > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

• Αν $\frac{\lambda - 1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

♦ Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

♦ Αν $\lambda = 0$, τότε $f(x) = \frac{-x^2 + 3}{2}$. Επομένως: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty$

Συνεπώς:
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \lambda \leq 0 \text{ ή } \lambda > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < \lambda < 1 \\ 1, & \text{αν } \lambda = 1 \end{cases}$$

104.

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \alpha x + 1)$ για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α .

Λύση

Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - \alpha x + 1$ με $D_f = \mathbb{R}$.

Επειδή $x \rightarrow +\infty$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε ότι $x > 0$.

Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4x}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right)} - \alpha x + 1 = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha x + 1 \\ &= |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha x + 1 = x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha x + 1 \\ &= x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha + \frac{1}{x} \right) = (+\infty) \cdot (\sqrt{1 + 0 + 0} - \alpha + 0) = (+\infty) \cdot (1 - \alpha) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

♦ Αν $1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Αν $1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

♦ Αν $1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$, τότε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x + 1 = \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} + 1 \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} + 1 \stackrel{x > 0}{=} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + x} + 1 = \frac{x \cdot \left(4 + \frac{5}{x} \right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 \right)} + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{4 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}} + 1. \text{ Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha < 1 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha > 1 \\ 3, & \text{αν } \alpha = 1 \end{cases}.$$

105.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda x$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + \lambda x = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \lambda x \\ &= -x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \lambda x = x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \lambda \right) \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) \left(-\sqrt{1-0+0} + 2\sqrt{1+0+0} + \lambda \right) = (-\infty)(\lambda + 1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

♦ Αν $\lambda + 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

♦ Αν $\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

♦ Αν $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$, τότε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} - x = \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x \right) - 2 \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} - 2 \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} - 2 \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} \\ &= \frac{x \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} - 2 \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} = \frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} - 2 \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1+0}{-\sqrt{1-0+0}-1} - 2 \frac{1+0}{-\sqrt{1+0+0}-1} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Συνεπώς : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda < -1 \\ \frac{3}{2}, & \text{αν } \lambda = 1 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda > -1 \end{cases}$$

Εύρεση παραμέτρων

106.

Αν $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 4} - \alpha x + \beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

Λύση

α' τρόπος

$$\begin{aligned} \text{Είναι : } f(x) &= \frac{x^3 - 4x^2 + 3 - \alpha x(x^2 + 4) + \beta(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \\ &= \frac{x^3 - 4x^2 + 3 - \alpha x^3 - 4\alpha x + \beta x^2 + 4\beta}{x^2 + 4} = \frac{(1-\alpha)x^3 + (\beta-4)x^2 - 4\alpha x + 4\beta + 3}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

♦ Αν $1-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$, τότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-\alpha)x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(1-\alpha)x] = (1-\alpha)(-\infty) = \\ &= \begin{cases} -\infty, & \text{αν } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{αν } 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{άτοπο} \end{aligned}$$

♦ Αν $1-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=1$, τότε :

$$f(x) = \frac{(\beta-4)x^2 - 4x + 4\beta + 3}{x^2 + 4} = \frac{x^2 \left(\beta - 4 - \frac{4}{x} + \frac{4\beta}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{\beta - 4 - \frac{4}{x} + \frac{4\beta}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\beta - 4 - 0 + 0 + 0}{1 + 0} = \beta - 4$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \text{άρα : } \beta - 4 = 2 \Leftrightarrow \beta = 6$$

$$\text{Άρα } \alpha = 1 \text{ και } \beta = 6$$

β' τρόπος

Για x κοντά στο $-\infty$ είναι $x < 0$ οπότε :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 4} - \alpha x + \beta \Leftrightarrow \alpha x = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 4} + \beta - f(x)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^3 + 4x} + \frac{\beta}{x} - \frac{f(x)}{x}$$

Είναι :

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\beta}{x} = 0$$

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 2 \cdot 0 = 0$$

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^3 + 4x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\beta}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + 0 - 1 = 1$$

Άρα $\alpha = 1$.

Επομένως :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 4} - x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3 - x^3 - 4x}{x^2 + 4} + \beta$$

$$\Leftrightarrow \beta = f(x) - \frac{-4x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4} \Leftrightarrow \beta = f(x) + \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 + 4}$$

Είναι :

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 + 4} = 2 + 4 = 6$$

Άρα $\beta = 6$.

107.

Αν $f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x + 15} + \alpha x + \beta$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

Λύση

α' τρόπος

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x < 0$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2} \right)} + \alpha x + \beta = |x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} + \alpha x + \beta \\
 &= -x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} + \alpha x + \beta = x \left(-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right)
 \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) \left(-\sqrt{4+0+0} + \alpha + 0 \right) = (-\infty)(\alpha - 2)$

♦ Αν $\alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ **Άτοπο**

♦ Αν $\alpha - 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ **Άτοπο**

♦ Αν $\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$, τότε :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{4x^2 + 8x + 15} + 2x + \beta = \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 8x + 15} \right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 8x + 15} - 2x} + \beta \\
 &= \frac{4x^2 + 8x + 15 - 4x^2}{-x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} - 2x} + \beta = \frac{x \left(8 + \frac{15}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} - 2 \right)} + \beta = \frac{8 + \frac{15}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} - 2} + \beta
 \end{aligned}$$

Οπότε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{8+0}{-\sqrt{4+0+0}-2} + \beta = \frac{8}{-4} + \beta = -2 + \beta$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$

Άρα : $-2 + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 8$

Επομένως **$\alpha = 2$** και **$\beta = 8$**

β' τρόπος

Για x κοντά στο $-\infty$ είναι $x < 0$ οπότε :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{4x^2 + 8x + 15} + \alpha x + \beta \Leftrightarrow \alpha x = f(x) - \sqrt{4x^2 + 8x + 15} - \beta \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha &= \frac{f(x)}{x} - \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 15}}{x} - \frac{\beta}{x}
 \end{aligned}$$

Είναι :

♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 6 \cdot 0 = 0$

♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 15}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}}{x} \stackrel{(x < 0)}{=} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} \right) = -2$$

♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\beta}{x} = 0$

Οπότε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 15}}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\beta}{x}$

Άρα $\alpha = 0 - (-2) - 0 = 2$. Επομένως :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{4x^2 + 8x + 15} + 2x + \beta = \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 8x + 15}\right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 8x + 15} - 2x} + \beta \\ &= \frac{4x^2 + 8x + 15 - 4x^2}{-x\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} - 2x} + \beta = \frac{x\left(8 + \frac{15}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} - 2\right)} + \beta = \frac{8 + \frac{15}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} - 2} + \beta \end{aligned}$$

Οπότε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{8+0}{-\sqrt{4+0+0}-2} + \beta = \frac{8}{-4} + \beta = -2 + \beta$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$

Άρα : $-2 + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 8$. Επομένως $\alpha = 2$ και $\beta = 8$

Εύρεση ορίου συνάρτησης και εύρεση παραμέτρων από γνωστά όρια

108.

Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = 3$$

Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xf(x) + 1}{2x^2 + 1}$

Λύση

i. Θέτουμε $g(x) = \frac{x^2 f(x) - 2x^2 + 1}{x^2 + 2}$, για x κοντά στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

$$g(x)(x^2 + 2) = x^2 f(x) - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 f(x) = g(x)(x^2 + 2) + 2x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

και
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)(x^2 + 2) + 2x^2 - 1}{x^2}$$

Είναι :

$$f(x) = \frac{g(x) \cdot x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 \left[g(x) \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + 2 - \frac{1}{x^2} \right]}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + 2 - \frac{1}{x^2}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + 2 - \frac{1}{x^2} \right] = 3(1+0) + 2 - 0 = \boxed{5}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \cdot f(x) + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3f(x) + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{3f(x) + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} \right] \stackrel{a)}{=} 0 \cdot \frac{3 \cdot 5 + 0}{2 + 0} = \boxed{0}$

109.

Έστω η συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1$.

Λύση

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 \frac{f(x)}{x} + \lambda - \frac{1}{x} \right)}{x \left(f(x) - 2x + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \frac{f(x)}{x} + \lambda - \frac{1}{x}}{f(x) - 2x + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lambda - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2 \cdot 2 + \lambda - 0}{3 + 0} = \frac{\lambda + 4}{3}$$

$$\text{Επομένως } \frac{\lambda + 4}{3} = 1 \Leftrightarrow \lambda + 4 = 3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}.$$

Εύρεση πολυωνύμου

110.

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3.$$

Λύση

Αν $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $v \in \mathbb{N}$, $\alpha_v \neq 0$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_v x^v}{x^2} = \alpha_v \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^v}{x^2}$$

♦ Αν $v < 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 0$ **Ατοπο**

♦ Αν $v > 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = +\infty$ ή $-\infty$ **Ατοπο**

Άρα πρέπει $v = 2$, οπότε το $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού.

Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$

Άρα $\alpha = 3$.

Τότε : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 - 2x + 1} = 3$

Αν $f(x) = \frac{3x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 - 2x + 1}$, για x κοντά στο 1 έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

Είναι : $3x^2 + \beta x + \gamma = f(x)(x^2 - 2x + 1)$

Συνεπώς : $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + \beta x + \gamma) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 2x + 1)] = 3 \cdot 0 = 0$

Άρα : $3 + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -3 - \beta$ **(1)**

Έτσι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + \beta x - 3 - \beta}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1) + \beta(x - 1)}{(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)(x + 1) + \beta(x - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(3x + 3 + \beta)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 3 + \beta}{x - 1} \quad (2) \end{aligned}$$

Αν $g(x) = \frac{3x + 3 + \beta}{x - 1}$, για x κοντά στο 1, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

Είναι : $3x + 3 + \beta = g(x)(x - 1)$ και

$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 3 + \beta) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x - 1)] = 3 \cdot 0 = 0$

Άρα $3 + 3 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -6$

Τότε από **(2)** : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$

Οπότε από **(1)** : $\gamma = 3$. Επομένως $\alpha = 3$, $\beta = -6$, $\gamma = 3$

και $P(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$

Τριγωνομετρικά όρια

111.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\eta\mu x - 2x)$

Λύση

i. Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \eta\mu x \right)$

Είναι : $|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$

$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$

Οπότε σύμφωνα με το **Κριτήριο**

Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

ii. Για $x > 0$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} \stackrel{\alpha)}{=} \frac{0}{1 + 0} = \boxed{0}$$

iii. Για $x < 0$ έχουμε :

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -x \geq x\eta\mu x \geq x \Leftrightarrow -x - 2x \geq x\eta\mu x - 2x \geq x - 2x \Leftrightarrow -3x \geq x\eta\mu x - 2x \geq -x$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

Οπότε σύμφωνα με το **Κριτήριο Παρεμβολής** προκύπτει :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\eta\mu x - 2x) = +\infty.$$

112.

Να υπολογίσετε τα όρια :

Παρατηρήσεις

♦ Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ δεν έχουν όριο στο $+\infty$ και $-\infty$.

♦ Με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής, αποδεικνύεται ότι :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$$

αφού ως γνωστόν :

“Μηδενική · Φραγμένη = Μηδενική”

♦ Η ύπαρξη ορίου

$$\eta\mu(\pm\infty) \text{ ή } \sigma\upsilon\nu(\pm\infty)$$

σηματοδοτεί το :

“Μηδενική · Φραγμένη = Μηδενική”

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu^v \frac{1}{x} \right), v \in \mathbb{N}^*$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x}$

Λύση

i. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $v = 1$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)^{(+\infty) \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{x}$. Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

δηλαδή όταν $x \rightarrow +\infty$ το $u \rightarrow 0$

Επομένως : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$

♦ Αν $v > 1$, τότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu^v \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \cdot \eta\mu^{v-1} \frac{1}{x} \right) \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u} \cdot \eta\mu u \cdot \eta\mu^{v-1} u \right) = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \eta\mu^{v-1} u = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu^v \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } v = 1 \\ 0, & \text{αν } v > 1 \end{cases}}$$

ii. Για $x > 0$ διαδοχικά έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x} \left(\sqrt{x^2 + x} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + x} \right)^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + x \right)}{x^2 + x - x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \right)}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\eta\mu \frac{1}{x} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \right) \right] = \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Ενώ, θέτοντας $u = \frac{1}{x}$,

αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$$

δεν ισχύει κάτι ανάλογο για

$$\text{το } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right).$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \eta \mu \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) = 1 \cdot (\sqrt{1+0} + 1) = \boxed{2}$$

Όρια εκθετικών - λογαριθμικών συναρτήσεων

113.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x-1} + 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+1} + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 5 \cdot 3^x}$

Λύση

i. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x-1} + 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^x - 1}{\frac{1}{2} 2^x + 3} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \left(2 - \frac{1}{2^x}\right)}{2^x \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{2^x}}{\frac{1}{2} + 3 \frac{1}{2^x}} = \frac{2 - 0}{\frac{1}{2} + 3 \cdot 0} = \boxed{4} \quad \text{γιατί} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

ii. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+1} + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2 \cdot 2^x}{3 \cdot 3^x + 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(1 + 2 \frac{2^x}{3^x}\right)}{3^x \left(3 + \frac{1}{3^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^x}{3 + \left(\frac{1}{3}\right)^x} \\ &= \frac{1 + 2 \cdot 0}{3 + 0} = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{γιατί} \quad 0 < \frac{2}{3} < 1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$\text{και} \quad 0 < \frac{1}{3} < 1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

Μνημονικός κανόνας

- ♦ Αν $0 < a < 1$, τότε
 $a^{-\infty} = +\infty$ και $a^{+\infty} = 0$
- ♦ Αν $a > 1$, τότε
 $a^{-\infty} = 0$ και $a^{+\infty} = +\infty$
- ♦ $e^{-\infty} = 0$ και $e^{+\infty} = +\infty$

Μεθοδολογία

Τα όρια εκθετικών συναρτήσεων με διαφορετικές βάσεις συνήθως τα αντιμετωπίζουμε ως εξής :

- ♦ Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση ώστε να δημιουργηθεί όριο της a^x , με $0 < a < 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.
- ♦ Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μικρότερη βάση, ώστε να δημιουργηθεί όριο της a^x με $a > 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

iii. Είναι :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 5 \cdot 3^x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3 \cdot 3^x}{2 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \left(1 + 3 \frac{3^x}{2^x}\right)}{2^x \left(2 + 5 \frac{3^x}{2^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^x}{2 + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^x} \\ &= \frac{1 + 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{γιατί } \frac{3}{2} > 1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0.\end{aligned}$$

114.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Λύση

α. Πρέπει $\frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

Άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

β. i. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Θέτουμε $u = \frac{x-1}{x+1}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$,

δηλαδή όταν $x \rightarrow -\infty$ το $u \rightarrow 1$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = \boxed{0}$

ii. Επειδή $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, το x τείνει στο 1 μόνο από τα δεξιά.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Θέτουμε $t = \frac{x-1}{x+1}$, οπότε

$\lim_{x \rightarrow 1^+} t = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$, δηλαδή όταν $x \rightarrow 1^+$ το $t \rightarrow 0^+$, (αφού για

κάθε $x > 1$ είναι $t = \frac{x-1}{x+1} > 0$)

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$.

iii. Επειδή $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, το x τείνει στο -1 μόνο από τα αριστερά.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Θέτουμε $h = \frac{x-1}{x+1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} u = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot (x-1) \right] \stackrel{x < -1}{x+1 < 0} = (-\infty) \cdot (-2) = +\infty,$$

δηλαδή όταν $x \rightarrow -1^-$ το $h \rightarrow +\infty$.

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \ln h = \boxed{+\infty}.$$

115.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{3^{2x} + e^{2x}}{e^x} - x$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Λύση

Επειδή $\frac{3^{2x} + e^{2x}}{e^x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{9^x + e^{2x}}{e^x} - x \cdot \ln e = \ln \frac{9^x + e^{2x}}{e^x} - \ln e^x = \ln \frac{9^x + e^{2x}}{e^x} \\ &= \ln \frac{9^x + e^{2x}}{e^{2x}} = \ln \left(\frac{9^x}{e^{2x}} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \right) = \ln \left[\left(\frac{9}{e^2} \right)^x + 1 \right] \end{aligned}$$

i. Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ θέτουμε $u = \left(\frac{9}{e^2} \right)^x + 1$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{9}{e^2} \right)^x + 1 \right] = +\infty, \text{ γιατί } \frac{9}{e^2} > 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{e^2} \right)^x = +\infty$$

Δηλαδή όταν $x \rightarrow +\infty$ το $u \rightarrow +\infty$. Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = \boxed{+\infty}$.

ii. Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ θέτουμε $t = \left(\frac{9}{e^2} \right)^x + 1$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} t = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{9}{e^2} \right)^x + 1 \right] = 0 + 1 = 1, \text{ γιατί } \frac{9}{e^2} > 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9}{e^2} \right)^x = 0$$

Δηλαδή όταν $x \rightarrow -\infty$ το $t \rightarrow 1$.

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = \ln 1 = \boxed{0}.$$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Ασκήσεις

Όρια πολυωνυμικών - ρητών συναρτήσεων

441. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 5x + 7)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - x^2 + 5 - 3x^3)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 - 6x}$ iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 3}{2x^3 + x^2 + 3x}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 7}{3x + 6}$ vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1} - \frac{x^2 - 5x}{2x + 4} \right)$

442. i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+2017)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2017)}{(x-2016)^{2016}}$

443. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι

$$|(1+x^4)f(x) - 2x^4| \leq x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

444. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|1-x^5| - |x^5 + x^2 - 1|}{|1-x^2| + 7}$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x^3 - 1| - |x^4 - 6|}{|x^2 - 5| + |7 - x|}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x + 4| - |1 - 2x^3|}{|x^3 - x^2 + 1| + 5}$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3x - 6| - |2 - x^2| + 2}{|x^3 - 5| + 1}$

445. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|10 - 2x^8| - 3x^5 - 1}{|x^7 - 4| - 8x^4 + 2}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Όρια άρρητων συναρτήσεων

446. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 5} + \sqrt{x^2 - x + 3} \right)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - 5x + 4 \right)$ iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4x+1} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right)$ vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x} - x + 1 \right)$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 5} \right) \quad \text{viii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} \right)$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{2x+1} \left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+5} \right) \right] \quad \text{x. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 - 1 + x\sqrt{x^2 + 3} \right)$$

$$\text{xi. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x} \right)$$

447. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f^2(x) - 2}{f^2(x) + 3f(x) + 1} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^3(x) - f(x) - 2| + 3}{f^2(x) + |f(x) + 5|}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + f(x) + 2} - f(x) \right)$$

448. Έστω f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq f(x) + x \geq \sqrt{x^2 + 4x + 6}$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

449. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x \right)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 4} + 2\sqrt{x^2 + 2x + 3} - 3x \right)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{9x^2 + 6x + 2} \right)$$

450. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - 2x + 3}{x + 2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right)$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

451. Για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$|(x+1)f(x) - 2x| \leq \sqrt{x}, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

452. Για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sqrt{4x^2 + 1} - x \leq f(x) + x \leq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε τα όρια

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{f(x)} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)+1}-1}{f(x)}$$

453. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x) + x - \sqrt{x^2 + x + 1}) = 3$,
να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Παραμετρικά όρια

454. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda x^3 - x^3 + \lambda x^2 + 2x - 9) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^3 + 4x - 2}{\lambda x^2 + 2}$$

455. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^3 - 2x^3 + \mu x + x + 1}{\mu x^2 + 1}$ αν $\mu \in \mathbb{R}$.

456. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + x}{(a-1)x + 1}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

457. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda - 1)x + 2}{(\lambda + 5)x + 7}$.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

458. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

459. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - a^2 x + 3ax)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a .

460. Αν $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + ax})$.

Εύρεση παραμέτρων

461. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right) = 3$$

462. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\alpha x + \beta - \frac{x^2 - 1}{x - 3} \right) = 1$.

- 463.** Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + \alpha x + \beta \right) = 3$$

- 464.** Έστω η συνάρτηση f , με $f(x) = \sqrt{9x^2 + 4x + 1} + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

- i.** Να βρείτε τους α, β . **ii.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 465.** Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\alpha x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \beta x} \right) = 1$

- 466.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + \alpha x + \beta$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β , έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

- 467.** Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 - 2x + 1} + \alpha x + \beta \right) = 0$$

- 468.** Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x^2) = 3, \text{ να βρείτε τον αριθμό } \lambda, \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + 3x^2}{x^2 f(x) - \lambda x^4} = 5.$$

Εύρεση ορίου συνάρτησης και εύρεση παραμέτρων από γνωστά όρια

- 469.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία

υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x - 2}{x + 2} = 4$. Να βρείτε:

- i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) + 3x^2 - x + 5}{x^2 f(x) + x + 1}$

- 470.** Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x} = L \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 471.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$.

Να βρείτε τα όρια :

- i.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

- 472.** Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x + 3} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.

473. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 3] = 0$, τότε να βρείτε :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 f(x) - 2x^4 + 4x^3 + 5]$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) + 3x^3 + 1}{x^3 f(x) - 2x^4 + 4x^3 + 5}$

474. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4f(x) - 3x) = 3$, να βρείτε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 5x^2 - x + 1}{4x^2 f(x) - 3x^3 + 2x - 1}$$

475. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία υποθέτουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 4.$$

Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \mu x - 2}{xf(x) - 3x^2 + x + 1} = 2$.

476. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$

477. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x + 1} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) + \alpha g(x)}{f(x) - \alpha g(x)} \right) = 2$$

478. Για τις συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x + 1} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$$

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3\mu g(x)}{f(x) - g(x)} = -2$, να βρείτε τον $\mu \in \mathbb{R}$.

479. Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x - \sqrt{x})g(x) \right] = 5$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)]$.

480. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f(x)] = 1$

Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} [x f(x)]$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} f\left(\frac{2}{x}\right) \right]$

Εύρεση πολυωνύμου

481. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ και το $\ell \in \mathbb{R}$ αν ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + 1} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x^2 - 4x + 4} = \ell \in \mathbb{R}$$

482. Να βρείτε την πολυωνμική συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x - \alpha} = -6, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = -6.$$

483. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 4} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x^2 - 4} = \frac{9}{4}$$

i. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{P(x)} - 2x)$.

484. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι

$$f(0) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \alpha} = -2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x + \alpha} = \beta, \quad \beta \neq 0$$

καθώς και οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικά όρια

485. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \eta \mu x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 1 + \eta \mu x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x^2 + 3x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sigma \upsilon \nu x}{x^2 - \eta \mu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sigma \upsilon \nu x}{x^2 + 1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}{2x^3 + x + 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}{x + x^3}$

viii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}{2x^2 + 3x + 1}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{ix.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{3x^2 + x} \\
 \text{x.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \\
 \text{xi.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x+1} \right) \\
 \text{xii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(x^4 + 1)}{x^4 + 1} \\
 \text{xiii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - 1 \right) \right] \\
 \text{xiv.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - x^2}{2x - 1} \\
 \text{xv.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{4 + 2\eta\mu x} \\
 \text{xvi.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{5 - 2\sigma\upsilon\nu x} \\
 \text{xvii.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x\eta\mu \frac{2}{x} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - x \right) \right] \\
 \text{xviii.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{2x} \eta\mu \frac{3}{2x} \right)
 \end{array}$$

486. Να βρείτε ,αν υπάρχει ,το :

$$\begin{array}{lll}
 \text{i.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^v \eta\mu \frac{1}{x} \right), v \in \mathbb{N} & \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^v \eta\mu \frac{1}{x} \right), v \in \mathbb{N} & \text{iii.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v}, \\
 & v \in \mathbb{N}^* & &
 \end{array}$$

487. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ όταν είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 2$.

488. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\frac{\eta\mu x + 2x^2 + 10x}{x + 2} \leq f(x) \leq \frac{2x^2 + 8x + 7}{x + 1}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 6$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x + x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x f(x) - 2x^2 - 4x + 3}$.

489. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\left| \sqrt{x^4 + 1} \cdot f(x) - x \right| \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\begin{array}{lll}
 \text{i.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \eta\mu x] & \text{iii.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \eta\mu f(x)}{f^4(x) - 2f^3(x)}
 \end{array}$$

490. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 3f(x) - 2x = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f^{-1}(x) + \eta\mu 5x + 5}{\eta\mu x}$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$.

491. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f(x) = 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 3$.

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$.

iv. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$.

492. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^2 - 2 \leq f(x) \leq x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu x - 3)f(x) \right] = -\infty$.

Ορια εκθετικών – λογαριθμικών συναρτήσεων

493. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2+1}{x+2}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2+1}{x+1}}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2}{e^x + 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^{x+1}}{e^{x+2} + 2^x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2}$

ix. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x} \quad \text{xi. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x} \quad \text{xii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{-x} \cdot \eta\mu x)$$

494. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4e^{2x} - e^x + 3}{e^{2x} - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Να υπολογίσετε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

495. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5^x}{3^x + 2}$, με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{f^2(x) + 2f(x) - 3} - f(x)]$.

496. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, αν $f(x) = \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}$ $\alpha > 0$.

497. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, αν $f(x) = \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$ $\alpha > 2$.

498. Να βρείτε, αν υπάρχει, το :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{\alpha^x + \alpha^{-x}}$, $\alpha > 0$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+2} + 3^{2x}}{\alpha^x + 9^{x+1}}$, $\alpha > 0$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+1} - 10^x}{\alpha^{x+1} + 10^x}$, $\alpha > 0$

499. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\frac{1}{2^x} + 2}{\frac{1}{2^x} + 1}$, $x \neq 0$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

500. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\frac{1}{2^x} + 1}{4 \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 1}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

501. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^{x+1} \eta\mu \frac{\pi}{2^x}$. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

502. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^x + 3^x)f(x) + \eta\mu x}{2^{x+2} - 3^{x+1}} = 2$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

503. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 2x}) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{\sqrt{x^2 + 4}} - 3^{\sqrt{x^2 + 2x}})$$

504. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$$(e^x + 1)f(x) \geq 3^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$$

505. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x \eta\mu \frac{1}{x} + 3^{x+1} & , \quad \text{αν } x < 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} + \sqrt{x^2 + 8x} + \alpha - x & , \quad \text{αν } x > 0 \end{cases}$

όπου $\alpha > 0$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

506. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+2)\ln x]$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln x + 2}{2 - \ln x}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{2x+3}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(\eta\mu x) - \ln x]$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - \ln(e^{2x} + e^x + 1)]$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + 1}{\ln x + 1}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$$

507. Αν $f(x) = \ln \frac{x-3}{2x}$, να βρείτε :

α. το πεδίο ορισμού της f .

β. τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

508. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

509. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

Να βρείτε :

α. Το πεδίο ορισμού της f .

β. Τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$

510. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x^2 + \kappa}{x}$, $\kappa > 0$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) - \ln x > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$.

511. Έστω $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

512. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x + 2)$, $x > -1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

513. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$.

514. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x - 3^x}{4^x + 2}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x - 3^x}{4^x + 2}$.

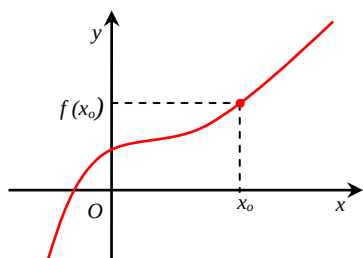
515. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + ax + 2}{x - 1}$, $x > 1$.

i. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

ii. Για $a=0$ και $h(x) = \ln f(x)$ να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

- iii. Για $\alpha = 0$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f^2(x) - f(x) - 1| - f(x) - 1}{f^2(x)(x + \eta\mu x)}$
- iv. Αν $\alpha = 0$ και για τη συνάρτηση g ισχύει $|g(x) - f^2(x) - 1| < 2f(x)$ για κάθε $x > 1$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$
- 516.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x+2}{x^2+x}$.
- i. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- ii. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{-x} f(x) \eta\mu \frac{1}{2f(x)} \right]$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) e^{\frac{1}{x}} + e^{-f(x)} \ln x \right]$
- iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x) + \eta\mu x}$
- iv. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και στη συνέχεια το λ , ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\lambda x e^{f(x)}}{1 + f(x) - \sigma\upsilon\nu x} - \lambda \right] = e^\lambda - 1$
- 517.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$, $x > 0$.
- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β. Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών της $f(x)$.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\ln x) + \frac{\ln x - 1}{\ln x} = 1 - \ln x + \frac{e - x}{e}$.
- δ. Να υπολογίσετε τα:
- i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$

Συνέχεια συνάρτησης



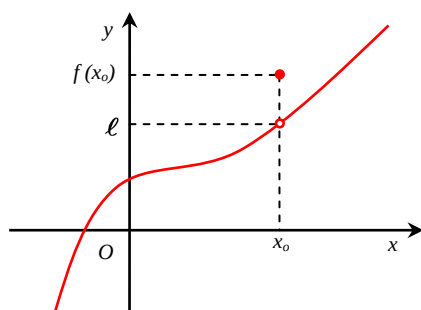
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Η C_f στο x_0 δεν παρουσιάζει κάποια διακοπή, κάποιο «κενό».

- ♦ Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.
Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** όταν :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και ισούται με την τιμή της f στο x_0 .



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

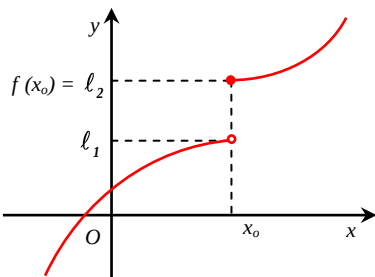
Η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

- ♦ Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.
Η συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής στο x_0** όταν :

- δεν υπάρχει το όριο της στο x_0

ή

- υπάρχει το όριο της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

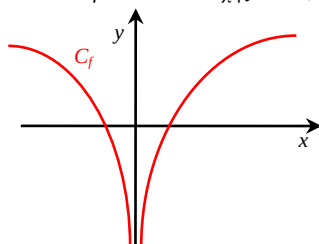


$$\text{Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

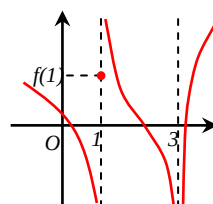
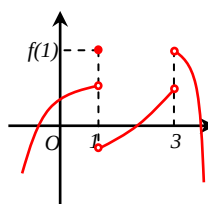
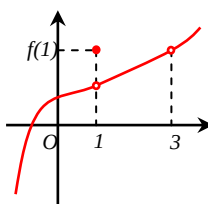
Η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Παρατηρήσεις:

1. Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της θα λέγεται απλά **συνεχής συνάρτηση**.
2. Τονίζουμε ότι αναφερόμαστε για συνέχεια μιας συνάρτησης στο σημείο x_0 , μόνο αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.



Η f είναι **συνεχής** συνάρτηση (στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}^*$)



Η f (σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις) είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο ορισμού της εκτός από το $x_0 = 1$.

Δε νοείται **συνέχεια** (ή ασυνέχεια) της f στο $x_0 = 3$, αφού $3 \notin D_f$.

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- ♦ Κάθε πολωνομική συνάρτηση είναι συνεχής.
- ♦ Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής.
- ♦ Οι συναρτήσεις η_{mx} , σ_{nx} είναι συνεχείς.
- ♦ Οι συναρτήσεις a^x , $\log_a x$ με $0 < a \neq 1$ είναι συνεχείς.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

- ♦ Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις :

$$f + g, \quad f - g, \quad cf \text{ με } c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ όταν } g(x_0) \neq 0, \\ |f|, \quad \sqrt[k]{f} \text{ όπου } k \in \mathbb{N}^* \text{ και } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

Παρατήρηση :

Δεν ισχύει το αντίστροφο! Δηλαδή αν μια από τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$, $|f|$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 , αυτό δε σημαίνει ότι και οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 .

Παράδειγμα

$$\text{Για τις συναρτήσεις : } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ και } g(x) = \begin{cases} \frac{-|x|}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases} \text{ ισχύουν:}$$

- ♦ $(f + g)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$: συνεχής στο $x_0 = 0$

- ♦ $|f|(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$: συνεχής στο $x_0 = 0$

Αλλά f , g δεν είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Παράδειγμα

$$\text{Για τις συναρτήσεις : } f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases} \text{ ισχύουν :}$$

- ♦ $H f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

- ♦ $H g$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

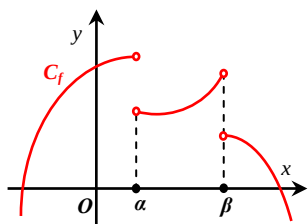
- ♦ $H g$ είναι όμως συνεχής στο $f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}$

Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

Παρατήρηση :

Αν οι f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ τότε και η σύνθεση $g \circ f$ ή $f \circ g$ είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

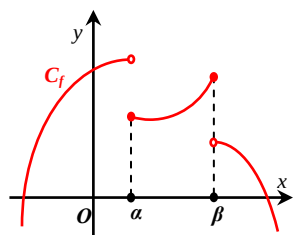
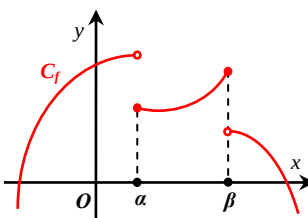
Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα



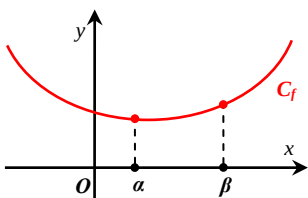
♦ Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σ' ένα ανοιχτό διάστημα (a, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .

♦ Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$



Η f δεν είναι συνεχής στα a και β αλλά είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.



Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

Παρατηρήσεις :

1. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο A και $[a, \beta] \subseteq A$, τότε **δεν είναι σωστό** να λέμε ότι η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, \beta]$, αφού (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) η f μπορεί να μην είναι συνεχής στα άκρα a και β αλλά να είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

Αν όμως η f ορίζεται **μόνο στο $[a, \beta]$** τότε η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, \beta]$.

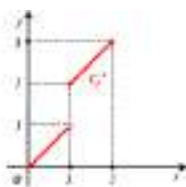
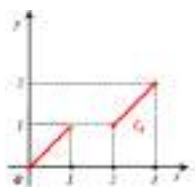
2. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε θα είναι συνεχής και σε οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του Δ .

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε ορίζεται στο $[a, \beta]$. Επομένως είναι πλεονασμός να λέμε «ορισμένη και συνεχής».

Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε η αντίστροφή της **δεν** είναι απαραίτητα συνεχής.

Παράδειγμα :



$$H \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x-1, & x \in [2, 3] \end{cases} \text{ είναι συνεχής με αντίστροφη τη } f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x+1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής στο 1

Αποδεικνύεται όμως (η απόδειξη είναι εκτός εξεταστέας ύλης) ότι : **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ τότε η αντίστροφη της (εφόσον βέβαια ορίζεται) είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συνέχεια της f στο x_0 και στο D_f

116.

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις συναρτήσεις :

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3x-2, & x > 1 \end{cases} \text{ και } x_0 = 1 \quad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases} \text{ και } x_0 = 2$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x + x^2}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \text{ και } x_0 = 0$$

Λύση

$$\text{i. Είναι : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-2) = 3-2=1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και επομένως **η f δεν**

είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\text{ii. Είναι : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

Επίσης $f(2) = 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$, **η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.**

Παρατήρηση

$$\text{iii. Είναι : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + 1$$

$$= (+\infty) \cdot 1 + 1 = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Αν βρίσκαμε πρώτα ότι το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ είναι μη πεπερασμένο, δε θα χρειαζόταν να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, αφού και να υπήρχε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δε θα μπορούσε ποτέ να είναι ίσο με το $f(0)$ που είναι πραγματικός αριθμός

117.

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) + \sin x, & x \leq 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} + \frac{\eta\mu x}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Λύση

- ♦ Στο (ανοικτό) διάστημα $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $\ln(x^2 + 1)$, που είναι σύνθεση των συνεχών $\ln x$ και $x^2 + 1$ (πολυωνυμική) και της $\sin x$.

Παρατήρηση

Αν η ερώτηση είναι να εξεταστεί η **συνέχεια στο x_0** , απαντάμε μόνο για το x_0 . Αν η ερώτηση είναι να εξεταστεί η **συνέχεια της f** , πρέπει να εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

- ♦ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών $e^{\frac{-1}{x}}$ που είναι σύνθεση των συνεχών e^x και $\frac{-1}{x}$ (ρητή) και $\frac{\eta\mu x}{x}$ που είναι πηλίκο των συνεχών $\eta\mu x$ και x .

- ♦ Στο σημείο $x_0 = 0$ είναι :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [\ln(x^2 + 1) + \sin x] = \ln 1 + \sin 0 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^{\frac{-1}{x}} + \frac{\eta\mu x}{x} \right]$$

Για το $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1}{x}}$ θέτουμε $u = \frac{-1}{x}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$.

Άρα όταν $x \rightarrow 0^+$, το $u \rightarrow -\infty$ και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και επειδή $f(0) = \ln 1 + \sin 0 = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Συνεπώς η f είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$.

118.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ 2 - x^2, & x \in [0, 1] \\ \ln x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

i. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f .

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα

$$(-\infty, 0), (0, 1) \text{ και } (1, +\infty)$$

ως εκθετική, πολυωνυμική και λογαριθμική συνάρτηση αντίστοιχα.

Επίσης έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x^2) = 2 - 0^2 = 2.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 0.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 2 - 1^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 1.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής

στο διάστημα $(0, 1)$

ως πολυωνυμική.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι
συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$.

Παρατήρηση

♦ Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (a, b) αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b)

♦ Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[a, b]$ αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Εύρεση παραμέτρων

119.

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} ax - \beta & , x \leq 1 \\ 3x & , 1 < x \leq 2 \\ \beta x^2 - a & , x > 2 \end{cases} \text{ να βρείτε τις τιμές των } a, \beta \in \mathbb{R}$$

ώστε η f να είναι συνεχής.

Λύση

Στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για να είναι η f συνεχής (στο $\mathbb{R}$, που είναι το πεδίο ορισμού της) πρέπει να είναι συνεχής και στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Προς τούτο πρέπει και αρκεί :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Είναι :

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x - \beta) = \alpha - \beta$$

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x = 3$$

$$\blacklozenge \quad f(1) = \alpha - \beta$$

Οπότε πρέπει $\alpha - \beta = 3$ (1)

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x) = 6$$

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\beta x^2 - \alpha) = 4\beta - \alpha$$

$$\blacklozenge \quad f(2) = 6$$

Οπότε πρέπει $4\beta - \alpha = 6$ (2)

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } \begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ 4\beta - \alpha = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 + \beta \\ 4\beta - 3 - \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 + \beta \\ 3\beta = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

120.

$$\text{Να βρείτε τα } \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \text{ ώστε η συνάρτηση } f \text{ με τύπο } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + \kappa}{x - 2}, & x < 2 \\ 3x + \lambda, & x \geq 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + \lambda) = 6 + \lambda = f(2)$ θα πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + \kappa}{x - 2} = 6 + \lambda \quad (1)$$

Για $x < 2$ είναι :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + \kappa}{x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + \kappa = (x - 2)f(x)$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + \kappa) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(x - 2)f(x)] = 0(6 + \lambda) = 0$$

Άρα

$$4 - 6 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

Για $\kappa = 2$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 1$$

Από (1) τώρα παίρνουμε :

$$6 + \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -5$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι

$$\kappa = 2 \quad \text{και} \quad \lambda = -5$$

Εύρεση της τιμής της f στο x_0 όταν η f είναι συνεχής στο x_0 .

121.

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|xf(x) - \eta\mu x| \leq \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Λύση

Είναι :

$$|xf(x) - \eta\mu x| \leq \eta\mu^2 x$$

$$\Leftrightarrow -\eta\mu^2 x \leq xf(x) - \eta\mu x \leq \eta\mu^2 x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x - \eta\mu^2 x \leq xf(x) \leq \eta\mu x + \eta\mu^2 x$$

Αν $x > 0$ έχουμε :

$$\frac{\eta\mu x - \eta\mu^2 x}{x} \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x}$$

Είναι :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - \eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 - 1 \cdot 0 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Αλλά η f είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$) άρα και στο $x_0 = 0$.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$. Επομένως **$f(0) = 1$**

122.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 1} = \ell \in \mathbb{R}$,
να βρείτε την τιμή της f στο 1.

Λύση

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Παρατήρηση

Είναι φανερό ότι ο υπολογισμός του $f(0)$ δεν μπορεί να προκύψει άμεσα από τη δεδομένη σχέση με αντικατάσταση. Επομένως το $f(0)$ θα υπολογισθεί μέσω του $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, αφού λόγω της συνέχειας

στο 0 ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Στη συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση αρκεί ο υπολογισμός μόνο του πλευρικού ορίου $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (ή του $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$).

Οπότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 1}$, για x κοντά στο 1, οπότε $f(x) = g(x) \cdot (x^2 - 1) + 2x$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x^2 - 1) + 2x] = \ell \cdot (1 - 1) + 2 \cdot 1 = 2$. Επομένως $f(1) = 2$.

123.

Αν $x^3 f(x) \leq (\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x_0 = 0$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο 0, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

♦ Αν $x > 0$ έχουμε: $x^3 f(x) \leq (\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x}{x^3}$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(\sqrt{x^2 + 4})^2 - 2^2] \eta \mu 4x}{x^3 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4 - 4) \eta \mu 4x}{x^3 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta \mu 4x}{x^3 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 4x}{x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \frac{\eta \mu 4x}{4x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \right) = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Επομένως από (1) συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x}{x^3}$

Άρα $f(0) \leq 1$ (2)

♦ Αν $x < 0$ έχουμε: $x^3 f(x) \leq (\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x}{x^3}$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \eta \mu 4x}{x^3}$, άρα $f(0) \geq 1$ (3)

Από (2) και (3) παίρνουμε $f(0) = 1$

124.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = +\infty$. Να εξετάσετε αν η f μπορεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Λύση

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο 1. Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Αν $g(x) = \frac{f(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1}$, για x κοντά στο 1, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ και

$$f(x) = \frac{(x-1)g(x)}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)g(x)}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow f(x) = (\sqrt{x}+1)g(x)$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(\sqrt{x}+1)g(x)] = 2(+\infty) = +\infty$ **Άτοπο**

Άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο 1.

Εύρεση του τύπου συνεχούς συνάρτησης

125.

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει :

$$x^2 f(x) = \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Είναι $x^2 f(x) = \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Για $x \neq 0$ έχουμε $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - 1}{x^2}$.

Για να οριστεί πλήρως η f απομένει να βρούμε την τιμή της για $x = 0$, δηλαδή το $f(0)$.

Η f είναι όμως συνεχής στο 0, επομένως έχουμε :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \eta \mu^2 x})^2 - 1^2}{x^2 (\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta \mu^2 x - 1}{x^2 (\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} + 1} \right] = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Εύρεση ορίων από γνωστά όρια

126.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4} = 3$,

να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4f(2)}{\sqrt{x+2} - 2}$.

Λύση

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4}$, για x κοντά στο 2. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \quad \text{και} \quad f(x) = (x^2 - 4)g(x) - x^2 \quad (1)$$

$$\text{Οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4)g(x) - x^2] = 0 \cdot 3 - 4 = -4$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Άρα $f(2) = -4$

$$\text{Επομένως ζητάμε το} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) + 16}{\sqrt{x+2} - 2}.$$

α' τρόπος

Λόγω της σχέσης (1) έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) + 16}{\sqrt{x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 [(x^2 - 4)g(x) - x^2] + 16}{\sqrt{x+2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 (x^2 - 4)g(x) - x^4 + 16}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 (x^2 - 4)g(x) - (x^2 - 4)(x^2 + 4)}{\sqrt{x+2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 g(x) - x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 g(x) - x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} [(x+2)(x^2 g(x) - x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)] = 4 \cdot (4 \cdot 3 - 4 - 4) \cdot (2 + 2) = \mathbf{64} \end{aligned}$$

β' τρόπος

Θα δημιουργήσουμε στο ζητούμενο όριο το γνωστό όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4} = 3$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) + 16}{\sqrt{x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) + x^4 - x^4 + 16}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 (f(x) + x^2) - (x^4 - 16)}{\sqrt{x+2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 4} - \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}}{\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 4} - \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 - 4}}{\frac{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 4} - (x^2 + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 4} - (x^2 + 4)}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{4 \cdot 3 - 8}{4 \cdot 4} = \frac{4}{16} = \mathbf{64} \end{aligned}$$

Συνέχεια και συναρτησιακές σχέσεις

127.

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) + xy \quad (1) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

- i. Αν η f είναι συνεχής στο 0 , να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
 ii. Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

- i. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ (2)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίος.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θέτουμε :

$$u = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + u$$

οπότε όταν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow 0$.

Επομένως :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{u \rightarrow 0} f(x_0 + u) = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} [e^{x_0} f(u) + e^u f(x_0) + x_0 u] = \\ &= e^{x_0} \lim_{u \rightarrow 0} f(u) + f(x_0) \lim_{u \rightarrow 0} e^u + x_0 \lim_{u \rightarrow 0} u \\ &\stackrel{(2)}{=} e^{x_0} f(0) + f(x_0) e^0 + x_0 \cdot 0 \\ &\stackrel{(1)}{=} f(x_0 + 0) = f(x_0) \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- ii. **α' τρόπος**

Επειδή η f είναι συνεχής στο a θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (3)$$

Έστω x_0 τυχαίος.

Θα αποδείξουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θέτουμε

$$u = x - x_0 + a \Leftrightarrow x = x_0 - a + u,$$

Μεθοδολογία

- ♦ Όταν μας δίνουν σχέση της μορφής $f(x+y) = \dots$ όπου f συνάρτηση συνεχής στο 0 και μας ζητούν να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ για το τυχαίο } x_0 \in \mathbb{R},$$

θέτοντας $u = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + u$ αφού έτσι πετυχαίνουμε :

1^{ον} Να «μεταφέρουμε» το όριο από $x \rightarrow x_0$ στο $u \rightarrow 0$

2^{ον} Να εκμεταλλευτούμε τη σχέση $f(x+y) = \dots$

- ♦ Ομοίως με σχέση της μορφής $f(x-y) = \dots$ όπου f συνεχής στο 0 βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, θέτοντας

$$x = x_0 - u.$$

- ♦ Γενικότερα με σχέση της μορφής $f(x \pm ay) = \dots$, $a \neq 0$, με f συνεχή στο 0 θέτουμε $x = x_0 \pm au$.

Παρατήρηση

Από την παράσταση

$$e^{x_0} f(0) + f(x_0) e^0 + x_0 \cdot 0$$

μπορούμε να καταλήξουμε στο $f(x_0)$ αν υπολογίσουμε το $f(0)$ ως εξής :

Για $x = y = 0$ από (1) έχουμε :

$$f(0) = e^0 f(0) + e^0 f(0) + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Οπότε

$$e^{x_0} f(0) + f(x_0) e^0 + x_0 \cdot 0 = f(x_0) \text{ Αν}$$

όμως ο υπολογισμός του $f(0)$ είναι δύσκολος, τότε ο τρόπος που χρησιμοποιήσαμε είναι προτιμότερος.

οπότε όταν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow \alpha$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{u \rightarrow \alpha} f((x_0 - \alpha) + u) \stackrel{(1)}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} [e^{x_0 - \alpha} f(u) + e^u f(x_0 - \alpha) + (x_0 - \alpha)u] \\ &= e^{x_0 - \alpha} \lim_{u \rightarrow \alpha} f(u) + f(x_0 - \alpha) \lim_{u \rightarrow \alpha} e^u + (x_0 - \alpha) \lim_{u \rightarrow \alpha} u \\ &\stackrel{(3)}{=} e^{x_0 - \alpha} f(\alpha) + f(x_0 - \alpha) e^\alpha + (x_0 - \alpha) \alpha \stackrel{(1)}{=} f((x_0 - \alpha) + \alpha) = f(x_0) \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

οπότε η f είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$.

β' τρόπος

Επειδή η f είναι συνεχής στο α θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$$

Αν θέσουμε $u = x - \alpha \Leftrightarrow x = u + \alpha$, τότε όταν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow 0$.

Οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha) \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} f(u + \alpha) = f(\alpha) \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} [e^u f(\alpha) + e^\alpha f(u) + \alpha u] = f(\alpha)$$

Θέτουμε

$$g(u) = e^u f(\alpha) + e^\alpha f(u) + \alpha u, \text{ για } u \text{ κοντά στο } 0,$$

οπότε :

$$f(u) = \frac{g(u) - e^u f(\alpha) - \alpha u}{e^\alpha} \text{ και } \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = f(\alpha)$$

Επομένως

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(u) - e^u f(\alpha) - \alpha u}{e^\alpha} = \frac{f(\alpha) - e^0 f(\alpha) - 0}{e^\alpha} = 0 = f(0)$$

(Βλέπε παρατήρηση i. ερωτήματος)

Άρα η f είναι συνεχής στο 0 επομένως λόγω i. ερωτήματος θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

128.

Για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(xy) = \frac{1}{4} f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty).$$

- i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
- ii. Αν η f είναι συνεχής στο $a>0$, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

Λύση

i. Είναι $f(xy) = \frac{1}{4}f(x)f(y)$ (1)

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 1 έπεται ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (2)

Θα αποδείξουμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ για τυχαίο } x_0 > 0$$

Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θέτουμε :

$$u = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 u,$$

οπότε όταν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow 1$.

Επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1} f(x_0 u)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \left[\frac{1}{4} f(x_0) f(u) \right]$$

$$= \frac{1}{4} f(x_0) \lim_{u \rightarrow 1} f(u) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{4} f(x_0) f(1) \stackrel{(1)}{=} f(x_0 \cdot 1) = f(x_0)$$

Άρα για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ οπότε η f είναι συνεχής

στο

$(0, +\infty)$.

ii. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\alpha > 0$ θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ (3)

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για τυχαίο $x_0 > 0$.

Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θέτουμε $u = \frac{x}{x_0} \alpha \Leftrightarrow x = \frac{x_0 u}{\alpha}$, οπότε όταν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow \alpha$.

$$\text{Επομένως : } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow \alpha} f\left(\frac{x_0}{\alpha} u\right) \stackrel{(1)}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} \left[\frac{1}{4} f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) f(u) \right] = \frac{1}{4} f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) \lim_{u \rightarrow \alpha} f(u)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{4} f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) f(\alpha) \stackrel{(1)}{=} f\left(\frac{x_0}{\alpha} \alpha\right) = f(x_0)$$

Άρα για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, οπότε η f είναι συνεχής

στο $(0, +\infty)$.

Μεθοδολογία

♦ Όταν μας δίνουν σχέση της μορφής $f(xy) = \dots$ όπου f συνάρτηση συνεχής στο 1 και μας ζητούν να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ (ή σε κάποιο υποσύνολό του), τότε θα δείχνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για το

$$\text{τυχαίο } x_0 \in \mathbb{R}^*, \text{ θέτοντας } u = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 \cdot u$$

αφού έτσι πετυχαίνουμε :

1^{ον} Να «μεταφέρουμε» το όριο από $x \rightarrow x_0$ στο $u \rightarrow 1$

2^{ον} Να εκμεταλλευτούμε τη σχέση $f(xy) = \dots$

♦ Ομοίως με σχέση της μορφής $f\left(\frac{x}{y}\right) = \dots$

$$\text{θέτουμε } x = \frac{x_0}{u}.$$

Θ Ε Ω Ρ Η Τ Ι Κ Ε Σ

129.Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

i. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$|2f(x)| = |x + \eta\mu f(x)| \leq |x| + |\eta\mu f(x)| \quad (1)$$

Αλλά $|\eta\mu f(x)| \leq |f(x)|$.

Άρα $|x| + |\eta\mu f(x)| \leq |x| + |f(x)|$.

Επομένως από (1) έχουμε $|2f(x)| \leq |x| + |\eta\mu f(x)| \leq |x| + |f(x)|$.

Οπότε : $2|f(x)| \leq |x| + |f(x)| \Leftrightarrow 2|f(x)| - |f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow |f(x)| \leq |x|$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$ (2)

Για $x = 0$ από την (2) έχουμε $0 \leq f(x) \leq 0$, άρα $f(0) = 0$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|$.

Από την (2) σύμφωνα με το **Κριτήριο Παρεμβολής** θα είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ και συνεπώς η f είναι συνεχής στο 0.

ΠαρατήρησηΓια κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$|\eta\mu x| \leq |x|$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.**130.**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) + 2 = 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ δηλαδή ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$

Θέτουμε στη σχέση :

$$f^3(x) + f(x) + 2 = 3x \quad (1)$$

όπου x το x_0 και έχουμε :

$$f^3(x_0) + f(x_0) + 2 = 3x_0 \quad (2)$$

Παρατήρηση

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $A \subseteq D_f$ αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ για οποιοδήποτε } x_0 \in A$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** παίρνουμε :

$$f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) + 2 - 2 = 3x - 3x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + [f(x) - f(x_0)] = 3(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1] = 3(x - x_0) \quad \mathbf{(3)}$$

Το $f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1$

είναι ένα τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα :

$$\Delta = f^2(x_0) - 4[f^2(x_0) + 1] \\ = -3f^2(x_0) - 4 < 0$$

Άρα

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η **(3)** γίνεται

$$f(x) - f(x_0) = \frac{3(x - x_0)}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1}$$

Οπότε :

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{3(x - x_0)}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} \right|$$

Άρα

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{3|x - x_0|}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} \leq \frac{3|x - x_0|}{1},$$

αφού

$$\begin{aligned} f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) &= \frac{1}{2}[2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0)] \\ &= \frac{1}{2}[(f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + f^2(x_0)) + f^2(x) + f^2(x_0)] \\ &= \frac{1}{2}[(f(x) + f(x_0))^2 + f^2(x) + f^2(x_0)] \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 3|x - x_0| \Leftrightarrow -3|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq 3|x - x_0| \\ \Leftrightarrow f(x_0) - 3|x - x_0| \leq f(x) \leq f(x_0) + 3|x - x_0|$$

Είναι :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0) - 3|x - x_0|] = f(x_0) - 3|x_0 - x_0| = f(x_0) - 0 = f(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0) + 3|x - x_0|] = f(x_0) + 3|x_0 - x_0| = f(x_0) + 0 = f(x_0)$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$,

δηλαδή η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ άρα **είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$** .

Παρατηρήσεις

♦ Το $f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1$ αποδεικνύεται ότι είναι θετική ποσότητα και ως εξής :

$$\begin{aligned} f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 &= \\ &= \frac{1}{2}[2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 2] = \\ &= \frac{1}{2}[(f(x) + f(x_0))^2 + f^2(x) + f^2(x_0) + 2] > 0 \end{aligned}$$

♦ Αν ελαττωθεί ο παρονομαστής ενός κλάσματος, με μη αρνητικούς όρους, τότε το κλάσμα μεγαλώνει. Έτσι αν διαγράψουμε μη αρνητικές ποσότητες από τον παρονομαστή ενός τέτοιου κλάσματος, τότε το κλάσμα μεγαλώνει.

$$\text{Δηλαδή : } \frac{A}{B + \Gamma} \leq \frac{A}{B}, \\ \text{όπου } A \geq 0, B \geq 0 \text{ και } \Gamma \geq 0$$

Συνέχεια συνάρτησης

Ασκήσεις

Συνέχεια της f στο x_0 και στο D_f

518. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } x < 2 \\ \frac{x^2+2}{x}, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = 2$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} x^2+x+2, & \text{αν } x < 0 \\ e^x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = 0$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} x^3-2x+3, & \text{αν } x < 1 \\ x^2+3x-2, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ x^3+2x+1, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \sin x + x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3-2x+1, & \text{αν } 0 < x < 2 \\ e^{x-2} + x + 2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = 1$$

$$\text{vi. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x+1}, & \text{αν } x \neq -1 \\ 4, & \text{αν } x = -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = -1$$

$$\text{vii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-3}, & \text{αν } x < 3 \\ 3, & \text{αν } x = 3 \\ \frac{2x^2-7x+3}{x-3}, & \text{αν } x > 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_0 = 3$$

$$\text{viii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + 2, & \text{αν } x < 0 \\ 3, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{4+x^2}-2} + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = 0$$

519. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση αν :

i. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 2 \\ \frac{6}{x}, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^2, & \text{αν } -1 < x \leq 2 \\ -x + 5, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

520. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & x < 1 \\ -\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\frac{1}{x}} + x + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x \eta \mu \frac{1}{x} + \sigma \upsilon \nu x, & x > 0 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

521. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|f(x) - x| \leq \sqrt{9 + x^2} - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

522. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f^2(x) + 4f(x) + 4\sigma \upsilon \nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

523. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -1 \\ 4x-5, & x < -1 \end{cases}$. Να

εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις $f, g, g \circ f$ στο $x_0 = -1$

524. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right) + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

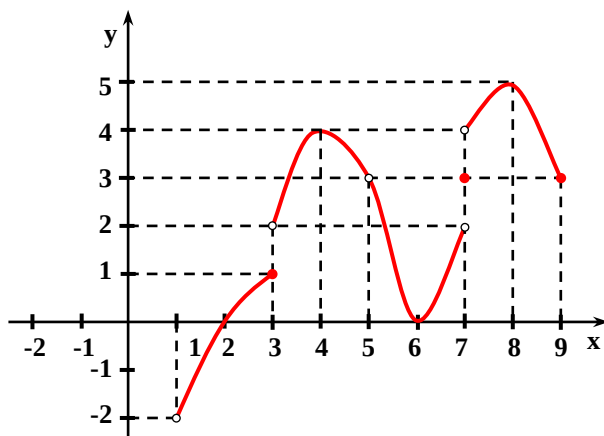
525. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) - 2e^2 = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}
 iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$
 iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x$

526. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
 ii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.
 α. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δ. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
 Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- iv. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(2016)

Εύρεση παραμέτρων

527. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + 1, & \text{αν } x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \\ 2ax + \beta, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους a, β

$\in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

528. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x + \alpha^2 x}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + 3\alpha, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3\alpha x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + \alpha^2 + 2, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ \alpha x^2 + x + \alpha - 2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{\eta \mu x}, & \text{αν } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \alpha, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \alpha x - 4, & \text{αν } x \leq 4 \\ \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

529. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις :

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3\beta x + 1, & x < 1 \\ x^2 + 2\alpha x - 6\beta, & 1 \leq x \leq 3 \\ \beta x^2 + \alpha x + 3, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq -1 \\ \alpha x + \beta, & -1 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

530. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - (\lambda^3 + 1)x + 1, & x \leq 1 \\ 2x^3 - (\lambda^2 + \mu)x + \lambda, & x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 15)$.

$$\text{531. } \text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta^2 x + \gamma^2, & \text{αν } x < 1 \\ 4\alpha x^2 - 2\beta x - 5, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}.$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\text{532. } \text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)x^3 - \alpha\beta x + \gamma^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \gamma(\alpha + \beta)x, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

533. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

ii. Για τις τιμές των α, β του α) ερωτήματος να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2000)

534. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x}, & x < 0 \\ 2e^{x^2+\alpha^2} + \ln(x^2 + \beta^2 + 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τα α, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 4}{f(x) - 2}.$$

535. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + \alpha}{x - 1}, & x < 1 \\ \beta x + 2\alpha - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

536. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β , έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

537. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + \alpha x - \beta}{x^3 - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

538. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + 2}{|x - 1|}, & x \neq 1 \\ \gamma, & x = 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

539. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Εύρεση της τιμής της f στο x_0 όταν η f είναι συνεχής στο x_0 .

540. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε :

- i.** Το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}$ **ii.** Το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^7 \eta\mu \frac{2}{x} \right)$.
iii. Το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. **iv.** Το $f(0)$.

- 541.** Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} \leq 1 + xf(x) \leq x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x^3} + \frac{x}{2} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*,$$

να βρείτε την τιμή $f(0)$.

- 542.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και

$$|xf(x) - \eta\mu 2x| \leq x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε την τιμή $f(0)$.

- 543.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και έχει την ιδιότητα

$$|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^4 \eta\mu^2 \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x_0 = 0$.

- 544.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^2 f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu^2 x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε : **i.** το $f(0)$

ii. το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xf(x)]$

- 545.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $xf(x) \leq \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x = 0$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 2$.

- 546.** Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x^3 - 8} = \ell \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Να βρείτε το $f(2)$.

- 547.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{\eta\mu x} = 3$, να

βρείτε την τιμή της f στο 0 .

- 548.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + 2xf(x)}{x^2 + \eta\mu x f(x)} = 3$.

- 549.** Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = -3$ και

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) + 1 - \eta\mu(x + 3)}{x^2 - 9} = 2.$$

i. Να βρείτε την τιμή $f(-3)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2f(x)+1}{x-3}$.

550. Για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e)}{f(x)} = a > 0$ και η γραφική της

παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{1}{a})$. Να αποδείξετε ότι η f είναι

συνεχής στο $x_0=0$.

551. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο 2, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2 + x - 2}{x - 2} = 9.$$

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο -2 .

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4x + 4}$

iv. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2) + \eta\mu(x-2)}{x^2 - 4}$

552. Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ισχύουν οι σχέσεις :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2}{\eta\mu 3x} = -1.$$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $g(0)$.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

553. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 1 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $f(4-x) = f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 4} = 6$, τότε :

i. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

554. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$x^2 \cdot f^2(x) + 2x \cdot \eta\mu x \cdot f(x) < 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu^2 \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x^2}.$$

Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

- 555.** Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$$f(x) + \sqrt{x^2 + x + 2} = 1 + x(f(x) + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 556.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε τον τύπο της.

- 557.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$\kappa \eta \mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \lambda \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ .

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f .

- 558.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 \eta \mu x + y^2 x + \sqrt{y^2 + 1} - y}{(yx)^2 + xy^2 + 2016}$$

Να βρείτε :

i. Τον τύπο της $f(x)$ για $x \in [0, +\infty)$

ii. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Εύρεση ορίων από γνωστά όρια

- 559.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 2$

και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = 1000$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x^2 - 4}$.

- 560.** Αν η f είναι συνεχής στο 2 και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{3}{4}$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

- 561.** Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$1 + 2\sqrt{\eta \mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta \mu x, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

β. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{3 - f(x)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|f(x) - 3| - xf(x) - 3}{3 - f(x)}$

- 562.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) \cdot (\sqrt{x+1} - 2)}{x-3} = -\infty.$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνεχής.

563. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta \mu x}{x^2 + x} = 2$$

α. Να αποδείξετε ότι :

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3.$

β. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 3f(x)| - 1}{x^2 - x}.$

γ. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^4 + (f(x) - 2)^4}{x(f(x) - 2)^3 - 6x^4} = 4.$

δ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $f(-2) = 0$, τότε :

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

ii. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} - 2}{f(x)}.$

Συνέχεια και συναρτησιακές σχέσεις

564. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y) - x + y| \leq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

565. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

566. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

$$f(x + y) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι :

i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $a \in \mathbb{R}$ με $f(a) \neq 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

567. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x + y) = f(x)f(y) - e^x - e^y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

- i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- ii. Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- 568.** Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.
 Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
- 569.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(xy) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.
 i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_1=1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
 ii. Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
- 570.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

$$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$$

$$f(0) = 0 \text{ και } g(0) = 1$$

 Να αποδείξετε ότι αν οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο 0 τότε είναι συνεχείς και στο $\mathbb{R}$.
- 571.** Έστω συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι:
 i. $f(0) = 0$
 ii. η f είναι περιττή.
 iii. αν η f είναι συνεχής στο σημείο $a \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.
- 572.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x-y) = f(x) + f(y) + 5xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

 Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- 573.** Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = a$ και

$$f(x-2y) = f(x) - 2f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

 να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

574. Έστω ότι $f\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(ex)f(y) + \ln(ey)f(x)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Αν η f είναι συνεχής στο 1 , να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Θ ε ω ρ η τ ι κ έ ς

- 575.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει

$$f^2(x) + 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

 να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

- 576.** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f^2(x) + f(x) \leq x^2 - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{1}{2}$.

- 577.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$3f(x) = 2x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- 578.** Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f^3(x) + f(x) = \ln x, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- 579.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$2f^5(x) + 2f(x) = \eta\mu f(x) + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- 580.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- 581.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:
- $$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$. Σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

- 582.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:
- $$f^3(x) + 2f(x) = 3e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

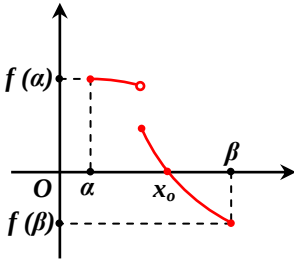
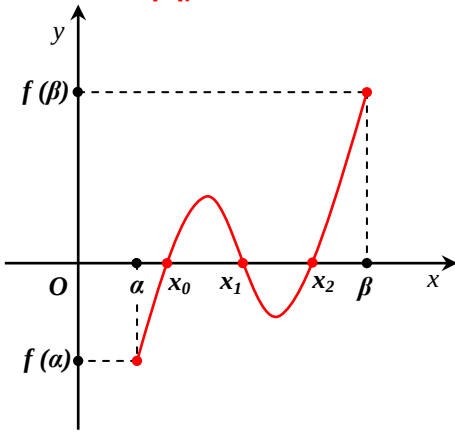
- i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$
- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

- 583.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση :
- $$2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

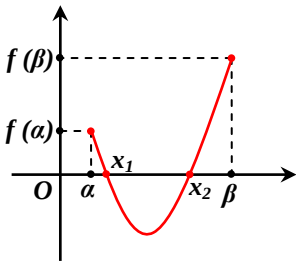
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- ii. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

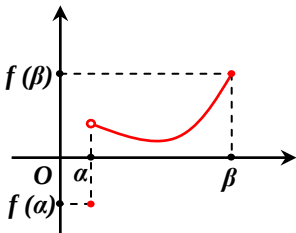
Θεώρημα του Bolzano



Η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, το συμπέρασμα ισχύει.



Δεν ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$, το συμπέρασμα ισχύει.



Δεν ισχύει η συνέχεια σε όλα τα σημεία του $[a, \beta]$.
Δεν ισχύει το συμπέρασμα.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν :

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a)f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

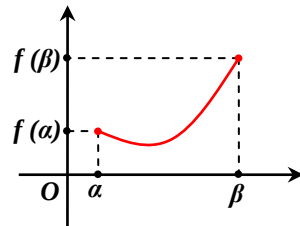
Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοιχτό διάστημα (a, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία

- ✓ Τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, επειδή οι τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$ είναι ετερόσημες.
 - ✓ Επίσης η C_f είναι μια συνεχής γραμμή.
- Άρα η C_f τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον άξονα $x'x$.

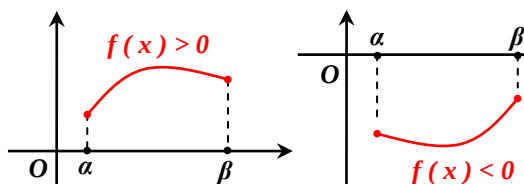
Παρατηρήσεις :

1. Το θεώρημα **Bolzano** εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ σ' ένα διάστημα (a, β) . Δεν αναφέρει όμως πόσες ρίζες ακριβώς υπάρχουν στο διάστημα (a, β) ούτε βέβαια ποιες είναι αυτές.
2. Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος. Δηλαδή αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) αυτό δεν σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ούτε ότι $f(a)f(\beta) < 0$. Άρα το συμπέρασμα μπορεί να ισχύει ακόμα κι αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.
3. Αν κάποια (ή όλες) από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος δεν ισχύει, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν ισχύει το συμπέρασμα. Η εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να έχει ρίζα στο (a, β) μπορεί και να μην έχει.

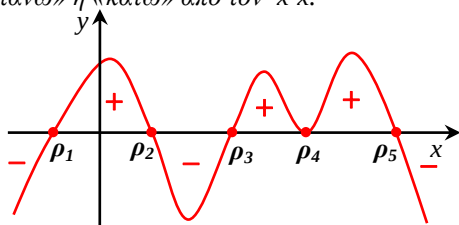


Δεν ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$. Δεν ισχύει το συμπέρασμα.

Πρόσημο Συνεχούς Συνάρτησης



Η γραφική παράσταση μιας **συνεχούς** σε διάστημα συνάρτησης που **δεν τέμνει** τον $x'x$ θα βρίσκεται «πάνω» ή «κάτω» από τον $x'x$.



Αν μια συνάρτηση f είναι

- ♦ **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ και
- ♦ **δεν μηδενίζεται** σ' αυτό, (δηλαδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$)

τότε η συνάρτηση διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο Δ .

Δηλαδή

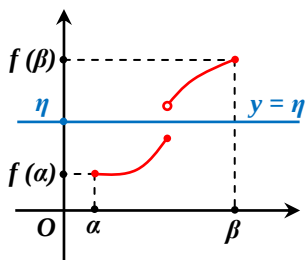
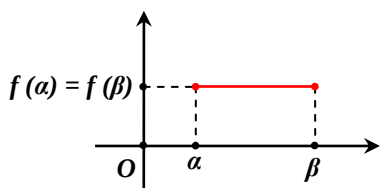
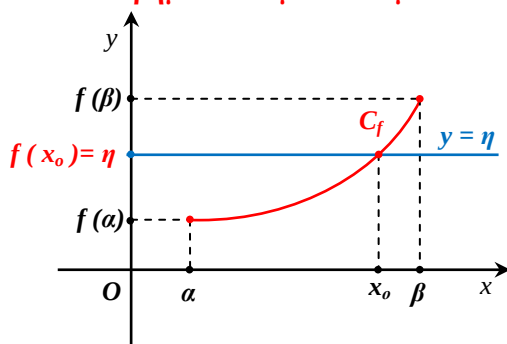
$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta \text{ ή}$$

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Συνέπεια

Μια συνεχής συνάρτηση f σε διάστημα Δ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το διάστημα Δ .

Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών



Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα

$[a, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει :

$$f(x_0) = \eta$$

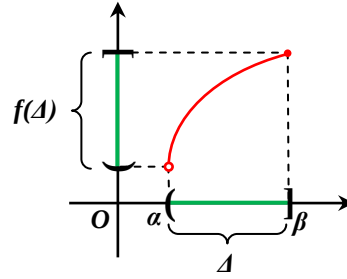
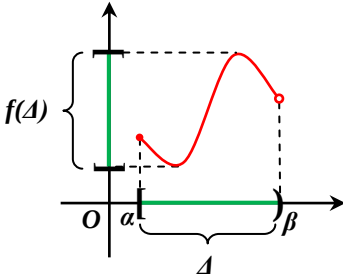
δηλαδή η συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$.

Παρατηρήσεις :

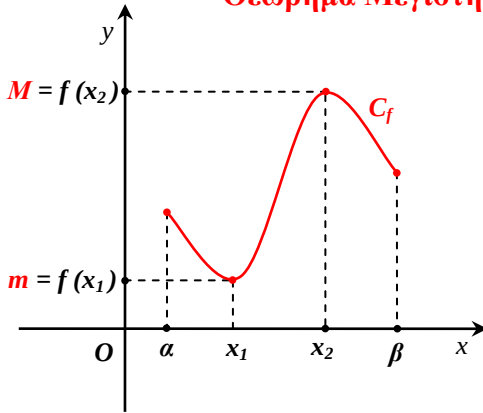
1. Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών είναι γενίκευση του θεωρήματος Bolzano. (Αν θέσουμε $\eta = 0$, προκύπτει το Θ. Bolzano).
2. Η υπόθεση $f(a) \neq f(\beta)$ είναι απαραίτητη για να αποκλείσουμε την περίπτωση της σταθερής συνάρτησης, οπότε δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$.
3. Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών αποδεικνύεται ότι :

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής



Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, τότε η f παίρνει στο $[a, b]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ να ισχύει :

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Leftrightarrow m \leq f(x) \leq M$$

για κάθε $x \in [a, b]$,

Σύνολο τιμών

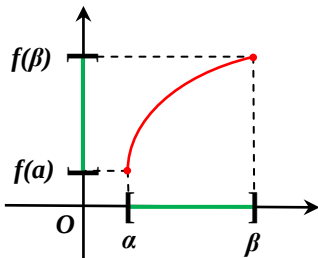
1. Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\Delta = [a, b]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$ όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

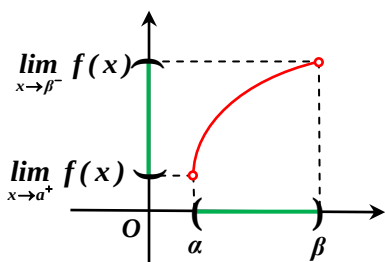
Δηλαδή :

$$f(\Delta) = f([a, b]) = [m, M]$$

2. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = [a, b]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

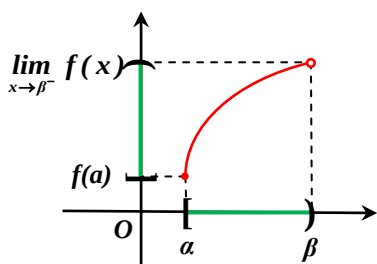
$$f(\Delta) = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$





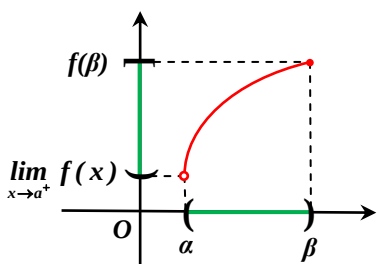
3. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (a, \beta)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f((a, \beta)) = \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$$



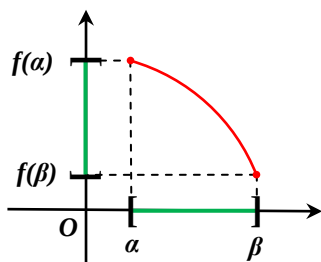
4. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = [a, \beta)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f([a, \beta)) = \left[f(a), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$$



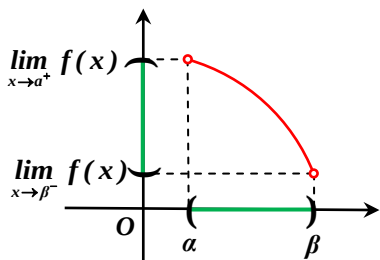
5. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (a, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f((a, \beta]) = \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(\beta) \right]$$



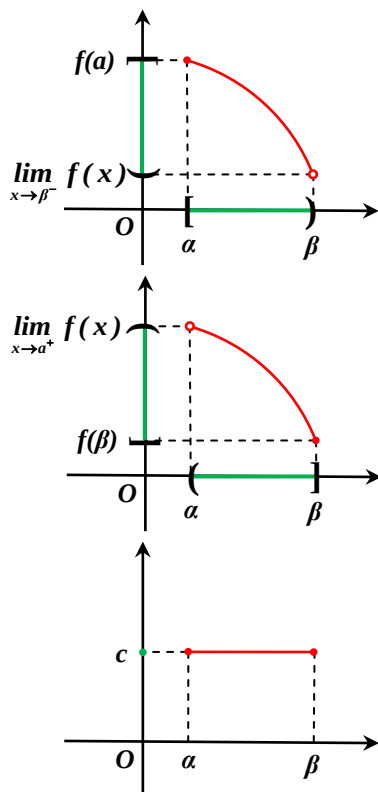
6. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσας στο $\Delta = [a, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f([a, \beta]) = [f(\beta), f(a)]$$



7. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσας στο $\Delta = (a, \beta)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f((a, \beta)) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$$



8. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = [a, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f([a, \beta]) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(a) \right]$$

9. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (a, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = f((a, \beta]) = \left[f(\beta), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$$

10. Αν f συνεχής και σταθερή με $f(x)=c$ στο $\Delta = [a, \beta]$ ή (a, β) ή $[a, \beta)$ ή $(a, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(\Delta) = \{c\}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Υπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας σε δοσμένο ανοιχτό διάστημα

131.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x = 2 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται
 $\sin x = 2 - x \Leftrightarrow \sin x - 2 + x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin x + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $y = \sin x$ και $y = x - 2$.
- $f(0) = \sin 0 + 0 - 2 = -2 < 0$
 $f(\pi) = \sin \pi + \pi - 2 = \pi - 2 > 0$ }
 άρα $f(0) \cdot f(\pi) < 0$

Σύμφωνα με το **θεώρημα του Bolzano** η εξίσωση $f(x) = 0$

δηλαδή η εξίσωση
 $\sin x + x - 2 = 0$

άρα και η ισοδύναμή της
 $\sin x = 2 - x$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(0, \pi)$.

Παρατήρηση

Η διατύπωση « Η εξίσωση $\sin x = 2 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$ » είναι ισοδύναμη με τις παρακάτω προτάσεις :

- ♦ Υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε : $\sin x_0 = 2 - x_0$
- ♦ Η συνάρτηση $f(x) = \sin x + x - 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$
- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin x + x - 2$ και ο άξονας x έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο που ανήκει στο $(0, \pi)$.
- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin x + x$ και η ευθεία $y = 2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(0, \pi)$.
- ♦ Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = 2 - x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(0, \pi)$.

132.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x + 1}{x - \alpha} + \frac{x^2 + 2}{x - \beta} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

Λύση

Για $x \neq \alpha$ και $x \neq \beta$ η εξίσωση

$$\frac{e^x + 1}{x - \alpha} + \frac{x^2 + 2}{x - \beta} = 0$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(e^x + 1)(x - \beta) + (x^2 + 2)(x - \alpha) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (e^x + 1)(x - \beta) + (x^2 + 2)(x - \alpha), \quad x \in [\alpha, \beta]$$

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ γιατί προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Παρατήρηση

$$\text{Οι εξισώσεις } \frac{e^x + 1}{x - \alpha} + \frac{x^2 + 2}{x - \beta} = 0 \text{ και}$$

$$(e^x + 1)(x - \beta) + (x^2 + 2)(x - \alpha) = 0$$

είναι ισοδύναμες, δηλαδή έχουν τις ίδιες ρίζες, μόνο εφόσον η δεύτερη από αυτές δεν έχει ρίζα το α ή το β , αφού η πρώτη έχει τους περιορισμούς $x \neq \alpha$ και $x \neq \beta$ που δεν έχει η δεύτερη. Επομένως στο **ανοιχτό** διάστημα (α, β) στο οποίο ζητάμε να υπάρχει ρίζα, οι εξισώσεις αυτές είναι ισοδύναμες.

- $f(\alpha) = (e^\alpha + 1)(\alpha - \beta) < 0$ (αφού $e^\alpha > 0$ και $\alpha < \beta$)
 - $f(\beta) = (\beta^2 + 2)(\beta - \alpha) > 0$ (αφού $\beta^2 + 2 > 0$ και $\alpha < \beta$)
- Άρα $f(\alpha)f(\beta) < 0$

Επομένως σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** η εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x + 1)(x - \beta) + (x^2 + 2)(x - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{x - \alpha} + \frac{x^2 + 2}{x - \beta} = 0$$

έχει **μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .**

133.

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ με $\alpha\beta > 0$. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\frac{f(x_0)}{\alpha} = \frac{\beta}{x_0}$.

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{f(x_0)}{\alpha} = \frac{\beta}{x_0} \Leftrightarrow x_0 f(x_0) = \alpha\beta \Leftrightarrow x_0 f(x_0) - \alpha\beta = 0$$

Δηλαδή ότι η εξίσωση $xf(x) - \alpha\beta = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα (το x_0) στο διάστημα (α, β) .

