

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα έκδοση έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές της Γ' Λυκείου στη μελέτη τους παρέχοντας άφθονο υλικό και να τους διευκολύνει στην **κατανόηση-εμπέδωση** των διαφόρων εννοιών αποσπασματικά ανά ενότητες ώστε να **ανταποκριθούν με επιτυχία** στα **ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ** ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ **ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ** ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ.

Η δομή του είναι τέτοια ώστε να είναι στο πνεύμα των θεμάτων του νέου συστήματος.

Περιέχει ΣΕ ΚΑΘΕ ΕΝΟΤΗΤΑ ΚΑΘΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Συνοπτικά τη θεωρία και παρατηρήσεις στον τρόπο επίλυσης των ασκήσεων
- Ασκήσεις λυμένες με Παρατηρήσεις-Μεθοδολογία
- Ασκήσεις για λύση
- Αποτελέσματα ή κάποιες υποδείξεις των ασκήσεων για λύση

Στις λυμένες ασκήσεις και στις ασκήσεις για λύση έχουν τοποθετηθεί κάποιες επικεφαλίδες όχι για να καθοδηγήσουν τον λύτη αλλά για να περιορίσουν την απέραντη «ασκησιολογία».

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦ.1ο 'ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

σελ.5-338

- 1.1 Πραγματικοί Αριθμοί
- 1.2 Συναρτήσεις
- 1.3 Μονότονες συναρτήσεις – Αντίστροφη συνάρτηση
- 1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$
- 1.5 Ιδιότητες των ορίων,
- 1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$
- 1.7 Όριο συνάρτησης στο άπειρο
- 1.8 Συνέχεια συνάρτησης

ΚΕΦ.2ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

σελ. 339-503

- 2.1 Η έννοια της παραγώγου,
- 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις- Παράγωγος συνάρτησης.
- 2.3 Κανόνες παραγώγισης.
- 2.4 Ρυθμός μεταβολής.
- 2.5 Θεώρημα Rolle

Απαντήσεις-Υποδείξεις

504-562

Βασικές γνώσεις Α' Λυκείου

563-578

Βασικές γνώσεις Β' Λυκείου

579-592

Καλή επιτυχία!

Μην εξαργελλίζεις στο να μάνεσε τα
"πρόγραμμα σωστά" αλλά προσπαθείς να
μάνεσε τα "σωστά πρόγραμμα".

Οι έξυπνοι άνθρωποι συνεχίζουν να
δεν διατηρούν.

Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί
χωρίς τη σωστή επένδυση. Η επένδυση
είναι η θεωρία που οδηγεί στην επιτυχία.

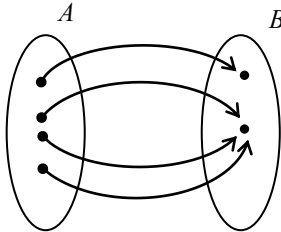
Οι νικητές διαθέτουν δύο πρόγραμμα.
Ξεμάθους στόχους
και επιθυμία να πετύχουν.

Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι
το πιο πολύτιμο, το πιο ακριβό, το πιο
περιορισμένο αγαθό.

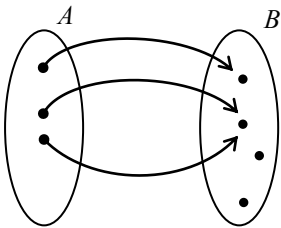
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Σε μια συνάρτηση επιτρέπονται :

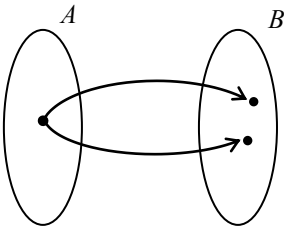


«2 σε 1 ή πολλά σε 1»

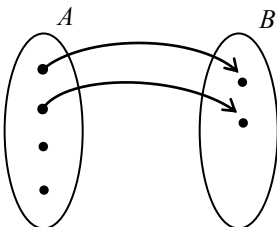


«να περισσεύουν στοιχεία στο B»

Δεν επιτρέπονται :



«1 σε 2 ή περισσότερα»



«να περισσεύουν στοιχεία στο A»

Μεταξύ δύο μη κενών συνόλων μπορούν να υπάρξουν διάφοροι κανόνες αντιστοίχισης των στοιχείων τους. Οι κανόνες αυτοί ονομάζονται διμελείς σχέσεις ή απλά σχέσεις. Μια τέτοια σχέση είναι και η συνάρτηση ή αλλιώς μονοσήμαντη απεικόνιση.

Μονοσήμαντη σημαίνει ότι σε κάθε στοιχείο του (πρώτου) συνόλου A αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο του (δεύτερου) συνόλου B.

Ορισμός

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με σύνολο ορισμού το A (το οποίο έχει επικρατήσει να το ονομάζουμε «πεδίο») μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y.

Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Συμβολισμός :

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

ή

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Παρατηρήσεις :

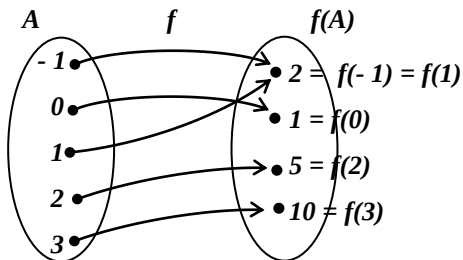
1. Το γράμμα x, που παριστάνει το οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
2. Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
3. Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

(Υπάρχουν όμως συναρτήσεις ορισμένες σε μεμονωμένα σημεία)

4. Η ισότητα $y = f(x)$ λέγεται **τύπος** της συνάρτησης.
5. Σύμφωνα με τον ορισμό, μια συνάρτηση θεωρούμε ότι είναι πλήρως ορισμένη, αν είναι γνωστό :
 - το πεδίο ορισμού της A
 - και
 - η τιμή της $f(x)$ για κάθε $x \in A$ (ο τύπος της)

6. Όταν αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$, τότε θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για το οποίο ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Έστω $f(x) = x^2 + 1$ με πεδίο ορισμού $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.



Σύνολο τιμών : $f(A) = \{2, 1, 5, 10\}$

Σύνολο τιμών

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα x του A , λέγεται **σύνολο τιμών της f** και συμβολίζεται με $f(A)$.

Είναι δηλαδή :

$$f(A) = \{ y / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}$$

Αν η συνάρτηση είναι η g με πεδίο ορισμού το B , τότε το σύνολο τιμών της συμβολίζεται με $g(B)$.

Παρατήρηση :

Το σύνολο τιμών δεν είναι απαραίτητο για τον καθορισμό της συνάρτησης.

Λυμένες Ασκήσεις

1.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

ii. $g(x) = \frac{2-x}{x^2-3x+2} - \frac{x^3}{x^2-x+4}$

iii. $h(x) = \frac{\eta\mu x + 1}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$

iv. $\varphi(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x^4 + 2}$

v. $t(x) = \frac{3^{|x|} + 1}{|2x+3|-3} + \frac{|x^2-1|}{|4-3x|+2}$

vi. $k(x) = \frac{\epsilon\varphi x}{2\sigma\upsilon\nu x - 1} - \frac{\sigma\varphi x}{\eta\mu 3x - 2}$

vii. $s(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - 4} + \frac{2^x + 4}{e^{3x} + 1}$

viii. $r(x) = \frac{1 - \eta\mu 2x}{9^{\eta\mu x} + 3^{\eta\mu x} - 90} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{e^{|x|-1} - 1}$

Λύση

i. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

πρέπει :

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Μεθοδολογία

- ♦ Οι *πολωνομικές* συναρτήσεις, οι συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ και α^x ($\alpha > 0$), έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- ♦ Οι *παρονομαστές*, όπου κι αν αυτοί παρουσιάζονται, πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός.

Σχόλιο

Ο τύπος της f απλοποιείται ως εξής :

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

αλλά το πεδίο ορισμού δεν αλλάζει.

Παρατήρηση

Ενδεχομένως ένας τύπος συνάρτησης να απλοποιείται ή να γράφεται διαφορετικά.

Το πεδίο ορισμού της θα βρίσκεται πριν από οποιαδήποτε επέμβαση στον τύπο.

ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2-x}{x^2-3x+2} - \frac{x^3}{x^2-x+4}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \\ \text{και} \\ x^2 - x + 4 \neq 0, \text{ ισχύει (αφού } \Delta = -15 < 0) \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι : $D_g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

iii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{\eta\mu x + 1}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$ πρέπει :

$$\begin{aligned}
 x^3 + x^2 - 10x + 8 &\neq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 8) &\neq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \text{ και } x^2 + 2x - 8 &\neq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \text{ και } x &\neq -4
 \end{aligned}$$

σχήμα Horner

1	1	-10	8	1
	1	2	-8	
1	2	-8	0	

Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι : $D_h = \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\}$

iv. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x^4 + 2}$$

πρέπει :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 \neq 0 \\ \text{και} \\ 1 + \frac{1}{x^3} \neq 0 \\ \text{και} \\ x^4 + 2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \text{και} \\ \frac{1}{x^3} \neq -1 \\ \text{και} \\ x^4 \neq -2, \text{ ισχύει} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^3 \neq -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq -\sqrt[3]{1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq -1 \end{array} \right\}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι : $D_\varphi = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

v. Για να ορίζεται η συνάρτηση $t(x) = \frac{3^{|x|} + 1}{|2x+3|-3} + \frac{|x^2-1|}{|4-3x|+2}$ πρέπει :

$$\left\{ \begin{array}{l} |2x+3|-3 \neq 0 \\ \text{και} \\ |4-3x|+2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |2x+3| \neq 3 \\ \text{και} \\ |4-3x| \neq -2, \text{ ισχύει} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow |2x+3| \neq 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+3 \neq 3 \\ \text{και} \\ 2x+3 \neq -3 \end{array} \right\}$$

Λύση της $x^v \neq a$

($x, a \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$)

♦ Αν $a > 0$ και v : άρτιος τότε :

$$x^v \neq a \Leftrightarrow x \neq \pm \sqrt[v]{a}$$

♦ Αν $a > 0$ και v : περιττός τότε :

$$x^v \neq a \Leftrightarrow x \neq \sqrt[v]{a}$$

♦ Αν $a < 0$ και v : άρτιος τότε :

$$x^v \neq a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ (ισχύει)}$$

♦ Αν $a < 0$ και v : περιττός τότε :

$$x^v \neq a \Leftrightarrow x \neq -\sqrt[v]{|a|}$$

♦ Αν $a = 0$ και $v \in \mathbb{N}^*$ τότε :

$$x^v = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Λύση της $|x| \neq a$

($x, a \in \mathbb{R}$)

♦ Αν $a > 0$ τότε :

$$|x| \neq a \Leftrightarrow x \neq \pm a$$

♦ Αν $a < 0$ τότε :

$$|x| \neq a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ (ισχύει)}$$

♦ Αν $a = 0$ τότε :

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 0 \\ \text{και} \\ 2x \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της t είναι : $D_t = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$

vi. Για να ορίζεται η συνάρτηση $k(x) = \frac{\varepsilon\phi x}{2\sigma\upsilon\nu x - 1} - \frac{\sigma\phi x}{\eta\mu 3x - 2}$ πρέπει :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ 2\sigma\upsilon\nu x - 1 \neq 0 \\ \text{και} \\ \eta\mu 3x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x \neq \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \eta\mu 3x \neq 2, \text{ ισχύει} \\ (\text{αφού } -1 \leq \eta\mu 3x \leq 1) \end{cases}$$

Ισχύουν

- ♦ $\eta\mu x \neq \eta\mu \theta \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi + \theta \text{ και } x \neq 2\kappa\pi + \pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$
- ♦ $\sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \theta \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi \pm \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$
- ♦ $\varepsilon\phi x \neq \varepsilon\phi \theta \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$
- ♦ $\sigma\phi x \neq \sigma\phi \theta \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$

Ειδικές περιπτώσεις συγχώνευσης λύσεων

- $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Συνέπειες

➤ Η $\varepsilon\phi x$ ορίζεται για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

(αφού $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, άρα πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$).

➤ Η $\sigma\phi x$ ορίζεται για κάθε $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

(αφού $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, άρα πρέπει $\eta\mu x \neq 0$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της k είναι :

$$D_k = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa\pi, 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

vii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $s(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - 4} + \frac{2^x + 4}{e^{3x} + 1}$ πρέπει :

$$\begin{cases} e^x - 4 \neq 0 \\ \text{και} \\ e^{3x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \neq 4 \\ \text{και} \\ e^{3x} \neq -1, \text{ ισχύει} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq 4 \Leftrightarrow \ln e^x \neq \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \ln e \neq \ln 4 \Leftrightarrow x \neq \ln 4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της s είναι :

$$D_s = \mathbb{R} - \{\ln 4\}$$

viii. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$r(x) = \frac{1 - \eta\mu 2x}{9^{\eta\mu x} + 3^{\eta\mu x} - 90} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{e^{|x|-1} - 1}$$

πρέπει :

$$\begin{cases} 9^{\eta\mu x} + 3^{\eta\mu x} - 90 \neq 0 \\ \text{και} \\ e^{|x|-1} - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2\eta\mu x} + 3^{\eta\mu x} - 90 \neq 0 \\ \text{και} \\ e^{|x|-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \quad 3^{\eta\mu x} = \omega \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 + \omega - 90 \neq 0 \\ \text{και} \\ e^{|x|-1} \neq e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \neq -10 \text{ και } \omega \neq 9 \\ \text{και} \\ |x| - 1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = 3^{\eta\mu x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\eta\mu x} \neq -10, \text{ ισχύει} \\ 3^{\eta\mu x} \neq 9 \\ |x| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\eta\mu x} \neq 3^2 \\ x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq 2, \text{ ισχύει} \\ \text{και} \\ x \neq 1 \\ \text{και} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της r είναι : $D_r = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Ισχύουν

$$\blacklozenge a^{x_1} \neq a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\blacklozenge \ln x_1 \neq \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$$

Συνέπειες

$$\bullet \text{ Αν } y > 0 \text{ τότε}$$

$$e^x \neq y \Leftrightarrow x \neq \ln y$$

$$\bullet \text{ Αν } y \leq 0 \text{ τότε}$$

$$e^x \neq y \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ (ισχύει)}$$

$$\bullet \text{ Αν } x > 0 \text{ τότε}$$

$$\ln x \neq y \Leftrightarrow x \neq e^y$$

Θυμίζουμε

$$\blacklozenge \ln 1 = 0$$

$$\blacklozenge \ln e = 1$$

2.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x^2-4x+3}$

ii. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}+2}{\sqrt{4x-x^2}}$

iii. $h(x) = \ln(x^3-3x+2) - 3\ln(2\eta\mu x+3)$

iv. $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

v. $t(x) = \ln\left(\frac{x^2+x-6}{x-1}\right)$

vi. $k(x) = \frac{\ln(x^2+4x+4)}{3-\sqrt{x^3+1}}$

vii. $s(x) = \frac{\sqrt{3-|2-x|} - \ln(x^2-5)}{1+\sqrt{|x-4|+2}}$

viii. $r(x) = \frac{\ln(1+\ln x) - \sqrt{3-e^x}}{\sqrt{1-\ln(e-e^x)}}$

Λύση

i. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x^2-4x+3}$$

πρέπει :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \text{και} \\ x^2-4x+3 \geq 0 \end{cases}$$

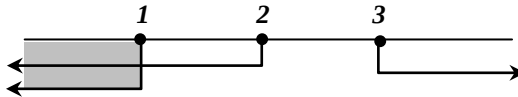
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \text{και} \\ x \leq 1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Μεθοδολογία

- ♦ Οι υπόριζες ποσότητες, ανεξάρτητα από την τάξη του ριζικού πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το μηδέν.
- ♦ Όταν παρουσιάζονται όροι της μορφής $\log \varphi(x)$ ή $\ln \varphi(x)$, απαιτούμε $\varphi(x) > 0$.