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$h(x) = xf(x) - \alpha\beta, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

- ♦ Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ γιατί προκύπτει με πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ $h(\alpha) = \alpha f(\alpha) - \alpha\beta = \alpha(f(\alpha) - \beta)$
 $h(\beta) = \beta f(\beta) - \alpha\beta = \beta(f(\beta) - \alpha)$
 Οπότε $h(\alpha)h(\beta) = \alpha\beta(f(\alpha) - \beta)(f(\beta) - \alpha)$
 Επειδή $f(\Delta) = (\alpha, \beta)$ θα ισχύει :
 $\alpha < f(x) < \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Επομένως :

$$f(\alpha) < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) - \beta < 0$$

$$f(\beta) > \alpha \Leftrightarrow f(\beta) - \alpha > 0$$

και λόγω υπόθεσης: $\alpha\beta > 0$. Άρα $h(\alpha)h(\beta) < 0$
 Επομένως σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0) - \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{\alpha} = \frac{\beta}{x_0}$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Θέλουμε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{f(x_0)}{\alpha} = \frac{\beta}{x_0}$$



$$x_0 f(x_0) - \alpha\beta = 0$$



Το $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι ρίζα της εξίσωσης :
 $xf(x) - \alpha\beta = 0$



Άρα θεωρούμε τη συνάρτηση :
 $h(x) = xf(x) - \alpha\beta$

- ♦ Στη συγκεκριμένη άσκηση μπορούσαμε να θεωρήσουμε και τη συνάρτηση :

$$h(x) = \frac{f(x)}{\alpha} - \frac{\beta}{x}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Το βασικό, σ' αυτού του είδους τις ασκήσεις, για τον ορισμό της βοηθητικής συνάρτησης h , είναι να θέσουμε, στη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει, **όπου x_0** (το οποίο ζητάμε να δείξουμε ότι υπάρχει) **το x .**

134.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\sqrt{8x+8}-4 \leq (x-1)f(x) \leq \sqrt{2x^2+2}-2, \quad \text{για κάθε } x \geq -1$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2x, \quad x \in [-1, 1].$$

Είναι : $g(-1) = f(-1) + 2$

Η δοθείσα σχέση για $x = -1$ δίνει :

$$\sqrt{0} - 4 \leq -2f(-1) \leq \sqrt{4} - 2 \Leftrightarrow -4 \leq -2f(-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{-2} \geq f(-1) \geq \frac{0}{-2} \Leftrightarrow 2 \geq f(-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + 2 \geq f(-1) + 2 \geq 0 + 2 \Leftrightarrow 4 \geq f(-1) + 2 \geq 2$$

Άρα $g(-1) \geq 2 > 0$. Επίσης $g(1) = f(1) - 2$

Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ έχουμε :

$$\sqrt{8x+8}-4 \leq (x-1)f(x) \leq \sqrt{2x^2+2}-2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8x+8}-4}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2x^2+2}-2}{x-1}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{8x+8}-4}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{8x+8}-4)(\sqrt{8x+8}+4)}{(x-1)(\sqrt{8x+8}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{8x+8})^2 - 4^2}{(x-1)(\sqrt{8x+8}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8x+8-16}{(x-1)(\sqrt{8x+8}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8x-8}{(x-1)(\sqrt{8x+8}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8(x-1)}{(x-1)(\sqrt{8x+8}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8}{\sqrt{8x+8}+4} = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x^2+2}-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{2x^2+2}-2)(\sqrt{2x^2+2}+2)}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{2x^2+2})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2+2-4}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2-2}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+1)}{\sqrt{2x^2+2}+2} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

Προσοχή!

Η συνάρτηση που θεωρούμε είναι η

$$g(x) = f(x) - 2x.$$

Η $f(x) = 2x$ που υπάρχει στην άσκηση είναι **εξίσωση** και **όχι** η πολυωνυμική συνάρτηση $y = 2x$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 1, θα ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

Επομένως

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad g(1) = 1 - 2 = -1 < 0$$

Οπότε :

- ♦ Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- ♦ $g(-1)g(1) < 0$

Άρα από **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0$$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-1, 1)$.

135.

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 5x + 3$$

για κάθε $x \in [0, 1]$ και $\beta^2 < \gamma$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

Λύση α' τρόπος

Για $x = 0$ η δοθείσα σχέση δίνει :

$$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = 3 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + \beta f(0) + \gamma) = 3 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

Είναι $\gamma > \beta^2 \geq 0$ άρα $\gamma > 0$.

Οπότε $1 < 4 \Leftrightarrow \gamma < 4\gamma$. Επομένως $\beta^2 < \gamma < 4\gamma$.

Άρα $\beta^2 < 4\gamma \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.

Συνεπώς $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$ (ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$)

Οπότε η (1) δίνει : $f(0) = \frac{3}{f^2(0) + \beta f(0) + \gamma} > 0$

Ομοίως για $x = 1$ έχουμε : $f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = -1 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + \beta f(1) + \gamma) = -1$

(2)

Το τριώνυμο $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$

Συνεπώς $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ (ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$)

Οπότε η (2) δίνει : $f(1) = \frac{-1}{f^2(1) + \beta f(1) + \gamma} < 0$

Επομένως

- ♦ Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- ♦ $f(0)f(1) < 0$

Άρα από **Θ.Bolzano** η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

β' τρόπος

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 5x + 3 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + \beta f(x) + \gamma) = x^3 - 5x + 3$$

Το τριώνυμο $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

Είναι $\gamma > \beta^2 \geq 0$ άρα $\gamma > 0$.

Οπότε $1 < 4 \Leftrightarrow \gamma < 4\gamma$. Επομένως $\beta^2 < \gamma < 4\gamma$.

Άρα $\beta^2 < 4\gamma \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.

Συνεπώς $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε } f(x) = \frac{x^3 - 5x + 3}{f^2(x) + \beta f(x) + \gamma}$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ ισοδύναμα γίνεται

$$\frac{x^3 - 5x + 3}{f^2(x) + \beta f(x) + \gamma} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x + 3 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x) = x^3 - 5x + 3, x \in \mathbb{R}$

- ♦ Η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0, 1]$
- ♦ $g(0) = 3 > 0$ και $g(1) = -1 < 0$

Άρα από **Θ.Bolzano** η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 5x + 3}{f^2(x) + \beta f(x) + \gamma} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

Υπαρξη ρίζας χωρίς να δίνεται το διάστημα

136.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = e^x \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}$$

τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x$,

$x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ τέμνονται σ'

ένα τουλάχιστον σημείο, αν και μόνο αν η εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}^*$ (που είναι η τομή των D_f και D_g).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

$x \in \mathbb{R}^*$.

Είναι :

$$\blacklozenge \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} - 2 < 0$$

$$h(1) = e - 1 > 0$$

$$\blacklozenge \quad \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο } \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

άρα από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Άρα οι C_f και C_g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Ύπαρξη περισσότερων από μιας ριζών

137.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^{2017} + 3$ και $g(x) = 6x^{2018}$ τέμνονται σε δύο τουλάχιστον σημεία του διαστήματος $(-1, 1)$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^{2017} + 3 = 6x^{2018} \Leftrightarrow 6x^{2018} - x^{2017} - 3 = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$h(x) = 6x^{2018} - x^{2017} - 3, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\blacklozenge \quad \text{Η } h \text{ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στα διαστήματα } [-1, 0] \text{ και } [0, 1].$$

$$\blacklozenge \quad \text{Είναι}$$

$$h(-1) = 6(-1)^{2018} - (-1)^{2017} - 3 = 6 + 1 - 3 = 4 > 0$$

$$h(0) = -3 < 0$$

$$h(1) = 6 - 1 - 3 = 2 > 0$$

Οπότε

Παρατήρηση

Η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x}$$

δεν μπορεί να έχει ρίζα στο $(-\infty, 0)$ αφού αν $x < 0$ τότε

$$f(x) = e^x > 0 \quad \text{ενώ} \quad g(x) = \frac{1}{x} < 0.$$

Άρα η ρίζα της εξίσωσης πρέπει να ανήκει στο $(0, +\infty)$. Γι' αυτό αναζητούμε ένα διάστημα $[a, b]$ με $b > a > 0$ τέτοιο ώστε οι $h(a)$ και $h(b)$ να είναι ετερόσημοι.

Ένα τέτοιο διάστημα είναι το $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι και το μοναδικό.

Παρατήρηση

♦ Αν ζητείται η ύπαρξη n ριζών μιας συνάρτησης (ή η ύπαρξη σημείων $x_1, x_2, \dots, x_n$ που να ικανοποιούν κάποια ιδιότητα) τότε εφαρμόζουμε n φορές το Θ. Bolzano σε n διαστήματα, τα οποία να μην έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Τα n αυτά διαστήματα είτε δίνονται είτε προσδιορίζονται μετά από προσεκτική εξέταση των δεδομένων και των ζητούμενων.

♦ Αν ζητείται η ύπαρξη 2 τουλάχιστον ριζών στο (a, b) , πολύ συχνά χωρίζουμε το διάστημα στη μέση και εφαρμόζουμε Θ.

Bolzano στα $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

$$h(-1)h(0) < 0 \text{ και } h(0)h(1) < 0$$

Άρα για την h ισχύει το **Θ. Bolzano** στα

διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ συνεπώς η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$ και μια τουλάχιστον στο $(0, 1)$.

Επομένως έχει **2 τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$** .

Υπαρξη ακριβώς μιας ρίζας

138.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi \ln \xi = 1$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$g(x) = f(x) + x \ln x - 1, \quad x \in [1, e]$$

♦ Υπαρξη του ξ .

Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$

γιατί προκύπτει από πράξεις

μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι :

$$\bullet \quad g(1) = f(1) - 1 < 0$$

(αφού $f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, e]$)

$$\bullet \quad g(e) = f(e) + e - 1 > 0$$

(αφού $f(x) > 0$ γιακάθε $x \in [1, e]$ και $e - 1 > 0$)

Επομένως είναι $g(1)g(e) < 0$ οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + \xi \ln \xi = 1$$

♦ Μοναδικότητα του ξ .

Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

Έστω $x_1, x_2 \in [1, e]$ με $x_1 < x_2$.

Έχουμε :

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{f, \cdot} f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

$$1 \leq x_1 < x_2 \leq e \quad (2)$$

$$1 \leq x_1 < x_2 \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x_1 < \ln x_2 \leq \ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln x_1 < \ln x_2 \leq 1 \quad (3)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2), (3)

$$\text{παίρνουμε : } x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2 \quad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (4)

παίρνουμε :

$$f(x_1) + x_1 \ln x_1 < f(x_2) + x_2 \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) + x_1 \ln x_1 - 1 < f(x_2) + x_2 \ln x_2 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$.

Άρα το ξ για το οποίο ισχύει $g(\xi) = 0$ είναι **μοναδικό** (αφού η g ως γνησίως μονότονη είναι “1 – 1” συνάρτηση)

Παρατήρηση

Η πρόταση :

«Υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi \ln \xi = 1$ »

είναι ισοδύναμη με την πρόταση :

«Η εξίσωση $f(x) + x \ln x = 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.»

Θυμίζουμε

Για να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη **ομόστροφες** ανισότητες πρέπει όλα τα μέλη τους να είναι ομόσημα και
 ✓ αν είναι θετικά η φορά παραμένει
 ✓ αν είναι αρνητικά η φορά αλλάζει.

139.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

i. η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. η εξίσωση $f(x) = 4x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

i. Για $y = x_0$ η δοθείσα σχέση γράφεται :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{3}|x - x_0| \Leftrightarrow -\frac{1}{3}|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{1}{3}|x - x_0|$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - \frac{1}{3}|x - x_0| \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{3}|x - x_0|$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) - \frac{1}{3}|x - x_0| \right) = f(x_0) - \frac{1}{3}|x_0 - x_0| = f(x_0) - 0 = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + \frac{1}{3}|x - x_0| \right) = f(x_0) + \frac{1}{3}|x_0 - x_0| = f(x_0) + 0 = f(x_0)$$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για οποιοδήποτε

$x_0 \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 4x$, $x \in [0, 1]$

♦ **Υπαρξη ρίζας.**

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών.

$$\text{Είναι : } g(0) = f(0) = 1 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 4$$

Για $x = 0$ και $y = 1$ η δοθείσα σχέση δίνει :

$$|f(0) - f(1)| \leq \frac{1}{3}|1 - 0| \Leftrightarrow |1 - f(1)| \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 1 - f(1) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq f(1) \leq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} - 4 \leq f(1) - 4 \leq \frac{4}{3} - 4 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq g(1) \leq -\frac{8}{3} < 0. \text{ Επομένως } g(1) < 0$$

Άρα $g(0)g(1) < 0$ οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4x \quad \text{έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (0, 1).$$

♦ **Μοναδικότητα της ρίζας.**

Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1 \neq x_2$

$$\text{Οπότε : } g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 4x_1$$

$$g(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = 4x_2$$

Για $x = x_1$ και $y = x_2$ η δοθείσα σχέση γίνεται :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{3}|x_1 - x_2| \Leftrightarrow |4x_1 - 4x_2| \leq \frac{1}{3}|x_1 - x_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{3}|x_1 - x_2| \stackrel{x_1 - x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} 4 \leq \frac{1}{3}, \text{ \textbf{άτοπο}}$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

Συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και μάλιστα στο $(0, 1)$.

Υπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα

140.

Αν για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^3$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1]$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - x^3, \quad x \in [0, 1]$$

- ♦ Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ $g(0) = f(0) \geq 0$
(αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$)
 $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$
(αφού $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$)
Οπότε είναι $g(0)g(1) \leq 0$
- Αν $g(0)g(1) < 0$ τότε από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

$$\bullet \text{ Αν } g(0)g(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = 0, & \text{άρα το } 0 \text{ είναι ρίζα της } g \\ \text{ή} \\ g(1) = 0, & \text{άρα το } 1 \text{ είναι ρίζα της } g \end{cases}$$

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα που ή ανήκει στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$ ή είναι το 0 ή είναι το 1 .

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $f(x) = x^3$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1]$

Παρατήρηση

Αν κατά την εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano για μια συνάρτηση f στο $[a, b]$ προκύψει ότι

$$f(a)f(b) \leq 0$$

αντί του

$$f(a)f(b) < 0$$

τότε η ρίζα της f θα ανήκει στο $[a, b]$ ή $[a, b)$ ή $(a, b]$ και όχι υποχρεωτικά στο (a, b) .

141.

Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f \circ g = g \circ f$.

Αν η εξίσωση $(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, να αποδείξετε ότι

και η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει λύση.

Λύση

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$, τότε είναι
 $(f \circ f)(\rho) = (g \circ g)(\rho) \Leftrightarrow f(f(\rho)) = g(g(\rho))$.

Έχουμε :

- $h(f(\rho)) = f(f(\rho)) - g(f(\rho)) = g(g(\rho)) - f(g(\rho))$
γιατί $f(f(\rho)) = g(g(\rho))$ και $f(g(x)) = g(f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα
και για $x = \rho$.
- $h(g(\rho)) = f(g(\rho)) - g(g(\rho)) = -[g(g(\rho)) - f(g(\rho))]$.
Άρα $h(f(\rho))h(g(\rho)) = -[g(g(\rho)) - f(g(\rho))]^2 \leq 0$
- ❖ Αν $h(f(\rho))h(g(\rho)) = 0 \Leftrightarrow h(f(\rho)) = 0$ ή $h(g(\rho)) = 0$ επομένως
 $f(\rho)$ ή $g(\rho)$ είναι ρίζα της εξίσωσης
 $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- ❖ Αν $h(f(\rho))h(g(\rho)) < 0$ τότε αν $f(\rho) = g(\rho)$ είναι $[h(g(\rho))]^2 < 0$
άτοπο, άρα $f(\rho) \neq g(\rho)$, οπότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι
 $f(\rho) < g(\rho)$ και αφού $h(f(\rho))h(g(\rho)) < 0$, ισχύει για την h το Θ .

Bolzano

στο διάστημα $[f(\rho), g(\rho)]$ και επομένως η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(f(\rho), g(\rho))$.

Θ ε ώ ρ η μ α Ε ν δ ι ά μ ε σ ω ν Τ ι μ ώ ν

142.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sin 2x + 5\eta\mu 2x - 2$ παίρνει την τιμή $-e$ στο
διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = -e.$$

α' τρόπος

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ως άθροισμα συνεχών
συναρτήσεων.

- $f(0) = -1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$

Είναι :

$$-3 < -e < -1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < -e < f(0)$$

Άρα από το **Θ. Ενδιάμεσων τιμών**

Μεθοδολογία

Σε ασκήσεις που θέλουμε να δείξουμε ότι

- ✓ μια συνάρτηση f λαμβάνει την τιμή $\kappa \in \mathbb{R}$ στο
διάστημα (α, β)
ή (ισοδύναμη διατύπωση) ότι
- ✓ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \kappa$
ή (ισοδύναμη διατύπωση) ότι
- ✓ η ευθεία $y = \kappa$ τέμνει τη γραφική της f σε ένα
τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα
 (α, β)
τότε εξετάζουμε αν το κ βρίσκεται μεταξύ των
 $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ και στη συνέχεια αξιοποιούμε το
Θ.Ε.Τ.

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = -e$.

β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + e$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) + e = -1 + e > 0 \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + e = -3 + e < 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Επομένως σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο

ώστε : $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + e = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -e$

Παρατήρηση

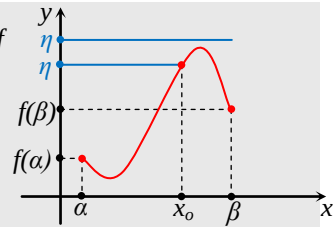
Αν το $-e$ δεν ανήκει μεταξύ των $f(0)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ τότε η f

μπορεί να παίρνει την τιμή $-e$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ μπορεί και όχι,

αφού αν για μια f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[a, \beta]$ και ο αριθμός η δεν είναι μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ τότε μπορεί να ισχύει το συμπέρασμα μπορεί και να μην ισχύει.

Σ' αυτήν την περίπτωση για να εξετάσουμε αν ισχύει το ζητούμενο της άσκησης πρέπει να βρούμε το σύνολο τιμών $f(\Delta)$, όπου $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε αν $-e \in f(\Delta)$ τότε υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_0 \in \Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = -e$ ενώ αν $-e \notin f(\Delta)$ τότε δεν υπάρχει τέτοιο x_0 .



143.

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[0, 4]$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 4]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιος ώστε :

$$f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6}$$

Λύση

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 4]$, έχουμε :

$$0 < 1 < 4 \Leftrightarrow f(0) > f(1) > f(4) \Leftrightarrow f(4) < f(1) < f(0) \quad (1)$$

$$0 < 2 < 4 \Leftrightarrow f(4) < f(2) < f(0) \Leftrightarrow 2f(4) < 2f(2) < 2f(0) \quad (2)$$

$$0 < 3 < 4 \Leftrightarrow f(4) < f(3) < f(0) \Leftrightarrow 3f(4) < 3f(3) < 3f(0) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) παίρνουμε :

$$6f(4) < f(1) + 2f(2) + 3f(3) < 6f(0) \Leftrightarrow f(4) < \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} < f(0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$,

σύμφωνα με το **Θεώρημα των**

Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6}$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και “1 – 1”) το x_0 αυτό θα είναι μοναδικό.

Παρατήρηση

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι ισχύει :

Αν $v_1, v_2, \dots, v_k > 0$ και $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq \beta$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{v_1 f(x_1) + v_2 f(x_2) + \dots + v_k f(x_k)}{v_1 + v_2 + \dots + v_k}$$

144.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(4) = 3$ και

$$f(x)f(f(x)) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = 2$.

ii. Να βρείτε την τιμή της f στο 2.

iii. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Λύση

i. Η σχέση $f(x)f(f(x)) = 1$ για $x = 4$ δίνει :

$$f(4)f(f(4)) = 1 \Leftrightarrow 3f(3) = 1 \Leftrightarrow f(3) = \frac{1}{3}$$

Όμως $f(3) = \frac{1}{3} < 2 < 3 = f(4)$.

Σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει $\gamma \in (3, 4)$ τέτοιο, ώστε : $f(\gamma) = 2$.

ii. Η δοσμένη σχέση για $x = \gamma$ δίνει : $f(\gamma)f(f(\gamma)) = 1 \Leftrightarrow 2f(2) = 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{2}$

iii. Είναι $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{3}$ και $f(4) = 3$

Επειδή είναι $2 < 3 < 4$ ενώ $f(2) > f(3)$ και $f(3) < f(4)$, η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

145.

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και « 1 – 1 », τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Λύση

Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε αφού η f είναι « 1 – 1 » οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι άνισες ανά δύο.

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα τότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \text{ και } f(x_1) > f(x_2) > f(x_3).$$

Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Οπότε θα ισχύει μία από τις ανισότητες :

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2) \quad (1)$$

$$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2) \quad (2)$$

$$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1) \quad (3)$$

$$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1).

Εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = f(\xi)$.

Δηλαδή για $\xi < x_3$ έχουμε $f(x_3) = f(\xi)$. **Άτοπο** διότι η f είναι « 1 – 1 ».

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες (2), (3) ή (4).

Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής.

146.

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής και μη σταθερή στο $[0, 4]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 4]$ τέτοιο ώστε :

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}$$

Λύση

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Delta = [0, 4]$ σύμφωνα με το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής** η f παρουσιάζει ελάχιστο m και μέγιστο M .

Οπότε ισχύει :

$$m \leq f(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in [0, 4]$$

δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f(\Delta) = [m, M]$$

Επομένως έχουμε :

$$m \leq f(1) \leq M \quad (1)$$

$$m \leq f(2) \leq M \Leftrightarrow 3m \leq 3f(2) \leq 3M \quad (2)$$

$$m \leq f(3) \leq M \Leftrightarrow 5m \leq 5f(3) \leq 5M \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$9m \leq f(1) + 3f(2) + 5f(3) \leq 9M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9} \leq M$$

Παρατήρηση

Όταν δεν γνωρίζουμε τη μονοτονία της συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$ και ζητείται ναδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_0) = \frac{v_1 f(x_1) + v_2 f(x_2) + \dots + v_k f(x_k)}{v_1 + v_2 + \dots + v_k}$$

όπου $v_1, v_2, \dots, v_k > 0$ και $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq \beta$ τότε επειδή δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το

$$\frac{v_1 f(x_1) + v_2 f(x_2) + \dots + v_k f(x_k)}{v_1 + v_2 + \dots + v_k}$$

βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ δεν μπορούμε να κάνουμε χρήση του Θ. Ενδιάμεσων Τιμών.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το **θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής**.

Συνεπώς το $\frac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9} \in f(\Delta)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \Delta = [0,$

4] τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \frac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$

Σύνολο τιμών και ρίζες εξίσωσης.

147.

Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+4}$

ii. $g(x) = \frac{2}{x} + 3 - \sqrt{x}$

iii. $h(x) = xe^x - 1, x \geq 0$

iv. $\varphi(x) = 1 - x^2 - \ln x, x \in \Delta = (0, e]$

Λύση

i. Για την $f(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+4}$ πρέπει :

- $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$
- $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-4, 5]$ και είναι συνεχής στο A ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

♦ Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 5-x_1 > 5-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{5-x_1} > \sqrt{5-x_2} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1+4 < x_2+4 \Leftrightarrow \sqrt{x_1+4} < \sqrt{x_2+4} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1+4} > -\sqrt{x_2+4} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$\sqrt{5-x_1} - \sqrt{x_1+4} > \sqrt{5-x_2} - \sqrt{x_2+4}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

♦ Είναι : $f(-4) = \sqrt{9} = 3$

$$f(5) = -\sqrt{9} = -3$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = [f(5), f(-4)] = [-3, 3]$.

ii. Για την $g(x) = \frac{2}{x} + 3 - \sqrt{x}$ πρέπει $x \neq 0$ και $x \geq 0$.

Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής στο A ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

♦ Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2} \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} + 3 > \frac{2}{x_2} + 3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2)

Για κάθε $x \in (-4, 5)$ είναι :

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $A = [-4, 5]$.

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$g'(x) = \frac{-2}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

Άρα g γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$.

παίρνουμε : $\frac{2}{x_1} + 3 - \sqrt{x_1} > \frac{2}{x_2} + 3 - \sqrt{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

♦ Είναι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} + 3 - \sqrt{x} \right) = (+\infty) + 3 - 0 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 3 - \sqrt{x} \right) = 0 + 3 - (+\infty) = -\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της g είναι

$$g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

iii. Η $h(x) = xe^x - 1$ με $x \in [0, +\infty)$ είναι συνεχής στο $A = [0, +\infty)$ αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

♦ Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ (1) έχουμε :

$$e^{x_1} < e^{x_2} \quad (2)$$

Επειδή και τα δύο μέλη των (1) και (2) είναι μη αρνητικοί αριθμοί, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 e^{x_1} < x_2 e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 e^{x_1} - 1 < x_2 e^{x_2} - 1 \\ \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x \geq 0$ είναι :

$$h'(x) = e^x + xe^x > 0$$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$.

♦ Είναι : $h(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1) = (+\infty)(+\infty) - 1 = +\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι $h(A) = \left[h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = [-1, +\infty)$.

iv. Η $\varphi(x) = 1 - x^2 - \ln x$ με $x \in (0, e]$ είναι συνεχής στο $\Delta = (0, e]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

♦ Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \\ \Leftrightarrow 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2)

παίρνουμε :

$$1 - x_1^2 - \ln x_1 > 1 - x_2^2 - \ln x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$$

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

♦ Είναι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2 - \ln x) = 1 - 0 - (-\infty) = +\infty$

$$\varphi(e) = 1 - e^2 - \ln e = -e^2$$

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x \in (0, e]$ είναι :

$$\varphi'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (0, e]$.

Επομένως το σύνολο τιμών της φ είναι $\varphi(\Delta) = \left[\varphi(e), \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \right] = [-e^2, +\infty)$.

148.

Να αποδείξετε ότι :

A. Η εξίσωση $xe^{x-1} + \ln x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

B. Η εξίσωση $e^{-x} + \frac{1}{x-1} = \ln x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

A. Η εξίσωση $xe^{x-1} + \ln x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα την $x=1$ (προφανής).

Για τη μοναδικότητα της ρίζας αυτής θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$f(x) = xe^{x-1} + \ln x - 1, \quad x > 0$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1) έχουμε :

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \quad (2)$$

Επειδή τα μέλη των (1) και (2) είναι θετικοί αριθμοί, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 e^{x_1-1} < x_2 e^{x_2-1} \quad (3)$$

Επίσης :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_1 - 1 < \ln x_2 - 1 \quad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4) παίρνουμε :

$$x_1 e^{x_1-1} + \ln x_1 - 1 < x_2 e^{x_2-1} + \ln x_2 - 1 \\ \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ (άρα και “1-1”) και συνεπώς η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^{-x} + \frac{1}{x-1} - \ln x, \quad x \in \Delta = (0, 1)$$

Η g είναι συνεχής στο Δ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

Μεθοδολογία

♦ «Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ ».

Αντιμετώπιση :

• Εξετάζω μήπως υπάρχει προφανής ρίζα.

ή

• Εφαρμόζω το Θ. Bolzano για την f στο Δ ή στο $[a, \beta] \subseteq \Delta$.

ή

• Εξετάζω αν στο σύνολο τιμών $f(\Delta)$ περιέχεται το 0.

♦ «Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα Δ ».

Αντιμετώπιση :

• Εξετάζω αν η f είναι γνησίως μονότονη (οπότε είναι “1-1”).

ή

• Υποθέτω ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα και καταλήγω σε άτοπο.

♦ «Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ ».

Αντιμετώπιση :

Αποδεικνύω ότι υπάρχει :

1^{ον} τουλάχιστον μια ρίζα στο Δ .

και

2^{ον} το πολύ μια ρίζα στο Δ .

Συνέπεια : Ακριβώς μια ρίζα στο Δ .

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0, +\infty)$.

$$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \quad (1)$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) παίρνουμε :

$$e^{-x_1} + \frac{1}{x_1 - 1} - \ln x_1 > e^{-x_2} + \frac{1}{x_2 - 1} - \ln x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (0, 1)$.

$$\blacklozenge \text{ Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-x} + \frac{1}{x-1} - \ln x \right) = 1 - 1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^{-x} + \frac{1}{x-1} - \ln x \right) \stackrel{x < 1}{x-1 < 0} = e^{-1} + (-\infty) - 0 = -\infty$$

Επομένως η g έχει σύνολο τιμών το

$$g(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

- Το 0 ανήκει στο $g(\Delta)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \Delta = (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει **μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$** .
- Η g είναι γνησίως φθίνουσα (άρα “1-1”) στο Δ επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει **το πολύ μια ρίζα** στο Δ .

Συνέπεια : Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει **ακριβώς μια ρίζα** στο $\Delta = (0, 1)$.

149.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{5-x} - \sqrt{x-1} + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x 'ς σε ένα μόνο σημείο.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Λύση

i. Η $f(x) = e^{5-x} - \sqrt{x-1} + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [1, +\infty)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση (ρίζα) στο A .

$\blacklozenge$ Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A την $x_0 = 5$

(προφανής) αφού : $f(5) = e^{5-5} - \sqrt{5-1} + 1 = e^0 - \sqrt{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$\blacklozenge$ Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 5 - x_1 > 5 - x_2$$

$$\Leftrightarrow e^{5-x_1} > e^{5-x_2} \quad (1)$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1 - 1} > -\sqrt{x_2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x_1 - 1} + 1 > -\sqrt{x_2 - 1} + 1 \quad (2)$$

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι :

$$g'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0$$

Άρα g γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (0, 1)$.

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x > 1$ είναι :

$$f'(x) = -e^{5-x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $A = [1, +\infty)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$e^{5-x_1} - \sqrt{x_1 - 1} + 1 > e^{5-x_2} - \sqrt{x_2 - 1} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα “1 - 1”) στο A .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 5$ δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x στο σημείο $M(5, 0)$.

ii. Επειδή :

- f γνησίως φθίνουσα στο $A = [1, +\infty)$ και
- $f(5) = 0$

έχουμε :

- ♦ Αν $1 \leq x < 5$, τότε: $f(x) > f(5) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- ♦ Αν $x > 5$, τότε: $f(x) < f(5) \Leftrightarrow f(x) < 0$

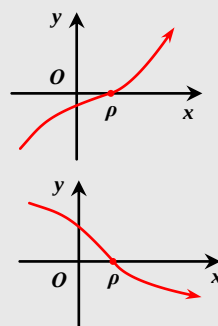
Μεθοδολογία

Αν για μια συνάρτηση f γνωρίζουμε

1^η τη μονοτονία της και 2^η τις ρίζες της,

τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημό της, ως εξής :

- ♦ Αν f γνησίως αύξουσα και ρ η ρίζα της, τότε :
 - ✓ Αν $x < \rho \Leftrightarrow f(x) < f(\rho) \Leftrightarrow f(x) < 0$
 - ✓ Αν $x > \rho \Leftrightarrow f(x) > f(\rho) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- ♦ Αν f γνησίως φθίνουσα και ρ η ρίζα της, τότε :
 - ✓ Αν $x < \rho \Leftrightarrow f(x) > f(\rho) \Leftrightarrow f(x) > 0$
 - ✓ Αν $x > \rho \Leftrightarrow f(x) < f(\rho) \Leftrightarrow f(x) < 0$



150.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2} - \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x^2} - \sqrt{x} = -2017$ έχει ακριβώς μια μη αρνητική πραγματική ρίζα.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x^2} - \sqrt{x} = 2$ είναι αδύνατη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $e^{-x^2} - \sqrt{x} - \lambda^2 = 0$ να έχει λύση στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Λύση

i. $f(x) = e^{-x^2} - \sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

- ♦ Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow e^{-x_1^2} > e^{-x_2^2} \quad (1)$$

Μονοτονία με χρήση παραγώγου

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $A = [0, +\infty)$.

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$e^{-x_1^2} - \sqrt{x_1} > e^{-x_2^2} - \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = [0, +\infty)$.

$$\blacklozenge \quad f(0) = e^0 - \sqrt{0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2} - \sqrt{x}) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

$$\left(\text{γιατί} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \stackrel{u=-x^2}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 1]$.

ii. α' τρόπος

Η εξίσωση $e^{-x^2} - \sqrt{x} = -2017$
ισοδύναμα γράφεται $f(x) = -2017$.

- Το -2017 ανήκει στο σύνολο τιμών της f αφού $f(A) = (-\infty, 1]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in A = [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = -2017, \text{ δηλαδή}$$

το x_0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = -2017 \Leftrightarrow e^{-x^2} - \sqrt{x} = -2017.$$

- Όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα “1-1”) στο A και συνεπώς **η ρίζα είναι μοναδική.**

β' τρόπος

Η εξίσωση γράφεται $e^{-x^2} - \sqrt{x} + 2017 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x^2} - \sqrt{x} + 2017$, $x \in A = [0, +\infty)$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow e^{-x_1^2} > e^{-x_2^2} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} + 2017 > -\sqrt{x_2} + 2017 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$e^{-x_1^2} - \sqrt{x_1} + 2017 > e^{-x_2^2} - \sqrt{x_2} + 2017 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

$$\blacklozenge \quad g(0) = e^0 - \sqrt{0} + 2017 = 2018$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2} - \sqrt{x} + 2017) = 0 - (+\infty) + 2017 = -\infty$$

Παρατήρηση

Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και σύνολο τιμών το $f(A)$, τότε ισχύουν :

- Αν $\alpha \in f(A)$, τότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) = \alpha$ δηλαδή η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ρίζα στο A (το x_0).
- Αν $\alpha \notin f(A)$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) = \alpha$ δηλαδή η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη στο A .

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι $g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) \right] = (-\infty, 2018]$.

Το 0 ανήκει στο $g(A)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in A$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει **μια τουλάχιστον ρίζα στο A** .

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα (άρα “1 – 1”) η **ρίζα αυτή είναι μοναδική**.

iii. Η εξίσωση $e^{-x^2} - \sqrt{x} = 2$ γράφεται $f(x) = 2$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (-\infty, 1]$.

Αφού το **2 δεν ανήκει στο $f(A)$** δεν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) = 2$, δηλαδή η

εξίσωση $f(x) = 2 \Leftrightarrow e^{-x^2} - \sqrt{x} = 2$ **δεν έχει λύση (είναι αδύνατη) στο A** .

iv. Η εξίσωση $e^{-x^2} - \sqrt{x} - \lambda^2 = 0$ για κάθε $x \geq 0$ ισοδύναμα γράφεται

$$e^{-x^2} - \sqrt{x} = \lambda^2 \Leftrightarrow f(x) = \lambda^2.$$

Άρα για να έχει η εξίσωση λύση στο $[0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή για να υπάρχει

$x_0 \geq 0$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \lambda^2$ πρέπει και αρκεί το λ^2 να ανήκει στο σύνολο τιμών της f που είναι το $(-\infty, 1]$.

Άρα πρέπει : $\lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$

151.

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $A = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $f(A) = (\gamma, \delta)$ όπου $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x = 2$$

έχει μοναδική ρίζα στο $A = (0, +\infty)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x - 2$, $x \in A = (0, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad (3)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (4)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \quad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των **(1), (2), (3), (4), (5)** παίρνουμε :

$$f(x_1) - e^{-x_1} + e^{x_1} + \ln x_1 + x_1 - 2 < f(x_2) - e^{-x_2} + e^{x_2} + \ln x_2 + x_2 - 2 \Leftrightarrow G(x_1) < G(x_2)$$

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ και έχει σύνολο

τιμών το $f(A) = (\gamma, \delta)$ θα ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \gamma \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta$$

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x - 2) = \gamma - e^0 + e^0 + (-\infty) + 0 - 2 = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x - 2) = \delta - 0 + (+\infty) + (+\infty) + (+\infty) - 2 = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0, \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Επομένως η G έχει σύνολο τιμών το

$$G(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} G(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Το $0 \in G(A)$ επομένως **υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in A = (0, +\infty)$ ώστε**

$$G(x_0) = 0$$

δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x = 2$$

Η G είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα « 1 - 1 » και συνεπώς

το x_0 είναι μοναδικό.

Παρατήρηση

Αντί για την συνάρτηση $G(x) = f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x - 2$, $x \in (0, +\infty)$ μπορούσαμε να θεωρήσουμε την

$$H(x) = f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x, \quad x \in A = (0, +\infty)$$

η οποία έχει το ίδιο σύνολο τιμών $H(A) = \mathbb{R}$ και εφόσον το $2 \in H(A)$ υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε

$$H(x_0) = 2 \Leftrightarrow f(x_0) - e^{-x_0} + e^{x_0} + \ln x_0 + x_0 = 2$$

που σημαίνει ότι το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) - e^{-x} + e^x + \ln x + x = 2$$

152.

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού το

διάστημα $A = (1, +\infty)$ και τη συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, η g γνησίως φθίνουσα και έχουν σύνολο τιμών

$$f(A) = (0, +\infty) \quad \text{και} \quad g(A) = (0, 1)$$

αντίστοιχα, τότε :

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης h .

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε :

$$h(x_0) = 2017.$$

Λύση

i. Αφού η f είναι συνεχής στο $A = (1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (B, \Gamma)$ όπου

$$B = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{Αλλά} \quad f(A) = (0, +\infty).$$

Επομένως είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Αφού η g είναι συνεχής στο $A = (1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα θα έχει σύνολο τιμών το $g(A) = (\Delta, E)$ όπου

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad \text{και} \quad E = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

$$\text{Αλλά} \quad g(A) = (0, 1).$$

Επομένως είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$$

Επειδή $D_f \cap D_g = (1, +\infty)$, για το πεδίο ορισμού της h πρέπει:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (1, +\infty) \\ \text{και} \\ g(x) \neq 0 \end{array} \right. \text{ που ισχύει αφού } g(A) = (0, 1) \text{ συνεπώς } 0 < g(x) < 1 \text{ για κάθε } x > 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = (1, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \nearrow} f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g \searrow} g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{g(x) > 0} \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)} \quad (2)$$

Επειδή λόγω του συνόλου τιμών είναι $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_1) < \left(\frac{f}{g}\right)(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Για το σύνολο τιμών της h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $D_h = (1, +\infty)$ ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων.

- $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0$

- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \\ g(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1 \end{array} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = +\infty$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

Άρα η h έχει σύνολο τιμών το $h(A) = (0, +\infty)$

- ii.** Το $2017 \in h(A) = (0, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_0 \in A = (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 2017$.

Η h είναι γνησίως αύξουσα άρα « $1-1$ » και συνεπώς το x_0 είναι μοναδικό.

153.

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

- i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

- ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

- iii.** Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$$

Λύση

- i.** Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A = (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \\ \text{και} \\ -x_1 > -x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(*)} \\ \Rightarrow \end{array} \frac{1}{x_1} - x_1 > \frac{1}{x_2} - x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} - x_1 + 1 > \frac{1}{x_2} - x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$.

Έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - x + 1 \right) = 0 - (+\infty) + 1 = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - x + 1 \right) = (+\infty) - 0 + 1 = +\infty.$

Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε :

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

- ii.** Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και « 1 - 1 », άρα θα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$.

Για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(A) = \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$ έχουμε :

$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)), \quad \text{αφού } f(f^{-1}(y)) = y, \text{ για κάθε } y \in f(A)$$

Οπότε

$$f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2), \quad \text{αφού } f \text{ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.}$$

Επομένως η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση .

- iii.** • Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f το $f(A) = (-\infty, +\infty)$

- Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f το $A = (0, +\infty)$.
- Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση θα ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} f^{-1}(x) - 1 \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} f^{-1}(x) \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} f^{-1}(x) - 1}{1 + \frac{1}{x} f^{-1}(x)} = \frac{0 \cdot 0 - 1}{1 + 0 \cdot 0} = -1$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{f^{-1}(x)} f(x) \right]. \quad \text{Είναι:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0 \\ \text{και} \\ f^{-1}(x) > 0 \text{ αφού το σύνολο τιμών της } f^{-1}(x) \text{ είναι το } (0, +\infty) \end{array} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)} = +\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{f^{-1}(x)} f(x) \right] = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

Πρόσχημο των $f(a)$ και $f(b)$ με τη βοήθεια του ορίου της f .

154.

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{e^x}{2}$ έχει μια τουλάχιστον

θετική ρίζα.

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $-x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2017 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{e^x}{2}, \quad x > 0$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \diamond \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{e^x}{2} \right) \\ &= 0 - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \text{αφού :} \end{aligned}$$

•

$$\left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

οπότε από **Κρ. Παρεμβολής**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}) = 0$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} < 0$ θα είναι

$f(x) < 0$ κοντά στο 0^+ , δηλαδή θα υπάρχει αριθμός $\alpha > 0$ και κοντά στο 0 τέτοιος ώστε $f(\alpha) < 0$.

$$\begin{aligned} \diamond \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{e^x}{2} \right) \\ &= 1 - 0 + (+\infty) = +\infty, \quad \text{αφού :} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να βρούμε το πρόσχημο του $f(x_0)$ μιας συνάρτησης f και δεν είναι εφικτό να βρούμε το $f(x_0)$, τότε βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

οπότε :

✓ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι $\ell > 0$ ή $+\infty$, τότε

$f(x) > 0$ κοντά στο x_0 που σημαίνει ότι υπάρχει αριθμός x_1 κοντά στο x_0 τέτοιος ώστε $f(x_1) > 0$.

✓ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι $\ell < 0$ ή $-\infty$, τότε

$f(x) < 0$ κοντά στο x_0 δηλαδή υπάρχει αριθμός x_2 κοντά στο x_0 ώστε $f(x_2) < 0$.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν αν $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$, δηλαδή :

✓ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι $\ell > 0$ ή $+\infty$, τότε

$f(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$ δηλαδή υπάρχει αριθμός x_3 , όσο μεγάλος θέλουμε, ώστε $f(x_3) > 0$.

✓ αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ είναι $\ell > 0$ ή $+\infty$, τότε

$f(x) > 0$ κοντά στο $-\infty$ δηλαδή υπάρχει αριθμός x_4 , όσο μικρός θέλουμε, ώστε $f(x_4) > 0$.

✓ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι $\ell < 0$ ή $-\infty$, τότε

$f(x) < 0$ κοντά στο $+\infty$ δηλαδή υπάρχει αριθμός x_5 , όσο μεγάλος θέλουμε, ώστε $f(x_5) < 0$.

✓ αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ είναι $\ell < 0$ ή $-\infty$, τότε

$f(x) < 0$ κοντά στο $-\infty$ δηλαδή υπάρχει αριθμός x_6 , όσο μικρός θέλουμε, ώστε $f(x_6) < 0$.

$$\bullet \quad \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right| \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$$

οπότε από **Κρ. Παρεμβολής**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ θα είναι $f(x) > 0$

κοντά στο $+\infty$, δηλαδή θα υπάρχει αριθμός β όσο μεγάλος θέλουμε και συνεπώς $\beta > 0$, τέτοιος ώστε $f(\beta) > 0$.

Οπότε :

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

Άρα από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{e^x}{2}$ έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha, \beta) \subseteq (0, +\infty)$ δηλαδή **μια τουλάχιστον θετική ρίζα**.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x) = -x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2017$, $x \in \mathbb{R}$
Έχουμε :

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = +\infty$$

x_1 Άρα είναι $g(x) > 0$ στην περιοχή του $-\infty$ και επομένως υπάρχει αριθμός όσο μικρός θέλουμε ώστε $g(x_1) > 0$.

$$\blacklozenge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = -\infty$$

x_2 Άρα είναι $g(x) < 0$ στην περιοχή του $+\infty$ και επομένως υπάρχει αριθμός όσο μεγάλος θέλουμε ώστε $g(x_2) < 0$.

Επειδή προφανώς είναι $x_1 < x_2$, έχουμε :

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολωνυμική.
- $\left. \begin{matrix} g(x_1) > 0 \\ g(x_2) < 0 \end{matrix} \right\} g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$

Άρα από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) , δηλαδή **μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα**.

Παρατηρήσεις

♦ Αν την εξίσωση $x\eta\mu \frac{1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{e^x}{2}$ την

γράφουμε $2x^2\eta\mu \frac{1}{x} - 2\eta\mu x + xe^x = 0$ και

θεωρούσαμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 2x^2\eta\mu \frac{1}{x} - 2\eta\mu x + xe^x$$

θα είχαμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ οπότε κανένα

συμπέρασμα δεν εξάγεται για το πρόσημο της $g(x)$ κοντά στο 0.

♦ Αντί για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ μπορούσαμε να

$$\text{βρούμε το } f(\pi) = \pi\eta\mu \frac{1}{\pi} + \frac{e^\pi}{2} > 0$$

και να εφαρμόσουμε **Θ. Bolzano** στο διάστημα $[\alpha, \pi] \subseteq (0, +\infty)$.

Παρατήρηση

Με παρόμοιο τρόπο, όπως στο **B** της εφαρμογής, αποδεικνύεται ότι :

« Κάθε πολωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα. »

Πρόσημο συνάρτησης

155.

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{21-4x-x^2} - x - 3$.

Λύση

Πρέπει : $21 - 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-7, 3]$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-7, 3]$.

♦ Η f είναι συνεχής στο A ως άθροισμα των συνεχών

$\sqrt{21-4x-x^2}$ (ριζικό συνεχούς) και $-x-3$ (πολυνυμική)

♦ $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{21-4x-x^2} - x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{21-4x-x^2} = x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{21-4x-x^2})^2 = (x+3)^2 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21-4x-x^2 = x^2+6x+9 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+10x-12=0 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή } x=-6 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

Άρα $x=1$

Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα $[-7, 1)$ και $(1, 3]$.

- Επειδή $f(-2) = 4 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-7, 1)$.
- Επειδή $f(2) = -2 < 0$ θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 3]$.

Δηλαδή :

x	-7	1	3
$f(x)$		+	-
		0	

Μεθοδολογία

Από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

Για το λόγο αυτό για να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης :

1^{ov} Βρίσκουμε τις ρίζες της f . Οι ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της f σε κάποια διαστήματα.

2^{ov} Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε x_0 από το εσωτερικό κάθε διαστήματος και βρίσκουμε το πρόσημο του $f(x_0)$. Το πρόσημο της f σε κάθε διάστημα είναι το ίδιο με το πρόσημο του αντίστοιχου $f(x_0)$.

156.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(0)=f(1)$.

Αν $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{4}\right)$ τότε να αποδείξετε ότι:

i. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$

ii. $g(0) + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$

iii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $A = \left[0, \frac{3}{4}\right].$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = [0, 1]$. Για να ορίζεται η $g(x)$ πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ \text{και} \\ x + \frac{1}{4} \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, 1] \\ \text{και} \\ x + \frac{1}{4} \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \text{και} \\ 0 \leq x + \frac{1}{4} \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \text{και} \\ -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 - \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \text{και} \\ -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$$

Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[0, \frac{3}{4}\right].$

ii. Είναι

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{4}\right) \\ g\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) \\ g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) - f(1) \end{array} \right\} \xRightarrow{(+)} g(0) + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= f(0) - f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) - f(1) = f(0) - f(1) = 0,$$

αφού $f(0) = f(1).$

Άρα $g(0) + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) = 0$

iii. Έστω ότι $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A = \left[0, \frac{3}{4}\right].$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ ως άθροισμα των συνεχών

συναρτήσεων $f(x)$ και $f\left(x + \frac{1}{4}\right)$ (σύνθεση των συνεχών f και $x + \frac{1}{4}$)

η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

♦ Αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$, τότε

$$g(0) + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) > 0 \stackrel{(iii)}{\Leftrightarrow} 0 > 0, \text{ άτοπο.}$$

♦ Αν $g(x) < 0$ για κάθε $x \in A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$, τότε

$$g(0) + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \stackrel{(iii)}{\Leftrightarrow} 0 < 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Άλλος τρόπος

Επειδή

$$g(0) + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

θα ισχύει :

$$\checkmark g(0) = g\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

ή

✓ δύο τουλάχιστον από τα

$$g(0), g\left(\frac{1}{4}\right), g\left(\frac{1}{2}\right), g\left(\frac{3}{4}\right) \text{ θα είναι}$$

ετερόσημα.

Αν αυτά (χωρίς βλάβη της γενικότητας) είναι τα $g(0), g\left(\frac{1}{2}\right)$

από το Θ. Bolzano στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

προκύπτει ότι η εξίσωση $g(x) = 0$

έχει ρίζα στο $(0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, \frac{3}{4})$.

157.

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 4]$ με :

$$f(1)f(2)f(4)=8 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4].$$

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

iii. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[1, 4]$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1, 4]$.

Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$, τότε $f(1) < 0$, $f(2) < 0$ και $f(4) < 0$.

Επομένως $f(1)f(2)f(4) < 0 \Leftrightarrow 8 < 0$, άτοπο.

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

ii. Έστω ότι δεν υπάρχει $x \in [1, 4]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 2$.

Άρα $f(x) \neq 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Αν $h(x) = f(x) - 2$, $x \in [1, 4]$, τότε $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ και επειδή η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1, 4]$.

• Αν $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ τότε

$$\left. \begin{aligned} h(1) > 0 &\Leftrightarrow f(1) - 2 > 0 \Leftrightarrow f(1) > 2 \\ h(2) > 0 &\Leftrightarrow f(2) - 2 > 0 \Leftrightarrow f(2) > 2 \\ h(4) > 0 &\Leftrightarrow f(4) - 2 > 0 \Leftrightarrow f(4) > 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \\ &\Rightarrow f(1)f(2)f(4) > 8 \Leftrightarrow 8 > 8, \text{ \textbf{άτοπο}} \end{aligned}$$

• Αν $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ τότε

$$\left. \begin{aligned} h(1) < 0 &\Leftrightarrow f(1) - 2 < 0 \Leftrightarrow f(1) < 2 \\ h(2) < 0 &\Leftrightarrow f(2) - 2 < 0 \Leftrightarrow f(2) < 2 \\ h(4) < 0 &\Leftrightarrow f(4) - 2 < 0 \Leftrightarrow f(4) < 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \\ &\Rightarrow f(1)f(2)f(4) < 8 \Leftrightarrow 8 < 8, \text{ \textbf{άτοπο}} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in [1, 4]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$ δηλαδή

η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

iii. Έστω ότι δεν υπάρχει $x \in [1, 4]$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$.

Άρα $f(x) \neq x \Leftrightarrow f(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Αν $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1, 4]$, τότε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ και επειδή η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1, 4]$.

• Αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ τότε

$$\left. \begin{aligned} g(1) > 0 &\Leftrightarrow f(1) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(1) > 1 \\ g(2) > 0 &\Leftrightarrow f(2) - 2 > 0 \Leftrightarrow f(2) > 2 \\ g(4) > 0 &\Leftrightarrow f(4) - 4 > 0 \Leftrightarrow f(4) > 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \\ &\Rightarrow f(1)f(2)f(4) > 8 \Leftrightarrow 8 > 8, \text{ \textbf{άτοπο}} \end{aligned}$$

• Αν $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ τότε

$$\left. \begin{aligned} g(1) < 0 &\Leftrightarrow f(1) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(1) < 1 \\ g(2) < 0 &\Leftrightarrow f(2) - 2 < 0 \Leftrightarrow f(2) < 2 \\ g(4) < 0 &\Leftrightarrow f(4) - 4 < 0 \Leftrightarrow f(4) < 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \\ &\Rightarrow f(1)f(2)f(4) < 8 \Leftrightarrow 8 < 8, \text{ \textbf{άτοπο}} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [1, 4]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$ δηλαδή

η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

Εύρεση συνάρτησης

158.

Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$4x^2 + f^2(x) = 4, \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]$$

Αν $f(0) = -2$, να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Βρίσκουμε (αν υπάρχουν) τις ρίζες της f . Είναι $f^2(x) = 4 - 4x^2$. Έχουμε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα η f μηδενίζει στο 1 και -1, συνεπώς :

• για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f(x) \neq 0$ και

• η f είναι συνεχής στο $(-1, 1)$.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 1)$.

Επειδή $f(0) = -2 < 0$ συμπεραίνουμε ότι : $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (-1, 1)$

Οπότε για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε :

$$4x^2 + f^2(x) = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 4 - 4x^2 \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{4 - 4x^2} \Leftrightarrow f(x) = -2\sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{1 - x^2}, & \text{αν } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{αν } x = -1 \text{ ή } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = -2\sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$$

Παρατήρηση

Από τη σχέση $f^2(x) = 4 - 4x^2$, **(1)** συμπεραίνουμε ότι η f έχει τύπο

$$f(x) = \sqrt{4 - 4x^2} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}$$

Αυτό δεν σημαίνει ότι οι μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση **(1)** είναι η

$$f(x) = \sqrt{4 - 4x^2}, x \in [-1, 1] \quad \text{και} \quad f(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}, x \in [-1, 1].$$

Τη σχέση **(1)** την ικανοποιούν και οι (άπειρες) συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - 4x^2}, & x \in \Delta \\ -\sqrt{4 - 4x^2}, & x \in [-1, 1] - \Delta \end{cases}$$

όπου $\Delta \subseteq [-1, 1]$. Γνωρίζοντας όμως το πρόσημο της f μπορούμε να απορρίψουμε

159.

Να βρείτε όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$$(f(x) - x^2)(f(x) + x^2) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Είναι :

$$(f(x) - x^2)(f(x) + x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - x^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^4 \quad \textbf{(1)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Πρώτα θα βρούμε (αν υπάρχουν) τις ρίζες της f .

Έχουμε :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα

$(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Από **(1)** έχουμε ότι

$$f(x) = x^2 \quad \text{ή} \quad f(x) = -x^2$$

Οπότε έχουμε τις περιπτώσεις :

Παρατήρηση

♦ Σε ορισμένα θέματα εύρεσης συνάρτησης καταλήγουμε συχνά σε σχέσεις της μορφής

$$f(x)g(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in A$$

Εδώ **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

$$f(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in A \quad (\text{μηδενική})$$

ή

$$g(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in A \quad (\text{μηδενική})$$

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

δεν είναι μηδενικές, ωστόσο :

$$f(x)g(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

♦ Ομοίως αν $|f(x)| = |g(x)|, x \in A$ **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

$$f(x) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in A \quad \text{ή} \quad f(x) = -g(x), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } f(x) = \begin{cases} \text{θετική στο } (-\infty, 0) \\ 0 \text{ για } x = 0 \\ \text{θετική στο } (0, +\infty) \end{cases} \text{ τότε } f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

♦ Αν

$$f(x) = \begin{cases} \text{θετική στο } (-\infty, 0) \\ 0 \text{ για } x = 0 \\ \text{αρνητική στο } (0, +\infty) \end{cases} \text{ τότε } f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ -x^2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ -x^2, x \geq 0 \end{cases}$$

♦ Αν

$$f(x) = \begin{cases} \text{αρνητική στο } (-\infty, 0) \\ 0 \text{ για } x = 0 \\ \text{θετική στο } (0, +\infty) \end{cases} \text{ τότε } f(x) = \begin{cases} -x^2, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2, x < 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases}$$

♦ Αν

$$f(x) = \begin{cases} \text{αρνητική στο } (-\infty, 0) \\ 0 \text{ για } x = 0 \\ \text{αρνητική στο } (0, +\infty) \end{cases} \text{ τότε } f(x) = \begin{cases} -x^2, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ -x^2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$$

160.

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)(e^x f(x) - 2) = e^{-x} x^2 \text{ και } f(0) = 0.$$

Λύση

Είναι :

$$\begin{aligned} f(x)(e^x f(x) - 2) &= e^{-x} x^2 \Leftrightarrow e^x f^2(x) - 2f(x) = e^{-x} x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{2x} f^2(x) - 2f(x) e^x &= x^2 \Leftrightarrow e^{2x} f^2(x) - 2f(x) e^x + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x f(x) - 1)^2 &= x^2 + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Οπότε η (1) γίνεται : $g^2(x) = x^2 + 1$ (2)

Αν x_0 είναι ρίζα της g , τότε $g(x_0) = 0$ και από (2) για $x = x_0$ παίρνουμε :

$$g^2(x_0) = x_0^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = -1 \text{ άτοπο}$$

Άρα η g δε μηδενίζει στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή θα είναι :

$$g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αλλά $g(0) = e^0 f(0) - 1 = -1 < 0$ (αφού $f(0) = 0$)

Άρα είναι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως από (2) συμπεραίνουμε ότι : $g(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Άρα :

$$e^x f(x) - 1 = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^x f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{-x}(1 - \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$$

Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Ασκήσεις

Υπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας σε ανοιχτό διάστημα

- 584.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x = x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.
- 585.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta \mu x = 2 - 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.
- 586.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $x_0^2 + 3x_0 = e^{x_0} + 1$.
- 587.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x+1)2^{x+1}$ έχει με την ευθεία $y = 1$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(-1, 0)$.
- 588.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln(x+2) - 4x + 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, e-2)$.
- 589.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
- 590.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x - \eta \mu x = \frac{1}{2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα θετική και μικρότερη του $\frac{7\pi}{6}$.
- 591.** Να αποδείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, 3)$
 όπου :
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6, & -3 \leq x < 0 \\ -5x - 6, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
- 592.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & -3 \leq x < 0 \\ -3x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.
 Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (-3, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$.
- 593.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\epsilon \varphi x}{4x - \pi} + \frac{\sigma \varphi x}{3x - \pi} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

594. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{10}+1}{x-1} + \frac{x^8+3}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

595. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 1 = \frac{\sin x}{x}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

596. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, $f(0)=\alpha$ και $f(1)=\beta$, όπου $\alpha, \beta \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

597. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τα κ, λ .

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

598. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$.

599. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$, $0 < \kappa < \lambda$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\kappa, \lambda)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa - \xi} + \frac{\lambda}{\lambda - \xi}.$$

600. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2\ln x - x < f(x) < \ln^2 x + x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (e^2 + 1)\ln x - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

601. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.
- ii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.
- iii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$.
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = 0$.
- 602.** Έστω f μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0, 1]$ για την οποία υποθέτουμε ότι $-1 < f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f^2(x_0) + f(x_0) + x_0 = 0$.
- 603.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\eta\mu x - x \leq xf(x) \leq x^2(1 - \sin x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι :
- i. $f(0) = 0$.
- ii. Η εξίσωση $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - 2\sin x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 604.** Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $f^2(0) + f^2(1) + 1 = 2f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^{2017}$.
- 605.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x(f(x) - 2x + 2) = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 606.** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες και συνεχείς στο $[-1, 5]$ τέτοιες ώστε $f(-1) < g(-1)$ και $g(5) < f(5)$. Να αποδείξετε ότι τα διαγράμματα των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 5)$.
- 607.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 6$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x + 1$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.
- 608.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x) = x^4 + x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

- 609.** Μια συνάρτηση f , συνεχής στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση :

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 < 3\gamma$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

- 610.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g με

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-2} \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα } (2, +\infty),$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x)$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4, 5)$.

- 611.** Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$e^{f(x)} + g(x) = 1 - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των A και B .

- 612.** Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1 \text{ τότε :}$$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x - 1$ σε ένα ακριβώς σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in (0, 1)$.

- 613.** Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(x) = [g(x) - x]^2 + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και ισχύουν οι σχέσεις $g(1) < 1$

και $g(2) > 2$, να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) - x_0 = 0$

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

- 614.** Έστω συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε $g(x) = f^2(x) - 4f(x) + 5$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει η σχέση

$$f^2(0) + f^2(1) + 10 = 2(f(0) + 3f(1)). \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

i. η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

ii. $f(0) = 1$ και $f(1) = 3$.

- iii. η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$.
- 615.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :
- $$f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$
- i. Να αποδείξετε ότι $-x^2 < f(x) < 0$
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6 - xf(x) = x^2 + 5x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$
- iv. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$.
- 616.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x - x & , x \in (0,1) \\ x^2 - x - 1 & , x \in [1, +\infty) \end{cases}$. Αν $\alpha \in (0,1)$ και $\beta \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) η εξίσωση $f(x) = -x$

Υπαρξη ρίζας χωρίς να δίνεται το διάστημα

- 617.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6 - 6 = 4x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- 618.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2016 \ln x + x - 2016$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- 619.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x + x$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- 620.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 3x$ τέμνει την ευθεία $y = 2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- 621.** Να αποδείξετε ότι οι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3 \ln x$ και $g(x) = 2 - x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
- 622.** Έστω συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2x) = f(x) + x - 1$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.
- 623.** Έστω συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 2]$ και $f(0) = f(2) \neq f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να είναι $f(\xi) = f(\xi + 1)$.
- 624.** Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2) - 5}{x-1} = 6$$

- i. Να βρείτε το $f(3)$ και τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2 - f(x)}{\eta\mu(x - 3)}$
- ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = xf(x) - 3x - 7\sigma\upsilon\eta x, \quad x \in \mathbb{R},$$
τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.
- 625.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
- i. Η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τους $f^{-1}(0)$ και $f^{-1}(3)$.
- ii. Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία $y = -x + 2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Υπαρξη περισσότερων από μιας ριζών

- 626.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \eta\mu x = \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0, \pi)$.
- 627.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6 - ax^2 + \beta = 0$ με $0 < \beta < a - 1$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.
- 628.** Αν $f(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta) + 3(x - \beta)(x - \gamma) + 5(x - \alpha)(x - \gamma)$ και $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- 629.** Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ και $g(\beta) < 0 < g(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) \cdot g(x) = (\beta - x)(\alpha - x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α, β) .
- 630.** Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$.
- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$
- ii. Αν οι δύο ρίζες είναι ρ_1, ρ_2 να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.
- 631.** Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β.** Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε:
- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lambda^2$ ii. $\lambda = \frac{1}{2}$

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$$

$$\text{έχει ακριβώς δύο ρίζες } \rho_1, \rho_2 \in (-1, 1) \text{ με } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}$$

Υπαρξη ακριβώς μιας ρίζας

632. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + e^x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

633. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2$.

634. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x - \frac{\pi}{2}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x - x$ τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

635. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

636. Αν η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, 1)$.

637. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + ex = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, +\infty)$.

638. Μια συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [1, 5]$.

Αν $f(4) = 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , να αποδείξετε ότι :

i. $f(1) > 0$ και $f(5) < 0$

ii. η εξίσωση $f(2x + 3) = x$ έχει μοναδική ρίζα.

639. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = 3 \quad \text{και} \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2016 + |x + y|} \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

640. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι : $f^3(x) + 3f(x) = x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1} .

iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}

τέμνονται σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \ln x}{x^4}$.

- 641.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι :

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f, g και $f - g$

iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

iv. Να λύσετε την ανίσωση : $4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$

Υπαρξη ρίζας σε διάστημα με κλειστό άκρο

- 642.** Έστω οι συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) - g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \Delta$, ετερόσημες, με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

- 643.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$, $f(a) = g(b)$ και $f(b) = g(a)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

- 644.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, $f(a) \leq g(a)$ και $f(b) \geq g(b)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

- 645.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$0 \leq f(x) \leq 1, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x - xe^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1]$.

- 646.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $\ln x - \ln \lambda = \frac{\pi}{2} - x$ έχει

μία τουλάχιστον θετική ρίζα μικρότερη ή ίση του $\frac{\pi}{2}$.

- 647.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \kappa + \lambda]$ τέτοιο ώστε :

$$\kappa \cdot \ln \xi = \xi - \lambda, \text{ όπου } \kappa, \lambda > 0$$

- 648.** Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $\alpha^2 f(\alpha) + \beta^2 f(\beta) = -f(\alpha) - f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$.
- 649.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και κ, λ θετικοί πραγματικοί με $\kappa + \lambda = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)$.
- 650.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και ισχύει $f(1) + 2f(2) = 0$, να αποδείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.
- 651.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :
- $$x^2 \leq f(x) < x^2 + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi \cdot 3^\xi$
- ii.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta \mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$
- iii.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^3 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 5x}{x^2 + \eta \mu 3x}$.
- iv.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^3}$.
- 652.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, \beta]$.
Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[a, \beta]$ τότε :
- i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
- ii.** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.
- 653.** Έστω $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αν οι f και g έχουν σύνολο τιμών το $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) + g(x_0) = x_0$.
- 654.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, a]$ με $f(0) = f(a)$.
- i.** Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - f\left(\frac{a}{2} + x\right)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{a}{2} + x\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

- 655.** Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, με σύνολο τιμών το $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $(g \circ f)(\gamma) = \gamma$.
- 656.** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχείς σ' αυτό, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $(g \circ f)(\xi) + (f \circ g)(\xi) = 2\xi$.
- 657.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f(x) = x$ έχει επίσης μια πραγματική ρίζα.
- 658.** Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f \circ g = g \circ f$. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη τότε και η εξίσωση $(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$ είναι αδύνατη.

Θ ε ώ ρ η μ α Ε ν δ ι ά μ ε σ ω ν Τ ι μ ώ ν

- 659.** Αν $f(x) = x^8 + 2x - 4$, να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 200 όταν $x \in (1, 2)$.
- 660.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{16} - \eta\mu(\pi x) + 7$. Να αποδείξετε ότι η f παίρνει την τιμή $\frac{7}{2}$ όταν $x \in (-4, 4)$.
- 661.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^8 + x + 4$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 250$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(-2, -1)$. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x \cdot \eta\mu(\pi x) + 2, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{5}{2}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(-1, 1)$.
- 663.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ τέτοια ώστε $f(0) = 5, f(2) = 0, f(3) = 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 4)$, ώστε $f(\xi_1) + f(\xi_2) = 6$ με $\xi_1 \neq \xi_2$.
- 664.** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε
- $$f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{4}{7}\right) + f\left(\frac{5}{7}\right)}{5}$$
- 665.** Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε

ότι υπάρχει ένας ακριβώς $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιος ώστε $3f(x_0) = f(1) + f(2) + f(3)$

666. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και ισχύει $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι :

i. η ευθεία $\varepsilon: y = 3$ τέμνει τη C_f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

ii. υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε
$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

667. Έστω μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) = \frac{2f(1) + f(2) + 3f(3) + f(4)}{7}$$

668. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{3}$$

669. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1) + f(2) = f(3) + f(4).$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

670. Έστω συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[2016, 2017]$ με $f(2016) = 1$ και $f(2017) = 5$. Αν η ευθεία $y = 2$ δεν έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

671. Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x) - f(x) = x^2 - x$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη.

ii. Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, τότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

672. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 10$ και

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 5, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε το $f(10)$ και το $f(5)$.

673. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(6) = 2$.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot f(f(x)) = 2$, να υπολογίσετε το $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

674. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2$ και

$$f(f(x)) + f(x) = 10 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι :

- i.** Η f δεν είναι «1-1» **ii.** Να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

675. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$

- i.** Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.
ii. Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.
iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

676. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \beta$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = \gamma$, όπου $1 < \alpha < \gamma < \beta$. Να βρείτε τις τιμές $f(\beta)$ και $f(\gamma)$.

Θ ε ώ ρ η μ α Μ έ γ ι σ τ η ς - Ε λ ά χ ι σ τ η ς τ ι μ ή ς

677. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6}.$$

678. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 5]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 5]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$10f(\xi) = f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4).$$

679. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $x_1, x_2, \dots, x_v$ σημεία του $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$

$$\text{τέτοιος ώστε να ισχύει : } f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v)}{v}$$

680. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με

$$g(x) = f(x) - x.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$, ώστε $g(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$

681. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}, \text{ όπου } x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$$

682. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,3]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^3(x) = f(1)f(2)f(3)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[1,3]$.

683. Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(f(x)) < f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι :

- i. $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$
- ii. Η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο
- iii. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

684. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει ότι :

$$xf(x) = x^2 + 3\eta\mu x, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

- i. Να βρείτε την f .
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq x + 3$, για κάθε $x \geq 0$
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 6x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$6f(x_0) = 3 + 2f(1) + 3f(3)$$

Σύνολο τιμών και ρίζες εξίσωσης

685. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in [0,1]$
- ii. $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- iii. $f(x) = \frac{6}{x} - 8x + 2, x \in (0,3]$
- iv. $f(x) = 5 - \ln(3-x) - 4e^{-x}, x \in [0,3)$
- v. $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{7-x}$
- vi. $f(x) = e^x - e^{-x} + x + 1$
- vii. $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) + 2x - 2017$
- viii. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

686. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - 1 + \ln x$

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$

687. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x) - x$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(1 - \ln x) - x = 0$ έχει ακριβώς μια λύση.

- iv.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2017$.
- 688.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.
- 689.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(3x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
- 690.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
- 691.** Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x + e^{x-1}$. Να βρείτε :
- Το σύνολο τιμών της f .
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e \ln x = ek - e^x$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
- 692.** Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x}$.
- Να μελετήσετε η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- 693.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^x$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
 - Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ ώστε $h(x_0) + h^{-1}(x_0) = 0$.
- 694.** Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x = 1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty)$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2017x + x \ln x = 1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty)$.
- 695.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x - 2017$ ορισμένη στο $A = (1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

- iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $f(x) + \lambda = 0$ να έχει λύση στο $A = (1, +\infty)$.
- 696.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ είναι αδύνατη.
 - Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ να έχει λύση.
- 697.** Έστω η συνάρτηση $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x} - \ln x = \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1]$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x} - \ln x = \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη στο $(0,1]$.
 - Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\frac{1-x \cdot \ln x}{x} = 2\lambda^2 - \lambda$ να έχει λύση στο διάστημα $(0,1]$.
- 698.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + x \ln^2 x + 2$ με $x \in [1, +\infty)$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2017$.
 - Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{9}{4}$.
 - Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει $x_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \lambda^2 - 1$.
- 699.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{2x + \ln^2 x}$ με $x \in (1, +\infty)$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $\frac{3}{2x_0 + \ln^2 x_0} = 2$.
- 700.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f .
 - Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + e^{x-1} = 1$.

iv. Να βρείτε το πρόσημο της f .

701. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2(x-1)^2 + \ln(x-1) - 2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

702. Έστω συνάρτηση $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$f(-1) = 2, f(1) = -2$ και $f(3) = 0$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

διαστήμα $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$, να βρείτε:

i. το σύνολο τιμών.

ii. το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1$.

iii. το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

703. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και τέτοια ώστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

704. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει

μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.

705. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = (\delta, \gamma)$, $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0 + e^{x_0} + 2017.$$

706. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$

$$\text{για τον οποίο ισχύει } \lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}.$$

707. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.

i. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια μόνο ρίζα.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.

iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα :

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} - \ln(2\lambda) = -\ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

708. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$.

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει :

$$3\ln(4\mu) - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2+1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

709. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \ln x + x = 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\ln x) + \frac{\ln x - 1}{\ln x} = 2 - \ln x - \frac{x}{e}$.

710. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1)$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(e^a - 1) - 1}{x - 1} - \frac{f(\eta\mu a) - f(a)}{x - 2} = 2017$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, για κάθε $a > 0$.

711. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta = (-\infty, 1)$, να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + f(x)}{x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{x - 1}$

712. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{f^{-1}(x)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f^{-1}(x) - 2x}{x+1}$$

713. Αν f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $\Delta = [1, 2]$ που ικανοποιούν τις συνθήκες :

- g γνήσια φθίνουσα στο Δ .
- $f(\Delta) = g(\Delta) = [1, 2]$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε :

$$2g(x_0) = (f \circ g)(x_0) + f(x_0)$$

714. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0, 1]$. Αν $f \circ g = g \circ f$ και η f είναι γνήσιως φθίνουσα αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$ και $g(\xi) = \xi$.

Πρόσημο των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ με τη βοήθεια του ορίου της f .

715. Αν f συνεχής στο 0 με $f(0) = 2017$ και ισχύει

$$xf(x) + x^4 \sin \frac{1}{x} = \eta\mu(ax), \quad a \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

- i. Να βρείτε το a .
- ii. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

716. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) + \eta\mu 3x = 4x - 5x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

- i. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
- ii. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες ρίζες.

717. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να βρείτε τον τύπο της f .
- ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

718. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση Αν $f(0) > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x + x \eta\mu \frac{1}{x}$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

719. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(1 - \ln x) = \eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

720. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x\eta\mu x = 2017$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

721. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x + \eta\mu x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

722. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^{2017}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2017}} = 0$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^{2017} = 0$, έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

723. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad xf(x) \leq x^2\eta\mu \frac{1}{x} + \eta\mu 3x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x \cdot f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

724. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^6 + \beta x^4 + \gamma x^2 + \delta x - 2$ με $a < 0$ και $a + \beta + \gamma + \delta > 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

725. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + \beta$ με $\beta > 0$ και $a + \beta < -1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Πρόσημο συνάρτησης

726. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x^2 + 4\ln x - x^2 \cdot \ln x - 8$ ii. $f(x) = \sqrt{3x-2} - x$

727. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν ότι είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$

τέτοιο ώστε
$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi - a} + \frac{1}{\xi - \beta}$$

728. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = -3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(1) - 2)x^3 - 3x + 1]$.

729. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = -2$ και $-1, 2$ είναι

διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 f(0) + 1}{x^2 + 2}$.

730. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι :

- $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3)x^4 + 2x^2 + 1}{g(3)x^3 + 5} = -\infty$.

731. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 + (x-1)^2}{x-1} = 100$.

i. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

ii. Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x - 1}$.

iii. Αν μοναδικές οι ρίζες της f είναι οι $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) < 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0 \text{ να βρείτε το πρόσημο της } f.$$

732. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $-1, 3$ είναι δυο διαδοχικές ρίζες της f και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + 1}{f(2)x^2 + 5}$.

733. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$ και $2f(x) \neq 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

734. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [1, 4]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $f(1)f(2) = f(3)f(4)$ να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $\xi_1 \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi_1) = f(1)f(2)$

ii. Η f δεν είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

735. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(0) = f(1)$

Αν $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{3}\right)$ τότε να αποδείξετε ότι :

i. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[0, \frac{2}{3}\right]$

ii. $g(0) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

iii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

$$A = \left[0, \frac{2}{3} \right]$$

736. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,1]$ και συνεχής με $f(0) = f(1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{v}\right)$, όπου $v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g ;

ii. Όταν $v > 1$, να αποδείξετε ότι $g(0) + g\left(\frac{1}{v}\right) + g\left(\frac{2}{v}\right) + \dots + g\left(\frac{v-1}{v}\right) = 0$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(x + \frac{1}{v}\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

737. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha]$ με $\alpha > 0$ και $f(0) = f(\alpha)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in [0, \alpha]$ τέτοια ώστε :

i. $f(x_1) = f\left(x_1 + \frac{\alpha}{2}\right)$ **ii.** $f(x_2) = f\left(x_2 + \frac{\alpha}{3}\right)$ **iii.** $f(x_3) = f\left(x_3 + \frac{\alpha}{4}\right)$

738. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Αν $9a + 3b + 3\gamma = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

739. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 8]$ με : $f(2) \cdot f(4) \cdot f(8) = 64$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [2, 8]$. Να αποδείξετε ότι

i. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [2, 8]$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[2, 8]$.

iii. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[2, 8]$.

Εύρεση του τύπου συνάρτησης

740. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f^2(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = -1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

741. Αν f συνεχής στο $[-2, 2]$ για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2, 2] \text{ τότε :}$$

- i. να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
- ii. να βρείτε τις συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει η παραπάνω ισότητα και να γίνει η γραφική τους παράσταση.

742. Έστω συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 5x \text{ για κάθε } x \in \Delta = (0, 5).$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ρίζες στο Δ .
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f στο Δ αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $f(1) = -2$.

743. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3, 3]$ για την οποία ισχύει

$$3x^2 + 4f^2(x) = 27 \text{ για κάθε } x \in [-3, 3].$$

- i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3, 3)$.
- iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

- iv. Αν επιπλέον $f(1) = \sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

744. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = -1$ για την οποία ισχύει:

$$e^{2x} \cdot f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f .

745. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς και ισχύουν:

- ♦ $f^2(x) - 1 = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
- ♦ $xg(x) + 2 = g(x) + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- i. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g .
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4g(x) = 7x$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

746. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f^2(x) = \ln^2 x \text{ για κάθε } x > 0.$$

- i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- ii. Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ και $f(2) > 0$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

747. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $(-\pi, \pi)$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 1 = -\sin^2 x \text{ για κάθε } x \in (-\pi, \pi).$$

- i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii. Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

748. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + \eta\mu^2 x = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\pi) = -\pi$ και $f(-2\pi) = 2\pi$. Να βρείτε τον τύπο της f .

749. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ για την οποία κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)[f(x) + 2\sigma\upsilon\nu x] = x^2 + \eta\mu^2 x$. Να βρείτε τον τύπο της.

750. Για τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) = 2f(x)\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι $f(a) > \eta\mu a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

751. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x) = 2e^x f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

752. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = a^{2x} + 2a^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

α. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β. Αν $f(0) = -2$:

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $a < 2$

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $a > 3$

753. Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 2xf(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu|x|}$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{e^{x_0-1}}{x_0}$.

754. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει $\text{ότι } f^2(x) = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \geq 0$

i. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

iii. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f(\beta)}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

755. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει ότι $e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} = 1, \quad x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), \quad x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

756. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy}, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \quad (1)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ii. Να βρείτε την τιμή $f(1)$

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

iii. Αφού αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να λύσετε την εξίσωση $x\left(x + \sin \frac{\pi}{x}\right) = x - 1$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

757. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f(0) = 1, \quad f(x) \neq x \text{ και } \frac{f(x) - x}{e^x} + \frac{e^x}{x - f(x)} = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$

- $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ \kappa - 2x - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή του κ .

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{g(\alpha) - 1}{x - 1} + \frac{g(\beta) - 1}{x - 2} = 2017$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$.

iv. Αν x_1, x_2 οι ρίζες του ερωτήματος **ii.** με $x_1 < x_2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + g(x) = \eta \mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

Διαφορικός Λογισμός I

Η έννοια της παραγώγου

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου

ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Παρατηρήσεις:

1. Το όριο αυτό, όπως κάθε όριο, μπορεί να μην υπάρχει ή να υπάρχει και να ισούται με άπειρο. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις θα λέμε ότι η συνάρτηση f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0** .

Αν θέσουμε $h = x - x_0$, τότε είναι $x = x_0 + h$ και όταν $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow 0$. Έτσι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 η παράγωγός της θα δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι προτιμότερος αυτός ο τύπος. (π.χ. αν θέλουμε μεταβλητή που να τείνει στο μηδέν).

Ένα όριο μπορεί να έχει νόημα, μόνο από τη μια πλευρά. Έτσι και εδώ:

3. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[x_0, \beta)$ ενώ δεν ορίζεται στο διάστημα

(α, x_0) , τότε ορίζουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

4. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ ενώ δεν ορίζεται στο διάστημα

(x_0, β) , τότε ορίζουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$ (το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν τα όρια

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι **ίσα** με τον ίδιο πραγματικό αριθμό.

5. Το όνομα παράγωγος δόθηκε στο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ από τον G.W. Leibniz (1667) ο οποίος το συμβόλιζε με:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον J.K. Lagrange (1772).

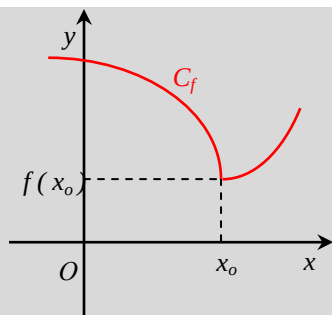
Παράγωγος και συνέχεια

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 δεν είναι υποχρεωτικά και παραγωγίσιμη στο x_0 .
Συνεπώς η παραγωγισιμότητα είναι ισχυρότερη συνθήκη της συνέχειας.
2. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
3. Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , δεν έπεται ότι δεν είναι και συνεχής στο x_0 .



Συνεχής στο x_0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Στιγμιαία Ταχύτητα

Θεωρούμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $x = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t . Η συνάρτηση $S(t)$ καθορίζει τη θέση του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

Έστω M_0 η θέση του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t_0 και M η θέση του σώματος κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, $h \neq 0$.

Κατά το χρονικό διάστημα από t_0 σε t η μετατόπιση του σώματος είναι $S(t) - S(t_0)$, οπότε η **μέση ταχύτητα** του σώματος σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι:

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

- ♦ Ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t_0 το

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \text{ και συμβολίζουμε με } v(t_0).$$

$$\text{Δηλαδή: } v(t_0) = S'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Παρατήρηση:

Όταν το κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει:

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0, \text{ οπότε είναι } v(t_0) \geq 0$$

ενώ όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει:

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0 \text{ οπότε είναι } v(t_0) \leq 0$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εύρεση παραγώγου με τον ορισμό

161.

Να βρείτε, αν υπάρχει, η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 , όταν:

α. $f(x) = x + 3 + \sqrt{x+3}$ και $x_0 = -3$.

β. $f(x) = \begin{cases} 2x - \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$.

γ. $f(x) = |x^3 - x^2|$ και $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

Λύση

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-3, +\infty)$.

Είναι:

- $f(-3) = -3 + 3 + \sqrt{-3+3} = 0$

και

- $$\frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \frac{x + 3 + \sqrt{x+3} - 0}{x + 3}$$

$$= \left(1 + \frac{x+3}{(x+3) \cdot \sqrt{x+3}} \right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) = +\infty.$$

Μεθοδολογία

Για την εύρεση (με τον ορισμό) της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 :

✓ Βρίσκουμε το $f(x_0)$.

✓ Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

το οποίο:

- Αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός λ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \lambda$.

- Αν δεν υπάρχει το όριο ή είναι $\pm\infty$ τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσμη
στο $x_0 = -3$.

β. Έχουμε:

- $f(0) = 2 \cdot 0 - \eta\mu 0 = 0$.

- Αν $x < 0$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2 - 1 = 1.$$

- Αν $x > 0$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 + 1 = 1.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$, οπότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσμη στο $x_0 = 0$ με παράγωγο $f'(0) = 1$.

γ. ♦ Είναι: $f(x) = |x^3 - x^2| = |x^2 \cdot (x - 1)| = x^2 \cdot |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(0) = 0^2 \cdot |0 - 1| = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot |x - 1| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot |x - 1|) = 0$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσμη στο $x_0 = 0$ με παράγωγο $f'(0) = 0$.

♦ Είναι: $f(x) = x^2 \cdot |x - 1| = \begin{cases} -x^2(x - 1) & \text{αν } x < 1 \\ x^2 \cdot (x - 1) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$. Οπότε:

- $f(1) = 1^2 \cdot (1 - 1) = 0$.

- Αν $x < 1$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 \cdot (x - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2) = -1.$$

- Αν $x > 1$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 \cdot (x - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσμη στο $x_0 = 1$.

Εύρεση παραμέτρων

162.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2 x + 1, & x \leq 1 \\ 2x^2 + \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases} \quad \text{να είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1.$$

Λύση

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα πρέπει:

1^{ov}. Η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(αναγκαία συνθήκη)

$$\text{άρα: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

και

$$2^{\text{ov}}. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \diamond \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha^2 x + 1) = \\ &= \alpha^2 + 2 = f(1) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + \alpha x + \beta) = 2 + \alpha + \beta$$

$$\text{Άρα } \alpha^2 + 2 = 2 + \alpha + \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha^2 - \alpha \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + \alpha^2 x + 1 - (\alpha^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + \alpha^2 x - \alpha^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 1) + \alpha^2 (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1 + \alpha^2)}{x - 1} = 2 + \alpha^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + \alpha x + \beta - (\alpha^2 + 2)}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + \alpha x + \alpha^2 - \alpha - \alpha^2 - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - 1) + \alpha(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x + 2 + \alpha)}{x - 1} = 4 + \alpha \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν:

$$2 + \alpha^2 = 4 + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ ή } \alpha = 2$$

• Για $\alpha = -1$ από (1) παίρνουμε $\beta = 2$.

• Για $\alpha = 2$ από (1) παίρνουμε $\beta = 2$.

Μεθοδολογία

Επειδή ισχύει ότι:

f : παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0
για την εύρεση παραμέτρων ώστε μια συνάρτηση f , πολλαπλού τύπου, να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αλλαγής του τύπου της x_0 , απαιτούμε:

1^{ov}. Η f να είναι συνεχής στο x_0 , δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

και

$$2^{\text{ov}}. \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Για την εύρεση των ορίων στο 2^o βήμα πολύ συχνά κάνουμε χρήση της σχέσης που προκύπτει από το 1^o βήμα. Από τη λύση του συστήματος των σχέσεων που απαιτούμε να ισχύουν βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων.

Εύρεση παραγώγου από διπλή ανισοτική σχέση

163.

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 + |\eta\mu x| \leq f(x) \leq |x| + x^2 \quad (1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x=0$ η σχέση (1) γίνεται $0 \leq f(0) \leq 0$, οπότε είναι $f(0)=0$.

♦ Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η σχέση (1) γίνεται:

$$x^2 + \eta\mu x \leq f(x) \leq x + x^2 \Leftrightarrow x + \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + x$$

Είναι: • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) = 1$

Άρα σύμφωνα με το **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και επειδή } f(0)=0 \text{ έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad (2)$$

♦ Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ η σχέση (1) γίνεται:

$$x^2 - \eta\mu x \leq f(x) \leq -x + x^2 \Leftrightarrow x - \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq -1 + x$$

Είναι: • $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = -1$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + x) = -1$

Άρα σύμφωνα με το **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1$ και επειδή

$$f(0)=0 \text{ έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$,

επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μεθοδολογία

Μια διπλή ανισότητα της μορφής

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

οδηγεί πολύ συχνά στη χρήση του **Κριτηρίου Παρεμβολής**.

Οπότε για την εύρεση της παραγώγου $f'(x_0)$ έχουμε:

✓ Θέτουμε στην ανισότητα όπου x το x_0 και βρίσκουμε με την τιμή $f(x_0)$.

✓ Μορφοποιούμε την ανισότητα ώστε να έχουμε το λόγο

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Εφαρμόζουμε το **Κριτήριο Παρεμβολής** και βρίσκουμε το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{αν υπάρχει})$$

δηλαδή την $f'(x_0)$.

Εύρεση παραγώγου αλληλοεξαρτώμενων συναρτήσεων

164.

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} g(x) \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ και } g(0) = g'(0) = 0,$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 , με $g'(0) = 0$, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0 \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \eta \mu \frac{1}{x} - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g(x)}{x} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right] \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{g(x)}{x} \right| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{g(x)}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{g(x)}{x} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{g(x)}{x} \right| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow - \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq \frac{g(x)}{x} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \leq \left| \frac{g(x)}{x} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(- \left| \frac{g(x)}{x} \right| \right) \stackrel{(1)}{=} 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{g(x)}{x} \right| \stackrel{(1)}{=} 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g(x)}{x} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right] = 0.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο $f'(0) = 0$.

165.

Δίνεται η $f(x) = (x^2 + x + 2)g(x)$. Η g είναι συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(0) = 3$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = 4$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρεθεί η $f'(0)$.

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = 4$. Άρα:

Μεθοδολογία

✓ Αν δίνεται η παράγωγος μιας συνάρτησης g στη θέση x_0 , τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

✓ Το «να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 » σημαίνει συνήθως να βρούμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• Η g είναι συνεχής στο 0 , επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 3$ (1)

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 3}{x} = 4$ (2)

α' τρόπος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x + 2)g(x) - (0^2 + 0 + 2)g(0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)g(x) + 2g(x) - 2g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x(x+1)g(x)}{x} + 2 \frac{g(x) - g(0)}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)g(x)] + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \stackrel{(1)}{=} g(0) + 2g'(0) = 3 + 2 \cdot 4 = 11 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 11$.

β' τρόπος

Θέτουμε $h(x) = \frac{g(x) - 3}{x}$, για κάθε x κοντά στο 0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 4$ και

$$g(x) = xh(x) + 3 \quad (1)$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x + 2)g(x) - (0^2 + 0 + 2)g(0)}{x} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x + 2)[xh(x) + 3] - 2g(0)}{x} \stackrel{g(0)=3}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3h(x) + 3x^2 + x^2h(x) + 3x + 2xh(x) + 6 - 2 \cdot 3}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3h(x) + 3x^2 + x^2h(x) + 3x + 2xh(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[x^2h(x) + 3x + xh(x) + 3 + 2h(x)]}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [x^2h(x) + 3x + xh(x) + 3 + 2h(x)] = 0^2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 3 + 2 \cdot 4 = 11 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 11$.

Εύρεση παραγώγου από γνωστό όριο

166.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2\eta\mu x}{x} = 5$,
να αποδείξετε ότι: $f'(0) = 3$.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2\eta\mu x}{x} = 5.$$

$$\text{Θέτουμε } g(x) = \frac{f(x) + 2\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) = xg(x) - 2\eta\mu x \quad (1) \quad \text{για κάθε } x \text{ κοντά στο}$$

$$0, \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [xg(x) - 2\eta\mu x] = 0 \cdot 5 - 0 = 0.$$

$$\text{Αλλά η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

α' τρόπος

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - 2\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xg(x)}{x} - \frac{2\eta\mu x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 5 - 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 3$.

β' τρόπος

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2\eta\mu x - 2\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + 2\eta\mu x}{x} - \frac{2\eta\mu x}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 5 - 2 \cdot 1 = 3$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 3$.

167.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - x} = 2$,
να αποδείξετε ότι η $g(x) = f(x) \cdot \ln(ex)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 .

Λύση

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{x^2 - x} \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - x) \cdot h(x)$ (1) για κάθε x κοντά στο 1, με

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 - x) \cdot h(x)] = 0 \cdot 2 = 0$.

Αλλά η f είναι συνεχής στο 1, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ (2)

α' τρόπος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \ln(ex) - f(1) \cdot \ln e}{x - 1} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \ln(ex)}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x) \cdot h(x) \cdot \ln(ex)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (x - 1) \cdot h(x) \cdot \ln(x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [x h(x) \cdot \ln(ex)] = 1 \cdot 2 \cdot \ln e = 2 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 2$.

β' τρόπος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \ln(ex) - f(1) \cdot \ln e}{x - 1} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \ln(ex)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) \cdot \ln(ex)}{x^2 - x}}{\frac{x - 1}{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x^2 - x} \cdot \ln(ex)}{\frac{x - 1}{x \cdot (x - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x^2 - x} \cdot \ln(ex)}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \ln(ex)}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}} = \frac{2 \cdot \ln e}{1} = 2 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 2$.

Εύρεση παραγώγου από γνωστή παράγωγο

168.

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$ και $f'(1) = 1$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{2x - f(x)}$.

Λύση

$$\text{Είναι } f'(1) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 1.$$

α' τρόπος

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 1}$, για κάθε x κοντά στο 1, οπότε:

$$f(x) = (x - 1) \cdot h(x) + 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{2x - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[(x - 1) \cdot h(x) + 2] - 2}{2x - [(x - 1) \cdot h(x) + 2]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1) \cdot h(x) + 2x - 2}{2x - (x - 1) \cdot h(x) - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1) \cdot h(x) + 2(x - 1)}{2(x - 1) - (x - 1) \cdot h(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot [xh(x) + 2]}{(x - 1) \cdot [2 - h(x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xh(x) + 2}{2 - h(x)} = \frac{1 + 2}{2 - 1} = 3. \end{aligned}$$

β' τρόπος

Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε στο ζητούμενο όριο, παραστάσεις των οποίων μας είναι γνωστά τα όρια τους. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{2x - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2x + 2x - 2}{2x - f(x) + 2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(f(x) - 2) + 2(x - 1)}{2(x - 1) - f(x) + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \frac{f(x) - 2}{x - 1} + 2}{2 - \frac{f(x) - 2}{x - 1}} = \frac{1 \cdot f'(1) + 2}{2 - f'(1)} = \frac{1 + 2}{2 - 1} = 3. \end{aligned}$$

169.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(a)}{x - a} = a^2 \cdot f'(a) - 2a \cdot f(a)$$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο a , άρα το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι η παράγωγος της f στο a , δηλ. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

α' τρόπος

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot f(x) - \alpha^2 \cdot f(\alpha) - x^2 \cdot f(\alpha) + \alpha^2 \cdot f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot (f(x) - f(\alpha)) - f(\alpha) \cdot (x^2 - \alpha^2)}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\alpha^2 \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \frac{(x - \alpha)(x + \alpha)}{x - \alpha} \right]$$

$$= \alpha^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} (x + \alpha) = \alpha^2 \cdot f'(\alpha) - f(\alpha) \cdot 2\alpha$$

Παρατήρηση

Στην προσπάθειά μας να δημιουργήσουμε στον αριθμητή το $f(x) - f(\alpha)$ (για να εμφανιστεί το γνωστό όριο) και έχοντας το $\alpha^2 f(x)$ προσθέτουμε & αφαιρούμε
 $\downarrow$
 το $\alpha^2 f(\alpha)$, ώστε βγάζοντας κοινό παράγοντα το α^2 να μείνει το $f(x) - f(\alpha)$.

β' τρόπος

Έστω $h(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, για κάθε x κοντά στο α , οπότε

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot h(x) + f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = f'(\alpha).$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 [(x - \alpha) \cdot h(x) + f(\alpha)] - x^2 \cdot f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot (x - \alpha) \cdot h(x) + \alpha^2 \cdot f(\alpha) - x^2 \cdot f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{\alpha^2 \cdot (x - \alpha) \cdot h(x)}{x - \alpha} - \frac{f(\alpha) \cdot (x^2 - \alpha^2)}{x - \alpha} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} [\alpha^2 h(x) - f(\alpha) \cdot (x + \alpha)]$$

$$= \alpha^2 f'(\alpha) - f(\alpha) \cdot (2\alpha)$$

Εύρεση παραγώγου από σχέση ισότητας

170.

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f^3(x) + x^2 \cdot f(x) = x^2 \cdot \eta\mu 2x$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

Για $x = 0$ η δοθείσα σχέση δίνει: $f^3(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

$$\text{Οπότε} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{x^2 \cdot f(x)}{x^3} = \frac{x^2 \cdot \eta\mu 2x}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x} = \frac{\eta\mu 2x}{x} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{u=2x}{=} 2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 2.$$

Αρα και στα 2 μέλη της (1) υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια στο 0, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow (f'(0))^3 + f'(0) = 2 \Leftrightarrow (f'(0))^3 + f'(0) - 2 = 0$$

Αν $f'(0) = \ell$, τότε έχουμε:

$$\ell^3 + \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1) \cdot (\ell^2 + \ell + 2) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1 \text{ ή } \ell^2 + \ell + 2 = 0 \quad (\text{αδύνατη})$$

Αρα $f'(0) = 1$.

Εύρεση παραγώγου από ανισοτική σχέση

171.

Οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο a και ικανοποιούν τις συνθήκες

$$f(a) \geq g(a) \text{ και } f(x) + x^2 \leq g(x) + a^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $g'(a) - f'(a) = 2a$.

Λύση

Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο a , επομένως ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\text{Είναι } f(a) \geq g(a) \quad (1)$$

$$g(x) + a^2 \geq f(x) + x^2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} g(x) + a^2 + f(a) &\geq f(x) + x^2 + g(a) \Leftrightarrow g(x) - g(a) + f(a) - f(x) \geq x^2 - a^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a)) \geq (x - a) \cdot (x + a) \end{aligned}$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x < a \Leftrightarrow x - a < 0, \text{ τότε } \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq x + a.$$

Τα όρια στο a και στα δύο μέλη της ανισότητας, υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, αφού οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο a , οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \lim_{x \rightarrow \alpha^-} (x + \alpha)$$

$$\text{άρα } g'(\alpha) - f'(\alpha) \leq 2\alpha \quad (3)$$

♦ Αν $x > \alpha \Leftrightarrow x - \alpha > 0$, τότε $\frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq x + \alpha$.

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} (x + \alpha)$$

$$\text{άρα } g'(\alpha) - f'(\alpha) \geq 2\alpha \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε: $g'(\alpha) - f'(\alpha) = 2\alpha$.

Π α ρ ά γ ω γ ο ς κ α ι α λ λ α γ ή μ ε τ α β λ η τ ή ς

172.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x^2), & x \leq 1 \\ f(2x-1), & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 2f'(1)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

♦ Για $x < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{f(x^2) - f(1)}{(x-1) \cdot (x+1)} \cdot (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \cdot (x+1) \right] \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = x^2$ οπότε, $\lim_{x \rightarrow 1^-} u = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$.

Δηλαδή όταν $x \rightarrow 1$ το $u \rightarrow 1$.

Συνεπώς:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(u) - f(1)}{u - 1} = f'(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$.

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1) \right] = f'(1) \cdot 2 = 2f'(1) \quad (1)$$

♦ Για $x > 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(2x - 1) - f(1)}{x - 1}$$

$$\text{Θέτουμε } h = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{h + 1}{2}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} h = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Δηλαδή όταν $x \rightarrow 1^+$ το $h \rightarrow 1$.

Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) - f(1)}{\frac{h + 1}{2} - 1} = 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) - f(1)}{h - 1} = 2f'(1) \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 2f'(1)$.

173.

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε:

$$\alpha. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}{h} = 5f'(x_0).$$

$$\beta. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = -2f'(x_0).$$

$$\gamma. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 - 2h)}{h} = 7f'(x_0).$$

Λύση

$$\alpha. \quad \text{Για το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}{h} \text{ θέτουμε } u = 5h \Leftrightarrow h = \frac{u}{5}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} u = \lim_{h \rightarrow 0} (5h) = 0$$

δηλαδή όταν $h \rightarrow 0$, το $u \rightarrow 0$.

Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{\frac{u}{5}} = 5 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = 5f'(x_0)$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

$$\beta. \quad \text{Για το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} \text{ θέτουμε } t = -2h \Leftrightarrow h = -\frac{t}{2}, \text{ οπότε}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} t = \lim_{h \rightarrow 0} (-2h) = 0$, δηλαδή όταν $h \rightarrow 0$, το $t \rightarrow 0$

Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 5h) - f(x_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{-\frac{t}{2}} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = -2f'(x_0)$$

γ. Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 - 2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 - 2h) + f(x_0) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &\stackrel{\alpha.}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} \\ &= 5f'(x_0) - (-2f'(x_0)) = 7f'(x_0) \end{aligned}$$

174.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x + \beta h)}{h} = (\alpha - \beta)f'(x)$$

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x + \beta h)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x) - [f(x + \beta h) - f(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x) - [f(x + \beta h) - f(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{h} - \frac{f(x + \beta h) - f(x)}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\alpha \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha h} - \beta \frac{f(x + \beta h) - f(x)}{\beta h} \right] \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha h} \stackrel{u = \alpha h}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x + u) - f(x)}{u} = f'(x)$

Προσοχή!

Στο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x + \beta h)}{h}$ η μεταβλητή

είναι το h και όχι το x .

Γι' αυτό στη διαδικασία εύρεσης του ορίου το x το συμπεριφερόμαστε ως (οποιοδήποτε) σταθερό αριθμό.

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \beta h) - f(x)}{\beta h} \stackrel{t = \beta h}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = f'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x + \beta h)}{h} &= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha h} - \beta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \beta h) - f(x)}{\beta h} \\ &= \alpha f'(x) - \beta f'(x) = (\alpha - \beta) f'(x) \end{aligned}$$

175.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α και $f(\alpha) = f'(\alpha) = \alpha \neq 0$,

να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\alpha + h) - f^2(\alpha - h)}{h \mu 2h}$.

Λύση

$$\text{Είναι } f'(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = \alpha. \text{ Έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\alpha + h) - f^2(\alpha - h)}{h \mu 2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\alpha + h) - f^2(\alpha) + f^2(\alpha) - f^2(\alpha - h)}{h \mu 2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(\alpha + h) - f(\alpha)][f(\alpha + h) + f(\alpha)] - [f(\alpha - h) - f(\alpha)][f(\alpha - h) + f(\alpha)]}{h \mu 2h} = \\ &\stackrel{f(\alpha) = \alpha}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} [f(\alpha + h) + \alpha] - \frac{f(\alpha - h) - f(\alpha)}{h} [f(\alpha - h) + \alpha]}{h \mu 2h} \end{aligned}$$

Ισχύουν:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = \alpha$
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha + h) \stackrel{u = \alpha + h}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} f(u) = f(\alpha) = \alpha$, αφού η f είναι συνεχής στο α , ως παραγωγίσιμη.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha - h) - f(\alpha)}{h} \stackrel{t = -h}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + t) - f(\alpha)}{-t} = -f'(\alpha) = -\alpha$
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha - h) \stackrel{\omega = \alpha - h}{=} \lim_{\omega \rightarrow \alpha} f(\omega) = f(\alpha) = \alpha$, αφού η f είναι συνεχής στο α ως παραγωγίσιμη.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \mu 2h}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \mu 2h}{2h} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{h \mu u}{u} = 2$

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι ίσο με:

$$\frac{\alpha \cdot (\alpha + \alpha) - (-\alpha) \cdot (\alpha + \alpha)}{2} = \frac{2\alpha^2 + 2\alpha^2}{2} = 2\alpha^2.$$

Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις δύο μεταβλητών.

176.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - xy \quad \text{και} \quad f(0) \neq 0$$

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - xy \quad (1)$$

Για $x = y = 0$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f(0) = f(0)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f^2(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 & (\text{απορρίπτεται αφού } f(0) \neq 0) \\ \text{ή} \\ 1 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1 \end{cases}$$

Η παράγωγος της f στο 0 είναι:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}.$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ αρκεί να

δείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή γνωρίζουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \text{ πρέπει και στο ζητούμενο}$$

όριο η μεταβλητή να τείνει στο 0 .

Οπότε θέτουμε: $h = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + h$.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$,

δηλαδή όταν $x \rightarrow x_0$, το $h \rightarrow 0$.

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \Delta$ (ισοδύναμη έκφραση: «παραγωγίσιμη στο Δ ») αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Οπότε:

Από μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(x+y) = \dots$ και με δεδομένη την παραγωγισιμότητα της f στο 0 , έχουμε:

1^{ov}. Θέτουμε όπου $x = y = 0$ και βρίσκουμε την τιμή $f(0)$.

2^{ov}. Εκφράζουμε την $f'(0)$ με το όριό της (ορισμός).

3^{ov}. Γράφουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και «μεταφέρουμε» το όριο στο 0 με αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $h = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + h$ οπότε όταν $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow 0$.

4^{ov}. Αντικαθιστούμε το $f(x_0 + h)$ με το ίσο του από τη συναρτησιακή σχέση $f(x+y) = \dots$ και διαχωρίζουμε το κλάσμα ώστε να έχουμε γνωστά όρια.

Παρατήρηση

Το 3^ο βήμα μπορούμε να το αποφύγουμε αν για την παράγωγο της f στο x_0 κάνουμε χρήση του τύπου:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)f(h) - x_0h - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)(f(h)-1) - x_0h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0) \cdot \frac{f(h)-1}{h} - \frac{x_0h}{h} \right] \\
&= f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} - x_0 = f(x_0)f'(0) - x_0.
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x_0) = f'(0)f(x_0) - x_0.$$

177.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Λύση

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

Για $x = y = 1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Η παράγωγος της f στο 1 είναι:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ αρκεί να αποδείξουμε ότι για το τυχαίο

$x_0 \in \mathbb{R}^*$ υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή γνωρίζουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \text{ πρέπει και στο ζητούμενο}$$

όριο η μεταβλητή να τείνει στο 1 .

Οπότε θέτουμε: $u = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 \cdot u$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} u = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{x_0} = \frac{x_0}{x_0} = 1,$$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Δ αρκεί να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \Delta$, δηλαδή ότι

$$\text{υπάρχει το όριο στο } \mathbf{R} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Οπότε:

Από μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(xy) = \dots$ και με δεδομένη την παραγωγισιμότητα της f στο 1 , έχουμε:

1^{ov}. Θέτουμε όπου $x = y = 1$ και βρίσκουμε την τιμή $f(1)$.

2^{ov}. Εκφράζουμε την $f'(1)$ με το όριό της. (ορισμός)

3^{ov}. Γράφουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και

«μεταφέρουμε» το όριο στο 1 με αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $u = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 u$ οπότε

όταν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow 1$.

4^{ov}. Αντικαθιστούμε το $f(x_0 \cdot u)$ με το ίσο του από τη συναρτησιακή σχέση $f(xy) = \dots$ και διαχωρίζουμε το κλάσμα ώστε να έχουμε γνωστά όρια.

δηλαδή όταν $x \rightarrow x_0$, το $u \rightarrow 1$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(x_0 \cdot u) - f(x_0)}{x_0 \cdot u - x_0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(x_0) + f(u) - f(x_0)}{x_0(u - 1)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u - 1} \cdot \frac{1}{x_0} = f'(1) \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{f'(1)}{x_0} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}^*$ με $f'(x_0) = \frac{f'(1)}{x_0}$.

Επομένως

$$\text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}^* \text{ με } f'(x) = \frac{f'(1)}{x}, \quad x \neq 0.$$

Ασκήσεις

Εύρεση παραγώγου με τον ορισμό

758. Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο x_0 , όταν:

i. $f(x) = x^3 + 1, x_0 = 1$

ii. $f(x) = \frac{1}{x^4}, x_0 = 1$

iii. $f(x) = \sin^2 x, x_0 = 0$

759. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , όταν:

i. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2x - 1$ και $x_0 = 1$

ii. $f(x) = \sqrt{x-2} + 3x - 1$ και $x_0 = 2$

iii. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ και $x_0 = 3$

iv. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ και $x_0 = 0$

760. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 , όταν:

i. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 2 \\ 9x - 8, & x \geq 2 \end{cases}$ και $x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ και $x_0 = 3$

iii. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$

iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\ln x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

v. $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 1 - \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

761. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , όταν:

i. $f(x) = |x-2| + 2x - 1$, και $x_0 = 2$

ii. $f(x) = |x^2 - x|, x_0 = 2$ και $x_0 = 1$

iii. $f(x) = 1 - \sin x + 3\eta\mu|x|$ και $x_0 = 0$

Εύρεση παραμέτρων

762. Αν $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ \beta\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

763. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$,

$$\text{όπου: } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2, & x \geq -1 \\ 2x^3 + \beta, & x < -1 \end{cases}$$

764. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 + 5}, & x > 2 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

765. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 3, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^3 + \gamma x + 2, & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

766. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 2}{x - 1}, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Εύρεση παραγώγου από διπλή ανισοτική σχέση

767. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$3x - x^2 \leq f(x) \leq 2x + xe^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

768. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2x\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + \eta\mu^2 x$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την $\frac{df(0)}{dx}$.

- 769.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2x\eta\mu x \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2$, να βρείτε:

i. $\tau_0 f(0)$ **ii.** $\tau_{\eta v} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$

- 770.** Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$|f(x) - \eta \mu x| \leq x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή $f'(0)$.

- 771.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left| f(x) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Να βρείτε:

i. $\tau_0 f(0)$ **ii.** $\tau \eta v \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$

Εύρεση παραγώγου αλληλοεξαρτώμενων

συναρτήσεων

- 772.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (\sqrt{x^2 + 3x} - 2)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.

- 773.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f(0)=3$ και $f'(0)=2$, να βρείτε την $g'(0)$, όταν

i. $g(x) = 2x^2 f(x) - x$ **ii.** $g(x) = f(x) - \frac{x}{f(x)}$

- 774.** Αν $f(0) = -4$, $f'(0) = 5$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$h(x) = f(x) + \frac{\eta \mu x}{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την τιμή $h'(0)$.

775. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $g(x) \leq f(x) \leq g(x) + (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g'(1) = 2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την $f'(1)$.

776. Για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύουν:

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(2) = h'(2) = 3$
- $f(2) = g(2) = h(2)$

Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ και να βρείτε την $g'(2)$.

777. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $g(0) = 0$ και $g'(0) = 1$, να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

778. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

Αν είναι $g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι:

i. η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \eta \mu 2x}{2x - \eta \mu x}$.

779. Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$ και ισχύει:

$$g(\pi) = g'(\pi) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} g(x) \sigma \upsilon \nu^2 \frac{1}{x - \pi}, & x \neq \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$ με $f'(\pi) = 0$.

780. Έστω συνάρτηση g ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x - \alpha|g(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$ αν και μόνο αν ο α είναι ρίζα της g .

781. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και $g'(0) = 2$.

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} g^2(x), & x \leq 0 \\ \alpha x + \beta, & x > 0 \end{cases} \quad \text{να είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0.$$

782. Έστω η συνάρτηση f με $f(1)=1$ και $f'(1)=2$ και η

$$g(x) = \begin{cases} f^3(x), & x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Εύρεση παραγώγου από γνωστό όριο

783. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3}-2} = 4$.

Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

784. Δίνεται η συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = 3$.

Να βρείτε τους αριθμούς:

i. $f(4)$ **ii.** $f'(4)$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2f(x) - x}{x^2 - 7x + 12}$

785. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο 1.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ και $g(x) = \sqrt{x^2+3} \cdot f(x)$, να βρείτε την $g'(1)$.

786. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x-1} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{\sqrt{x}-1} = 4$

Να βρείτε: **i.** την $f(1)$ **ii.** την $f'(1)$ **iii.** το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{g(x)}$

787. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 4} = 1$$

- i. Να βρείτε την τιμή της f στο 2.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την $f'(2)$.
- iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) + x^2 - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η h να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Εύρεση παραγώγου από γνωστή παράγωγο

788. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\alpha > 0$, να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(f(x))^2 - (f(\alpha))^2}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$$

789. Έστω η συνάρτηση f με $f(1) = f'(1) = 2$. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 + x - 2} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{\sqrt{x + 3} - 2}$$

790. Έστω η συνάρτηση f με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{f(x)} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{f(x)\eta\mu x}$$

791. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) - x^2 f(2)}{x - 2}$$

792. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$.

Να βρείτε τα όρια

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 + x - 2} \\ \text{ii.} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x} \\ \text{iii.} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1} \\ \text{iv.} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 3f(x) + 2}{x^3 - 1} \end{array}$$

793. Έστω f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0) \quad (1991)$$

794. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο

$$\alpha \in \Delta. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha f'(\alpha) + f(\alpha).$$

795. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x = \alpha$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 f^2(x) - \alpha^2 f^2(\alpha)}{x - \alpha} = 2\alpha^2 f'(\alpha) f(\alpha) + 2\alpha f^2(\alpha)$$

796. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 \sqrt{f(x)} - x \sqrt{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{x_0 f'(x_0) - 2f(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

797. Αν f και g είναι παραγωγίσιμες στο α , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha)f(x) - g(x)f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

798. Αν f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο 0 για τις οποίες ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = -1, \quad g(0) = -2, \quad g'(0) = 2$$

$$\text{να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - 2}{x} = 0.$$

799. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 2}{x - 1} = 3$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 - 3) - 2}{x^2 - 3x + 2} = -4$.

Εύρεση παραγώγου από σχέση ισότητας

800. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) - 2xf^2(x) + x^2f(x) = x^2 \eta \mu 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$.

801. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2xf^2(x) = -x \eta \mu^2 x - 2x^2 f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , να βρείτε την τιμή $f'(0)$.

802. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει:

$$f^3(x) + (x-1)^2 f(x) - 2(x-1)^3 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να αποδείξετε ότι } f'(1) = 1.$$

803. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο

$$x_0 = 0 \text{ για τις οποίες ισχύει } [f(x)]^2 + [g(x)]^2 = x \eta \mu x, \text{ } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $[f'(0)]^2 + [g'(0)]^2 = 1$.

804. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 4x^4$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = g'(0)$.

- 805.** Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και γι' αυτήν ισχύει:

$$x^2 f^3(x) + 2f(x) = x^3 - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = \frac{3}{2}$.

- 806.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ii. $f'(1) = 3$.

- 807.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$ και για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) + 2xf(x) = 3x^2$ και $f(x) > 0$, να αποδείξετε ότι

$$f'(1) = 1.$$

Εύρεση παραγώγου από ανισοτική σχέση

- 808.** Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 = 5$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$\bullet f(5) = g(5) \quad \bullet f(x) + x \leq g(x) + 5 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $g'(5) - f'(5) = 1$.

- 809.** Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και

$f(x) + x \leq g(x) + \alpha$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) + 1 = g'(\alpha)$.

- 810.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ισχύει: $f(\alpha) - f(\beta) \leq (\alpha - \beta)^2$. Να αποδείξετε ότι είναι $f'(0) = 0$.

Παράγωγος και αλλαγή μεταβλητής

811. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 3 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(5-2x)}{x-1} = -4$, να αποδείξετε ότι $f(3) = 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 με $f'(3) = 2$.

812. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x)}{x-1} = 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

813. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στα $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ και

$$f(0) = f(1). \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} f(2x), & x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1), & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0) = f'(1)$.

814. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$ και $x_2 = -1$ με $g'(0) = g'(-1) = \alpha$ και $g(0) = g(-1)$. Να βρείτε η $f'(1)$ όταν

$$f(x) = \begin{cases} g(x-1), & x \leq 1 \\ g(x-2), & x > 1 \end{cases}$$

815. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 3.

$$\text{Αν } g(x) = \begin{cases} f(3x), & x \leq 1 \\ f(5x-2), & x > 1 \end{cases} \text{ και η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

1, να αποδείξετε ότι $f'(3) = 0$ και αντιστρόφως.

816. Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 2 και η $g(x) = \begin{cases} f(x^3+1), & x < 1 \\ f(2x), & x \geq 1 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι $f'(2) = 0$.

817. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} = (\alpha - \beta)f'(0) \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$$

818. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(3x) - f^2(2x)}{x} = 2f(0) \cdot f'(0).$$

819. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε:

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 2f'(x_0).$

ii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + 3h)}{h} = -4f'(x_0).$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 - h) - f^2(x_0)}{h} = -2f'(x_0) \cdot f(x_0).$

820. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 4h) - f(x - 3h)}{h} = 7f'(x)$$

821. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α , να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{3h - \eta\mu 2h}$$

822. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 4h) - f(x - 3h)}{4h - 3\eta\mu 2h} = -\frac{7}{2}f'(x)$$

823. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h - 1} = -x f'(x)$$

824. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:
$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - 2f(x) + f\left(\frac{x}{h}\right)}{h - 1} = 0, \quad x \neq 0$$

825. Έστω f μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ κοντά στο 0 για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(f(x)) = f(x) - x$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$.

ii. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις δύο μεταβλητών

826. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

827. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2\eta\mu xy$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 2x_0 + f'(0)$.

828. Η συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες:

$$\bullet f(x+y) = f(x)f(y) \quad \bullet f(x) = 1 + xg(x) \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

829. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)\sigma\eta\upsilon\beta + f(\beta)\sigma\eta\alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f'(0)\sigma\eta\chi$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

830. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x \in (\alpha, \beta)$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

831. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ και $f(1) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

832. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ να αποδείξετε ότι αν η f παραγωγίζεται στο 1, τότε παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

833. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:

$$f(xy) = \frac{1}{x}f(y) + \frac{1}{y}f(x) \quad (1), \quad \text{για κάθε } x, y > 0 \quad \text{και } f'(1)=1,$$

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$.

834. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $f(\alpha + \beta) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Να βρείτε την παράγωγο της f σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

835. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) \leq 0$.

Παράγωγος Συνάρτησης

Ορισμοί

- ♦ Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A .
 - Η f λέγεται **παραγωγίσιμη στο A** , ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
 - Η f λέγεται **παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
 - Η f λέγεται **παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** , όταν είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

- ♦ Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A και A_1 το σύνολο σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αν σε κάθε σημείο $x_0 \in A_1$ (δηλαδή σε κάθε σημείο x_0 στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη) αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$, τότε δημιουργείται μια καινούργια συνάρτηση f' με πεδίο ορισμού το A_1 η οποία ονομάζεται **παράγωγος συνάρτησης f** ή **πρώτη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με:

$$f' \quad \text{ή} \quad \frac{df}{dx}$$

- ♦ Η παράγωγος της f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με:

$$f'' \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

- ♦ Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f** με $v \geq 3$, συμβολίζεται με:

$$f^{(v)}(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^v f}{dx^v}$$

και ισχύει:

$$f^{(v)}(x) = \left(f^{(v-1)}(x) \right)', \quad v \geq 3$$

Σημειογραφία του Leibniz

Η σημειογραφία για τις παραγώγους που παρουσιάστηκε από τον Gottfried Leibniz είναι μία από τις πρώτες. Χρησιμοποιείται ακόμα ευρέως όταν η εξίσωση $y = f(x)$ εκλαμβάνεται ως μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ εξαρτώμενων και ανεξάρτητων μεταβλητών. Τότε, η πρώτη παράγωγος συμβολίζεται με

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

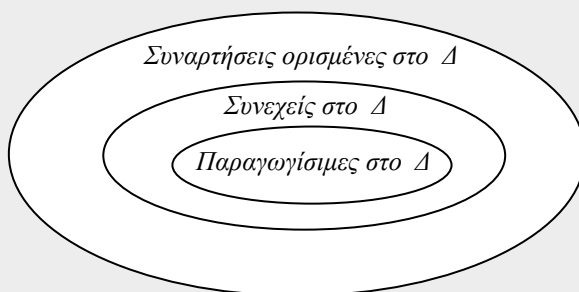
Παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης εκφράζονται γράφοντας $\frac{d^v y}{dx^v}$, $\frac{d^v f}{dx^v}(x)$, $\frac{d^v}{dx^v} f(x)$

για την v -οστή παράγωγο της $y = f(x)$.

Στον συμβολισμό του Leibniz γίνεται σαφές ως προς πια μεταβλητή γίνεται η παραγωγή (στον παρονομαστή).

Παρατηρήσεις:

1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f και η f' δεν έχουν πάντα το ίδιο πεδίο ορισμού.
Γενικά ισχύει: $D_{f'} \subseteq D_f$.
2. Αν θεωρήσουμε όλες τις συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ , τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα



Κανόνες Παραγωγίσιμης

Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , δε σημαίνει ότι και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .
2. Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ , τότε ισχύει:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

3. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι για n συναρτήσεις ισχύει ότι:

$$(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$$

Παράδειγμα

Αν $f(x) = |x|$ και $g(x) = -|x| + x$, τότε είναι: $(f + g)(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, ενώ οι f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0.

Π α ρ ά γ ω γ ο ς γ ι ν ο μ έ ν ο υ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο επίσης δεν ισχύει.
2. Για συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ , ισχύει:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Αν μια συνάρτηση είναι σταθερή έχουμε: $(cf'(x))' = c'f(x) + cf'(x) = 0 + cf'(x)$, άρα

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

3. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
Για παράδειγμα για τρεις συναρτήσεις έχουμε:

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0, \text{ ενώ η } \sqrt{x} \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } 0.$$

Π α ρ ά γ ω γ ο ς π η λ ί κ ο υ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

3. Ειδικά αν $f(x) = 1$, τότε έχουμε:

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Π α ρ ά γ ω γ ο ς Σ ύ ν θ ε τ η ς Σ υ ν ά ρ τ η σ η ς

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Παρατηρήσεις:

1. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Δηλαδή αν $u = g(x)$, $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

2. Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό σαν «κανόνας της αλυσίδας», γιατί με το συμβολισμό του Leibniz γράφεται:

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

και αν $y = f(u)$ έχουμε τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (Αν $u = f(x)$: παραγωγίσιμη)
$(c)' = 0, \quad c: \text{σταθερά}$	
$(x)' = 1, \quad x \in \mathbb{R}$	
$(x^v)' = vx^{v-1}, \quad v \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \mathbb{R}$ $(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x > 0$	$(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$
$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$	$(\varepsilon\phi u)' = \frac{u'}{\sigma\upsilon\nu^2 u}$
$(\sigma\phi x)' = \frac{-1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{ \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$	$(\sigma\phi u)' = \frac{-u'}{\eta\mu^2 u}$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κανόνες παραγώγισης

178.

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = 2x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{2} \quad \text{ii. } f(t) = 2\sqrt{t} - \ln t + 5\ln 2$$

$$\text{iii. } g(x) = 7\eta\mu x - \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{4} + 2\ln|x| \quad \text{iv. } g(u) = \sigma\phi u + u - 3\eta\mu \frac{\pi}{7}$$

$$\text{v. } h(x) = \varepsilon\phi x - x + \sigma\phi \frac{\pi}{12} \quad \text{vi. } \phi(x) = e^x + 2^x - x^e + e^2$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i. } f'(x) &= \left(2x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{2} \right)' \\ &= (2x^4)' + \left(\frac{x^3}{3} \right)' - \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} \right)' + (3\sqrt[3]{x})' + (\sqrt{2})' \\ &= 2(x^4)' + \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{3}{2}(\sqrt{x})' + 3(\sqrt[3]{x})' + 0 = 2 \cdot 4x^3 + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' \\ &= 8x^3 + x^2 - \frac{3}{4\sqrt{x}} + 3 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = 8x^3 + x^2 - \frac{3}{4\sqrt{x}} + x^{-\frac{2}{3}} \\ &= 8x^3 + x^2 - \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = 8x^3 + x^2 - \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } f'(t) &= (2\sqrt{t} - \ln t + 5\ln 2)' = (2\sqrt{t})' - (\ln t)' + (5\ln 2)' = \\ &= 2(\sqrt{t})' - \frac{1}{t} + 0 = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}}{t} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}-1}{t}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } g'(x) &= \left(7\eta\mu x - \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{4} + 2\ln|x| \right)' = (7\eta\mu x)' - \left(\frac{3\sigma\upsilon\nu x}{4} \right)' + (2\ln|x|)' \\ &= 7(\eta\mu x)' - \frac{3}{4}(\sigma\upsilon\nu x)' + 2(\ln|x|)' = 7\sigma\upsilon\nu x - \frac{3}{4}(-\eta\mu x) + 2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 7\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{4}\eta\mu x + \frac{2}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

$$\text{iv. } g'(u) = \left(\sigma\phi u + u - 3\eta\mu \frac{\pi}{7} \right)' = (\sigma\phi u)' + (u)' - \left(3\eta\mu \frac{\pi}{7} \right)' =$$

$$= -\frac{1}{\eta\mu^2 u} + 1 - 0 = \frac{-1 + \eta\mu^2 u}{\eta\mu^2 u} = \frac{-(1 - \eta\mu^2 u)}{\eta\mu^2 u}$$

$$= \frac{-\sigma\upsilon\nu^2 u}{\eta\mu^2 u} = -\sigma\varphi^2 u, \quad u \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

Παρατήρηση

Αφού εφαρμόσουμε τους κανόνες παραγώγισης και κάνουμε τις πράξεις απλουστεύουμε, όσο αυτό είναι δυνατόν, το αποτέλεσμα.

$$\text{v. } h'(x) = \left(\varepsilon\varphi x - x + \sigma\varphi \frac{\pi}{12} \right)' = (\varepsilon\varphi x)' - (x)' + \left(\sigma\varphi \frac{\pi}{12} \right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 + 0$$

$$= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi^2 x, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

vi.

$$\varphi'(x) = (e^x + 2^x - x^e + e^2)' = (e^x)' + (2^x)' - (x^e)' + (e^2)' = e^x + 2^x \ln 2 - ex^{e-1} + 0$$

$$= e^x + 2^x \ln 2 - ex^{e-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

179.

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- | | |
|---|--|
| i. $f(x) = 2\sqrt{x} \ln x$ | ii. $f(x) = x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ |
| iii. $f(x) = xe^x \varepsilon\varphi x$ | iv. $f(x) = \frac{2}{3+5^x} - \frac{3}{x}$ |
| v. $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$ | vi. $f(x) = \frac{1+2\ln x }{4x^2}$ |

Λύση

- i. $f'(x) = (2\sqrt{x} \ln x)' = (2\sqrt{x})' \ln x + 2\sqrt{x} (\ln x)' = 2(\sqrt{x})' \ln x + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$
- $$= 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2 + \ln x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$
- ii. $f'(x) = (x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)' = (x)' - (\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)' = 1 - [(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)']$
- $$= 1 - [\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x (-\eta\mu x)] = 1 - (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x$$
- $$= \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x = 2\eta\mu^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$
- iii. $f'(x) = (xe^x \varepsilon\varphi x)' = (x)' e^x \varepsilon\varphi x + x(e^x)' \varepsilon\varphi x + xe^x (\varepsilon\varphi x)'$
- $$= 1 \cdot e^x \varepsilon\varphi x + xe^x \varepsilon\varphi x + xe^x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= e^x \left(\varepsilon \phi x + x \varepsilon \phi x + \frac{x}{\sigma \nu^2 x} \right), \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

Παρατήρηση

iv. $f'(x) = \left(\frac{2}{3+5^x} - \frac{3}{x} \right)' = \left(\frac{2}{3+5^x} \right)' - \left(\frac{3}{x} \right)'$ Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου, είναι :

$$= 2 \left(\frac{1}{3+5^x} \right)' - 3 \left(\frac{1}{x} \right)'$$

$$= 2 \cdot \frac{-(3+5^x)'}{(3+5^x)^2} - 3 \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{-[(3)' + (5^x)']}{(3+5^x)^2} + 3 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{-(0+5^x \ln 5)}{(3+5^x)^2} + \frac{3}{x^2} = \frac{-2 \cdot 5^x \ln 5}{(3+5^x)^2} + \frac{3}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{(1)' g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{0 \cdot g(x) - g'(x)}{g^2(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{Οπότε : } \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{Συνέπεια : } \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$v. \quad f'(x) = \left(\frac{\eta \mu x - \sigma \nu x}{\eta \mu x + \sigma \nu x} \right)' =$$

$$= \frac{(\eta \mu x - \sigma \nu x)' (\eta \mu x + \sigma \nu x) - (\eta \mu x - \sigma \nu x) (\eta \mu x + \sigma \nu x)'}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{[(\eta \mu x)' - (\sigma \nu x)'] (\eta \mu x + \sigma \nu x) - (\eta \mu x - \sigma \nu x) [(\eta \mu x)' + (\sigma \nu x)']}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{(\sigma \nu x + \eta \mu x) (\eta \mu x + \sigma \nu x) - (\eta \mu x - \sigma \nu x) (\sigma \nu x - \eta \mu x)}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{(\sigma \nu x + \eta \mu x)^2 + (\sigma \nu x - \eta \mu x) (\sigma \nu x - \eta \mu x)}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{(\sigma \nu x + \eta \mu x)^2 + (\sigma \nu x - \eta \mu x)^2}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{\sigma \nu^2 x + 2 \sigma \nu \eta \mu x + \eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x - 2 \sigma \nu x \eta \mu x + \eta \mu^2 x}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{2 \sigma \nu^2 x + 2 \eta \mu^2 x}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2} = \frac{2(\sigma \nu^2 x + \eta \mu^2 x)}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2} = \frac{2 \cdot 1}{(\eta \mu x + \sigma \nu x)^2}$$

$$= \frac{2}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{vi. } f'(x) &= \left(\frac{1+2\ln|x|}{4x^2} \right)' = \frac{(1+2\ln|x|)' 4x^2 - (1+2\ln|x|)(4x^2)'}{(4x^2)^2} \\ &= \frac{[(1)' + (2\ln|x|)'] 4x^2 - (1+2\ln|x|) 4(x^2)'}{4^2 (x^2)^2} \\ &= \frac{\left(0 + 2 \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot 4x^2 - (1+2\ln|x|) \cdot 4 \cdot 2x}{16x^4} \\ &= \frac{\frac{8x^2}{x} - 8x \cdot (1+2\ln|x|)}{16x^4} = \frac{8x - 8x \cdot (1+2\ln|x|)}{16x^4} = \frac{8x(1-1-2\ln|x|)}{16x^4} \\ &= \frac{8x(-2\ln|x|)}{16x^4} = \frac{-16x \ln|x|}{16x^4} = \frac{-\ln|x|}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

180.

Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \geq 0 \\ x^5, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = x^2 - |x-2| \quad \text{iv. } f(x) = e^x \cdot \eta\mu x \cdot \sqrt{x} \quad \text{v. } f(x) = \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Λύση

i. ♦ Αν $x > 0$, τότε $f(x) = \eta\mu x$, οπότε:

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

♦ Αν $x < 0$, τότε $f(x) = x^5$, οπότε:

$$f'(x) = 5x^4$$

♦ Στο $x_0 = 0$ είναι $f(0) = \eta\mu 0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 = 0$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \\ 5x^5, & x < 0 \end{cases}$.

ii. Για $x \neq 0$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x}{x} \right)' = \frac{[(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x]' \cdot x - (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x \cdot (x)'}{x^2} \\ &= \frac{[(\sigma\upsilon\nu x - 1)' \cdot \eta\mu x + (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\eta\mu x)'] \cdot x - (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x}{x^2} \\ &= \frac{[-\eta\mu x \cdot \eta\mu x + (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu x] \cdot x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{x^2} \\ &= \frac{(-\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{x^2} \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{x^2} \end{aligned}$$

Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \eta\mu x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

iii. α' τρόπος

Είναι:

- Αν $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, τότε, $f(x) = x^2 - (-x + 2) = x^2 + x - 2$.
- Αν $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, τότε, $f(x) = x^2 - (x - 2) = x^2 - x + 2$.

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{αν } x < 2 \\ x^2 - x + 2 & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}.$$

Έχουμε:

♦ Αν $x < 2$, τότε $f'(x) = (x^2 + x - 2)' = 2x + 1$.

♦ Αν $x > 2$, τότε $f'(x) = (x^2 - x + 2)' = 2x - 1$.

♦ Στο $x_0 = 2$ είναι $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) = 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{2\}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x < 2 \\ 2x-1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}.$$

β' τρόπος (Γίνεται χρήση των κανόνων παραγωγίσιμης σύνθετης συνάρτησης)

Είναι $f(x) = x^2 - |x-2| = x^2 - \sqrt{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε:

$$f'(x) = \left(x^2 - \sqrt{(x-2)^2} \right)' = (x^2)' - \left(\sqrt{(x-2)^2} \right)' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{(x-2)^2}} \cdot ((x-2)^2)'$$

$$= 2x - \frac{1}{2 \cdot |x-2|} \cdot 2(x-2) \cdot (x-2)' = 2x - \frac{x-2}{|x-2|}, \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Στο $x_0 = 2$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - |x-2| - 4}{x - 2}$, οπότε:

• Αν $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - (-x+2) - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) = 5.$$

• Αν $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - (x - 2) - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{2\}$ με

$$f'(x) = 2x - \frac{x - 2}{|x - 2|} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

iv. Η $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x \cdot \sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

Είναι:

$$f'(x) = (e^x)' \cdot \eta\mu x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot (\eta\mu x)' \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= e^x \cdot \eta\mu x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sqrt{x} + \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{2\sqrt{x}},$$

για κάθε $x > 0$.

Στο $x_0 = 0$ είναι $f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 \cdot \sqrt{0} = 0$,
οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \cdot \eta\mu x \cdot \sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \sqrt{x} \right] = e^0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με
 $f'(0) = 0$.

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο
 $A = [0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sqrt{x} + \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

v. Η $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

Είναι:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \eta\mu x, \quad x > 0$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Αν υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης στα οποία δεν μπορούμε να αποφανθούμε σύμφωνα με τους κανόνες παραγωγίσιμης εάν είναι ή όχι παραγωγίσιμη η συνάρτηση, εξετάζουμε την παραγωγισιμότητά της με τον ορισμό.
- ♦ Παρατηρήστε ότι ενώ η $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 , το γινόμενο των συναρτήσεων $\sqrt{x}, e^x$ και $\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Στο $x_0 = 0$ είναι $f(0) = \sqrt{0} \cdot \sin 0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sin x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin x \right] \stackrel{\sqrt{x} > 0}{=} (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \eta\mu x.$$

Παρατηρήσεις

Η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f και η f δεν έχουν πάντα το ίδιο πεδίο ορισμού. Ποτέ όμως δεν μπορεί το πεδίο ορισμού της f' να είναι μεγαλύτερο από το πεδίο ορισμού της f .
Σε κάθε περίπτωση ισχύει:
 $D_{f'} \subseteq D_f$.

181.

Για τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο στο σημείο x_0 :

- i. $f(x) = x - \eta\mu x \cdot \sin x$ και $x_0 = \frac{\pi}{12}$
 ii. $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - \sin x)$ και $x_0 = \pi, x_0 = 0$
 iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x \leq 1 \\ 2x^2, & x > 1 \end{cases}$ και $x_0 = 0, x_0 = 2, x_0 = 1$

Λύση

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \eta\mu x \cdot \sin x)' \\ &= (x)' - (\eta\mu x \cdot \sin x)' \\ &= 1 - \left[(\eta\mu x)' \cdot \sin x + \eta\mu x \cdot (\sin x)' \right] \\ &= 1 - [\cos x \cdot \sin x + \eta\mu x \cdot (\cos x)] \\ &= 1 - (\sin^2 x - \eta\mu^2 x) = \\ &= 1 - \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin 2 \cdot \frac{\pi}{12} = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

- ii. Η $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - \sin x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

♦ Αν $x > 0$, τότε:

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε:

- Βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ κάνοντας χρήση των κανόνων παραγώγισης και
- Αντικαθιστούμε, εφόσον είναι εφικτό, στην $f'(x)$ όπου x το x_0 βρίσκοντας έτσι την $f'(x_0)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x} \cdot (1 - \sin x))' = (\sqrt{x})' \cdot (1 - \sin x) + \sqrt{x} \cdot (1 - \sin x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1 - \sin x) + \sqrt{x} \cdot [(1)' - (\sin x)'] = \\ &= \frac{1 - \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot [-(-\eta\mu x)] = \frac{1 - \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x, \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f'(\pi) = \frac{1 - \sin \pi}{2\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi} \cdot \eta\mu \pi = \frac{1 - (-1)}{2\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi} \cdot 0 = \frac{2}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}.$$

♦ Η παράγωγος (αν υπάρξει) της f στο $x_0 = 0$ δεν μπορεί να βρεθεί θέτοντας όπου $x = 0$ στον

τύπο $f'(x) = \frac{1 - \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$, αφού αυτός

ισχύει μόνο για $x > 0$.

Αυτό δε σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Συνεχίζουμε εξετάζοντας την παραγωγισιμότη της f με τον ορισμό. Είναι $f(0) = 0$, οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot (1 - \sin x) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sqrt{x} \cdot \frac{\sin x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} \\ &= 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με

$$f'(0) = 0.$$

Προσοχή!

♦ Αν η αντικατάσταση του x_0 στην $f'(x)$ που βρήκαμε με τους κανόνες παραγώγισης δεν είναι εφικτή αυτό **δεν** σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Συνεχίζουμε εξετάζοντας την παραγωγισιμότητα της f στο x_0 με τον ορισμό απ' όπου προκύπτει αν υπάρχει ή όχι $f'(x_0)$.

♦ Εννοείται ότι η εύρεση παραγώγου συνάρτησης πολλαπλού τύπου σε σημείο αλλαγής του τύπου της γίνεται μόνο με τον ορισμό.

iii. ♦ Αν $x < 1$, τότε $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)' = 2x + 2$. Οπότε $f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$.

♦ Αν $x > 1$, τότε $f'(x) = (2x^2)' = 4x$. Οπότε $f'(2) = 4 \cdot 2 = 8$.

♦ Στο $x_0 = 1$ είναι $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$, οπότε:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [2(x + 1)] = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 4$.

182.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x^2 + x + 2)g(x)$. Η g είναι συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(0) = 3$, Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $g'(0) = 4$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρεθεί η $f'(0)$.

Λύση

Έχουμε ότι $f(x) = h(x)g(x)$, όπου $h(x) = x^2 + x + 2$.

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 2x + 1$,
άρα είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $h'(0) = 1$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = 4$.
- Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με:
 $f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

Άρα $f'(0) = 11$.

Παρατηρήσεις:

- ♦ Μια άλλη διατύπωση είναι η εξής:
Για όποια $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση f είναι επίσης παραγωγίσιμη
$$f'(x) = (x^2 + x + 2)'g(x) + (x^2 + x + 2)g'(x) = (2x + 1)g(x) + (x^2 + x + 2)g'(x)$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 , συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει για την f και μάλιστα
$$f'(0) = 1 \cdot g(0) + 2 \cdot g'(0) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$$
- ♦ Μπορούμε βέβαια να εργαστούμε με τον ορισμό της παραγώγου.

183.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g που οι γραφικές τους παραστάσεις διέρχονται από την αρχή των αξόνων και ικανοποιούν τη σχέση $f(x) \cdot g(x) = x^2 - \eta\mu x$.

Λύση

Έστω ότι υπάρχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g των οποίων οι γραφικές παραστάσεις διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Έχουμε:

Το $O(0,0)$ ανήκει και στις δύο γραφικές παραστάσεις, άρα θα ισχύουν $f(0) = 0$ και $g(0) = 0$.
Με παραγωγή και των δύο μελών της δοθείσας

Παρατήρηση:

Μπορούμε να παραγωγίσουμε τα δύο μέλη μιας ισότητας, με την προϋπόθεση ότι και τα δύο μέλη είναι παραγωγίσιμα. Δηλαδή ισχύει:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x).$$

Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά

ισότητας, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = (x^2 - \eta\mu x)' \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

Για $x=0$ είναι:

$$f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0) = 2 \cdot 0 - \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow f'(0) \cdot 0 + 0 \cdot g'(0) = -1 \Leftrightarrow 0 = -1 \quad \text{Άτοπο.}$$

Άρα **δεν υπάρχουν** τέτοιες συναρτήσεις.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

184.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (\epsilon\phi x - x)^3$

ii. $f(x) = \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^5}$

iv. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5 + 2^x}}$

v. $f(x) = \ln^2(e^{2x} + e^{-x})$

vi. $f(x) = \eta\mu^2 x + \eta\mu x^2 + \eta\mu^2 x^2$

vii. $f(x) = \ln \left| x - \frac{1}{x} \right| + 5^{\sqrt{x^2+1}}$

viii. $f(x) = x \cdot e^{\ln x} + \ln \frac{e^x}{x} - \ln \frac{e^{2x}}{x}$

ix. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i. } f'(x) &= ((\epsilon\phi x - x)^3)' = 3(\epsilon\phi x - x)^2 (\epsilon\phi x - x)' = 3(\epsilon\phi x - x)^2 \cdot [(\epsilon\phi x)' - (x)'] \\ &= 3(\epsilon\phi x - x)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 \right) = 3(\epsilon\phi x - x)^2 \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3(\epsilon\phi x - x)^2 \cdot \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= 3(\epsilon\phi x - x)^2 \cdot \epsilon\phi^2 x, \quad x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } f'(x) &= (\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x})' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}} \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu^2 x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}} \cdot \left[0 + ((\sigma\upsilon\nu x)^2)' \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}} \cdot 2\sigma\upsilon\nu x (\sigma\upsilon\nu x)' = \frac{2\sigma\upsilon\nu x (-\eta\mu x)}{2\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}} = \frac{-\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } f'(x) &= \left(\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^5} \right)' = \left((x^2 + x + 1)^{\frac{5}{3}} \right)' = \frac{5}{3} (x^2 + x + 1)^{\frac{5}{3}-1} (x^2 + x + 1)' \\ &= \frac{5}{3} \cdot (x^2 + x + 1)^{\frac{2}{3}} \cdot [(x^2)' + (x)' + (1)'] = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2} (2x + 1), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv. } f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5+2^x}} \right)' = \left(\frac{1}{(5+2^x)^{\frac{1}{3}}} \right)' = \left[(5+2^x)^{-\frac{1}{3}} \right]' = -\frac{1}{3} \cdot (5+2^x)^{-\frac{1}{3}-1} \cdot (5+2^x)' \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot (5+2^x)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left[(5)' + (2^x)' \right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(5+2^x)^{\frac{4}{3}}} \cdot (0 + 2^x \ln 2) \\
 &= \frac{-2^x \ln 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(5+2^x)^4}} = \frac{-2^x \ln 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(5+2^x)^3 (5+2^x)}} = \frac{-2^x \ln 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(5+2^x)^3} \cdot \sqrt[3]{(5+2^x)}} \\
 &= \frac{-2^x \ln 2}{3 \cdot (5+2^x) \sqrt[3]{(5+2^x)}}, \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v. } f'(x) &= \left(\ln^2(e^{2x} + e^{-x}) \right)' = \left(\left(\ln(e^{2x} + e^{-x}) \right)^2 \right)' = 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \left(\ln(e^{2x} + e^{-x}) \right)' \\
 &= 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{1}{e^{2x} + e^{-x}} \cdot (e^{2x} + e^{-x})' \\
 &= 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{1}{e^{2x} + e^{-x}} \cdot \left[(e^{2x})' + (e^{-x})' \right] \\
 &= 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{1}{e^{2x} + e^{-x}} \cdot \left[e^{2x} (2x)' + e^{-x} (-x)' \right] \\
 &= 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{e^{2x} \cdot 2 + e^{-x} (-1)}{e^{2x} + e^{-x}} = 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{2e^{2x} - \frac{1}{e^x}}{e^{2x} + \frac{1}{e^x}} \\
 &= 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{2e^{2x}e^x - 1}{\frac{e^{2x}e^x + 1}{e^x}} = 2 \ln(e^{2x} + e^{-x}) \cdot \frac{2e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{vi. } f'(x) &= (\eta \mu^2 x + \eta \mu x^2 + \eta \mu^2 x^2)' = (\eta \mu^2 x)' + (\eta \mu x^2)' + (\eta \mu^2 x^2)' \\
 &= 2 \eta \mu x (\eta \mu x)' + \sigma \nu x^2 (x^2)' + 2 \eta \mu x^2 (\eta \mu x^2)' \\
 &= 2 \eta \mu x \cdot \sigma \nu x + \sigma \nu x^2 \cdot 2x + 2 \eta \mu x^2 \cdot \sigma \nu x^2 \cdot (x^2)' \\
 &= 2 \eta \mu x \cdot \sigma \nu x + 2x \cdot \sigma \nu x^2 + 2 \eta \mu x^2 \cdot \sigma \nu x^2 \cdot 2x \\
 &= 2 \eta \mu x \cdot \sigma \nu x + 2x \cdot \sigma \nu x^2 + 4x \cdot \eta \mu x^2 \cdot \sigma \nu x^2
 \end{aligned}$$

vii. $f'(x) = \left(\ln \left| x - \frac{1}{x} \right| + 5^{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \left(\ln \left| x - \frac{1}{x} \right| \right)' + \left(5^{\sqrt{x^2+1}} \right)'$

$$= \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)' + 5^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 5 \cdot \left(\sqrt{x^2+1} \right)'$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \left[(x)' - \left(\frac{1}{x} \right)' \right] + 5^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{x^2-1} \cdot \left(1 - \frac{-1}{x^2} \right) + 5^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} + 5^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x \cdot \ln 5}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x \cdot (x^2-1)} + 5^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x \cdot \ln 5}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq -1, 0, 1$$

.Παρατήρηση:

Αν u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ισχύει:

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}.$$

viii. Η f έχει πεδίο ορισμού το

$$A(0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = x \cdot e^{\ln x} + \ln \frac{e^x}{x} - \ln \frac{e^{2x}}{x}$$

$$= x \cdot x + \ln e^x - \ln x - (\ln e^{2x} - \ln x)$$

$$= x^2 + x \cdot \ln e - \ln x - 2x \cdot \ln e + \ln x$$

$$= x^2 + x - 2x = x^2 - x$$

Οπότε:

$$f'(x) = 2x - 1, \quad x > 0.$$

Παρατηρήσεις:

- ♦ Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{\ln x} = x$.
- ♦ Πριν παραγωγίσουμε μια συνάρτηση f , απλοποιούμε όσο αυτό είναι εφικτό τον τύπο της.
- ♦ Ο τύπος της f έγινε $f(x) = x^2 - x$, το πεδίο ορισμού της όμως παρέμεινε το $A = (0, +\infty)$.
- ♦ Η $f'(x) = 2x - 1$ «φαίνεται» να ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Αλλά $D_{f'} \subseteq D_f$. Άρα $D_{f'} = (0, +\infty)$.

ix. Η $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} & \text{αν } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}} & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

♦ Αν $x > 0$, τότε:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

♦ Αν $x < 0$, τότε:

Παρατήρηση:

Όταν για να παραγωγίσουμε μια συνάρτηση αλλάζουμε μορφή στον τύπο της χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Δεν πρέπει να αλλάξει το πεδίο ορισμού της.

Π.χ. οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ δεν είναι ίσες αφού $D_f = \mathbb{R}$ ενώ $D_g = [0, +\infty)$.

$$f'(x) = \left((-x)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} \cdot (-x)^{\frac{2}{3}-1} (-x)' = \frac{2}{3} \cdot (-x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-1) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(-x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{-x}}$$

♦ Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \end{aligned}$$

Άρα η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0**.
Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}^* \text{ με } f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ \frac{-2}{3\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}.$$

Παρατήρηση:

Δεν είναι απαραίτητο να πάρουμε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (το οποίο ισούται με $-\infty$) γιατί αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ αποκλείεται το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ να είναι πραγματικός αριθμός ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

185.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

β. $h(x) = 2^{2^x} + x^{x^x}, x > 0$

Λύση

α. Είναι $f(x) = x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x}$.

Οπότε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\sqrt{x} \ln x} \right)' \\ &= e^{\sqrt{x} \ln x} \left(\sqrt{x} \ln x \right)' \\ &= x^{\sqrt{x}} \left[\left(\sqrt{x} \right)' \ln x + \sqrt{x} (\ln x)' \right] \\ &= x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right), x > 0 \end{aligned}$$

β. $h'(x) = \left(2^{2^x} + x^{x^x} \right)$

$$= \left(2^{2^x} \right)' + \left(x^{x^x} \right)' = 2^{2^x} \cdot \ln 2 \cdot \left(2^x \right)' + \left(e^{x^x \ln x} \right)'$$

Μεθοδολογία

- ♦ Για τον υπολογισμό της παραγώγου συνάρτησης της μορφής: $f(x) = [g(x)]^{\varphi(x)}$
1^{ον} Μετασχηματίζουμε την f σε εκθετική με βάση e , δηλαδή:

$$f(x) = [g(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \ln g(x)}$$

- 2^{ον}** Παραγωγίζουμε με βάση τον τύπο:

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

- ♦ Θυμίζουμε ότι αν $a > 0$:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^{\varphi(x)})' = a^{\varphi(x)} \ln a \cdot \varphi'(x)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{2^x} \cdot \ln 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + e^{x^x \ln x} (x^x \cdot \ln x)' = \\
&= 2^{2^x} \cdot 2^x \cdot \ln^2 2 + x^{x^x} \left[(x^x)' \cdot \ln x + x^x \cdot (\ln x)' \right] \\
&= 2^{2^x} \cdot 2^x \cdot \ln^2 2 + x^{x^x} \left[(e^{x \ln x})' \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right] \\
&= 2^{2^x} \cdot 2^x \cdot \ln^2 2 + x^{x^x} \left[e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] \\
&= 2^{2^x} \cdot 2^x \cdot \ln^2 2 + x^{x^x} \left[x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] \\
&= 2^{2^x} \cdot 2^x \cdot \ln^2 2 + x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right), \quad x > 0
\end{aligned}$$

186.Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

α. $g(x) = f(x + \eta \mu x)$

β. $g(x) = f^3(-x)$

Λύση**α.** Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και $x + \eta \mu x$, με παράγωγο:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (f(x + \eta \mu x))' = f'(x + \eta \mu x) \cdot (x + \eta \mu x)' \\
&= f'(x + \eta \mu x) \cdot (1 + \sigma \nu x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

β. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x^3 , f και $-x$, με παράγωγο:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (f^3(-x))' = 3f^2(-x) \cdot (f(-x))' = 3f^2(-x) \cdot f'(-x) \cdot (-x)' \\
&= -3f^2(-x) \cdot f'(-x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Π α ρ ά γ ω γ ο ς α ν ω τ έ ρ α ς τ ά ξ η ς**187.**Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sigma \nu x + \eta \mu x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.**α.** Να βρείτε την $f^{(3)}(x)$.**β.** Να αποδείξετε ότι $f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.**Λύση**

α. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \bullet f'(x) &= (\ln(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)' + (\eta\mu x)'}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} = \\
 &= \frac{-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} \\
 \bullet f'(x) &= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} \right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)'(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) - (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} \\
 &= \frac{(-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) - (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \cdot (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} = \\
 &= \frac{-(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} = \\
 &= \frac{-(\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) - (\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x)}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} = \\
 &= \frac{-(1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) - (1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} = \frac{-1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} = \\
 &= \frac{-2}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} \\
 \bullet f^{(3)}(x) &= \left(\frac{-2}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} \right)' = -2 \cdot \frac{-[(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2]'}{[(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2]^2} \\
 &= -2 \cdot \frac{-2(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)'}{(\sigma\upsilon\mu x + \eta\mu x)^4} = \frac{4(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \cdot (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^4} \\
 &= \frac{4(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^3}
 \end{aligned}$$

β. Είναι:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \eta\mu \frac{\pi}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \eta\mu \frac{\pi}{2}} = \frac{0-1}{0+1} = -1, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2}{\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \eta\mu \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{-2}{(0+1)^2} = -2$$

$$\bullet \quad f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)^3} = \frac{4(0-1)}{(0+1)^3} = -4$$

Παρατήρηση:

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι για τη συγκεκριμένη συνάρτηση f ισχύει: $f^{(3)}(x) + 2f'(x) \cdot f''(x) = 0$, για κάθε $x \in D_f$

Οπότε :

$$f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = -4 + 4 = 0.$$

188.

Αν $y = \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + e^x$, να αποδείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + e^x)' = \\ &= \alpha(e^{2x})' + (\beta x)' e^{2x} + \beta x(e^{2x})' + (e^x)' \\ &= \alpha e^{2x}(2x)' + \beta e^{2x} + \beta x e^{2x}(2x)' + e^x \\ &= 2\alpha e^{2x} + \beta e^{2x} + 2\beta x e^{2x} + e^x = e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x) + e^x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= (e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x) + e^x)' = \\ &= (e^{2x})'(2\alpha + \beta + 2\beta x) + e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x)' + (e^x)' \\ &= 2e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x) + e^{2x}2\beta + e^x \\ &= e^{2x}(4\alpha + 2\beta + 4\beta x + 2\beta) + e^x = e^{2x}(4\alpha + 4\beta + 4\beta x) + e^x \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y &= \\ &= e^{2x}(4\alpha + 4\beta + 4\beta x) + e^x - 4e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x) - 4e^x + 4(\alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + e^x) \\ &= 4\alpha e^{2x} + 4\beta e^{2x} + 4\beta x e^{2x} + e^x - 8\alpha e^{2x} - 4\beta e^{2x} - 8\beta x e^{2x} - 4e^x + 4\alpha e^{2x} + 4\beta x e^{2x} + 4e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Αν $y = f(x)$ παραγωγίσουμε την συνάρτηση, τότε:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f^{(3)}(x)$$

κ.ο.κ.

189.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2, & x < 1 \\ x^4 + 5x, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Είναι:

- ♦ Αν $x < 1$, τότε:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 + 2)' = 3x^2 + 6x$$

- ♦ Αν $x > 1$, τότε:

$$f'(x) = (x^4 + 5x)' = 4x^3 + 5$$

- ♦ Στο $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 2 - 6}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x - 1} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x + 4) = 9$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 + 5x - 6}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 6)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 + x + 6) = 9 \end{aligned}$$

Άρα $f'(1) = 9$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x, & x < 1 \\ 9, & x = 1 \\ 4x^3 + 5, & x > 1 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 6x - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)(x+3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3(x+3) = 12$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^3 + 5 - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 4(x^2 + x + 1) = 12 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f''(1) = 12$.

Παρατήρηση:

- ♦ Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή:

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

- ♦ Ομοίως:

$$f^{(3)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}.$$

Κ.Ο.Κ.

Παρατήρηση:

Αν θέλαμε την $f''(x)$ τότε είναι: $f''(x) = \begin{cases} 6x + 6, & x < 1 \\ 12, & x = 1 \\ 12x^2, & x > 1 \end{cases}$.

190.

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και περιττή.

α. Να αποδείξετε ότι η f'' είναι επίσης περιττή.

β. Αν $f'(-1) = -2$ και $g(x) = f(x) \sin x - f(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο μηδέν και βρείτε την $g''(0)$.

Λύση

α. Επειδή η f είναι περιττή θα ισχύει:

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$\begin{aligned} (f(-x))' &= (-f(x))' \Leftrightarrow f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(x) \\ &\Leftrightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1) \end{aligned}$$

Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$\begin{aligned} (f'(-x))' &= (f'(x))' \Leftrightarrow f''(-x) \cdot (-x)' = f''(x) \\ &\Leftrightarrow -f''(-x) = f''(x) \Leftrightarrow f''(-x) = -f''(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα f'' περιττή.

β. Η g είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο 0) ως άθροισμα των 2 φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x) \sin x$

(γινόμενο των 2 φορές παραγωγίσιμων $f(x)$ και $\sin x$) και $f(\sin x)$ (σύνθεση των 2 φορές παραγωγίσιμων $f(x)$ και $\sin x$). Έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(x) \sin x)' - (f(\sin x))' = f'(x) \sin x + f(x)(\sin x)' - f'(\sin x)(\sin x)' \\ &= f'(x) \sin x - f(x) \eta_{\mu x} + \eta_{\mu x} \cdot f'(\sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= (f'(x) \sin x)' - (f(x) \eta_{\mu x})' + (\eta_{\mu x} \cdot f'(\sin x))' \\ &= f''(x) \sin x + f'(x)(\sin x)' - \left[f'(x) \eta_{\mu x} + f(x)(\eta_{\mu x})' \right] + \\ &\quad + (\eta_{\mu x})' f'(\sin x) + \eta_{\mu x} (f'(\sin x))' \\ &= f''(x) \sin x - f'(x) \eta_{\mu x} - f'(x) \eta_{\mu x} - f(x) \sin x + \sin x \cdot f'(\sin x) + \\ &\quad + \eta_{\mu x} \cdot f''(\sin x)(\sin x)' \\ &= f''(x) \sin x - 2f'(x) \eta_{\mu x} - f(x) \sin x + f'(\sin x) \sin x - f''(\sin x) \eta_{\mu x}^2 x \end{aligned}$$

Για $x=0$ παίρνουμε:

Παρατήρηση:

♦ Αν f : περιττή, τότε:

- f' : άρτια
- f'' : περιττή
- $f^{(3)}$: άρτια
- $\vdots$

♦ Αν f : άρτια, τότε:

- f' : περιττή
- f'' : άρτια
- $f^{(3)}$: περιττή
- $\vdots$

αρκεί η f να έχει παράγωγο ν-τάξης.

Για να χρησιμοποιήσετε κάποιο από τα παραπάνω πρέπει πρώτα να το αποδείξετε.

$$g''(0) = f''(0)\sin 0 - 2f'(0)\eta\mu 0 - f(0)\sin 0 + f'(\sin 0)\sin 0 - f''(\sin 0)\eta\mu^2 0 \\ = f''(0) - f(0) + f'(1) \quad (2)$$

Αλλά η f είναι περιττή οπότε: $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Από **α.** ερώτημα και **(1)** σχέση είναι: $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$ από τη σχέση **(1)** παίρνουμε: $f'(-1) = f'(1) \Leftrightarrow -2 = f'(1)$.

Επίσης από **α.** ερώτημα έχουμε ότι η f'' είναι περιττή, άρα:

$$f''(-x) = -f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f''(0) = -f''(0) \Leftrightarrow 2f''(0) = 0 \Leftrightarrow f''(0) = 0$.

Οπότε από **(2)** έχουμε: $g''(0) = 0 - 0 - 2 \Leftrightarrow g''(0) = -2$.

$$\text{ρ: ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x - \rho) \cdot Q(x)$$

191.

α. Να αποδείξετε ότι μια πολωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$, αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα των $P(x)$ και $P'(x)$.

β. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x + 2$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

Λύση

α. ♦ Έστω ότι το πολώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$. Τότε θα υπάρχει πολώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε $P(x) = (x - \rho)^2 Q(x)$.

$$\text{Οπότε } P'(x) = 2(x - \rho)Q(x) + (x - \rho)^2 Q'(x).$$

$$\text{Επομένως: } P(\rho) = (\rho - \rho)^2 Q(\rho) = 0.$$

$$P'(\rho) = 2(\rho - \rho)Q(\rho) + (\rho - \rho)^2 Q'(\rho) = 0$$

Άρα ο ρ είναι ρίζα των $P(x)$ και $P'(x)$.

♦ Αντιστρόφως, έστω ότι το ρ είναι ρίζα των $P(x)$ και $P'(x)$, δηλαδή

$$P(\rho) = P'(\rho) = 0.$$

Αφού $P(\rho) = 0$, θα υπάρχει πολώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο ώστε $P(x) = (x - \rho)\Pi(x)$.

$$\text{Οπότε } P'(x) = \Pi(x) + (x - \rho)\Pi'(x).$$

$$\text{Άρα: } P'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \Pi(\rho) + (\rho - \rho)\Pi'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \Pi(\rho) = 0.$$

Συνεπώς υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε $\Pi(x) = (x - \rho)Q(x)$.

Επομένως, $P(x) = (x - \rho)(x - \rho)Q(x) = (x - \rho)^2 Q(x)$, δηλαδή το $(x - \rho)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β. Λόγω του **α.** ερωτήματος το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$ αν και μόνο αν το 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και του $P'(x)$. Είναι $P'(x) = 3\alpha x^2 + \beta$. Οπότε:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Εύρεση πολυωνύμου από ισότητα που περιέχει την παράγωγό του

192.

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, ώστε να είναι $(e^{-x} \cdot P(x))' = e^{-x} \cdot x(x - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned} (e^{-x} \cdot P(x))' &= e^{-x} \cdot x(x - 1) \\ \Leftrightarrow (e^{-x})' P(x) + e^{-x} \cdot P'(x) &= e^{-x} (x^2 - x) \\ \Leftrightarrow e^{-x} (-x)' P(x) + e^{-x} \cdot P'(x) &= e^{-x} (x^2 - x) \\ \Leftrightarrow -e^{-x} \cdot P(x) + e^{-x} \cdot P'(x) &= e^{-x} (x^2 - x) \\ \Leftrightarrow e^{-x} (-P(x) + P'(x)) &= e^{-x} (x^2 - x) \\ \Leftrightarrow -P(x) + P'(x) &= x^2 - x \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι n βαθμού

τότε το $P'(x)$ είναι $n - 1$ βαθμού.

Άρα το πολυώνυμο

$-P(x) + P'(x)$ θα είναι n βαθμού.

Επειδή το $x^2 - x$ είναι 2^{ου} βαθμού από (1) συνεπάγεται ότι $n = 2$.

Άρα

$$P(x) = ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0 \quad \text{και} \quad P'(x) = 2ax + \beta.$$

Οπότε από (1) έχουμε:

$$-(ax^2 + bx + \gamma) + 2ax + \beta = x^2 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις:

- ♦ Αν n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$, τότε:
 - Ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $n - 1$.
 - Ο βαθμός του $P''(x)$ είναι $n - 2$.
- κ.ο.κ.
- ♦ Αν ισχύει η ισότητα $P(x) = Q(x)$, τότε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι του αυτού βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων είναι ίσοι.
- ♦ Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το **μέγιστο** των βαθμών των δύο πολυωνύμων.
- ♦ Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το **άθροισμα** των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

$$-ax^2 - \beta x - \gamma + 2ax + \beta = x^2 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$-ax^2 + (2a - \beta)x + \beta - \gamma = x^2 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Από την ισότητα των πολυωνύμων παίρνουμε: } \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - \beta = -1 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } P(x) = -x^2 - x - 1.$$

Παραγωγίσιμη συνάρτηση και συναρτησιακές σχέσεις δύο μεταβλητών

193.

Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

Αν $f(x) \cdot f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x \cdot f(y)}{y \cdot f(x)} = \frac{f'(y)}{f'(x)}, \quad x, y \in (0, +\infty)$$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

- ♦ Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, θεωρώντας το x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το y ως σταθερά, διαδοχικά παίρνουμε:

$$(f(x \cdot y))' = (f(x) \cdot f(y))' \quad \text{ή}$$

$$f'(x \cdot y)(x \cdot y)' = f(y) \cdot f'(x) \quad \text{ή}$$

$$f'(x \cdot y) \cdot y \cdot (x)' = f(y) \cdot f'(x) \quad \text{ή}$$

$$f'(x \cdot y) \cdot y = f(y) \cdot f'(x) \quad \text{ή}$$

$$f'(x \cdot y) = \frac{f(y) \cdot f'(x)}{y} \quad (1), \quad x, y \in (0, +\infty).$$

- ♦ Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, θεωρώντας το y ανεξάρτητη μεταβλητή και το x σταθερά, διαδοχικά παίρνουμε:

$$(f(x \cdot y))' = (f(x) \cdot f(y))' \quad \text{ή} \quad f'(x \cdot y)(x \cdot y)' = f(x) \cdot f'(y)$$

$$\text{ή } f'(x \cdot y) \cdot x \cdot (y)' = f(x) \cdot f'(y) \quad \text{ή } f'(x \cdot y) \cdot x = f(x) \cdot f'(y)$$

$$\text{ή } f'(x \cdot y) = \frac{f(x) \cdot f'(y)}{x} \quad (2), \quad x, y \in (0, +\infty).$$

Μεθοδολογία

Αν από μια συναρτησιακή σχέση δύο μεταβλητών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f ζητείται σχέση που να περιέχει και την $f'(x)$ και την $f'(y)$ τότε

✓ παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας που δίνεται θεωρώντας μια φορά το

- x ως μεταβλητή και το y σταθερά και μια φορά θεωρώντας το

- y ως μεταβλητή και το x σταθερά οπότε

✓ με συνδυασμό των ισοτήτων προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f(y) \cdot f'(x)}{y} = \frac{f(x) \cdot f'(y)}{x} \Leftrightarrow x \cdot f(y) \cdot f'(x) = y \cdot f(x) \cdot f'(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot f(y)}{y \cdot f(x)} = \frac{f'(y)}{f'(x)}, \quad x, y \in (0, +\infty)$$

194.

α. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - x \cdot y, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) \cdot f'(0) - x, \quad x \in \mathbb{R}$.

β. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}, \quad x \neq 0$.

Λύση

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- ♦ Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, θεωρώντας το y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το x ως σταθερά, διαδοχικά παίρνουμε:

$$(f(x+y))' = (f(x) \cdot f(y) - x \cdot y)'$$

$$f'(x+y)(x+y)' = (f(x) \cdot f(y))' - (x \cdot y)'$$

$$f'(x+y)(0+1) = f(x) \cdot f'(y) - x \cdot (y)'$$

$$f'(x+y) = f(x) \cdot f'(y) - x, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Οπότε για $y=0$, έχουμε:

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

- ♦ Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, θεωρώντας το y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το x ως σταθερά, διαδοχικά παίρνουμε:

$$(f(x \cdot y))' = (f(x) + f(y))' \quad \text{ή}$$

$$f'(x \cdot y)(x \cdot y)' = (f(x))' + (f(y))' \quad \text{ή}$$

$$f'(x \cdot y) \cdot x \cdot (y)' = 0 + f'(y) \quad \text{ή}$$

Μεθοδολογία

Από μια συναρτησιακή σχέση δύο μεταβλητών x, y μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f για να βρούμε μια σχέση της $f'(x)$

- παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας θεωρώντας ως μεταβλητή το y και το x ως σταθερά και
- θέτουμε όπου y κατάλληλη τιμή (συνήθως το 0 ή το 1) ώστε να προκύψει ισότητα που περιέχει την $f'(x)$.

Προφανώς μπορούμε να παραγωγίσουμε θεωρώντας το x ως μεταβλητή και το y ως σταθερά.

Παρατήρηση:

Αν στα δεδομένα δεν είχαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα Δ αλλά μόνο στο $x_0 = 0$ (για το **α.** ερώτημα) ή στο $x_0 = 1$ (για το **β.** ερώτημα), τότε δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε τα δύο μέλη της ισότητας.

Σ' αυτή την περίπτωση η παραγωγισιμότητα της f στο διάστημα Δ και η σχέση που ικανοποιεί η $f'(x)$ αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού της παραγώγου.

$$f'(x \cdot y) \cdot x \cdot 1 = f'(y) \quad \text{ή} \quad f'(x \cdot y) = \frac{f'(y)}{x}, \quad x, y \in \mathbb{R}^*$$

Οπότε για $y=1$, έχουμε:

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

195.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} της οποίας να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β.** Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R})$, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$.

Λύση

- α.** Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση επομένως είναι «1-1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f για την εύρεση του οποίου έχουμε:

- $D_f = A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = 0 + (-\infty) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως $D_{f^{-1}} = f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

- β.** Για κάθε $x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad (1)$$

Οι f και f^{-1} είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = e^x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας τα δυο μέλη της ισότητας (1) παίρνουμε:

$$\left[f(f^{-1}(x)) \right]' = (x)' \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\text{Οπότε: } (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}.$$

Αν $f^{-1}(1) = \omega$ τότε $f(\omega) = 1 \Leftrightarrow f(\omega) = f(0) \Leftrightarrow \omega = 0$.

Άρα

$$f^{-1}(1) = 0 \text{ και } (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση:

Αν $f'(x) \neq 0$ και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(A)$, τότε ισχύει:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad x \in f(A)$$

Το παραπάνω για να το χρησιμοποιήσετε πρέπει να το αποδείξετε.

196.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

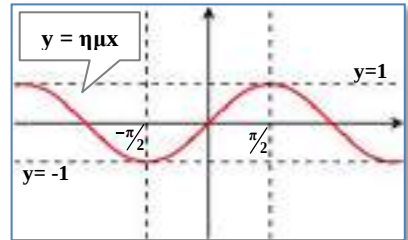
- α.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- β.** Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την $(f^{-1})'$.

Λύση

- α.** Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα είναι «1-1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Είναι:

- $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$
 - f είναι γνησίως αύξουσα.
- Επομένως $D_{f^{-1}} = f(A) = (-1, 1)$.



β. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$, οπότε

$$\left[f(f^{-1}(x)) \right]' = (x)' \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (1)$$

Αν $f^{-1}(x) = t$ τότε

$$f(t) = x \Leftrightarrow \eta\mu t = x \quad \text{και} \quad f'(f^{-1}(x)) = f'(t) = (\eta\mu t)' = \sigma\upsilon\nu t.$$

Αλλά $\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 t = 1 - \eta\mu^2 t$.

Επειδή

$$f^{-1}(x) = t \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{είναι} \quad \sigma\upsilon\nu t > 0, \quad \text{οπότε}$$

$$\sigma\upsilon\nu t = \sqrt{1 - \eta\mu^2 t} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t = \sqrt{1 - x^2}$$

Επομένως η (1) γράφεται $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu t}$, οπότε

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

2.2 Κανόνες παραγωγίσης

Ασκήσεις

836. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^5 + x - 5$

ii. $f(x) = x^3 + \ln x + \sqrt{5}$

iii. $g(t) = \sqrt{t} + \sin t, \quad t > 0$

iv. $g(u) = \ln|u| + \eta\mu \frac{\pi}{12}$

v. $f(x) = \eta\mu x + \ln 5$

vi. $f(x) = \frac{\ln|x|}{2} + 2\sqrt{x} - 7$

vii. $f(x) = 3e^x - 2x + x^2 - 3\sqrt[3]{x}, \quad x > 0$

viii. $f(x) = 2^x - 5 \cdot 4^x + 7\epsilon\phi x$

ix. $f(x) = \epsilon\phi x - \sigma\phi x$

x. $f(x) = \frac{3e^x}{2} - \frac{5^x}{4} + \frac{5\sigma\phi x}{3}$

837. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln x \sin x$

ii. $f(x) = 5\eta\mu x - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{3}$

iii. $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$

iv. $f(x) = \sqrt{x} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

v. $f(x) = (x^3 - x)\eta\mu x$

vi. $g(t) = t \ln t + 5t^2$

vii. $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x^3 \ln|x|$

viii. $f(x) = e^x \ln|x|$

ix. $f(x) = x^3 \sqrt{x} \ln x$

x. $f(x) = 2xe^x \epsilon\phi x$

838. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{3x^2 - x + 4}$

ii. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

iii. $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

iv. $f(x) = \epsilon\phi x - \frac{1}{x^3}$

v. $g(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

vi. $f(x) = \frac{2x^2 - x}{3x^2 + 5}$

vii. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

viii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$

839. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x, & x < 0 \\ 2\sqrt{x} + x, & x \geq 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 2 \\ x^3 - 2x^2 - x + 4, & x > 2 \end{cases}$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} (x^2 + 7)\eta\mu x, & x \leq 0 \\ x^3 \sigma\upsilon\nu x + 7x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ \sqrt{x} \cdot \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} x \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{vi. } f(x) = x^2 - |x - 1|$$

$$\text{vii. } f(x) = x^2 + |x| - |x - 3|$$

$$\text{viii. } f(x) = |x^2 - 4x + 3| - x^2$$

$$\text{ix. } f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \eta\mu x$$

$$\text{x. } f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \varepsilon\varphi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

840. Αν $y = 5x + 1 + \frac{2}{x}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 10x + 1$$

841. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε την παράγωγο στο σημείο x_0 .

$$\text{i. } f(x) = (x^2 + 1) \ln x \quad \text{και } x_0 = 1$$

$$\text{ii. } f(x) = (x^3 - 2x) \sqrt{x} \quad \text{και } x_0 = 4$$

$$\text{iii. } f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} \quad \text{και } x_0 = 0$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq -2 \\ 2x^2 + 3x + 7, & x > -2 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = -3, x_0 = -2, x_0 = 0$$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \eta\mu x - (x^2 - 2) \cdot \sigma\upsilon\nu x, & x \leq 0 \\ 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2x + 2, & x > 0 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = -\frac{\pi}{2}, x_0 = 0, x_0 = \frac{\pi}{2}$$

842. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Δ και είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν είναι $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Αν $h'(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι

$$h(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

843. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $g(1) \neq 0$, παραγωγίσιμες στο 1

με $\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f'(1)g(1) > f(1)g'(1)$ ii. αν $f'(1)=g'(1)=1$, τότε $f(1) \leq \frac{1}{4}$

844. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο σημείο $x_0 = 0$ ώστε να ισχύουν:

i. $f(0)=g(0)=1$ ii. $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=0$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x)-1}{x} = 2$

Να βρείτε τους αριθμούς $f'(0), g'(0)$.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

845. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

- i. $f(x) = (2x^2 + 3)^5$ ii. $f(x) = (3x^2 - 6x + 5)^5$
 iii. $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 3}$ iv. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
 v. $f(x) = \eta\mu(3x - 5)$ vi. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(e^x + 1)$
 vii. $f(x) = 3\eta\mu^2 x$ viii. $f(x) = \frac{1}{4} \sigma\upsilon\nu^3(3x - 2)$
 ix. $f(x) = \eta\mu^2\left(3x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ x. $f(x) = \epsilon\phi^3 x + \ln^2 x$
 xi. $f(x) = \eta\mu^4 x^2$ xii. $f(x) = \eta\mu(\eta\mu^2 x) + \eta\mu^2(\eta\mu x)$
 xiii. $f(x) = \ln|x^2 - 1|$ xiv. $f(x) = \ln^2 \sqrt{x^2 + 1}$
 xv. $f(x) = e^{2x^2 - 3}$ xvi. $f(x) = e^{x - x \ln x}$
 xvii. $f(x) = 2^{3x-4}$ xviii. $f(x) = \sigma\phi 3x + 3^{\sqrt{x}}$
 xix. $f(x) = \left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^3$ xx. $f(x) = 3^{\frac{3x-1}{x-2}}$

846. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

- i. $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 iii. $f(x) = \begin{cases} \eta\mu(x-1) - x^3, & x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} - x, & x \geq 1 \end{cases}$ iv. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$

847. Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$, τότε $xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

848. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^{\eta\mu x}, x > 0$

ii. $f(x) = (x^2 + 3)^{\sigma\upsilon\nu x}, x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = (1 + \sqrt{x})^{\sqrt{x}}, x > 0$

iv. $f(x) = (1 + x + x^2)^{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, x > 0$

vi. $f(x) = x^x + x^{\frac{1}{x}}, x > 0$

vii. $f(x) = (\sqrt{x})^{\ln x}, x > 0$

viii. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}, x > 1$

ix. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x^{\ln x}, x > 0$

x. $f(x) = x^{2^{x^2}}, x > 0$

849. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i. $f(x) = x^2 \sqrt{1+x}, x \geq 1$

και $x_0 = 3$

ii. $f(x) = \eta\mu^3(2x), x \in \mathbb{R}$

και $x_0 = \frac{\pi}{6}$

iii. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}, x > 0$

και $x_0 = 1$

iv. $f(x) = (1 + e^x)^{\ln x}$

και $x_0 = 1$

v. $f(x) = \eta\mu x^x$

και $x_0 = e$

vi. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$

και $x_0 = -\sqrt{5}, x_0 = 0$

850. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)g(x) = e^{f(x)+g(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι: $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = f'(x) + g'(x).$

851. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και ισχύει $f^3(x) + f(x) + 8 = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $f'(2)$.

852. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(\eta\mu x) + xf(x) = x^2 + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την $f'(0)$.

853. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x^2) = f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) \neq 1$, να βρείτε την $f'(1)$.

- 854.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu(\pi x), \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Να βρείτε την $f'(1)$.

- 855.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2) + xf(x) = x^4 + x^3 + x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- i.** την $f'(1)$ **ii.** το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$

- 856. α.** Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- i.** Αν η f είναι άρτια, τότε η συνάρτηση f' είναι περιττή.
ii. Αν η f είναι περιττή, τότε η συνάρτηση f' είναι άρτια.
β. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x^5 + \sin x)e^{f(x)} + \eta\mu x + x$

- i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

- 857.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^3) = 3x^4 + 1$, να υπολογίσετε τις τιμές $f'(1)$ και $f'(0)$.

Παράγωγος ανωτέρας τάξης

- 858.** Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

- i.** $f(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$ **ii.** $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ **iii.** $f(x) = (3x+2)^5$
iv. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ **v.** $f(x) = e^{2x^2-1}$ **vi.** $f(x) = \eta\mu\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right)$

- 859. i.** Αν $f(x) = x^2 \ln x$, να δείξετε ότι $f'(x) - xf''(x) + 2x = 0$.
ii. Αν $f(x) = x\eta\mu(\ln x)$, να δείξετε ότι $x^2 f''(x) - xf'(x) + 2f(x) = 0$.
iii. Αν $f(x) = e^{-x} \sin x$, να δείξετε ότι $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$.

- 860.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$. Να αποδείξετε ότι:

$$2f(x) + 2\frac{df}{dx} + \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

861. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 , όταν:

i. $f(x) = e^{x+\ln x} + \ln \frac{1}{x^3}$ και $x_0 = 1$

ii. $f(x) = x[\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)]$ και $x_0 = e^{\frac{\pi}{6}}$

862. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3, x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda}$, για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

ii. Αν $g(x) = \ln|f(x)|$, τότε $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\kappa, \lambda)$.

(1995)

863. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 1 \\ 2\sqrt{x} + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

864. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $t^2 + \alpha t + \beta = 0$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}$ επαληθεύει την εξίσωση:

$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = 0, \text{ για κάθε } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

865. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(-1) = 7$. Αν $f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον αριθμό $f''(2)$.
(1990)

866. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x \cdot \ln x) = e^x$ να βρείτε την τιμή $f''(0)$.

867. Μια συνάρτηση f είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $O(0,0)$ **ii.** $f''(0) = 0$

868. Δίνεται η περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f .

Να αποδείξετε ότι:

α. Η $f'(x)$ είναι άρτια συνάρτηση.

β. $f''(0) = 0$.

γ. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{h(x)}$ ii. Η $h'(x)$ είναι άρτια συνάρτηση

869. Δίνεται η συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(2) = 0$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g'(x)}{x-2} = 6$ και $f(x) = x^3 g(x^2 + 1)$, να βρείτε την $f''(1)$.

870. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h)}{h} = 2f''(x)$ ii. $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'\left(\frac{x}{h}\right)}{h-1} = x f''(x)$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h^2) - f'(x)}{h} = 0$

Εύρεση παραμέτρων

871. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu^2(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του a ώστε να ισχύει $f''(x) + 4a^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1999)

872. Αν $f(x) = e^{-\lambda x}$, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $2f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0$.

873. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $f(0) = 1$, $f'(-1) = 2$ και $f''(-1) = 3$.

874. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε

$$f(0) = -2, f(1) = -4, f''(-1) = -10 \text{ και } f^{(3)}(2017) = 12.$$

875. Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ με $\beta_1 \neq \beta_2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \lambda e^{\beta_1 x} + \mu e^{\beta_2 x}$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = g'(x_0)$. Να αποδείξετε ότι $\lambda = \mu = 0$.

(1996)

876. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 3, & x \leq 2 \\ \frac{\gamma}{x}, & x > 2 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις

οποίες η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 2.

877. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu x + 2\beta \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq |\eta\mu x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $|\alpha + 2\beta| \leq 1$.

ρ: ρίζα του P(x) ⇔ P(x) = (x - ρ) · Q(x)

878. Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ όπου $\alpha \neq 0$ και οι αριθμοί ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι ρίζες του $f(x)$ είναι διαφορετικές ανά δύο, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$$

879. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 1$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς α, β, γ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\alpha}{f'(\alpha)} + \frac{\beta}{f'(\beta)} + \frac{\gamma}{f'(\gamma)} = 0$.

ii. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma}$, $x \neq \alpha, x \neq \beta, x \neq \gamma$.

iii. $[f'(x)]^2 > f(x)''(x)$, $x \neq \alpha, x \neq \beta, x \neq \gamma$.

iv. $f'(0) = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$.

880. i. Να αποδείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.

ii. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

881. i. Αν $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $v \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = (x - \rho)^2 \pi(x) \Leftrightarrow f(\rho) = f'(\rho) = 0$$

ii. Να αποδείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου:

$$f(x) = vx^{v+1} - x^{v-1} - (v^2 + 1)x + v^2 - v + 2, \quad v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 2$$

iii. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του:

$$f(x) = \alpha x^{2v} + \beta x^{v-1} + 4, v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 2.$$

882. i. Έστω $p \in \mathbb{R}$ και $A(x), B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς

συντελεστές, ώστε $B(p) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό ≥ 2 .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε:

$$A(x)B(x) = (x-p)^2 f(x) \text{ αν και μόνο αν } A(p) = A'(p) = 0.$$

ii. Έστω $v \in \mathbb{Z}, v \geq 1$. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x) = x^v (vx^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

(1994)

Εύρεση πολυωνύμου από ισότητα που περιέχει την παράγωγο

του

883. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε

$$P(x) - P'(x) = x^2 - x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

884. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ισότητα:

$$P(x) + P'(x) - P''(x) = x^3 + 5x^2 + x + 3$$

885. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } P'(1) = 2$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

886. Να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση f αν $f'(x)f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,12)$.

887. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ με $P(0) = 4$ για το οποίο ισχύει:

$$8P(x) = (P'(x))^2 P''(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Παραγωγίσιμη συνάρτηση και συναρτησιακές σχέσεις δύο μεταβλητών

- 888.** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f'(y)$.

- 889.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι $\frac{f'(x)}{y} = \frac{f'(y)}{x}$.

- 890.** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) - f'(y) = x^2 - y^2$.

- 891.** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$. Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 892.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = xf(y) + yf(x) - xy$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $xf''(x) = yf''(y)$.

- 893.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \text{ να αποδείξετε ότι}$$

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}.$$

- 894.** Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει:

$$g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $g(0) = -\alpha$.

ii. $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (1997)

- 895.** Έστω ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x)\ln y + 2f(y)\ln x + \alpha$, για κάθε $x, y > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(1) = \alpha$ **ii.** $xf'(x) = f(x) + 2f'(1)\ln x$, για κάθε $x > 0$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

896. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3$.

- i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

897. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- ii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την

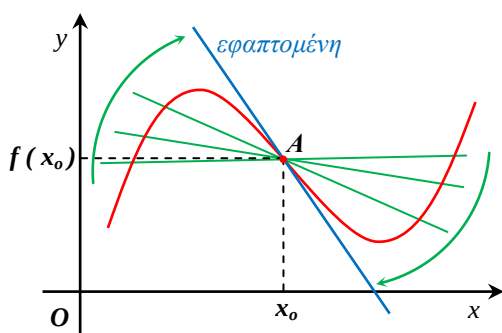
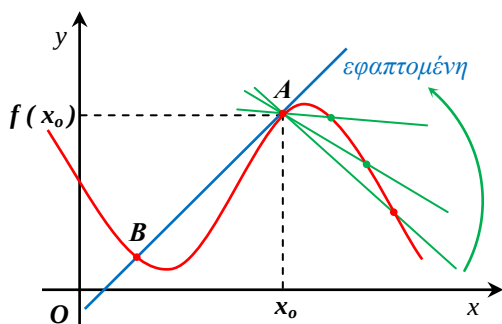
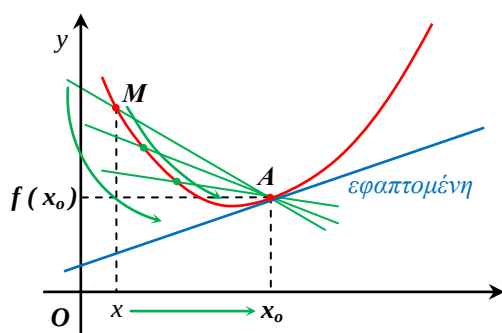
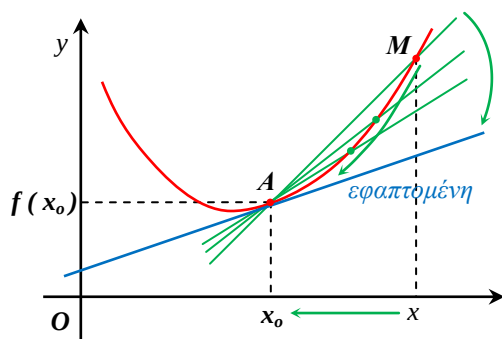
$$(f^{-1})'(2)$$

898. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Εφαπτομένη Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης



Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$

ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

Έστω $M(x, f(x))$, $x \neq x_0$ ένα ακόμη σημείο της γραφικής παράστασης της f . Καθώς το x τείνει στο x_0 το σημείο M κινείται πάνω στην C_f πλησιάζοντας το σημείο A .

Τότε η ευθεία AM τείνει να πάρει μια οριακή θέση, η οποία είναι η ίδια είτε το $x \rightarrow x_0$ με $x > x_0$ είτε $x \rightarrow x_0$ με $x < x_0$.

Η ευθεία που έχει αυτή την οριακή θέση ονομάζεται **εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A** .

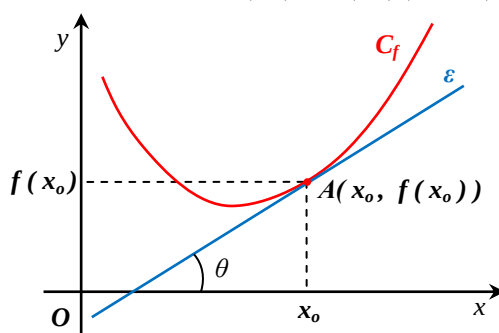
Παρατηρήσεις:

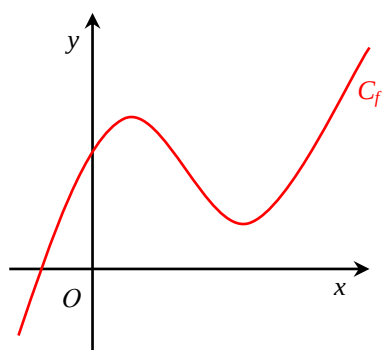
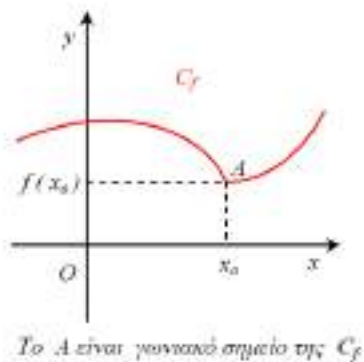
1. Η εφαπτομένη μπορεί να έχει και άλλα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f εκτός από το σημείο επαφής.
2. Η εφαπτομένη μπορεί να «διαπερνά» τη γραφική παράσταση της f .

Εξίσωση Εφαπτομένης

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν η f είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 τότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A η οποία έχει:

- ♦ Συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = f'(x_0)$
- ♦ Εξίσωση: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$





Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = \varepsilon\phi\theta = f'(x_0)$, της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, ονομάζεται και **κλίση της C_f στο x_0 ή κλίση της f στο x_0** .
2. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η γραφική της παράσταση δέχεται εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$.
Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 μπορεί να δέχεται εφαπτομένη στο x_0 μπορεί και όχι.
3. Φυσικά δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ όταν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .
4. Αν η C_f δε δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ και είναι συνεχής στο x_0 , τότε το σημείο A ονομάζεται **γωνιακό σημείο της C_f** .
Αυτό μας επιτρέπει να φανταστούμε τη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σαν μια «λεία» γραμμή χωρίς γωνίες και χωρίς διακοπές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εξίσωση εφαπτομένης με γνωστό το σημείο επαφής

197.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ όταν:

- i. $f(x) = e^x(x^2 + 1)$ και $x_0 = 0$.
- ii. $f(x) = x + 2\ln|x - 3|$ και $x_0 = 2$.
- iii. $f(x) = (2 - \sin x)^{x+1}$ και $x_0 = 0$.
- iv. $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 4, & x < 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x \geq 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$.
- v. $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln \frac{1}{x} + 2x + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$.
- vi. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 3, & x < 1 \\ 3x^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ και $x_0 = -2$ και $x_0 = 1$.

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cdot (x^2 + 1) + e^x (x^2 + 1)' = \\ &= e^x (x^2 + 1) + e^x \cdot 2x = e^x \cdot (x^2 + 1 + 2x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Οπότε:

- $f'(0) = e^0 \cdot (0^2 + 1 + 2 \cdot 0) = 1$

Επίσης:

- $f(0) = e^0 \cdot (0^2 + 1) = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι

$$\begin{aligned} y - f(0) &= f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1 \cdot x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = x + 1 \end{aligned}$$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{3\}$ με παράγωγο:

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

- βρίσκουμε την $f'(x_0)$ εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης ή τον ορισμό της παραγώγου (όπου οι κανόνες παραγώγισης δεν μπορούν να δώσουν την $f'(x_0)$ καθώς και στα σημεία αλλαγής του τύπου όταν η f είναι πολλαπλού τύπου),
- βρίσκουμε το $f(x_0)$ και
- γράφουμε την εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$f'(x) = (x)' + 2(\ln|x-3|)' = 1 + 2 \cdot \frac{1}{x-3} \cdot (x-3)' = 1 + \frac{2}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Οπότε:

- $f'(2) = 1 + \frac{2}{2-3} = 1 - 2 = -1$

Επίσης:

- $f(2) = 2 + 2\ln|2-3| = 2 + 2\ln 1 = 2$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ είναι
 $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow y = -x + 4$

iii. Η $f(x) = (2 - \sin x)^{x+1}$ γράφεται $f(x) = e^{(x+1) \cdot \ln(2 - \sin x)}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(x+1) \cdot \ln(2 - \sin x)} \cdot [(x+1) \cdot \ln(2 - \sin x)]' \\ &= (2 - \sin x)^{x+1} \cdot \left[(x+1)' \cdot \ln(2 - \sin x) + (x+1) \cdot (\ln(2 - \sin x))' \right] \\ &= (2 - \sin x)^{x+1} \cdot \left[1 \cdot \ln(2 - \sin x) + (x+1) \cdot \frac{1}{2 - \sin x} \cdot (2 - \sin x)' \right] \\ &= (2 - \sin x)^{x+1} \cdot \left[\ln(2 - \sin x) + \frac{(x+1) \cdot \eta \mu x}{2 - \sin x} \right], \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Οπότε:

- $f'(0) = (2 - \sin 0)^{0+1} \cdot \left[\ln(2 - \sin 0) + \frac{(0+1) \cdot \eta \mu 0}{2 - \sin 0} \right] = 1 \cdot (\ln 1 + 0) = 0$

Επίσης:

- $f(0) = (2 - \sin 0)^{0+1} = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 0 \cdot x \Leftrightarrow y = 1$$

iv. Το $x_0 = 1$ είναι σημείο αλλαγής του τύπου της f , συνεπώς την παράγωγό της στο 1 (αν υπάρχει) θα τη βρούμε με εφαρμογή του ορισμού της παραγώγου.

Είναι $f(1) = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3} = 2 \cdot 2 = 4$.

Οπότε:

♦ Αν $x < 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 + 4 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

♦ Αν $x > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 3} - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (\sqrt{x^2 + 3} - 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot [(\sqrt{x^2 + 3})^2 - 2^2]}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (x^2 + 3 - 4)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (x^2 - 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (x + 1)}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{4} + 2} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 1$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 4 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + 4 \Leftrightarrow \mathbf{y = x + 3}$$

- v. Το $x_0 = 0$ είναι σημείο αλλαγής του τύπου της f , συνεπώς την παράγωγό της στο 0 (αν υπάρχει) θα τη βρούμε με εφαρμογή του ορισμού της παραγώγου.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + 2 \right)}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + 2 \right) = 0 + 2 = 2,
\end{aligned}$$

γιατί

$$\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow \left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0$ από το **Κριτήριο Παρεμβολής** έχουμε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$ και επειδή $f(0) = 1$

η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow \mathbf{y = 2x + 1}$$

- vi. ♦ Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(x) = (2x^2 - x + 3)' = 4x - 1$$

Οπότε:

- $f'(-2) = 4 \cdot (-2) - 1 = -8 - 1 = -9$

Επίσης:

- $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 3 = 8 + 2 + 3 = 13$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(-2, f(-2))$ είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Leftrightarrow y - 13 = -9 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow \\ y = -9x - 18 + 13 \Leftrightarrow y = -9x - 5$$

♦ Το $x_0 = 1$ είναι σημείο αλλαγής του τύπου της f .

Είναι $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

- Αν $x < 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$$

- Αν $x > 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 2x - 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x - 1} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1) \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 5) = 8$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και

δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο

σημείο της $A(1, f(1))$.

Παρατήρηση

Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0 τότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, εκτός από την περίπτωση, της κατακόρυφης εφαπτομένης η οποία όμως είναι **εκτός ύλης** και συνεπώς δεν θα ασχοληθούμε.

198.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2) = x^4 + x^3 + x + 1 - xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Λύση

Για $x=1$ έχουμε $f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 - f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1) = 2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $f(x^2)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της ισότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(x^2))' &= (x^4 + x^3 + x + 1 - xf(x))' \\ f'(x^2) \cdot (x^2)' &= 4x^3 + 3x^2 + 1 - f(x) - xf'(x) \\ 2xf'(x^2) &= 4x^3 + 3x^2 + 1 - f(x) - xf'(x) \end{aligned}$$

Για $x=1$ παίρνουμε:

$$2f'(1) = 4 + 3 + 1 - f(1) - f'(1) \stackrel{f(1)=2}{\Leftrightarrow} 3f'(1) = 6 \Leftrightarrow f'(1) = 2$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

199.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Η εφαπτομένη ε_A της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f .
- β.** Η εφαπτομένη ε_B της C_f στο σημείο $B(1, f(1))$ έχει και άλλο (εκτός του B) κοινό σημείο με την C_f .

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)' \cdot x^2 - (1-x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-x^2 - (1-x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(x-2)}{x^4} = \frac{x-2}{x^3} \end{aligned}$$

- α.** Για την εφαπτομένη ε_A της C_f στο

$A(3, f(3))$ έχουμε:

- $f'(3) = \frac{3-2}{3^3} = \frac{1}{27}$
- $f(3) = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία μιας C_f και της εφαπτομένης της ε_A σε ένα σημείο της A λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $y = f(x)$ και ε_A .

Οπότε:

- Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, αυτή θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου επαφής A το οποίο θα είναι το μοναδικό κοινό σημείο C_f και ε_A .
- Αν το σύστημα έχει παραπάνω από μια λύσεις τότε μια λύση είναι οι συντεταγμένες του σημείου επαφής και οι υπόλοιπες τα άλλα κοινά σημεία που έχουν C_f και ε_A .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_A : y - f(3) &= f'(3) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{27} \cdot (x - 3) \\ &\Leftrightarrow y + \frac{2}{9} = \frac{1}{27}x - \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \frac{1}{27}x - \frac{3}{9} \Leftrightarrow y = \frac{1}{27}x - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων C_f και ε_A είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = f(x) \\ y = \frac{1}{27}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ y = \frac{1}{27}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{27}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ \frac{1-x}{x^2} = \frac{x-9}{27} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ x^2(x-9) = 27(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ x^3 - 9x^2 = 27 - 27x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ (x-3)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ x = 3 \text{ (τριπλή)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{9} \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως η εφαπτομένη ε_A και η

C_f έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το σημείο επαφής $A\left(3, -\frac{2}{9}\right)$.

β. Για την εφαπτομένη ε_B της C_f στο $B(1, f(1))$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(1) &= \frac{1-2}{1^3} = -1 \\ \bullet \quad f(1) &= \frac{1-1}{1^2} = 0 \\ \bullet \quad \varepsilon_B : y - f(1) &= f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 \end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων C_f και ε_B είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = f(x) \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{x^2} \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 1 = \frac{1-x}{x^2} \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(-x + 1) = 1 - x \\ y = -x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + x^2 = 1 - x \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x^2 - 1) = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 1)(x + 1) = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2(x + 1) = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (διπλή)} \\ y = -x + 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η εφαπτομένη ε_B έχει με τη C_f και δεύτερο κοινό σημείο, εκτός του σημείου επαφής $B(1,0)$, το $\Gamma(-1,2)$.

200.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- ii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 3$.

Λύση

- i. Είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 + 1 < x_2 + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι «1-1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}. \text{ Άρα } D_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

- ii. Η εφαπτομένη ε της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$ έχει εξίσωση $y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3)$.

Έχουμε: $f(1) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 1$ και $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι: $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $[f(f^{-1}(x))]' = (x)'$, και συνεπώς

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Επομένως } \varepsilon: y - 1 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - 4y + 1 = 0.$$

Παρατήρηση

Η μονοτονία της f με
χρήση παραγώγου:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως
αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η $f'(x_0)$ ως συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f $A(x_0, f(x_0))$

201.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (εφόσον υπάρχει) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.
- Σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- Είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 4$.
- Είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 6 = 0$.
- Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = (x^2 - x + 1)' = 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M .

- Είναι: $\lambda_\varepsilon = 3 \Leftrightarrow f'(x_0) = 3$

$$\Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

$$\text{Οπότε: } f(x_0) = f(2) = 4 - 2 + 1 = 3.$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\varepsilon: y - 3 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 3$$

- Είναι: $\lambda_\varepsilon = \tan 135^\circ = -1$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

$$\text{Οπότε: } f(x_0) = f(0) = 0 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\varepsilon: y - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

- Αν $\zeta: y = x + 4$ τότε έχουμε:

$$\varepsilon \parallel \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$\text{Οπότε } f(x_0) = f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y - 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x$.

Μεθοδολογία

Όταν ζητείται η εφαπτομένη της καμπύλης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f και δε δίνεται το σημείο επαφής τότε:

- παραγωγίζουμε την f .
- Θεωρούμε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ ως σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης ε .

Από την απαίτηση η ε να ικανοποιεί τις δεδομένες συνθήκες, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός μόνον αγνώστου, του x_0 . Συχνά το x_0 βρίσκεται από τη σχέση:

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_0).$$

Θυμίζουμε

Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε είναι ο αριθμός:

$$\lambda: \quad \text{αν η ευθεία έχει εξίσωση } y = \lambda x + \beta.$$

$$-\frac{A}{B} : \quad \text{αν η ευθεία έχει εξίσωση: } Ax + By + \Gamma = 0, B \neq 0.$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} : \quad \text{αν η ευθεία διέρχεται από τα σημεία } A(x_A, y_A) \text{ \& } B(x_B, y_B) \text{ } (x_A \neq x_B).$$

$$\text{εφω:} \quad \text{αν η ευθεία } \varepsilon \text{ σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } \omega \neq \frac{\pi}{2}.$$

iv. Αν $\delta: x+2y-6=0$, τότε $\lambda_\delta = -\frac{1}{2}$ οπότε έχουμε:

$$\varepsilon \perp \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 2 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Οπότε: } f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } \varepsilon: y - \frac{7}{4} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \\ y = 2x - \frac{5}{4}$$

v. Είναι: $\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

$$\text{Οπότε: } f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } \varepsilon: y - \frac{3}{4} = 0 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$$

202.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(a+x) - f(a-x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(a, f(a))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

Λύση

Αν ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(a, f(a))$ και $\zeta: y = x$, με $\lambda_\zeta = 1$, τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{-1}{\lambda_\zeta} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow f'(a) = -1 \quad (\text{αφού η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}).$$

Οι $f(a+x)$ και $f(a-x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (f(a+x))' - (f(a-x))' &= (-2x)' \Leftrightarrow f'(a+x)(a+x)' - f'(a-x)(a-x)' = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(a+x) + f'(a-x) = -2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Θέτοντας όπου $x = 0$ παίρνουμε:

$$f'(a) + f'(a) = -2 \Leftrightarrow 2f'(a) = -2 \Leftrightarrow f'(a) = -1$$

203.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x - 2$ στο σημείο της $A(2, 0)$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x + 9y - 2 = 0$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + \beta$.

- ♦ Το σημείο $A(2, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:
 $f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^4 + \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 16 + 8\alpha + 2\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 2\beta = -14 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4\alpha + \beta = -7 \quad (1)$

- ♦ Η ευθεία δ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\delta = -\frac{1}{9}$.

Αν ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, 0)$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda_\varepsilon = f'(2)$, οπότε έχουμε:

$$\varepsilon \perp \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 9 \Leftrightarrow f'(2) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^3 + 3\alpha \cdot 2^2 + \beta = 9 \Leftrightarrow 32 + 12\alpha + \beta = 9 \Leftrightarrow 12\alpha + \beta = -23 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta = -7 \\ 12\alpha + \beta = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 - 4\alpha \\ 12\alpha - 7 - 4\alpha = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 - 4\alpha \\ 8\alpha = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 - 4\alpha \\ \alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 - 4(-2) \\ \alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Εφαπτομένη που διέρχεται από γνωστό σημείο που δεν είναι το σημείο επαφής

204.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Να βρείτε (αν υπάρχει) εφαπτομένη της C_f , που διέρχεται από το σημείο:

α. $A(2, -9)$

β. $B(2, 3)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 5$.

Τα σημεία A και B δεν ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f στο M .

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι: } \varepsilon: y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\
 \Leftrightarrow y - (x_0^2 - 5x_0 + 6) &= (2x_0 - 5)(x - x_0) \\
 \Leftrightarrow y &= (2x_0 - 5)x - 2x_0^2 + 5x_0 + x_0^2 - 5x_0 + 6 \\
 \Leftrightarrow y &= (2x_0 - 5)x - x_0^2 + 6 \quad (1)
 \end{aligned}$$

α. Η ε διέρχεται από το σημείο $A(2, -9)$

αν και μόνο αν:

$$-9 = (2x_0 - 5) \cdot 2 - x_0^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ ή } x_0 = 5$$

✓ Για $x_0 = -1$ έχουμε από (1)

την εφαπτομένη $\varepsilon_1: y = -7x + 5$

με σημείο επαφής το $M_1(-1, 12)$.

✓ Για $x_0 = 5$ έχουμε από (1)

την εφαπτομένη $\varepsilon_2: y = 5x - 19$

με σημείο επαφής το $M_2(5, 6)$.

β. Η ε διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$

αν και μόνο αν:

$$3 = (2x_0 - 5) \cdot 2 - x_0^2 + 6 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 7 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη ($\Delta < 0$)

άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το σημείο B .

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εφαπτομένη ή τις εφαπτομένες (αν υπάρχουν) της C_f , μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , που διέρχονται (άγονται) από ένα σημείο A που δεν ανήκει στη C_f , ακολουθούμε τα παρακάτω:

1^{ov} Θεωρούμε την εφαπτομένη ε της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.

2^{ov} Το σημείο A ανήκει στην ε επομένως οι συντεταγμένες του πρέπει να την επαληθεύουν. Έτσι προκύπτει μια εξίσωση με άγνωστο το x_0 .

- Οι ρίζες της εξίσωσης (εφόσον ανήκουν στο D_f) είναι οι τετμημένες των σημείων επαφής.

- Αν η εξίσωση είναι αδύνατη, τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το A .

205.

α. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο $M(a, \beta)$ με $a^2 + \beta < 5$ διέρχονται δύο εφαπτομένες προς την παραβολή $y = x^2 - 2ax + 5$.

β. Αν το σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στην παραβολή $y = \frac{19}{4} - x^2$, τότε οι παραπάνω εφαπτομένες είναι κάθετες.

Λύση

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 2a$.

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής της εφαπτομένης ε της C_f που διέρχεται από το $M(a, \beta)$. Είναι:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^2 - 2\alpha x_0 + 5) = (2x_0 - 2\alpha)(x - x_0) \quad (1)$$

Επειδή το $M(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ε η (1) επαληθεύεται για $x = \alpha$ και $y = \beta$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \beta - x_0^2 + 2\alpha x_0 - 5 &= (2x_0 - 2\alpha)(\alpha - x_0) \\ \Leftrightarrow \beta - x_0^2 + 2\alpha x_0 - 5 &= 2\alpha x_0 - 2x_0^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2\alpha x_0 + 2\alpha^2 - 5 + \beta = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Η (2) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς x_0 με διακρίνουσα:

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4(2\alpha^2 - 5 + \beta) = -4(\alpha^2 + \beta - 5) > 0, \text{ αφού } \alpha^2 + \beta - 5 < 0 \text{ από την υπόθεση.}$$

Επομένως έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 .

Αυτό σημαίνει ότι από το $M(\alpha, \beta)$ άγονται δύο εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της παραβολής με σημεία επαφής $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ αντιστοίχως.

β. Αν το $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην παραβολή $y = \frac{19}{4} - x^2$, τότε είναι: $\beta = \frac{19}{4} - \alpha^2 \quad (3)$

Αν $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2}$ οι συντελεστές διεύθυνσης των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = f'(x_1)f'(x_2) = (2x_1 - 2\alpha)(2x_2 - 2\alpha) = 4x_1x_2 - 4\alpha(x_1 + x_2) + 4\alpha^2 \quad (4)$$

Επειδή όμως x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (2), από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$x_1x_2 = \frac{2\alpha^2 - 5 + \beta}{1} = 2\alpha^2 - 5 + \beta \text{ και } x_1 + x_2 = \frac{2\alpha}{1} = 2\alpha$$

Οπότε από (4) είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} &= 4(2\alpha^2 - 5 + \beta) - 4\alpha \cdot 2\alpha + 4\alpha^2 = 8\alpha^2 - 20 + 4\beta - 8\alpha^2 + 4\alpha^2 = \\ &\stackrel{(3)}{=} 4\alpha^2 - 20 + 4\left(\frac{19}{4} - \alpha^2\right) = 4\alpha^2 - 20 + 19 - 4\alpha^2 = -1 \end{aligned}$$

Επομένως $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

206.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2x^2 - 1 = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = -2x^2 + \ln x$, $x > 0$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 , να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + 2x^2 - 1$, $x > 0$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\left. \begin{array}{l} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 2x_1^2 < 2x_2^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \ln x_1 + 2x_1^2 < \ln x_2 + 2x_2^2 \Leftrightarrow \ln x_1 + 2x_1^2 + 1 < \ln x_2 + 2x_2^2 + 1$$

Παρατήρηση

Η μονοτονία της g με χρήση παραγώγου:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 4x > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άρα $g(x_1) < g(x_2)$ και συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής στο

$$\Delta = (0, 1) \subset (0, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 2x^2 - 1) = -\infty + 0 - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x + 2x^2 - 1) = 0 + 2 - 1 = 1$$

$$\text{Οπότε } g(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \right) = (-\infty, 1).$$

Το $0 \in g(\Delta) = (-\infty, 1)$, επομένως υπάρχει $x_0 \in \Delta = (0, 1)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $(0, 1)$, θα είναι και «1-1» και συνεπώς το x_0 είναι μοναδικό.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2x^2 - 1 = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

β. Έχουμε $h(x) = -2x^2 + \ln x$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = -4x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο με τετμημένη x_0 έχει εξίσωση

$$y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + 2x_0^2 - \ln x_0 = \left(-4x_0 + \frac{1}{x_0} \right)(x - x_0)$$

και διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν

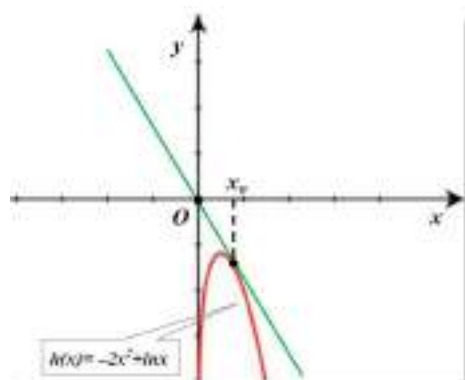
$$0 + 2x_0^2 - \ln x_0 = \left(-4x_0 + \frac{1}{x_0} \right)(0 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - \ln x_0 = 4x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 + \ln x_0 - 1 = 0 \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} g(x_0) = 0$$

Από το **α.** ερώτημα έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h σε σημείο της με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



Η ευθεία ε εφάπτεται στη C_f

207.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x + 4$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α' τρόπος

Η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ εφάπτεται της C_f

αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $M(x_0, y_0)$

τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} \text{Το } M \text{ ανήκει στη } C_f \\ \text{Το } M \text{ ανήκει στην } \varepsilon \\ f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 2x_0 + 4 \\ y_0 = x_0 + 2 \\ 3x_0^2 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 2x_0 + 4 \\ y_0 = x_0 + 2 \\ x_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 3 \\ y_0 = 3 \text{ ή } y_0 = 5 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

Άρα το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

Επομένως η ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(1, 3)$.

β' τρόπος

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$

έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - (x_0^3 - 2x_0 + 4) = (3x_0^2 - 2) \cdot (x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 2)x - 3x_0^3 + 2x_0 + x_0^3 - 2x_0 + 4$$

$$\Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 2)x - 2x_0^3 + 4$$

Η ε ταυτίζεται με την $\varepsilon: y = x + 2$ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} 3x_0^2 - 2 = 1 \\ -2x_0^3 + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ x_0 = 1 \end{cases} \text{ άρα } x_0 = 1$$

Επομένως η ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μεθοδολογία

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$.

Για να δείξουμε ότι η ε εφάπτεται της C_f :

1ος τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο $M(x_0, y_0)$ για το οποίο ισχύουν:

$$\begin{cases} M \in C_f \\ M \in \varepsilon \\ f'(x_0) = \lambda \end{cases}.$$

2ος τρόπος

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, y_0)$ και δείχνουμε ότι υπάρχει x_0 ώστε να ταυτίζεται με την ε .

3ος τρόπος

Βρίσκουμε (αν είναι εφικτό) τα κοινά σημεία C_f και ε και δείχνουμε ότι σ' ένα τουλάχιστον απ' αυτά, έστω $A(x_1, y_1)$ ισχύει $f'(x_1) = \lambda$.

γ' τρόπος

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της ε και της C_f λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^3 - 2x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = x^3 - 2x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ή } x = -2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η ε έχει με την C_f δύο κοινά σημεία τα $M(1, 3)$ και $N(-2, 0)$.

Είναι $f'(1) = 3 - 2 = 1 = \lambda_\varepsilon$ ενώ $f'(-2) = 10 \neq \lambda_\varepsilon$.

Συνεπώς το $M(1, 3)$ είναι σημείο επαφής, δηλαδή **η ε εφάπτεται της C_f στο $M(1, 3)$** ενώ το N είναι ένα σημείο στο οποίο η ε τέμνει την C_f .

208.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\zeta: y = 4x$ δεν εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = x^3 + x$.

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g'(x) = 3x^2 + 1$.

α' τρόπος

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(x_0, g(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned} \varepsilon: y - g(x_0) &= g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 + x_0) = (3x_0^2 + 1)(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow y = (3x_0^2 + 1)x - 3x_0^3 - x_0 + x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow y = (3x_0^2 + 1)x - 2x_0^3 \end{aligned}$$

Η ε ταυτίζεται με την ζ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} 3x_0^2 + 1 = 4 \\ -2x_0^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 = 3 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 0^2 = 3 \text{ αδύνατο} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Άρα **η ευθεία ζ δεν εφάπτεται στη C_g .**

β' τρόπος

Για να εφάπτεται η $\zeta: y = 4x$ στη C_g της $g(x) = x^3 + x$ πρέπει να υπάρχει σημείο $M(x_0, y_0)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} \text{Το } M \text{ ανήκει στη } C_g \\ \text{Το } M \text{ ανήκει στη } \zeta \\ g'(x_0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ y_0 = x_0^3 + x_0 \\ 3x_0^2 + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ y_0 = x_0^3 + x_0 \\ x_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4 \\ y_0 = 2 \\ x_0 = 1 \text{ αδύνατο} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y_0 = -4 \\ y_0 = -2 \\ x_0 = -1 \text{ αδύνατο} \end{cases}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σημείο M και συνεπώς η ευθεία ζ δεν εφάπτεται στη C_g .

209.

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\delta: y = x + \lambda$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $h(x) = e^x$.

Λύση

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α' τρόπος

Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της $M(x_0, h(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned} \varepsilon: y - h(x_0) &= h'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow y = e^{x_0}x - x_0e^{x_0} + e^{x_0} \Leftrightarrow y = e^{x_0}x + e^{x_0}(1 - x_0) \end{aligned}$$

Η ε ταυτίζεται με την δ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} e^{x_0} = 1 \\ e^{x_0}(1 - x_0) = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \lambda = e^{x_0}(1 - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \lambda = e^0(1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Άρα για $\lambda = 1$ η ευθεία δ εφάπτεται της C_h στο σημείο $M(0, h(0))$.

β' τρόπος

Η ευθεία $\delta: y = x + \lambda$ εφάπτεται της C_h αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $M(x_0, y_0)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

$$\begin{cases} \text{To } M \text{ ανήκει στην } C_h \\ \text{To } M \text{ ανήκει στην } \delta \\ f'(x_0) = \lambda_\delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = e^{x_0} \\ y_0 = x_0 + \lambda \\ e^{x_0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_0 = \lambda \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ \lambda = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως για $\lambda = 1$ η ευθεία δ εφάπτεται της C_h στο σημείο $M(0, 1)$.

210.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 1} = 0$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $\eta: y = 2x - 3$ εφάπτεται στη C_f στο $x_0 = 1$.

Λύση

Η ευθεία $\eta: y = 2x - 3$ εφάπτεται στη C_f στο $x_0 = 1$ (δηλαδή το σημείο $A(1, f(1))$ είναι σημείο επαφής της ευθείας η με τη C_f) αν και μόνο αν:

- ✓ Το A ανήκει στην ευθεία η ,
Αρα $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow f(1) = -1$.
- ✓ Ο συντελεστής διεύθυνσης της
είναι ίσος με την $f'(1)$.

Δηλαδή $f'(1) = 2$.

Αρα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f(1) = -1 \text{ και } f'(1) = 2.$$

♦ Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 1} = 0$.

Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) = (x - 1)g(x) + 2x - 3, \text{ κοντά στο } 1, \quad (1)$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0.$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)g(x) + 2x - 3] = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\text{Αλλά η } f \text{ είναι συνεχής στο } 1, \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = -1 \quad (2)$$

♦ Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)g(x) + 2x - 3 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)g(x) + 2x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)[g(x) + 2]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) + 2] = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Αρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

Παρατήρηση

Οι ισότητες $f(1) = -1$ και $f'(1) = 2$ που πρέπει να αποδείξουμε, μπορούν να προκύψουν και ως εξής:

Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της

$M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = f'(1)x - f'(1) + f(1)$$

και ταυτίζεται με την $\eta: y = 2x - 3$ αν και

$$\text{μόνο αν } \begin{cases} f'(1) = 2 \\ -f'(1) + f(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο

211.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \frac{1}{2e}x^2$ και $g(x) = \ln x$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο (δηλαδή οι C_f και C_g εφάπτονται). Να βρείτε επίσης την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{e}x, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με } g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Για να εφαπτόνται οι C_f και C_g αρκεί να υπάρξει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2e} x_0^2 = \ln x_0 \\ \frac{1}{e} x_0 = \frac{1}{x_0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2e} x_0^2 = \ln x_0 \\ x_0^2 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2e} (\sqrt{e})^2 = \ln \sqrt{e} \\ x_0 = \sqrt{e} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2e} e = \ln e^{\frac{1}{2}} \\ x_0 = \sqrt{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln e, \text{ ισχύει} \\ x_0 = \sqrt{e} \end{cases}$$

Άρα $x_0 = \sqrt{e}$, οπότε $f(\sqrt{e}) = g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$

και επομένως οι C_f και C_g εφαπτόνται στο σημείο $A(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.

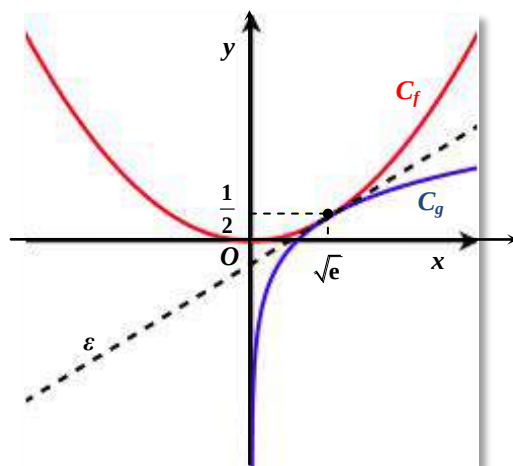
Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των C_f και C_g είναι:

$$\varepsilon: y - \frac{1}{2} = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{e}}{e}(x - \sqrt{e}) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{e}x - \frac{1}{2}$$

Μεθοδολογία

Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δύο συναρτήσεων παραγωγίσιμων στο x_0 , έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο A με τετμημένη x_0 αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \text{διέρχονται από το } A \\ \text{και} \\ \text{έχουν στο } A \text{ την ίδια κλίση} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ \text{και} \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$



212.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2\kappa x + \lambda, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$.

Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda - 1 = e^0 \\ 2\kappa + \lambda = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\kappa + 2 \\ 2\kappa - \kappa + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\kappa + 2 \\ \kappa = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \kappa = -1 \end{cases}$$

Κοινή εφαπτομένη όχι κατ' ανάγκη σε κοινό σημείο

213.

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$

Λύση

Η f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = -2x$ και $g'(x) = -2x + 8$.

Έστω ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g η οποία εφάπτεται

της C_f στο $A(x_1, f(x_1))$ και

της C_g στο $B(x_2, g(x_2))$.

Τότε:

$$AB: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1) \text{ και}$$

$$AB: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Οι δύο εξισώσεις παριστάνουν την ίδια ευθεία, οπότε:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = -2x_2 + 8 \\ 4 - x_1^2 - x_1(-2x_1) = -x_2^2 + 8x_2 - 20 - x_2(-2x_2 + 8) \end{cases}$$

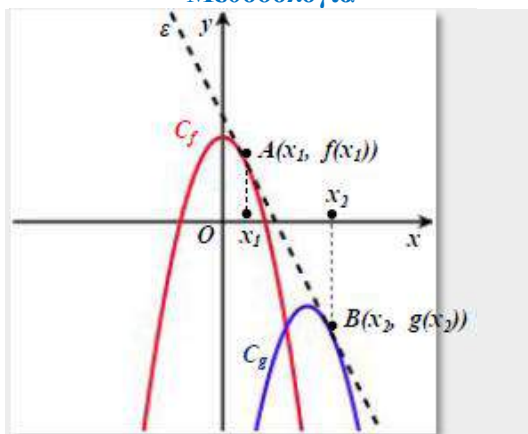
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 4 \\ x_1^2 = x_2^2 - 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 4 \\ (x_2 - 4)^2 = x_2^2 - 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 4 \\ x_2^2 - 8x_2 + 16 = x_2^2 - 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 4 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Μεθοδολογία



Για την εύρεση κοινών εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και g (όχι κατ' ανάγκη σε κοινό τους σημείο):

- Θεωρούμε ως $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής μιας κοινής εφαπτομένης με τις C_f και C_g αντίστοιχα. Οπότε:
 - $AB: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$
 $y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$
 (ως εφαπτομένη της C_f στο A)
 - $AB: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$
 $y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$
 (ως εφαπτομένη της C_g στο B)

Για να ταυτίζονται οι εξισώσεις (αφού πρόκειται για την ίδια ευθεία AB πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ \text{και} \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases}$$

Από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε τα x_1 και x_2 και συνεπώς την ευθεία AB .

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 5$$

214.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(-2x) + x^2 + 1 = 0$, $x < 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα.

β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln(-2x) + x^2 + 1$, $x < 0$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 > -2x_2 &\Leftrightarrow \ln(-2x_1) > \ln(-2x_2) \\ x_1^2 > x_2^2 &\Leftrightarrow x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1 \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \ln(-2x_1) + x_1^2 + 1 > \ln(-2x_2) + x_2^2 + 1$$

Άρα $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$

και συνεπώς η φ
είναι γνησίως φθίνουσα
στο $(-\infty, 0)$.

Η φ είναι συνεχής στο

$$A = (-\infty, 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(-2x) + x^2 + 1] = (+\infty) + (+\infty) + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [\ln(-2x) + x^2 + 1] = -\infty + 0 + 1 = -\infty$$

Οπότε το σύνολο τιμών της φ είναι:

$$\varphi(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Το $0 \in \varphi(A) = \mathbb{R}$, επομένως υπάρχει $x_0 \in A = (-\infty, 0)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

Επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ θα είναι και «1-1» και συνεπώς το x_0 είναι μοναδικό.

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(-2x) + x^2 + 1 = 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο πεδίο ορισμού της $A = (-\infty, 0)$.

β. Είναι $f'(x) = -2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_1, f(x_1))$ και ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B(x_2, g(x_2))$. Είναι

Παρατήρηση

Η μονοτονία της φ με χρήση παραγώγου:

$$\varphi'(x) = \frac{(-2x)'}{-2x} + 2x = \frac{1}{x} + 2x < 0 \text{ για κάθε } x < 0.$$

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

$$\varepsilon_1: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y + x_1^2 = -2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = -2x_1x + x_1^2$$

$$\varepsilon_2: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_2}x - 1 + \ln x_2$$

Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη, αν και μόνο αν οι ε_1 και ε_2 ταυτίζονται.

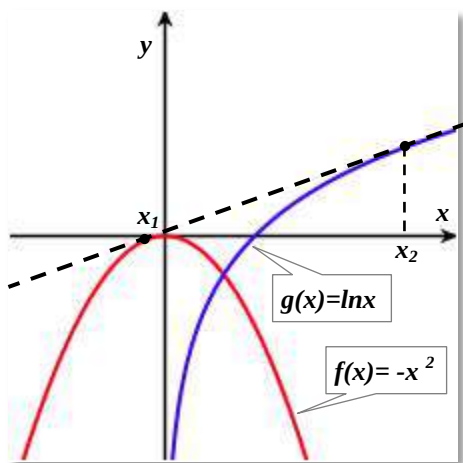
Δηλαδή

$$\begin{cases} -2x_1 = \frac{1}{x_2} & (x_2 > 0) \\ x_1^2 = \ln x_2 - 1 & (x_1 < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{-2x_1} & (1) \\ x_1^2 = \ln \frac{1}{-2x_1} - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x_1^2 = -\ln(-2x_1) - 1 \Leftrightarrow \ln(-2x_1) + x_1^2 + 1 = 0 \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \varphi(x_1) = 0$$

Από το [α.](#) ερώτημα έχουμε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.



Ασκήσεις

Εξίσωση εφαπτομένης με γνωστό το σημείο επαφής

899. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όταν:

i. $f(x) = x^3 + x - 6$ και $x_0 = -1$

ii. $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ και $x_0 = \frac{\pi}{4}$

iii. $f(x) = e^x (x^2 + 1)$ και $x_0 = 0$

iv. $f(x) = x - x \ln x$ και $x_0 = e$

v. $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ και $x_0 = 1$

vi. $f(x) = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ και $x_0 = 0$

vii. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ και $x_0 = 0$

viii. $f(x) = e^x \ln|e^x - 2|$ και $x_0 = 0$

ix. $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ και $x_0 = 0$

x. $f(x) = x^x, x > 0$ και $x_0 = 1$

900. Να βρείτε (αν ορίζεται) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ όταν:

i. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2, & x \leq 2 \\ x^2 + 5x - 10, & x > 2 \end{cases}$ και $x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 2 \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$ και $x_0 = 2$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

iv. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{5}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

901. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha, & x < 1 \\ (x - \beta)^2, & x \geq 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 2\beta = \alpha$ και ότι $\alpha \geq -1$.
- ii. Αν είναι $-1 \leq \alpha \leq 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.
- iii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα α και β .
- iv. Αν $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$.

(2012)

- 902.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$ όταν ισχύει $2x^2 - x + 2 \leq f(x) \leq 3x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 903.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τεταγμένη $y_0 = \ln 2$.
- 904.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχει εφαπτομένη, που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{\pi^2}{8}$.
- 905.** Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = e - 1$. Αν $f(x) = (1 + g(x))^x$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- 906.** Αν για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει $f^3(x) + f(x) - 10x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.
- 907.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 3$
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
 - ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

908. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 5$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 4x}{x - 5} = 1. \text{ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής}$$

παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 5$.

909. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1) - 4}{x-1} = 3$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 2$.

910. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$f(1) = 1 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{h} = -3$$

Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

911. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(\ln x) = x \ln x - x, \quad x > 0$$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

912. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x) + x[1 - f(-x)] = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν A και B είναι τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ τέμνει τους άξονες, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.

913. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(0) = 1$.

- ii.** Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(f(1), 2)$.
- 914.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - x^2)$.
- Na βρείτε το πεδίο ορισμού της και τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία η γραφική της παράσταση C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.
 - Na αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.
- 915.** Na αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = xe^x$ και $g(x) = (e^x - 1)x$ στα σημεία τους $A(a, f(a))$ και $B(a, g(a))$ διέρχονται από το ίδιο σημείο του άξονα $y'y$.
- 916.** Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έστω $g(x) = f(x) + x$.
Na αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία τους με τετμημένη x_0 τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.
- 917.** Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε:
$$f(x) - g(x) = 2016x - 2016 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
Αν ε_1 και ε_2 είναι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία τους $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ να βρείτε την τετμημένη του κοινού σημείου των ε_1 και ε_2 .
- 918.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Na αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει με την C_f και άλλο κοινό σημείο N το οποίο και να βρεθεί.
- 919.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$ και έστω M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης C_f .
- Na αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός από το M .
 - Αν A, B είναι τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της C_f στο M τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:
 - Το M είναι μέσο του AB .
 - Το εμβαδόν του τριγώνου OAB (O η αρχή των αξόνων) είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του σημείου M .

920. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$, $a > 0$, $x > 0$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
- ii. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτομένες διέρχονται από σταθερό σημείο όταν $a \in \mathbb{R}$.

921. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{e^x}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
- ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτομένες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το a , διέρχονται από το ίδιο σημείο.

922. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- ii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -2$.

923. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- β. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

924. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και τέτοια, ώστε οι συναρτήσεις f και f^{-1} να είναι παραγωγίσιμες.

- α. Να αποδείξετε ότι $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.
- β. Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, να βρείτε:
 - i. την τιμή $f^{-1}(1)$
 - ii. την τιμή $(f^{-1})'(1)$
 - iii. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Η $f'(x_0)$ ως συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

925. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln \frac{1}{x-1}$. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της

C_f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.

- 926.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$, οι οποίες έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 8$.
- 927.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία:
- i. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.
 - ii. είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 6x - 2y - 1 = 0$.
 - iii. είναι κάθετη στη χορδή AB με $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$.
 - iv. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- 928.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$.
Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι:
- i. κάθετες στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 1 = 0$.
 - ii. παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- 929.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ που είναι:
- i. παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{5}{2}x$
 - ii. κάθετη στην ευθεία $y = 2x - 6$
- 930.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$, οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $x - 2y - 1 = 0$.
- 931.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , με $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 1 = 0$.
- 932.** Αν ε είναι η εφαπτομένη της παραβολής $y = x^2$ στο σημείο της $A(-2, 4)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ε .
- 933.** Αν η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f είναι περιττή και η κλίση της στο σημείο 2 είναι $-\frac{2}{3}$, να βρείτε την κλίση της f στο σημείο -2 .
- 934.** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση $f(2x - 1) - 3x + 2f(x - 2) = 3(x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι:

- i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f'(2x-1) + f'(x-2) = 3$.
- ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-3, f(-3))$ είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 3y - 15 = 0$.
- 935.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια θέση x_0 , στην οποία οι εφαπτόμενες ευθείες των γραφικών παραστάσεων των f, g να είναι παράλληλες.
- 936.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \frac{a^2+1}{4}x^2, a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f κόβει τον άξονα των x σε δύο σημεία και ότι οι εφαπτόμενες σε αυτά σχηματίζουν με τον άξονα Ox γωνίες παραπληρωματικές.
- 937.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης (c) της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{16}{9}$ τ.μ.
- 938.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) + g^2(x) + 2xf(x) + 2g(x)\eta\mu x + 2\eta\mu^2 x = 0$ να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλες και σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.
- 939.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 + 2)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- 940.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}$. Αν είναι (ε) η εφαπτομένη της C_h σε ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ να αποδείξετε ότι η (ε) σχηματίζει με τον άξονα αυτό γωνία $\frac{\pi}{4}$.
- 941.** Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2003 + |\ln(x-1)|$. Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2003 . Αν η ευθεία με εξίσωση $y = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B , να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα A και B είναι κάθετες.

(2003)

- 942.** Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f(0)=3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2+x+2} = 2$$

Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x+3y-2=0$, να βρείτε την f .

943. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2+x+2} = 3$.

Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 3)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: x+y-2=0$, να βρείτε τον τύπο της f .

944. Αν $f(x) = ax^2 + bx$, να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο της $A(1, 5)$ κλίση 8.

945. Της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x - 12$ να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

946. Αν $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 3$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f στο σημείο της $A(-1, 1)$ να δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $y = 8x + 1$.

947. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x - 2$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, -10)$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x - 3y + 1 = 0$.

948. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$ διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0), A(1, 1)$ και οι εφαπτομένες της στα σημεία αυτά είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

949. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \frac{\beta}{x}$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = 1$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 2$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

950. Αν $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & x < 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η

γραφική της παράσταση έχει στο σημείο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $x + 4y - 4 = 0$.

Εφαπτομένη που διέρχεται από γνωστό σημείο που δεν είναι το σημείο επαφής

- 951.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 2)$.
- 952.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = x^3 + x^2 + x$ που άγεται από το σημείο $A(0, 1)$.
- 953. i.** Να λύσετε την εξίσωση $\ln x - \frac{2}{x} + 2 = 0$.
- ii.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 954.** Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ για τον οποίο οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + \kappa$ και $g(x) = \ln x$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι κάθετες.
- 955.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \ln x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , με $\xi \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 956.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\ln x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 957.** Έστω $f(x) = x^2 + ax + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
- i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- ii.** Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε οι εφαπτομένες του a . ερωτήματος να είναι κάθετες μεταξύ τους.
- 958.** Να αποδείξετε ότι από ένα τυχαίο σημείο M της ευθείας $y = -2$ άγονται δύο εφαπτομένες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους.
- 959. i.** Να αποδείξετε ότι από το σημείο $P(a, \beta)$ με $\beta < a^2$ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της παραβολής $y = x^2$.
- ii.** Να αποδείξετε ότι αν το σημείο P του **i.** ερωτήματος, είναι σημείο της ευθείας $y = -\frac{1}{4}$, τότε οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

960. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$, με $\alpha^2 < 3\beta$.

- i. Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχει εφαπτομένη ευθεία της C_f . κάθετη στην ευθεία $\delta: y = 3x$.
- ii. Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο εφαπτόμενες ευθείες της C_f .

961. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + e^x$. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο $A(\alpha, 0)$ του άξονα $x'x$ διέρχεται ακριβώς μία εφαπτομένη ευθεία της C_f .

962. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-x} + x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι:

- α. η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- β. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- γ. υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

963. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

- α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu^2 x) - 1}{\eta \mu x}$

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2017x) - 1}{x} = 4034f'(0)$

- β. Αν επιπλέον για την f ισχύει

$$f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της.

- γ. Αν $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1, 3)$

Η ευθεία ε εφάπτεται στην C_f

964. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $\varepsilon: y = 2x + 3$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ στο σημείο $B(1, g(1))$.

965. Έστω συνάρτηση $g(x) = f(e^{x-1} + 2x)$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(3, f(3))$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη C_g στο σημείο $N(1, g(1))$.

966. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) + xf(-x)$$

Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ εφάπτεται στη C_f στο $x_1 = 1$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x = -1$.

967. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι ευθείες $y = 40x - 55$ και $y = -4x + 3$ είναι αντιστοίχως οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \circ g$ και g στα σημεία τους με τετμημένη $x_0 = 2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = -5$.

968. Εστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$f(\ln x) = e^{x-1} - \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση εφάπτεται του άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

969. Αν η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f στο $x_0 = -1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^2(x) - 1}{x + 1}$.

970. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y = x - 3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ και $g(x) = f(x \cdot e^x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f'(0), g'(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 3$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g στο σημείο $M(0, f(0))$.

971. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο σημείο x_0 για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - kx - \lambda}{x - x_0} = 0$, όπου k, λ συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Να

αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = kx + \lambda$ εφάπτεται στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f .

972. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\ln x$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία που τέμνουν τους άξονες είναι κοινή τους εφαπτομένη.

- 973.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 3$, $x > 0$ και το σημείο $A(1, f(1))$. Αν η ευθεία $y = 2x + 4$ είναι εφαπτομένη της C_f στο A , να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- 974.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ είναι εφαπτομένη της C_f με $f(x) = \ln x + 2$.
- 975.** Αν C_1, C_2 οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και $g(x) = x^2 + 2x - 4$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_1 στο σημείο $A(3, f(3))$ εφάπτεται και στη C_2 .
- 976.** Αν $f(x) = 4x - x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{8x}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ και έπειτα να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g . Ποιο είναι το σημείο επαφής;
- 977.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = -x + \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία ε εφάπτεται της C_f .
- 978.** Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $\delta: 2x - y + 3 = 0$ είναι εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + (\alpha + 2)x - 6$.
Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου επαφής;
- 979.** Αν C_f, C_g είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ και $g(x) = 2x^2 + 6x - \alpha$ αντιστοίχως, να βρείτε για ποια τιμή του α η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ εφάπτεται και στη C_g .
- 980.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -(x + \alpha)^2$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αν η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της g , να βρείτε την τιμή του α και το σημείο επαφής της ε με τη γραφική παράσταση της g .
- 981.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = x^2 - x + \alpha$.
Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ να εφάπτεται και στη C_g .

- 982.** Να βρείτε τον $\alpha > 0$, ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$ να εφάπτεται της ευθείας $y = x$.
- 983.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τον α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ να είναι εφαπτομένη και της γραφικής παράστασης της g .
- 984.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \alpha \frac{\ln(x+e)}{x+e}$, όπου $\alpha \neq 0$. Να βρείτε:
- Τις συντεταγμένες σημείου M της γραφικής παράστασης της f στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη (ε) παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = x + 17$
 - Την τιμή του α έτσι ώστε η (ε) του προηγούμενου ερωτήματος να εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln(x+e)$ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της g .
- 985.** Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \ln x + x$, $x > 0$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (1, e^2)$ ώστε η γραφική παράσταση της f να εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: y = 2x + 1$.

Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο

- 986.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.
- 987.** Δίνονται οι $f(x) = \ln x + \alpha$ και $g(x) = x^2 + \beta x$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
- 988.** Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - \alpha x$ και $g(x) = e^x - \beta$ να έχουν στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ κοινή εφαπτομένη.
- 989.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - \alpha x^2 - 4$ και $g(x) = \beta x^2 - (\alpha + 5)x$.
Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

- 990.** Αν $f(x) = ax^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = e^{x-1}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f, C_g να δέχονται στο κοινό τους σημείο $A(1, y_0)$ κοινή εφαπτομένη της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.
- 991.** Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι C_f, C_g των $f(x) = \gamma + x^x$ και $g(x) = ax^2 + \beta x + 2$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $M(1, 2)$.
- 992.** Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{ax^2 + x + 2}{x + 1}$ και $g(x) = x^2 + x + \beta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 3.
- 993.** Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x}$ και $g(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 2.

Κοινή εφαπτομένη όχι κατ' ανάγκη σε κοινό σημείο

- 994.** Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.
- 995.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x^2 + 2x$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g .
- 996.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x + x$, $g(x) = \frac{3x^2 + 12}{4}$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \lambda - 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ε να είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g .
- 997.** **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 8x - 8$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.
ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = e^x$ έχουν κοινή εφαπτομένη.
- 998.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -x^2$.
 Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_1 \in (-2, 0)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ της γραφικής παράστασης της f να ταυτίζεται με την εφαπτομένη σε σημείο $B(x_2, g(x_2))$ της γραφικής παράστασης της g .

Ρυθμός Μεταβολής

Ορισμός

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x στη θέση x_0 , την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 , δηλαδή τον αριθμό $f'(x_0)$.

Παρατηρήσεις :

1. Ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος $S(t)$ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η ταχύτητα $v(t_0)$.

Δηλαδή :

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η επιτάχυνση $a(t_0)$.

Δηλαδή :

$$a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$$

2. Στην οικονομία το κόστος παραγωγής $K(x)$, η είσπραξη $E(x)$ και το κέρδος $P(x) = E(x) - K(x)$ εκφράζονται ως συναρτήσεις της ποσότητας x που παράγεται.

- Το πηλίκο

$$\frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}$$

λέγεται μέσο κόστος, ενώ το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0} = K'(x_0)$$

λέγεται οριακό κόστος ή ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(x)$ ως προς x για $x = x_0$.

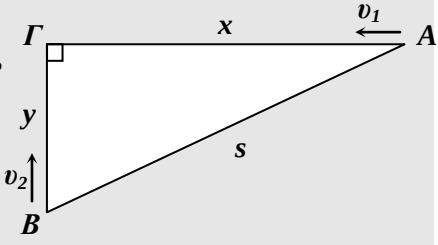
Ανάλογα ορίζονται :

- Οριακή είσπραξη : $E'(x_0)$
- Οριακό κέρδος : $P'(x_0)$

Εφαρμογές

215.

Δύο αυτοκίνητα Α, Β κινούνται κατά μήκος δύο κάθετων δρόμων ΑΓ και ΒΓ, προς το Γ, με ταχύτητες $v_1 = 100\text{Km/h}$ και $v_2 = 50\text{Km/h}$ αντιστοίχως. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της μεταξύ τους απόστασης ΑΒ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το όχημα Α απέχει από τη διασταύρωση 400m και το όχημα Β 300m.



Λύση

Έστω $AG = x$, $BG = y$ και $AB = s$.

Επειδή τα παραπάνω μεγέθη μεταβάλλονται με τον χρόνο θεωρούμε τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $s(t)$ που εκφράζουν κάθε χρονική στιγμή τα μεγέθη x , y και s .

Επειδή τα αυτοκίνητα πλησιάζουν το Γ τα $x(t)$ και $y(t)$ μειώνονται άρα θα έχουν αρνητικό ρυθμό μεταβολής, οπότε :

$$x'(t) = -100\text{Km/h} \text{ και } y'(t) = -50\text{Km/h}$$

Τη χρονική στιγμή, έστω t_0 , το όχημα Α απέχει από το Γ απόσταση 400m = 0,4Km άρα

$$x(t_0) = 0,4$$

ενώ το όχημα Β απέχει από το Γ απόσταση 300m = 0,3Km άρα

$$y(t_0) = 0,3$$

Επομένως τα δεδομένα και τα ζητούμενα σε γλώσσα και ορολογία Μαθηματικής Ανάλυσης είναι :

Δεδομένα	Ζητούμενα
$x'(t) = -100$ $y'(t) = -50$ $x(t_0) = 0,4$ $y(t_0) = 0,3$	$s'(t_0)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ λόγω του Πυθαγόρειου Θεωρήματος ισχύει :

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1) παίρνουμε :

$$2s(t)s'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \Leftrightarrow s(t)s'(t) = x(t)(-100) + y(t)(-50)$$

Θέτοντας $t = t_0$ έχουμε :

Μεθοδολογία

Για τη λύση προβλημάτων που αναφέρονται στο ρυθμό μεταβολής δύο μεταβλητών μεγεθών x και y , συνήθως ακολουθούμε τα παρακάτω :

- ♦ Βρίσκουμε τη συνθήκη που συνδέει τις μεταβλητές x και y (αν δε δίνεται).
- ♦ Επειδή συνήθως τα προβλήματα του ρυθμού μεταβολής αναφέρονται σε φαινόμενα που βρίσκονται σε εξέλιξη, δηλαδή τα μεγέθη x , y μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου, θεωρούμε τις μεταβλητές x, y ως συναρτήσεις του χρόνου και τις συμβολίζουμε με $x(t)$, $y(t)$.
- ♦ Παραγωγίζουμε ως προς t τα μέλη των ισοτήτων οπότε έχουμε σχέση με $x'(t)$ και $y'(t)$.
- ♦ Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή τότε θεωρούμε αυτή ως t_0 (αν δε δίνεται), οπότε θέτοντας όπου $t = t_0$ βρίσκουμε τα $x'(t_0)$ και $y'(t_0)$.

$$s(t_0)s'(t_0) = -100x(t_0) - 50y(t_0) \Leftrightarrow s(t_0)s'(t_0) = -100 \cdot 0,4 - 50 \cdot 0,3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s(t_0)s'(t_0) = -40 - 15 \Leftrightarrow s(t_0)s'(t_0) = -55 \quad (2)$$

Από την (1) για $t = t_0$ βρίσκουμε :

$$s^2(t_0) = x^2(t_0) + y^2(t_0) \Leftrightarrow s^2(t_0) = 0,4^2 + 0,3^2 \Leftrightarrow s^2(t_0) = 0,16 + 0,09 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s^2(t_0) = 0,25 \Leftrightarrow s(t_0) = 0,5$$

Οπότε από (2) είναι : $0,5 \cdot s'(t_0) = -55 \Leftrightarrow s'(t_0) = -110 \text{ Km/h}$

Παρατηρήσεις

- ♦ Ρυθμός μεταβολής και ταχύτητα ενός μεγέθους s είναι το ίδιο πράγμα και σημαίνει :
 - Την παράγωγο $s'(t)$ ή
 - Την $s'(t_0)$ αν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 .
- ♦ Ο ρυθμός μεταβολής εκφράζεται με θετικό αριθμό αν το μέγεθος αυξάνεται και με αρνητικό αριθμό αν το μέγεθος ελαττώνεται.
- ♦ Όλα τα μεγέθη πρέπει να εκφράζονται με βάση κοινές μονάδες μέτρησης.

216.

Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $40 \text{ cm}^3/\text{sec}$.