πρόσημο του x^2-4x+3

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$



Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι :

$$D_f = (-\infty, 1]$$

ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ πρέπει :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 9 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ 4x - x^2 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{4x - x^2} \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - x^2 \geq 0 \\ \text{και} \\ 4x - x^2 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

[Το $4x - x^2$ γράφεται $x(4 - x)$ οπότε είναι προφανές ότι έχει ως ρίζες το 0 και το 4.

Το $4x - x^2$ είναι θετικό ($4x - x^2 > 0$)

δηλαδή ετερόσημο του $\alpha = -1 < 0$ όταν το x παίρνει τιμές εντός των ριζών 0 και 4].

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι :

$$D_g = (0, 4)$$

Παρατηρήσεις

Για το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ ισχύουν :

- ♦ Αν $\Delta > 0$ τότε είναι :
 - ομόσημο του a εκτός των ριζών x_1 και x_2 .
 - ετερόσημο του a εντός των ριζών x_1 και x_2 .
- ♦ Αν $\Delta = 0$ τότε είναι ομόσημο του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός της (διπλής) ρίζας x_0 (στην οποία το τριώνυμο μηδενίζει).
- ♦ Αν $\Delta < 0$ τότε είναι ομόσημο του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $h(x) = \ln(x^3 - 3x + 2) - 3\ln(2\eta\mu x + 3)$ πρέπει :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 - 3x + 2 > 0 \\ \text{και} \\ 2\eta\mu x + 3 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x^2 + x - 2) > 0 \\ \text{και} \\ \eta\mu x > -\frac{3}{2}, \text{ ισχύει (αφού } -1 \leq \eta\mu x \leq 1) \end{array} \right. \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) > 0$$

σχήμα Horner

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0
Γινόμενο	-	0	+	0

Άρα $(x-1)(x^2 + x - 2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της h είναι : $D_h = (-2, 1) \cup (1, +\infty)$

iv. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \\ \text{και} \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \geq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x > 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι :

$$D_{\varphi} = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$$

v. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$t(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x - 6}{x-1}\right) \text{ πρέπει :}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x-1} > 0 \\ \text{και} \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) > 0$$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
x^2+x-6	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
Γινόμενο	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Άρα } (x-1)(x^2 + x - 6) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty).$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της t είναι : $D_t = (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

vi. Για να ορίζεται η συνάρτηση

Θυμίζουμε

$$\diamond \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \\ \text{και} \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\diamond \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0 \\ \text{και} \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Προσοχή!! Τα παραπάνω ισχύουν μόνο όταν στο δεύτερο μέλος έχουμε το **μηδέν**.

Παρατήρηση

$$\text{Η ιδιότητα } \sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} = \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}} \text{ ισχύει μόνο}$$

όταν $A(x) \geq 0$ και $B(x) > 0$.

Παρατηρήσεις

$$\diamond \text{ Η ιδιότητα } \ln \frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$$

ισχύει μόνο όταν $\theta_1 > 0$ και $\theta_2 > 0$.

$\diamond$ Ισχύουν :

$$\bullet \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$$

$$\bullet \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0$$

$\diamond$ Ο περιορισμός $Q(x) \neq 0$ είναι περιττός. Θα ήταν απαραίτητος αν αντί για $>$ ή $<$ είχαμε $\geq$ ή $\leq$.

$$k(x) = \frac{\ln(x^2 + 4x + 4)}{3 - \sqrt{x^3 + 1}}$$

πρέπει :

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 > 0 \\ \text{και} \\ x^3 + 1 \geq 0 \\ \text{και} \\ 3 - \sqrt{x^3 + 1} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ \text{και} \\ x^3 \geq -1 \\ \text{και} \\ \sqrt{x^3 + 1} \neq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \text{και} \\ x \geq -\sqrt[3]{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \text{και} \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \text{και} \\ x \geq -1 \\ \text{και} \\ x \neq \sqrt[3]{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \text{και} \\ x \geq -1 \\ \text{και} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

Είναι **λάθος** αν τον αριθμητή της $k(x)$ τον γράψουμε :

$$\ln(x^2 + 4x + 4) = \ln(x+2)^2 = 2\ln(x+2)$$

αφού η ιδιότητα $\ln \theta^v = v \ln \theta$ ισχύει μόνο αν $\theta > 0$.

Το **σωστό** είναι :

$$\ln(x^2 + 4x + 4) = \ln(x+2)^2 = \ln|x+2|^2 = 2\ln|x+2|$$

Λύση της $x^v > a$ όπου $x, a \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$

♦ Αν $a > 0$ και v : **άρτιος** τότε :

$$x^v > a \Leftrightarrow |x| > \sqrt[v]{a} \Leftrightarrow x < -\sqrt[v]{a} \text{ ή } x > \sqrt[v]{a}$$

♦ Αν $a > 0$ και v : **περιττός** τότε :

$$x^v > a \Leftrightarrow x > \sqrt[v]{a}$$

♦ Αν $a < 0$ και v : **άρτιος** τότε :

$$x^v > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ (ισχύει πάντα)}$$

♦ Αν $a < 0$ και v : **περιττός** τότε :

$$x^v > a \Leftrightarrow x > -\sqrt[v]{|a|}$$

Λύση της $x^v < a$ όπου $x, a \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$

♦ Αν $a > 0$ και v : **άρτιος** τότε :

$$x^v < a \Leftrightarrow |x| < \sqrt[v]{a} \Leftrightarrow -\sqrt[v]{a} < x < \sqrt[v]{a}$$

♦ Αν $a > 0$ και v : **περιττός** τότε :

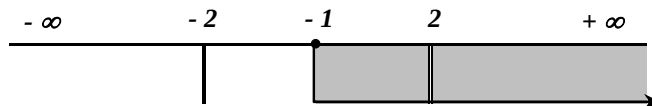
$$x^v < a \Leftrightarrow x < \sqrt[v]{a}$$

♦ Αν $a < 0$ και v : **άρτιος** τότε :

$$x^v < a \Leftrightarrow \text{αδύνατη}$$

♦ Αν $a < 0$ και v : **περιττός** τότε :

$$x^v < a \Leftrightarrow x < -\sqrt[v]{|a|}$$



Άρα το πεδίο ορισμού της k είναι : $D_k = [-1, 2) \cup (2, +\infty)$

vii. Για να ορίζεται η συνάρτηση

$$s(x) = \frac{\sqrt{3-|2-x|} - \ln(x^2-5)}{1+\sqrt{|x-4|+1}}$$

πρέπει :

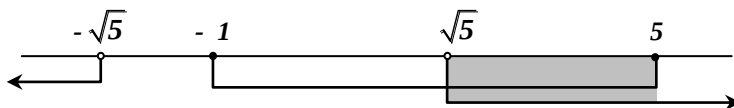
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3-|2-x| \geq 0 \\ \text{και} \\ x^2-5 > 0 \\ \text{και} \\ |x-4|+1 \geq 0 \\ \text{και} \\ 1+\sqrt{|x-4|+1} \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |2-x| \leq 3 \\ \text{και} \\ x^2 > 5 \\ \text{και} \\ |x-4| \geq -1, \text{ ισχύει} \\ \text{και} \\ \sqrt{|x-4|+1} \neq -1, \text{ ισχύει} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |2-x| \leq 3 \\ \text{και} \\ \sqrt{x^2} > \sqrt{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |2-x| \leq 3 \\ \text{και} \\ |x| > \sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq 2-x \leq 3 \\ \text{και} \\ x < -\sqrt{5} \text{ ή } x > \sqrt{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3-2 \leq -x \leq 3-2 \\ \text{και} \\ x < -\sqrt{5} \text{ ή } x > \sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 \leq -x \leq 1 \\ \text{και} \\ x < -\sqrt{5} \text{ ή } x > \sqrt{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 5 \\ \text{και} \\ x < -\sqrt{5} \text{ ή } x > \sqrt{5} \end{array} \right.$$



Άρα το πεδίο ορισμού της s είναι $D_s = (\sqrt{5}, 5]$

Παρατηρήσεις

♦ Ενώ σε μια συνάρτηση με τύπο της μορφής $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{A(x)}}$ οι

$$\text{περιορισμοί} \left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{A(x)} \neq 0 \end{array} \right.$$

“συγχωνεύονται” στον περιορισμό $A(x) > 0$ δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάτι ανάλογο όταν στον παρονομαστή το $\sqrt{A(x)}$ είναι όρος ενός αθροίσματος ή μιας διαφοράς.

♦ Για να υψώσουμε τα δύο μέλη μιας διαφοράς στο τετράγωνο (και γενικά σε άρτιο εκθέτη) πρέπει και τα δύο μέλη της να είναι ομόσημα. Επομένως είναι **λάθος** αν γράψαμε :

$$\sqrt{|x-4|+1} \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{|x-4|+1} \right)^2 \neq (-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-4|+1 \neq 1 \Leftrightarrow |x-4| \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$$

Αφού $\sqrt{|x-4|+1} > 0$, ενώ $-1 < 0$.

viii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $r(x) = \frac{\ln(1+\ln x) - \sqrt{3-e^x}}{\sqrt{1-\ln(e-e^x)}}$ πρέπει :

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x > 0 \\ 3 - e^x \geq 0 \\ e - e^x > 0 \\ 1 - \ln(e - e^x) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > -1 \\ e^x \leq 3 \\ e^x < e \\ \ln(e - e^x) < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^{\ln x} > e^{-1} \\ \ln e^x \leq \ln 3 \\ x < 1 \\ \ln(e - e^x) < \ln e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \\ x \leq \ln 3 \\ x < 1 \\ e - e^x < e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \\ x \leq \ln 3 \\ x < 1 \\ e^x > 0, \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \\ x \leq \ln 3 \\ x < 1 \end{cases}$$

Ισχύουν

♦ Αν $a > 1$, τότε

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

♦ Αν $0 < a < 1$, τότε

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

♦ $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Συνέπειες

• Αν $y > 0$ τότε

$$e^x < y \Leftrightarrow x < \ln y$$

• Αν $y \leq 0$ τότε

$$e^x < y \text{ αδύνατη}$$

$$e^x > y \text{ ισχύει}$$

• Αν $x > 0$ τότε

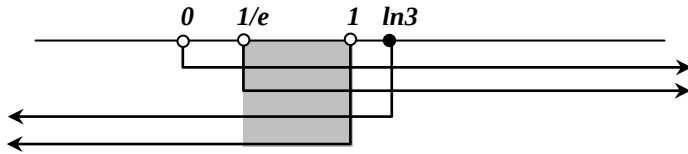
$$\ln x < y \Leftrightarrow x < e^y$$

Παρατήρηση

Επειδή $e \approx 2,71$ είναι

$$3 > e \Leftrightarrow \ln 3 > \ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 3 > 1$$



Άρα το πεδίο ορισμού της r είναι : $D_r = \left(\frac{1}{e}, 1 \right)$

3.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$

ii. $g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{1 + \ln x}}$

iii. $h(x) = 3\ln(2\mu 3x + 5) - 2\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ **iv.** $\varphi(x) = \frac{\ln(1 - \eta\mu x)}{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}$

Λύση

i. Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$ πρέπει :

$$\begin{cases} e^x - 1 \neq 0 \\ \text{και} \quad \Leftrightarrow x(e^x - 1) > 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} > 0 \end{cases}$$

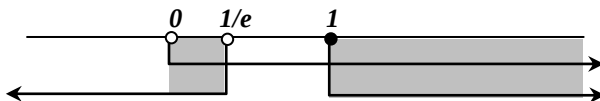
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
Γινόμενο	+	0	+

[Το πρόσημο του $e^x - 1$ βρέθηκε
ως εξής :
• $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
• $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$]

Άρα $x(e^x - 1) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι : $D_f = \mathbb{R}^*$

ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{1 + \ln x}}$ πρέπει :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x \neq 0 \\ \frac{\ln x}{1 + \ln x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -1 \\ \ln x(1 + \ln x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \\ \ln x(1 + \ln x) \geq 0 \end{cases} \\ & \text{Θέτω } \ln x = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ \omega(1 + \omega) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ \omega \leq -1 \quad \text{ή} \quad \omega \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ \ln x \leq -1 \quad \text{ή} \quad \ln x \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ x \leq e^{-1} \quad \text{ή} \quad x \geq e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ x \leq \frac{1}{e} \quad \text{ή} \quad x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το : $D_g = (0, \frac{1}{e}) \cup [1, +\infty)$

iii. Για να ορίζεται η συνάρτηση $h(x) = 3\ln(2\eta\mu 3x + 5) - 2\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ πρέπει :

$$\begin{cases} 2\eta\mu 3x + 5 > 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu 3x > -\frac{5}{3}, \text{ ισχύει (αφού } -1 \leq \eta\mu 3x \leq 1) \\ x^2 \geq -1, \text{ ισχύει} \\ \sqrt{x^2 + 1} > -x \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x$$

- Αν $x > 0$, τότε $-x < 0$, οπότε

$$\sqrt{x^2 + 1} > -x, \text{ ισχύει (αφού } \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ και } -x < 0).$$

- Αν $x \leq 0$, τότε $-x \geq 0$, οπότε :

$$\sqrt{x^2 + 1} > -x \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1})^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0, \text{ ισχύει}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι : $D_h = \mathbb{R}$

iv. Για να ορίζεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{\ln(1 - \eta\mu x)}{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}$ πρέπει :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1 - \eta\mu x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ \ln(x^2 + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x < 1 \\ x^2 > -1, \text{ ισχύει} \\ \ln(x^2 + 1) > \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x < 1 \\ x^2 + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x < 1 \\ x^2 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq 1, \text{ (αφού } \eta\mu x \leq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \\ x \neq 0, \text{ (αφού } x^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq \eta\mu \frac{\pi}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι : $D_\varphi = \mathbb{R} - \left\{ 0, \quad 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

4.

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, όταν :

i. $f(x) = \frac{2x + 3}{4x^2 - 8\lambda x + 2\lambda^2 + \lambda + 3}$

ii. $f(x) = \sqrt{(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 4)x + \lambda - 1}$

Λύση

i. Για να έχει η συνάρτηση f πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, πρέπει :

$$4x^2 - 8\lambda x + 2\lambda^2 + \lambda + 3 \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν η διακρίνουσα είναι αρνητική. Δηλαδή :

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-8\lambda)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2\lambda^2 + \lambda + 3) < 0 \Leftrightarrow 64\lambda^2 - 16 \cdot (2\lambda^2 + \lambda + 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot (4\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda - 3) < 0 \Leftrightarrow 16 \cdot (2\lambda^2 - \lambda - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda < \frac{3}{2}$$

ii. Για να έχει η συνάρτηση f πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, πρέπει :

$$(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 4)x + \lambda - 1 \geq 0 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

♦ Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε το $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 4)x + \lambda - 1$ γίνεται $-3x$ και προφανώς δεν ισχύει $-3x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

♦ Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ \lambda - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 4)^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda - 1) \leq 0 \\ \lambda - 1 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 8\lambda + 16 - 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \leq 0 \\ \lambda > 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 8\lambda + 16 - 4\lambda^2 + 8\lambda - 4 \leq 0 \\ \lambda > 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda^2 + 12 \leq 0 \\ \lambda > 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 4 \geq 0 \\ \lambda > 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda \geq 2 \\ \lambda > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Ένα τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ διατηρεί, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, σταθερό πρόσημο, (αυτό του a) αν και μόνο αν $\Delta < 0$. Οπότε :

♦ $ax^2 + bx + \gamma > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

♦ $ax^2 + bx + \gamma \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

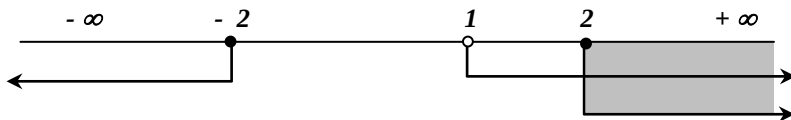
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

♦ $ax^2 + bx + \gamma < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

♦ $ax^2 + bx + \gamma \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$



Άρα $\lambda \in [2, +\infty)$.

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{|x+5|-2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Λύση

i. Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{|x+5|-2}$

πρέπει

$$|x+5|-2 \neq 0 \Leftrightarrow |x+5| \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \neq 2 \\ \text{και} \\ x+5 \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ \text{και} \\ x \neq -7 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι : $D_f = \mathbb{R} - \{-7, -3\}$

ii. Το $\frac{1}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f αν και μόνο αν υπάρχει ένα τουλάχιστον x που να ανήκει στο πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f τέτοιο ώστε να είναι :

$$f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{|x+5|-2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow |x+5|-2 = 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow |x+5| = 3x-3+2$$

$$\Leftrightarrow |x+5| = 3x-1$$

- Αν $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$, τότε
 $x+5 = 3x-1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$,
δεκτή, αφού $3 \geq -5$
- Αν $x+5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$, τότε
 $-x-5 = 3x-1 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$,
απορρίπτεται, αφού $-1 > -5$.

Άρα για την τιμή $x = 3$, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ,

$$\text{ισχύει } f(3) = \frac{1}{3}.$$

Συνεπώς το $\frac{1}{3}$ είναι μια από τις τιμές

που παίρνει η f δηλαδή ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Μεθοδολογία

Ένας αριθμός κ ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \kappa$. Δηλαδή αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού της f .

Παρατήρηση

Ενώ για $\theta > 0$ ισχύει : $|A(x)| = \theta \Leftrightarrow A(x) = \pm \theta$

δεν ισχύει : $|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$

Σ' αυτή την περίπτωση διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$A(x) \geq 0 \text{ και } A(x) < 0$$

και συνεχίζουμε βγάζοντας (αναλόγως) την απόλυτη τιμή από το $A(x)$.

Παρατήρηση

Στη συγκεκριμένη συνάρτηση η τιμή $x = 3$ είναι η μοναδική τιμή για την

$$\text{οποία ισχύει } f(3) = \frac{1}{3}.$$

Θα μπορούσε να υπάρχουν περισσότερες.

Ο αριθμός αυτός μπορεί να βρεθεί και χωρίς να κάνουμε πράξεις, απλά

$$\text{παρατηρώντας ότι } f(3) = \frac{1}{3}.$$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5} + \frac{e^x}{5 - x + x^2}$$

$$f_2(x) = \frac{1 - x^3}{x^3 - x^2 - 14x + 24} - \frac{\eta\mu x}{x^2 + 16}$$

$$f_3(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3 + x^2 - x - 1} + \frac{2^x}{x^3 + 27}$$

$$f_4(x) = \frac{|x - 1|}{x^3 - 9x} + \frac{|x| - 1}{x - x^4}$$

$$f_5(x) = \frac{x^3}{|x - 3| - 2} + \frac{|e^x - 2| - 1}{2 + |x|}$$

$$f_6(x) = \frac{|\eta\mu x - 1|}{|7 - 2x| - 1} - \frac{x^4}{|x^2 - 2x| + 1}$$

$$f_7(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - 2} + \frac{e^x + \eta\mu x}{1 - e^x} - \frac{x}{e^x + 2}$$

$$f_8(x) = \frac{e^{x+\eta\mu x}}{2^x - 1} - \frac{2x}{1 - 2e^x} + \frac{x^5}{e^x + 2^x}$$

$$f_9(x) = \frac{2x + \varepsilon\phi x}{2\sigma\upsilon\nu 3x - 1} + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu x - 3}$$

$$f_{10}(x) = \frac{e^x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} + \frac{5\sigma\phi x}{2 + \eta\mu x}$$

$$f_{11}(x) = \frac{x + 5}{\varepsilon\phi x} + \frac{1}{2\eta\mu x + 1}$$

$$f_{12}(x) = \frac{e^x}{|\varepsilon\phi x| - 1} - \frac{x^4}{2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{12 - x - x^2}$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{16 + x^2}}{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{1 - |x|}$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^3 + x}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(2x - x^2)}{\ln(x^2 - 1)}$$

$$f_6(x) = \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x - 1} + \frac{\sqrt{4 + 3x - x^2}}{\ln(x - 2)}$$

$$f_7(x) = \frac{\ln x^2}{\ln(x^3 + 1)}$$

$$f_8(x) = \frac{\ln(x^3 - 7x - 6)}{\ln(\sigma\upsilon\nu x + 3)}$$

$$f_9(x) = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}} + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

$$f_{10}(x) = \ln(x^2 + x) + \ln \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$f_{11}(x) = \frac{\sqrt{|x - 2| - 1}}{\sqrt{2 - |x + 1|} - \sqrt{|x| + 3}}$$

$$f_{12}(x) = \sqrt{|x - 3| - 5} + \sqrt{7 - |x - 4|} - \sqrt{4 + |3x + 2|}$$

$$f_{13}(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{\sqrt{e^{2x} + 1}} + \sqrt{2 - e^x}$$

$$f_{14}(x) = \sqrt{e^{x^2 - 4} - 1} - \frac{\ln(e^x - 2)}{\sqrt{2 + e^{x^3}}}$$

$$f_{15}(x) = \sqrt{1 - \ln x} + \ln(1 + 2 \ln x) \quad f_{16}(x) = \sqrt{\ln \frac{3 + x}{3 - x}} + \ln(\ln(2 - x))$$

$$f_{17}(x) = \frac{\ln(2 - \ln x)}{\ln(1 - \ln(x-1))}$$

$$f_{18}(x) = \sqrt{3e^{2x} - 5e^x - 2} + \frac{1}{\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}}$$

$$f_{19}(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)}$$

$$f_{20}(x) = \frac{x^4}{2 + \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$$

- 3.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}}$$

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{2-x}{\ln x}}$$

$$f_3(x) = \ln\left(\frac{x-1}{\ln x - 1}\right)$$

$$f_4(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\ln(1 - \sin x)}$$

- 4.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 1)}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να εξετάσετε αν το 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

- 5.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

iii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

- 6.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$, για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

- 7.** Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το πεδίο ορισμού της

$$\text{συνάρτησης } f(x) = \frac{2\sin^2 x - 1}{x^2 + (2\lambda + 1)x + 3\lambda}, \text{ να είναι το } \mathbb{R}.$$

- 8.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sin 2x}{\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda}$. Να προσδιοριστούν οι τιμές της

παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ώστε να έχει η f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- 9.** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \sqrt{4\lambda x^2 + 4(\lambda + 2)x + 2\lambda + 1},$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$;

- 10.** Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}^*$, ώστε να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\kappa x^2 + (\kappa - 3)x + 1).$$

11. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 3\lambda(\lambda - 1) \\ x^4 + 2, & x \geq 1 - \lambda \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές $\lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε η f να αποτελεί συνάρτηση.

12. Έστω ένα ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 2 και έστω $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \theta$ ακτίνα.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας θ είναι

$$E(\theta) = 4(1 + \sin\theta) \cdot \eta\mu\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

ii. Αν η γωνία θ μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$\theta = f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}, \quad 0 < t < 2\pi, \text{ να εκφράσετε το εμβαδόν } E \text{ σε συνάρτηση με το}$$

χρόνο και να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο καθώς και το εμβαδόν του τη στιγμή εκείνη.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες, και γράφουμε $f = g$, όταν :

- ♦ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A
και
- ♦ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$.

Παρατηρήσεις :

1. Οι ίσες συναρτήσεις έχουν την ίδια γραφική παράσταση.
2. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και Γ ένα υποσύνολο του $A \cap B$.

Αν για κάθε $x \in \Gamma$ είναι $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

- | | | | |
|-------------|--|-----|--|
| i. | $f(x) = \frac{3x^2 - 2 x }{x^2}$ | και | $g(x) = 3 - \frac{2}{ x }$ |
| ii. | $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$ | και | $g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ |
| iii. | $f(x) = \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}$ | και | $g(x) = \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$ |
| iv. | $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ | και | $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$ |

Λύση

- i. • Πεδίο ορισμού f**

Πρέπει $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Άρα $D_f = \mathbb{R}^*$.

- Πεδίο ορισμού g**

Πρέπει $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Άρα $D_g = \mathbb{R}^*$.

Επομένως ισχύει $D_f = D_g (= \mathbb{R}^*)$

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2|x|}{x^2} = \frac{3|x|^2 - 2|x|}{|x|^2} = \frac{|x|(3|x| - 2)}{|x|^2} = \frac{3|x| - 2}{|x|} =$$

$$= \frac{3|x|}{|x|} - \frac{2}{|x|} = 3 - \frac{2}{|x|} = g(x)$$

Άρα οι συναρτήσεις f και g έχουν :

- ♦ ίδιο πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και
- ♦ ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Επομένως είναι ίσες, δηλαδή $\mathbf{f = g}$.

ii. • Πεδίο ορισμού f

Πρέπει

$$x^4 + x^3 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3(x+1) - (x+1) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \text{και} \\ x^3 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \text{και} \\ x^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Άρα $\mathbf{D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$.

• Πεδίο ορισμού g

Πρέπει $x^2 + x + 1 \neq 0$, ισχύει αφού $\Delta = -3 < 0$

Άρα $\mathbf{D_g = \mathbb{R}}$.

Επομένως ισχύει $D_f \neq D_g$, άρα $f \neq g$.

Αλλά για κάθε $x \in D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ είναι :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^3(x+1) - (x+1)} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x^3 - 1)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x^2 + x + 1} = g(x)$$

Επομένως

$$\mathbf{f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}}.$$

iii. • Πεδίο ορισμού f

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Άρα $\mathbf{D_f = [-2, 0) \cup (0, 2]}$.

• Πεδίο ορισμού g

Πρέπει

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ \sqrt{2+x} \neq \sqrt{2-x} \end{cases} \begin{matrix} \sqrt{2+x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \sqrt{2-x} \geq 0 \end{matrix} \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ (\sqrt{2+x})^2 \neq (\sqrt{2-x})^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ 2+x \neq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα $D_g = [-2, 0) \cup (0, 2]$.

Επομένως ισχύει $D_f = D_g$.

Επίσης για κάθε $x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$ είναι :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \\
&= \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x})^2 - (\sqrt{2-x})^2} = \frac{(\sqrt{2+x})^2 + 2\sqrt{2+x} \cdot \sqrt{2-x} + (\sqrt{2-x})^2}{(2+x) - (2-x)} = \\
&= \frac{2+x + 2\sqrt{(2+x)(2-x)} + 2-x}{2+x-2+x} = \frac{4 + 2\sqrt{2^2 - x^2}}{2x} = \frac{2(2 + \sqrt{4-x^2})}{2x} \\
&= \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} = f(x)
\end{aligned}$$

Επομένως $f = g$.

iv. • Πεδίο ορισμού f

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} \frac{x-1}{x-3} \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Άρα $D_f = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$.

• Πεδίο ορισμού g

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Άρα $D_g = (3, +\infty)$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα $f \neq g$.

Αλλά για κάθε $x \in D_f \cap D_g = (3, +\infty)$ είναι $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} = g(x)$

Επομένως $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in (3, +\infty)$.

7

Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{(2-\lambda)x^2 + 2\lambda\kappa}{x+3-\lambda} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(2\lambda+\kappa-2)x^2 + \lambda + \kappa}{x+\lambda+\kappa}$$

να είναι ίσες.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R} - \{\lambda - 3\}$

Το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g = \mathbb{R} - \{-\lambda - \kappa\}$

Για να είναι $f = g$ πρέπει αρχικά να ισχύει $D_f = D_g$.

Έχουμε :

$$D_f = D_g \Leftrightarrow \lambda - 3 = -\lambda - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3 - 2\lambda$$

Για $\kappa = 3 - 2\lambda$ είναι :

$$f(x) = \frac{(2-\lambda)x^2 + 2\lambda(3-2\lambda)}{x+3-\lambda} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 + 3 - \lambda}{x+3-\lambda}$$

Οι συναρτήσεις f, g έχουν τώρα ίδιο πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{\lambda - 3\}$, οπότε για να είναι ίσες πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$$f(x) = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{\lambda - 3\}$$

Έχουμε :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{(2-\lambda)x^2 + 2\lambda(3-2\lambda)}{x+3-\lambda} = \frac{x^2 + 3 - \lambda}{x+3-\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)x^2 + 2\lambda(3-2\lambda) = x^2 + 3 - \lambda \quad (1)$$

Για να ισχύει η (1) για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\lambda - 3\}$,

πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$$\begin{cases} 2-\lambda=1 \\ 2\lambda(3-2\lambda)=3-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=1$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι

$\lambda = 1$ και

$$\kappa = 3 - 2\lambda \Leftrightarrow \kappa = 3 - 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Παρατήρηση

Δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα ($P(x) = Q(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$) αν και μόνο αν οι σταθεροί όροι είναι ίσοι και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων επίσης ίσοι.

Α σ κ ή σ ε ι ς

13. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$.

Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ και $g(x) = \frac{x - 3}{x + 2}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{2}{|x|}$

iii. $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$

iv. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ και $g(x) = |x - 1|$

v. $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$

vi. $f(x) = \ln \frac{(x+3)^2}{2-x}$ και $g(x) = 2 \ln(x+3) - \ln(2-x)$

vii. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

viii. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$

ix. $f(x) = \sqrt{x(x-2)}$ και $g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-2}$

x. $f(x) = \sqrt{x} - 2$ και $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

xi. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

xii. $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

i. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με την f .