- α. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι $r = 20 \text{ cm}$.
- β. Να βρείτε την ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η επιφάνειά της αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

Λύση

- α. Ο όγκος V και το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας δίνονται από τους τύπους :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ και } E = 4\pi r^2$$

Ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ως συναρτήσεις του χρόνου είναι :

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \text{ και } E(t) = 4\pi [r(t)]^2$$

Ζητείται ο ρυθμός μεταβολής (αύξηση) της επιφάνειας τη χρονική στιγμή, έστω t_0 , (δηλαδή το $E'(t_0)$) που η ακτίνα r είναι 20 cm , δηλαδή όταν $r(t_0) = 20 \text{ cm}$. Άρα έχουμε :

Εμβαδά και Όγκοι

♦ Σφαίρα



$$E = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

♦ Κώνος

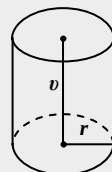


$$E_{\pi} = \pi r l$$

$$E_{\text{ολ}} = \pi r l + \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

♦ Κύλινδρος



$$E_{\pi} = 2\pi r v$$

$$E_{\text{ολ}} = 2\pi r v + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 v$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3$ $E(t) = 4\pi[r(t)]^2$ $V'(t) = 40$ $r(t_0) = 20$	$E'(t_0)$

Έχουμε $V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi[r(t)]^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3[r(t)]^2 \cdot r'(t) = 4\pi \cdot [r(t)]^2 \cdot r'(t)$.

Αλλά $V'(t) = 40$, επομένως είναι $40 = 4\pi \cdot [r(t)]^2 \cdot r'(t)$ και για $t = t_0$ έχουμε :

$$40 = 4\pi \cdot [r(t_0)]^2 \cdot r'(t_0) \Leftrightarrow 40 = 4\pi \cdot 20^2 \cdot r'(t_0) \Leftrightarrow r'(t_0) = \frac{40}{4\pi \cdot 20^2} \Leftrightarrow r'(t_0) = \frac{10}{\pi \cdot 20^2}$$

Είναι :

$$E'(t) = (4\pi[r(t)]^2)' = 4\pi \cdot 2r(t) \cdot r'(t) = 8\pi \cdot r(t) \cdot r'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε :

$$E'(t_0) = 8\pi \cdot r(t_0) \cdot r'(t_0) \Leftrightarrow E'(t_0) = 8\pi \cdot 20 \cdot \frac{10}{\pi \cdot 20^2} \Leftrightarrow E'(t_0) = 4\text{cm}^2 / \text{sec}$$

- β.** Τη χρονική στιγμή, έστω t_1 , που η επιφάνεια αυξάνεται με ρυθμό $2\text{cm}^2/\text{sec}$ είναι $E'(t_1) = 2$, οπότε :

Δεδομένα	Ζητούμενα
$V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3$ $E(t) = 4\pi[r(t)]^2$ $V'(t) = 40$ $E'(t_1) = 2$	$r(t_1)$

Έχουμε $V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi[r(t)]^3\right)' = 4\pi \cdot [r(t)]^2 \cdot r'(t)$.

Αλλά $V'(t) = 40$, οπότε $40 = 4\pi \cdot [r(t)]^2 \cdot r'(t) \Leftrightarrow 10 = \pi \cdot [r(t)]^2 \cdot r'(t)$.

Για $t = t_1$ έχουμε :

$$10 = \pi \cdot [r(t_1)]^2 \cdot r'(t_1) \Leftrightarrow r'(t_1) = \frac{10}{\pi \cdot [r(t_1)]^2} \quad (1)$$

$$E'(t) = (4\pi[r(t)]^2)' \Leftrightarrow E'(t) = 8\pi \cdot r(t) \cdot r'(t)$$

Για $t = t_1$ είναι :

$$E'(t_1) = 8\pi \cdot r(t_1) \cdot r'(t_1) \Leftrightarrow 2 = 8\pi \cdot r(t_1) \cdot r'(t_1) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2 = 8\pi \cdot r(t_1) \cdot \frac{10}{\pi[r(t_1)]^2} \Leftrightarrow$$

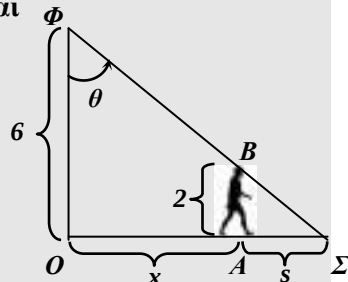
$$\Leftrightarrow 2 = \frac{80}{r(t_1)} \Leftrightarrow r(t_1) = \frac{80}{2} \Leftrightarrow r(t_1) = 40\text{cm}$$

217.

Ένας μπασκεμπολίστας ύψους $AB = 2\text{m}$ απομακρύνεται από τη βάση O ενός φανοστάτη ύψους $OF = 6\text{m}$ με ταχύτητα 1m/sec .

α. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος του ;

β. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο ίσκιος του ανθρώπου είναι ίσος με 1m ;



Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $x(t)$, $s(t)$, $\theta(t)$ που εκφράζουν κάθε χρονική στιγμή t τα

μεγέθη $x = OA$, $s = AS$ και $\theta = \angle OFS$ αντιστοίχως.

Τότε η ταχύτητα του ανθρώπου είναι $x'(t) = 1\text{m/sec}$

Επομένως έχουμε :

α.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$AB = 2$ $OF = 6$ $x'(t) = 1$	$s'(t)$

Από την ομοιότητα των τριγώνων $OF\Sigma$ και $AB\Sigma$ προκύπτει η σχέση

$$\frac{OS}{AS} = \frac{OF}{AB} \quad \text{η οποία γράφεται :}$$

$$\frac{x(t) + s(t)}{s(t)} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x(t) + s(t) = 3s(t) \Leftrightarrow x(t) = 2s(t) \quad (1)$$

$$\text{Οπότε παραγωγίζοντας βρίσκουμε : } x'(t) = 2s'(t) \Leftrightarrow 1 = 2s'(t) \Leftrightarrow s'(t) = \frac{1}{2} \text{ m/sec}$$

β.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$AB = 2$ $OF = 6$ $x'(t) = 1$ $s(t_0) = 1$	$\theta'(t_0)$

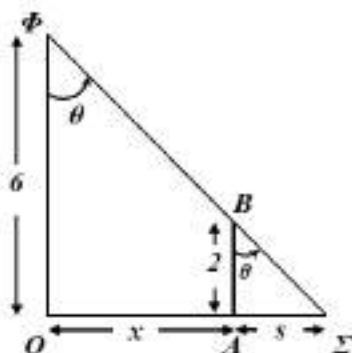
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Sigma$ έχουμε :

$$\epsilon\phi\theta = \frac{AS}{AB} \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta(t) = \frac{s(t)}{2}$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{1}{2} s'(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = \frac{1}{2} s'(t) \sin^2\theta(t) \stackrel{\alpha)}{\Leftrightarrow} \theta'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin^2\theta(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta'(t) = \frac{1}{4} \sin^2\theta(t)$$



Θέτοντας $t = t_0$ βρίσκουμε : $\theta'(t_0) = \frac{1}{4} \sin^2 \theta(t_0)$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Sigma$ έχουμε :

$$\sin \theta(t_0) = \frac{AB}{B\Sigma} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (s(t_0))^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Επομένως : } \theta'(t_0) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \text{ rad / sec}$$

218.

Σημείο M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$$y = \eta \mu x, \quad x \in [0, \pi]$$

Όταν το M περνάει από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ τότε η ταχύτητα v_1 απομάκρυνσης του από τον άξονα $y'y$ είναι 2 μονάδες ανα δευτερόλεπτο. Να βρείτε την ταχύτητα v_2 απομάκρυνσής του από τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το M περνάει από το A.

Λύση

Οι συντεταγμένες (x, y) του σημείου M της καμπύλης $y = \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$, είναι συναρτήσεις του χρόνου t , $t \geq 0$:

$$M(x(t), y(t))$$

με

$$y(t) = \eta \mu x(t), \quad x(t) \in [0, \pi]$$

και

$$y'(t) = x'(t) \cdot \sigma \nu x(t) \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή, έστω t_0 , που το σημείο M διέρχεται από το A, είναι :

$$x(t_0) = \frac{\pi}{6}, \quad x'(t_0) = v_1 \quad \text{και} \quad y'(t_0) = v_2$$

Για $t = t_0$ η (1) γίνεται :

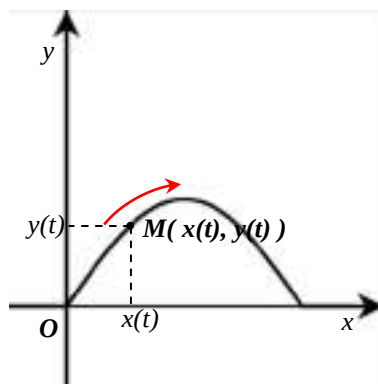
$$y'(t_0) = x'(t_0) \cdot \sigma \nu x(t_0)$$

$$\text{Άρα } v_2 = 2 \sigma \nu \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ μονάδες / sec.}$$

Παρατήρηση

Αν ένα σημείο ξεκινά από την αρχή των αξόνων O τότε η ταχύτητα απομάκρυνσης του από τον άξονα

- $y'y$ είναι $v_1 = x'(t)$
- $x'x$ είναι $v_2 = y'(t)$



219.

Σημείο M κινείται στην παραβολή $y = 2x^2$, $x > 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι 3cm/sec .

α. Τη χρονική στιγμή που η απόσταση OM του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{68}\text{ cm}$, να βρείτε :

- i.** το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης.
- ii.** το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις δύο πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο OM .
- iii.** το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \angle MOx$.

β. Να βρείτε τη θέση του σημείου M όταν οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι.

Λύση

Οι συντεταγμένες (x, y) του σημείου M της παραβολής $y = 2x^2$, $x > 0$ είναι συναρτήσεις του χρόνου t .

Οπότε έχουμε : $M(x(t), y(t))$
με $y(t) = 2x^2(t)$, $x(t) > 0$ και $x'(t) = 3\text{cm/sec}$.

α. Τη χρονική στιγμή, έστω t_0 , είναι :

$$\begin{aligned} (OM) &= \sqrt{68} \Leftrightarrow \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} = \sqrt{68} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(t_0) + y^2(t_0) = 68 \Leftrightarrow x^2(t_0) + [2x^2(t_0)]^2 = 68 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(t_0) + 4x^4(t_0) - 68 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } x^2(t_0) = \omega > 0, \text{ οπότε : } 4\omega^2 + \omega - 68 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-1 \pm 33^{\omega > 0}}{8} \Leftrightarrow \omega = 4$$

$$\text{Άρα } x^2(t_0) = 4 \Leftrightarrow x(t_0) = 2 \text{ ή } x(t_0) = -2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$\text{Επομένως } \mathbf{x(t_0) = 2 \text{ (1)}}$$

i. Είναι $y'(t) = (2x^2(t))' = 4x(t) \cdot x'(t) = 4x(t) \cdot 3 = 12x(t)$.

$$\text{Για } t = t_0 \text{ έχουμε : } y'(t_0) = 12x(t_0) \Leftrightarrow y'(t_0) = 12 \cdot 2 \Leftrightarrow \mathbf{y'(t_0) = 24\text{cm/sec}}$$

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ είναι :

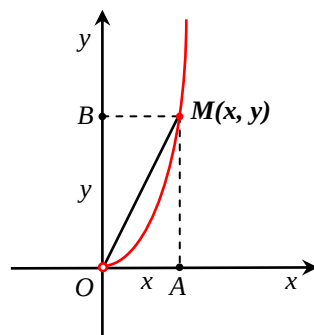
$$E(t) = x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow E(t) = x(t) \cdot 2x^2(t) \Leftrightarrow E(t) = 2x^3(t)$$

$$\text{Οπότε } E'(t) = (2x^3(t))' = 6x^2(t) \cdot x'(t) = 6x^2(t) \cdot 3 = 18x^2(t).$$

$$\text{Για } t = t_0 \text{ έχουμε : } E'(t_0) = 18x^2(t_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E'(t_0) = 18 \cdot 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E'(t_0) = 72\text{cm}^2 / \text{sec}}$$

iii. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM έχουμε :



$$\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{2x^2(t)}{x(t)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t) = 2x(t)$$

Με παραγωγή έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))' = (2x(t))'$$

$$\frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = 2x'(t) \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta'(t) = 6 \cdot \sin^2\theta(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε $\theta'(t_0) = 6 \cdot \sin^2\theta(t_0)$.

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM

επειδή τη χρονική στιγμή t_0 είναι $(OM) = \sqrt{68}$,

$$\text{έχουμε : } \sin\theta(t_0) = \frac{x(t_0)}{(OM)} = \frac{2}{\sqrt{68}}$$

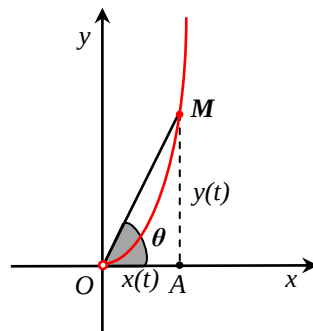
$$\text{Άρα } \theta'(t_0) = 6 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{68}} \right)^2 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = 6 \cdot \frac{4}{68} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{6}{17} \text{ rad / sec}$$

β. Είναι $y'(t) = (2x^2(t))' \Leftrightarrow y'(t) = 4x(t) \cdot x'(t)$ (2)

Τη χρονική στιγμή t κατά την οποία είναι $y'(t) = x'(t) = 3$ από τη σχέση (2)

$$\text{παίρνουμε } 3 = 4x(t) \cdot 3 \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Οπότε } y(t) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}. \text{ Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το } M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).$$



220.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$. Ένα υλικό σημείο $M(a, f(a))$, $a > 1$

κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα $4a$ cm/sec. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο A , τότε :

α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A , τη χρονική στιγμή t_0 , που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(e, f(e))$

β. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ , τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$\theta'(t_0) = \frac{12e}{e^2 + 1} \text{ rad / sec}$$

Λύση

α. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο M είναι :

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Για $y = 0$ έχουμε :

$$-f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow -\frac{1}{\ln \alpha} = -\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = x - \alpha \Leftrightarrow x = \alpha(1 + \ln \alpha)$$

Άρα $A(\alpha(1 + \ln \alpha), 0)$.

Την τυχαία χρονική στιγμή t η τετμημένη του σημείου M είναι $\alpha(t)$ και ισχύει $\alpha'(t) = 4\alpha(t)$

Η τετμημένη του σημείου A είναι : $x_A(t) = \alpha(t)(1 + \ln \alpha(t))$. Οπότε :

$$x'_A(t) = \alpha'(t)(1 + \ln \alpha(t)) + \alpha(t) \frac{1}{\alpha(t)} \alpha'(t)$$

$$\Leftrightarrow x'_A(t) = \alpha'(t)(1 + \ln \alpha(t)) + \alpha'(t)$$

$$\Leftrightarrow x'_A(t) = \alpha'(t)(2 + \ln \alpha(t))$$

$$\Leftrightarrow x'_A(t) = 4\alpha(t)(2 + \ln \alpha(t))$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = e$ οπότε :

$$x'_A(t_0) = 4\alpha(t_0)(2 + \ln \alpha(t_0)) = 4e(2 + \ln e) = 12e \text{ cm/sec}$$

β. Είναι : $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\theta = f'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}$

Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι :

$$\varepsilon\theta(t) = -\frac{1}{\alpha(t) \ln^2 \alpha(t)}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{\alpha'(t) \ln^2 \alpha(t) + 2\alpha'(t) \ln \alpha(t)}{\alpha^2(t) \ln^4 \alpha(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{\alpha'(t) \ln \alpha(t) (\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha^2(t) \ln^4 \alpha(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{\alpha'(t) (\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha^2(t) \ln^3 \alpha(t)}$$

$$\stackrel{\alpha'(t)=4\alpha(t)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{4\alpha(t) (\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha^2(t) \ln^3 \alpha(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{4(\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha(t) \ln^3 \alpha(t)}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{4(\ln \alpha(t_0) + 2)}{\alpha(t_0) \ln^3 \alpha(t_0)} \stackrel{\alpha(t_0)=e}{=} = \frac{4(\ln e + 2)}{e \ln^3 e} = \frac{12}{e}$$

Όμως $\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} = 1 + \varepsilon \varphi^2 \theta(t_0)$ και

$$\varepsilon \varphi \theta(t_0) = -\frac{1}{\alpha(t_0) \ln^2 \alpha(t_0)} = -\frac{1}{e \ln^2 e} = -\frac{1}{e}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} = 1 + \left(-\frac{1}{e}\right)^2 = 1 + \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 + 1}{e^2}$$

$$\text{Επομένως: } \frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{12}{e} \Leftrightarrow \frac{e^2 + 1}{e^2} \theta'(t_0) = \frac{12}{e} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{12e}{e^2 + 1}$$

Θυμηθείτε

$$\begin{aligned} \eta \mu^2 \theta + \sigma \nu \nu^2 \theta &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\eta \mu^2 \theta}{\sigma \nu \nu^2 \theta} + \frac{\sigma \nu \nu^2 \theta}{\sigma \nu \nu^2 \theta} &= \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 \theta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varepsilon \varphi^2 \theta + 1 &= \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 \theta} \end{aligned}$$

221.

Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$.

Όταν το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(-1, \sqrt{3})$ η τετμημένη του ελαττώνεται εκείνη τη χρονική στιγμή με ρυθμό 6 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική αυτή στιγμή.

Λύση

Οι μεταβλητές x και y είναι συναρτήσεις του χρόνου t δηλαδή $x = x(t)$, $y = y(t)$ οπότε η εξίσωση του κύκλου γράφεται:

$$x^2(t) + y^2(t) = 4 \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή, έστω t_0 , που το σώμα διέρχεται από το σημείο

$A(-1, \sqrt{3})$ είναι

$$x(t_0) = -1, \quad y(t_0) = \sqrt{3} \quad \text{και} \quad x'(t_0) = -6.$$

Με παραγωγή (ως προς t) από τη σχέση

(1) διαδοχικά έχουμε:

$$(x^2(t) + y^2(t))' = (4)'$$

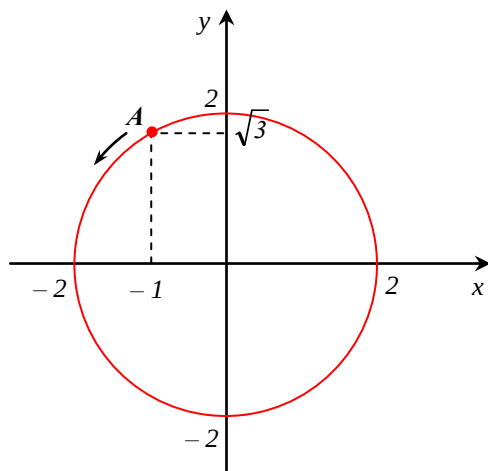
$$2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$$

$$x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) = 0$$

Για $t = t_0$ είναι:

$$x(t_0) \cdot x'(t_0) + y(t_0) \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot (-6) + \sqrt{3} \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot y'(t_0) = -6$$

$$\Leftrightarrow y'(t_0) = \frac{-6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y'(t_0) = \frac{-6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y'(t_0) = -2\sqrt{3}$$



Άρα η τεταγμένη του σημείου Α ελαττώνεται με ρυθμό $2\sqrt{3}$ μονάδες το δευτερόλεπτο.

222.

Μια κυκλική πισίνα έχει ακτίνα $r = 20\text{m}$. Ένας άνθρωπος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από αυτή με ταχύτητα $v = 50\text{m/min}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της χορδής ΑΠ όταν το τόξο που έχει διανύσει ο πεζοπόρος είναι $\widehat{ΑΠ} = 60^\circ$.

Λύση

Έστω $s(t)$ το μήκος του τόξου που έχει διανύσει ο πεζοπόρος μετά από χρόνο t .

Τότε είναι : $v = s'(t) = 50\text{m/min}$

Αν $\theta(t)$ η γωνία (σε rad) που διαγράφει η

ακτίνα ΟΑ (δηλαδή το τόξο $\widehat{ΑΠ}$ που έχει διανύσει ο πεζοπόρος) μετά από χρόνο t , και $L(t)$ το μήκος της χορδής ΑΠ (μετά από χρόνο t), τότε ζητάμε το $L'(t_0)$ όπου t_0 η χρονική

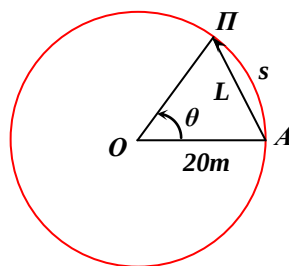
στιγμή κατά την οποία η γωνία θ γίνεται $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{δηλαδή : } \theta(t_0) = \frac{\pi}{3}$$

Ως γνωστόν η σχέση που συνδέει το μήκος του τόξου s και της γωνίας θ (σε rad) είναι :

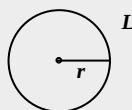
$$s = r\theta \text{ (όπου } r \text{ η ακτίνα)}$$

Επομένως έχουμε :



Κύκλος & κυκλικός τομέας

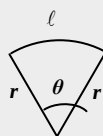
♦ Κύκλος



$$L = 2\pi r$$

$$E = \pi r^2$$

♦ Κυκλικός τομέας



$$l = \theta r, \quad \theta : \text{rad}$$

$$E = \frac{1}{2} \theta r^2, \quad \theta : \text{rad}$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$r = 20$ $s(t) = r \cdot \theta(t) = 20 \cdot \theta(t)$ $s'(t) = 50$ $\theta(t_0) = \frac{\pi}{3}$	$L'(t_0)$

Είναι : $s(t) = r \cdot \theta(t) \Leftrightarrow s(t) = 20 \cdot \theta(t) \Leftrightarrow \theta(t) = \frac{s(t)}{20} \quad (1)$

Φέρνουμε το απόστημα ΟΚ, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε :

$$\eta\mu \frac{\theta}{2} = \frac{AK}{20} \Leftrightarrow AK = 20\eta\mu \frac{\theta}{2}$$

Είναι :

$$L(t) = A\Pi \Leftrightarrow L(t) = 2AK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(t) = 2 \cdot 20\eta\mu \frac{\theta(t)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(t) = 40\eta\mu \frac{\theta(t)}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} L(t) = 40\eta\mu \frac{\frac{s(t)}{20}}{2} \Leftrightarrow L(t) = 40\eta\mu \frac{s(t)}{40}$$

Άρα

$$L'(t) = 40 \left(\eta\mu \frac{s(t)}{40} \right)' = 40 \sigma\upsilon\nu \frac{s(t)}{40} \left(\frac{s(t)}{40} \right)' = 40 \sigma\upsilon\nu \frac{s(t)}{40} \cdot \frac{1}{40} s'(t) = s'(t) \sigma\upsilon\nu \frac{s(t)}{40}$$

Αλλά $s'(t) = v = 50$, οπότε : $L'(t) = 50 \sigma\upsilon\nu \frac{s(t)}{40}$

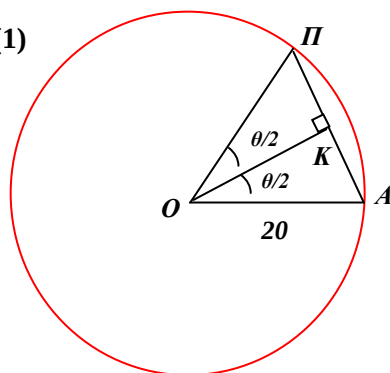
Για $t = t_0$: $L'(t_0) = 50 \sigma\upsilon\nu \frac{s(t_0)}{40}$

Από (1) για $t = t_0$ παίρνουμε : $s(t_0) = 20\theta(t_0) = 20 \frac{\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$

Επομένως :

$$L'(t_0) = 50 \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{20\pi}{3}}{40} \Leftrightarrow L'(t_0) = 50 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow L'(t_0) = 50 \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow L'(t_0) = 25\sqrt{3}$$

m/min



Ασκήσεις

999. Έστω ότι $f(t)$ είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου $t \geq 0$ και $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

(1996)

1000. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει :

$$f(e^x \eta \mu x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- i.** Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$
 - ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι $y = 2x + 2$
 - iii.** Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.
- 1001.** Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(2x, 0)$ και $B(0, e^x)$ με $x > 0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E όταν $x = 1 \text{ cm}$.
- 1002.** Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(x, 0)$ και $B(x, e^x)$ με $x > 0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 4 \text{ cm}$.
- 1003.** Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1, 0)$, $B(x, \ln x)$ και $\Gamma(x, 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x = 2 \text{ cm}$.
Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5 \text{ cm/sec}$.
- 1004.** Ένα κινητό M κινείται στην καμπύλη $C: y = e^x$ και η κλίση της καμπύλης σε ένα σημείο της A είναι 1. Καθώς το M περνάει από το σημείο A , η τετμημένη του x αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $\ell = (OM)$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

1005. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της παραβολής με εξίσωση $y = x^2 - 4x$, $x \geq 0$.

i. Τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το σημείο $A(1, -3)$, η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες / s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη στιγμή που διέρχεται από το A.

ii. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης.

1006. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2\text{m/sec}$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = vt$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος (δευτερόλεπτα).

i. Να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

ii. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m;

(1993)

1007. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Αν η τεταγμένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x = 4\text{cm}$, το ρυθμό μεταβολής:

i. της τεταγμένης y .

ii. της γωνίας θ που σχηματίζεται από τη διανυσματική ακτίνα OM και τον θετικό ημιάξονα Ox .

1008. Σημείο M κινείται επί της καμπύλης $y = x^2 + 1$ έτσι ώστε η προβολή του A στον ημιάξονα Ox να απομακρύνεται από το O με ταχύτητα 2m/sec. Αν B είναι η προβολή του M στον άξονα $y'y$, να βρείτε την ταχύτητα του B και το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $(OA) = 1\text{m}$.

1009. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και το σημείο $M(a, f(a))$ της C_f .

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο M .

ii. Για ποια τιμή του $a > 0$ η εφαπτομένη ε διέρχεται από την αρχή O των αξόνων;

iii. Αν το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με σταθερή ταχύτητα $v = 2\text{m/sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η εφαπτομένη ε στο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

1010. Ένα κινητό κινείται πάνω στην παραβολή $y = x^2 - 5$ και τη χρονική στιγμή t_0 , που περνά από το σημείο $A(3, 4)$ της παραβολής, η τεταγμένη του κινητού αυξάνεται με ρυθμό 30 μονάδες το sec.

- i. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 .
- ii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του κινητού από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 .

1011. Κινητό κινείται σε τροχιά με εξίσωση $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. Όταν το κινητό διέρχεται

από το σημείο $A\left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ η τετμημένη του x ελαττώνεται με ρυθμό

2cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

1012. Ένα κινητό A κινείται στην καμπύλη $C: y = \ln x$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $a(t)$ του σημείου A δίνεται από τον τύπο $a'(t) = 2a(t)$, να βρείτε :

- i. Το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής M της εφαπτομένης της C_f στο A με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη e .
- ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον άξονα $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το i. ερώτημα.

1013. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

- α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(6, f(6))$.
- β. Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f . Τη χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο $A(6, f(6))$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 μονάδες / s. Στη χρονική αυτή στιγμή να βρείτε :
 - i. Τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σώματος.
 - ii. Τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που βρίσκεται το σώμα.

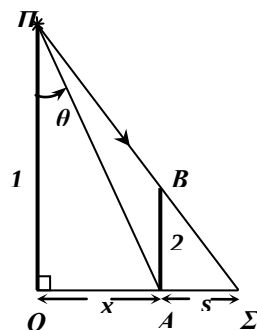
1014. Θεωρούμε δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$$f(x) = g'(x) \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} = \ln x^2 - 2x, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

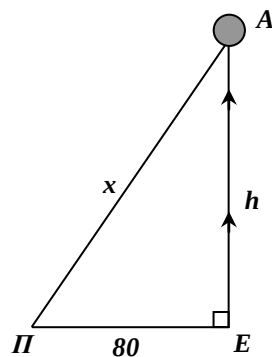
Ένα σημείο A κινείται στη C_f και η εφαπτομένη ε σε αυτό τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο M . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του A δίνεται από τη σχέση $a'(t) = -a(t)$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$

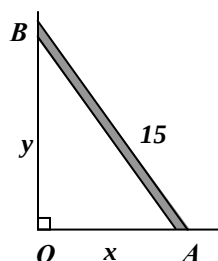
- ii.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ , που σχηματίζει η εφαιπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο A έχει τετμημένη $\frac{1}{2}$
- iii.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .
- iv.** Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι σταθερός.
- 1015.** Το μήκος ενός κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό -2cm/sec . Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ακτίνα του και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με 4π .
- 1016.** Ενός μεταβαλλόμενου ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ οι διαστάσεις του AB και $A\Delta$ μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο, ώστε η πρώτη να αυξάνεται με ρυθμό 24cm/s , ενώ η δεύτερη να ελαττώνεται με ρυθμό 12cm/s . Τη χρονική στιγμή t_0 που το ορθογώνιο είναι τετράγωνο με εμβαδόν αριθμητικά ίσο με την περίμετρό του, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου.
- 1017.** Το μήκος της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 12 ενώ τα μήκη των ίσων πλευρών του αυξάνονται με ρυθμό 1cm/sec . Τη χρονική στιγμή που το ύψος το οποίο αντιστοιχεί στη βάση έχει μήκος 8cm , να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής :
- i.** της περιμέτρου και του εμβαδού του τριγώνου.
- ii.** της γωνίας των ίσων πλευρών του τριγώνου.
- 1018.** Ένας άνθρωπος ύψους $AB = 2\text{m}$ απομακρύνεται από την κολόνα ενός προβολέα ύψους $OP = 12\text{m}$ με ταχύτητα 4m/sec .
- i.** Να βρείτε τον ρυθμό αύξησης του μήκους της σκιάς του.
- ii.** Να βρείτε την ταχύτητα του άκρου Σ της σκιάς του.
- iii.** Αν θ η γωνία $\widehat{OPA}$, να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο άνθρωπος απέχει 30m από την κολόνα του προβολέα.



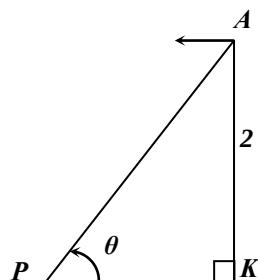
- 1019.** Ένα αερόστατο αρχικά βρίσκεται στο έδαφος στη θέση E και απέχει 80 m από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση Π . Το αερόστατο (A) ανεβαίνει με ρυθμό 50 m/min . Να βρείτε :
- τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΠA τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 60 m ,
 - τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΕΠΑ τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 60 m .



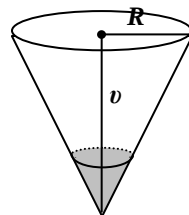
- 1020.** Μια δοκός μήκους 15 m στηρίζεται στο δάπεδο και στον τοίχο. Το κάτω άκρο της δοκού απέχει από τον τοίχο 4 m και αρχίζει να γλυστράει στο δάπεδο με ταχύτητα 2 m/sec . Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία γλυστράει στον τοίχο το πάνω μέρος της δοκού μετά από 4 sec .



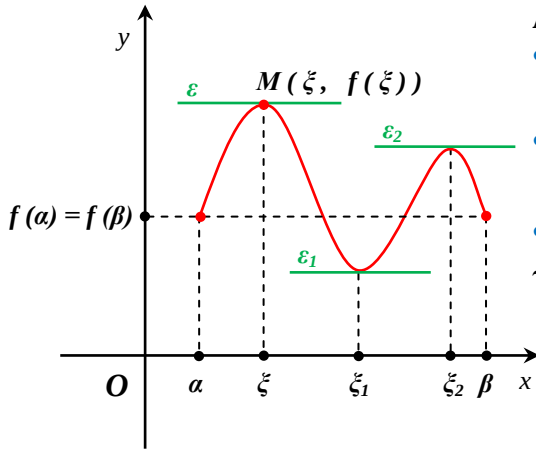
- 1021.** Το ραντάρ ενός αεροδρομίου βρίσκεται στη θέση P και παρακολουθεί συνεχώς ένα αεροπλάνο που βρίσκεται στη θέση A και πλησιάζει το αεροδρόμιο με ταχύτητα $v=300\text{ Km/h}$. Το αεροπλάνο βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το έδαφος ίση με 2 Km . Όταν η απόσταση PK γίνει ίση με 5 Km , το αεροπλάνο παίρνει σήμα να αρχίσει τη διαδικασία προσγείωσης. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ , όταν το αεροπλάνο πάρει σήμα για να προσγειωθεί.



- 1022.** Κωνική δεξαμενή με ακτίνα βάσης $R=3\text{ m}$ και ύψος $v=5\text{ m}$ γεμίζει από το πάνω μέρος με σταθερή παροχή νερού $1\text{ m}^3/\text{min}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας της στάθμης του νερού, τη χρονική στιγμή t_0 , όταν η ακτίνα αυτή είναι $r=2\text{ m}$.



Θ ε ώ ρ η μ α R o l l e



Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά το **Θ. Rolle** σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x' .

Παρατηρήσεις:

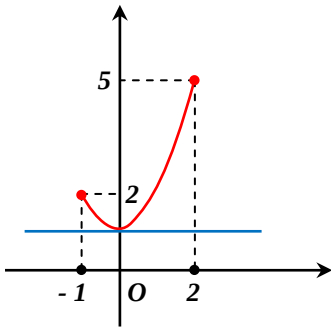
1. Το θεώρημα «θυμίζει» το **θεώρημα του Bolzano**.

Αλλά το **Θ. Bolzano** αναφέρεται σε ρίζα της f ενώ το **Θ. Rolle** σε ρίζα της f' .

2. Οι υποθέσεις του **Θ. Rolle** επικαλύπτονται. Διότι αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) θα είναι και συνεχής στο (a, β) . Έτσι η υπόθεση της συνέχειας χρειάζεται μόνο για τα άκρα του διαστήματος. Η «σωστή» διατύπωση των υποθέσεων θα ήταν:
« f παραγωγίσιμη στο (a, β) , f συνεχής στα a και β και $f(a) = f(\beta)$ ».

3. Το **αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει**.

Το συμπέρασμα του **Θ. Rolle** μπορεί να ισχύει, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις.



$$f(x) = x^2 + 1, \quad x \in [-1, 2]$$

Είναι $f(-1) \neq f(2)$ αλλά υπάρχει $\xi \in (-1, 2)$ (το $\xi = 0$), τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Υποθέσεις και συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle

223.

Να εξετάσετε αν για τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, στο διάστημα $[a, b]$. Στις περιπτώσεις που ισχύουν, να υπολογίσετε τα ξ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i. $f(x) = \sin^2 x - (1 - \eta\mu x)^2 + 3, \quad [0, \pi]$

ii. $f(x) = x^3 + 1, \quad [-1, 2]$

iii. $f(x) = |x - 2|, \quad [0, 4]$

iv. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 6, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad [-2, 2]$

Λύση

i. • Η f είναι **συνεχής στο $[0, \pi]$** ως άθροισμα συνεχών (τριγωνομετρικών) συναρτήσεων.

• Η f είναι **παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$** με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x \cdot (\sin x)' - 2(1 - \eta\mu x) \cdot (1 - \eta\mu x)' + 0 = \\ &= -2\sin x \cdot \eta\mu x + 2(1 - \eta\mu x) \cdot \sin x = 2\sin x \cdot (-\eta\mu x + 1 - \eta\mu x) = 2\sin x \cdot (1 - 2\eta\mu x) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1^2 - (1 - 0)^2 + 3 = 3 \\ f(\pi) &= (-1)^2 - (1 - 0)^2 + 3 = 3 \end{aligned} \right\} f(0) = f(\pi)$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος **Rolle**

οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\sin \xi (1 - \eta\mu \xi) = 0 \Leftrightarrow \sin \xi = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu \xi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{5\pi}{6}$$

ii. Είναι:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 1 = 0 \\ f(2) &= 2^3 + 1 = 9 \end{aligned} \right\} f(-1) \neq f(2)$$

Άρα **δεν ισχύουν** οι υποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο $[-1, 2]$.

Παρατήρηση:

Παρατηρήστε ότι ενώ δεν ισχύουν οι υποθέσεις του **th. Rolle** η $f'(x) = 3x^2$ μηδενίζεται για $\xi = 0 \in (-1, 2)$.

iii. Είναι: $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} -x + 2 & \text{αν } x < 2 \\ x - 2 & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 2 \in (0, 4)$, άρα **δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 4)$.**

Επομένως **δεν ισχύουν** οι υποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο $[0, 4]$.

iv. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x^3) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 6) = 6$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0 \in [-2, 2]$, άρα **δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$.**

Επομένως **δεν ισχύουν** οι υποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο $[-2, 2]$.

224.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + \beta x - \gamma, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a , β και γ , ώστε να ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

β. Για τις τιμές των a , β και γ που βρήκατε στο α. ερώτημα να βρείτε το σημείο του διαστήματος $(-1, 1)$ που προκύπτει από το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle.

Λύση

α. • Για κάθε $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $f'(x) = 2ax - 3$.

• Για κάθε $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $f'(x) = 2x + \beta$.

Επομένως για να ικανοποιεί η f τις προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[-1, 1]$ πρέπει και αρκεί να ισχύουν:

♦ Η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

♦ Η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

♦ $f(-1) = f(1)$

Έχουμε:

♦ Η f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 - 3x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \beta x - \gamma) = -\gamma = f(0)$$

$$\text{Άρα πρέπει } -\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = -1 \quad (1)$$

♦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 - 3x + 1 - (-\gamma)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 - 3x + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax - 3)}{x} = -3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \beta x - \gamma - (-\gamma)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + \beta)}{x} = \beta$$

$$\text{Άρα πρέπει } \beta = -3 \quad (2)$$

♦ $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + 3 + 1 = 1 + \beta - \gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha + 4 = 1 - 3 + 1 \Leftrightarrow \alpha = -5$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι: $\alpha = -5$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$.

β. Για $\alpha = -5$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$ έχουμε: $f'(x) = \begin{cases} -10x - 3 & \text{αν } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

Από το **Θ. Rolle** για την f στο $[-1, 1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

• Αν $\xi \in (-1, 0)$ τότε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -10\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{-3}{10} \in (-1, 0)$, δεκτή.

• Αν $\xi \in [0, 1)$ τότε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2} \notin [0, 1)$, απορρίπτεται.

Επομένως το $\xi = \frac{-3}{10} \in (-1, 1)$ είναι το (μοναδικό) σημείο για το οποίο ισχύει:

$$f'(\xi) = 0.$$

Υπαρξη ρίζας της $f'(x)$ με θεώρημα Rolle σε γνωστή $f(x)$

225.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{ax^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$,

όπου a, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\frac{a}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = 0$.

Αλλά $\lambda_\varepsilon = f'(\xi)$.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Έχουμε:

♦ Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.

♦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με: $f'(x) = ax^2 + 2\left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x + \gamma - \delta$

♦ $f(0) = \delta$

$$f(1) = \frac{a}{3} + \frac{\beta}{2} + \delta + \gamma - \delta + \delta = \delta \quad (\text{αφού } \frac{a}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0)$$

Άρα $f(0) = f(1)$.

Οπότε για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο $[0, 1]$ επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Συνεπώς η C_f έχει στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ εφαπτομένη παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε συνήθως έχουμε τρεις επιλογές.

1^η. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$ και διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν ρίζες της στο διάστημα (a, b) .

2^η. Αν η λύση της $f'(x) = 0$ παρουσιάζει δυσκολίες, τότε εξασφαλίζουμε την ύπαρξη του ξ από το **Θ. Rolle** για την f στο $[a, b]$.

3^η. Στη συνάρτηση f' εφαρμόζουμε **Θ. Bolzano** στο $[a, b]$.

Υπαρξη ριζας εξίσωσης με θεώρημα Rolle σε γνωστή βοηθητική συνάρτηση
226.

Έστω f για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $0 < a < \beta$ και
- $\beta f(a) - af(\beta) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$.

β. Υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$.

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $0 < a < \beta$, για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, έχουμε:

♦ Είναι **συνεχής στο $[a, \beta]$** ως πηλίκo συνεχών.

♦ Είναι **παραγωγίσιμη στο (a, β)** με $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

♦ $\beta f(a) - af(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta f(a) = af(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(a) = g(\beta)$.

Άρα για την g εφαρμόζεται το **Θ. Rolle** στο διάστημα $[a, \beta]$.

β. Λόγω του **α.** ερωτήματος θα υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} \quad (1)$$

Παρατήρηση:

Αν ζητείται η ύπαρξη κάποιου $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση και έχει προηγηθεί η απόδειξη ότι ισχύει **Θ. Rolle** για κάποια συνάρτηση, τότε συνήθως το ζητούμενο x_0 είναι αυτό του **Θ. Rolle**.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y - f(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - f(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} x - f(x_0) \Leftrightarrow y = \frac{f(x_0)}{x_0} x$$

που είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

227.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και $f(0) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Η συνάρτηση $g(x) = f(x) \eta \mu x$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$.
- β.** Η εξίσωση $f'(x) = -f(x) \sigma \varphi x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$.

Λύση

α. Έχουμε:

- Η g είναι **συνεχής στο $[0, \pi]$** ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι **παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$** ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x) = f'(x) \eta \mu x + f(x) \sigma \nu x$
- $$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) \cdot \eta \mu 0 = 0 \\ g(\pi) &= f(\pi) \cdot \eta \mu \pi = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } g(0) = g(\pi)$$

Επομένως η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[0, \pi]$.

β. Αφού για την g ισχύουν οι υποθέσεις του

Θ. Rolle, η εξίσωση $g'(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$.

Αλλά για $x \in (0, \pi)$ έχουμε:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \eta \mu x + f(x) \sigma \nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot \eta \mu x = -f(x) \cdot \sigma \nu x$$

$$\begin{aligned} & \eta \mu x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{f(x) \cdot \sigma \nu x}{\eta \mu x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -f(x) \cdot \sigma \varphi x$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = -f(x) \sigma \varphi x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g'(x) = 0$ και

επομένως έχει **μια τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$** .

Παρατήρηση:

Το **β.** ερώτημα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής:

«Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi) \sigma \varphi \xi \text{.} \text{»}$$

Οπότε από **Θ. Rolle** για την g στο $[0, \pi]$

υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \eta \mu \xi + f(\xi) \sigma \nu \xi = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) \eta \mu \xi = -f(\xi) \sigma \nu \xi$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{f(\xi) \cdot \sigma \nu \xi}{\eta \mu \xi}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi) \cdot \sigma \varphi \xi$$

Υπαρξη ρίζας με εφαρμογή θεωρήματος Rolle για μια παράγουσα (αρχική)

228.

Δίνεται η $f(x) = ax^4 + bx^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$ και $a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει η ισότητα $\frac{a}{5} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{2} + \varepsilon = 0$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{a}{5}x^5 + \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\gamma}{3}x^3 + \frac{\delta}{2}x^2 + \varepsilon x, \quad x \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει ότι

$$g'(x) = f(x)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$g(1) = \frac{a}{5} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{2} + \varepsilon = 0 = g(0)$$

οπότε έχουμε:

- ♦ Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.
- ♦ Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $g'(x) = f(x)$.
- ♦ $g(0) = g(1)$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$$

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

- Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση, δε θα τα καταφέρουμε.
- Προφανής ρίζα δεν υπάρχει.
- Να εφαρμόσουμε **Θ. Bolzano** δε γίνεται, αφού δεν μπορούμε να βρούμε διάστημα $[\kappa, \lambda]$ με $f(\kappa)f(\lambda) < 0$, γιατί δεν ξέρουμε τα πρόσημα των a, β, γ, δ και ε .
- Δεν μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών (το οποίο αν περιείχε το 0 θα μας εξασφάλιζε την ύπαρξη ρίζας), αφού τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a(+\infty)$ είναι ομόσημα. (Αν η f ήταν περιττού βαθμού θα είχε μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα). Σε τέτοιες περιπτώσεις ελέγχουμε αν για μια συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g'(x) = f(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** σε κατάλληλο διάστημα, οπότε η παράγωγος της g , δηλαδή η f , έχει ρίζα. Η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g'(x) = f(x)$ λέγεται **παράγουσα ή αρχική** της f και η διαδικασία εύρεσης της παράγουσας ονομάζεται **αντιπαραγωγή**.

Βασικές αντιπαραγωγίσεις

- $c = (cx)'$
- $x^v = \left(\frac{x^{v+1}}{v+1} \right)'$
- $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)'$
- $\frac{1}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})'$
- $\eta \mu x = (-\sigma \nu x)'$
- $\sigma \nu x = (\eta \mu x)'$
- $e^x = (e^x)'$
- $\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$

229.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,e] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1,e)$.

Αν $f(e)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi f'(\xi) \ln \xi = -f(\xi)$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$xf'(x) \ln x = -f(x) \quad (1)$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,e)$.

Για κάθε $x \in (1,e)$ η (1) γράφεται:

$$xf'(x) \ln x + f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \ln x + f(x)(\ln x)' = 0 \Leftrightarrow (f(x) \ln x)' = 0$$

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) \ln x, \quad x \in [1,e]$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle** στο $[1,e]$ αφού:

- είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
είναι παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $$\left. \begin{aligned} g(1) &= f(1) \ln 1 = f(1) \cdot 0 = 0 \\ g(e) &= f(e) \ln e = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } g(1) = g(e)$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0,$$

δηλαδή η εξίσωση $g'(x) = 0$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

Βασικές αντιπαραγωγίσεις

Στην προσπάθεια να βρούμε την αρχική μιας συνάρτησης, πρέπει να ελέγχουμε αν εμφανίζεται παράγωγος γινομένου ή πηλίκου συνάρτησης. Ιδιαίτερες χρήσιμες είναι οι εξής αντιπαραγωγίσεις:

- $f'(x) + g'(x) = (f(x) + g(x))'$
- $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'$
- $f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))'$
- $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$
- $\frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x} \right)'$
- $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)} \right)'$

230.

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, \beta]$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αν ισχύει ότι $\ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = g(\beta) - g(\alpha)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) + f(x)g'(x) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Για κάθε $x \in [a, \beta]$ η εξίσωση γράφεται:

$$f'(x) + f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((\ln f(x)) + g(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \ln(f(x)) + g(x), \quad x \in [a, \beta]$$

♦ Η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως άθροισμα των

συνεχών (ως παραγωγίσιμων) συναρτήσεων $\ln(f(x))$

(σύνθεση των συνεχών $\ln x$ και $f(x)$) και $g(x)$.

♦ Η h είναι παραγωγίσιμη στο (a, β)

αφού είναι παραγωγίσιμες οι f και g με:

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)$$

♦ Είναι: $h(a) = h(\beta)$

$$\Leftrightarrow \ln(f(a)) + g(a) = \ln(f(\beta)) + g(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \ln(f(a)) - \ln(f(\beta)) = g(\beta) - g(a)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{f(a)}{f(\beta)} = g(\beta) - g(a) \text{ που ισχύει.}$$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + g'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$$

Παρατήρηση:

$$\text{Το δεδομένο } \ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = g(\beta) - g(\alpha)$$

γράφεται:

$$\ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = g(\beta) - g(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(\alpha) + g(\alpha) = \ln f(\beta) + g(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

$$\text{αν } h(x) = \ln f(x) + g(x)$$

Η ισότητα $h(\alpha) = h(\beta)$ είναι ισχυρή ένδειξη για Θεώρημα Rolle για την h στο $[a, \beta]$.

Βασικές αντιπαραγωγίσεις

Στην προσπάθεια να βρούμε την αρχική μιας συνάρτησης, πρέπει να ελέγχουμε αν εμφανίζεται παράγωγος σύνθετης συνάρτησης. Ιδιαίτερες χρήσιμες είναι οι εξής αντιπαραγωγίσεις:

$$\bullet f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1} \right)'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$$

$$\bullet \eta \mu f(x) \cdot f'(x) = (-\sigma \nu f(x))'$$

$$\bullet \sigma \nu f(x) \cdot f'(x) = (\eta \mu f(x))'$$

$$\bullet e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln |f(x)|)'$$

Το τέχνασμα πολλαπλασιασμού με $e^{G(x)}$

231.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) = 2xf(x) \quad (1)$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

Για κάθε $x \in (1, 2)$ η εξίσωση (1)

γράφεται:

$$f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + (-x^2)' f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} f'(x) + e^{-x^2} (-x^2)' f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x^2} f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^{-x^2} f(x), \quad x \in [1, 2]$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$g'(x) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του

Θ. Rolle στο $[1, 2]$, αφού:

- ♦ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- ♦ $g(1) = g(2) = 0$

Άρα η εξίσωση

$$g'(x) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής:

$$f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0 \quad (1)$$

έχει μια τουλάχιστον λύση σε ένα διάστημα (α, β) τότε:

- ♦ Βρίσκουμε μια **αρχική συνάρτηση** G της g δηλαδή μια συνάρτηση G για την οποία ισχύει

$G'(x) = g(x)$, οπότε η (1) γίνεται:

$$f'(x) + G'(x) \cdot f(x) = 0 \quad (2)$$

- ♦ Πολλαπλασιάζουμε τη (2) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$\Leftrightarrow e^{G(x)} f'(x) + (e^{G(x)})' f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) e^{G(x)})' = 0$$

- ♦ Εφαρμόζουμε το **Θ. Rolle** για την $h(x) = f(x) \cdot e^{G(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

Ιδιαίτερα προσέχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} \diamond f'(x) + f(x) = 0 &\Leftrightarrow \overset{e^x}{e^x} f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f(x) e^x)' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond f'(x) - f(x) = 0 &\Leftrightarrow \overset{e^{-x}}{e^{-x}} f'(x) - e^{-x} f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f(x) e^{-x})' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond f'(x) + \lambda f(x) = 0 &\Leftrightarrow \overset{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} f'(x) + \lambda e^{\lambda x} f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f(x) e^{\lambda x})' = 0 \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

- ♦ Η εξίσωση $f'(x) - 2xf(x) = 0$ μπορεί να μετασχηματιστεί και ως εξής:

$$f'(x) - (x^2)' f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) - e^{x^2} (x^2)' f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x^2} f'(x) - (e^{x^2})' f(x)}{(e^{x^2})^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^{x^2}} \right)' = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \text{ όπου } g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2}}. \text{ Άρα Θ. Rolle για την } g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2}}.$$

- ♦ Η σκέψη να μετασχηματίσουμε την εξίσωση $f'(x) = 2xf(x)$ σε $\frac{f'(x)}{f(x)} - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x) - x^2)' = 0 \text{ απορρίπτεται γιατί δεν έχουμε ότι } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 2].$$

Συνδυασμός θεωρημάτων Rolle και Bolzano**232.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[1, 2]$.

Για την f ισχύουν $f(1) = f(2) - \frac{7}{3}$ και $f'(1) > 4$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0^2$.
β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

Λύση

- α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [1, 2]$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με: $g'(x) = f'(x) - x^2$

$$g(1) = f(1) - \frac{1}{3} = f(2) - \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \\ = f(2) - \frac{8}{3}$$

$$g(2) = f(2) - \frac{8}{3}$$

$$\text{Άρα } g(1) = g(2).$$

Επομένως για την g ισχύει **Θ. Rolle** στο $[1, 2]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in (1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε: } g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = x_0^2$$

Παρατήρηση:

- ♦ Υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0^2$



Η εξίσωση $f'(x) = x^2$ έχει ρίζα το $x_0 \in (1, 2)$.

- ♦ Η εξίσωση γράφεται:

$$f'(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{x^3}{3} \right)' = 0$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f'(x) - 4x, \quad x \in [1, x_0]$$

• Η h είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ ως διαφορά συνεχών.

• $h(1) = f'(1) - 4 > 0$

$$h(x_0) = f'(x_0) - 4x_0 =$$

$$= x_0^2 - 4x_0 = x_0(x_0 - 4) < 0,$$

αφού $1 < x_0 < 2$.

Επομένως για την h ισχύει το

Θ. Bolzano στο $[1, x_0]$ οπότε

υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (1, x_0) \subseteq (1, 2)$, τέτοιο ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 4\xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = 4\xi$$

Παρατήρηση:

♦ **Θ. Rolle** για την $\varphi(x) = f(x) - 2x^2$ στο $[1, 2]$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αφού δεν εξασφαλίζεται το $\varphi(1) = \varphi(2)$.

♦ **Θ. Bolzano** για την $h(x) = f'(x) - 4x$ στο $[1, 2]$ δεν εφαρμόζεται γιατί ενώ $h(1) > 0$, δεν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο του $h(2)$.

♦ Σ' αυτές τις περιπτώσεις εξετάζουμε μήπως εφαρμόζεται κάποιο από τα θεωρήματα (εδώ το **Θ. Bolzano**) σε κάποιο υποσύνολο του $[1, 2]$, ειδικά αν από προηγούμενο ερώτημα υπάρχει κάποιο σημείο x_0 που χωρίζει το $[1, 2]$ στα υποδιαστήματα $[1, x_0]$, $[x_0, 2]$. Επειδή γνωρίζουμε ότι $h(1) > 0$, επιλέγουμε το $[1, x_0]$.

Υπαρξη ρίζας της $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$,...

233.

Έστω f μια συνάρτηση τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f(a) = f(\beta)$ και $f'(a) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε

$$f''(x_1) = f''(x_2).$$

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(x_0) = 0$.

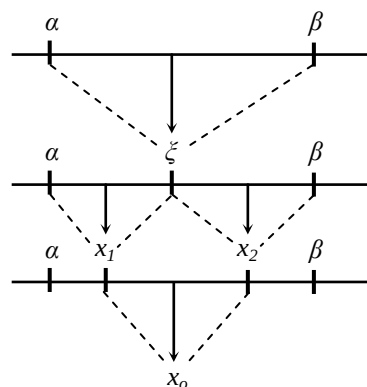
Λύση

α. ♦ Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[a, \beta]$ και είναι $f(a) = f(\beta)$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[a, \beta]$.

Επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον,

$\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

♦ Είναι $f'(a) = f'(\beta) = f'(\xi) = 0$ και η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη



(άρα και συνεχής) στο $[a, \beta]$ (αφού η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$).

Επομένως η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ. Rolle στα διαστήματα $[a, \xi]$ και $[\xi, \beta]$** .

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_1 \in (a, \xi) \text{ και ένα τουλάχιστον}$$

$$x_2 \in (\xi, \beta) \text{ τέτοια ώστε:}$$

$$f''(x_1) = 0 \text{ και } f''(x_2) = 0$$

Άρα υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$

β. Η f'' είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[x_1, x_2] \subset [a, \beta]$, (αφού η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$) και $f''(x_1) = f''(x_2)$.

Επομένως η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$** και συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(x_0) = 0$.

Παρατήρηση:

Αν f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \delta]$ και είναι:

$$f(a) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta)$$

όπου $a < \beta < \gamma < \delta$ τότε διαδοχικά από Θ.

Rolle προκύπτει ότι υπάρχουν x_1, x_2, x_3 ,

ξ_1, ξ_2, ξ στο (a, δ) τέτοια ώστε

$$\bullet f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$$

$$\bullet f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$$

$$\bullet f^{(3)}(\xi) = 0$$

Ανάμεσα σε κάθε δύο ρίζες της f περιέχεται μια τουλάχιστον ρίζα της f'

234.

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

α. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f' .

β. Αν η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f .

Λύση

α. Έστω ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της συνάρτησης f . Τότε θα ισχύει:

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω ότι $\rho_1 < \rho_2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , οπότε ισχύει για την f το **Θ. Rolle** στο

Βασική διαπίστωση

✓ Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ανάμεσα σε κάθε δύο ρίζες της f περιέχεται μια τουλάχιστον ρίζα της f' .

✓ Έμμεσο συμπέρασμα του γεγονότος αυτού είναι ότι:

Αν η f έχει n διακεκριμένες ρίζες, τότε

• Η f' έχει $n-1$ τουλάχιστον ρίζες.

• Η f'' έχει $n-2$ τουλάχιστον ρίζες.

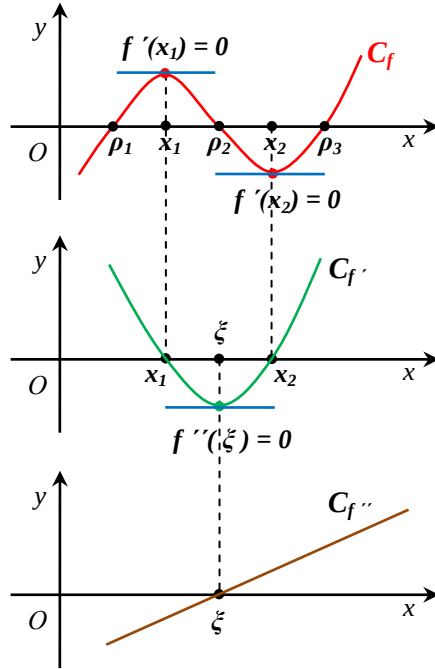
• Η $f^{(n-1)}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα. (εφόσον βέβαια η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη)

$[\rho_1, \rho_2]$ και συνεπώς υπάρχει $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho) = 0$, δηλαδή η f' έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ η οποία βρίσκεται μεταξύ ρ_1 και ρ_2 .

β. Έστω $x_1 < x_2$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της f' .

Αν υπήρχαν δύο ρίζες της ρ_1, ρ_2 της f με $x_1 < \rho_1 < \rho_2 < x_2$ τότε λόγω **α.** ερωτήματος θα υπήρχε μια τουλάχιστον ρίζα ρ της f' η οποία βρίσκεται μεταξύ ρ_1 και ρ_2 , άρα και μεταξύ x_1 και x_2 .

Αυτό όμως είναι **άτοπο** γιατί οι ρίζες x_1 και x_2 της f' είναι διαδοχικές πράγμα που σημαίνει ότι άλλη ρίζα μεταξύ τους δεν μπορεί να υπάρξει.



Το πολύ ν ρίζες

235.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + a = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x + a, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν η εξίσωση

$$x^3 - 3x + a = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ στο διάστημα $(-1, 1)$ τότε

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Είναι:

- ♦ Η f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολυωνυμική.
- ♦ Η f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- ♦ $f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Το Θ. Rolle και το πλήθος ριζών εξίσωσης.

Αν ζητείται να αποδειχθεί ότι μια εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ κ ρίζες, τότε:

- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\kappa + 1$ τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_\kappa < \rho_{\kappa+1}$. Τότε το Θ. Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], \dots, [\rho_\kappa, \rho_{\kappa+1}]$ δίνει για την f' και ρίζες τις: $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3), \dots, \xi_\kappa \in (\rho_\kappa, \rho_{\kappa+1})$
- Αν το αποτέλεσμα αυτό δεν οδηγεί σε άτοπο, τότε συνεχίζουμε το Θ. Rolle για την f' στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3], \dots, [\xi_\kappa, \xi_{\kappa+1}]$. Έτσι η f'' θα έχει $\kappa - 1$ τουλάχιστον ρίζες τις: $x_1 \in (\xi_1, \xi_2), \dots, x_{\kappa-1} \in (\xi_{\kappa-1}, \xi_\kappa)$
- Αν χρειαστεί συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\rho) = 0 \Leftrightarrow 3\rho^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \text{ ή } \rho = -1, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως η **f** έχει το πολύ μια ρίζα στο **(-1, 1)**.

Άλλος τρόπος.

$$\text{Είναι } f'(x) = 3x^2 - 3$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	0	+
f(x)				

Παρατήρηση:

Βέβαια πάντα ισχύει ότι

«Κάθε συνάρτηση **f** γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ »

Η **f** είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και «1-1») στο διάστημα $(-1, 1)$ επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$.

236.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + \mu = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + \mu, x \in \mathbb{R}$.

Αν η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + \mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ στο $\mathbb{R}$, τότε:

- ♦ Η **f** είναι συνεχής στα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ ως πολυωνυμική.
- ♦ Η **f** είναι παραγωγίσιμη στα (ρ_1, ρ_2) και (ρ_2, ρ_3) .
- ♦ $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = 0 \text{ και } f'(\xi_2) = 0$$

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x - \lambda.$$

Στο σημείο αυτό δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο, έτσι συνεχίζουμε με την **f'**.

- ♦ Η **f'** είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$.
- ♦ Η **f'** είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με $f''(x) = 12x^2 + 12x + 6$.
- ♦ $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 12\xi^2 + 12\xi + 6 = 0 \Leftrightarrow 2\xi^2 + 2\xi + 1 = 0, \text{ άτοπο γιατί } \Delta = -4 < 0$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Α κ ρ ι β ώ ς ν ρ ί ζ ε ς

237.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Υπαρξη ρίζας

α' τρόπος

- ♦ Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-1, 0]$, ως πολυωνυμική.
- ♦ $f(-1) = -3 + 5 - 5 + 1 = -2 < 0$.
- ♦ $f(0) = 1 > 0$.

Σύμφωνα λοιπόν με το **Θ. Bolzano** η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0) \subseteq \mathbb{R}$.

β' τρόπος

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

Άρα είναι $f(x) < 0$ στην περιοχή του $-\infty$, δηλαδή υπάρχει $x_1 < 0$ τέτοιος ώστε $f(x_1) < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

Άρα είναι $f(x) > 0$ στην περιοχή του $+\infty$, δηλαδή υπάρχει $x_2 > 0$ τέτοιος ώστε $f(x_2) > 0$.

Η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[x_1, x_2]$. Άρα από **Θ.**

Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$.

Μοναδικότητα της ρίζας

Έστω ότι η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

- ♦ Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- ♦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5$.
- ♦ $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 15\xi^2 - 15\xi + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

«Η εξίσωση 1-1 έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα Δ »

Αντιμετώπιση

✓ Υπαρξη ρίζας.

- Προφανής ρίζα.
- Με **Θ. Bolzano**.
- Το θ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(\Delta)$.
- Με **Θ. Rolle** για μια παράγουσα (αρχική) της f .

✓ Μοναδικότητα ρίζας.

- Με **μονοτονία**.
Αν η f είναι γνησίως μονότονη (άρα και «1-1») δεν μπορεί να έχει πάνω από μία ρίζα.
- Με **Θ. Rolle και άτοπο**.
Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $x_1 < x_2$ και από **Θ. Rolle** στο $[x_1, x_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Παρατηρήσεις:

- Όπως αποδείξαμε με τον **β' τρόπο** την ύπαρξη ρίζας της εξίσωσης έτσι αποδεικνύεται ότι: «Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ ».
- Ο **α' τρόπος** απόδειξης της ύπαρξης της ρίζας μας δίνει την επιπλέον πληροφορία ότι η ρίζα είναι αρνητική.

$$\Leftrightarrow 3\omega^2 - 3\omega + 1 = 0, \text{ \textbf{άτοπο} γιατί } \Delta = -3 < 0$$

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ **δεν** μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες και επειδή αποδείξαμε ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα, αυτή είναι **μοναδική**.

Άλλος τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5 = 5(3x^4 - 3x^2 + 1) > 0$

γιατί: $3x^4 - 3x^2 + 1 \stackrel{x^2=\omega}{=} 3\omega^2 - 3\omega + 1$: τριώνυμο με $\Delta = -3 < 0$.

Άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$, άρα «1-1», και επομένως έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. Επειδή όμως αποδείξαμε ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα, αυτή είναι **μοναδική**.

238.

Δίνεται η συνάρτηση **f** για την οποία ισχύουν $x^2 f''(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) - f(1) = \ln 2 - 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ έχει μια μόνο λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται: $f'(x) - \frac{1}{x} + 1 = 0$ (1)

Υπαρξη ρίζας

Αν $g(x) = f(x) - \ln x + x$, $x > 0$ τότε η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g'(x) = 0$.

Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του **Θ. Rolle** στο $[1, 2]$ αφού:

♦ Είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. (Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη).

♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} + 1$.

♦ $g(1) = f(1) + 1$ και $g(2) = f(2) - \ln 2 + 2$

$$\text{Αλλά } f(2) - f(1) = \ln 2 - 1 \Leftrightarrow f(2) = f(1) + \ln 2 - 1.$$

$$\text{Άρα } g(2) = f(1) + \ln 2 - 1 - \ln 2 + 2 = f(1) + 1 = g(1).$$

Άρα η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ έχει **μια τουλάχιστον** λύση στο $(1, 2) \subseteq (0, +\infty)$.

Μοναδικότητα της ρίζας

Έστω ότι η εξίσωση $f'(x) - \frac{1}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$ έχει δύο λύσεις στο $(1, 2)$, τις

x_1, x_2 (με $x_1 < x_2$). Είναι:

- $g'(x) = g'(x_2) = 0$.
- Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- Η g' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g''(x) = f''(x) + \frac{1}{x^2}$.

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε:

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + \frac{1}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi^2 f''(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 f''(\xi) = -1, \text{ άτοπο αφού}$$

$x^2 f''(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση $f'(x) - \frac{1}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty)$.

Υπαρξη ρίζας με άτοπο

239.

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\Delta = [a, \beta]$. Επίσης ισχύει: $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Αν $f(a) = f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι:

- $g(a)g(\beta) \neq 0$.
- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
- Αν επιπλέον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ τότε το x_0 του ii. ερωτήματος, είναι μοναδικό.

Λύση

- Έστω ότι $g(a) = 0$. Τότε για $x = a$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \neq 0 \Leftrightarrow f'(a) \cdot 0 - 0 \cdot g'(a) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq 0, \text{ άτοπο.}$$

Ομοίως έστω ότι $g(\beta) = 0$. Τότε για $x = \beta$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f'(\beta)g(\beta) - f(\beta)g'(\beta) \neq 0 \Leftrightarrow f'(\beta) \cdot 0 - 0 \cdot g'(\beta) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq 0, \text{ άτοπο.}$$

- Έστω ότι **δεν υπάρχει** $x_0 \in (a, \beta)$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Επίσης λόγω i. ερωτήματος

$$g(a) \neq 0 \text{ και } g(\beta) \neq 0$$

Επομένως $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Οπότε ορίζεται η συνάρτηση:

Παρατήρηση:

Από την υπόθεση

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$$

προκύπτει ισοδύναμα ότι και

$$g'(x)f(x) - g(x)f'(x) \neq 0$$

απ' όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\bullet \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' \neq 0, \text{ εφόσον } g(x) \neq 0$$

$$\bullet \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' \neq 0, \text{ εφόσον } f(x) \neq 0$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{0}{g(\alpha)} = 0 \quad \text{και} \quad h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{0}{g(\beta)} = 0$$

Επομένως $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ και συνεπώς για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του

Θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Άρα θα υπάρξει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$,

άτοπο αφού $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta = [\alpha, \beta]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$

iii. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $x_1 < x_2$.

Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι και

$$f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [x_1, x_2] \subseteq (\alpha, \beta)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$.

• Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2] \subseteq (\alpha, \beta)$, με

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

• $\varphi(x_1) = \frac{g(x_1)}{f(x_1)} = \frac{0}{f(x_1)} = 0$ και $\varphi(x_2) = \frac{g(x_2)}{f(x_2)} = \frac{0}{f(x_2)} = 0$

Επομένως $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ και συνεπώς για την φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Άρα θα υπάρξει $\xi_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi_0) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi_0)f(\xi_0) - g(\xi_0)f'(\xi_0) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_0)g(\xi_0) - f(\xi_0)g'(\xi_0) = 0,$$

άτοπο

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Ασκήσεις

Υποθέσεις και συμπέρασμα του Θ. Rolle

1023. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & -1 \leq x < 0 \\ x^3 + \gamma, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1, 1]$.

1024. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^\mu (x - \beta)^\nu$

μ, ν θετικοί ακέραιοι και $\alpha < \beta$.

i. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται για την f Θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ii. Να αποδείξετε ότι το ξ που προκύπτει από το Θ. Rolle χωρίζει το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$. (Δηλαδή $\frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \frac{\mu}{\nu}$)

Υπαρξη ρίζας της $f'(x)$ με Θ. Rolle σε γνωστή $f(x)$

1025. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + (\alpha - 1)x^3 + \beta x^2 - (\alpha + \beta)x - 2, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

1026. Αν $\alpha^2 + \alpha = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = (\alpha^2 - \beta)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

1027. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$, τέτοια ώστε $3f^2(\alpha) + 2f^2(\beta) = 6f(\alpha) + 4f(\beta) - 5$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει παράλληλη εφαπτομένη στον άξονα $x'x$.

Υπαρξη ρίζας εξίσωσης με Θ. Rolle σε γνωστή βοηθητική συνάρτηση

1028. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες :

- Είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) .
- Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $g(x) \neq 0$ και για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $g'(x) \neq 0$.
- $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$.

Να αποδείξετε ότι :

i. για τη συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, εφαρμόζεται το θεώρημα του

Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

1029. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $g'(x) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι :

i. $g(\alpha) \neq g(\beta)$

ii. για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \cdot g(x)$ εφαρμόζεται το Θ.

Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

iii. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}$.

(Θ.Μ.Τ. του Cauchy)

1030. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$

i. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0, 1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$$

1031. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και $f(0) + f(\pi) = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \sin x$, $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f'(\xi) \sin \xi$.

1032. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2018) \ln x$. Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2018)$.

ii. η εξίσωση $x + e^{\ln x} = 2018$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2018)$

1033. Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,

παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$. Αν

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - \alpha - \beta}, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $g'(\xi) = 0$.

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $A(\alpha + \beta, 0)$.

1034. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο $[0, \alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, \alpha]$. Αν $f(\alpha) = ef(0)$ και για την $g(x) = \ln f(x) - \alpha x$, $x \in [0, \alpha]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, \alpha]$, τότε :

- i. να βρείτε την τιμή του α .
- ii. να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

1035. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$.
- ii. Υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\phi \frac{1}{\theta} = \theta$.

1036. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- ii. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\phi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

1037. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$

- i. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η f να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon\phi \frac{2}{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

1038. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha)) = \beta - \alpha$

Να αποδείξετε ότι :

- i. η συνάρτηση g με $g(x) = f(x)e^{-x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$.
- ii. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = f(x_0)$.

1039. Έστω η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = xf(\eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

- i. Για τη συνάρτηση $g(x) = f(\eta\mu x)$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0, \pi]$.
- ii. Η εξίσωση $f'(x) = g(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

Υπαρξη ρίζας με εφαρμογή Θ. Rolle για μια παράγουσα (αρχική)

1040. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα :

- i. $4(3\alpha - \beta)x^3 + 3(3\beta - 2\alpha)x^2 = 2\alpha x + 2\beta$ στο $(0, 1)$
- ii. $(2x - 3)\sigma\upsilon\nu x = (x^2 - 3x + 2)\eta\mu x$ στο $(1, 2)$

1041. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 = 2\alpha x + \beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ με την προϋπόθεση ότι $\beta + \alpha = 1$.

1042. Αν $\frac{\alpha_v}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1}}{v} + \dots + \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_0 = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

1043. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2\lambda x - 1$ και η καμπύλη $y = -4x^3 + \lambda$ έχουν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $\xi \in (0, 1)$.

1044. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x^2 - 4)\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-2, 2)$.

1045. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha + 1)x^3 - \alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\rho \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f'(\rho) = 2\rho$.

1046. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(2) - f(1) = 16$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi.$$

1047. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει $|f'(x)| + |g'(x)| \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda$ για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$.

1048. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[0, 1]$ με $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν $f(0) = g(1) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

1049. Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο (α, β) με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

1050. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-a, a]$, παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ και άρτια, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-a, a)$ ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) + \eta \mu \xi = 2\xi.$$

1051. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(2) - f(1) = \ln 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1$.

1052. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = \frac{2\gamma f(\gamma)}{1 - \gamma^2}$.

1053. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)} = 1$. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 2x_0 f^2(x_0).$$

1054. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$. Αν $f(0) = f(2\pi)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2\eta \mu x_0 \sqrt{f(x_0)}$.

1055. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$3f'(\xi) = \frac{4}{1 + f^2(\xi)}.$$

1056. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f(0) = f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f'(x)}{\eta \mu x} - \frac{f(x)}{\sigma \nu x} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

1057. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, \pi)$, τέτοιο, ώστε $f(\gamma)\sin\gamma = f'(\gamma)\eta\mu\gamma$.

1058. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f'(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} f(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

1059. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f(0) = f(\pi)$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, \pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta \in (0, \pi)$, τέτοιο, ώστε $f'(\theta) + f(\theta)\sin\theta = 0$.

1060. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x) + \eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} = -2 \quad \text{και} \quad f^2(x) + f(x^2) = 2x^2 \quad \text{για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(1)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-3)f'(x) + f(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

1061. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

για την οποία ισχύει
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x+3}-2} = 12.$$

i. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο, ώστε :

$$f(\xi)\ln f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

1062. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$ με $f(2) = 2$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)(\xi_1 - 3) = -f(\xi_1)$

ii. Υπάρχει $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_2)}{\xi_2}$

iii. Υπάρχει $\xi_3 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_3)f(\xi_3) = \xi_3$

1063. Έστω συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο, ώστε :

$$(f(\xi) - \sin \xi)(f'(\xi) + \eta \mu \xi) = \xi$$

1064. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Μια ευθεία ε που περνά από την αρχή των αξόνων τέμνει τη γραφική παράσταση C_f της f στα διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$. Να αποδείξετε ότι :

i. ισχύει $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$

ii. η εξίσωση $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, +\infty)$.

1065. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και ισχύει $f(3) = 2f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

1066. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta) = 0$ και γ ένας πραγματικός αριθμός εκτός του διαστήματος $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f , με τετμημένη $\xi \in (a, \beta)$ στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(\gamma, 0)$.

1067. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $1 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Αν ισχύουν $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, ώστε $f'(\xi) \cdot f(\xi) = 1$.

1068. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ για την οποία ισχύει $f(a) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x) + 2f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

1069. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $4\alpha = 3(\beta + \gamma)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\alpha \ln^2 x = \beta \ln x + \gamma$$
 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e^2)$.

1070. Δίνεται μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει $f^2(a) - f^2(\beta) = a^2 - \beta^2$.
 Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)f'(\xi) = \xi$.

1071. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με $0 < a < \beta$. Επίσης θεωρούμε τα σημεία $A(a, f(a))$ και

$B(\beta, f(\beta))$ ώστε $(OA) = (OB)$, όπου O είναι η αρχή ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς Oxy . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία OM .

1072. Έστω η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο (e, e^2) και συνεχής στο $[e, e^2]$ τέτοια ώστε $f(e^2) = 2f(e)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot \ln \xi^\xi = f(\xi)$.

1073. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\alpha^{f(\alpha)} = \beta^{f(\beta)}$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $x_0 f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) = 0$

1074. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha^{f(\beta)} = \beta^{f(\alpha)}$ με $1 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi f'(\xi) \ln \xi$.

1075. Έστω ότι η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < \alpha < \beta$) είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $(f(\alpha))^\beta = (f(\beta))^\alpha$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) \ln f(\xi) = \xi f'(\xi)$.

1076. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) f'(\beta) = f(\beta) f'(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι αντιστρέψιμη στο $[\alpha, \beta]$

ii. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) f''(x_0) = [f'(x_0)]^2$.

1077. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) f'(\beta) = f(\beta) f'(\alpha)$, να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) f''(\xi) > 0$.

1078. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = 3\xi^2 \cdot f(\xi).$$

1079. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$

1080. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha > 0$
- οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

- $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi}$$

Το τέχνασμα πολλαπλασιασμού με $e^{G(x)}$.

- 1081.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .
- 1082.** Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^x$ στα σημεία $A(\alpha, e^\alpha)$ και $B(\beta, e^\beta)$ όπου $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.
- 1083.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$.
- 1084.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $f(0) = f(2) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) - 2f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.
- 1085.** Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.
- 1086.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, με $\kappa \neq 0$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $\kappa \cdot f'(\xi) + \lambda \cdot f(\xi) = 0$.
- 1087.** Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε
- $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$
 - $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 1, \quad f(x)g(x) \neq 0, \quad x \in (\alpha, \beta)$
- 1088.** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, όπου $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f''(\xi) + f'(\xi) = 0$.
- 1089.** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f''(x_0) + (f'(x_0))^2 = 0$.
- 1090.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \eta \mu \xi f(\xi)$.

- 1091.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και ισχύει $f(a) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε να ισχύει :
- $$f'(\xi) + (1 + \sin \xi)f(\xi) = 0$$

- 1092.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύουν $f(0) = 2$, $f(1) = 1 + e$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2x(f(x) - 1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

- 1093.** Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε :
- $$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sin \xi = 1$$

- 1094.** Δίνεται η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{1}{a - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$$

Συνδυασμός θεωρημάτων Rolle , Bolzano & Θ.Ε.Τ.

- 1095.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, $x \in \mathbb{R}$ όπου a, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $a - \beta < 0$ και $a + \beta + 2 < 0$.
Να αποδείξετε ότι :
- i. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.
 - ii. η εξίσωση $3x^2 + 2ax + \beta = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.
- 1096.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(3, -1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- 1097.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a) > 0$, $f(\beta) > 0$ και $f(\gamma) < 0$ όπου $\gamma \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

- 1098.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(1) < f(3) < f(2)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

- 1099.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(3) = \frac{f(1) + f(2)}{2} \quad \text{και} \quad f(1) \neq f(2)$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $2f(\xi) = f(1) + f(2)$

- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- 1100.** Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(1) = -2$, $f(3) = 1$ και $f(5) = -3$. Να αποδείξετε ότι:
- i. Η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.
- ii. Η εξίσωση $2f(x) + xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 5)$.
- 1101.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 - 8\alpha x - 4\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι :
- i. το $P(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$,
- ii. η εξίσωση $P(x) = \frac{2^x - 6}{x - 3}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$
- 1102.** Έστω μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν $f'(0) > 0$ και $f(1) = 2 + f(0)$ να αποδείξετε ότι :
- i. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.
- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 5x_0$.
- 1103.** Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[1, 2]$. Για την f ισχύουν $f(2) = f(1) + \frac{31}{5}$ και $f'(1) > 5$. Να αποδείξετε ότι :
- i. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0^4$.
- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 5\xi^3$.
- 1104.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και ισχύουν οι σχέσεις $f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$ και $f'(0) > 0$.
Να αποδείξετε ότι :
- i. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\alpha) = \alpha$.
- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\beta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\beta) = 2\beta$.

Υπαρξη ρίζας της $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, ...

- 1105.** Δίνεται η συνάρτηση
 $f(x) = \alpha x^7 + (\alpha + 2)x^5 + x^4 + (2 - 2\alpha)x^3 - x^2 - 4x + 2017$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι :
- i. Η C_f έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τετμημένες στο διάστημα $(-1, 1)$ στα οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη,
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.
- 1106.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει
 $f(0) = -1$, $f(1) = e$ και $f(2) = e^2$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + x^2 - 3x$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία της C_g με τετμημένες στο διάστημα $(0, 2)$ στα οποία η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi) + 2 = e^{\xi}.$$

1107. Δίνεται η συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ με

$$f(a) = f'(a) = 0 \text{ και } f(\beta) = f'(\beta) = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (a, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f^{(3)}(\xi) = 0$$

1108. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στα σημεία x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

1109. Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(a, 0)$, $B(\beta, 0)$ και $\Gamma(\gamma, 0)$ με $a < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι :

i. η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x)e^{-x}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί η h'' .

ii. υπάρχει $x_0 \in (a, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) - 2f'(x_0) + f(x_0) = 0$.

1110. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Η ευθεία $y = 2011$ τέμνει τη C_f στα σημεία με τετμημένες 1, 2 και 3. Να αποδείξετε ότι

i. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(1, 3)$.

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = f'(\xi)$.

1111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1 - x^2)\sin x$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχουν $x_1, x_2 \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

ii. η εξίσωση $\sin x = \frac{-4x}{x^2 - 3}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

1112. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$f(0) = f(2) = 2 \text{ και } f(1) = 3. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (0, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi) = 4 - 6\xi.$$

1113. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) = 1$, $f(2) = 4 - \ln 2$, $f(e) = e^2 - 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$.