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}, \quad f_3(x) = (\sqrt{x+1})^2$$

$$f_4(x) = x \left(\frac{1}{x} + 1 \right), \quad f_5(x) = \ln e^{x+1}, \quad f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$$

ii. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{(\lambda+1)x-1}{x+\lambda^2-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(1-2\lambda)x+\lambda-1}{\lambda-x-5}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $f=g$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\lambda+1)x+3}{x+\lambda-2}$ και $g(x) = \frac{(\lambda^2-\kappa)x+\mu-2}{x-\lambda+6}$.

Να βρείτε τις τιμές των κ , λ , $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες f και g είναι ίσες.

17. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε οι συναρτήσεις

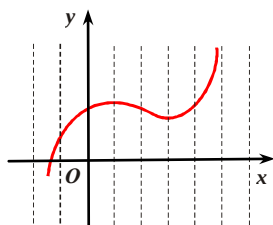
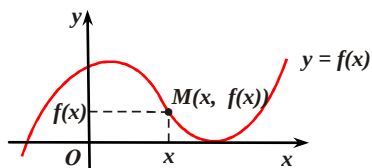
$$f(x) = \frac{\alpha^2 x - \beta + 1}{x + \alpha - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(2\alpha + 3)x - 3}{x + 2}$$

να είναι ίσες.

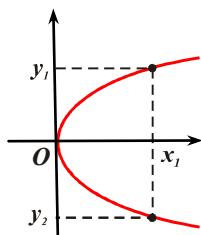
18. Να βρείτε τα α , $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x^2 - (\alpha + \beta)x + 1}{x - \alpha + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 - (\alpha + 2)x + \beta - 1}{x + \beta - 4}$$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης



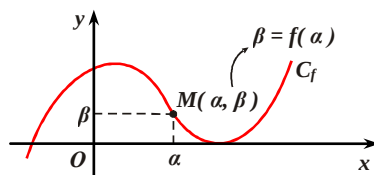
Είναι γραφική
παράσταση συνάρτησης.



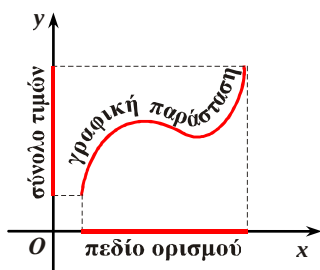
Δεν παριστάνει γραφική
παράσταση συνάρτησης.

- ♦ Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων.
Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ με $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ με $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση της f** και συμβολίζεται με C_f .
- ♦ Η εξίσωση $y=f(x)$ που επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f** .
- ♦ Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f το πολύ σε ένα σημείο, αφού κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$.
Δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη.
- ♦ Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και το σημείο $M(a, \beta)$. Ισχύει :

$$M(a, \beta) \in C_f \Leftrightarrow f(a) = \beta$$



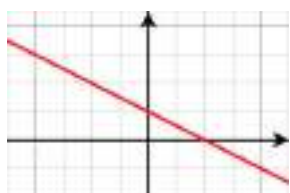
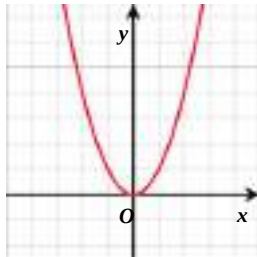
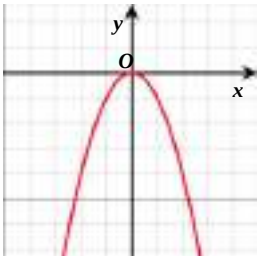
Σχέση Πεδίου Ορισμού – Συνόλου Τιμών & Γραφικής Παράστασης συνάρτησης

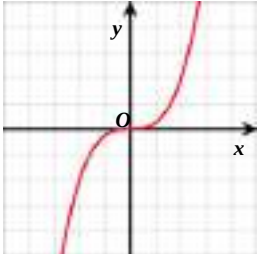
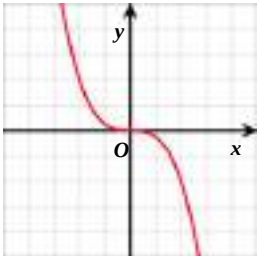
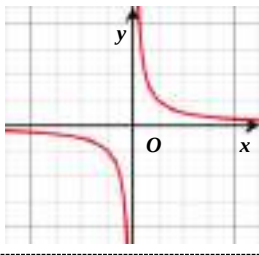
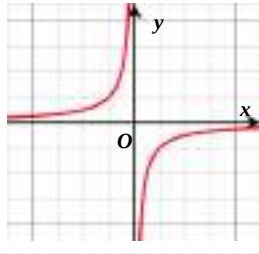
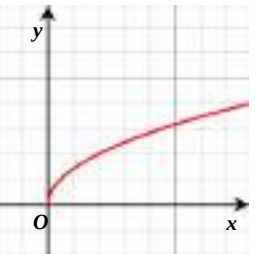


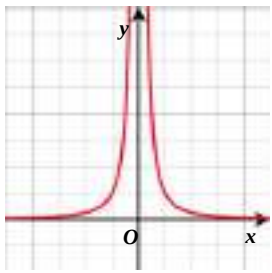
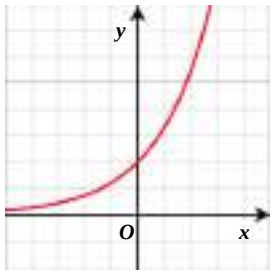
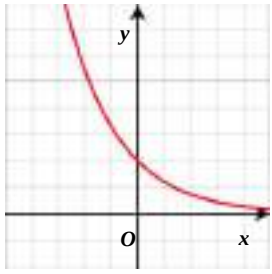
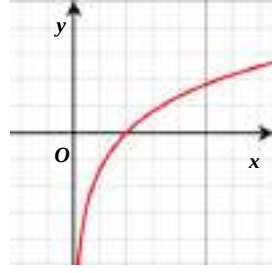
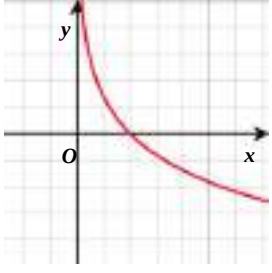
- Η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$ είναι το πεδίο ορισμού A .
- Η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$ είναι το σύνολο τιμών $f(A)$.

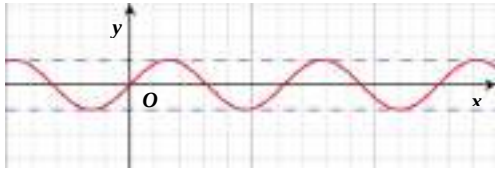
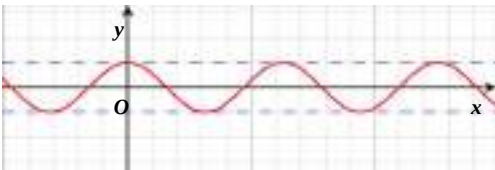
Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε :

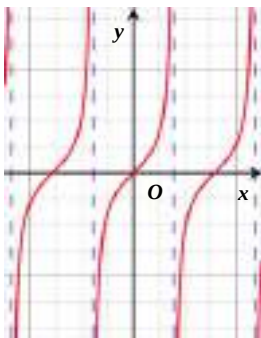
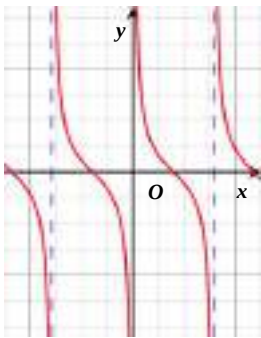
- ♦ Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
Δηλαδή είναι η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$.
- ♦ Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
Δηλαδή είναι η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$.

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Σύνολο τιμών	Γραφική παράσταση
$f(x) = \beta$ <i>(Ευθεία)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = \{\beta\}$	
$f(x) = \lambda x + \beta, \lambda > 0$ <i>(Ευθεία)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = \mathbb{R}$	
$f(x) = \lambda x + \beta, \lambda < 0$ <i>(Ευθεία)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = \mathbb{R}$	
$f(x) = ax^2, a > 0$ <i>(Παραβολή)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = [0, +\infty)$	
$f(x) = ax^2, a < 0$ <i>(Παραβολή)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = (-\infty, 0]$	

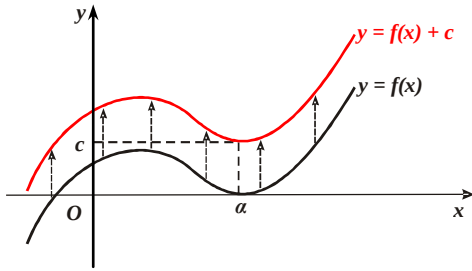
$f(x) = \alpha x^3, \alpha > 0$	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = \mathbb{R}$	
$f(x) = \alpha x^3, \alpha < 0$	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{\alpha}{x}, \alpha > 0$ (Υπερβολή)	$A = \mathbb{R}^*$	$f(A) = \mathbb{R}^*$	
$f(x) = \frac{\alpha}{x}, \alpha < 0$ (Υπερβολή)	$A = \mathbb{R}^*$	$f(A) = \mathbb{R}^*$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$A = [0, +\infty)$	$f(A) = [0, +\infty)$	

$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$A = \mathbb{R}^*$	$f(A) = (0, +\infty)$	
$f(x) = a^x, a > 1$ <i>(Εκθετική)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = (0, +\infty)$	
$f(x) = a^x, 0 < a < 1$ <i>(Εκθετική)</i>	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = (0, +\infty)$	
$f(x) = \log_a x, a > 1$ <i>(Λογαριθμική)</i>	$A = (0, +\infty)$	$f(A) = \mathbb{R}$	
$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$ <i>(Λογαριθμική)</i>	$A = (0, +\infty)$	$f(A) = \mathbb{R}$	

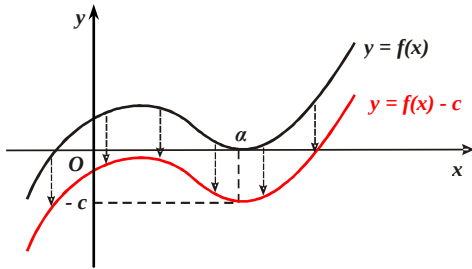
Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Σύνολο τιμών	Γραφική παράσταση
$f(x) = \eta\mu x$	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = [-1, 1]$	
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = [-1, 1]$	

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Σύνολο τιμών	Γραφική παράσταση
$f(x) = \varepsilon\varphi x$	$A = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$	$f(A) = \mathbb{R}$	
$f(x) = \sigma\varphi x$	$A = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$	$f(A) = \mathbb{R}$	

Μετατόπιση πάνω / κάτω

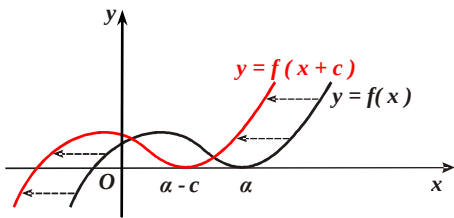


- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) + c, c > 0$ προκύπτει από την **κατακόρυφη μετατόπιση** της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα **πάνω**.

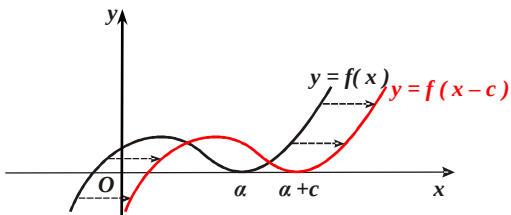


- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) - c, c > 0$ προκύπτει από την **κατακόρυφη μετατόπιση** της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα **κάτω**.

Μετατόπιση δεξιά / αριστερά

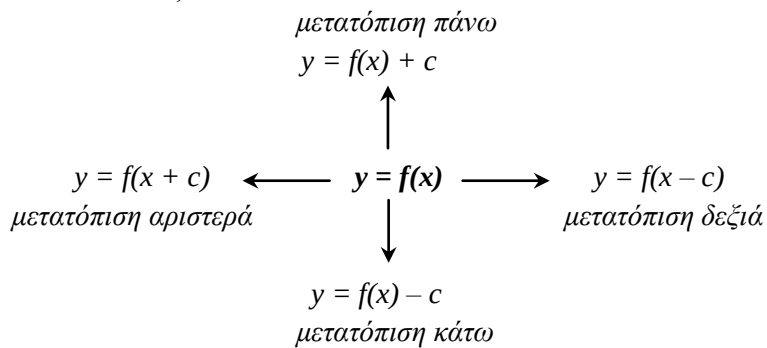


- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x + c), c > 0$ προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα **αριστερά**.

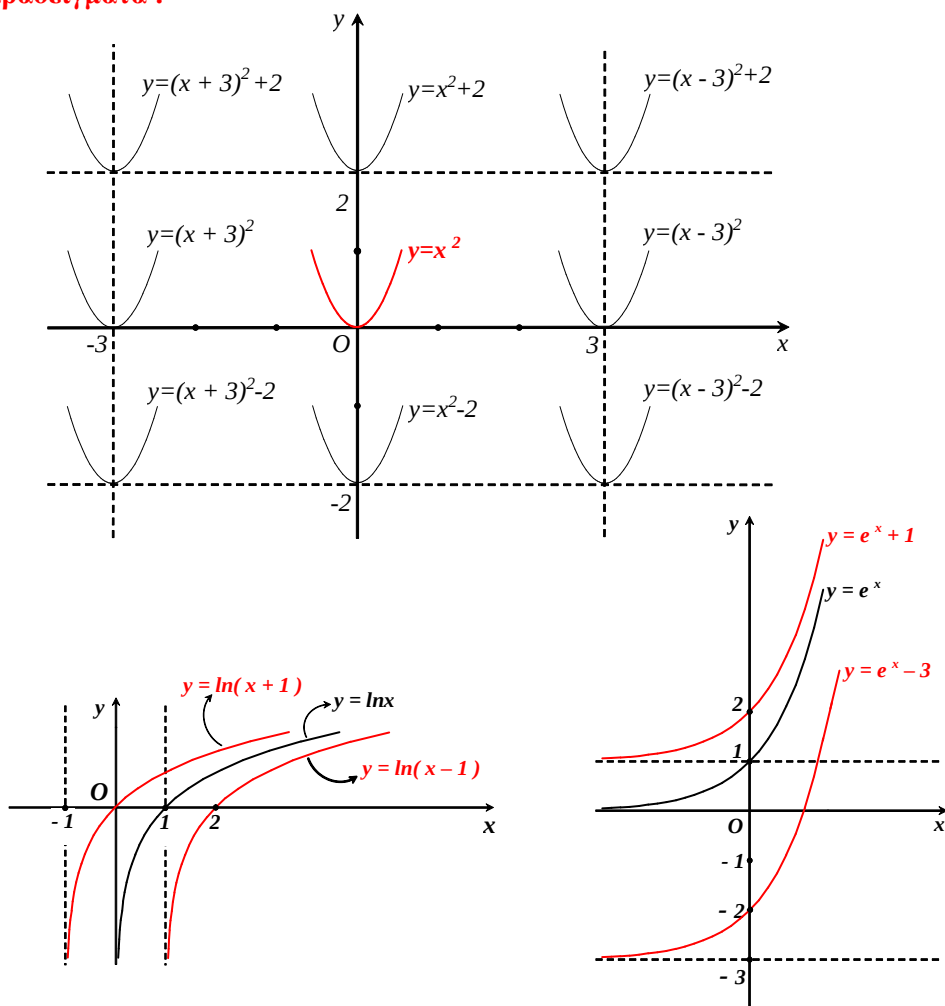


- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x - c), c > 0$ προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα **δεξιά**.