1114. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, $a > 0$ και $f(a) = \frac{1}{\beta\gamma}$, $f(\beta) = \frac{1}{a\gamma}$, $f(\gamma) = \frac{1}{a\beta}$ όπου $\gamma \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι :

- i. υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (a, \beta)$ με $\kappa < \lambda$, τέτοια ώστε $f'(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{\kappa}$ και $f'(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$
- ii. αν η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(\kappa, f(\kappa))$ και $B(\lambda, f(\lambda))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

1115. Δίνεται η συνάρτηση $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$. Να αποδείξετε ότι :

- i. η εξίσωση $g(x)\sin x + g'(x)\eta\mu x = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0, 2\pi)$.
- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε :

$$g''(\xi)\eta\mu\xi + 2g'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = g(\xi)\eta\mu\xi$$

1116. Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και $\varphi: [a, \beta] \rightarrow$

$\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, όπου f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ συνάρ-

τηση με $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αν $\frac{f(a)}{f(\beta)} = \frac{f'(a)}{f'(\beta)}$, να αποδεί-

ξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\xi_1)f''(\xi_1) + f(\xi_2)f''(\xi_2) > 0$

1117. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f(2)=f(4)=0 \text{ και τη συνάρτηση } g(x) = -f(3) \cdot (x^2 - 6x + 8).$$

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία $x_1, x_2 \in (2, 4)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = g'(x_1)$ και $f'(x_2) = g'(x_2)$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 4)$ ώστε $f''(\xi) = -2f(3)$.

1118. Δίνεται μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για δυο σημεία α, β του Δ με $\alpha < \beta$ ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, $f'(\alpha) > 0$ και $f'(\beta) > 0$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ii. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Ανάμεσα σε κάθε δύο ρίζες της f περιέχεται μια τουλάχιστον ρίζα της f' .

1119. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος του πολωνύμου $P(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)(x+1)$ έχει τέσσερις πραγματικές και διακεκριμένες (δηλαδή διαφορετικές μεταξύ τους) ρίζες.

1120. Έστω $f(x) = ax^4 + bx^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$, τότε $3\beta^2 > 8\alpha\gamma$.

1121. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δυο τυχαίων ριζών της εξίσωσης $e^x \eta \mu x = 1$ βρίσκεται μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $e^x \sigma \nu \eta x + 1 = 0$.

Τ ο π ο λ ύ ν ρ ί ζ ε ς .

1122. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

1123. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$f^2(x) - e^{f(x)} - f(x) = x^3 + e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σ' ένα σημείο.

1124. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 = \alpha x + \beta$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1125. Αν α, β και $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^4 + 2\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1126. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $3\alpha^2 < 8\beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 = x + 1 \text{ έχει δύο το πολύ πραγματικές ρίζες.}$$

1127. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=3x+1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 7x - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.}$$

1128. Δίνεται μια συνάρτηση f με $e^x f''(x) \neq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδεί-

ξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{x}{e^x}$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

1129. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x^2 = \alpha x + \beta$ έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

1130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha^2 + 1)x^4 + 2(\alpha + \beta)x^3 + 3(\beta^2 + 1)x^2 + \alpha\beta x - 1$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν μπορεί να έχει τρεις εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους.

1131. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Αν $f(x) + f(4-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

1132. Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \text{ και } f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta).$$

Επίσης, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ορίζουμε τη συνάρτηση :

$$g(x) = f(\gamma)(x - \alpha)(x - \beta) - f(x)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta), \text{ όπου } \alpha < \gamma < \beta.$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχουν αριθμοί $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$, $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι, ώστε : $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = g''(\xi) = 0$.
- ii. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Α κ ρ ι β ώ ς ν ρ ί ζ ε ς

1133. Να αποδείξετε ότι έχουν μοναδική ρίζα οι εξισώσεις :

- i. $x^3 - \alpha x^2 + (\alpha^2 + 1)x = 1$ στο $\mathbb{R}$
- ii. $x^2 + x = \eta \mu^2 x + 1$ στο $(0, \pi)$
- iii. $2 \sin x = 2 - x^2$ στο $[0, \pi]$

1134. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα αρνητική.

1135. Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $v \in \mathbb{N}^*$ άρτιος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^v + \alpha^v - (x + \alpha)^v = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

1136. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2016)^{2016} = x^{2016} + 2016^{2016}$ $x \in \mathbb{R}$ έχει μια μόνο λύση στο $\mathbb{R}$.

1137. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x + 5)^{2015} = x^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015}$ έχει δύο ακριβώς λύσεις στο $\mathbb{R}$.

1138. Να λύσετε την εξίσωση $5^x = 4x + 1$.

1139. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3^x$ και $g(x) = -x^2 + 3x + 1$ τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία.

1140. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x + \ln 2$ και $g(x) = 2^{x-1} \ln 2$ τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία.

1141. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x \ln x + \sin x$ έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία που έχουν τετμημένες $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.

1142. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ ώστε να είναι : $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$

1143. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $0 < f(x) < 1$ και $|f'(x)| < 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

- 1144.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in [0, 2]$ με τιμές στο $[0, 4]$, που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in [0, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in [0, 2]$, ώστε $f(\xi) = 2\xi$.
- 1145.** Δίνεται η συνάρτηση f με $xf'(x) - x \neq -1$ για κάθε $x > 0$. Αν $2 < 2f(x) < 3$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 - \ln x_0$.
- 1146.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in [1, 2]$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Να αποδείξετε ότι :
- υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$,
 - η εξίσωση $xf'(x) + f(x) = f'(x) + 2x - 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.
- 1147.** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) - f(1) = -e$ και $f''(x) \neq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = e^\xi + 1$.
- 1148.** Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 3 φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f'(0) = 2$, $f'(1) = e + 1$ και $f^{(3)}(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f''(x_0) = e^{x_0}$.
- 1149.** Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ και $f(a) = f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι :
- η εξίσωση $xf'(x) = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .
 - αν επιπλέον $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Υπαρξη ρίζας με άτοπο

- 1150.** Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β) . Αν ισχύουν $f(a) = f(\beta) = 0$, $g(a)g(\beta) \neq 0$ και
- $$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$$
- για κάθε $x \in (a, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
- 1151.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ισχύει
- $$(2x-1)f(x) \neq (x^2-x)f'(x) \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$
- Να αποδείξετε ότι :
- $f(0)f(1) \neq 0$
 - η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
- 1152.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και ισχύει :
- $$f(x)\sin x \neq f'(x)\eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi]$$
- Να αποδείξετε ότι :
- $f(0)f(\pi) \neq 0$
 - η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Συναρτήσεις

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

1.

$$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{1, 5\},$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-4, 2, 3\},$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R} - \{-3, -1, 1\},$$

$$D_{f_4} = \mathbb{R} - \{-3, 0, 1, 3\},$$

$$D_{f_5} = \mathbb{R} - \{1, 5\},$$

$$D_{f_6} = \mathbb{R} - \{3, 4\},$$

$$D_{f_7} = \mathbb{R} - \{0, \ln 2\},$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{1, 5\},$$

$$D_{f_9} = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \frac{2\kappa\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$D_{f_{10}} = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$D_{f_{11}} = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa\pi, 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}, 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \right\},$$

$$\{\kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

$$D_{f_{12}} = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6} \right\},$$

$$\{\kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

2.

$$D_{f_1} = [2, 3],$$

$$D_{f_2} = \left(-\infty, -\frac{1}{3} \right) \cup (1, +\infty),$$

$$D_{f_3} = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2],$$

$$D_{f_4} = [-3, 0) \cup (0, 3],$$

$$D_{f_5} = (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2),$$

$$D_{f_6} = (2, 3),$$

$$D_{f_7} = (-1, 0) \cup (0, +\infty),$$

$$D_{f_8} = (-2, -1) \cup (3, +\infty),$$

$$D_{f_9} = (-2, -1) \cup [1, 2],$$

$$D_{f_{10}} = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty),$$

$$D_{f_{11}} = [-3, -2] \cup [8, 11],$$

$$D_{f_{12}} = [-2, 0], \quad D_{f_{13}} = (0, \ln 2],$$

$$D_{f_{14}} = [2, +\infty), \quad D_{f_{15}} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, e \right],$$

$$D_{f_{16}} = [0, 1),$$

$$D_{f_{17}} = (1, 2) \cup (2, e+1),$$

$$D_{f_{18}} = [\ln 2, 1) \cup (e^2, +\infty),$$

$$D_{f_{19}} = [1, 4]$$

$$D_{f_{20}} = \left(0, \frac{e^2}{1+e^2} \right) \cup \left(\frac{e^2}{1+e^2}, 1 \right)$$

3.

$$D_{f_1} = \mathbb{R}^*, \quad D_{f_2} = (1, 2]$$

$$D_{f_3} = (0, 1) \cup (e, +\infty),$$

$$D_{f_4} = \mathbb{R} - \left\{ 2\kappa\pi, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.

$$\alpha) A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup,$$

$$\cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$\beta) 1 \in f(A) \text{ αφού υπάρχουν}$$

$$x = \pm\sqrt{1+e} \in A \text{ τέτοια ώστε}$$

$$f(\pm\sqrt{1+e}) = 1$$

5.

$$\alpha) D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\} \quad \beta) \text{Είναι}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 1 \quad \gamma) -1 \notin f(A)$$

6.

$$\alpha) D_f = (-1, 1)$$

7.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} < \lambda < \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

8.

$$\lambda \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

9.

$$\lambda \geq 4$$

10.

$$1 < \kappa < 9$$

11.

$$\lambda = 0$$

12.

$$\alpha) \text{Είναι } \frac{B\Gamma}{2} = \rho \cdot \eta\mu\theta \text{ και}$$

$$OM = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\theta, \text{ οπότε.....}$$

$$\beta) E(t) = 4 \left(1 + \eta\mu\frac{t}{4} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{t}{4},$$

Αν $ABΓ$ ισόπλευρο τότε

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}$$

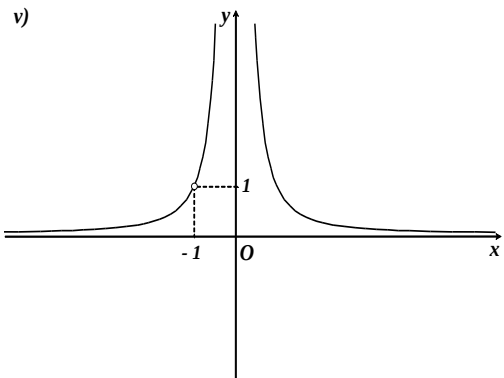
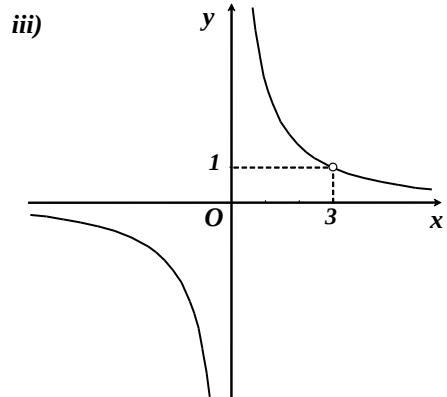
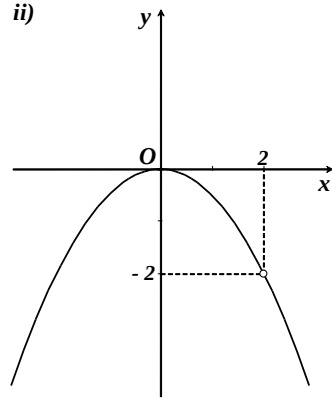
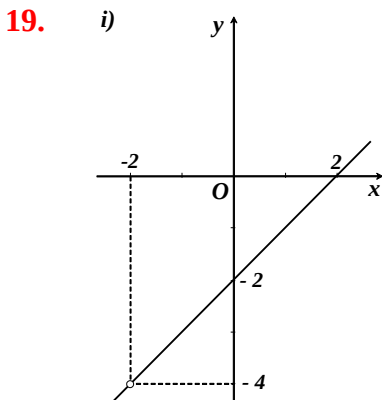
και

$$E\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(1 + \eta\mu\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$$

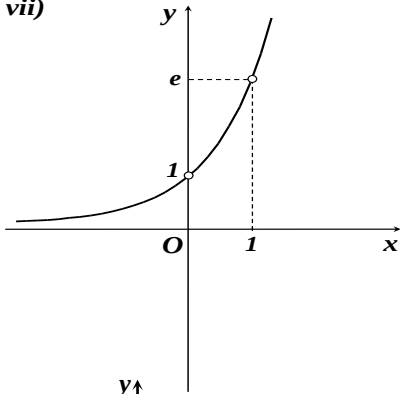
Ισότητα συναρτήσεων

13. i) $f \neq g$, $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, ii) $f = g$,
 iii) $f = g$, iv) $f = g$,
 v) $f \neq g$, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, vi) $f \neq g$, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (-3, 2)$
 vii) $f \neq g$, $f(x) = g(x)$, για κάθε $x > 1$,
 viii) $f = g$, ix) $f \neq g$, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \geq 2$
 x) $f = g$, xi) $f = g$, xii) $f \neq g$,
 $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [0, 4) \cup (4, +\infty)$
14. α) Όλες οι συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο με την f αλλά μόνο οι f_2 και f_5 έχουν το ίδιο με την f πεδίο ορισμού (το $\mathbb{R}$) και άρα είναι ίσες με την f .
 β) $A = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
15. $\lambda = 2$
16. $\lambda = 4$, $\kappa = 11$, $\mu = 5$
17. $\alpha = 3$, $\beta = 4$
18. $\alpha = 3$, $\beta = 2$

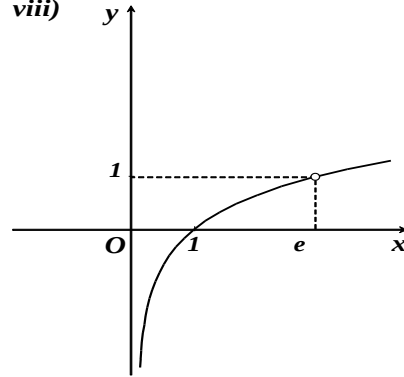
Γραφική Παράσταση Συνάρτησης



vii)

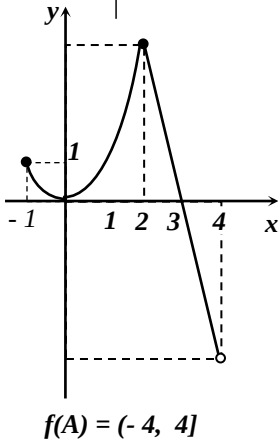


viii)

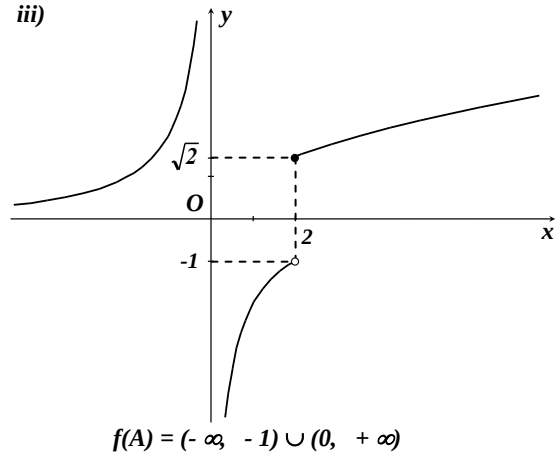


20.

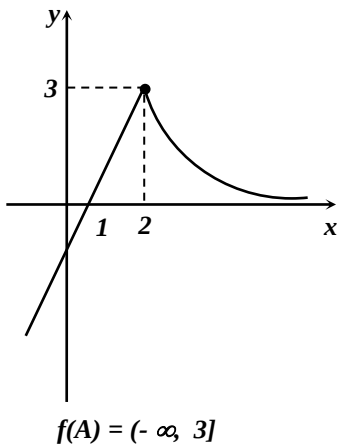
i)



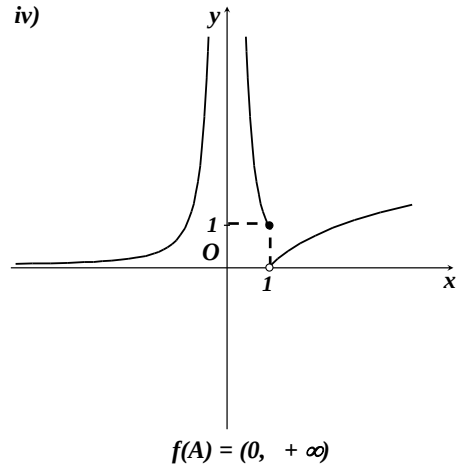
iii)



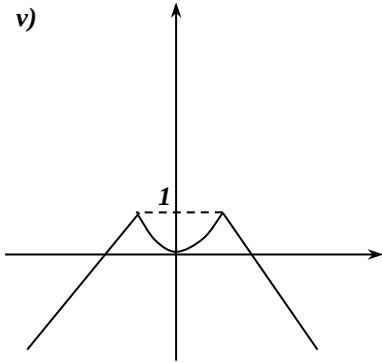
ii)



iv)

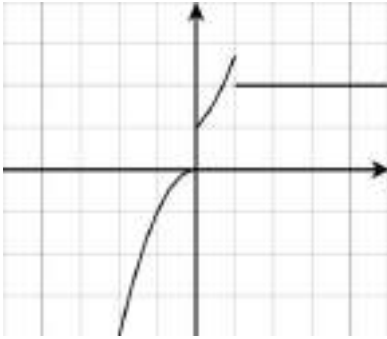


v)



$$f(A) = (-\infty, 1]$$

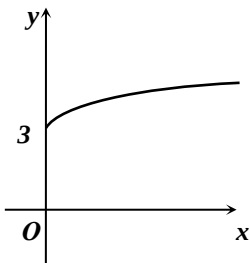
vi)



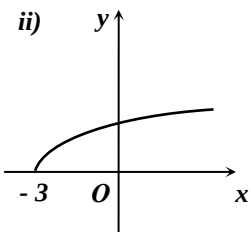
$$f(A) = (-\infty, 0) \cup [1, e)$$

21.

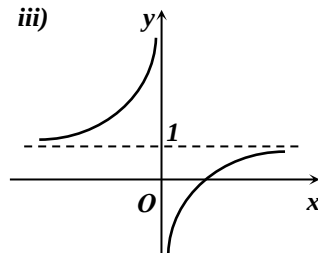
i)



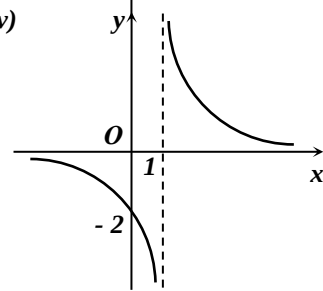
ii)



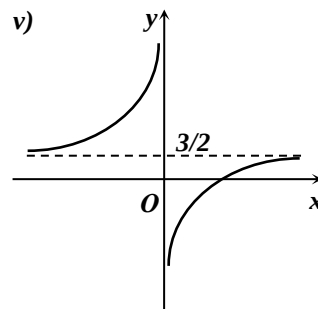
iii)



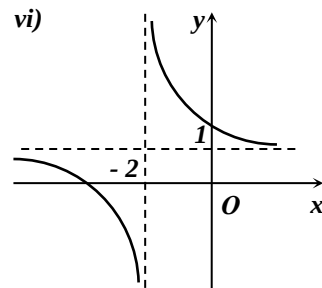
iv)



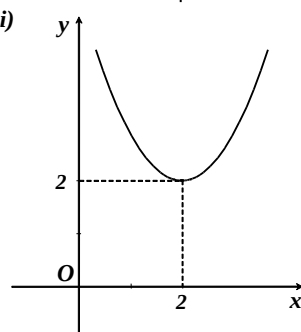
v)



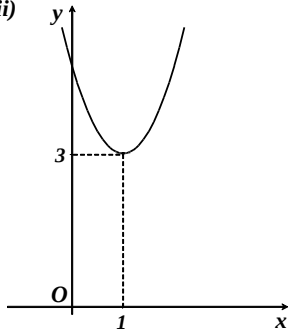
vi)



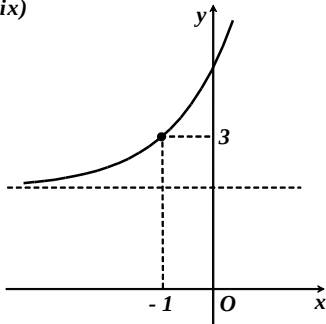
vii)



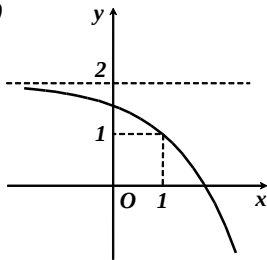
viii)



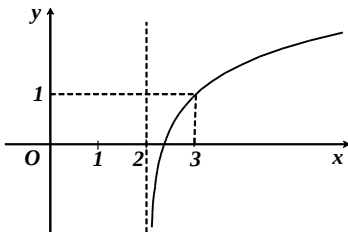
ix)



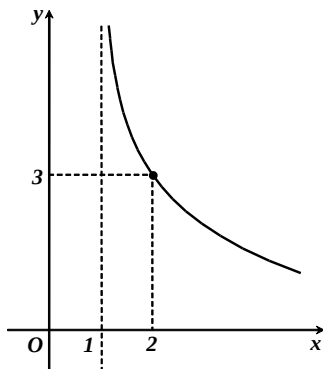
x)



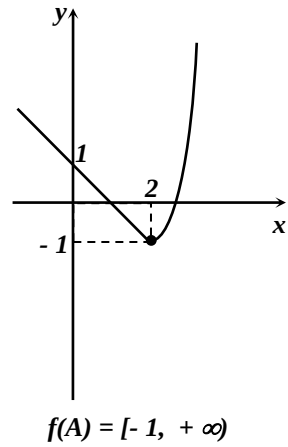
xi)



xii)



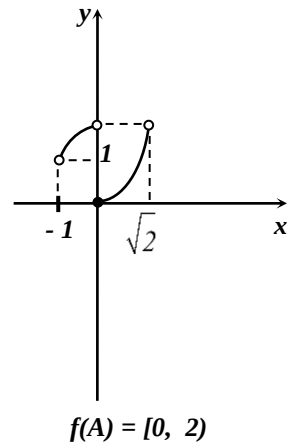
i)



22.

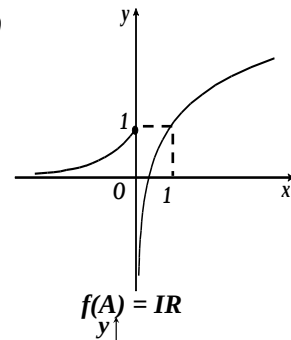
$$f(A) = [-1, +\infty)$$

ii)



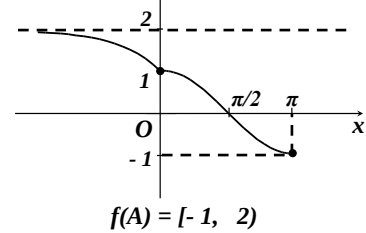
$$f(A) = [0, 2)$$

iii)



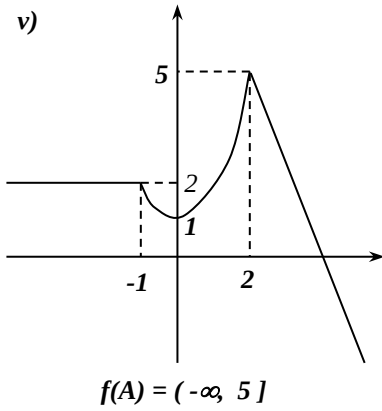
$$f(A) = \mathbb{R}$$

iv)

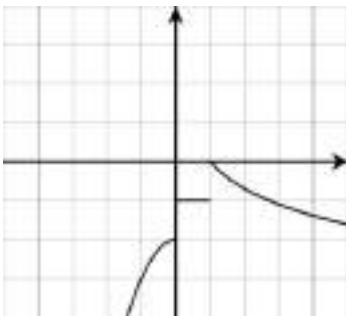


$$f(A) = [-1, 2)$$

v)

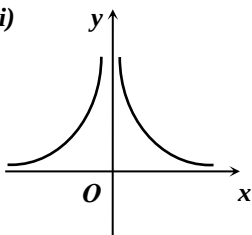


vi)

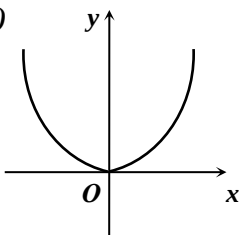


23.

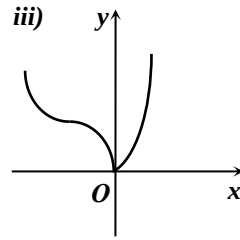
i)



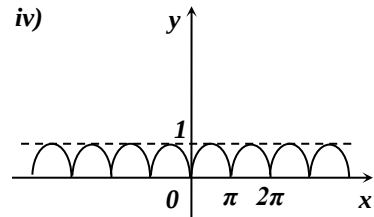
ii)



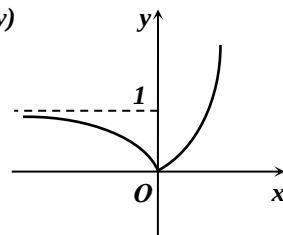
iii)



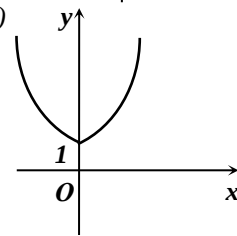
iv)



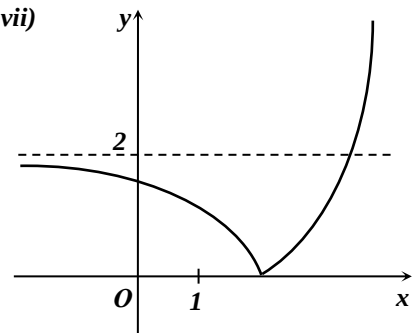
v)



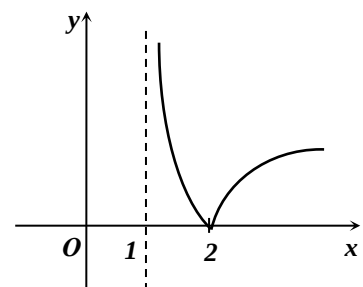
vi)

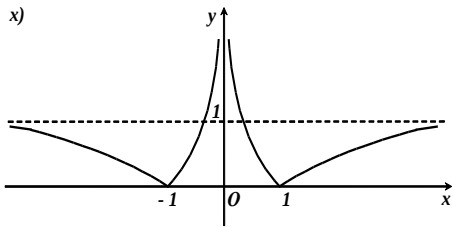
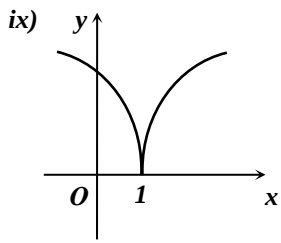


vii)

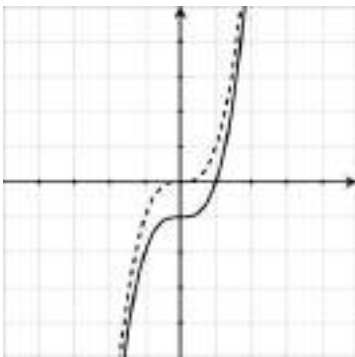


viii)

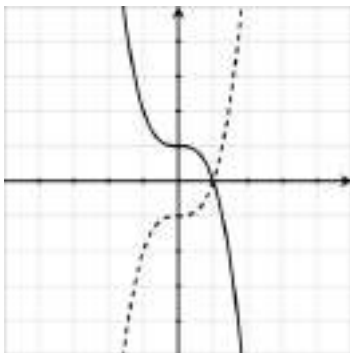




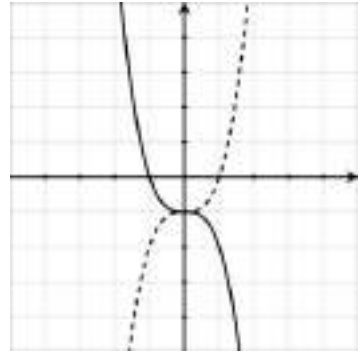
24. i)



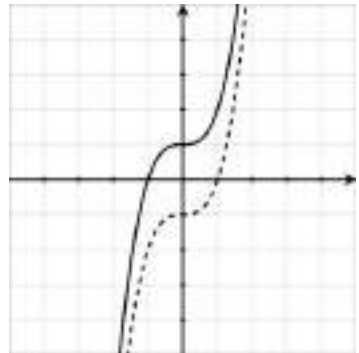
ii)



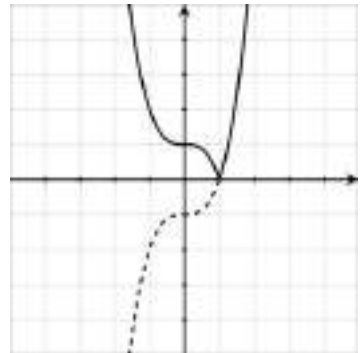
iii)



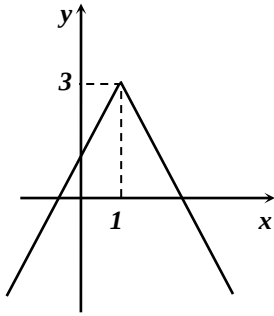
iv)



v)



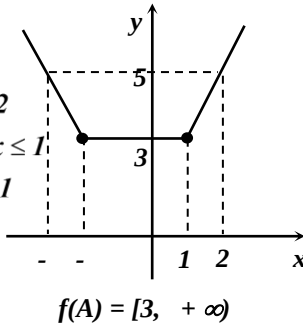
25. i) $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & x \geq 1 \\ 2x+1, & x < 1 \end{cases}$



$$f(A) = (-\infty, 3]$$

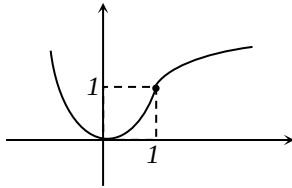
ii)

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x < -2 \\ 3, & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$$



$$f(A) = [3, +\infty)$$

26. $a = 1, b = 2$



27. α) $A(e^2 - 1, 0)$ $B(0, 2)$

β) $\chi \in (-1, e^2 - 1)$

28. $-2 \setminus \chi \setminus \varepsilon - 2$

29. $x \in (-4, 2) \cup (3, +\infty)$

30. $\alpha = 1, A(-2, 0), B(-1, 0), \Gamma(2, 0)$

31. Αν υπάρχει $\chi_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\varphi(\chi_0) = 0$ τότε ... άτοπο

32. $A(1, 3), B(2, 14), \Gamma(-3, -21),$
 $(AB\Gamma) = 10\tau.μ.$

33. α) $K(0, -2),$
 $A(-\sqrt{2}, 0), M(\sqrt{2}, 0), \beta) \alpha = -2,$
 $\beta = 1$

34. $x \in (\frac{1}{e}, e^2)$

35. Όταν $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . Όταν $x \in (-2, 2)$ η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g

36. Όταν $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από την ε . Όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$ η C_f βρίσκεται κάτω από την ε .

37. α) $f(x) = x^2 - 3x + 2,$
 β) $A(1, 0), B(2, 0),$
 γ) $D = (1, 2)$

38. α. Είναι $f(-2) = -2$, οπότε.... β. Είναι $f(x) < 1$ και $h(-5) > 1$, οπότε....

39. α) Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, β) Δείξτε ότι $f(-x) = -f(x)$,
 γ) Το $O(0, 0)$

40. Δείξτε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

41. Μια ρίζα αν $\kappa < 0$ ή $\kappa > 1$, Δύο ρίζες αν $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$, Τρεις ρίζες αν $0 < \kappa < 1$

42. i. $\alpha = 1, \beta = 3$. ii. Μια ρίζα αν $\lambda \leq -3$ ή $\lambda > -2$, Δύο ρίζες αν $-3 < \lambda \leq -2$

Πράξεις με συναρτήσεις

43. $D_{f+g} = (0, 1]$ με
 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln x + \sqrt{1-x},$

$D_{f-g} = (0, 1]$ με

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \sqrt{1-x},$

$D_{fg} = (0, 1]$ με

$(fg)(x) = f(x)g(x) = \ln x \cdot \sqrt{1-x},$

$D_{f/g} = (0, 1)$ με

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}},$

$D_{g/f} = (0, 1)$ με

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$

44. $(fg)(x) = \frac{-x+1}{x+2},$
 $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 2\},$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-(x-2)^2(x+2)}{(x^2+1)(x-1)},$$

$$x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$$

$$45. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}},$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

46. Δεν ορίζονται

47. α) $\alpha = 1$

β) $(f-g)(x) = \sqrt{x-1} - \ln(x-1), x > 1$

$$(fg)(x) = \sqrt{x-1} \ln(x-1), x > 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(x-1)}, x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

48. α) $(f-g)(x) = \frac{x}{e^x-1} - \sqrt{1-e^x}, x \in (-\infty, 0),$

β) $(f \cdot g)(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-e^x}}, x \in (-\infty, 0),$

γ) $\left(g^2 - \frac{1}{f}\right)(x) = \frac{(1-e^x)(x+1)}{x}, x \in (-\infty, 0)$

49. α. $D_f = (0, +\infty), D_g = (-\infty, 1)$

β. $(f-g)(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e-e^x}\right), x \in (0, 1)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{\ln(e-e^x)},$$

$$x \in (0, \ln(e-1)) \cup (\ln(e-1), 1)$$

50. α. $(f+g)(x) = \ln(2x), x \in (0, +\infty)$

β. $(f-g)(x) = \ln \frac{2x}{(x+1)^2}, x \in (0, +\infty)$

γ. $(f \cdot g)(x) = \ln \frac{2x}{x+1} \cdot \ln(x+1),$

$$x \in (0, +\infty)$$

δ. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(2x)}{\ln(x+1)} - 1, x \in (0, +\infty)$

51. Η σχέση γράφεται

$$[f(x)+2]^2 + [g(x)+2]^2 = 0, \text{ οπότε } f(x) = g(x) = -2$$

52. Δείξτε ότι $f(x) = 5$ και $g(x) = 5$ για κάθε $x \in A$.

53. Δείξτε ότι $f(x) = 2, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = -2, x \in \mathbb{R}$.

54. Η σχέση γράφεται

$$[f(x)-1]^2 + g(x)+1]^2 = 0, \text{ οπότε } f(x) = 1 \text{ και } g(x) = -1$$

55. Είναι $f = -g$.

56. $\alpha (f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1+\ln x, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x}+\ln x, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x}-2x+3, & x \geq 3 \end{cases}$

$$\beta (fg)(x) = \begin{cases} (2x+1)\ln x, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x}\ln x, & 2 < x < 3 \\ (-2x+3)\sqrt{x}, & x \geq 3 \end{cases}$$

γ)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{\ln x}, & 0 < x < 1 \text{ ή } 1 < x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x}}{\ln x}, & 2 < x < 3 \\ \frac{\sqrt{x}}{-2x+3}, & x > 3 \end{cases}$$

Σύνθεση συναρτήσεων

57. i) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}-1}, x \geq 0,$

ii) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2-4}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\},$

iii) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2\sqrt{x}-x}, x \in [0, 4],$

iv) $(g \circ f)(x) = \frac{5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}-4},$
 $x \in [3, 19) \cup (19, +\infty)$

58. Είναι

$$(g \circ f)(x) = \ln \left(\frac{1 + \frac{e^x-1}{e^x+1}}{1 - \frac{e^x-1}{e^x+1}} \right) = \dots\dots\dots$$

59. α) $\Leftrightarrow f(x) > f(0) \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \quad \beta)$
 $(f \circ f)(x) = \ln(\ln(x-1)-1),$
 $x \in (1+e, +\infty)$

60. α) $(f \circ g)(x) = e^{\frac{3x}{x-2}} - \frac{3x}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$
 $\beta) (g \circ g)(x) = \frac{9x}{x+4}, x \in \mathbb{R} - \{-4, 2\}$

61. α) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{-x-2}{2x-1}}, x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right)$
 $\beta) (g \circ g)(x) = x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

62. α) $(h \circ \varphi)(x) = \sqrt{3-x}, x \in [-1, 3],$
 $\beta) (\varphi \circ h)(x) = \sqrt{4-x^2} + 1, x \in [-2, 2]$

63. $(h \circ (g \circ f))(x) = -\frac{1}{2} \ln x, x > 0$

64. α) $(f \circ f)(x) = |x|, x \in [-5, 5],$
 $\beta) (f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{12+x}, x \in [4, 13]$

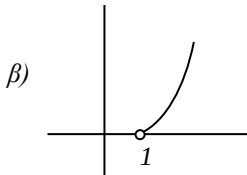
65. α) $(f \circ g)(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2},$
 $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$
 $\beta) (f \circ g)(x) = \sqrt{6x + 5x^2 - 2x^3 - x^4},$
 $x \in [-3, -1] \cup [0, 2]$

66. α) $[-1, 1], \beta) [4, 5], \gamma) [1, e],$
 $\delta) (-\infty, 1]$

67. Πρέπει $0 \leq x - 1 \leq 1$ και
 $0 \leq \ln x \leq 1$. Οπότε βρίσκουμε ότι
 $x \in [1, 2].$

68. $D_g = [4, +\infty)$

69. α) $(f \circ g)(x) = x^3 - 1, x > 1$



γ) Σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

70. α) $(f \circ g)(x) = \frac{e^{x-10} - 1}{x-10}, x \neq 10,$
 $\beta)$ Είναι πάνω από τον $x'x$

71. α) $(f \circ g)(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1),$

β) Περίπτωση

72. Ευθεία $y = x$ χωρίς τα σημεία $O(0, 0)$
και $A(1, 1)$

73. $(g \circ f)(x) =$
 $= \begin{cases} \ln x + 3, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ -\ln^2 x - 2 \ln x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

74. $\lambda = -\frac{1}{2}$

75. $\alpha = 4, \beta = 1.$

76. $\alpha = -\frac{1}{2}$

77. $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

78. $\alpha = -1, \beta = 0$

79. $f(x) = \sqrt{1-x}, x < 0$

80. $f(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}x + 1, x \in \mathbb{R}$

81. $f(x) = 2x^2 + 9x + 8, x \in \mathbb{R}$

82. $g(x) = -x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$
 $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$

83. α) $D_{f \circ g} = (-1, 0) \cup (0, 1)$

β) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in \mathbb{R}^*$

γ) $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

84. $f(x) = \frac{x^2 + x}{3}$

85. $f(x) = \frac{3x+3}{3x+1}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

86. $g(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}, x \in \mathbb{R}^*$

87. i) $\eta \mu x, 3x^2 - 2x,$

ii) $\sqrt{x}, e^x + 1, \frac{x}{2},$

$$\text{iii)} \quad 3x^2 + 2, \quad \eta\mu x, \quad \sqrt{x}, \quad 2x - 1,$$

$$\text{iv)} \quad \eta\mu x, \quad \ln x, \quad x^2 + 1,$$

$$\text{v)} \quad \ln x, \quad \eta\mu x, \quad \frac{1}{x},$$

$$\text{vi)} \quad \sqrt{x}, \quad x^2 + 5, \quad \eta\mu x, \quad x + 3$$

$$\text{vii)} \quad \ln x, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad \sqrt{x},$$

$$\text{viii)} \quad g(x) = x^5, \quad t(x) = \ln x,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sin x},$$

$$\text{ix)} \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1-x}{1+x}, \quad \eta\mu x,$$

$$\text{x)} \quad x^3 + x, \quad \eta\mu x, \quad x + \sqrt{x},$$

$$\text{xi)} \quad \ln x, \quad x^2 + 1, \quad \varepsilon\varphi x, \quad \sqrt{x},$$

$$\text{xii)} \quad e^x, \quad x \ln x$$

88. Θέστε στο $f(x-1)$ όπου x το $x+1$ και μετά στην $f(x)$ όπου x το $x+1$

89. $f(x) = -2x + \frac{11}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$

90. α) Θέστε όπου x το $x+1$,

β) $f(x) = -x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{22}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$

91. $f(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$

92. 1

93. Το 3 και το 6 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

94. α) Θέστε $x=1$,

β) Θέστε όπου x το $1-x$

95. Θέστε όπου x το $\frac{1}{x}$

96. $f(x) = \frac{1}{x}$

97. α. $f(x) = -\ln(e^{x^2+1} - 1)$

β. $f(x) = x$ γ. $f(x) = 1-x$

δ. $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 1)$

98. α) $f(x) = \ln x$

β) $(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{x-1},$

$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

γ) Αδύνατη

99. α) Θέστε $x=y=1$, β) Θέστε όπου x το y οπότε $f(x)=\ln x, x>0$.

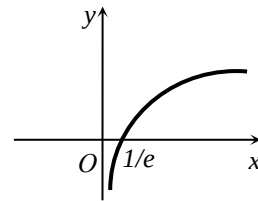
100. α) 4, β) 1 γ) $x=1$ δ) $f(x)=2^x$.

101. Αφού βρείτε ότι $f(0)=1$ θέστε $x=0$.

102. Θέτουμε όπου y το x , κατόπιν όπου x το $1-x$ και βρίσκουμε $f(x)=x^2+2x$.
Θέτουμε $y=0$ και βρίσκουμε $g(x)=x^2+2x$

103. α) $f(x) = \ln x + 1, \quad x > 0$

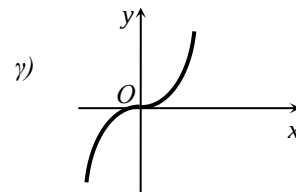
β)



104. $f(x) = 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

105. $f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R},$
 $g(x) = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

106. α) $f(0)=0$, β) $f(x)=x^3$



107. α) Προκύπτει από τη σχέση $f(-x) = -f(x)$ θέτοντας όπου $x=0$,

β) $f(x) = \begin{cases} -1 - x^2 \sin x, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1 + x^2 \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

108. $f(x) = x^2 + x, \quad x \in \mathbb{R}$

109. i) Θέστε $x=y=0$ ii) Θέστε $y=-x$

iii) Για $y=0$ προκύπτει $f(x) \geq x$ στην οποία θέστε όπου x το $-x$

110. Θέστε όπου x το $f(x)$

111. α) Θέστε όπου x το $f(x)$,
β) $f(-2) = -2$

112. $f(1) = 1$

113. $\frac{1}{2}$

114. β) $f(3)=3$ γ) $\alpha=-21$

δ) $f(x) = \frac{4x+15}{2}$

Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

115. α) f γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$,
β) f γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

116. α) $0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$ και
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$ αφού $\eta\mu \uparrow$

στο $[0, \frac{\pi}{2}]$..., β) Ομοίως

117. α) f γν. φθίνουσα β) $x \in (-5, 1)$

118. α) f γν. αύξουσα, g γν. φθίνουσα,
β) $x > 0$, $0 < x < 1$

119. α) Γν. Αύξουσα, β) $x > 1$

120. $-1 \leq x \leq 4$

121. Δείχνουμε για κάθε
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα f
γνησίως φθίνουσα.

$$\left. \begin{aligned} x+4 < 4 &\Leftrightarrow f(x+4) > f(4) \Leftrightarrow f(x+4) > 0 \\ x < 0 &\Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 < x^2 + x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > \frac{1}{2}$$

122. β) H C_f κάτω από τον $x'x$ για
 $1 < x < 2$ και πάνω από τον $x'x$ για
 $x > 2$

123. i. $0 < x < 1$ ii. $0 < x < 1$

124. α) Γν. αύξουσα β) $x \neq 0$
γ) $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$

125. α) Γν. αύξουσα β) $-1 < x < 0$

126. α) f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$
β) $x < -1$ ή $x > 1$

127. α) f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$
β) $0 < x < 1$ ή $x > 2$

128. α) f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
β) $x > 0$

129. α) $(10x+5)^9 - e^{3x-1} < -e^{10x+5} + (3x-1)^9$
 $\Leftrightarrow (10x+5)^9 + e^{10x+5} < (3x-1)^9 + e^{3x-1}$

$$\begin{array}{c} \text{Av } f(x) = x^9 + e^x \\ \text{τότε} \end{array} \Leftrightarrow f(10x+5) < f(3x-1) \Leftrightarrow$$

β) $\ln(x^2+x) + x^2 > \ln(x+3) + 3 \Leftrightarrow$

$$\ln(x^2+x) + x^2 + x > \ln(x+3) + 3 + x \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} \text{Av } f(x) = \ln x + x \\ \text{τότε} \end{array} \Leftrightarrow f(x^2+x) > f(x+3) \Leftrightarrow \dots$$

130. β) $x \in (0, 1)$

131. α) h γνησίως φθίνουσα β) $x \geq 1$

132. $x < 2$

133. α) f γν. φθίνουσα, β) $-1 < \lambda < 2$

134. α) Γνησίως αύξουσα β) $x \geq 0$
γ) Είναι $2x < 3x$ και $e^x > 1$ οπότε...

135. Είναι

$$x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{6^x} > 1 \Leftrightarrow 5^x > 6^x,$$

οπότε ...

136. Είναι $1 < 2 \Leftrightarrow \ln x < 2 \ln x \Leftrightarrow \dots$ και
 $7 < 13 \Leftrightarrow 7 \ln x < 13 \ln x \Leftrightarrow \dots$

137. α) Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και
γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

β) Για $x < 0$ και $x > 0$ δείξτε ότι
 $f(2x) + f(4x) > f(3x) + f(5x)$
οπότε...

138. $x=1$

139. $x=0$

140. α) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$
β) i) γν. Αύξουσα ii) $x < 1$

141. α) γνησίως αύξουσα

142. γ) $x < 0$ δ) $0 < x < 1$

143. Έστω f γνησίως αύξουσα, ...άτοπο

144. α) Γνησίως φθίνουσα
β) $f(0)=0$

- γ) Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f^2$
 $\Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
 Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f^2$
 $\Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- 145.** α) Εστω ότι είναι γνησίως φθίνουσα και άτοπο β) $x > 1$
- 146.** α) Γνησίως αύξουσα β) $2 \leq x \leq 5$
- 147.** • Αν $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ η C_g βρίσκεται πάνω από τον x' .
 • Αν $x \in (-1, 1)$ η C_g βρίσκεται κάτω από τον x' .
- 148.** α) Αν $x \in (0, 1)$ τότε $f(x) < 0$ και αν $x \in (1, +\infty)$ τότε $f(x) > 0$
 β) Είναι $0 < \ln \alpha < 1 < \ln \beta$ οπότε.....
- 149.** α) g γνησίως φθίνουσα
 β) $-2 < x < 2$
- 150.** α) f γνησίως αύξουσα
 β) Είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \dots\dots$
 γ) $0 < x < 1$
- 151.** α) f γνησίως αύξουσα.
 β) Είναι $f(2016) < f(2017)$
- 152.** α) f γνησίως φθίνουσα
 β) $\frac{e+2}{e+1} > \frac{\pi+2}{\pi+1}$ και $\alpha > \beta$.
- 153.** Εστω ότι είναι γνησίως μονότονη και άτοπο.
- 154.** i) Αν $\rho_1 < \rho_2$ ρίζες της f τότε αν η f είναι γν. μονότονη τότε άτοπο.
 ii) $H \setminus f$ έχει 2 ρίζες τις 0 και 1 οπότε....
 iii) $H \setminus f$ έχει 2 ρίζες τις e και 4 οπότε....
- 155.** i) $A(1, 0)$
- 156.** β) $x > 0$
- 157.** Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$ και $\ln(x+1) > 0$
- 158.** Διακρίνετε τις περιπτώσεις $x < 0$ και $x > 0$.
- 159.** $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- 160.** $x < 1$
- 161.** $x \in (-3, 3)$
- 162.** $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- 163.** Αν $g(x) = x^3 + e^x + 1$ τότε $g : \gamma\gamma$.
 αύξουσα και $(g \circ f)(x) = x$ οπότε ή
 αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ αφού αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε ... άτοπο
- 164.** β) i) f γνησίως φθίνουσα
 ii) $x < -2$ ή $x > 2$
- 165.** Είναι $(f \circ g)(x) = 1 + e^{-x} : \gamma\gamma$ γνησίως φθίνουσα όπου $f(x) = x^5 + e^x : \gamma\gamma$ γνησίως αύξουσα
- 166.** α) $f(0) = 1$ β) Καντε χρήση της γν. αύξουσας συνάρτησης $g(x) = x + x^3$
 γ) $x > 0$
 δ) Είναι

$$f(\alpha + \beta) > \frac{\beta f(\alpha) + \alpha f(\beta)}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow$$

$$\alpha[f(\alpha + \beta) - f(\beta)] +$$

$$+ \beta[f(\alpha + \beta) - f(\alpha)] > 0 \text{ που ισχύει.}$$
- 167.** α) $f(x) = \ln x + x$,
 β) η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.
- 168.** β) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$
- 169.** Διακρίνετε τις περιπτώσεις :
 • Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$
 • Αν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$
 • Αν $x_1 \in (-\infty, 1]$ και $x_2 \in (1, +\infty)$
- 170.** Για κάθε $x_1 < x_2$ δείξτε ότι
 $g(x_1) - g(x_2) \geq (\kappa - 1)(x_1 - x_2) > 0$
 ή ότι $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$
- 171.** α) Μέγιστο το $f(1) = 3$,
 β) Μέγιστο το $2e - 3$ και ελάχιστο το -1
 γ) Μέγιστο το 1 και ελάχιστο το $1 - 2\ln 2$
 δ) Μέγιστο το $f(1) = 1$ και ελάχιστο το $f(0) = 0$
- 172.** α) $f(x) = -x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x + 5) =$
 $= -(x^2 - 4x + 4 + 1) = -(x - 2)^2 + 1]$

$$f(x) = -(x-2)^2 - 1. \text{ Είναι: } (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x-2)^2 - 1 \leq -1 \\ x > 1$$

Οπότε το $f(2)$ είναι ολικό μέγιστο της f .

β) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$g(x) \geq g(2) = -1 \text{ για κάθε } x \in D_g$$

$$\gamma) f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 5 = -\frac{4x}{x^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

$$x^4 + 4x^2 - 4x^3 - 16x + 5x^2 + 20 = 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20 = 0$$

σχήμα Horner

$$\Rightarrow x = 2.$$

Άρα κοινό σημείο το $A(2, -1)$.

173. Είναι

$$[f(\alpha) - 3] + 2[f(\beta) - 3] = 0$$

$$\text{με } f(\alpha) - 3 \leq 0 \text{ και } 2[f(\beta) - 3] \leq 0$$

$$\text{άρα } \alpha = \beta = 2$$

174. Δείξτε ότι $g(x) \geq 4 = g(2)$

175. Δείξτε ότι

$$f(x) \leq 1 = f(x_0) \text{ όπου } g(x_0) = h(x_0)$$

176. Δείξτε ότι

$$f(x) \geq 3 = f(x_0) \text{ όπου } g(x_0) = 1$$

177. α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_g$

$$\text{ώστε } -2 = g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2) = 2$$

για κάθε $x \in D_g$

β) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in D_f$ ώστε $f(\kappa) = \alpha$ και

$$f(\lambda) = \beta \text{ και } -4 \leq g(\kappa) + g(\lambda) \leq 4,$$

οπότε.....

178. Είναι $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

179. α) Είναι $f(x) \geq f(1) = 3$. β) $\alpha = \beta = 1$

180. α) Είναι $f(x) \leq f(1) = 2$. β) $\alpha = \beta = 1$

181. Είναι $1 - h(x) = (f(x) - g(x))^2 \geq 0$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα.....

182. Είναι $2 - h(x) = (f(x) - f(1-x))^2 +$
 $+ (g(x) - g(1-x))^2 \geq 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}, \text{ και } h\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

183. i. Αν $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x_0)$ τότε....

$$f(x) \leq f(x_0)$$

$$\text{ii. } H g(x) = f^5(x) + f(x) + 1$$

παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, οπότε.....

184. $H g(x) = x^3 + e^x + 1$ είναι γν. αύξουσα
και ισχύει $g(f(x)) \geq g(f(0))$,
οπότε.....

Συνάρτηση «I - I» - Αντίστροφη συνάρτηση

185. α) «I - I» β «I - I», γ) «I - I»,
δ) «I - I», ε) «I - I», στ) «I - I»,
ζ) «I - I», η) όχι «I - I»,
θ) όχι «I - I»

186. Είναι $f(x) = (\ln x - 1)^3 + 1$, οπότε

187. Δείχνουμε ότι είναι I-I με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

διακρίνοντας περιπτώσεις για $x \leq 1$

και $x > 1$. Αν $x_1 \leq 1 < x_2$ τότε

$$f(x_1) \neq f(x_2). \text{ Αλλιώς με την γραφική} \\ \text{παράσταση.}$$

Για κάθε $x \leq 1$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ άρα } f \nearrow, \text{ ενώ για}$$

κάθε $x > 1$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ άρα } f \searrow, \text{ άρα } f \text{ όχι}$$

μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

188. $x = -4$ ή $x = 1$

189. i) Δείξτε ότι f γν. φθίνουσα

ii) $x = 0$ iii) Είναι $f(\lambda) = f(\mu)$ οπότε...

iv) $x = 1$

190. β) $x = 1$ γ) $x > 1$

191. β) $x = 1$ γ) $x > 1$

192. β) i. $x = 2$, ii. $x = \pm\sqrt{2}$, iii. $x = 1$ ή $x = 2$.

193. β) i. $x = 1$ ii. $x = \pm 1$.

- 194.** α) i) αν $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$, ii) Δείξτε ότι g γν. φθίνουσα,
β) $x = 0$ ή $x = 1$
- 195.** β) $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$
- 196.** Η f δεν είναι «1-1» αφού ενώ $0 \neq 3$ είναι $f(0) = f(3)$
- 197.** Η f δεν είναι «1-1» αφού η δοθείσα σχέση γράφεται $(f(1) - 1)^2 + (f(2) - 1)^2 + (f(1) - f(2))^2 = 0$ απ' όπου προκύπτει ότι $f(1) = f(2)$.
- 198.** Θέστε όπου x διαδοχικά το 0 και το 2017, προσθέστε κατά μέλη και δείξτε ότι $f(0) = f(2017)$.
- 199.** Θέστε όπου x διαδοχικά το 0 και το 1 και δείξτε ότι $f(0) = f(1) = 1/2$.
- 200.** Είναι $f(x) = x(x^2 + ax - 2) + 1$ και το $x^2 + ax - 2$ έχει δυο ρίζες άνισες, οπότε...
- 201.** α) Θέστε στην $(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9$ όπου x πρώτα το 3 και μετά το $f(3)$
β) Είναι $0 \neq 3$ αλλά $g(0) = g(3)$.
- 202.** α) Στη σχέση $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ βάζουμε πρώτα όπου $x = f(x)$ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε για $x=1$ και βρίσκουμε $(f(1) - 1)^2 = 0$, άρα $f(1) = 1$.
β) Για $x=0$ στην $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ έχουμε ότι $g(0) = 1$, όμως επίσης θα είναι και $g(1) = 1^2 - 1 \cdot f(1) + 1 = 2 - 1 = 1$, άρα η g δεν είναι 1-1.
- 203.** α) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ και $2f(x_1) = 2f(x_2)$ οπότε προσθέτοντας κατά μέλη $x_1 = x_2$
β) $x=1$ ή $x=-2$
- 204.** α) Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1.
β) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και καταλήγουμε σε άτοπο.

γ) Στη σχέση

$$2(f(x))^3 + f(x) = 3x \text{ βάζουμε για } x=1 \dots$$

δ) $f(x^2 + x - 1) < f(1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$$

205. α) Είναι

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

β) Είναι $\varphi = g \circ f$ όπου $g(x) = x^3 + 2x - 3$

206. β) $\lambda > 1$

207. α) Για οποιαδήποτε x_1, x_2 με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ άρα}$$

$$f \nearrow.$$

β) Είναι $f(f(x)) \geq 12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) \geq f(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 2 = f(0) \Leftrightarrow x \geq 0$$

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$2x < 3x \text{ \& } 1 = e^0 < e^x \text{ και } f \nearrow, \text{ άρα προσθέτοντας κατά μέλη ...}$$

δ) Η εξίσωση

$$f(2x) + f(e^x) = f(3x) + f(e^{2017x})$$

έχει προφανή ρίζα την $x=0$, και

δείχνουμε την μοναδικότητα με

$$2x > 3x \text{ \& } e^x > e^{2017x} \text{ και } f \nearrow, \text{ άρα}$$

$$f(2x) + f(e^x) > f(3x) + f(e^{2017x}) \text{ για}$$

κάθε $x \leq 0$.

208. Α. i) f γνησίως αύξουσα, ii) $x = 0$,

Β. iii) $x > 0$

209. α) Δείχνουμε ότι η $g(x) = x^3 + 2^x$ είναι

γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

β) Είναι $f(1) = 4$ και $f(5) = 3$ με

την f γνησίως μονότονη, άρα η f θα είναι γνησίως φθίνουσα.

$$f(1 + f(x+7)) > 3 \Leftrightarrow f(1 + f(x+7)) >$$

$$> f(5) \Leftrightarrow 1 + f(x+7) < 5 \Leftrightarrow f(x+7) < 4 \Leftrightarrow$$

$$f(x+7) < f(1) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} x+7 > 1 \Leftrightarrow x > -6$$

$$\gamma) f(x^6 + 2^{x^2} - 2) = 4 = f(1) \stackrel{f \uparrow-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 2^{x^2} - 2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 2^{x^2} = 3 \Leftrightarrow g(x^2) = g(1)$$

$$\stackrel{g \uparrow-1}{\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$210. \text{ iv) } \alpha = 1 \quad \eta \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$211. \text{ a) Av } g(x_1) = g(x_2) \text{ τότε } f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \text{ οπότε } \dots, \\ \beta) x = 1 \quad \eta \quad x = 3$$

$$212. \text{ i. Av } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } f(f(x_1)) = f(f(x_2)), \text{ οπότε } \dots \text{ ii. } x=0$$

$$213. \text{ i. Av } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } f(f(x_1)) = f(f(x_2)), \text{ οπότε } \dots \\ \text{ ii. } x=-3 \quad \eta \quad x=1 \quad \eta \quad x=2$$

$$214. \text{ i) Είναι } f(x_1) = f(x_2) \text{ άρα } f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \dots, \\ \text{ ii) Είναι } f(f(0)) = f(0) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι «1} \\ - 1 \text{»} \dots g(x) = 2\ln x - 3, x > 0$$

$$215. \text{ a) Av } \varphi(\chi_1) = \varphi(\chi_2) \text{ τότε } \varphi(\varphi(\chi_1)) = \varphi(\varphi(\chi_2)) \text{ οπότε } \dots, \\ \beta) \text{ Θέστε όπου } \chi = 1 \quad \gamma) \alpha = 1$$

$$216. \beta) f(1) = 1$$

$$217. \text{ i) Av } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } \dots x_1 = x_2 \\ \text{ ii) } x = 1$$

$$218. \text{ i) Av } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } \dots x_1 = x_2 \quad \text{ ii) } 2$$

$$219. \gamma) f(x) = x, x \in \mathbb{R}$$

$$220. \text{ A. a) Είναι } f(x_1) = f(x_2) \text{ άρα } g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \dots, \\ \beta) \text{ Είναι } g(x_1) = g(x_2) \text{ και } x_1 = f(a), \\ x_2 = f(\beta) \text{ αφού } f(A) = \mathbb{R} \dots \\ \text{ B. i) Av } \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \text{ τότε } \dots x_1 = x_2 \text{ ή } \\ \text{ κάντε χρήση του προηγούμενου } \\ \text{ ερωτήματος ii) } x = 1 \text{ ή } x = 2$$

$$221. \beta) x = 1$$

$$\gamma) g(x) = \ln x, x > 0$$

$$222. \text{ a) } x=1 \quad \beta) \text{ Av } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε}$$

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 0 \text{ οπότε } \dots \gamma) \text{ Θέστε όπου } x \text{ το}$$

$$1 \text{ και όπου } y \text{ το } x$$

$$\delta) x = 1$$

$$\varepsilon) \text{ Av } 0 < x_1 < x_2 \text{ τότε } \frac{x_2}{x_1} > 1$$

οπότε....

$$223. \text{ a) } f(1) = 2, \quad f(e) = 2e + 1$$

$$\beta) f(x) = \ln x + 2x \quad \delta) -1 < x < 1$$

$$224. \text{ i) } f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 4x + 5), \quad x \geq 2,$$

$$\text{ ii) } f^{-1}(x) = -\ln(1 - e^x), \quad x < 0,$$

$$\text{ iii) } f^{-1}(x) = \ln \frac{x+5}{3} + 2, \quad x > -5,$$

$$\text{ iv) } f^{-1}(x) = x^4 - 8x^2 + 18, \quad x \in [0, 2],$$

$$\text{ v) } f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x \neq 1,$$

$$\text{ vi) } f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ vii) } f^{-1}(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ viii) } f^{-1}(x) = \frac{\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}}{\ln 2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ ix) } f^{-1}(x) = \frac{\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}}{\ln(\sqrt{5} + 2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$225. \text{ a) } f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1), \text{ με } x > 0$$

$$\beta) f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1), \text{ με } x > 0$$

$$\gamma) f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} + 1, \text{ με } x \geq -2$$

$$\delta) f^{-1}(x) = -\frac{\ln(e^x - 1)}{2}, \text{ με } x > 0$$

$$\varepsilon) f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} - 1, \text{ με } x \geq 1$$

$$\sigma\tau) f^{-1}(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \text{ με } 0 < x < 1$$

$$226. \text{ a) Είναι } f(x) = (x+1)^3 + 2 \text{ οπότε } \dots$$

$$\beta) f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} - 1, & x \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-x} - 1, & x < 2 \end{cases},$$

$$\gamma) x = -1$$

227. β) $g^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}, \quad x \in (0, 1),$

γ) $(g^{-1} \circ f)(x) = \ln \frac{1-\ln x}{\ln x}, \quad x \in (1, e)$

δ) $1 < x < \sqrt{e}$

228. α) Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, συνεπώς θα αντιστρέφεται.

β) $x=e$.

229. Α) Είναι $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$, με $D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $g(-x) = -g(x)$

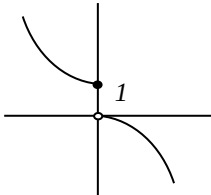
γ) Είναι $(g \circ f^{-1})(x) = \frac{x}{x-2}$, με:

$D_{g \circ f^{-1}} = (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

δ) $x \in (1, 2)$.

230. $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1+2x^2}{x^2}, \quad x > 0$

231. α)



β) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln x, & x \geq 1 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$

232. $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x^2, \quad x \geq 0$. Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$

233. $f^{-1}(x) = x^3, \quad x \geq 0$. Η C_f είναι συμμετρική της $C_{f^{-1}}$ (που είναι γνωστή) ως προς την ευθεία $y=x$.

234. i. Η f είναι γνησίως αύξουσα

ii. $f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$

235. i. $A(0, 2)$ ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα iii. $f^{-1}(2) = 0$

236. i) $[1, +\infty)$ ii) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

iii) $f^{-1}(x) = (e^{x-1} - 1)^2 + 1, \quad x \geq 1$

iv) $x = \ln(\sqrt{2} + 1)$

237. α) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $\dots x_1 = x_2$

β) i) 2 ii) 1

238. i) Δείξτε ότι η f είναι γν. αύξουσα,

ii) $x=1$, iii) $1 < x < 2$, iv) $x=-2$ ή $x=-1$

239. α) f είναι γν. αύξουσα β) η f είναι «1-1» ως γνησίως μονότονη γ) $x=4$
δ) $x=0$ ε) $x \leq 0$

240. α) Δείξτε ότι η f είναι γν. φθίνουσα

β) i. $x=e+2$ ii. $x > 1$ iii. $x=0$
iv. $x \geq 0$.

241. α) Έστω ότι για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \leq 0 \Rightarrow \dots 1 \leq 0$ άτοπο, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2})^2 = (\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1.

Η αντίστροφη θα είναι η

$f^{-1}(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}, \quad x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$

γ) $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^3+x-7} + \sqrt{x^3+x-8}) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x^3+x-7} + \sqrt{x^3+x-8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x-7} + \sqrt{x^3+x-8}}.$

$\cdot \frac{\sqrt{x^3+x-7} - \sqrt{x^3+x-8}}{\sqrt{x^3+x-7} - \sqrt{x^3+x-8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x^2+x-8) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

242. α) $x=-3$ ή $x=1$, β) $x > 0$

243. γ) $\lambda=0$ ή $\lambda=2$

244. $x=-3$ ή $x=3$

245. $\lambda < 1 + \ln 3$

246. i. $f(5)=-5$ ii. H f είναι 1-1 iii. 4

iv. $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$

247. α) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$ ή f γν. αύξουσα στο $[2, +\infty)$,

β) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$,

γ) $A(2, 2)$, $B(3, 3)$

248. α) f γν. αύξουσα, άρα «1-1»,

β) $A(2, 2)$, γ) $x > 0$

249. γ) $x = 1$

250. α) H f είναι γν. αύξουσα. β) $x < 2$

251. α) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f^5(x_1) = f^5(x_2)$, $f^3(x_1) = f^3(x_2)$,

β) $f^{-1}(x) = x^5 + x^3 + x - 4$,

γ) $x = 0$

252. β) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + e^x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

γ) $x = -1$ ή $x = 2$

253. α) Δείξτε ότι η f είναι «1-1»,

β) $x = 0$ γ) $f^{-1}(x) = x^5 + 2x$

254. α) Δείξτε ότι η f είναι «1-1»,

β) $f^{-1}(x) = e^{x^3-4} + 1$

255. α) Για κάθε

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$, άρα h

γνησίως αύξουσα.

β) H σχέση

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \Leftrightarrow \dots$

γ) $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

256. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε

$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow \dots$

ii) $f(1) = 1$.

iii) α) Θέστε στη δοθείσα σχέση όπου x

το $f^{-1}(x)$ β) $f(3) = 5$ γ) $x = \frac{3}{2}$

257. α) Χρήση της βοηθητικής συνάρτησης

$h(x) = e^x + \ln x$ η οποία είναι

γνησίως αύξουσα.

β) $h(f(0)) = e = h(1) \Leftrightarrow f(0) = 1$

γ) $f^{-1}(x) = e^x + \ln x - e$, $x > 0$

δ) $x = 0$

258. α) $f^{-1}x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$,

β) $f(1) = 0$, $f(2 + \ln 2) = 2$,

γ) $x = -5$

259. α) Δείξτε ότι είναι «1-1» β) $x = 0$

γ) i) Αν f γν. αύξουσα τότε ... άτοπο.

Άρα f γν. φθίνουσα. ii) $x \in (0, 1)$.

260. β) $x < 1$, γ) 0, δ) $x < 1$

261. i. H f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

ii. Μοναδική ρίζα η -1. $f^{-1}(x) > 0$ για $x > -1$ και $f^{-1}(x) < 0$ για $x < -1$

iii. $f(x) > x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(x) \Leftrightarrow \dots$

262. i. H f είναι γνησίως αύξουσα

ii. Είναι $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x))$ και

η f είναι περιττή, οπότε ...

iii. 1 iv. $f^{-1}(x) > 0$ για $x > 0$

και $f^{-1}(x) < 0$ για $x < 0$

263. α) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε

$f(f(x_1)) = f(f(x_2))$,

β) Θέστε όπου x το $f^{-1}(x)$,

γ) Υποθέστε ότι η f είναι γν. μονότονη π.χ. γν. αύξουσα και καταλήξτε σε άτοπο,

δ) Είναι $f(f(f(x))) = f(-x)$ και αν θέσουμε όπου το x το $f(x)$ είναι $f(f(f(x))) = -f(x)$, άρα...

ε) Θέστε $x = 0$ στη σχέση $f(-x) = -f(x)$.

264. α) Είναι

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

άρα η f είναι 1-1.

β) Στη σχέση $(f \circ f)(x) = x - 1$

βάζουμε όπου $x = f^{-1}(x)$

γ) Έστω ότι υπάρχει κάποιο

$x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = x_0$, τότε η

$(f \circ f)(x) = x - 1$ θα μας δώσει

ότι και $f(x_0) = x_0 - 1$, άρα $-1 = 0$,

άτοπο. Οπότε η εξίσωση $f(x) = x$

είναι αδύνατη.

265. α) Θέστε $\alpha = \beta = 0$,

β) Θέστε $\alpha = x$ και $\beta = -x$,

γ) Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$$\text{Αν } x = f(a) \text{ και } y = f(\beta) \text{ τότε}$$

$$f(a + \beta) = x + y \Leftrightarrow$$

$$a + \beta = f^{-1}(x + y) \Leftrightarrow \dots$$

- 266.** α) Αν υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1) = 0$ τότε υπάρχει και $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_2) \neq 0$, αφού η f δεν είναι σταθερή.
Για $x = x_1$ και $y = x_2 - x_1$ καταλήζτε σε άτοπο.

β) Θέστε όπου $y = 0$, γ) Θέστε όπου $y = -x$, δ) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, θέστε στη δοθείσα σχέση όπου $x = x_1$ και $y = -x_2$. Ακόμη αν $f(x) = a$ τότε $x = f^{-1}(a)$ και αν $f(y) = \beta$ τότε $y = f^{-1}(\beta)$ και δείξτε ότι $f^{-1}(a) + f^{-1}(\beta) = f^{-1}(a\beta)$

- 267.** Β. α) Δείξτε ότι η f είναι γν. αύξουσα β) 1 γ) $x = 1$ ή $x = 2$ δ) $x = -1$.

- 268.** α) $f \uparrow$, β) $x = -1$, γ) $f^{-1}(1) = 0$.

- 269.** α) Δείξτε ότι η f είναι γν. αύξουσα β) $x = 3$ γ) $A(3, 3)$.

- 270.** α. $A = (0, +\infty)$ β. Η f είναι γνησίως αύξουσα. γ. $M(1, 1)$

- 271.** α) Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται ή για οποιαδήποτε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ άρα}$$

f γνησίως αύξουσα

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3x+1}{4}}, & x \geq -\frac{1}{3} \\ -\sqrt[3]{\frac{-3x-1}{4}}, & x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

β) Αφού f γνησίως αύξουσα η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ θα είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$f(x) = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+4x+1) = 0, \text{ άρα}$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{2}. \text{ Άρα τα κοινά}$$

σημεία είναι τα $A(1, 1)$ και

$$B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma) A(1, 1) \text{ και } B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

- 272.** α) Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται

$$f^{-1}(x) = -x^3 - 5x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) O(0, 0) \quad \gamma) O(0, 0)$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

- 273.** α. $x=0$. Αν $x>0$ τότε $f(x)>0$, αν $x<0$ τότε $f(x)<0$ β. Η f είναι 1-1

$$\gamma. f^{-1}(x) = x^3 + x \quad \delta. x=1$$

- 274.** α. $x=0$. Αν $x>0$ τότε $f(x)>0$, αν $x<0$ τότε $f(x)<0$ β. Χρήση της βοηθητικής συνάρτησης $g(x) = e^x + x - 1$ γ. $x=0$

- 275.** α. Χρήση της βοηθητικής συνάρτησης

$$g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$$\beta. f^{-1}(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma. x = \pm 1$$

- 276.** α. f γνησίως αύξουσα β. $x = 0$ γ. Χρήση της βοηθητικής συνάρτησης

$$g(x) = e^x + x^3 - 1$$

- 277.** α. $A = (-\infty, 0)$ β. f γνησίως φθίνουσα. $x = 0$. Αν $x > 0$ τότε $f(x) < 0$, αν $x < 0$ τότε $f(x) > 0$ γ. Είναι

$$f^{-1}(f(x) - \ln(-x) + 1) + 1 < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < 0$$

- 278.** α. $f^{-1}(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\beta. f(0) = 0. \quad \gamma. \text{ Είναι } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$\delta. O(0, 0)$$

- 279.** α. $x = 0$

$$\beta. i. \text{ Για } x=0 \text{ βρείτε } f(1)=0. \text{ Η}$$

γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$ για $x > 1$.

ii. Με χρήση της βοηθητικής συνάρτησης

$$h(x) = f(x) - e^{x-1} + 1 \text{ βρείτε } x > 1.$$

280. i. $D_f = (-2, 2)$

ii. $f^{-1}(x) = \frac{2(e^x - 1)}{1 + e^x}, x \in \mathbb{R}$

iii. $f^{-1}(-x) = \frac{2(e^{-x} - 1)}{1 + e^{-x}} = \frac{2\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)}{1 + \frac{1}{e^x}} =$

$$= \frac{2 \frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = \frac{2(1 - e^x)}{e^x + 1} =$$

$$= -\frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1} = -f^{-1}(x)$$

iv. $(f^{-1} \circ g)(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x)}{1+x} < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(1-x)(1+x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

Αλλά $x > 0$ οπότε $x > 1$

281. A $f(x_1) = f(x_2)$ άρα

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2))$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη ...

B. i. $g(x) = \ln x + x + 1, x > 0$

ii. g γνησίως αύξουσα, άρα $1 - 1$.

iii. $|\lambda| + 1 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

iv. $2x^2 + 3 < x^2 + 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

v. Η εξίσωση

$$g(x) + g(x^2) = g(x^5) + g(x^{10})$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο

$$(0, +\infty), \text{ την } x = 1$$

Αν $0 < x < 1$ τότε $x > x^5$ και επειδή η

g είναι γνησίως αύξουσα ισοδύναμα θα

έχουμε $g(x) > g(x^5)$ $x^2 > x^{10}$ και

επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα

ισοδύναμα θα έχουμε $g(x^2) > g(x^{10})$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$g(x) + g(x^2) > g(x^5) + g(x^{10})$$

Αν $x > 1$ τότε $x < x^5$ και επειδή η

g είναι γνησίως αύξουσα ισοδύναμα

θα έχουμε $g(x) < g(x^5)$ $x^2 < x^{10}$

και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα

ισοδύναμα θα έχουμε $g(x^2) < g(x^{10})$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$g(x) + g(x^2) < g(x^5) + g(x^{10})$$

282. α. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(1) = -1 \text{ \& } f(-1) = 1$$

β. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{με } f(x_1) = f(x_2) \text{ έχουμε:}$$

$$\left. \begin{aligned} f^3(x_1) &= f^3(x_2) \\ f(x_1) &= f(x_2) \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f^3(x_1) + f(x_1) =$$

$$= f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow -x_1^3 - x_1 = -x_2^3 - x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 2 = 0, \text{ αδύνατο.}$$

γ. $x = e^3$ ή $x = e^{-3}$

δ. i. Γνησίως φθίνουσα. ii. $-3 < x < 3$

283. i. Η f είναι γνησίως μονότονη

ii. $A(4, 0)$. iii. $-2 < x < 2$

iv. Για κάθε $x < 0$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} x+4 < 4 &\Leftrightarrow f(x+4) > f(4) \Leftrightarrow f(x+4) > 0 \\ x < 0 &\Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{άρα } \frac{f(x+4)}{e^x - 1} < 0$$

Ομοίως για $x > 0$ v. $x = 0$

284. α. Η f είναι γν. αύξουσα. β. $\kappa = 1$

γ. $g^{-1}(x) = \ln(e^{x+1} - 1), x > -1$

δ. $-1 < x < \ln 2 - 1$ ε. $x = \ln(e - 1)$

285. α. $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \dots$
 β. $x = 1$ γ. $-\ln \alpha \in g(\mathbb{R})$ οπότε....

286. α. $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
 β. $x > 0$
 γ. $g^{-1}(x) = (x^2 - x + 1) \ln x, \quad x > 0$
 δ. $x = 0$

287. α. $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
 β. Γνησίως φθίνουσα
 γ. Είναι $f(\alpha) > f(\beta)$ οπότε...
 δ. $x = \pm\sqrt{2}$

288. α. Θέστε $\ln x = y$
 β. Γνησίως φθίνουσα γ. Είναι $x < 0$
 δ. $x = 0$

289. α. Θέστε $A = \mathbb{R}^*$ Δεν τους τέμνει β.
 $f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{x-1},$
 $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

γ. Είναι $x = 2$

290. α. f γνησίως αύξουσα. $f(0) = 0$
 β. $x < -1$ ή $x > 1$
 γ. Είναι $x = 4$ ή $x = -1$
 δ. $O(0, 0)$

291. α) Θέτουμε

$$e^x + 1 = t(x) \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ t > 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = t - 1 \Leftrightarrow x = \ln(t - 1)$$

 β) f γνησίως αύξουσα

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right) =$$

$$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, A(2, 2)$$

 γ) $f(e^2 + 1) = e^2 + 3,$

$$x = \ln(e^2 + 1) + e^2 + 1$$

 δ) η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 2)$

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

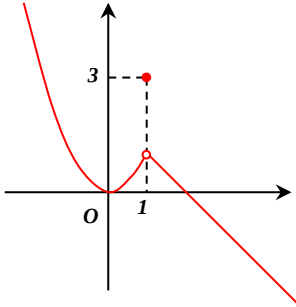
292. i) 3 ii) 1 iii) $1/2$ iv) 2 v) 1 vi) δεν υπάρχει

293. i) 0 ii) 2 iii) 0 iv) δεν υπάρχει v) 0 vi) 1

294. $\lambda=2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x)=3$

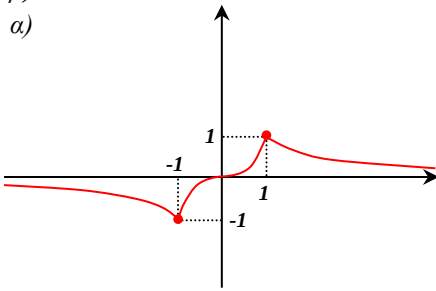
295. $\alpha=2, \beta=3$

296. α)



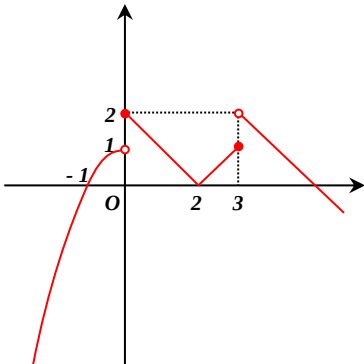
β) 1

297. α)



β) i) -1 ii) 1 iii) 0

298. α)



β) i) 0 ii) δεν υπάρχει iii) 0 iv) δεν υπάρχει

299. i) 5 ii) 2 iii) 1 iv) -1

300. i) 1 ii) 0 iii) 3 iv) 1

301. i) $\lambda=1$ ii) 0 iii) 1

302. i) -2, ii) $\frac{1}{5}$, iii) $-\frac{11}{3}$, iv) 4,

v) $\frac{9}{4}$, vi) $-\frac{3}{4}$, vii) 0, viii) 2,

ix) $\frac{1}{2}$, x) $\frac{3}{8}$, xi) -1 xii) $-\frac{1}{4}$

303. Είναι $\gamma = -\alpha - \beta$ και εφαρμόστε την ταυτότητα $x^y - y^x$. Αλλιώς DeL' Hospital

304. i) $-\frac{1}{56}$, ii) $\frac{3}{20}$, iii) $-\frac{1}{32}$,

iv) 1, v) $\frac{4}{3}$, vi) $-\frac{5}{4}$, vii) $-\frac{1}{10}$

, viii) $\frac{1}{2}$, ix) $\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{3}}$, x)

$-\frac{1}{3}$, xi) $\frac{4}{3}$, xii) $\frac{1}{16}$,

xiii) $\frac{1}{2}$, xiv) 6

305. α) $D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$
 $D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

β) $\frac{3}{4}, \frac{1}{12}$

306. $1/2$

307. i) $\frac{7}{4}$ ii) $-\frac{19}{6}$

308. $\frac{1}{6}$

309. $\frac{5}{12}$

310. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=2,$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=2,$

311. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=1$

312. Δεν υπάρχει

313. 1

314. $\frac{2}{3}$

315. α) 2, β) δεν υπάρχει

316. $\alpha = 0, \beta = 2$

317. $\alpha = -34, \beta = -7$

318. $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 1$

319. $\alpha = \frac{7}{6}, \beta = -\frac{1}{6}$

320. $\alpha = -1, \beta = 2$

321. $\alpha = 2, \beta = 1$

322. $\alpha = -1, \beta = 0$

323. $\alpha = 2, \beta = 4$

324. i) 6, ii) -10, iii) 4, iv) 3,
v) Δεν υπάρχει, vi) 0, vii) Δεν
υπάρχει, viii) 0, ix) -2, x) Δεν
υπάρχει, xi) Δεν υπάρχει, xii) Δεν
υπάρχει, xiii) Δεν υπάρχει, xiv) Δεν

υπάρχει, xv) $\frac{1}{2}$, xvi) $-\frac{5}{24}$

325. α) $(g \circ f)(x) = \sqrt{1-|x|}$, $-1 \leq x \leq 1$,
β) Δεν υπάρχει

326. $-\frac{3}{2}$

327. α) 3, β) $\frac{25}{12}$, γ) 12

328. Δείχνουμε ότι

$P(x)\eta\mu x + 1 > 0$ και $xP(-x) + 1 > 0$

κοντά στο μηδέν, σπάζοντας το
κλάσμα βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x)\eta\mu x + 1| - |xP(-x) + 1|}{x} = 0$$

329. i) -1, ii) -2, iii) 1, iv) 7

330. α) 3, β) 4

331. 1

332. α) $\alpha = 1$, β) 2

333. 2

334. 3

335. i) 4, ii) 1, iii) 4, iv) 8, v) $\frac{\sqrt{5}}{10}$,

vi) $\frac{1}{4}$

336. α) 0, β) 0

337. 3

338. i. 0 ii. 0 iii. 1

339. i) 15, ii) $\frac{1}{2}$, iii) $\frac{1}{4}$, iv) Δεν

υπάρχει, v) 0, vi) 6, vii) $-\frac{1}{2}$,

viii) $\frac{1}{2}$, ix) 0, x) Δεν υπάρχει,

xi) 0

340. 0

341. i) 2 ii) $\frac{1}{4}$

342. 0

343. i) 2, ii) 1

344. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1$$

345. Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$[f(x) - x]^2 \leq (\eta\mu x - x)^2.$$

Οπότε ...