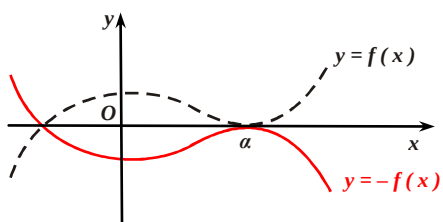
Μνημονικό σχήμα : Αν $c > 0$, τότε :



Παραδείγματα :

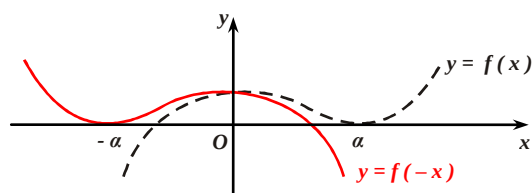


Επίδραση της αντίθεσης



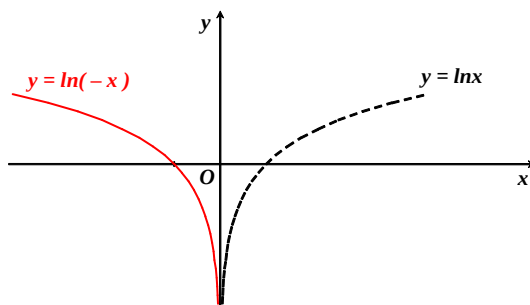
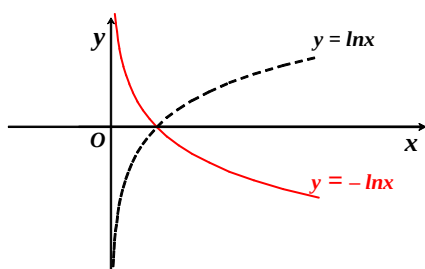
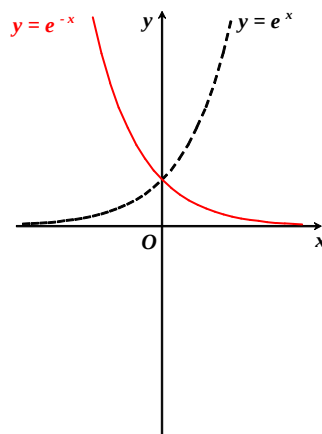
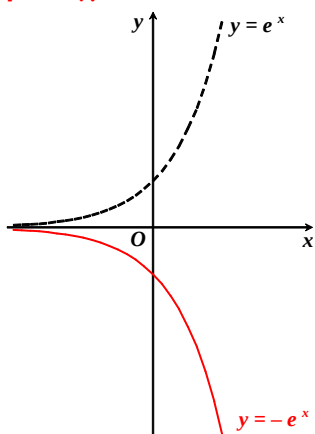
- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης
 $y = -f(x)$
 είναι **συμμετρική** της $y = f(x)$
 ως προς τον **άξονα $x'x$** .

Επίδραση της αντίθεσης στην ανεξάρτητη μεταβλητή x

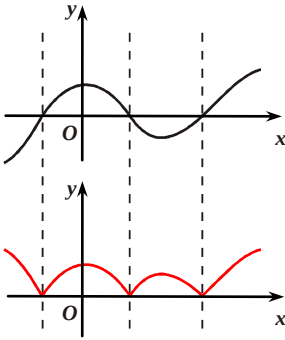


- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης
 $y = f(-x)$
 είναι **συμμετρική** της $y = f(x)$
 ως προς τον **άξονα $y'y$** .

Παραδείγματα :



Επίδραση της απόλυτης τιμής

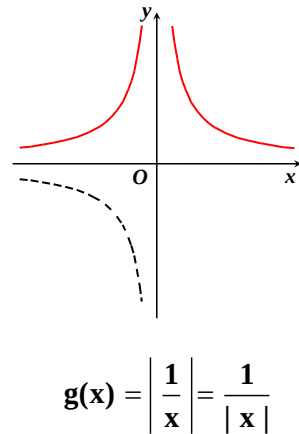
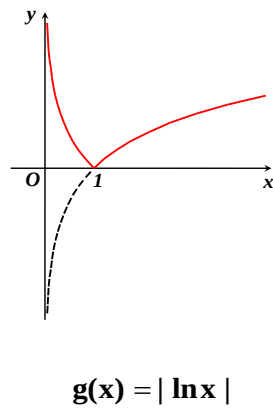
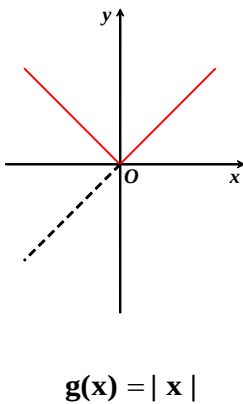
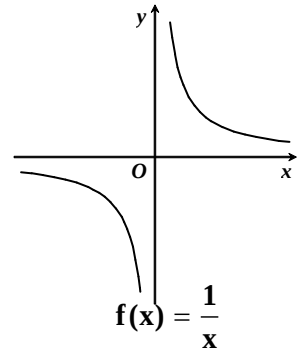
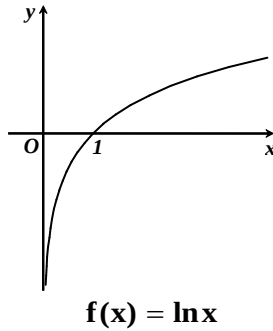
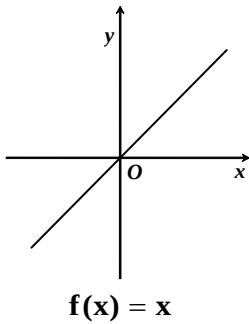


Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

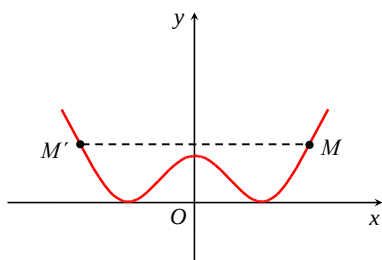
$$y = |f(x)|$$

αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Παραδείγματα :

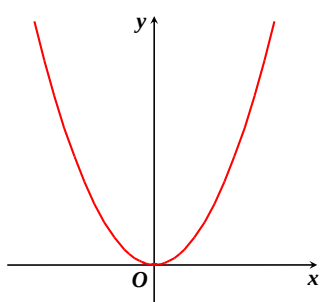


Άρτια συνάρτηση



- ♦ Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια**, όταν :
 - για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.
(δηλ. το A είναι συμμετρικό (ως προς το O) σύνολο)
 - $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$.
- ♦ Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι **συμμετρική καμπύλη ως προς τον άξονα $y'y$** .

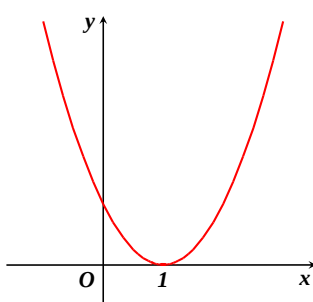
Παραδείγματα :



$$f(x) = x^2$$

- Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το O .
- $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, για κάθε $x \in A$.

Επομένως η f είναι άρτια συνάρτηση.



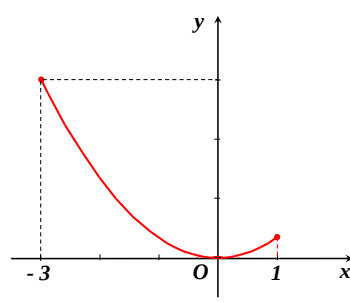
$$f(x) = (x-1)^2$$

- Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το O .
- $f(1) = 0$

$$f(-1) = (-1-1)^2 = 4$$

$$\text{Άρα } f(-1) \neq f(1).$$

Επομένως η f **δεν** είναι άρτια συνάρτηση.



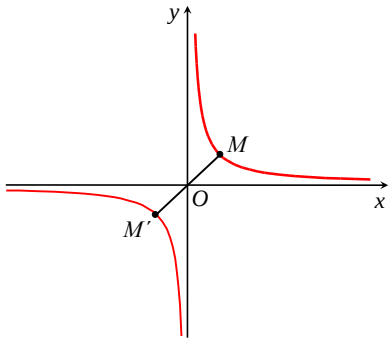
$$f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

- Πεδίο ορισμού $A = [-3, 1]$ **μη** συμμετρικό ως προς το O , γιατί $-2 \in A$ ενώ $2 \notin A$.

Επομένως η f **δεν** είναι άρτια συνάρτηση.

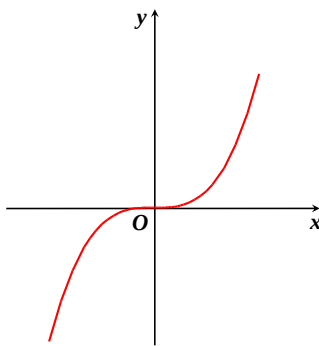
Παρατήρηση : Οι συναρτήσεις $f(x) = \text{πολυνώνιο μόνο με άρτιες δυνάμεις του } x$,
 $g(x) = \sin x$, $h(x) = |x|$, κ.λ.π. είναι **άρτιες** συναρτήσεις.

Περιττή συνάρτηση



- ♦ Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **περιττή**, όταν :
 - για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.
(δηλ. το A είναι συμμετρικό (ως προς το O) σύνολο)
 - $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in A$.
- ♦ Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι **συμμετρική καμπύλη ως προς την αρχή των αξόνων O** .

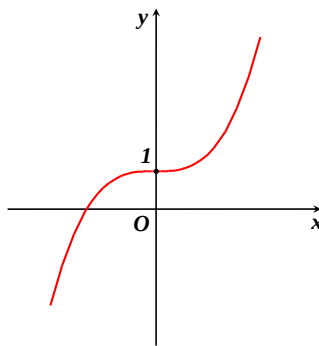
Παραδείγματα :



$$f(x) = x^3$$

- Πεδίο ορισμού
 $A = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το O .
- $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$,
για κάθε $x \in A$.

Επομένως η f είναι περιττή συνάρτηση.

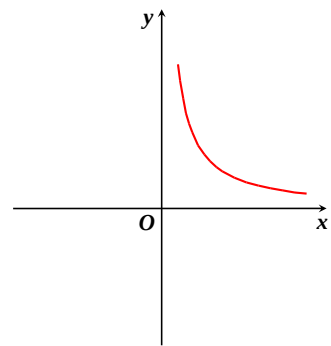


$$f(x) = x^3 + 1$$

- Πεδίο ορισμού
 $A = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το O .
- $f(-2) = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$
 $f(2) = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

$$\text{Άρα } f(-2) \neq -f(2).$$

Επομένως η f **δεν** είναι περιττή συνάρτηση.



$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

- Πεδίο ορισμού
 $A = (0, +\infty)$ **μη** συμμετρικό ως προς το O .

Επομένως η f **δεν** είναι περιττή συνάρτηση.

Παρατήρηση : Οι συναρτήσεις $f(x) = \text{πολυώνυμο μόνο με περιττές δυνάμεις του } x$,
 $g(x) = \eta\mu x$, $h(x) = \epsilon\phi x$, $\varphi(x) = \sigma\phi x$ κ.λ.π. είναι **περιττές** συναρτήσεις.

Σχόλιο : Οι «περισσότερες» συναρτήσεις δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8.

Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων και από αυτές να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών καθεμιάς :

i. $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

ii. $g(x) = \frac{xe^x + 2e^x}{x + 2}$

iii. $h(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x - x^3}$

iv. $\varphi(x) = \frac{x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}}{2x^2 - 2}$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

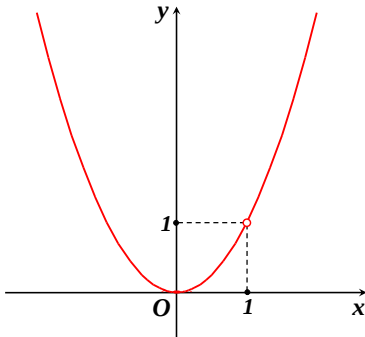
Ο τύπος της f γίνεται

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{x^2(x - 1)}{x - 1} = x^2$$

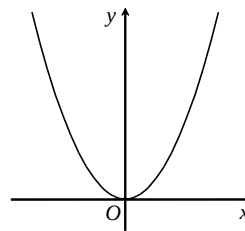
Πίνακας τιμών

x	0	①
$y = x^2$	0	①

Η γραφική παράσταση της f είναι :



Θυμίζουμε



$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση

Το “κυκλάκι” στον πίνακα τιμών (αλλά και στη γραφική παράσταση) στον αριθμό 1 σημαίνει ότι το σημείο με συντεταγμένες (1, 1) λείπει από τη γραφική παράσταση της f .

Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f(A) = [0, +\infty)$$

ii. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

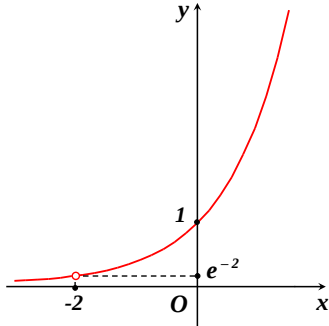
Ο τύπος της g γίνεται

$$g(x) = \frac{xe^x + 2e^x}{x + 2} = \frac{e^x(x + 2)}{x + 2} = e^x$$

Πίνακας τιμών

x	-2	0
$y = e^x$	e^{-2}	1

Η γραφική παράσταση της g είναι :

**Παρατήρηση**

Από την C_g λείπει το σημείο $A(-2, e^{-2})$.

Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της g στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της g είναι $g(A) = (0, e^{-2}) \cup (e^{-2}, +\infty)$

- iii. Πρέπει : $4x - x^3 \neq 0 \Leftrightarrow -x(x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq -2$ και $x \neq 2$

Άρα η h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

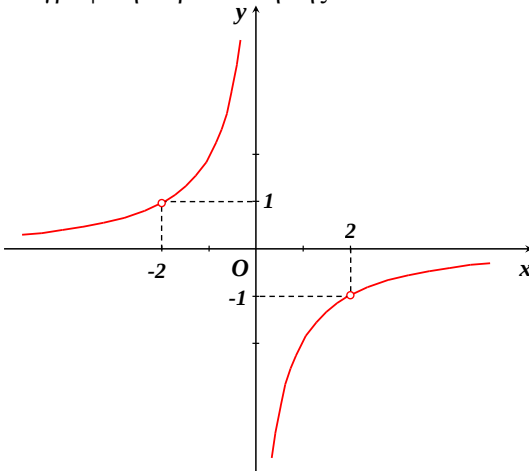
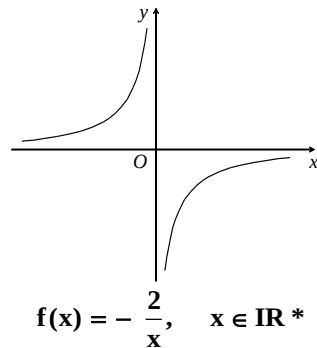
Ο τύπος της h γίνεται

$$h(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x - x^3} = \frac{2(x^2 - 4)}{-x(x^2 - 4)} = \frac{-2}{x}$$

Πίνακας τιμών

x	-2	2
$y = -\frac{2}{x}$	1	-1

Η γραφική παράσταση της h είναι :

**Θυμίζουμε**

$$f(x) = -\frac{2}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Παρατήρηση

Από την C_h λείπουν τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(2, -1)$.

Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της h στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της h είναι

$$h(A) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

iv. Πρέπει : $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2(x^2 - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \end{cases}$

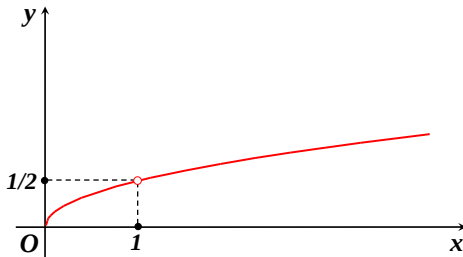
Άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ο τύπος της φ γίνεται $\varphi(x) = \frac{x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}}{2x^2 - 2} = \frac{\sqrt{x}(x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

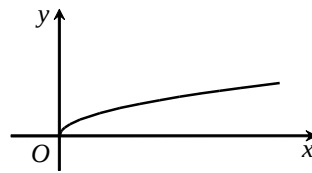
Πίνακας τιμών

x	0	①
$y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$	0	①/2

Η γραφική παράσταση της φ είναι :



Θυμίζουμε



$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

Παρατήρηση

Από την C_φ λείπει το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της φ στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της φ είναι

$$\varphi(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

9.

Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων και από αυτές να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών τους :

i. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ -x^2, & x > -1 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 1 \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ iv. $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ \eta \mu x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Λύση

i.

Πίνακες τιμών

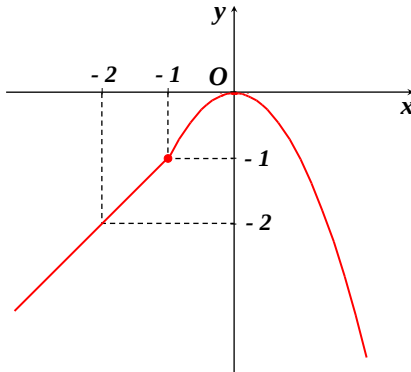
x	-2	-1
y = x	-2	-1

x	$\textcircled{-1}$	0
y = -x ²	$\textcircled{-1}$	0

Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ -x^2, & x > -1 \end{cases}$$

είναι :



Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = (-\infty, 0]$

ii.

Πίνακες τιμών

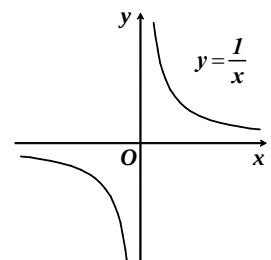
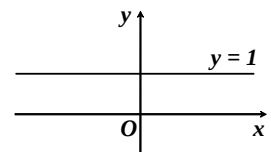
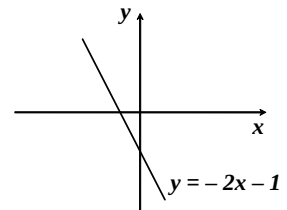
x	-1	$\textcircled{0}$
y = -2x - 1	1	$\textcircled{-1}$

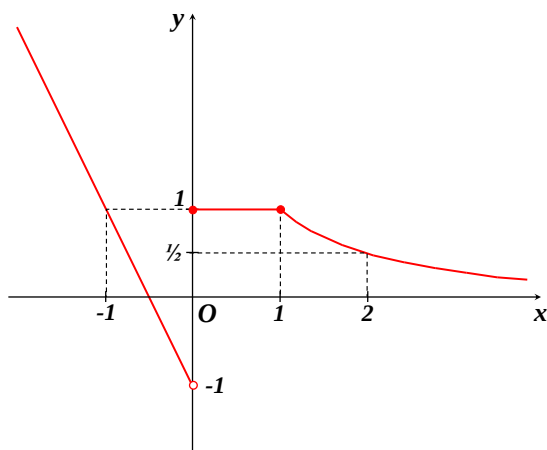
x	1	2
y = $\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$

Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι :

Θυμίζουμε



Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbf{f(A) = (-1, +\infty)}$

iii.

Πίνακες τιμών

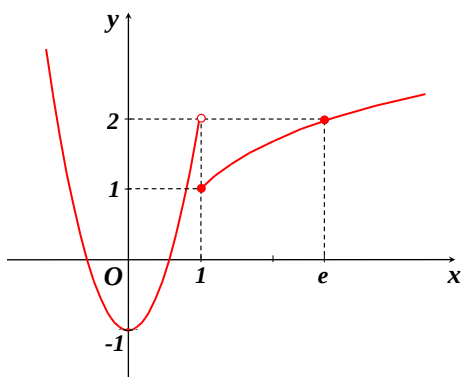
x	0	①
$y = 3x^2 - 1$	-1	②

x	1	e
$y = 1 + \ln x$	1	2

Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 1 \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι :



Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbf{f(A) = [-1, +\infty)}$

iv.

Πίνακες τιμών

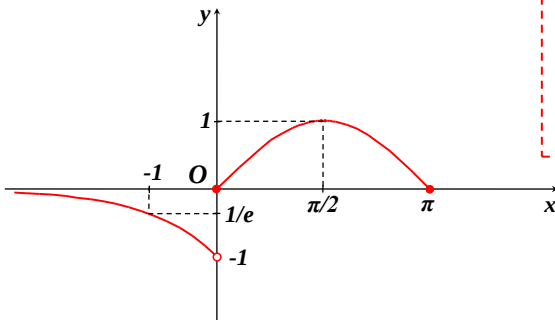
x	-1	$\textcircled{0}$
$y = -e^x$	$-1/e$	$\textcircled{-1}$

x	0	π
$y = \eta\mu x$	0	0

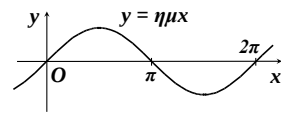
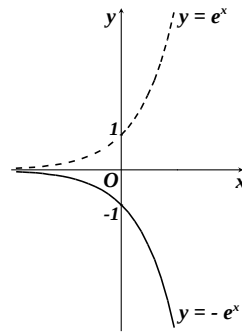
Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ \eta\mu x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

είναι :



Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = (-1, 1]$

Θυμίζουμε**10.**

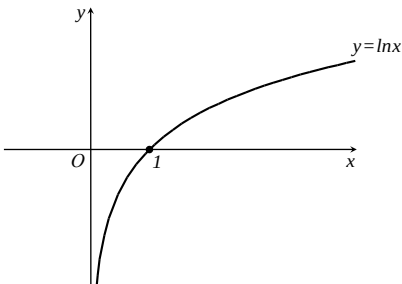
Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x) = 2 + \ln(x+1)$ ii. $f(x) = 1 - e^{x-1}$ iii. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

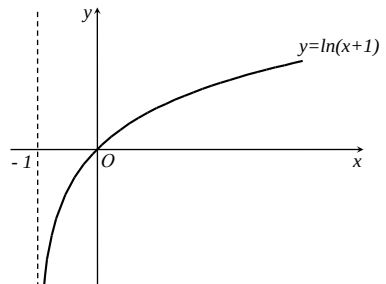
iv. $f(x) = -1 - e^{2-x}$ v. $f(x) = \ln|x|$ vi. $f(x) = |\ln x - 1|$

Λύση

i. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 + \ln(x+1)$, έχουμε :

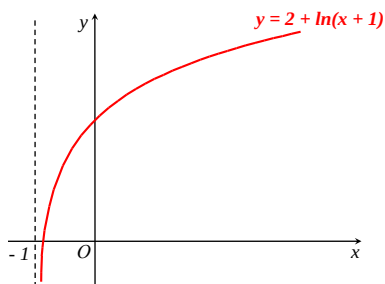


βασική συνάρτηση εκκίνησης



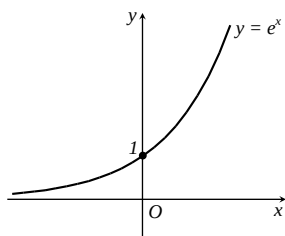
μετατόπιση αριστερά κατά 1

μετατόπιση πάνω κατά 2

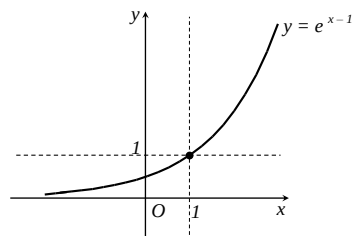


Στο τελευταίο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της f .

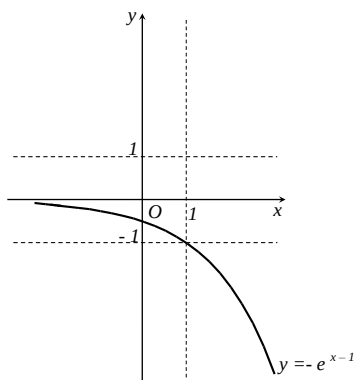
ii. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - e^{x-1}$, έχουμε :



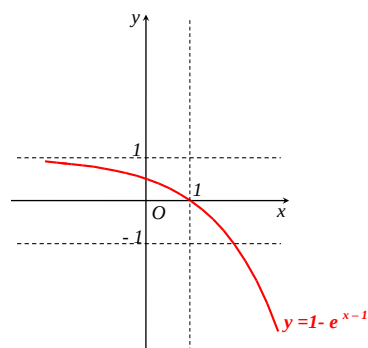
βασική συνάρτηση εκκίνησης



μετατόπιση δεξιά κατά 1



επίδραση της αντίθεσης



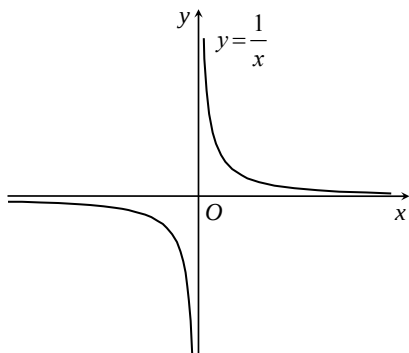
μετατόπιση πάνω κατά 1

Στο τελευταίο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της f .

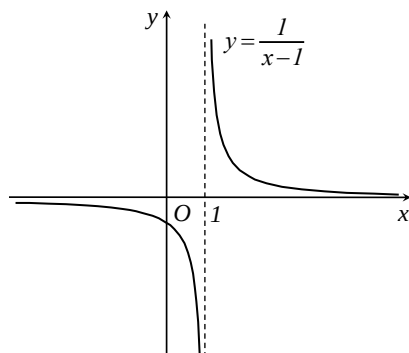
iii. Για τη γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

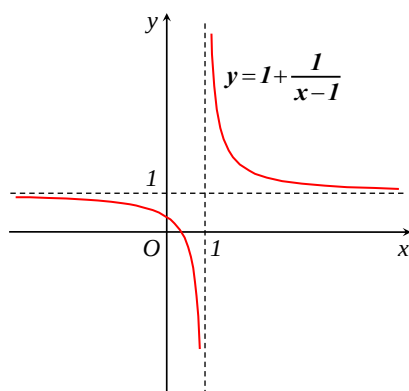
έχουμε :



βασική συνάρτηση εκκίνησης



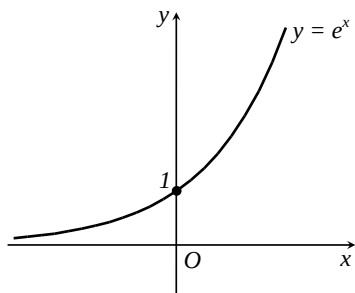
μετατόπιση δεξιά κατά 1



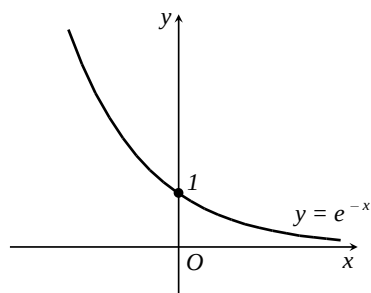
μετατόπιση πάνω κατά 1

Στο τελευταίο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της f .

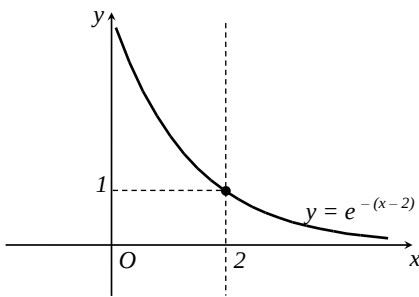
iv. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = -1 - e^{2-x} = -1 - e^{-(x-2)}$, έχουμε :



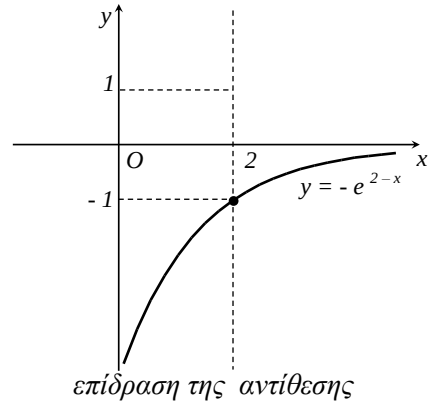
βασική συνάρτηση εκκίνησης



επίδραση της αντίθεσης

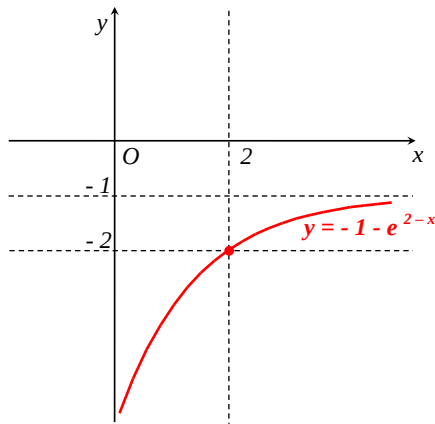


μετατόπιση δεξιά κατά 2



επίδραση της αντίθεσης

μετατόπιση κάτω κατά 1



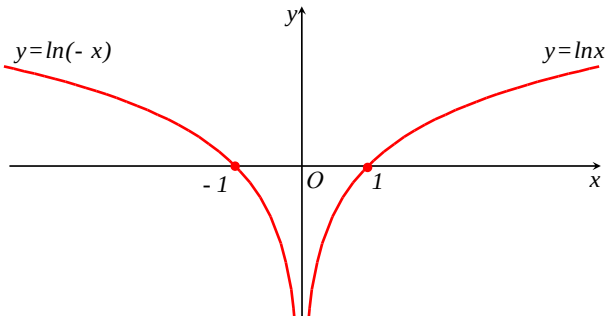
Στο τελευταίο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της f .