346. i) -1 ii) -1

347. $v = 7$

348. $\alpha = 1$ και $\beta = 0$

349. Για $x=0$ βρίσκουμε $f(0)=0$.

Στη συνέχεια στη σχέση

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2 \text{ διαιρούμε με}$$

x διακρίνοντας περιπτώσεις. Με
κριτήριο Παρεμβολής βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ Στο όριο}$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\eta\mu x} + \lambda \right| \leq 1$$

διαιρούμε με x και με πράξεις

καταλήγουμε ότι $\lambda \in [-2, 0]$.

350. i) $f(0) = 0$

ii) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

iii) $f^{-1}(x) = -x^3 - 3x$

iv) $-\frac{1}{3}$ και -3

351. i) 0, ii) 0, iii) 0, iv) 0,
v) 0, vi) 0, vii) 0, viii) 0

352. 0

353. 0

354. α) 0, β) 0, γ) 0

355. Αφού το σύνολο τιμών είναι το
 $f(A)=(-4,3)$ άρα είναι $-4 < f(x) < 3$

Πολλαπλασιάζουμε με $\eta\mu x$
διακρίνοντας τις περιπτώσεις
 $x \rightarrow \pi^-$ είναι $\eta\mu x > 0$ ενώ όταν
 $x \rightarrow \pi^+$ είναι $\eta\mu x < 0$ και τελικά
βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta\mu x \cdot f(x)] = 0$

356. i) $\frac{1}{2}$, ii) 0, iii) 6, iv) -3,

v) $\frac{1}{4}$, vi) $\frac{1}{6}$

357. α) 1, β) 5

358. α) 0 β) 1 γ) 1

359. $\frac{\pi}{2}$

360. 2

361. -5

362. 1

363. Στο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(-x)$ θέστε $u = -x$

364. α) 6, β) -5

365. α) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x\sqrt{x}-1)}{x-1} \cdot \frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} = \dots = \frac{9}{2}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} = \dots = \frac{3}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}-1} = \dots = 3\beta.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3, \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + x \cdot f(x) - 2x^2}{f^2(x) - 4x^2} \stackrel{:\cdot x}{=} \dots = 2$$

366. i) Δεν υπάρχει ii) -2

367. 2026

368. Θέστε $u = x - a$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(u+a) - f(a)}{u} = \dots$$

369. Θέστε $u = \frac{x}{3}$

370. α) 3, β) $\frac{1}{6}$

371. α) -5, β) -5

372. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{7}{5}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{3}{5}$

373. 45

374. α) 12, β) 4

375. 1

376. α) 0, β) 0, γ) 4

377. -3

378. i) 1, ii) 2, iii) 2

379. i) 1 ii) 8

380. α) 1, β) 2

381. α) 4, β) -16 γ) -12

382. α) 0 και 3, β) 42, γ) 2

383. α) 1, β) -2

384. 2

385. α) Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \text{άρα...}$$

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 0$$

- β) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)}{\sigma\upsilon\nu x \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 1\right)} = \dots = 2$$

386. α) Θέστε $y = -x$ β) Θέστε $u = x - a$
γ) i) 2017 ii) 4034

387. α) Αν $f^{-1}(x) = x^2 - 4x, x \leq 2$
β) $(f^{-1} \circ g)(x) = 5 - x - 4\sqrt{5 - x},$

$$1 \leq x \leq 5$$

γ) 5

388. $l = 1$

389. i) 0, ii) 1

390. $l = 1$

391. 1

392. α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(mx)}{x} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(mx)}{mx} = \dots$

β) Είναι

$$f(mx) = \eta \mu x \Leftrightarrow \frac{f(mx)}{x} = \frac{\eta \mu x}{x}$$

άρα..

393. i) $l = 2$ ii) -16

394. $\alpha = \frac{1}{2}$

395. 0

396. 0

397. i) Διακρίνετε τις περιπτώσεις $x < 0$ και $x > 0$, ii) 8

398. Διαιρέστε με x διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x < 0$ και $x > 0$ και πάρτε τα όρια όταν $x \rightarrow 0$.

399. • Αν $x < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha \eta \mu(\alpha x)}{\alpha x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\beta \eta \mu(\beta x)}{\beta x} + \frac{\gamma \eta \mu(\gamma x)}{\gamma x} \right)$$

Άρα $\alpha \geq \beta + \gamma$

• Αν $x > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \eta \mu(\alpha x)}{\alpha x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\beta \eta \mu(\beta x)}{\beta x} + \frac{\gamma \eta \mu(\gamma x)}{\gamma x} \right)$$

Άρα $\alpha \leq \beta + \gamma$

400. Διαιρούμε με x^3 διακρίνοντας περιπτώσεις τη σχέση $x^3 \cdot f(x) < x \cdot \eta \mu^2 x$ και βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq 1,$$

οπότε τελικά είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

401. Διαιρούμε τη σχέση $f(x) \eta \mu x \leq \eta \mu 5x$ με x διακρίνοντας περιπτώσεις και βρίσκουμε ότι $\ell \leq 5$ και $\ell \geq 5$, συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell = 5.$$

Μη πεπερασμένο όριο στο

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

402. i) $-\infty$, ii) $+\infty$, iii) $+\infty$, iv) $-\infty$, v) δεν υπάρχει, vi) δεν υπάρχει, vii) δεν υπάρχει, viii) δεν υπάρχει, ix) $+\infty$, xi) $-\infty$, xii) δεν υπάρχει, xiii) $+\infty$, xiv) $+\infty$, xv) $-\infty$, xvi) $+\infty$, xvii) $+\infty$, xviii) $+\infty$, xiv) $+\infty$

403. i) δεν υπάρχει, ii) $+\infty$, iii) δεν υπάρχει, iv) δεν υπάρχει, v) $-\infty$, vi) $-\infty$, vii) $+\infty$, viii) $-\infty$, ix) $+\infty$

404. i) $+\infty$, ii) δεν υπάρχει, iii) δεν υπάρχει, iv) $+\infty$, v) δεν υπάρχει, vi) δεν υπάρχει, vii) δεν υπάρχει, viii) $-\infty$, ix) $-\infty$, xi) $+\infty$, xii) $+\infty$, xiii) $+\infty$

405. A. i) f γν. αύξουσα ii) $+\infty$ B. $+\infty$

406. i) δεν υπάρχει, ii) $+\infty$, iii) $-\infty$, iv) $-\infty$, v) $+\infty$, vi) $+\infty$, vii) $+\infty$, viii) $+\infty$, ix) $-\infty$

407. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x-\sqrt{x})} = \dots = -\infty$

και το

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x-\sqrt{x})} = \dots = -\infty \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+2}{(x-1)^3} = \dots = +\infty,$$

άρα δεν υπάρχει το όριο.

408. 3

409. i) $-\infty$, ii) $+\infty$, iii) $+\infty$, iv) 0

410. i) $+\infty$, ii) $-\infty$, iii) $-\infty$, iv) 0,

v) 0, vi) $-\frac{1}{3}$

411. α) $+\infty$, β) 0

412. $-\infty$

413. i) 0 ii) $+\infty$ iii) 1

414. i) 0 ii) $-\infty$ iii) 0

$$415. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \alpha \nu \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2 \\ +\infty, & \alpha \nu -2 < \lambda < 2 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \\ \alpha \nu \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 & \end{cases}$$

$$416. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu -2 < \lambda < 2 \\ -\infty, & \alpha \nu \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \\ \alpha \nu \lambda = \pm 2 & \end{cases}$$

$$417. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{|x - 2|} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu \lambda < 4 \\ -\infty, & \alpha \nu \lambda > 4 \\ 0, & \alpha \nu \lambda = 4 \end{cases}$$

418. $\text{Αν } \lambda \neq \pm 1 \text{ δεν υπάρχει. Αν } \lambda = \pm 1 \text{ τότε } 1.$

419. $\alpha = 1, \beta = 3$

420. $\alpha = 5, \beta = -6$

421. i) $A = (0, 4) \cup (4, +\infty)$ ii) $\alpha = -1, \beta = 4$

422. $\alpha = -2, \beta = -1$

423. $\alpha = -4, \beta = -5$

424. $\alpha = -4, \beta = 4, \gamma = 0$

425. $\mu = 1 \text{ ή } \mu = 2$

426. $\alpha = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{1}{6}$

427. Δεν υπάρχει λ

428. $\lambda = 1$

429. $\alpha = 4, \beta = -10$

430. $\lambda = -11, \mu = -16$

431. $\lambda = 1 \text{ ή } -4, L = 3$

432. $\alpha = -7, \beta = -6$

433. $\lambda = 1$

434. $\alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 2$

435. $\alpha > 3$

436. $\alpha = -4$

437. $\alpha = 3, \beta = -2$

438. Είναι $\alpha = -4, \beta = 6 \text{ και } \gamma = -18, \mu \epsilon$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

439. i. 0 ii. 2 iii. 8 iv. -3

440. $\alpha) \kappa = -\frac{1}{2} \text{ και}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\frac{1}{16}$$

$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

441. i) $+\infty$, ii) $+\infty$, iii) $\frac{2}{3}$,

iv) 0, v) $-\infty$, vi) $\frac{15}{4}$

442. α)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+2017)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} = \dots = 2017$$

$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2017)}{(x-2016)^{2016}} =$
 $= \dots = +\infty$

443. 2

444. α) -1, β) $-\infty$ γ) -2, δ) 0

445. α) $+\infty$, β) $+\infty$

446. i) $+\infty$, ii) $+\infty$, iii) $-\infty$,

iv) $-\infty$, v) $\frac{1}{2}$, vi) -1, vii) 0,

viii) $-\sqrt{2}$, ix) -1, x) $-\frac{5}{2}$, xi) $+\infty$

447. α) 2, β) $+\infty$, γ) $\frac{1}{2}$

448. 2

449. α) $-\frac{7}{4}$, β) $\frac{7}{2}$, γ) 1

450. α) -5, β) $\frac{1}{5}$, γ) 0, δ) 0 ε) 1
 στ) 0 ζ) $+\infty$ η) $+\infty$

451. 2

452. i. 0 ii. $-\infty$ iii. $\frac{1}{2}$

453. Με βοηθητική συνάρτηση
 $g(x) = 2f(x) + x - \sqrt{x^2 + x + 1}$,

βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{7}{4}$ οπότε θα

είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots = -\frac{7}{4}$

$$454. \alpha) \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu \lambda \leq 1 \\ -\infty, & \alpha \nu \lambda > 1 \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} +\infty, & \lambda < 1 \text{ ή } \lambda \geq 0 \\ -\infty, & -1 < \lambda < 0 \\ 0, & \lambda = -1 \end{cases}$$

$$455. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu \mu < 0 \text{ ή } \mu > 2 \\ -\infty, & \alpha \nu 0 \leq \mu < 2 \\ 0, & \alpha \nu \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \end{cases}$$

$$456. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu \alpha < 0 \text{ ή } \alpha \geq 1 \\ -\infty, & \alpha \nu 0 < \alpha < 1 \\ -1, & \alpha \nu \alpha = 0 \end{cases}$$

$$457. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$= \begin{cases} -\infty, & \alpha \nu \lambda < -5 \text{ ή } -2 < \lambda < 1 \\ +\infty, & \alpha \nu -5 \leq \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 1 \\ 0, & \alpha \nu \lambda = 1 \\ -1, & \alpha \nu \lambda = 2 \end{cases}$$

$$458. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu \lambda < 2 \\ -\infty, & \alpha \nu \lambda > 2 \\ \frac{1}{4}, & \alpha \nu \lambda = 2 \end{cases}$$

$$459. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu 1 < \alpha < 2 \\ -\infty, & \alpha \nu \alpha < 1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ -\frac{1}{2}, & \alpha \nu \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 2 \end{cases}$$

$$460. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \nu \alpha > -2 \\ -\infty, & \alpha \nu \alpha < -2 \\ 0, & \alpha \nu \alpha = -2 \end{cases}$$

$$461. \alpha = 1, \beta = -4$$

$$462. \alpha = 1, \beta = 4$$

$$463. \alpha = -1, \beta = \frac{5}{2}$$

$$464. \alpha) \alpha = 3 \text{ και } \beta = \frac{8}{3}, \beta) +\infty$$

$$465. \alpha = 1, \beta = -1$$

$$466. \alpha = -3, \beta = 4$$

$$467. \alpha = 3 \text{ και } \beta = \frac{1}{2}$$

$$468. 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + 3x^2}{x^2 f(x) - \lambda x^4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lambda$$

$$= \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x^2) = 3 \dots \Leftrightarrow \lambda = 6$$

$$469. \alpha) 3, \beta) 2$$

$$470. 0$$

$$471. \alpha) 3, \beta) -\infty$$

$$472. 3$$

$$473. \text{i) } +\infty \text{ ii) } 3 \text{ iii) } 2 \text{ iv) } +\infty \text{ v) } \frac{5}{7}$$

$$474. 2$$

$$475. \mu = 7$$

$$476. \lambda = -9$$

$$477. \alpha = \frac{5}{9}$$

$$478. \mu = -1$$

$$479. 5$$

$$480. \alpha) +\infty, \beta) \text{ δεν υπάρχει, } \gamma) \frac{1}{4}$$

$$481. P(x) = 2x^2 - 8x + 8, l = 2$$

$$482. f(x) = -6x + 12$$

$$483. \alpha) P(x) = 4x^2 - 7x - 2 \beta) -\frac{7}{4}$$

$$484. f(x) = -2x + 4, \alpha = -2, \beta = -2$$

$$485. \text{i) } +\infty, \text{ ii) } -\infty, \text{ iii) } 0, \text{ iv) } 2, \text{ v) } 1, \text{ vi) } 0, \text{ vii) } 0, \text{ viii) } \frac{1}{2}, \text{ ix) } \frac{1}{2}, \text{ x) } 0, \text{ xi) } 0, \text{ xii) } 0, \text{ xiii) } 0,$$

xiv) 0, xv) $+\infty$, xvi) $+\infty$, xvii) 1,xviii) $\frac{3}{4}$

$$486. \alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v \eta \mu \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha v v=0 \\ 1, & \alpha v v=1 \\ +\infty, & \alpha v v>1 \end{cases}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v \eta \mu \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha v v=0 \\ 1, & \alpha v v=1, \\ -\infty, & \alpha v v>1 \end{cases}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x^v} = 0$$

487. 0

488. α) Κριτήριο παρεμβολής β) 3

489. α) 0 β) 0 γ) $-\infty$ 490. α) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

$$\beta) f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3x - 5}{2} \quad x \in \mathbb{R} \quad \gamma) 8$$

δ) 0

491. α) $f^{-1}(1) = \frac{2}{3}$ β) $f(3) = 2$ γ) $x=2$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sigma\nu\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2} = \dots = \frac{1}{3}$$

$$492. \alpha. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\gamma. \text{Είναι } \sigma\nu\nu^3 x + \eta\mu x - 3 =$$

$$(\sigma\nu\nu^3 x - 1) + (\eta\mu x - 1) - 1 \xrightarrow[\eta\mu x - 1 \leq 0]{\sigma\nu\nu^3 x - 1 \leq 0} \Rightarrow$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \sigma\nu\nu^3 x + \eta\mu x - 3 < 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sigma\nu\nu^3 x + \eta\mu x - 3) f(x) = \dots = -\infty$$

493. i) 0, ii) -1, iii) $+\infty$, iv) 0,v) e, vi) e, vii) $\frac{1}{e^2}$, viii) 2ix) $\frac{2}{3}$ x) $\frac{3}{2}$, xi) -5, xii) 0

494. i) -3 ii) 4

495. α) $+\infty$ β) 1

$$496. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha v \alpha = 1 \\ 0, & \alpha v 0 < \alpha < 1 \\ 1, & \alpha v \alpha > 1 \end{cases}$$

$$497. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 2, & \alpha v 0 < \alpha < 2 \\ 1, & \alpha v \alpha = 2 \\ \frac{1}{2}, & \alpha v \alpha > 2 \end{cases}$$

498. α.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{\alpha^x + \alpha^{-x}} = \begin{cases} -1, & \alpha v 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha v \alpha = 1 \\ 1, & \alpha v \alpha > 1 \end{cases}$$

β.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+2} + 3^{2x}}{\alpha^x + 9^{x+1}} = \begin{cases} \frac{1}{9}, & \alpha v 0 < \alpha < 9 \\ \frac{82}{10}, & \alpha v \alpha = 9 \\ \alpha^2, & \alpha v \alpha > 9 \end{cases}$$

γ.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+1} - 10^x}{\alpha^{x+1} + 10^x} = \begin{cases} -1, & \alpha v 0 < \alpha < 10 \\ \frac{9}{11}, & \alpha v \alpha = 10 \\ 1, & \alpha v \alpha > 10 \end{cases}$$

499. α) $\frac{3}{2}$, β) $\frac{3}{2}$,

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

άρα δεν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 500. α) $A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, 0\}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

501. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2\pi$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

502. -6

503. i. -1 ii. $-\infty$ 504. α) $+\infty$ β) 0

505. α) $\alpha=4$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=3$
506. i) $-\infty$, ii) 2, iii) -3, iv) $-\ln 2$,
v) 0, vi) 0, vii) 0, viii) $-\infty$
507. α) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$,
β) i) $-\ln 2$, ii) $-\ln 2$, iii) $-\infty$,
iv) $+\infty$
508. i) $D_f = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$
ii) α) $+\infty$ β) $-\infty$ γ) $+\infty$
509. α) $A = (0, e)$, β) i) $+\infty$, ii) $-\infty$
510. α) $(0, +\infty)$, β) $+\infty$, γ) 0
511. α) $\mathbb{R}$, β) $-\infty$
512. $\lambda = -1$
513. α) $A = (0, 1)$
β) $f^1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ γ) 1 δ) 0
514. α) f γνησίως αύξουσα β) -1 και 0
515. i. 0, ii. $+\infty$ και $-\infty$, iii. 0, iv. Είναι
 $(f(x)-1)^2 < g(x) < (f(x)+1)^2$
 οπότε....
516. i. $+\infty$ και $-\infty$ ii. 0 και $-\infty$ iii. 1
 iv. 0
517. α) Για κάθε
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα
 f γνησίως αύξουσα
 β) είναι για
 $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(x) < 0$
 και
 $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(x) > 0$
 γ) $= 1 - \ln x + \frac{e-x}{e} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e$
 $= 1 - \ln x + \frac{e-x}{e} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e$
 δ) i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \dots = 1$

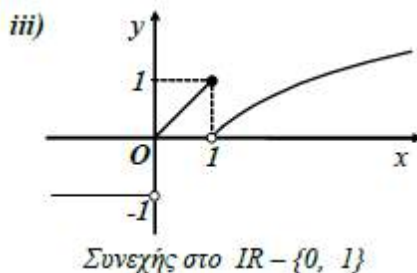
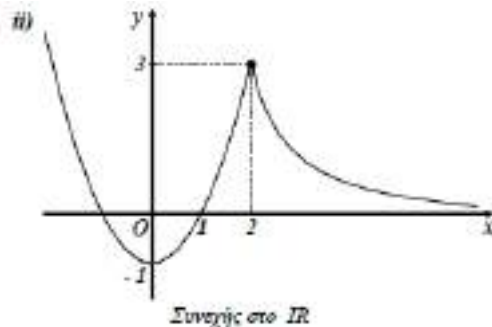
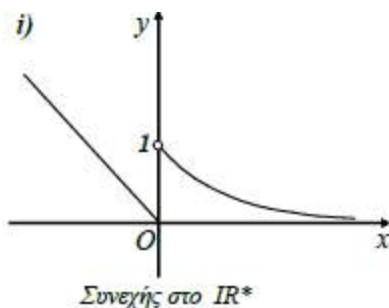
iv.

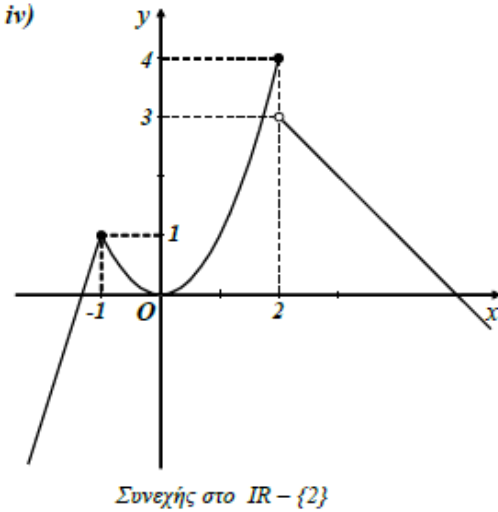
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - f(x) \sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right] = \dots = 0$$

Συνέχεια συνάρτησης

518. i) Συνεχής στο 2, ii) Ασυνεχής στο 0, iii) Συνεχής στο 1, ασυνεχής στο 2, iv) Ασυνεχής στο 0, συνεχής στο 2, v) Συνεχής στο 1, vi) Ασυνεχής στο -1, vii) Ασυνεχής στο 3, viii) Συνεχής στο 0

519.





520. α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$,
 β) Συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$,
 γ) Συνεχής στο $\mathbb{R}$,
 δ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

521. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

522. $f^2(x) + 4f(x) + 4 \sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (f(x) + 2)^2 \leq (2\eta\mu x)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 = f(0)$
Κριτήριο Παρεμβολής

523. Η f συνεχής στο $x_0 = -1$, η g όχι
 συνεχής στο $x_0 = -1$, η $g \circ f$
 συνεχής στο $x_0 = -1$

524. α) $D_f = (-1, 1)$
 β) Η f συνεχής ως αποτέλεσμα
 πράξεων με συνεχείς συναρτήσεις
 γ) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
 άρα f 1-1, άρα αντιστρέφεται και η

συνάρτηση $f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}} - 1}{e^{\frac{x-3}{2}} + 1}$ είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα
 πράξεων μεταξύ συνεχών
 συναρτήσεων

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots = +\infty$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots = -\infty$$

525. α) Για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$
 ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
 β)

$$f^{-1}(x) = e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2, x \in \mathbb{R}$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(f^{-1}(x)) = x, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(f^{-1}(x)) = x, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \text{ Θέτουμε}$$

$y = f^{-1}(x) > 0$. Όταν $x \rightarrow 1$ και το
 $y \rightarrow 1$, οπότε προκύπτει:

$$\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 1 = f(1), \text{ αφού}$$

$$f^{-1}(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

δ) $x \geq 1$

526. i. $D_f = (1, 5) \cup (5, 9]$,

$$f(A) = (-2, 5]$$

ii. α) -2 β) Δεν υπάρχει γ) 3

δ) Δεν υπάρχει ε) 3

iii. α) Δεν υπάρχει β) $+\infty$ γ) 3

iv. Στο $x_1 = 3$ και στο $x_2 = 7$

527. $\alpha = 1, \beta = -2$

528. i) $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$, ii) $\alpha = 2$,

iii) $\alpha = 0$, iv) $\alpha = \frac{1}{4}$

529. i) $\alpha = 3, \beta = 1$, ii) $\alpha = -1, \beta = 1$

530. $\lambda = 1, \mu = 0$

531. $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 0$

532. $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$ ή
 $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -1, -1)$

533. α) $\alpha = -1, \beta = 0, \beta) +\infty$

534. α) $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

535. $\alpha = -2, \beta = 8$

536. $\alpha = 1, \beta = 2$

537. $\alpha = 2$ και $\beta = 4$

538. $\alpha = 4, \beta = -6, \gamma = 0$

539. $\alpha = -2, \beta = 5, \gamma = 4$

540. i) $\frac{1}{6}$ ii) 0 iii) $\frac{1}{3}$ iv) $\frac{1}{3}$

541. $\frac{1}{2}$

542. 2

543. $f(0) = 1$

544. α) $\frac{3}{2}$, β) -1

545. • Αν $x < 0$: $f(x) \geq \frac{\eta\mu 2x}{x}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 2x}{x}$$

• Αν $x > 0$: $f(x) \leq \frac{\eta\mu 2x}{x}$, οπότε

...

546. $f(2) = 4$

547. -1

548. α) $f(0) = 0$, β) $\alpha = -2$

549. α) -1, β) Δείξτε ότι
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(3) = 1$, γ) $-\infty$

550. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\alpha}$

551. α) $f(2) = -4$

β) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\lim_{u \rightarrow 2} f(u) =$

$= -f(2) = f(-2)$

γ) $-\infty$ δ) $\frac{5}{4}$

552. α) $f(0)=1$, $g(0)=2$ β) $\alpha=7$

553. α) Είναι
 $\frac{f(1)-2}{-3} = 6 \Leftrightarrow f(1) = -16$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \stackrel{x=4-u}{=} \lim_{x \rightarrow 3, u \rightarrow 1} \dots =$
 $= f(1) = -16 = f(3)$

554. Από τη σχέση $\eta\mu^2 \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x^2}$ βρί-
 σκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(0) \geq 0$
 και από τη σχέση
 $x^2 f^2(x) + 2x\eta\mu x f(x) < 0$

βρίσκουμε $f(0) \leq 0$, άρα τελικά θα
 είναι $f(0) = 0$.

555. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{1-x}, & x \neq 1 \\ -\frac{1}{4}, & x = 1 \end{cases}$

556. $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}, & x \neq 1 \\ -\frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$

557. i) Είναι

$f(0) = \frac{1}{2}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

ii)

$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1 + \eta\mu^2 x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

558. i) $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + x}{x^2 + x}, & \text{αν } x > 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

ii) 0

559. 501

560. 1

561. α) Δείξτε ότι

$\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 3 = f(\pi/2)$,

β) i) Είναι

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2-2\sqrt{\eta\mu x}} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{3-f(x)} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\eta\mu x}$$

και από κριτήριο παρεμβολής βρείτε 2

ii) Είναι $f(x) - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - f(x) \geq 0$
 και το όριο είναι $-\infty$

562. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

563. α. i. Δείξτε ότι $f(0)=2$

ii. Αν $g(x) = \frac{f(x)-2-\eta\mu x}{x^2+x}$

τότε $f(x) = g(x)(x^2+x) + 2 + \eta\mu x$
 οπότε...

β. -9 γ. $\lambda=3$

δ. i. Γν. αύξουσα ii. $+\infty$

564. Θέστε όπου $y = x_0$ και δείξτε ότι
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

565. α) Θέστε $y = x_0$, β) Αν $x_1 \neq x_2$
 ρίζες της εξίσωσης τότε $\theta \geq 1$, άτοπο

566. α) Δείξτε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για

κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ θέτοντας $x - x_0 = u$,

β) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο
 0 άρα λόγω α) και σ' όλο το $\mathbb{R}$

567. α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

θέτοντας $u = x - x_0$,

β) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

θέτοντας $u = x - x_0 + \alpha$

568. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για

κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$ θέτοντας $\frac{x}{x_0} = u$.

569. α) Θέστε $\frac{x}{x_0} = u$,

β) θέστε $\frac{x}{x_0} \alpha = u$

570. Θέστε $x - x_0 = u$

571. α) Θέστε $x = y = 0$,

β) Θέστε $y = -x$,

γ) Στο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θέστε

$$u = x - x_0 + \alpha$$

572. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

θέτοντας $x = x_0 - u \Leftrightarrow u = x_0 - x$

573. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

θέτοντας $x = x_0 + 2\alpha - 2u$

574. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

θέτοντας $x = \frac{x_0}{u}$

575. Δείξτε ότι η σχέση γράφεται:

$|f(x) + 2| \leq 2|\eta\mu x|$ και μετά δείξτε
 ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 = f(0)$

576. Η σχέση γράφεται

$$\left(f(x) + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

577. α) Είναι

$$|2x + \eta\mu f(x)| \leq 2|x| + |\eta\mu f(x)| \leq 2|x| + |f(x)|, \text{ οπότε } \dots,$$

β) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

578. Δείξτε ότι $|f(x)| \leq |\ln x|$, οπότε ...

579. Είναι $2f(x) = \frac{\eta\mu f(x) + x^2}{f^4(x) + 1}$ και

$$\text{δείξτε ότι } |2f(x)| \leq |f(x)| + x^2,$$

οπότε ...

580. Θέστε $x = x_0$ αφαιρέστε κατά μέλη
 και βρείτε ότι

$$f(x) - f(x_0) =$$

$$= \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1},$$

οπότε ...

581. α) $A(-2,0)$ και $B(2,0)$. Η γραφική πα-
 ράσταση C_f της συνάρτησης f είναι
 κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$-2 < x < 2$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Για $x = x_0$

από τη σχέση έχουμε:

$$f^3(x_0) + f(x_0) = x_0^4 - 2x_0^2 - 8.$$

Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) = x^4 - x_0^4 - 2(x^2 - x_0^2) \Leftrightarrow \dots$$

582. α) Για $x=0$ έχουμε:

$$(f(0) - 1)(f^2(0) + f(0) + 3) = 0$$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύ-
 ζουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Για $x = x_0$ έχουμε:

$$f^3(x_0) + 2f(x_0) = 3e^{x_0}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$f^3(x) + 2f(x) - (f^3(x_0) + 2f(x_0)) = 3e^x - 3e^{x_0} \Leftrightarrow \dots$$

- 583.** i. Θέστε $x = x_0$ αφαιρέστε κατά μέλη και βρείτε ότι $f(x) - f(x_0) =$

$$= \frac{2(x - x_0)}{2[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + 3}$$
και $|f(x) - f(x_0)| =$

$$\frac{2|x - x_0|}{2[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + 3} \leq$$

$$\leq 2|x - x_0|$$
οπότε ...
ii. $f^{-1}(x) = \frac{2x^3 + 3x - 3}{2}, x \in \mathbb{R}$
iii. $x = -\frac{3}{2}$ iv. $x = 1$.

Βασικά Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

- 584.** Θ. Bolzano
585. Θ. Bolzano για την $f(x) = \eta\mu x - 2 + 2x$ στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$
586. Θ. Bolzano για την $f(x) = x^2 + 3x - e^x - 1$ στο $[0, 1]$.
587. Θ. Bolzano για την $f(x) = (x + 1)2^{x+1} - 1$ στο $[-1, 0]$
588. Θ. Bolzano για την $f(x) = \ln(x + 2) - 4x + 1$ στο $[-1, e - 2]$
589. Θ. Bolzano για την $h(x) = x - \sin 2x$ στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
590. Θ. Bolzano για την $f(x) = x - \eta\mu x - \frac{1}{2}$ στο $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$.
591. Θ. Bolzano για την f στο $[-3, 3]$.
592. Αφού δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 (άρα και στο $[-3, 1]$) δείξτε ότι εφαρμόζεται Θ. Bolzano για την f στο $[-3, 1]$.
593. Θ. Bolzano για την $h(x) = (3x - \pi)\epsilon\phi x + (4x - \pi)\sigma\phi x$ στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$
594. Θ. Bolzano για την $h(x) = (x^{10} + 1)(x - 2) + (x^8 + 3)(x - 1)$ στο $[1, 2]$
595. Θ. Bolzano για την $f(x) = xe^x - x - \sin x$ στο $[0, 1]$
596. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x$ στο $[0, 1]$
597. i) $\kappa=2$ $\lambda=4$ ii) $-\infty$ iii) 0
iv) Θ. Bolzano για την f στο $[0, 1]$.
598. Θ. Bolzano για την $h(x) = (\beta - \alpha)f(x) - (x - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta))$
599. Θ. Bolzano για την $h(x) = (\kappa - x)(\lambda - x)f(x) - \kappa x(\lambda - x) - \lambda x(\kappa - x)$ στο $[\kappa, \lambda]$
600. Θ. Bolzano για την $f(x) - (e^2 + 1) \ln x + x$ στο $[1, e]$
601. i) Θέστε $x=0$ και $x=1$ ii) $\frac{1}{4}$ iii) $\frac{49}{12}$
iv) Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - x$ στο $[0, 1]$
602. Θ. Bolzano για την $h(x) = f^2(x) + f(x) + x$ στο $[0, 1]$
603. α) Στη σχέση $\eta\mu x - x \leq x f(x) \leq x^2 (1 - \sin x)$ διαιρούμε με x , διακρίνοντας περιπτώσεις και με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$
β) Θέτουμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - x - \frac{\pi}{2} + 2 \sin x$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano αφού $g(0) > 0$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$
604. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x^{2017}$ στο $[0, 1]$
605. Είναι $f(0) = -1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, οπότε...

- 606.** Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[-1, 5]$.
- 607.** Αφού βρείτε ότι $f(0) = 4$ και $f(1) = 1$ εφαρμόστε Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x - 1$ στο $[0, 1]$
- 608.** Θ. Bolzano για την f στο $[0, 2]$ αφού δείξετε ότι $f^2(x) - 2f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 609.** Θ. Bolzano για την f στο $[0, 1]$
- 610.** Θ. Bolzano για την $h(x) = (2x-9)f(x+6) - (7x-32)f(x)$ στο $[4, 5]$ παρατηρώντας ότι $h(4) = 8g(4) - 8g(10)$ και $h(5) = 9g(11) - 9g(5)$.
- 611.** Θ. Bolzano για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ όπου $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.
- 612.** α) Δείξτε ότι $f(0) = 0$ β) 1
γ) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x + 1$ στο $[0, 1]$
- 613.** i) Θεώρημα Bolzano για την $h(x) = g(x) - x$, $x \in [1, 2]$
ii) $f(x) \geq f(x_0) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 614.** α) Είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς το τριώνυμο (ως προς $f(x)$) $f^2(x) - 4f(x) + 5$ έχει αρνητική διακρίνουσα
β)
 $f^2(0) + f^2(1) + 10 = 2(f(0) + 3f(1)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 + (f(1) - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(0) = 1$ και $f(1) = 3$
γ) $g(x) = f^2(x) - 4f(x) + 5 =$
 $= (f(x) - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow g(x) \geq g(x_0)$
όπου $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$, άρα και $g(x_0) = 1$, μετά από ΘΕΤ στη συνάρτηση f στο διάστημα $(0, 1)$.
- 615.** α) Είναι $f(x)(f^2(x) + x) = -x^3 < 0$ και $f^2(x) + x > x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + x) < f(x)x \Leftrightarrow \dots$
β) Θ. Bolzano για την $g(x) = 6 - xf(x) - x^2 - 5x$ στο $[1, 2]$
γ) 0
δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ και παρατηρήστε
ότι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x^2} + 1 = 0$
οπότε....
- 616.** Εστω η $g(x) = f(x) + x$ με $g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha = \dots = \ln \alpha < 0$ για $\alpha \in (0, 1)$ και
 $g(\beta) = f(\beta) + \beta = \dots = \beta^2 - 1 > 0$, για $\beta \in (1, +\infty)$, άρα θεώρημα Bolzano.
- 617.** Θ. Bolzano για την $f(x) = x^6 - 4x - 6$ στο $[0, 2]$
- 618.** Θ. Bolzano για την $f(x) = 2016 \ln x + x - 2016$ στο $[1, e]$
- 619.** Θ. Bolzano για την $f(x) = 2^{x+x}$ στο $[-1, 0]$
- 620.** Θ. Bolzano για την $g(x) = x^4 + 3x - 2$ στο $[0, 1]$
- 621.** Θ. Bolzano για την $h(x) = 3 \ln x + x - 2$ στο $[1, e]$
- 622.** Θεώρημα Bolzano για την $g(x) = f(2x) - f(x) - x + 1$ στο διάστημα $(0, 1)$.
- 623.** Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - f(x+1)$ στο $[0, 1]$.
- 624.** i. 5, 6, -5 ii. Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $[0, 3]$.
- 625.** α) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα f γν. αύξουσα, άρα η f 1-1, συνεπώς θα αντιστρέφεται. Είναι:

$$f^{-1}(0) = x \stackrel{f}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(0)) = f \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$$

και όμοια

$$f^{-1}(3) = x \stackrel{f}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(3)) = f \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 1$$

β) Εστω η $g(x) = f^{-1}(x) + x - 2$,

με $g(0) < 0$ και $g(3) > 0$

άρα θεώρημα Bolzano.

626. Θ. Bolzano στα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

627. Θ. Bolzano για την $f(x) = x^6 - ax^2 + \beta$ στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

628. Θ. Bolzano για την $f(x)$ στα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$

629. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x)g(x) - (\beta - x)(\alpha - x)$ στα διαστήματα $[a, x_1]$, $[x_1, \beta]$ όπου x_1 ρίζα της $f(x)$ (ή της $g(x)$)

630. α) Θ. Bolzano για την 2^{ov} βαθμού πολωνομική συνάρτηση $h(x) = \kappa^2(x^2 - 1) + \lambda^2(x^2 - x) + \mu^2(x^2 + x)$ στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$,

β) Ουμνηθείτε: $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

631. α) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \dots$

β) i) Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = \dots$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{x}{4}}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{\frac{x}{4}}{x} \right) = \lambda - \frac{1}{4}$$

γ) Θ. Bolzano για την

$$f(x_2) = \frac{f(3) + f(4)}{2}.$$

στα $[-1, 0]$ & $[0, 1]$ και Vieta

632. Θ. Bolzano και μονοτονία.

633. Θ. Bolzano για την $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 2$ στο $[0, 1]$ και f γν. αύξουσα.

634. Θ. Bolzano για την

$$h(x) = \eta \mu x - \sigma \nu \chi + x - \frac{\pi}{2} \text{ στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

. Η μοναδικότητα λόγω της μονοτονίας της h .

635. Θ. Bolzano και μονοτονία για την

$$f(x) = \sigma \nu \chi - x^2 \text{ στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

636. Η ύπαρξη ρίζας με Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - x + 1$ στο $[0, 1]$ και η μοναδικότητα λόγω του ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

637. Θ. Bolzano για την $h(x) = 2 \ln x + ex$ στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ και h γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

638. α) Είναι $1 < 4 < 5$ και f γν. φθίνουσα.

β) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(2x+3) - x$ στο $[-1, 1]$ και h γν. φθίνουσα.

639. α) Θέστε $y = x_0$ και με κρ. παρεμβολής δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

β) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - 2x$ στο $[1, 2]$. Αν $x_1 \neq x_2$ ρίζες της h τότε θέστε $x = x_1$ και $y = x_2$ και καταλήξτε σε άτοπο

640. α) Θεωρήστε την βοηθητική συνάρτηση $g(x) = x^3 + 3x - 5$ η οποία είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) $f^{-1}(x) = x^3 + 3x - 5$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Θ. Bolzano για την

$$h(x) = f(x) - f^{-1}(x) \text{ στο } [1, 2]$$

δ) 0

641. α) Για $y = x$ έχουμε

$$2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3$$

Μετά θέστε όπου x το $1-x$ οπότε....

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα η g είναι γνησίως φθίνουσα η $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως δεν παρουσιάζουν ακρότατα

γ) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[0, 1]$ δ) $1 < x < 2$

642. Θ. Bolzano για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ έχοντας υπόψιν ότι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $\rho_1 \rho_2 < 0$

643. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[a, \beta]$.

644. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[a, \beta]$

645. Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - e^x + xe^x$ στο $[0, 1]$

646. Θ. Bolzano για την

$$f(x) = \eta\mu x - \eta\mu\lambda - \frac{\pi}{2} + x \text{ στο}$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

647. Θ. Bolzano για την $f(x) = \kappa\eta\mu x - x + \lambda$ στο $[0, \kappa + \lambda]$

648. Αν $f(a) \neq 0$ και $f(\beta) \neq 0$ τότε η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = -\frac{\beta^2 + 1}{\alpha^2 + 1} < 0, \text{ οπότε ...}$$

649. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - \kappa f(a) - \lambda f(\beta)$ στο $[a, \beta]$

650. $f(1)f(2) = -2(f(2))^2 \leq 0$

651. α) Θ. Bolzano για την

$$g(x) = f(x) - x3^x \text{ στο } [0, 1]$$

β) 1 γ) 2 δ) 0

652. α) Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x$ στο $[a, \beta]$,
β) Η C_f τέμνει τουλάχιστον μια φορά τη διαγώνιο $ΑΓ$ του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ όπου $A(a, \alpha)$, $B(\beta, \alpha)$, $\Gamma(\beta, \beta)$, $\Delta(a, \beta)$

653. Αφού παρατηρήσετε ότι

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \text{ και } 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2},$$

εφαρμόστε Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) + g(x) - x$ στο $[0, 1]$.

654. α) Διαφορά των συνεχών $f(x)$ και $f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)$ (σύνθεση συνεχών),

β) Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $\left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$

655. Θ. Bolzano για την $h(x) = g(f(x)) - x$ στο $[a, \beta]$

656. Ισχύει $\alpha \leq f(g(x)) \leq \beta$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $\alpha \leq g(f(x)) \leq \beta$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ οπότε για την $h(x) = f(g(x)) + g(f(x)) - 2x$ ισχύει $h(a)h(\beta) \leq 0$

657. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x$ στο $[f(\rho), \rho]$ ή $[\rho, f(\rho)]$ όπου ρ ρίζα της $(f \circ f)(x) = x$.

658. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(f \circ f)(x_0) = (g \circ g)(x_0)$ τότε από Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[f(x_0), g(x_0)]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

659. Προκύπτει από το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών αφού $f(1) < 200 < f(2)$.

660. Προκύπτει από το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών αφού $f(-4) < \frac{7}{2} < f(4)$.

661. Προκύπτει από το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών αφού $f(-1) < 250 < f(-2)$.

662. Προκύπτει από το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών αφού $f(-1) < \frac{5}{2} < f(1)$

663. ΘΕΤ στη συνάρτηση f στα διαστήματα $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$ και $(2, 3)$ για να βρούμε $\xi_1 \in (0, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια ώστε συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ τέτοια ώστε $f(\xi_1) = 3$ και $f(\xi_2) = 3$ άρα και $f(\xi_1) + f(\xi_2) = 6$ με $\xi_1 \neq \xi_2$.

664. Δείξτε ότι

$$f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{4}{7}\right) + f\left(\frac{5}{7}\right)}{5} < f(1)$$

και Θ. Ενδιάμεσων Τιμών.

665. Δείξτε ότι

$$f(4) < \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3} < f(0)$$

και Θ. Ενδιάμεσων Τιμών.

666. α) Είναι $f(0) < 3 < f(1)$ οπότε από

Θ. Ενδιάμεσων Τιμών ...,

β) Δείξτε ότι

$$f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

667. Δείξτε ότι

$$f(4) < \frac{2f(1) + f(2) + 3f(3) + f(3)}{7} < f(1)$$

και Θ. Ενδιάμεσων Τιμών.

668. Θ. Ενδιάμεσων Τιμών ή Θ. Bolzano για την

$$h(x) = f(x) - \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{3}$$

στο $[a, \beta]$ παρατηρώντας ότι

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$f(\alpha) < f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < f(\beta)$$

669. Αν $f(1)=f(2)$ τότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη. Αν $f(1) \neq f(2)$ τότε από Θ.Ε.Τ. στη συνάρτηση f και βρίσκουμε $x_1 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$$

Αν $f(3)=f(4)$ τότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη. Αν $f(3) \neq f(4)$ τότε από Θ.Ε.Τ. στη συνάρτηση f και βρίσκουμε $x_2(3, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_2) = \frac{f(3) + f(4)}{2}.$$

Ομως $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$,

άρα και $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

670. Αν f συνεχής τότε με ΘΕΤ στο διάστημα $[2016, 2017]$ θα υπάρχει

$x_0 \in (2016, 2017)$ τέτοιο ώστε

$f(x_0) = 2$, άτοπο από υπόθεση.

671. i) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει

λύση και άτοπο.

ii) Έστω ότι η f είναι συνεχής και

$$\text{άτοπο } f(x) = \frac{1}{2}$$

672. $f(10) = \frac{1}{2}, \quad f(5) = 1$

673. $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}$

674. α) Είναι $f(1)=f(8)=2$ β) $f(3)=7$

675. i. $f(2) = f(-2) = -2$

ii. Είναι $f(-2) < 0 < f(0)$ οπότε...

και $f(2) < 0 < f(0)$ οπότε...

iii. Θ. Bolzano για την

$$g(x) = f(f(x)) + 1 \text{ στα}$$

$$[-\sqrt{2}, 0], [0, \sqrt{2}]$$

676. $f(\beta) = \frac{\gamma}{\beta}, \quad f(\gamma) = 1$

677. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f δείξτε ότι

$$m \leq \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6} \leq M$$

678. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f δείξτε ότι

$$m \leq \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{10} \leq M$$

679. Είναι

$$f_{\min} \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f_{\max}$$

680. Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής για την g στο $[1, 3]$

681. Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής.

682. Δείξτε ότι

$$\sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)} \in [m, M] = f(\Delta), \text{ άρα} \dots$$

683. i) $f(x) \in D_f$ για κάθε $x \in D_f$
 $x \in D_f$.

ii) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in [0, 1]$, τότε

$$f(f(x_0)) \geq f(x_0) \text{ που είναι}$$

άτοπο

iii) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

684. i) $f(x) = \begin{cases} x + 3\frac{\eta\mu x}{x}, & x > 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$

ii) Για $x = 0$ ισχύει η ισότητα.
 Για $x > 0$ είναι $\eta\mu x < x$, οπότε...

iii) Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - 6x - 1$, στο $[0, 1]$

iv) Θ. Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής

685. i) $f(A) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

ii) $f(A) = [-1, \sqrt{2}]$,

iii) $f(A) = [-20, +\infty)$,

iv) $f(A) = [1 - \ln 3, +\infty)$,

v) $f(A) = [-2, 2]$, vi) $f(A) = \mathbb{R}$,

vii) $f(A) = \mathbb{R}$, viii) $f(A) = \mathbb{R}$

686. α) f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

β) η ανίσωση αληθεύει για

$$x \in (-\infty, e]$$

687. i) $A = (0, e)$, ii) $f(A) = \mathbb{R}$,

iii) $0 \in f(A)$ άρα ...

iv) Το $2017 \in f(A)$ άρα ...

688. Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(x) = \ln x + e^x$, όταν $x \in (0, 1)$, το οποίο είναι το $f((0, 1)) = (-\infty, e)$

689. Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(x) = \ln 3x - x$, όταν $x \in (0, 1)$, το οποίο είναι το $f((0, 1)) = (-\infty, \ln 3 - 1)$

ή Θ. Bolzano για την f στο

$$\left[\frac{1}{3}, 1\right] \subseteq [0, 1] \text{ ή } \Theta. \text{ Bolzano για την}$$

$$g(x) = e^x - 3x \text{ στο } [0, 1]$$

690. i) Είναι $f(x) = x^3 + 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

οπότε ... ii) $-\infty$ iii) $+\infty$

iv) $\kappa \in f(A) = \mathbb{R}$ και μονοτονία της f

691. α) $f(A) = \mathbb{R}$ β) Ακριβώς μια ρίζα

692. α) Είναι $f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x} = x - e^{-x}$,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

άρα f γνησίως αύξουσα

$$\beta) f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\underset{f \nearrow}{=}}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \dots =$$

$$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

γ) $H f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση

αφού $\alpha \in f(A) = \mathbb{R}$ και f γνησίως μονότονη, άρα και 1-1.

693. α) $h(x) = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$,

$$\beta) h^{-1}(x) = -\ln x, x > 0,$$

γ) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της

$$\varphi(x) = e^{-x} - \ln x, x > 0 \text{ ή στο}$$

σύνολο τιμών της

$$H(x) = e^x \ln x - 1, x > 0 \text{ ή}$$

Θ. Bolzano για την $H(x)$ ή την $\varphi(x)$ στο $[1, 2]$ και $H(x)$ γνησίως αύξουσα ή $\varphi(x)$ γνησίως φθίνουσα

- 694.** i) $f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
 ii) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x) = 0$ οπότε....
 iii) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x) = 2017$ οπότε....
- 695.** ii) $f(A) = (-2017, +\infty)$,
 iii) $0 \in f(A)$ και f γν. αύξουσα,
 iv) $\lambda < 2017$
- 696.** i) $A = [2, 6]$, iii) $\varphi(A) = [-2, 2]$,
 iv) $\frac{3}{2} \in f(A)$ και φ γν. αύξουσα στο A , v) $\exists 3 \notin f(A)$,
 vi) $-2 \leq \lambda \leq 2$
- 697.** ii) $[1, +\infty)$, iii) $\frac{3}{2} \in f(A)$ και f γν. φθίνουσα, iv) $\frac{1}{2} \notin f(A)$,
 v) $\lambda \leq -\frac{1}{2}$ ή $\lambda \geq 1$
- 698.** i) $f(A) = [3, +\infty)$,
 ii) $2017 \in f(A)$ και f γν. αύξουσα,
 iii) $\frac{9}{4} \notin f(A)$,
 iv) $\lambda \leq -2$ ή $\lambda \geq 2$ ή $\lambda \leq -2$ ή $\lambda \geq 2$
- 699.** α) $f(A) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$, β) $2 \notin f(A)$
 άρα δεν υπάρχει τέτοιο x_0 .
- 700.** β) $f(A) = \mathbb{R}$, γ) $x = 1$,
 δ) Για $0 < x < 1$ είναι $f(x) < 0$ και για $x > 1$ είναι $f(x) > 0$
- 701.** α) f γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$,
 β) $A(2, 0)$, γ) Για κάθε $1 < x < 2$ είναι $f(x) < 0$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) > 0$
- 702.** α) Είναι $A_1 = [-1, 1]$ και
 $f(A_1) = f([-1, 1]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \nearrow}{=} [-2, 2]$

Όμοια είναι $A_2 = [1, 3]$, άρα

$$f(A_2) = f([1, 3]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{f \nearrow}{=} [f(1), f(3)] = [-2, 0]$$

Άρα

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-2, 2]$$

β) Η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση στο A_1 και αδύνατη στο A_2 .

γ) Η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο A_1 και μοναδική λύση στο A_2 , αφού $\kappa \in f(A_1)$, $\kappa \in f(A_2)$ και η f γνησίως μονότονη άρα και 1-1 σε αυτά τα διαστήματα.

- 703.** Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \ln x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσα.
- 704.** Αν $h(x) = f(x) + e^{x+1} + \ln x - 1$, $x > 0$ τότε $0 \in h(A) = \mathbb{R}$ και h γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- 705.** Αν $h(x) = f(x) - x - e^x - 2017$ τότε $0 \in h(A) = \mathbb{R}$ και h γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- 706.** i) γν. αύξουσα ii) $f(A) = \mathbb{R}$
 iii) $\alpha \in f(A)$ και f γν. αύξουσα
 iv) $\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$
 και $0 \in f(A)$
- 707.** α) $-\infty, +\infty$, γ) $x = 1$, δ) $\lambda = 1$
- 708.** i) Γν. αύξουσα ii) $-\infty$, και $+\infty$
 iii) iv) $\mu = 1$
- 709.** β) $f(A) = \mathbb{R}$, δ) $x = e$
- 710.** i) Γν. φθίνουσα ii) $\mathbb{R}$
 iii) Θ. Bolzano για την εξίσωση $f(x) = x$ στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
 iv) Θ. Bolzano για την
 $h(x) = \left[f(e^x - 1) - 1\right](x - 2) - [f(\eta\mu\alpha) - f(\alpha)](x - 1) -$

$$-2017(x-1)(x-2)$$

στο διάστημα $(1, 2)$

711. i. $-\infty$ ii. $-\infty$

712. i. $\mathbb{R}$ iii. $+\infty$ και $+\infty$

713. Από $g(1) = [1, 2]$ και g γν.
φθίνουσα συνεπάγεται ότι $g(1) = 2$
και $g(2) = 1$

714. Θ. Bolzano για την $h(x) = f(x) - x$
στο $[0, 1]$ και αν $g(\xi) > \xi$ ή $g(\xi) < \xi$
τότε ... άτοπο

715. i. $\alpha = 2017$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

iii. Θ. Bolzano στο (γ, δ) .

716. α)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu 3x}{x} + 4 - 5x\eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ άρα υπάρχει $\alpha < 0$

ώστε $f(\alpha) < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$ άρα

υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $f(\beta) < 0$,

οπότε.....

717. α) $f(x) = \begin{cases} x - \frac{3\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ -3, & x = 0 \end{cases}$,

β) $+\infty$ γ) Αν $g(x) = f(x) - e^{-x}$
τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, άρα $g(x) > 0$

στην περιοχή του $+\infty$.

Άρα υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $g(\alpha) > 0$,
οπότε Θ. Bolzano για την g στο $[0, \alpha]$.

718. Αν $h(x) = f(x) - e^x - x\eta\mu \frac{1}{x}$ τότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

οπότε...

719. Αν $f(x) = \ln(1 - \ln x) - \eta\mu x$, τότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$

, οπότε ...

720. Αν $f(x) = x^3 + x\eta\mu x - 2017$ τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε ...

721. Αν $f(x) = \ln x + \frac{\eta\mu x}{x}$ τότε

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ οπότε ...

722. Αν $h(x) = f(x) + x^{2017}$ τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ οπότε ...

723. α) 3, β) Αν $g(x) = e^x f(x) - 1$,
τότε $g(0) = 2 > 0$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

724. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(1) > 0$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, οπότε ...

725. Είναι

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε ...

726.

i)	x	0	2	e^2	+
	$f(x)$	-	0	+	0
ii)	x	2/3	1	2	+
	$f(x)$	-	0	+	0

727. Θ. Bolzano για κατάλληλη συνάρτηση
παρατηρώντας ότι η g διατηρεί
σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$

728. $-\infty$

729. $-\infty$

730. α) Η g διατηρεί σταθερό πρόσημο
στο $(-1, 5)$ και $g(2) = -1 < 0$

β) Είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

731. α) Έστω η

$$g(x) = \frac{f(x) - 2 + (x-1)^2}{x-1} \text{ με ,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 100$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots = f(1) = 2$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \dots = 100 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x - 1} = \dots = -100$$

$$\gamma) \text{ Αφού } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) < 0, \text{ υπάρχει}$$

αριθμός β κοντά στο -2 , τέτοιος ώστε $f(\beta) < 0$.

$$\text{Όμοια } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0, \text{ υπάρχει}$$

αριθμός γ κοντά στο 2 , τέτοιος ώστε $f(\gamma) > 0$.

$$\bullet \text{ Είναι } f(x) < 0 \text{ για } x \in \left(\beta, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\bullet \text{ Είναι } f(x) > 0 \text{ για } x \in \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\bullet \text{ Είναι } f(x) < 0 \text{ για } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

732. $+\infty$

733. $+\infty$

734. α) Θ. Bolzano για την

$$h(x) = f^2(x) - f(1)f(2) \text{ στο } [1, 2]$$

β) Υπάρχει $\xi_2 \neq \xi_1$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi_2) = f(\xi_1)$$

735. α) Πρέπει $x \in D_f$ και $x + \frac{1}{3} \in D_f$

β) Θέστε διαδοχικά όπου x το 0 ,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \text{ και προσθέστε κατά μέλη}$$

γ) Αν $g(x) \neq 0$ τότε αν $g(x) > 0$

ή $g(x) < 0$ τότε... άτοπο

736. α) $D_g = \left[0, \frac{\nu-1}{\nu}\right], \nu \in \mathbb{N}^* \text{ με } \nu > 1$

$$\beta) g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{\nu}\right) = f\left(\frac{1}{\nu}\right) - f\left(\frac{2}{\nu}\right)$$

$$g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) = f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) - f(1) \text{ και}$$

προσθέστε κατά μέλη γ) Από β)

$$\bullet \text{ Αν } g(0) = g\left(\frac{1}{\nu}\right) = g\left(\frac{2}{\nu}\right) = \dots =$$

$$= g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) = 0, \text{ τότε αποδείχθηκε}$$

• Αν δεν είναι όλοι μηδέν τότε δύο τουλάχιστον από τα

$$g(0), g\left(\frac{1}{\nu}\right), g\left(\frac{2}{\nu}\right), \dots, g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

είναι ετερόσημοι οπότε από Θ.

Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1)$

737. α) Θ. Bolzano για την

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \text{ στο } \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$$

β) Αν $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{\alpha}{3}\right)$ τότε

$$g(0) + g\left(\frac{\alpha}{3}\right) + g\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = 0 \text{ οπότε...}$$

$$\gamma) \text{ Αν } g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{\alpha}{4}\right)$$

τότε

$$g(0) + g\left(\frac{\alpha}{4}\right) + g\left(\frac{\alpha}{2}\right) + g\left(\frac{3\alpha}{4}\right) = 0$$

οπότε...

738. Παρατηρήστε ότι

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0 \text{ οπότε}$$

739. α) Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα...

β) Δείξτε ότι αν για την $h(x) = f(x) - 4$, ισχύει $h(x) \neq 0$ τότε... άτοπο.

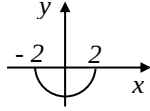
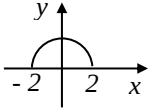
γ) Αν για την $g(x) = f(x) - x$ ισχύει $g(x) \neq 0$ τότε... άτοπο.

740. ii) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

741. α) $-2, 2,$

β) $f(x) = \sqrt{4-x^2}, x \in [-2, 2]$ ή

$f(x) = -\sqrt{4-x^2}, x \in [-2, 2]$



742. $f(x) = -\sqrt{5x-x^2}, x \in (0, 5)$

743. i) 3 ή -3 ii) f συνεχής και

$f(x) \neq 0$ στο $(-3, 3)$

iii) $f(x) = -\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3]$

ή $f(x) = \frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3]$

iv) 0

744. $f(x) = -e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

745. i. $f(x) = \sqrt{3x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

ii. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$

iii. Θ . Bolzano για την $h(x) = 4g(x) - 7x$ στο $[0, 1]$

746. i) Μοναδική ρίζα το 1 ii) $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

747. $f(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & -\pi < x < 0 \\ \eta\mu x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

748. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \end{cases}$

749. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sigma\upsilon\nu x$

750. $f(x) = 1 + \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$

751. $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = 2e^x, x \in \mathbb{R}$

752. i) Είναι $f(x) = (\alpha^x + 1)^2 \neq 0$ και f συνεχής.

ii) α) $f(x) = -\alpha^x - 1, x \in \mathbb{R}$ β) $\frac{-1}{4}$
γ) $-\infty$

753. α) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R},$

β) 0 και $+\infty$ γ) Θ . Bolzano για την $g(x) = xf(x) - e^{x-1}$ στο $[0, 1]$

754. i. $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, x \geq 0$

ii. $D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$

iii. Θ . Bolzano για την

$h(x) = (x-2)f(\alpha) + (x-1)f(\beta)$ στο $[1, 2]$

με $f(\alpha), f(\beta) \geq 1$, λόγω ii.

755. i) Είναι $(e^{f(x)} + x^2) = x^2 + 1$ οπότε...

ii) Δείξτε ότι $f(-x) = -f(x)$

iii) $+\infty, -\infty$

756. α) Αν υπάρχει ρ ώστε $f(\rho) = 0$ τότε για $x = \rho$ και $y = 1$ άτοπο β) 2

γ) Θέστε $y = 1$ δ) $x = 1$

757. i) $\kappa = 1$ ii) $g(\Delta) = (-\infty, 1]$

iii) Θ . Bolzano για την

$h(x) = [g(\alpha) - 1](x - 2) +$

$+ [g(\beta) - 1](x - 1) - 2017(x - 1)(x - 2)$

στο $(1, 2)$ iv) Θ . Bolzano για την

$H(x) = x + g(x) - \eta\mu x$ στο (x_1, x_2) .

Η Έννοια Της Παραγώγου

- 758.** α) 3, β) -4, γ) 0
759. α) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1,
 β) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2,
 γ) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3
 δ) $f'(0) = 0$
760. i) $f'(2) = 9$,
 ii) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3,
 iii) $f'(1) = 1$, iv) $f'(0) = 0$,
 v) $f'(0) = 0$
761. α) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2,
 β) $f'(2) = 3$, ενώ δεν είναι
 παραγωγίσιμη στο 1,
 γ) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0
762. $\alpha = 1$, $\beta = 2$
763. $\alpha = -3$, $\beta = 1$
764. $\alpha = \frac{-10}{3}$, $\beta = \frac{17}{3}$
765. $\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = -1$
766. $\alpha = -3$, $\beta = 11$, $\gamma = -10$
767. 3
768. 0
769. α) 0, β) 2
770. 1
771. α) 0, β) 0
772. $g'(1) = \frac{1}{2}f(1)$
773. α) $g'(0) = -1$, β) $g'(0) = \frac{5}{3}$
774. $\frac{19}{4}$
775. $f'(1) = 2$
776. $g'(2) = 3$.
777. Δεν υπάρχει $f'(0)$
778. α) $g'(0) = 0$, β) -2
779. Είναι $f'(\pi) =$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{g(x)}{x - \pi} \sin v^2 \frac{1}{x - \pi} \right) = 0 \text{ ως}$$

«μηδενική · φραγμένη»

780. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow g(a) = 0$$

781. $\alpha = 4$, $\beta = 1$

782. $\alpha = 3$, $\beta = -2$

783. $f'(1) = 2$

784. α) 2, β) 1, γ) 1

785. $g'(1) = 4$

786. α) 1, β) 4, γ) 1

787. i. $f(2) = 1$ ii. $f'(2) = 3$
 iii. $\alpha = 2$, $\beta = -4$

788. α) $2\sqrt{a}f'(\alpha)$, β) $4\sqrt{a}f(\alpha)f'(\alpha)$

789. α) $\frac{8}{3}$, β) 16

790. α) 2, β) $\frac{1}{2}$

791. $4f'(2) - 4f(2)$

792. i) $-\frac{2}{3}$ ii) -3 iii) 1 iv) $-\frac{1}{3}$

793. Προσθαφαιρέστε στον αριθμητή το $x_0 f(x_0)$

794. Προσθαφαιρέστε στον αριθμητή το $xf(\alpha)$

795. Προσθαφαιρέστε στον αριθμητή το $x^2 f^2(\alpha)$

796. Προσθαφαιρέστε στον αριθμητή το $x_0 \sqrt{f(x_0)}$

797. $g(\alpha)f'(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)$

798. Θέστε $h(x) = \frac{f(x) + 1}{x}$ και

$$\varphi(x) = \frac{g(x) + 2}{x}$$

799. i. Θέτουμε $g(x) = \frac{x^2 f(x) - 2}{x - 1}$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x - 1) + 2}{x^2} = \frac{3 \cdot 0 + 2}{1} =$$

$$= 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x-1) + 2}{x^2} - 2 = \dots = -1$$

$$\text{ii. Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 - 3) - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x^2 - 3) - 2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right] = \dots$$

800. Αφού βρείτε ότι $f(0) = 0$ διαιρέστε και τα 2 μέλη με x^3 και πάρτε όρια στο 0

801. $f'(0) = -1$

802. Διαιρέστε με $(x-1)^3$ και πάρτε όρια.

803. Αφού δείξετε ότι $f(0) = g(0) = 0$, διαιρέστε και τα δύο μέλη με x^2 και πάρτε όρια στο 0

804. Αφού βρείτε $f(0) = g(0) = 0$ διαιρέστε με x^2 και τελικά βρείτε $f'(0) = g'(0) = 0$

805. Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 f^2(x) + 2}, \text{ οπότε } \dots$$

806. i) Είναι

$$\left| f(x) \right| = \left| \frac{x^3 - 1}{1 + f^2(x)} \right| \leq |x^3 - 1| \dots$$

$$\text{ii) Είναι } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{1 + f^2(x)} = \dots$$

807. Θέστε όπου $x = 1$, οπότε $f(1) = 1$ (δεκτή) και $f(1) = -3$ (απορ.). Στη συνέχεια αφαιρέστε και από τα δύο μέλη της ισότητας το $2x + 1$, οπότε ...

808. Για $x > 5$ είναι

$$\frac{g(x) - g(5)}{x - 5} - \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \geq 1$$

και πάρτε $\lim_{x \rightarrow 5^+}$. Ομοίως αν $x < 5$

809. Είναι $f(x) - f(a) + x - a \leq g(x) - g(a)$ και διαιρέστε με $x - a$ διακρίνοντας

τις περιπτώσεις $x < a$, $x > a$ και μετά $x \rightarrow a^-$ και $x \rightarrow a^+$.

810. Για $a=x$ και $\beta=0$ είναι $f(x) - f(0) \leq x^2$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x > 0$ και $x < 0$

811. Θέστε $u = 5 - 2x$

812. $f'(1) = -3$

813. Είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{f(2x) - f(1)}{x - \frac{1}{2}}$$

και θέστε $u = 2x$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(2x-1) - f(1)}{x - \frac{1}{2}}$$

και θέστε $u = 2x - 1$.

814. $f'(1) = a$

815. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(3x) - f(3)}{x - 1}$$

και θέστε $u = 3x$.

Ομοίως στο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(5x-2) - f(3)}{x - 1}$$

θέστε $u = 5x - 2$

816. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x^3 + 1) - f(2)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(2x) - f(2)}{x - 1}$$

Στο πρώτο όριο θέστε $x^3 + 1 = u$ και στο δεύτερο $2x = u$.

817. Προσθέστε και αφαιρέστε στον αριθμητή το $f(0)$ και χρησιμοποιείστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax) - f(0)}{x} =$$

$$\alpha \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u} = \alpha \cdot f'(0)$$

818. Προσθέστε και αφαιρέστε στον αριθμητή το $f^2(0)$

819. α) Θέστε $u = 2h$,

β) Προσθαφαιρέστε το $f(x_0)$ και θέστε $u = -h$ και $t = 3h$,

γ) Είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} (f(x_0 - h) + f(x_0)) \right] = \dots$$

820. Προσθαφαιρέστε το $f(x)$ και θέστε $u = 4h$ και $t = -3h$.

821. Προσθαφαιρέστε στον αριθμητή το $f(a)$, διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή με h και τελικά βρείτε $2f'(a)$.

822. Προσθαφαιρέστε στον αριθμητή το $f(x_0)$ και διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή με h .

823. Θέστε $u = \frac{x}{h}$.

824. Είναι

$$= \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(xh) - f(x)}{h-1} + \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h-1} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(xh) - f(x)}{h-1} + \frac{f\left(\frac{x}{h}\right) - f(x)}{h-1} \right]$$

και θέστε $u=xh$ και $t = \frac{x}{h}$.

825. α. Αφού αποδείξετε ότι η f είναι 1-1, θέστε στη δοθείσα όπου $x=0$
β. Αν f παραγωγίσιμη τότε :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} + 1 \right] = \dots =$$

$$= f'(0)f'(0) + 1. \text{ Άρα}$$

$$f'(0) = (f'(0))^2 + 1 \Rightarrow \dots \text{ άτοπο}$$

826. $f'(x_0) = f(x_0)f'(0)$

827. Δείξτε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0 + f'(0)$$

828. Δείξτε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

829. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

θέτοντας $x - x_0 = h$ ή το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

830. i) 0 και 1

$$\text{ii) Είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \dots = f'(x_0) + e^{x_0}$$

831. Αποδείξτε ότι $f'(x_0) = \frac{f'(1)f(x_0)}{x_0}$,

$$x_0 \in \mathbb{R}^*$$

832. $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} f(x_0) + f'(1)$

833. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$

834. Για $\alpha = x_0$ και $\beta = h$ είναι

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) + f(h) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \leq f(h) \text{ και}$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις $h > 0$ και $h < 0$.

835. Είναι

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)}{x - \alpha} \text{ \&}$$

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{f(x)}{x - \beta}$$

και η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε....

Παράγωγος Συνάρτηση

836. i) $5x^4 + 1$, ii) $3x^2 + \frac{1}{x}$,

iii) $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \eta\mu t$, iv) $\frac{1}{u}$,

v) $\sigma\upsilon\nu x$, vi) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$,

vii) $3e^x - 2^x \ln 2 + 2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,

viii) $2^x \ln 2 - 10 \cdot 4^x \ln 2 + \frac{7}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ix) $\frac{1}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x}$,

x) $\frac{3e^x}{2} - \frac{5^x \ln 5}{4} - \frac{5}{3\eta\mu^2 x}$

837. i) $\frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x - \ln x \eta\mu x$,

ii) $5\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{3} \eta\mu x$, iii) $v_o + \gamma t$,

iv)

$\frac{1}{2\sqrt{x}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \sqrt{x} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$,

v) $(3x^2 - 1)\eta\mu x + (x^3 - x)\sigma\upsilon\nu x$,

vi) $\ln t + 1 + 10t$, vii)

$\frac{x}{2} - 6x^2 \ln|x| - 2x^2$,

viii) $e^x \left(\ln|x| + \frac{1}{x} \right)$,

ix) $3x^2 \sqrt{x} \ln x + \frac{x^3}{2\sqrt{x}} \ln x + x^2 \sqrt{x}$

x) $2e^x \left(\varepsilon\varphi x + x\varepsilon\varphi x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right)$

838. i) $\frac{-6x+1}{(3x^2-x+4)^2}$, ii) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$,

iii) $-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$,

iv) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{3}{x^4}$, v) $\frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2}$,

vi) $\frac{3x^2 + 20x - 5}{(3x^2 + 5)^2}$,

vii) $\frac{8x^5 + 8x}{(x^4 - 1)^2}$,

viii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$

839. i) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + 1, & x > 0 \end{cases}$,

ii) $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ 3x^2 - 4x - 1, & x > 2 \end{cases}$,

iii)

$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu x + (x^2 + 7)\sigma\upsilon\nu x, & x \leq 0 \\ 3x^2 \sigma\upsilon\nu x - x^3 \eta\mu x + 7, & x > 0 \end{cases}$

iv) $f'(x) = \begin{cases} 1 - \sigma\upsilon\nu 2x, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$

v) $f'(x) = 1 + \ln|x|, x \neq 0$,

vi) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$,

vii) $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \text{ ή } x > 3 \\ 2x + 2, & 0 < x < 3 \end{cases}$,

viii) $f'(x) = \begin{cases} -4, & x < 1 \text{ ή } x > 3 \\ -4x + 4, & 1 < x < 3 \end{cases}$

ix) $f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + 3x\sigma\upsilon\nu x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

x)

$f'(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon\varphi x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$840. \quad \frac{dy}{dx} = \left(5x + 1 + \frac{2}{x} \right)' = 5 - \frac{2}{x^2}$$

$$841. \quad \text{i) } 2, \quad \text{ii) } 106, \quad \text{iii) } -1, \\ \text{iv) } f'(-3) = -7,$$

$$f'(-2) = -5, \quad f'(0) = 3,$$

$$\text{v) } f'(-\pi) = \frac{\pi^2}{4}, \quad f'(0) = 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$$

$$842. \quad \text{Av } h'(x_0) = 0, \quad \text{τότε δείξτε ότι} \\ \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

$$843. \quad \alpha) \text{ Είμαι}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2},$$

$$\beta) \text{ Δείξτε ότι } g(1) - g^2(1) \leq \frac{1}{4}$$

$$844. \quad f'(0) = 1, \quad g'(0) = 1$$

$$845. \quad \text{i) } 20x(2x^2 + 3)^4, \\ \text{ii) } 30(x-1)(3x^2 - 6x + 5)^4,$$

$$\text{iii) } \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+3}},$$

$$\text{iv) } \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}},$$

$$\text{v) } 3\sigma\nu\nu(3x-5),$$

$$\text{vi) } -e^x \eta\mu(e^x + 1),$$

$$\text{vii) } 6\eta\mu x \sigma\nu\nu x,$$

$$\text{viii) } -\frac{9}{4} \sigma\nu\nu^2(3x-2)\eta\mu(3x-2),$$

$$\text{ix) } 6x\sigma\nu\nu(6x^2),$$

$$\text{x) } \frac{3e\phi^2 x}{\sigma\nu\nu^2 x} + \frac{2\ln x}{x},$$

$$\text{xi) } 8x \cdot \eta\mu^3 x^2 \cdot \sigma\nu\nu x^2,$$

$$\text{xii) } \eta\mu 2x \sigma\nu\nu(\eta\mu^2 x) + \\ + \sigma\nu\nu x \cdot \eta\mu(2\eta\mu x),$$

$$\text{xiii) } \frac{2x}{x^2-1}, \quad \text{xiv) } \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\text{xv) } 4xe^{2x^2-3},$$

$$\text{xvi) } -e^{x-x\ln x} \cdot \ln x,$$

$$\text{xvii) } 3 \cdot 2^{3x-4} \cdot \ln 2,$$

$$\text{xviii) } -\frac{3}{\eta\mu^2 3x} + \frac{3\sqrt{x} \cdot \ln 3}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{xix) } \frac{-15(3x-1)^2}{(x-2)^4},$$

$$\text{xx) } 3^{\frac{3x-1}{x-2}} \cdot \frac{-5\ln 3}{(x-2)^2}$$

$$846. \quad \text{i) } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x\sigma\nu\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$\text{ii) } f'(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2 \sigma\nu\nu \frac{1}{x} + x\eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

$$\text{iii) } f'(x) = \begin{cases} \sigma\nu\nu(x-1) - 3x^2, & x < 1 \\ \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{iv) } f'(x) = \begin{cases} \frac{2\sigma\nu\nu x}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2} \eta\mu x, & x > 0 \\ \frac{-2\sigma\nu\nu x}{3\sqrt[3]{-x}} - \sqrt[3]{x^2} \eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$

$$847. \quad \text{Είμαι } f'(x) = -\frac{1}{1+x}$$

$$848. \quad \text{i) } x^{\eta\mu x} \left(\sigma\nu\nu x \cdot \ln x + \frac{\eta\mu x}{x} \right),$$

$$\text{ii) } (x^2+3)^{\sigma\nu\nu x} \cdot \left[-\eta\mu x \cdot \ln(x^2+3) + \frac{2x\sigma\nu\nu x}{x^2+3} \right]$$

$$\text{iii) } \left(1 + \sqrt{x} \right)^{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} \right],$$

$$\text{iv) } (1+x+x^2)^{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x+x^2) + \sqrt{1+x^2} \frac{x}{1+x+x^2} \right) \\ (1+x+x^2)^{1+x^2}.$$

$$\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x+x^2) + \sqrt{1+x^2} \frac{x}{1+x+x^2} \right)$$

$$v) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right]$$

$$vi) x^x (\ln x + 1) + x^{1/x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$vii) \left(\sqrt{x} \right)^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x},$$

$$viii) (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{1 + \ln(\ln x)}{x},$$

$$ix) -\eta \mu x^{\ln x} \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x},$$

$$x) x^{2x^2} \cdot 2x^2 \cdot \frac{2x^2 \cdot \ln x \cdot \ln 2 + 1}{x}$$

$$849. i) \frac{57}{4}, \quad ii) \frac{9}{4}, \quad iii) \frac{1}{2} - \ln 4,$$

$$iv) \ln(1+e), \quad v) 2e^e \sin e^e,$$

$$vi) f'(-\sqrt{5}) = \frac{2}{15}, \quad f'(0) = \frac{1}{4}$$

$$850. \text{ Είναι } f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \\ = f(x)g(x)(f'(x) + g'(x)), \text{ οπότε } \dots$$

$$851. 12$$

$$852. -1$$

$$853. 0$$

$$854. f'(1) = \pi$$

$$855. \alpha) 2, \quad \beta) 4$$

$$856. A. i) \text{ Να αποδείξετε ότι } f'(-x) = -f'(x), \\ x \in \mathbb{R},$$

$$ii) \text{ Να αποδείξετε ότι } f'(-x) = f'(x), \\ x \in \mathbb{R}$$

$$B. i) \text{ Η } g \text{ είναι αποτέλεσμα πράξεων} \\ \text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων}$$

$$ii) g'(0) = 2 \text{ γιατί } f'(0) = 0$$

$$857. f'(1) = 4 \quad \& \quad f'(0) = 0$$

$$858. a) 12x^2 - 8x, \quad \beta) \frac{20}{(2x-1)^3},$$

$$\gamma) 180(3x+2)^3, \quad \delta) \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},$$

$$\varepsilon) 4e^{2x^2-1}(1+4x^2),$$

$$\sigma\tau) 2\sin\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right) - 4x^2\eta\mu\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$859. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) = 2x \ln x + x \text{ και} \\ f''(x) = 2 \ln x + 3,$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \eta\mu(\ln x) + \sin(\ln x) \\ \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{\sin(\ln x) - \eta\mu(\ln x)}{x},$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f^{(4)}(x) = -4e^{-x} \cdot \sin x$$

$$860. \text{ Είναι } \frac{df}{dx} = \frac{\sin x - \eta\mu x}{e^x} \text{ και}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{2\sin x}{e^x}, \text{ οπότε } \dots$$

$$861. \alpha) f''(1) = 3e + 3,$$

$$\beta) f''(e^{\pi/6}) = 1$$

$$862. \alpha) \text{ Αφού βρείτε την } f'(x) \\ \text{αντικαταστήστε και χωρίστε το} \\ \text{κλάσμα,}$$

$$\beta) g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ οπότε από } \alpha) \dots$$

$$863. \text{ Η } f \text{ δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη} \\ \text{στο } 1$$

$$864. \text{ Αφού } \rho_1, \rho_2 \text{ ρίζες της εξίσωσης θα} \\ \text{ισχύουν } \rho_1^2 + \alpha\rho_1 + \beta = 0 \text{ και} \\ \rho_2^2 + \alpha\rho_2 + \beta = 0$$

$$865. 42$$

$$866. f''(0) = 0$$

$$867. \alpha) \text{ Στη σχέση } f(-x) = -f(x) \text{ θέστε} \\ x = 0,$$

$$\beta) \text{ Είναι } (f(-x))' = (-f(x))' \Leftrightarrow \dots$$

$$868. \alpha. \text{ Παραγωγίζοντας την ισότητα} \\ f(-x) = -f(x) \text{ δείξτε ότι } f'(-x) = f'(x) \\ \beta. \text{ Η } f'' \text{ είναι περιττή οπότε } \dots$$

γ. i. Είναι

$$\frac{h'(x) + \frac{f''(x)}{f'(x)}}{h(x)} = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{\frac{(f'(x))^2}{f(x)}} + \frac{f''(x)}{f'(x)} = \dots$$

ii. Δείξτε ότι $h'(-x) = h(x)$

869. 24

870. i) Θέστε $u = x - 2h$

ii) Θέστε $u = \frac{x}{h}$

iii) Είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h^2) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \cdot \frac{f'(x+h^2) - f'(x)}{h^2} \right]$$

και θέστε $u = x + h^2$

871. $\alpha = \pm 1$

872. $\lambda = -1$ ή $\lambda = \frac{3}{2}$

873. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x + 1$

874. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x - 2$

875. Λύστε το σύστημα: $\begin{cases} g(x_0) = 0 \\ g'(x_0) = 0 \end{cases}$

876. $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{-3}{2}$, $\gamma = 2$

877. Είναι για $x \neq 0$: $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\eta \mu x}{x} \right|$,

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| \Leftrightarrow \dots$$

878. Παρατηρήστε ότι

$$f(x) = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$$

879. Παρατηρήστε ότι

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

880. ii) $\alpha = -5$, $\beta = 9$

881. β) Αποδείξτε ότι $f(1) = f'(1) = 0$,

$$\gamma) \alpha = \frac{4(v-1)}{v+1}, \quad \beta = \frac{-8v}{v+1}$$

882. β) $\kappa = -4v + 2$, $\lambda = 4v - 8$

883. $P(x) = x^2 + x + 3$

884. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

885. $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

886. $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + x^2 + 6x + 12$

887. $P(x) = x^2 + 4x + 4$ ή $P(x) = x^2 - 4x + 4$

888. Παραγωγίστε τη σχέση θεωρώντας ως μεταβλητή μια φορά το x και μια φορά το y .