- v. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln|x|$, έχουμε :

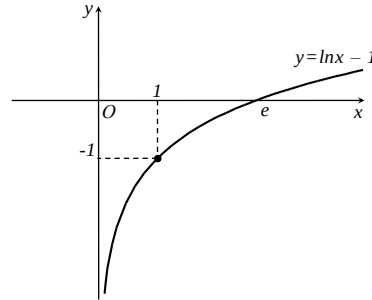
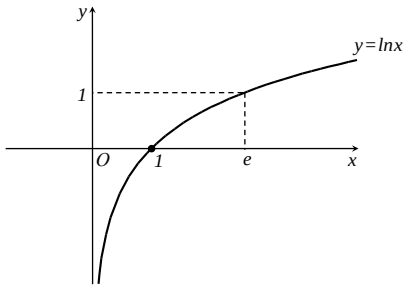
$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $y = \ln(-x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $y = \ln x$ ως προς τον άξονα $y'y$.

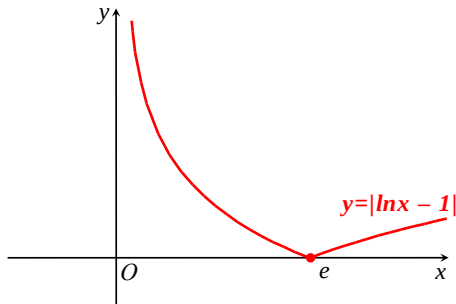
Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω.



vi. Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = |\ln x - 1|$, έχουμε :



βασική συνάρτηση εκκίνησης μετατόπιση κάτω κατά 1



επίδραση της απόλυτης τιμής

Παρατήρηση

Η f χωρίς την απόλυτη τιμή γράφεται :

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1, & \text{αν } \ln x - 1 \geq 0 \\ -\ln x + 1, & \text{αν } \ln x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \ln x - 1, & \text{αν } x \geq e \\ -\ln x + 1, & \text{αν } 0 < x < e \end{cases}$$

απ' όπου σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$y = \ln x - 1$ με $x \geq e$

και

$y = -\ln x + 1$ με $0 < x < e$

προκύπτει η γραφική παράσταση της

$$f(x) = |\ln x - 1|.$$

11.

Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων :

i. $f(x) = 1 - |x - 1|$

ii. $f(x) = 2|x - 1| - |3 - x| + 2x - 5$

Λύση

i. α' τρόπος

Η $f(x)$ γράφεται

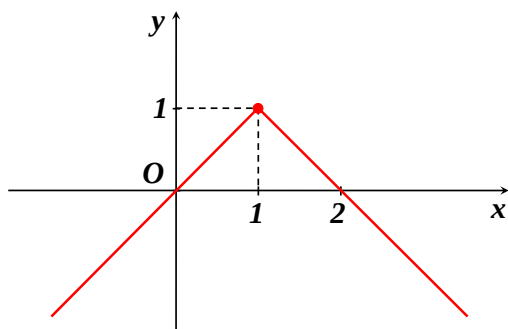
$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x - 1) & \text{αν } x - 1 \geq 0 \\ 1 - (-x + 1) & \text{αν } x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{αν } x \geq 1 \\ x & \text{αν } x < 1 \end{cases}.$$

Πίνακες τιμών

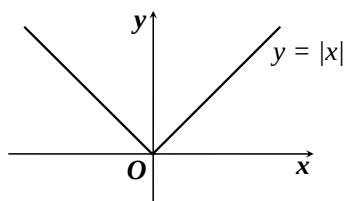
x	1	2
y = 2 - x	1	0

x	0	①
y = x	0	①

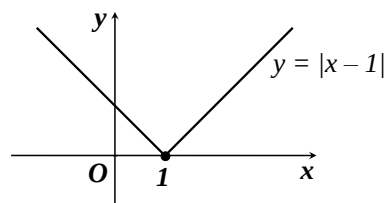
Η γραφική παράσταση της f είναι :



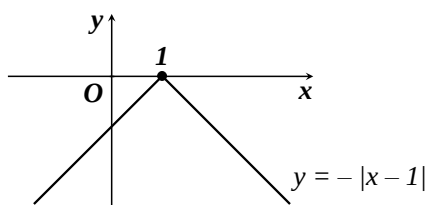
β' τρόπος



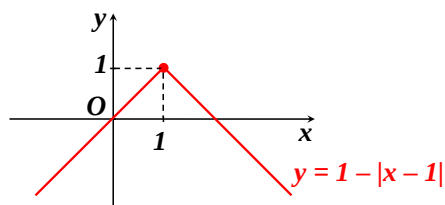
βασική συνάρτηση εκκίνησης



μετατόπιση δεξιά κατά 1



επίδραση της αντίθεσης



μετατόπιση πάνω κατά 1

ii. Είναι :

x	1		3	
x - 1	-	0	+	+
3 - x	+		+	0
				-

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $x < 1$, τότε :

$$f(x) = 2(-x + 1) - (3 - x) + 2x - 5 = -2x + 2 - 3 + x + 2x - 5 = x - 6$$

♦ Αν $1 \leq x < 3$, τότε :

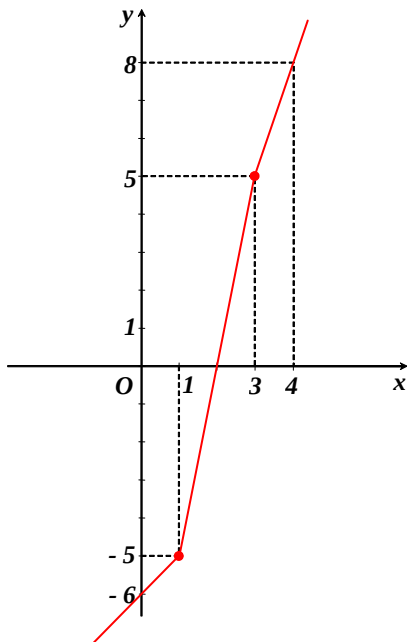
$$f(x) = 2(x - 1) - (3 - x) + 2x - 5 = 2x - 2 - 3 + x + 2x - 5 = 5x - 10$$

♦ Αν $x \geq 3$, τότε :

$$f(x) = 2(x - 1) - (-3 + x) + 2x - 5 = 2x - 2 + 3 - x + 2x - 5 = 3x - 4$$

$$\text{Οπότε : } f(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{αν } x < 1 \\ 5x - 10 & \text{αν } 1 \leq x < 3 \\ 3x - 4 & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f είναι :



Πίνακες τιμών

x	0	①
$y = x - 6$	- 6	⑤

x	1	③
$y = 5x - 10$	- 5	⑤

x	3	4
$y = 3x - 4$	5	8

12.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

iii. Να βρείτε για ποια x η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

iv. Να παρασταθεί γραφικά η f .

Λύση

i. Πρέπει $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Άρα $D_f = (1, +\infty)$

- ii. ♦ Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Άρα η C_f έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το $A(2, 0)$.

- ♦ Για να τέμνει η C_f τον άξονα $y'y$ πρέπει το 0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Αλλά $0 \notin D_f$, επομένως η C_f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

- iii. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) < 0 \\ x \in D_f \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1) < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1) < \ln 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για όλα τα $x \in (1, 2)$.

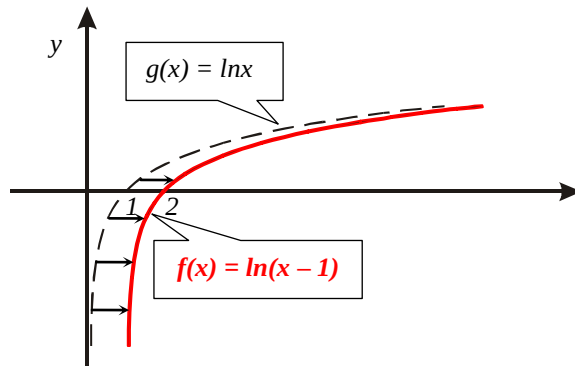
- iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$.

Είναι φανερό ότι $f(x) = g(x-1)$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g προς τα δεξιά κατά μία μονάδα.

Παρατηρήσεις

- ♦ Για να βρούμε τις τεταγμένες των σημείων που τέμνει η C_f τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, με $x \in D_f$ (Θέτουμε $y = 0$)
- ♦ Για να βρούμε την τεταγμένη του σημείου όπου η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης $x = 0$, εφόσον $0 \in D_f$. Τότε το κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, f(0))$.
- ♦ Για να βρούμε τις τεταγμένες των σημείων που είναι «πάνω» από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ με $x \in D_f$.
- ♦ Για να βρούμε τις τεταγμένες των σημείων που είναι «κάτω» από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$ με $x \in D_f$.



13.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Να βρείτε :

i. τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

ii. τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g .

Λύση

- i. Οι f και g έχουν πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$

Είναι :

$$f(-1) = g(-1) = 1 \quad f(2) = g(2) = 10$$

$$f(-2) = g(-2) = 2$$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $A(-1, 1)$, $B(2, 10)$ και $\Gamma(-2, 2)$.

- ii. Λύνουμε την ανίσωση :

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x - 2 > x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4) > 0$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \text{ με } x \in D_f \cap D_g$$

Επομένως οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης :

$$f(x) = g(x) \text{ με } x \in D_f \cap D_g$$

- ♦ Για να βρούμε για ποια x η C_f βρίσκεται «πάνω» από την C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$ με $x \in D_f \cap D_g$.
- ♦ Για να βρούμε για ποια x η C_f βρίσκεται «κάτω» από την C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$ με $x \in D_f \cap D_g$.

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$		
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
Γινόμενο	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Συνεπώς στα διαστήματα $(-2, -1)$ και $(2, +\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

14.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) = g(x) + \ln x - 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών τους παραστάσεων.

Λύση

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = g(x) + \ln x - 1 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \ln x - 1$$

Έστω $\delta(x) = \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$.

Είναι :

- ♦ $\delta(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$
 $\Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$
- ♦ $\delta(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow 0 < x < e$

Επομένως :

- ♦ Όταν $x > e$ είναι
 $\delta(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
 και συνεπώς η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .
- ♦ Όταν $0 < x < e$ είναι
 $\delta(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
 και συνεπώς η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g .

Παρατήρηση

Η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων C_f , C_g των συναρτήσεων f και g μπορεί να βρεθεί μελετώντας το πρόσημο της διαφοράς

$$\delta(x) = f(x) - g(x), \text{ με } x \in D_f \cap D_g.$$

Έτσι :

- Αν $\delta(x) > 0$ για κάθε x ενός διαστήματος Δ , τότε στο Δ η C_f είναι ψηλότερα από την C_g .
- Αν $\delta(x) < 0$ για κάθε x ενός διαστήματος Δ , τότε στο Δ η C_f είναι χαμηλότερα από την C_g .

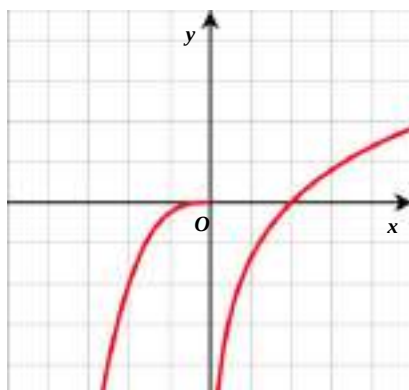
15.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

- i. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f
- ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση

- i. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της της καμπύλης $y = x^3$ με $x \leq 0$ και τα σημεία της καμπύλης $y = \ln x$ με $x > 0$.



- ii. Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το :

$$f(A) = \mathbb{R}$$

- iii. Παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = \kappa$

έχει :

- ακριβώς δύο κοινά σημεία με την C_f , αν $\kappa \in (-\infty, 0]$
- ακριβώς ένα κοινό σημείο με την C_f , αν $\kappa \in (0, +\infty)$

Δηλαδή

- ♦ Αν $\kappa \in (-\infty, 0]$ η εξίσωση

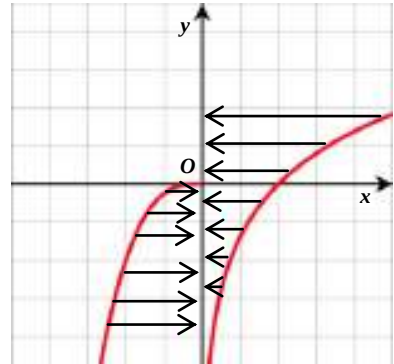
$$f(x) = \kappa$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες.

- ♦ Αν $\kappa \in (0, +\infty)$ η εξίσωση

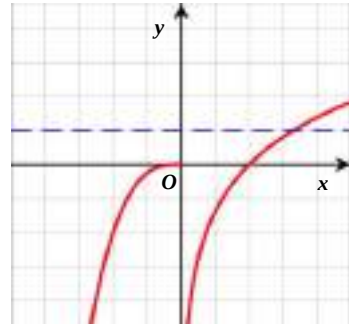
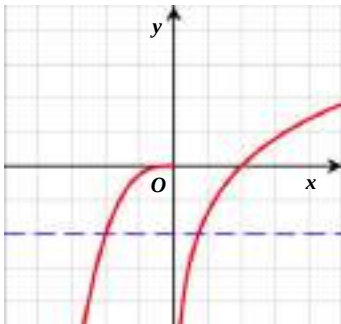
$$f(x) = \kappa$$

έχει ακριβώς μια ρίζα.



Παρατήρηση

Η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς τόσες ρίζες όσα είναι τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = \kappa$.



Α σ κ ή σ ε ι ς

19. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

ii. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{4 - 2x}$

iii. $f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 3x}$

iv. $f(x) = \frac{x^5 - x^3}{x^2 - 1}$

v. $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + x^2}$

vi. $f(x) = \frac{x^3 \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^3 - 1}$

vii. $f(x) = \frac{x^2 e^x - x e^x}{x^2 - x}$

viii. $f(x) = \frac{x \ln x - e \ln x}{x - e}$

20. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και από αυτές να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών τους :

i. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 2 \\ -4x + 12, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ \frac{6}{x}, & x > 2 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \sqrt{x}, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1] \\ \ln x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

v. $f(x) = \begin{cases} 2 + x, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases}$

vi. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ e^x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$

21. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις με τύπους :

i. $f(x) = \sqrt{x} + 3$

ii. $f(x) = \sqrt{x + 3}$

iii. $f(x) = 1 - \frac{4}{x}$

iv. $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

v. $f(x) = \frac{3x - 1}{2x}$

vi. $f(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$

vii. $f(x) = 2 + (x - 2)^2$

viii. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

ix. $f(x) = 2 + e^{x+1}$

x. $f(x) = 2 - e^{x-1}$

xi. $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

xii. $f(x) = 3 - \ln(x - 1)$

22. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και από αυτές να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών τους :

i. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 2 \\ x^2 - 5, & x > 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \sqrt{2} \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} 2 - e^x, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \leq -1 \\ x^2 + 1 & , \quad -1 < x < 2 \\ 10 - \frac{5}{2}x & , \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{vi. } f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & , \quad x \leq 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \leq 1 \\ -\ln x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

23. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$\text{i. } f(x) = \frac{3}{|x|} \quad \text{ii. } f(x) = |x^3| \quad \text{iii. } f(x) = |(x+1)^3 - 1| \quad \text{iv. } f(x) = |\eta\mu x|$$

$$\text{v. } f(x) = |e^x - 1| \quad \text{vi. } f(x) = e^{|x|} \quad \text{vii. } f(x) = |e^{x-1} - 2|$$

$$\text{viii. } f(x) = |\ln(x-1)| \quad \text{ix. } f(x) = \sqrt{|x-1|} \quad \text{x. } f(x) = \frac{|1-x^2|}{x^2}$$

24. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 1$.