889. Παραγωγίστε τη σχέση θεωρώντας ως μεταβλητή μια φορά το x και μια φορά το y .

890. Παραγωγίστε τη σχέση θεωρώντας ως μεταβλητή μια φορά το x και μια φορά το y .

891. Παραγωγίστε τη σχέση θεωρώντας μια φορά ως μεταβλητή το x και μια το y .

892. Παραγωγίστε 2 φορές τη σχέση θεωρώντας ως μεταβλητή μια φορά το x και μια φορά το y .

893. Παραγωγίστε ως προς y και θέστε $y = 1$.

894. α) Θέστε $x = y = 0$,

β) Παραγωγίστε θεωρώντας ως μεταβλητή το y και θέστε $y = 0$

895. α) Θέστε $x = y = 1$,

β) Θεωρήστε το x σταθερό, παραγωγίστε ως προς y και θέστε $y = 1$.

896. i. f γν αύξουσα, $f(A) = \mathbb{R}$

ii. Αν f παραγωγίσιμη στο 0 τότε... άτοπο.

897. i f γν αύξουσα, $D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$, ii. 1.

898. i. f γν. φθίνουσα,

$$D_{f^{-1}} = f(A) = (-1, 1)$$

$$\text{ii. Είναι } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

οπότε.....

Εφαπτομένη Συνάρτησης

899. i) $4x - y - 4 = 0$, ii) $y = \sqrt{2}$,
 iii) $y = x + 1$, iv) $y = -x + e$,
 v) $y = 2$, vi) $y = 2x + 1$,
 vii) $y = x$, viii) $y = -x$,
 ix) $y = -2x + 3$, x) $y = x$

900. i) $y = 9x - 14$, ii) Δεν ορίζεται,
 iii) $y = \frac{1}{4}x$ iv) $y = 0$

901. i. Είναι $1 + \alpha = (1 - \beta)^2 \geq 0$
 ii. Είναι $f(-1)f(1) \leq 0$ οπότε....
 iii. $\alpha = \frac{5}{4}$ $\beta = -\frac{1}{2}$ iv. $y = 3x - \frac{3}{4}$

902. $y = 7x - 6$

903. $x - 2y + 2\ln 2 = 0$

904. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
 $y = -x + \frac{\pi}{2}$

905. $y = x + 1$

906. $y = 10x$

907. β) $13x - 4y - 5 = 0$

908. $y = 5x - 5$

909. β) $y = x + 2$

910. $y = x$

911. β) $y = -1$, γ) $\frac{e}{2}$

912. i) Θέστε όπου x το $-x$ ii) $\frac{1}{4}$

913. α) Αφού παραγωγίσετε και τα 2 μέλη
 θέστε $x = 0$, β) Το B επαληθεύει
 την $\varepsilon: y = x + 2 - f(1)$

914. α) $D_f = (-2, 2)$

$M_1(-\sqrt{3}, 0), M_2(\sqrt{3}, 0)$

β) Οι $y = 2\sqrt{3}x + 6$ &

$y = -2\sqrt{3}x + 6$ τέμνονται στο

$M(0, 6) \in y'y$

915. Βρείτε ότι οι ε_A και ε_B τέμνουν τον
 $y'y$ στο ίδιο σημείο.

916. Δείξτε ότι το

$$(\Sigma): \begin{cases} y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \\ y - g(x_o) = g'(x_o)(x - x_o) \end{cases}$$

έχει λύση $(0, y_o)$.

917. $x_o = 1$

918. $N(-2, -4)$

919. α) Αν $M\left(x_o, \frac{\alpha}{x_o}\right)$, δείξτε ότι το

$$(\Sigma): \begin{cases} y = \frac{\alpha}{x} \\ y = -\frac{\alpha}{x_o^2} + \frac{2\alpha}{x_o} \end{cases} \text{ έχει}$$

μοναδική λύση $\left(x_o, \frac{\alpha}{x_o}\right)$,

β) i) Είναι $A(2x_o, 0)$ και

$B\left(0, \frac{2\alpha}{x_o}\right)$, οπότε ...,

ii) $(OAB) = 2|\alpha|$

920. α) $y = \frac{1 - \ln(\alpha x_o)}{x_o^2}x + \frac{-1 + 2\ln(\alpha x_o)}{x_o}$,

β) $M\left(2x_o, \frac{1}{x_o}\right)$

921. α) $y = \frac{-x_o - \alpha - 1}{e^{x_o}}x + \frac{x_o^2 + \alpha x_o + \alpha}{e^{x_o}}$,

β) $A(x_o + 1, \frac{1}{e^{x_o}})$

922. i. IR ii. $\varepsilon: x - 5y - 3 = 0$

923. i. IR ii. $\varepsilon: x - 2y + 1 = 0$

924. α) Παραγωγίζουμε την

$f(f^{-1}(x)) = x$ και λύνουμε ως

προς $(f^{-1})'(x)$

β) i) $f^{-1}(1) = 0$ ii) Στην

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ για

$x=1$ και $f'(0) = 2$, άρα...

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

iii) Η εφαπτομένη θα είναι η

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

925. $\varepsilon: y = -x + 2$

926. $y = 8x + 10$ και $y = 8x - 22$.

927. i) $y = -x + 2$, ii) $y = 3x - 2$,

iii) $y = x + 1$, iv) $y = \frac{7}{4}$

928. α) $A\left(-1, \frac{7}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{5}{3}\right)$,

β) $\Gamma(0, 1)$, $\Delta\left(1, \frac{5}{6}\right)$

929. α) $5x - 2y - 12 = 0$,

β) $x + 2y + 6 = 0$

930. $2x + y + 2 = 0$ και $2x + y + 14 = 0$

931. Δείξτε με τη βοήθεια του Θ. Bolzano ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $e^\xi - \xi - 2 = 0$

932. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}$

933. $-\frac{2}{3}$

934. i) Παραγωγίστε τη δοθείσα σχέση

ii) Δείξτε ότι $f(-3) = 3/2$

935. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = g'(x)$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$. Η λύση θα είναι η $x_0 = 4$.

936. Είναι $O(0, 0)$ και $A\left(\frac{4a}{a^2 + 1}, 0\right)$.

Αρκεί να δείχθει ότι

$$f'(0) = -f'\left(\frac{4a}{a^2 + 1}\right)$$

937. $\varepsilon_1: y = 9x - 4\sqrt{2}$,

$\varepsilon_2: y = 9x + 4\sqrt{2}$

938. Διαιρέστε με x^2 και δείξτε ότι $f'(0) = g'(0) = -1$.

939. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα είναι αδύνατη.

940. Αν $h(x_0) = 0$, δείξτε ότι $h'(x_0) = 1$

941. Δείξτε ότι $f'(e^{c-2003} + 1)f'(e^{2003-c} + 1) = -1$

942. $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

943. $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$

944. $\alpha = 3$, $\beta = 2$

945. $\alpha = 1$, $\beta = -6$

946. $\alpha = \beta = 6$

947. $\alpha = \frac{7}{2}$, $\beta = -\frac{27}{2}$

948. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$

949. $\alpha = \beta = -\frac{4}{3}$

950. $\alpha = 2$, $\beta = -6$, $\gamma = -4$

951. $y = -x$ και $y = 26x + 54$

952. $y = 2x + 1$

953. i. $x=1$ ii. $y=2x$

954. $\kappa = \frac{e^2}{4}$

955. Δείξτε με τη βοήθεια του Θ. Bolzano ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $2\xi^3 + \ln \xi - 1 = 0$.

956. Δείξτε ότι η εξίσωση $2\ln x + x - 2 = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

957. α) Αν $(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής, βρείτε ότι $x_0 = \pm 1$, β) $\alpha = \pm \sqrt{3}$

958. Αν $M(\alpha, -2)$ σημείο της $y = -2$ και $A(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής δείξτε ότι $f'(x_1)f'(x_2) = -1$ όπου x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x_0^2 - 2\alpha x_0 - 16 = 0$

959. i) Αν $M(x_0, x_0^2)$ σημείο επαφής δείξτε ότι η εξίσωση $x_0^2 - 2x_0\alpha + \beta = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Αν $\beta = -\frac{1}{4}$ τότε $f'(x_1)f'(x_2) = -1$

όπου x_1, x_2 ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

960. α) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \text{ είναι αδύνατη.}$$

β) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f

στο τυχαίο σημείο $(x_0, f(x_0))$, στη συνέχεια αντικαθιστούμε για $x=y=0$ και η εξίσωση $-2x_0^3 - \alpha x_0^2 = 0$ έχει δύο λύσεις, άρα θα έχουμε και δύο εφαπτομένες που θα διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

961. α) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f

στο τυχαίο σημείο $(x_0, f(x_0))$, στη συνέχεια αντικαθιστούμε για $x=a$ και $y=0$ και βρίσκουμε την

$$e^{x_0}(\alpha - x_0 + 1) + 1 = 0.$$

Θέτουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^x(\alpha - x + 1) + 1 \text{ και αρκεί να}$$

δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

962. α) Για οποιαδήποτε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2),$$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x_0) = 0 \text{ έχει μοναδική λύση,}$$

βρίσκοντας το σύνολο τιμών της f' .

γ) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f

στο τυχαίο σημείο $(\xi, f(\xi))$, στη

συνέχεια αντικαθιστούμε για $x=y=0$

$$\text{βρίσκουμε την } -\xi^2 + e^{-\xi} \cdot (\xi + 1) = 0$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano.

963. α) i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - 1}{\eta\mu x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - f(0)}{\eta\mu x} \stackrel{\eta\mu x = u}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u^2) - f(0)}{u^2} \cdot u = f'(0) \cdot 0$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2017x) - 1}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(2017x) - 1)(f(2017x) + 1)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2017 \frac{f(2017x) - f(0)}{2017x} (f(2017x) + 1) \right] = \dots$$

β) $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$

γ) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$

964. $y = 6x + 3$

965. $y = 6x - 2$

966. $y = 7x + 13$

967. $y = -10x - 25$

968. Δείξτε ότι $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

969. -4

970. i) $f(0) = -3, f'(0) = 1, g'(0) = 1$

ii) είναι $g(0) = -3$ και $g'(0) = 1$

971. Δείξτε ότι $\begin{cases} f(x_0) = \kappa x_0 + \lambda \\ f'(x_0) = \kappa \end{cases}$

972. Είναι $A(0, 1) \in C_f, B(1, 0) \in C_g,$

$$AB: y = -x + 1$$

Οπότε αρκεί να δειχθεί ότι :

$$f'(0) = -1 = g'(1)$$

973. $\alpha = -4, \beta = 3$

974. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $A(x_0, y_0),$
 $x_0 > 0,$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + 1 \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 1 = \lambda_{\varepsilon} \end{cases}$$

975. Η εφαπτομένη της C_1 στο A έχει εξίσωση $y = 2x - 4$ και εφάπτεται της C_2 στο $B(0, -4)$

976. $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

977. $\lambda = 1$ ή $\lambda = -7$

978. $\alpha = 6, M(3, 9)$ ή
 $\alpha = -6, M(-3, -3)$

979. $\alpha = -1$

$$980. \alpha = -\frac{e}{4}, \quad M\left(-\frac{e}{4}, -\frac{e^2}{4}\right)$$

$$981. a = \frac{9}{16}$$

$$982. \alpha = e^{1/e}$$

$$983. a = \frac{1}{4}$$

$$984. \alpha) M\left(0, \frac{\alpha}{e}\right)$$

$$\beta) \alpha = e^2 - e, \quad A(1 - e, 0)$$

$$985. \Theta. \text{ Bolzano για την } h(x) = x \ln x - x - 1 \text{ στο } [1, e^2]$$

$$986. M(3, 1)$$

$$987. \alpha = 0, \quad \beta = -1$$

$$988. \alpha = -1, \quad \beta = 1$$

$$989. \alpha = 3, \quad \beta = 2$$

$$990. \alpha = -1, \quad \beta = 3$$

$$991. \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1$$

$$992. \alpha = \frac{13}{3}, \quad \beta = \frac{5}{3}$$

$$993. \alpha = -2, \quad \beta = 5 \quad \text{ή} \quad \alpha = 6, \quad \beta = 1$$

$$994. y = -4x - 4$$

$$995. y = 2x \text{ και } y = -6x - 8$$

$$996. \lambda = 3$$

$$997. i. \Theta. \text{ Bolzano για την}$$

$$H(x) = e^x - 8x + 8 \text{ στο } [1, 2]$$

$$ii. \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει}$$

$$x_2 \in (1, 2) \text{ ώστε } e^{x_2} = 8x_2 - 8$$

$$998. \Theta. \text{ Bolzano για την}$$

$$h(x) = e^x + 4x - 4 \text{ στο } [-2, 0]$$

Ρυθμός Μεταβολής

$$999. t_1 = 1996$$

$$1000. i) \text{ Παραγωγίστε τη δοθείσα σχέση}$$

$$ii) \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f(0) = 2$$

$$iii) 4 \text{ cm/sec}$$

$$1001. E'(t_0) = 4e \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$1002. E'(t_0) = \frac{5e^4}{2} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$1003. \frac{1}{4} \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) \text{ cm}^2 / \text{sec}$$

$$1004. 3 \text{ μονάδες} / s$$

$$1005. \alpha) -4 \text{ μονάδες} / s \quad \beta) M(3, -3)$$

$$1006. \alpha) E(t) = 2t\sqrt{25 - t^2}$$

$$\beta) -\frac{14}{3} m^2 / \text{sec}$$

$$1007. \alpha) y'(t_0) = 1 \text{ cm/sec},$$

$$\beta) \theta'(t_0) = -\frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

$$1008. 4 \text{ m/sec}, \quad 8 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$1009. \alpha) y = \frac{1}{\alpha} x - 1 + \ln \alpha \quad \beta) \alpha = e,$$

$$\gamma) \frac{2}{e} m / \text{sec}$$

$$1010. \alpha) 5 \text{ μονάδες} / s, \quad \beta) 27 \text{ μονάδες} / s$$

$$1011. \sqrt{6} \text{ cm/sec}$$

$$1012. i) x'(t_0) = -2e \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$

$$ii) \theta'(t_0) = \frac{-2e}{e^2 + 1} \text{ rad} / \text{μονάδα χρόνου}$$

$$1013. \alpha) y = 3x - 9$$

$$\beta) i) y'(t_0) = 12 \text{ μονάδες} / s$$

$$ii) \theta'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad} / s$$

$$1014. \alpha) y = -x + 7 \quad \beta) i) -2 \text{ μονάδες} / s$$

$$ii) -\frac{2}{5} \text{ μονάδες} / s$$

$$1015. E'(t_0) = -4 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$1016. 48 \text{ cm}^2/s$$

$$1017. \alpha) \Pi'(t_0) = 2 \text{ cm/sec},$$

$$E'(t_0) = \frac{15}{2} \text{ cm}^2 / \text{sec},$$

$$\beta) \theta'(t_0) = -\frac{3}{20} \text{ rad/sec}$$

$$1018. \alpha) 0,8 \text{ m/sec}, \quad \beta) 4,8 \text{ m/sec},$$

$$\gamma) \frac{4}{87} \text{ rad} / \text{sec}$$

$$1019. \alpha) 30 \text{ m/min}, \quad \beta) \frac{2}{5} \text{ rad} / \text{min}$$

$$1020. -\frac{8}{3} m / \text{sec}$$

1021. $\theta'(t_0) = \frac{600}{29} \text{ rad/sec}$

1022. $r'(t_0) = \frac{3}{20\pi} \text{ m/min}$

Θεώρημα Rolle

1023. $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$

1024. $\beta)$ Είναι

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mu(\xi - \beta) + \nu(\xi - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

1025. $\Theta.$ Rolle για την f στο $[0, 1]$

1026. $\Theta.$ Rolle για την f στο $[-1, 1]$.

1027. Δείξτε ότι $f(\alpha) = f(\beta) = 1$

1028. $\beta)$ Λόγω του $\alpha)$ υπάρχει

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

1029. i) Αν $g(\alpha) = g(\beta)$ τότε από $\Theta.$ Rolle ... άτοπο,

iii) Από $\Theta.$ Rolle για την $h(x)$ του

ii) ερωτήματος.

1030. i) Είναι η h συνεχής και παραγωγίσιμη με $h(0) = h(1) = 0$

ii) Από i) υπάρχει ξ ώστε $h'(\xi) = 0$

1031. $\beta)$ Το ξ είναι αυτό που προκύπτει από το $\Theta.$ Rolle του $\alpha)$ ερωτήματος.

1032. $\alpha)$ $\Theta.$ Rolle για την f στο $[0, 2014]$,

$\beta)$ Προκύπτει από το $\alpha)$ ερώτημα

1033. $\alpha.$ Θ Rolle για την g στο $[\alpha, \beta]$

$\beta.$ Από $\alpha.$ ερώτημα δείξτε ότι
 $-f(\xi) = f'(\xi)(\alpha + \beta - \xi).$

1034. $\alpha)$ $\alpha = 1, \beta)$ Από $\Theta.$ Rolle για την g στο $[0, 1]$.

1035. $\alpha)$ Πρώτα δείξτε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = 0 = f(0),$$

$\beta)$ Από $\alpha)$ υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{1}{2\pi} \right)$

τέτοιο ώστε $f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \dots$

1036. i) $f'(0) = 0$

ii) Είναι $f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$

iii) $\Theta.$ Rolle για την f στο

$$\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right]$$

1037. $\alpha)$ $a = 0.$ $\beta)$ Το x_0 είναι του $\Theta.$ Rolle του $\alpha)$ ερωτήματος

1038. $\beta)$ Το x_0 είναι του $\Theta.$ Rolle του $\alpha)$ ερωτήματος

1039. $\beta)$ από $\alpha)$ ερώτημα υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ ώστε $f'(\eta \mu \xi) \sin \xi = 0.$ Επίσης

$$f'(x) = f(\eta \mu x) + x f'(\eta \mu x) \sin x \text{ και θέτοντας όπου } x = \xi \text{ δείξτε ότι } f'(\xi) = g(\xi).$$

1040. i) $\Theta.$ Rolle για την

$$g(x) = (3\alpha - \beta)x^4 + (3\beta - 2\alpha)x^3 - \alpha x^2 - 2\beta x \text{ στο } [0, 1],$$

ii) $\Theta.$ Rolle για την

$$g(x) = (x^2 - 3x + 2) \sin x \text{ στο } [1, 2]$$

1041. $\Theta.$ Rolle για την $g(x) = x^4 - \alpha x^2 - \beta x$ στο $[0, 1]$

1042. $\Theta.$ Rolle για την

$$f(x) = \frac{\alpha_v}{v+1} x^{v+1} + \frac{\alpha_{v-1}}{v} x^v + \dots + \frac{\alpha_1}{2} x^2 + \alpha_0 x = 0$$

στο $[0, 1]$

1043. $\Theta.$ Rolle για την

$$h(x) = x^4 + \lambda x^2 - (1 + \lambda)x \text{ στο } [0, 1]$$

1044. $\Theta.$ Rolle για την $h(x) = (x^2 - 4)\eta \mu x$ στα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$.

1045. $\Theta.$ Rolle για την $h(x) = f(x) - x^2$ στο $[0, 1]$

1046. $\Theta.$ Rolle για την

$$h(x) = f(x) - x^3 - 3x^2 \text{ στο } [1, 2]$$

1047. $\Theta.$ Rolle για την $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$

1048. $\Theta.$ Rolle για την $h(x) = f(x)g(x)$ στο $[0, 1]$

1049. $\Theta.$ Rolle για την

$$h(x) = [f(x) - f(\alpha)][g(x) - g(\beta)] \text{ στο } [\alpha, \beta]$$

1050. $\Theta.$ Rolle για την

$$h(x) = f(x) - \sin x - x^2 \text{ στο } [-\alpha, \alpha].$$

1051. $\Theta.$ Rolle για την

$$g(x) = f(x) - x^2 + 3x - \ln x \text{ στο } [1, 2]$$

1052. $\Theta.$ Rolle για την

$$g(x) = (1 - x^2)f(x) \text{ στο } [-1, 1]$$

1053. Θ. Rolle για την $g(x) = x^2 + \frac{1}{f(x)}$

στο $[0, 1]$.

1054. Θ. Rolle για την

$$g(x) = \sin x + \sqrt{f(x)} \text{ στο } [0, 2\pi].$$

1055. Θ. Rolle για την

$$g(x) = f^3(x) + 3f(x) - 4x \text{ στο } [0, 1].$$

1056. Θ. Rolle για την $g(x) = f(x)\sin x$ στο $[0, 1]$

1057. Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{\eta\mu x}{f(x)}$ στο

$[0, \pi]$.

1058. Θ. Rolle για την $g(x) = (e^{-x} - e^x)f(x)$ στο $[0, 1]$

1059. Θ. Rolle για την

$$g(x) = \ln f(x) + \eta\mu x \text{ στο } [0, \pi].$$

1060. α) Είναι $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5$.

Από τη σχέση

$$f^2(x) + f(x^2) = 2x^2, \text{ για}$$

$$x = 1, \text{ προκύπτει ότι } f(1) = 1$$

ή $f(1) = -2$. Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή είναι $f(2) = -5 < 0$ ισχύει ότι $f(x) < 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα είναι } f(1) = -2.$$

β) Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση και για $x = 1$ προκύπτει

$$f'(1) = -2.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -2x$.

γ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την: $g(x) = (x - 3)f(x) - x$ στο διάστημα $[1, 2]$.

1061. α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$

β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $g(x) = x \ln f(x)$ στο διάστημα $[0, 1]$.

1062. α. Θ. Rolle για την $g(x) = f(x)(x - 3)$ στο $[1, 2]$

β. Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

στο $[1, 2]$

γ. Θ. Rolle για την

$$\varphi(x) = f^2(x) - x^2 \text{ στο } [1, 2]$$

1063. Θ. Rolle για την

$$g(x) = (f(x) - \sin x)^2 - x^2 \text{ στο } [-\pi, \pi].$$

1064. β) Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

στο $[x_1, x_2]$

1065. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f'(x)(x - 1) - f(x) = 0 \text{ έχει λύση στο } (2, 3) \text{ που προκύπτει από Θ. Rolle}$$

για την $g(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$ στο $[2, 3]$.

1066. Θεώρημα Rolle για την

$$H(x) = \frac{f(x)}{x - \gamma} \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

1067. Θ. Rolle για την

$$h(x) = f(f(x)) - x \text{ στο } [1, 2]$$

1068. Θ. Rolle για την $h(x) = x^2 f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$

1069. Θ. Rolle για την

$$h(x) = \frac{\alpha}{3} \ln^3 x - \frac{\beta}{2} \ln^2 x - \gamma \ln x \text{ στο } [1, e^2]$$

1070. Θ. Rolle για την $h(x) = f^2(x) - x^2$ στο $[\alpha, \beta]$

1071. Από Θεώρημα Rolle για την

$$H(x) = f^2(x) + x^2 \text{ στο } [\alpha, \beta] \text{ δείξτε ότι}$$

$$f'(x_0) \frac{f(x_0)}{x_0} = -1.$$

1072. Θ. Rolle στην $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$ στο

$(0, 1)$

1073. Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) \ln x$ στο $[\alpha, \beta]$

1074. Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$ στο

$[\alpha, \beta]$

1075. Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{\ln f(x)}{x}$ στο

$[\alpha, \beta]$

- 1076.** α) Δείξτε ότι η f είναι 1-1
 β) Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ στο $[a, \beta]$
- 1077.** Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ στο $[a, \beta]$
- 1078.** Θ. Rolle για την $H(x) = \ln f(x) - x^3$.
- 1079.** Θ. Rolle για την $h(x) = f(x)(x-a)(x-\beta)$ στο $[a, \beta]$
- 1080.** Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{x}$ στο $[a, \beta]$
- 1081.** Θ. Rolle για την $g(x) = e^x f(x)$ στο $[a, \beta]$
- 1082.** Εφαρμογή Θεωρήματος Rolle στη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.
- 1083.** Θ. Rolle για την $g(x) = e^{3x} f(x)$ στο $[a, \beta]$
- 1084.** Θ. Rolle για την $g(x) = e^{-2x} f(x)$ στο $[0, 2]$
- 1085.** Θ. Rolle για την $g(x) = e^{-ix} f(x)$ στο $[a, \beta]$
- 1086.** Εφαρμογή Θεωρήματος Rolle για την $g(x) = f(x)e^{\frac{\lambda x}{x}}$
- 1087.** i. Θ. Rolle για την $h(x) = f(x)e^{g(x)}$ στο $[a, \beta]$
 ii. Θ. Rolle για την $h(x) = f(x)g(x)e^{-x}$ στο $[a, \beta]$
- 1088.** Θ. Rolle για την $h(x) = e^x f'(x)$ στο $[a, \beta]$.
- 1089.** Θ. Rolle για την $h(x) = e^{f(x)} f'(x)$ στο $[a, \beta]$.
- 1090.** Θ. Rolle για την $g(x) = e^{\sin x} f(x)$ στο $[a, \beta]$
- 1091.** Θ. Rolle για την $h(x) = e^{x + \eta \mu x} f(x)$ στο $[a, \beta]$.
- 1092.** Θ. Rolle για την $g(x) = e^{-x^2} f(x) - e^{-x^2}$ στο $[0, 1]$
- 1093.** Θ. Rolle για την $h(x) = f(x)\eta \mu x e^{-x}$ στο $[0, \pi]$
- 1094.** Θ. Rolle για την $h(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-\beta)$ στο $[a, \beta]$
- 1095.** α) Θ. Bolzano στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, β) Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 από α) ερώτημα
- 1096.** Ισχύουν $f(1) = -2$, $f(2) = 3$, και $f(3) = -1$. Από το Θεώρημα Bolzano για την f στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1 \in (1, 2)$ και $x_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.
- 1097.** Θ. Bolzano για την f στα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ και Θ. Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 από τα Θ. Bolzano.
- 1098.** Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για την f στο $[1, 2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(3)$. Τέλος εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f στο $[x_0, 3]$.
- 1099.** α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για την $g(x) = 2f(x) - f(1) - f(2)$ στο διάστημα $[1, 2]$.
 β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $[\xi, 3]$.
- 1100.** α) Εφαρμόζουμε 2 φορές το θεώρημα του Bolzano στη συνάρτηση f , στα διαστήματα $(1,3)$ και $(3,5)$ καθώς $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ και $f(5) < 0$ και βρίσκουμε x_1, x_2 διαφορετικά μεταξύ τους (αφού $x_1 \in (1,3)$ και $x_2 \in (3,5)$) τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Άρα για $x_1 \neq x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$, συνεπώς η f δεν είναι 1-1.
 β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του

Rolle στη βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = f(x)x^2 \text{ στο διάστημα } (x_1, x_2),$$

$$\alpha\text{φού } g(x_1) = g(x_2) = 0$$

- 1101.** α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την :

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 4\alpha x^2 - 4\beta x \text{ στο}$$

$$[0, 2]. \text{ Προκύπτει ότι υπάρχει}$$

$$\xi \in (0, 2), \text{ ώστε } P(\xi) = 0.$$

β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα

Bolzano για τη συνάρτηση

$$g(x) = (x - 3)P(x) - 2^x + 6$$

στο διάστημα $(\xi, 3)$.

- 1102.** α) Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - 2x^2$ στο $[0, 1]$, β) Θ. Bolzano για την $h(x) = f'(x) - 5x$ στο $[0, \xi]$.

- 1103.** α) Θ. Rolle για την

$$g(x) = f(x) - \frac{x^5}{5} \text{ στο } [1, 2],$$

β) Θ. Bolzano για την

$$h(x) = f'(x) - 5x^3 \text{ στο } [1, \xi],$$

όπου ξ από α) ερώτημα.

- 1104.** α) Θ. Rolle για την

$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} \text{ στο } [0, 1],$$

β) Θ. Bolzano για την

$$h(x) = f'(x) - 2x \text{ στο } [0, a],$$

όπου a από α) ερώτημα.

- 1105.** α. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $f(x)$ στα διαστήματα

$$[-1, 0] \text{ και } [0, 1]. \text{ Βρίσκουμε}$$

ότι υπάρχουν $x_1 \in (-1, 0)$ και

$$x_2 \in (0, 1) \text{ τέτοια, ώστε}$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

β. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα

$$[x_1, x_2]..$$

- 1106.** α. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $g(x)$ σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$.

Προκύπτει ότι υπάρχουν

$$\xi_1 \in (0, 1) \text{ και } \xi_2 \in (1, 2)$$

τέτοια, ώστε

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

β. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle

για την $g'(x)$ στο διάστημα

$$[\xi_1, \xi_2].$$

- 1107.** Θ. Rolle για την f στο $[a, \beta]$, για την f' στα $[a, \rho]$ και $[\rho, \beta]$ όπου $f'(\rho) = 0$ και για την f'' στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου $f''(\xi_1) = 0 = f''(\xi_2)$

- 1108.** Ισχύουν: $f(x_1) = f(x_2) = 0$

$$\text{και } f'(x_1) = f'(x_2) = 0. \text{ Από το}$$

Θεώρημα Rolle για την f στο

$$[x_1, x_2] \text{ υπάρχει } x_3 \in (x_1, x_2)$$

τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = 0$. Από το

Θεώρημα Rolle για την f' στα

$$[x_1, x_3] \text{ και } [x_3, x_2]$$

υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_3)$ και

$$\xi_2 \in (x_3, x_2) \text{ τέτοια, ώστε:}$$

$$f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0. \text{ Από το}$$

Θεώρημα Rolle για την f'' στο

$$[\xi_1, \xi_2] \text{ προκύπτει το ζητούμενο.}$$

- 1109.** α) $h''(x) =$

$$= (f''(x) - 2f'(x) + f(x))e^{-x},$$

β) Θ. Rolle για την h' στο

$$[\xi_1, \xi_2] \subseteq (a, \gamma) \text{ όπου } \xi_1, \xi_2$$

προκύπτουν από Θ. Rolle για την h

$$\text{στα } [a, \beta] \text{ και } [\beta, \gamma]$$

- 1110.** α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$.

Προκύπτει ότι υπάρχουν

$$x_1 \in (1, 2) \text{ και } x_2 \in (2, 3)$$

τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle

για την $g(x) = e^{-x} \cdot f'(x)$ στο

$$\text{διάστημα } [x_1, x_2].$$

- 1111.** α) Θ. Rolle για την f στα $[-1, 1]$

$$\text{και } \left[1, \frac{\pi}{2}\right], \text{ β) } \Theta. \text{ Rolle για την } f'$$

στο $[x_1, x_2]$

- 1112.** Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη: $g(x) = f(x) + x^3 - 2x^2$ σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1]$

και $[1, 2]$. Υπάρχουν

$$\xi_1 \in (0, 1) \text{ και } \xi_2 \in (1, 2),$$

ώστε $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $g'(x)$ στο $[\xi_1, \xi_2]$ και προκύπτει το ζητούμενο.

- 1113.** Θ. Rolle για την g' στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου $g(x) = f(x) + \ln x - x^2$ και ξ_1, ξ_2 από Θ. Rolle για την g στα $[1, 2]$ και $[2, e]$.

- 1114.** α) Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$,
β) Θ. Rolle για την f' στο $[\kappa, \lambda]$

- 1115.** α) Θ. Rolle για την $h(x) = g(x)\eta\mu\chi$ στο $[0, 2\pi]$, β) Θ. Rolle για την $h'(x)$ στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου ξ_1, ξ_2 από α) ερ.

- 1116.** Από Θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $\varphi'(\xi_2) = 0$ οπότε ...

- 1117.** α) Εφαρμόζουμε 2 φορές το θεώρημα του Rolle στη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, στα

διαστήματα $(2, 3)$ και $(3, 4)$ καθώς

$$h(2) = h(3) = h(4) = 0 \text{ και}$$

βρίσκουμε x_1, x_2 διαφορετικά μεταξύ

τους (αφού $x_1 \in (2, 3)$ και

$$x_2 \in (3, 4)) \text{ τέτοια ώστε να ισχύει}$$

$$h'(x_1) = h'(x_2) = 0, \text{ άρα}$$

$$f'(x_1) = g'(x_1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = g'(x_2).$$

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στη βοηθητική συνάρτηση

$$w(x) = f'(x) + 2f(3)x \text{ στο διάστημα}$$

$$(x_1, x_2), \text{ αφού } w(x_1) = w(x_2) = 6f(3)$$

- 1118.** α) Θ. Bolzano για την f σε κατάλληλο διάστημα $[x_1, x_2]$ αφού θυμηθείτε ότι αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \gtrless 0$,

τότε $f(x) \gtrless 0$ κοντά στο x_0 ,

β) Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ όπου ξ_1, ξ_2 από Θ. Rolle για την f στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

- 1119.** Θ. Rolle για την $P(x)$ στα $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$

- 1120.** $H f''$ έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες.

- 1121.** Θ. Rolle για την $f(x) = \eta\mu x - e^{-x}$, στο $[x_1, x_2]$, όπου x_1, x_2 ρίζες της f .

- 1122.** Υποθέστε ότι η $g(x) = f(x) - x^2 + 3x - \alpha$ έχει δύο ρίζες $x_1 < x_2$ και από Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$ καταλήζετε σε άτοπο.

- 1123.** Υποθέστε ότι έχει δύο ρίζες και με Θ. Rolle καταλήζετε σε άτοπο.

- 1124.** Υποθέτουμε ότι έχει 3 ρίζες και μετά από δύο Θ. Rolle για την f και ένα για την f' καταλήγουμε σε άτοπο

- 1125.** Υποθέτουμε ότι έχει 3 ρίζες και μετά από δύο Θ. Rolle για την f και ένα για την f' καταλήγουμε σε άτοπο

- 1126.** Έστω ότι έχει τρεις, Θ. Rolle και άτοπο.

- 1127.** Υποθέστε ότι η

$$g(x) = f(x) - \frac{3x^2}{2} - 7x + \lambda \text{ έχει}$$

τρεις ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$ οπότε από διαδοχικά Θ. Rolle καταλήζετε ότι υπάρχει ξ ώστε $g'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

- 1128.** Υποθέστε ότι έχει τρεις ρίζες και με διαδοχικά Θ. Rolle καταλήζετε σε άτοπο.

- 1129.** Υποθέστε ότι έχει 4 ρίζες και με διαδοχικά Θ. Rolle καταλήζετε σε άτοπο.

- 1130.** Αν έχει τότε η $f''(x)$ θα έχει δύο ρίζες, ... άτοπο.

- 1131.** i) Έστω ότι υπάρχουν $\alpha < \beta$ ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Από Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$ καταλήζετε σε άτοπο.
ii) $x = 2$.

- 1132.** α. Θ Rolle για την g στο $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ και για την g' στο $[\xi_1, \xi_2]$.

β. Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f''(\kappa) = 0$ άτοπο

- 1133.** α) Υπαρξη :

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ άρα } \dots$$

Μοναδικότητα: Θ. Rolle και άτοπο ή μονοτονία,

β) Ύπαρξη: Θ. Bolzano.

Μοναδικότητα : Θ. Rolle και άτοπο ή μονοτονία,

γ) Προφανής η $x = 0$.

Μοναδικότητα με Θ. Rolle και άτοπο ή μονοτονία

1134. Αν $\Delta = (-\infty, 0)$ τότε

$$f(\Delta) = (-\infty, \beta) \text{ και } 0 \in f(\Delta).$$

Η μοναδικότητα της ρίζας με μονοτονία ή με Rolle και άτοπο.

1135. $x = 0$: Προφανής. Υποθέτουμε ότι έχει και δεύτερη από Θ. Rolle ... , άτοπο

1136. $x = 0$: Προφανής. Υποθέτουμε ότι έχει και δεύτερη από Θ. Rolle ... άτοπο

1137. Προφανείς ρίζες οι $x_1 = -2$ και $x_2 = -3$. Υποθέτοντας ότι έχει τρεις ρίζες με διαδοχικά Rolle καταλήζτε σε άτοπο.

1138. Προφανείς ρίζες οι $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Υποθέτοντας ότι έχει τρεις ρίζες με διαδοχικά Rolle καταλήζτε σε άτοπο.

1139. Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει δύο προφανείς ρίζες τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Υποθέτοντας ότι έχει και τρίτη καταλήζτε, λόγω Θ. Rolle, σε άτοπο.

1140. Προφανείς οι 1 και 2. Έστω ότι έχει τρεις ρίζες και με διαδοχικά Θ. Rolle καταλήζτε σε άτοπο.

1141. Η ύπαρξη με Θ. Bolzano και η μοναδικότητα με Θ. Rolle και άτοπο.

1142. Η ύπαρξη με Θ. Bolzano και η μοναδικότητα με Θ. Rolle και άτοπο ή με μονοτονία.

1143. Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - x$ στο $[0, 1]$. Μοναδικότητα από Θ. Rolle (για την g) και άτοπο.

1144. Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - 2x$ στο $[0, 2]$. Μοναδικότητα από Θ. Rolle (για την g) και άτοπο.

1145. Η ύπαρξη της ρίζας με Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - x + \ln x$ στο

$[1, e]$ και η μοναδικότητα με Θ.

Rolle και άτοπο.

1146. α) Θεώρημα Bolzano για την

$$g(x) = f(x) - x,$$

$x \in [1, 2]$. Έστω ότι υπάρχει

$$x_1 \in (1, 2) \text{ με } x_1 \neq x_0.$$

Από το Θεώρημα Rolle για την $g(x)$

στο $[x_0, x_1]$ προκύπτει... άτοπο

β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την

$$h(x) = x f(x) - f(x) - x^2 + x$$

στο διάστημα $[1, x_0]$.

1147. Η ύπαρξη της ρίζας από Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - e^x - x$ στο $[0, 1]$. Η μοναδικότητα με Θ. Rolle και άτοπο.

1148. Θ. Rolle για την $h(x) = f'(x) - e^x$. Η μοναδικότητα με Θ. Rolle για την $g(x) = f''(x) - e^x$ και άτοπο.

1149. α) Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

στο $[a, \beta]$,

β) Υποθέτοντας ότι έχει 2 ρίζες καταλήζτε σε άτοπο από Θ. Rolle για την $h(x) = xf'(x) - f(x)$

1150. Έστω $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Θ. Rolle για την $\frac{f(x)}{g(x)}$ στο $[a, \beta]$

και άτοπο.

1151. α) Θέστε $x = 0$ και $x = 1$ στη δοθείσα σχέση,

β) Υποθέτοντας ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ από Θ. Rolle για

$$\text{την } g(x) = \frac{x^2 - x}{f(x)} \text{ στο } [0, 1]$$

καταλήζτε σε άτοπο.

1152. α) Θέστε όπου $x = 0$ και π στη δοθείσα σχέση,

β) Έστω $f(x) \neq 0$ και από Θ. Rolle

$$\text{στην } g(x) = \frac{\eta \mu x}{f(x)} \text{ στο } [0, \pi]$$

καταλήζτε σε άτοπο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

✓ Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) **κλασματική μορφή**, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

✓ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός** ή **περιοδικός δεκαδικός** και, **αντιστρόφως**, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι **ρητοί** αριθμοί αποτελούνται από τους **δεκαδικούς** και τους **περιοδικούς δεκαδικούς** αριθμούς.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, κτλ., που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικός ούτε ως περιοδικός δεκαδικός). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/ Αντί-στροφος Αριθμός	$\alpha + (-\alpha) = 0$	
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

1.

$$(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2.

$$(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3.

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4.

$$\text{Αν } \gamma \neq 0, \text{ τότε: } a = \beta \Leftrightarrow a\gamma = \beta\gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5.

$$a \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$a \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Δυνάμεις

Αν ο a είναι πραγματικός αριθμός και ο n φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}, \quad \text{για } n > 1 \text{ και } a^1 = a, \text{ για } n = 1.$$

Αν επιπλέον είναι $a \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι:

$$a^0 = 1 \text{ και } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$a^{\kappa} \cdot a^{\lambda} = a^{\kappa+\lambda} \quad \frac{a^{\kappa}}{a^{\lambda}} = a^{\kappa-\lambda} \quad a^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (a\beta)^{\kappa} \quad \frac{a^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\kappa} \quad (a^{\kappa})^{\lambda} = a^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Τετράγωνο αθροίσματος-διαφοράς

$$(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2 \quad (a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$$

Διαφορά τετραγώνων

$$a^2 - \beta^2 = (a + \beta) \cdot (a - \beta)$$

Κύβος αθροίσματος-διαφοράς

$$(a + \beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3 \quad (a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$$

Άθροισμα-διαφορά κύβων

$$a^3 + \beta^3 = (a + \beta) \cdot (a^2 - a\beta + \beta^2) \\ a^3 - \beta^3 = (a - \beta) \cdot (a^2 + a\beta + \beta^2)$$

Τετράγωνο αθροίσματος

$$(a + b + \gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2b\gamma + 2\gamma a$$

Μέθοδοι απόδειξης

1η **Ευθεία Απόδειξη** λέγεται η αποδεικτική διαδικασία που ακολουθούμε όταν ξεκινώντας από την υπόθεση με διαδοχικούς συλλογισμούς καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

2ο Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν είναι πάντα αληθής, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

2η Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Όταν υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάνουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει, λέμε ότι οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται **απαγωγή σε άτοπο**.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι **δεξιότερα** από τον β .

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$ και διαβάζουμε: « **α μεγαλύτερος ή ίσος του β** ».

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

$$(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0 \quad (\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$(a, b \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0 \quad (a, b \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 0)$$

$$a^2 \geq 0 \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R} \text{ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } a=0\text{)}$$

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a=0 \text{ και } b=0 \quad a^2 + b^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

1. $(a > b \text{ και } b > c) \Rightarrow a > c$

2.

- $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
- Αν $c > 0$, τότε: $a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$
- Αν $c < 0$, τότε: $a > b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$

3.

- $(a > b \text{ και } c > d) \Rightarrow a + c > b + d$
- Για θετικούς αριθμούς a, b, c, d ισχύει η συνεπαγωγή
 $(a > b \text{ και } c > d) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$

Η ιδιότητα 3. ισχύει και για περισσότερες ανισότητες.

4.

Για θετικούς αριθμούς a, b και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$$

Για θετικούς αριθμούς a, b και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση.

2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση.

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a \leq x \leq b$ λέγεται κλειστό διάστημα από a μέχρι b και συμβολίζεται με $[a, b]$.

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ παραλείψουμε τα a και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το a μέχρι β** που συμβολίζεται με (a, β) .

Οι αριθμοί a και β λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των a και β λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα $(a, +\infty)$ και $(-\infty, a)$.

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται «**συν άπειρο**» και «**πλην άπειρο**» αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

Διάστημα	Ανισότητα	Συμβολισμός
	$a \leq x \leq \beta$	$[a, \beta]$
	$a < x \leq \beta$	$[a, \beta)$
	$a \leq x < \beta$	$(a, \beta]$
	$a < x < \beta$	(a, β)
	$x \leq \beta$	$[a, +\infty)$
	$a < x$	$(a, +\infty)$
	$x \leq a$	$(-\infty, a]$
	$x < a$	$(-\infty, a)$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό a που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα. Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου A από την αρχή O , δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA , ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού a και την συμβολίζεται με $|a|$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet |a| = |-a| \geq 0 \quad \bullet |a| \geq a \text{ και } |a| \geq -a \quad \bullet |a|^2 = a^2$$

$$\bullet \text{ Αν } \theta > 0 \text{ τότε: } |x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta \quad \bullet |x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

$$1. \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad 2. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad 3. \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $ab = |ab|$ ισχύει αν και μόνο αν $ab \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί a και b είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες.

Συγκεκριμένα:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, έχουμε: $|a^n| = |a|^n$

- Η ανισότητα $|a + b| \leq |a| + |b|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους.

Συγκεκριμένα:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Απόσταση δυο αριθμών

Αν θεωρήσουμε δυο αριθμούς a και b που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντίστοιχα τότε το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών a και b , συμβολίζεται με $d(a, b)$ και είναι ίση με $|a - b|$.

Είναι δηλαδή:

$$d(a, b) = |a - b|$$

Προφανώς ισχύει $d(a, b) = d(b, a)$.

Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $a < b$, τότε η απόσταση των a και b είναι ίση με $b - a$ και λέγεται **μήκος του διαστήματος** $[a, b]$.

Γενικά:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει :

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| < \rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ .

Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, +\rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

Επίσης

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει :

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \quad \text{ή} \quad x > x_0 + \rho$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία $M(x)$ του άξονα $x'x$ που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ . Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$$

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον a .

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $a > 0$, η $\sqrt{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ (γνωστές από το γυμνάσιο)

$$\bullet \sqrt{a^2} = |a| \quad \bullet \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta} \quad \bullet \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}$$

N-ΟΣΤΗ ΡΙΖΑ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην n , δίνει τον a .

Επίσης γράφουμε $\sqrt[n]{a} = a$ και $\sqrt[n]{a} = \sqrt{a}$. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $a \geq 0$, τότε η $\sqrt[n]{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

$$\bullet \text{ Αν } a \geq 0, \text{ τότε : } \left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a \text{ και } \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\bullet \text{ Αν } a \leq 0 \text{ και } n \text{ άρτιος, τότε : } \sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$$\bullet \text{ Αν } a, \beta \geq 0, \text{ τότε :}$$

$$1. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta} \quad 2. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}} \text{ εφόσον } \beta \neq 0 \quad 3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad 4.$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a^{mp}}} = \sqrt[q]{a^m}$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε : $a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}$

Επιπλέον, αν μ, n θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{n}} = 0$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

- Αν η εξίσωση είναι της μορφής $|f(x)| = \theta$, με $\theta > 0$, τότε από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε : $f(x) = \theta$ ή $f(x) = -\theta$
- Αν η εξίσωση είναι της μορφής $|f(x)| = \theta$, με $\theta < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν η εξίσωση είναι της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$, τότε από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε : $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$
- Αν η εξίσωση είναι της μορφής $|f(x)| = g(x)$, τότε για να έχει λύση η εξίσωση πρέπει και το δεύτερο μέρος να είναι μη αρνητικό, δηλαδή θέτουμε τον περιορισμό $g(x) \geq 0$, οπότε με αυτόν τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών έχουμε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^n = a$

- Η εξίσωση $x^n = a$, με $a > 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[n]{a}$.
- Η εξίσωση $x^n = a$, με $a > 0$ και n άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $\sqrt[n]{a}$ και $-\sqrt[n]{a}$.
- Η εξίσωση $x^n = a$, με $a < 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[n]{|a|}$.

- Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v **άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι **αδύνατη**.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^v = a^v$, με $v \in \mathbb{N}$, έχει προφανή λύση την $x = a$, προκύπτει ότι:

- Αν ο v **περιττός** τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει **μοναδική λύση**, την $x = a$
- Αν ο v **άρτιος** τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει **δύο λύσεις**, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Η εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $a \neq 0$ λέγεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού**.

Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής. Ισχύουν:

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = \frac{-\beta}{2a}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Στην περίπτωση που η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , έχουμε:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}} \quad \text{και} \quad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S = -\frac{\beta}{a} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{a}}$$

που είναι γνωστοί ως **τύποι του Vieta**.

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\boxed{ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την **κατασκευάσουμε**, όταν γνωρίζουμε το **άθροισμα** και το **γινόμενο** των ριζών της.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Λύνονται με τη βοήθεια των παρακάτω ιδιοτήτων :

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

• αν $\Delta > 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του

• αν $\Delta = 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$

• αν $\Delta < 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$ Αν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο είναι:

Ομόσημο του a , όταν το x βρίσκεται εκτός των ριζών, δηλαδή όταν
 $x < x_1$ ή $x > x_2$

Ετερόσημο του a , όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών, δηλαδή όταν
 $x_1 < x < x_2$

Αν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο είναι:

Ομόσημο του a , για κάθε x πραγματικό εκτός από τη διπλή ρίζα του όπου μηδενίζεται.

Αν $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο είναι:

Ομόσημο του a , για κάθε x πραγματικό.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω παρατηρούμε ότι :

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ γίνεται :

- **Ετερόσημο του a** , μόνο όταν $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του a** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ανισώσεις της μορφής $ax^2 + bx + \gamma > 0$ ή $ax^2 + bx + \gamma < 0$

- Βρίσκουμε τη Διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και τις ρίζες (αν υπάρχουν).
- Καταstrώνουμε πίνακα και βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου της

ανίσωσης.

- Από τα συμπεράσματα του πίνακα δίνουμε την λύση της ανίσωσης.

Αριθμητική πρόοδος

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με **πρόσθεση** του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά** της προόδου. Επομένως, η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω , αν και μόνο αν ισχύει:

$$a_{v+1} = a_v + \omega \quad \text{ή} \quad a_{v+1} - a_v = \omega$$

Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι

$$a_v = a_1 + (v-1)\omega$$

Αριθμητικός μέσος

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι **διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου** αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου (a_n) με διαφορά ω είναι

$$S_v = \frac{v}{2}(a_1 + a_v)$$

Επειδή $a_v = a_1 + (v-1)\omega$, ο τύπος $S_v = \frac{v}{2}(a_1 + a_v)$ γράφεται:

$$S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v-1)\omega]$$

Γεωμετρική πρόοδος

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με **πολλαπλασιασμό** επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγος** της προόδου. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) υποθέτουμε πάντα ότι $a_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $a_v \neq 0$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία (a_n) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ , αν και μόνο αν

ισχύει:

$$a_{v+1} = a_v \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{a_{v+1}}{a_v} = \lambda$$

Ο n -οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Γεωμετρικός μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

Άθροισμα n διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda \neq 1$

είναι
$$S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, \quad \lambda \neq 1$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

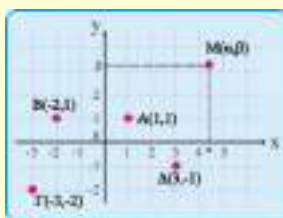
Καρτεσιανές συντεταγμένες

• Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο O . Από αυτούς

ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων ή άξονας των x** , ενώ

ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y** .

• Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και **αντιστρόφως**, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι αριθμοί α , β λέγονται **συντεταγμένες** του M . Ειδικότερα

ο α λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου M .

Το σημείο M που έχει συντεταγμένες α και β συμβολίζεται με $M(\alpha, \beta)$ ή, απλά, με (α, β) .

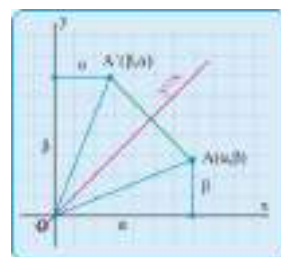
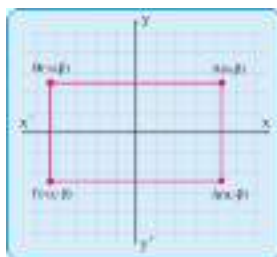
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον **Καρτέσιο**, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**.

Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

- Τα **σημεία** του άξονα $x'x$ και μόνο αυτά έχουν **τεταγμένη** ίση με το **μηδέν**, ενώ τα **σημεία** του άξονα $y'y$ και μόνο αυτά έχουν **τετμημένη** ίση με το **μηδέν**.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών, yOx' , $x'Oy'$ και $y'Ox$ και ονομάζεται 1° , 2° , 3° και 4° , τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



- Αν $A(a, b)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\Delta(a, -b)$, που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(-a, b)$, που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη.
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $\Gamma(-a, -b)$, που έχει αντίθετες συντεταγμένες.
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1° και 3° γωνίας των αξόνων είναι το σημείο $A'(b, a)$ που έχει τετμημένη την τεταγμένη του A και τεταγμένη την τετμημένη του A .

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

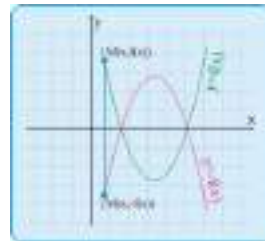
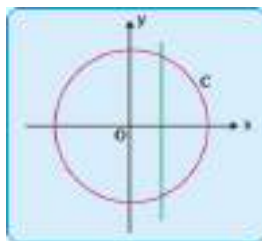
Η εξίσωση, λοιπόν, $y=f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά.

Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y=f(x)$.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο .

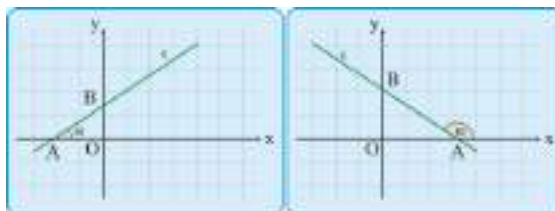


Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ και τούτο διότι η γραφική παράστασης της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=ax+\beta$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά (Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy , αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90°) μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε , τη λέμε γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0^\circ$.

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την **εφαπτομένη** της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με λ_ε , ή απλά με λ .

Είναι φανερό ότι ο **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας ε είναι

θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία,

αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και

μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν.

Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90° , δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ε .

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$ είναι μια ευθεία, με εξίσωση $y=ax+\beta$, η οποία τέμνει την άξονα των y στο σημείο $B(0,\beta)$ και έχει κλίση $\lambda=a$.

Είναι φανερό ότι:

► αν $a>0$, τότε $0^\circ < \omega < 90^\circ$ ► αν $a<0$, τότε $90^\circ < \omega < 180^\circ$ ► αν $a=0$, τότε $\omega = 0^\circ$

Στην περίπτωση που είναι $a=0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x)=\beta$ και λέγεται σταθερή συνάρτηση, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x)=ax$

Αν $\beta=0$ τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x)=ax$ οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y=ax$ και περνάει από την αρχή των αξόνων.

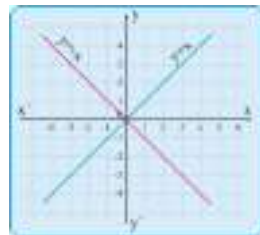
Ειδικότερα

Αν $a=1$ έχουμε την ευθεία $y=x$.

Η ευθεία $y=x$ είναι η **διχοτόμος** των γωνιών xOy και $x'Oy'$ των αξόνων.

Αν $a=-1$ έχουμε την ευθεία $y=-x$.

Η ευθεία $y=-x$ είναι η **διχοτόμος** των γωνιών yOx' και $y'Ox$ των αξόνων.



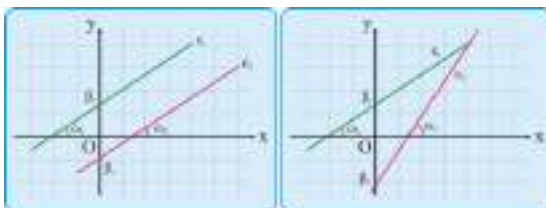
Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως. Αν $\alpha_1 = \alpha_2$, τότε $\varepsilon\omega_1 = \varepsilon\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. **Ειδικότερα:**

► Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι **παράλληλες** ενώ

► Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες **ταυτίζονται**.

► Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\varepsilon\omega_1 \neq \varepsilon\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 **τέμνονται**.



Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y=ax+\beta$, όπου β σταθερό και a μεταβλητό, διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.

Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y=ax+\beta$, όπου a σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.

ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

- Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$, εφόσον $0 \in A$.

Άρα αν $0 \notin A$, η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

- Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0)$,

όπου $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Άρα αν η εξίσωση $f(x)=0$ είναι **αδύνατη**, η C_f **δεν τέμνει** τον άξονα $x'x$.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

- Αν θέλουμε να βρούμε για ποια x η C_f βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα $x'x$, θα επιλύουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ και θα επιλέγουμε τις λύσεις της x για τις οποίες ισχύει $x \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f .

- Αν θέλουμε να βρούμε για ποια x η C_f βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα $x'x$, θα επιλύουμε την ανίσωση $f(x) < 0$ και θα επιλέγουμε τις λύσεις της x για τις οποίες ισχύει $x \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f .

ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- Έστω δυο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A και γραφικές παραστάσεις C_f και C_g αντίστοιχα. Αν θέλουμε να βρούμε τα **κοινά** σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g , θα επιλύουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$

και θα επιλέγουμε τις λύσεις της x για τις οποίες ισχύει $x \in A$. Αν x μια τέτοια λύση τότε το σημείο $(x, f(x))$ είναι ένα **κοινό** σημείο των C_f και C_g .

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A και γραφικές παραστάσεις C_f και C_g αντίστοιχα.

- Αν θέλουμε να βρούμε για ποια x η C_f βρίσκεται **πάνω** από τη C_g , θα επιλύουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$ και θα επιλέγουμε τις λύσεις της x για τις οποίες ισχύει $x \in A$.

- Αν θέλουμε να βρούμε για ποια x η C_f βρίσκεται **κάτω** από τη C_g , θα επιλύουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$ και θα επιλέγουμε τις λύσεις της x για τις οποίες ισχύει $x \in A$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση $ax+by=\gamma$

Στο γυμνάσιο διαπιστώσαμε με τη βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση

$$ax+by=\gamma \text{ με } a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0$$

που λέγεται **γραμμική εξίσωση**, παριστάνει **ευθεία γραμμή**. Ειδικότερα:

- Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$ τότε η ευθεία **τέμνει** και τους δύο άξονες.
 - Αν $a=0$ και $b \neq 0$ τότε η ευθεία είναι **παράλληλη** στον άξονα $x'x$.
 - Αν $a \neq 0$ και $b=0$ τότε η ευθεία είναι **παράλληλη** στον άξονα $y'y$.
- ✓ Η ευθεία $y=k$ είναι ευθεία **παράλληλη** προς τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο **(0, κ)**.
- ✓ Η ευθεία $x=k$ είναι ευθεία **παράλληλη** στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο **(κ, 0)**
- ✓ Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Λύση-διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2×2

Έστω το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

Είναι:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a b' - a' b \quad (\text{ορίζουσα του συστήματος})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & b \\ \gamma' & b' \end{vmatrix} = \gamma b' - \gamma' b \quad (\text{προκύπτει από την } D \text{ αν στη θέση των συντελεστών του } x$$

θέσουμε τους σταθερούς όρους)

$$D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix} = a \gamma' - a' \gamma \quad (\text{προκύπτει από την } D \text{ αν στη θέση των συντελεστών του } y$$

θέσουμε τους σταθερούς όρους)

Με τη βοήθεια των παραπάνω οριζουσών έχουμε όσον αφορά την επίλυση του συστήματος:

Το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

- αν $D \neq 0$ έχει **μοναδική** λύση την (x,y) με $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$
- αν $D = 0$ είναι **αδύνατο** ή έχει **άπειρο** πλήθος λύσεων.

Γραμμικό σύστημα 3×3

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 .

- Συνήθως λύνουμε τη **μία** από τις τρεις εξισώσεις ως προς **έναν** άγνωστο έστω x .
- **Αντικαθιστούμε** τον x στις άλλες δύο εξισώσεις οπότε προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους y και z που λύνεται κατά τα γνωστά.
- Τις τιμές των δύο αγνώστων y και z του συστήματος 2×2 τις αντικαθιστούμε στην εξίσωση που είναι **λυμένη** ως προς x ή σε **μία** εκ των **αρχικών** εξισώσεων του συστήματος 3×3 .

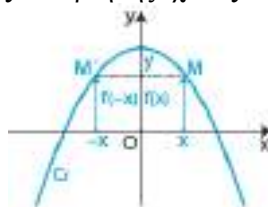
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y .

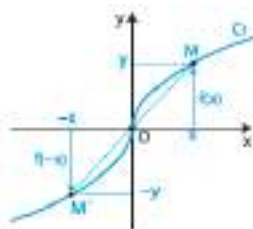


ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την **αρχή** $O(0,0)$ των αξόνων.

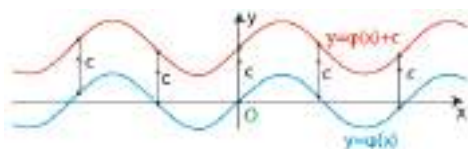


ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

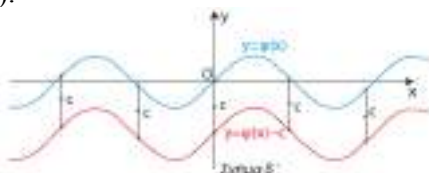
Ισχύουν:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x) + c$, όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **πάνω**. (Σχ. α).



Σχήμα 6'

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x) - c$, όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **κάτω**. (Σχ. β).

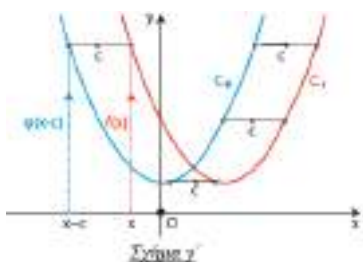


Σχήμα 6''

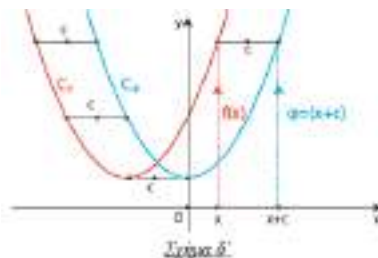
Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x - c)$, όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **δεξιά**. (Σχ. γ).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x + c)$, όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **αριστερά**. (Σχ. δ).



Σχήμα 7'



Σχήμα 8'

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

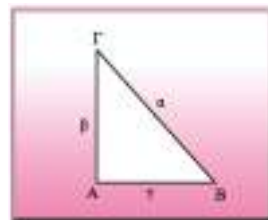
Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{a} \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{a} \left(\frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

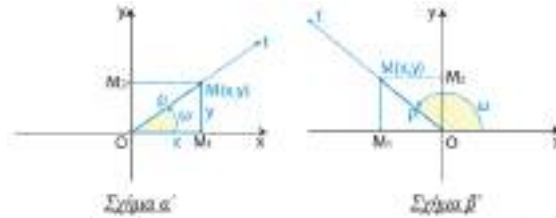
$$\epsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} \right)$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} \right)$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Από τα παρακάτω σχήματα έχουμε:



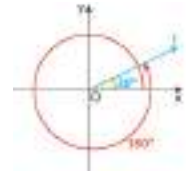
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad (\chi \neq 0) \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου M (διαφορετικού του O) της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του M από το O .

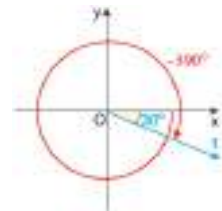
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360° και αρνητικών γωνιών

Ας θεωρήσουμε μια γωνία ω (θετική ή αρνητική) με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox .

- Αν ο ημιάξονας Ox , στρεφόμενος γύρω από το O κατά τη **θετική** φορά (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) συμπληρώσει n ($n \in \mathbb{N}$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει γωνία ω τότε θα έχει διαγράψει γωνία $n \cdot 360^\circ + \omega^\circ$, που έχει την ίδια **τελική** πλευρά με την ω .



- Αν ο ημιάξονας Ox , στρεφόμενος γύρω από το O κατά την **αρνητική** φορά (ίδια κίνηση με τους δείκτες του ρολογιού) συμπληρώσει n πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω (θετική γωνία) τότε θα έχει διαγράψει γωνία $-n \cdot 360^\circ + \omega$, που έχει την ίδια **τελική** πλευρά με την ω .



Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$	$\epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$
$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός λέγεται ο κύκλος που γράφουμε με **κέντρο** την **αρχή** $O(0,0)$ ενός συστήματος αξόνων και **ακτίνα** $\rho=1$.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει:

$\sigma\upsilon\nu\omega = x$ = τετμημένη του σημείου M

$\eta\mu\omega = y$ = τεταγμένη του σημείου M

Για το λόγο αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ

ο άξονας $y'y$ λέγεται και **άξονας των ημιτόνων**.



Άμεσες συνέπειες

$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$	$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$
--	--------------------------------

Τα **πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών μια γωνίας ω , ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η **τελική πλευρά** της γωνίας αυτής είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	—	—
συνω	+	—	—	+
εφω	+	—	+	—
σφω	+	—	+	—

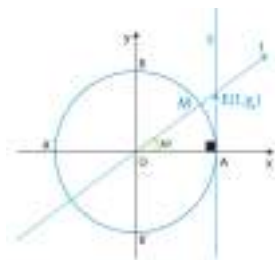
Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική πλευρά της τον τέμνει στο σημείο $M(x,y)$. Φέρουμε την εφαπτομένη ε του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο A .

Αν η ευθεία OM τέμνει την ε στο E ισχύει:

$$\varepsilon\omega = y_{\varepsilon} = \text{τεταγμένη του σημείου } E$$

Η ευθεία ε που έχει εξίσωση $x=1$, λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.

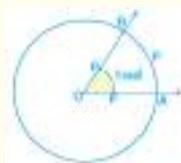


Το ακτίνο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακτίνο (ή **1 rad**) είναι η γωνία η οποία όταν γίνει **επίκεντρη** σε έναν κύκλο, (O, ρ) βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Ένα **τόξο AB** ενός κύκλου (O, ρ) λέγεται **τόξο ενός ακτινίου** (ή **1rad**), αν το τόξο αυτό έχει **μήκος** ίσο με την **ακτίνα ρ** του κύκλου.



Σχέση μοίρας rad ως μονάδες μέτρησης γωνιών

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

όπου α : ακτίνα, μ : μοίρες

Τριγωνομετρικοί αριθμοί $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται	0

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

τριγωνομετρικές ταυτότητες.

$$1. \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad 2. \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

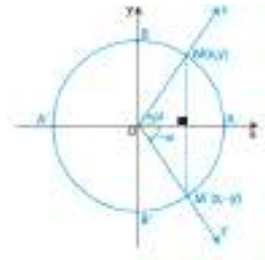
$$3. \quad \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \quad 4. \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Γωνίες αντίθετες

$$\begin{array}{ll} \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega & \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega \\ \varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega & \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega \end{array}$$

Δηλαδή: Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.



Γωνίες με άθροισμα 180°

$$\begin{array}{ll} \eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega & \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega & \sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega \end{array}$$

Δηλαδή: Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.



Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

$$\begin{array}{ll} \eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega & \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega & \sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega \end{array}$$

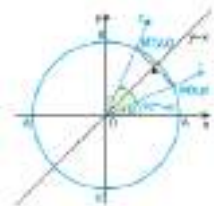
Δηλαδή: Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.



Γωνίες με άθροισμα 90°

$$\begin{array}{ll} \eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega & \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \\ \varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega & \varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega \end{array}$$

Δηλαδή: Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$, τέτοιος ώστε **για κάθε** $x \in A$ να ισχύει:

i. $x + T \in A, x - T \in A$ **ii.** $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$

Πεδίο ορισμού: $\mathbf{R}$ Περίοδος: $\mathbf{T=2\pi}$. Μελετούμε την f στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Έχουμε:

Στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα** • Στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα**

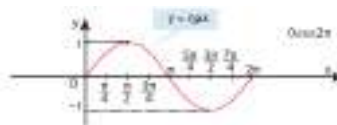
Στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα** • Στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα**

Η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x = \frac{\pi}{2}$, το $\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$ και **ελάχιστο** στο $x = \frac{3\pi}{2}$, το

$\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$ δηλαδή:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
		↑ μέγ		↓ ελάχ	

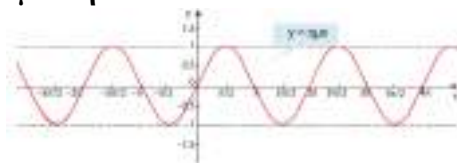
Η γραφική της παράσταση είναι:



Η f είναι **περιττή** συνάρτηση και επομένως η γραφική της παράσταση έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή** των αξόνων.

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική, με περίοδο 2π , η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, κ.τ.λ καθώς και στα διαστήματα $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ κ.τ.λ

Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης **ημίτονο**, η οποία λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη**.



Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\eta x$

Πεδίο ορισμού: $\mathbf{R}$ Περίοδος: $\mathbf{T=2\pi}$. Μελετούμε την f στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Έχουμε:

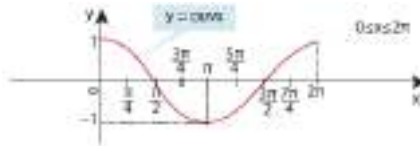
Στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα** • Στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα**

Στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα** • Στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα**

Η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x=0$, το $\sin 0=1$ και στο $x=2\pi$ το $\sin 2\pi=1$ ενώ παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x=\pi$, το $\sin \pi=-1$ δηλαδή:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\eta \mu x$	1	0	-1	0	1
	μέγ		ελάχ		μέγ

Η γραφική της παράσταση είναι:



Επειδή η **συνάρτηση $f(x)=\sin x$** είναι περιοδική με περίοδο 2π , **η γραφική της παράσταση στο $\mathbb{R}$** είναι η ακόλουθη:



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sin(-x) = \sin x$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση **$f(x)=\sin x$** είναι **άρτια** συνάρτηση και επομένως η γραφική της παράσταση έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y' .

Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\cos x$

Πεδίο ορισμού: $A = \{x / \cos x \neq 0\}$ **Περίοδος:** $T=\pi$

Μελετούμε την f στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: Έχουμε:

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Οι ευθείες $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες**

της γραφικής παράστασης της f .

Η f είναι **περιττή** συνάρτηση.

Η γραφική της παράσταση είναι:

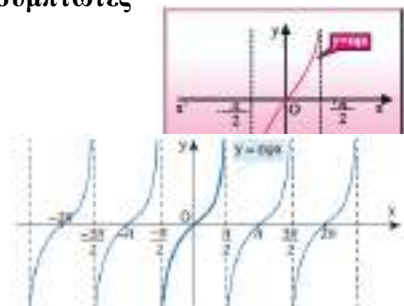
Η γραφική της παράσταση της

$f(x)=\cos x$ στο $\pi, 0$ της

φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση της

$f(x)=\cos x$ έχει κέντρο συμμετρίας το O αφού είναι **περιττή συνάρτηση** καθόσον $\cos(-x) = -\cos x$.



Παρατηρήσεις:

- Μια συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu\omega x$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ ($\rho,\omega>0$) είναι: περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{\omega}$, έχει ελάχιστη τιμή το $-\rho$ και μέγιστη τιμή το ρ .
- Μια συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\epsilon\phi\omega x$ ή $f(x)=\rho\sigma\phi\omega x$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{\pi}{\omega}$ ενώ δεν έχει ακρότατα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**Επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων**

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta), \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ειδικές περιπτώσεις

$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$	$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$
$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$	$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ**Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών**

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \quad \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta} \quad \epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}$$

Συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha} \quad \sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

Τύποι αποτετραγωνισμού

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

☑ Καλούμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

• Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_1 x, \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ **συντελεστές** αυτού.

• Ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός** όρος του πολυωνύμου.

☑ Τα πολυώνυμα της μορφής α_0 , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά** πολυώνυμα.

☑ Δύο πολυώνυμα $\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, με $\mu \geq \nu$ θα λέμε ότι είναι **ίσα** όταν:

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\nu = \beta_\nu \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$$

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

• Αν **όλοι** οι συντελεστές του είναι ίσοι με **μηδέν**, τότε το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο **0** (**μηδενικό πολυώνυμο**).

• Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι **διαφορετικός** από το μηδέν, τότε το $P(x)$ παίρνει τη μορφή: $\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_k \neq 0$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός **k** λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου $P(x)$.

• Είναι φανερό ότι κάθε **σταθερό** και **μη μηδενικό** πολυώνυμο έχει **βαθμό 0**.

• Για το **μηδενικό** πολυώνυμο **δεν** ορίζεται **βαθμός**.

Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο.

• Αν είναι $P(\rho) = 0$, τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

• Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο τότε ο βαθμός του είναι **ίσος** ή **μικρότερος** από το **μέγιστο** των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

• Ο **βαθμός** του **γινομένου** δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι **ίσος** με το **άθροισμα** των **βαθμών** των πολυωνύμων αυτών.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοια ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x)$ όπου $\nu(x)$ ή είναι το μηδενικό πολώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκιο** και το $\nu(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης. Αν σε μια διαίρεση είναι $\nu(x) = 0$ τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το **υπόλοιπο** της διαίρεσης ενός πολωνύμου $P(x)$ με το $(x - \rho)$ είναι ίσο με την τιμή του πολωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\nu = P(\rho)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι **ρίζα** του $P(x)$, δηλαδή **αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$** .

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Πολωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0$$

Ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_n \neq 0$$

δηλαδή κάθε αριθμό ρ , για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$. Για την επίλυση πολωνυμικών εξισώσεων βαθμού **μεγαλύτερου από 2**, περιοριζόμαστε στη γνωστή **παραγοντοποίηση**, οπότε η επίλυση της εξίσωσης στηρίζεται στην ισοδυναμία:

$$P_1(x)P_2(x) \dots P_k(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0 \quad \text{ή} \quad P_2(x) = 0 \quad \text{ή} \dots \text{ή} \quad P_k(x) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακέραιων ριζών):

Έστω η πολωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

ΠΡΟΣΗΜΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x)$, $B(x)$, ..., $\Phi(x)$ είναι της μορφής $ax + b$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $ax^2 + bx + c$ (τριώνυμα), βρίσκουμε το **πρόσημο** κάθε **παράγοντα χωριστά** και στη συνέχεια το **πρόσημο του $P(x)$** με τη βοήθεια πίνακα.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0 \quad (< 0)$$

$$\text{ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ} \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad (< 0)$$

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) < 0,$$

αφού καμία από τις λύσεις της $A(x)B(x) > 0$ και της $A(x)B(x) < 0$ δε μηδενίζει το $B(x)$.

Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ **αληθεύει** για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως $A(x)B(x) \geq 0$ και $B(x) \neq 0$.
Για να λύσουμε ένα σύστημα ανισώσεων λύνουμε την κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Εκθετική συνάρτηση

Έστω **a** ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbf{R}$ στη δύναμη a^x ορίζουμε τη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με **$f(x) = a^x$** η οποία στην περίπτωση που είναι $a \neq 1$ λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση a** .
Αν είναι **$a=1$** τότε έχουμε τη **σταθερή** συνάρτηση **$f(x)=1$** .

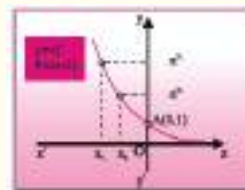
Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a^x$ με $a > 1$ αποδεικνύεται ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$
- έχει **σύνολο τιμών** το διάστημα **$(0, +\infty)$** των θετικών πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbf{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ισχύει: αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$
- Η γραφική παράσταση **τέμνει** τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x .



Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ αποδεικνύεται ότι:

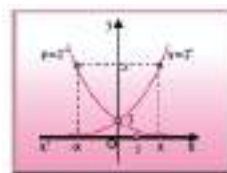
- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$
- έχει **σύνολο τιμών** το διάστημα **$(0, +\infty)$** των θετικών πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbf{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ισχύει: αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$
- Η γραφική παράσταση **τέμνει** τον άξονα $y'y$ στο σημείο **$A(0,1)$** και έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα των x .



Παρατήρηση 1

Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ παρατηρούμε ότι για

κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} = f(-x)$



Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

Σχόλιο

Από την μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$ προκύπτει ότι ισχύει η ισοδυναμία $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **εκθετικές** εξισώσεις.

Παρατήρηση 2

Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό e .

Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = e^x$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

[Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι $e=2,71828$]



ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε την εξίσωση $a^x = \theta$ όπου $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$.

Η παραπάνω εξίσωση έχει **μοναδική** λύση αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι **γνησίως μονότονη** και ο θ ανήκει στο **σύνολο τιμών** της. Τη **μοναδική** αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\log_a \theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο** του θ ως προς βάση a . Ωστε αν $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$ τότε: $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_a \theta$ είναι ο **εκθέτης** στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Από τον παραπάνω ορισμό του **λογάριθμου** προκύπτει αμέσως ότι αν $a > 0$ με $a \neq 1$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\blacklozenge \log_a a^x = x \quad \blacklozenge a^{\log_a \theta} = \theta \quad \blacklozenge \log_a 1 = 0 \quad \blacklozenge \log_a a = 1$$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$1. \log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 \quad 2. \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 \quad 3. \log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$$

Παρατήρηση:

Επειδή για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[n]{\theta} = \theta^{\frac{1}{n}}$ έχουμε: $\log_a \sqrt[n]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a \theta$

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι με **βάση** το **10** λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί** λογάριθμοι.

Ο **δεκαδικός** λογάριθμος ενός **θετικού** αριθμού θ , συμβολίζεται απλά με **log** θ

και όχι με $\log_{10} \theta$. Επομένως $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$

Φυσικοί λογάριθμοι

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με **βάση** τον αριθμό **e**.

Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι.

Ο **φυσικός** λογάριθμος ενός **θετικού** αριθμού θ , συμβολίζεται με **ln** θ , και όχι με

$\log_e \theta$. Είναι:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

Αλλαγή βάσης

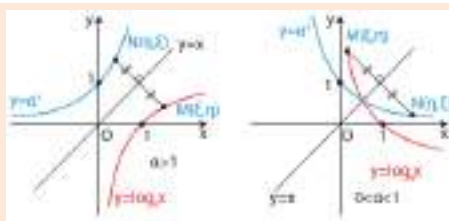
Αν $a, \beta > 0$ με $a, \beta \neq 1$ τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω a ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$ ορίζουμε μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = \log_a x$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση a .

Παρατήρηση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_a x$ και $y = a^x$ είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



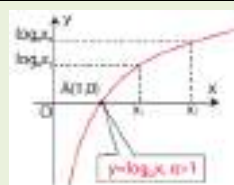
Αν $a > 1$ τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

- έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως αύξουσα** που σημαίνει ότι:

$$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ και } \log_a x_1 < \log_a x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι: $\log_a x < 0$ αν $0 < x < 1$, και $\log_a x > 0$ αν $x > 1$

- έχει γραφική παράσταση που **τέμνει** τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει **ασύμπτωτο** τον ημιάξονα Oy'



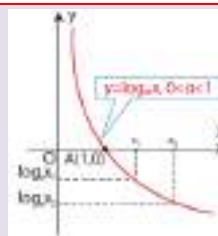
Αν $0 < a < 1$ τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

- έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως φθίνουσα** που σημαίνει ότι:

$$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } \log_a x_1 > \log_a x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι: $\log_a x > 0$ αν $0 < x < 1$ και $\log_a x < 0$

- έχει γραφική παράσταση που **τέμνει** τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει **ασύμπτωτο** τον ημιάξονα Oy' .



Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Εξισώσεις όπου ο **άγνωστος** εμφανίζεται στο **λογάριθμο** λέγονται **λογαριθμικές εξισώσεις**.