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\text{i. } y = f(x) \quad \text{ii. } y = -f(x) \quad \text{iii. } y = f(-x) \quad \text{iv. } y = -f(-x) \quad \text{v. } y = |f(x)|$$

25. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και από αυτές να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών τους :

$$\text{i. } f(x) = -2|x-1| + 3 \quad \text{ii. } f(x) = |x+2| + |x-1|$$

26. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} ax^2 & , \quad x \leq 1 \\ \beta\sqrt{x} - 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$ διέρχεται

από τα σημεία $A(-1, 1)$ και $B(4, 3)$ να χαράξετε την C_f .

27. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 - \ln(1+x)$. Να βρείτε :

i. Τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. Το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

28. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln(x+2) - 1$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

29. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 9x + 20$ να είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 + 5x - 4$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2-\alpha)x^2 - (\alpha+3)x + \alpha^2 - 5$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, -6)$, να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και του άξονα $x'x$.

31. Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$ για κάθε $x \in A$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

32. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + x^2 + x$ και $g(x) = x^2 + 8x - 6$ και να αποδείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου του οποίου να βρείτε το εμβαδόν.

33. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = ax + \beta$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii. Αν οι C_f και C_g τέμνονται στην ευθεία $\varepsilon: x = 1$ και η C_g διέρχεται από

το σημείο $A(-1, 3)$, να βρείτε τα α και β .

- 34.** Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g όταν :

$$f(x) = 2\ln x + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln^2 x + \ln x + 1$$

- 35.** Έστω οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = g(x) + x^2 - 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεών τους.

- 36.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon: 6x - y - 4 = 0$.

Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και ε .

- 37.** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει γραφική παράσταση η οποία είναι παραβολή.

Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(2, 0)$ να βρείτε:

i. τον τύπο της f .

ii. τα κοινά σημεία της C_f και του άξονα $x'x$.

iii. τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

- 38.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $A = (-3, +\infty)$ και σύνολο

τιμών το διάστημα $f(A) = (-\infty, 1)$.

i.. Αν ισχύει η σχέση $f^2(-2) - f(-2) - 6 = 0$, να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$.

ii. Αν για μια συνάρτηση h ισχύει η σχέση $h(-5) = 2$, να αποδείξετε ότι $f \neq h$.

- 39.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Να αποδείξετε ότι :

i. η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

ii. η f είναι περιττή.

iii. η C_f έχει με τον $x'x$ μόνο ένα κοινό σημείο.

- 40.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f^3(x) - \alpha f^2(x) + \beta^2 f(x) = -x^2 + x - 3$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $0 < \alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

- 41.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

- 42.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha \ln x + \beta, & x > 0 \\ \alpha e^x - \beta, & x \leq 0 \end{cases}$

Αν $f(0) = -2$ και $f(1) = 3$, να βρείτε :

i. Το πεδίο ορισμού της f και τις τιμές των α και β .

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Άθροισμα : $f + g$	Πεδίο Ορισμού : $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
	Τύπος : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Διαφορά : $f - g$	Πεδίο Ορισμού : $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
	Τύπος : $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Γινόμενο : $f \cdot g$	Πεδίο Ορισμού : $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
	Τύπος : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Πηλίκο : $\frac{f}{g}$	Πεδίο Ορισμού : $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$
	Τύπος : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
Παρατήρηση :	Όλες οι παραπάνω πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων f και g ορίζονται με την προϋπόθεση ότι $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g - f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{f}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Το πεδίο ορισμού της g είναι : $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Έχουμε : $D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- ♦ Για την $g - f$ έχουμε :

Πεδίο ορισμού :

$$D_{g-f} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Τύπος:

$$\begin{aligned}(g-f)(x) &= g(x) - f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = \\ &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x+2-(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x+2-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2-1}\end{aligned}$$

Άρα

$$(g-f)(x) = \frac{1}{x^2-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

- ♦ Για την $\frac{f}{g}$ έχουμε :

Πρέπει (επιπλέον) :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} \neq 0 \Leftrightarrow x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

Οπότε :

Πεδίο ορισμού : $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$

Τύπος:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x+2}{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$$

Άρα
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}.$$

- ♦ Για την $\frac{1}{f}$ πρέπει : $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \neq 0$, ισχύει

Άρα :

Πεδίο ορισμού : $D_{\frac{1}{f}} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Τύπος:
$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = x-1$$

Άρα
$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = x-1, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Παρατηρήσεις

- ♦ Για να ορίζεται οποιαδήποτε από τις πράξεις άθροισμα, διαφορά, γινόμενο ή πηλίκο μεταξύ δύο συναρτήσεων f και g πρέπει να υπάρχει **κοινό διάστημα ορισμού** αυτών (στο οποίο και γίνονται οι πράξεις αυτές) δηλαδή :

$$D_f \cap D_g \neq \emptyset$$

Αν $D_f \cap D_g = \emptyset$ τότε δεν

ορίζεται καμία από τις παραπάνω πράξεις.

- ♦ Η απλοποίηση των τύπων στις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων γίνεται μετά την εύρεση του πεδίου ορισμού τους. Γι' αυτό στις πράξεις με συναρτήσεις πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και μετά τον τύπο τους.

17.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x-1}}{1 - \sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{2 - x}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$ και $f \cdot g$.

Λύση

- Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-\sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \neq 1 \end{cases} \begin{matrix} \sqrt{x-1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ 1 \geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Άρα $D_f = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

- Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Άρα $D_g = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Είναι $D_f \cap D_g = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

- ♦ Για την $f + g$ έχουμε :

Πεδίο ορισμού : $D_{f+g} = [1, 2) \cup (2, +\infty)$

Τύπος :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} \\ &= \frac{(1+\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \frac{(1+\sqrt{x-1})^2}{1^2-(\sqrt{x-1})^2} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} \\ &= \frac{1+2\sqrt{x-1}+(\sqrt{x-1})^2}{1-(x-1)} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \frac{1+2\sqrt{x-1}+x-1}{1-x+1} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2-x} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \frac{x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \frac{2x}{2-x} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (f+g)(x) = \frac{2x}{2-x}, \quad x \in [1, 2) \cup (2, +\infty).$$

- ♦ Για την $f \cdot g$ έχουμε :

Πεδίο ορισμού : $D_{f \cdot g} = [1, 2) \cup (2, +\infty)$

Τύπος :

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = \frac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}} \cdot \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \\ &= \frac{(1+\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})} \cdot \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \frac{(1+\sqrt{x-1})^2}{1-(\sqrt{x-1})^2} \cdot \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+2\sqrt{x-1}+x-1}{1-x+1} \cdot \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \\
&= \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2-x} \cdot \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x} = \frac{(x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})}{(2-x)(2-x)} = \\
&= \frac{x^2 - (2\sqrt{x-1})^2}{(2-x)^2} = \frac{x^2 - 4(x-1)}{4-4x+x^2} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} = 1
\end{aligned}$$

Άρα $(f \cdot g)(x) = 1, \quad x \in [1, 2) \cup (2, +\infty).$

18.

Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$[(f+g)(x)]^2 - 2a(f+g)(x) \leq 2[(fg)(x) - a^2],$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά).

Να αποδείξετε ότι $f=g$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
&[(f+g)(x)]^2 - 2a(f+g)(x) \leq 2[(fg)(x) - a^2] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [f(x) + g(x)]^2 - 2a[f(x) + g(x)] \leq 2[f(x)g(x) - a^2] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x) - 2af(x) - 2ag(x) \leq 2f(x)g(x) - 2a^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [f^2(x) - 2af(x) + a^2] + [g^2(x) - 2ag(x) + a^2] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [f(x) - a]^2 + [g(x) - a]^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{matrix} (f(x)-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ (g(x)-a)^2 \geq 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} [f(x)-a]^2 = \\ \text{και} \\ [g(x)-a]^2 = 0 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} f(x)-a=0 \\ \text{και} \\ g(x)-a=0 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} f(x)=a \\ \text{και} \\ g(x)=a \end{matrix} \right. \Leftrightarrow f(x)=g(x)=a
\end{aligned}$$

Επομένως οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Άρα $f=g$.

Ασκήσεις

43. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$.

44. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ και $g(x) = \frac{x^2-1}{4-x^2}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις fg και $\frac{f}{g}$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-x-2}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \ln(1-x)$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(x-a)$.

i. Να βρεθεί το θετικό ακέραιο a , ώστε οι δύο συναρτήσεις να έχουν το ευρύτερο δυνατό κοινό πεδίο ορισμού.

ii. Μετά να βρείτε τις συναρτήσεις $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$.

48. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ και $g(x) = \sqrt{1-e^x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις :

i. $f - g$ ii. $f \cdot g$ iii. $g^2 - \frac{1}{f}$

49. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = \ln(e - e^x)$.

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f , g .

ii. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$, $\frac{f}{g}$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \frac{2x}{x+1}$ και $g(x) = \ln(x+1)$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. $f + g$ ii. $f - g$ iii. $f \cdot g$ iv. $\frac{f}{g}$

- 51.** Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει

$$(f + g)(x)[(f + g)(x) + 4] = 2[(fg)(x) - 4], \quad \text{για κάθε } x \in A$$

να αποδείξετε ότι είναι ίσες.

- 52.** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ και για κάθε

$$x \in A \text{ ισχύει } (f + g)(x)[(f + g)(x) - 10] \leq 2[(f \cdot g)(x) - 25]$$

να αποδείξετε ότι $f = g$.

- 53.** Αν για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$[(f + g)(x)]^2 - 4(f - g)(x) = 2[(f \cdot g)(x) - 4], \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι οι f και g είναι σταθερές συναρτήσεις.

- 54.** Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει

$$[(f - g)(x)]^2 = 2[(f - g)(x) - (fg)(x) - 1], \quad \text{για κάθε } x \in A$$

να αποδείξετε ότι $g = -f$.

- 55.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$(f - g)^2(x) + 4(f \cdot g)(x) \leq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

- 56.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και } g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

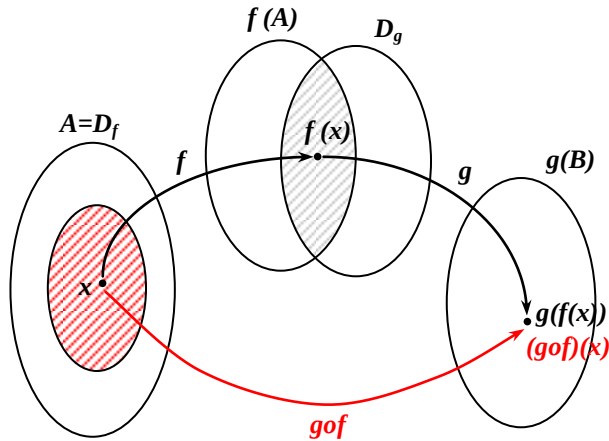
Να βρείτε τις συναρτήσεις :

- i.** $f + g$, **ii.** $f \cdot g$, **iii.** $\frac{f}{g}$.

Σύνθεση συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα. Ορίζουμε ως σύνθεση της f με την g και την συμβολίζουμε με $g \circ f$ μια συνάρτηση με :

- ♦ Πεδίο ορισμού : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} \neq \emptyset$
- ♦ Τύπο : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Παρατηρήσεις :

1. Αν το σύνολο $\{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$ είναι το κενό, τότε **δεν** ορίζεται η $g \circ f$.
2. **Προσοχή!** Γράφουμε $g \circ f$, αλλά διαβάζουμε σύνθεση της f με την g .
3. Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ **δεν** είναι υποχρεωτικά ίσες. Δηλαδή για την πράξη της σύνθεσης **δεν** ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.
4. Αν είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$, τότε ορίζονται πάντα οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ με $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.
5. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται μια από τις $h \circ (g \circ f)$ και $(h \circ g) \circ f$, τότε ορίζεται και η άλλη και **ισχύει** :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ (προσεταιριστική ιδιότητα)}$$

Τη συνάρτηση $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ θα τη λέμε σύνθεση των f, g και h και θα την συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$.

19.

Να βρείτε (αν ορίζονται) τις συναρτήσεις :

- i.** **gof** **ii.** **fog** **iii.** **fof**

Λύση

Πεδίο ορισμού f : $D_f = [7, +\infty)$

Πεδίο ορισμού g : $D_g = \mathbb{R}$

- i.** Για την **gof(σύνθεση της f με την g)** έχουμε

Πεδίο ορισμού gof :

$$\begin{aligned} \overline{D_{\text{gof}}} &= \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \geq 7 / \sqrt{x-7} \in \mathbb{R}\} = [7, +\infty) \end{aligned}$$

Τύπος της gof :

$$\begin{aligned}(\text{gof})(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{x-7}) = \\ &= (\sqrt{x-7})^2 - 2 = x - 7 - 2 = x - 9\end{aligned}$$

Επομένως $(\text{gof})(x) = x - 9, \quad x \in [7, +\infty)$

- ii.** Για την **fog**(σύνθεση της **g** με την **f**)έχουμε

Πεδίο ορισμού fog :

$$\begin{aligned} D_{\text{fog}} &= \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \geq 7\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 9\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \vee x \geq 3\} = \\ &= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

Τύπος της fog:

$$\begin{aligned}(\text{fog})(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2} - 7 = \\ &= \sqrt{x^2 - 9} . \text{ Επομένως}\end{aligned}$$

$$(\text{fog})(x) = \sqrt{x^2 - 9}, \quad x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

- iii.** Για την fof (σύνθεση της f με τον εαυτό της) έχουμε:

Πεδίο ορισμού fof :

$$\begin{aligned} D_{\text{fof}} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \geq 7 \mid \sqrt{x-7} \geq 7\} = \\ &= \{x \geq 7 \mid (\sqrt{x-7})^2 \geq 7^2\} = \{x \geq 7 \mid x-7 \geq 49\} = \end{aligned}$$

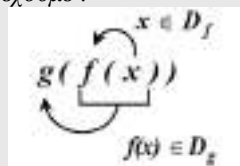
Τύπος της fof:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x-7}) = \sqrt{\sqrt{x-7}-7}$$

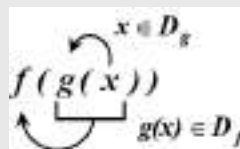
Επομένως $(\mathbf{f} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \sqrt{\sqrt{\mathbf{x}-7}-7}, \quad \mathbf{x} \in [56, +\infty)$

Παρατηρήσεις

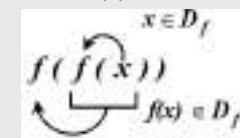
- ♦ Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης δύο συναρτήσεων **δεν** προκύπτει από τον τελικό τύπο της σύνθεσης, αλλά από τις αρχικές συνθήκες. Γι' αυτό **πρώτα** βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας σύνθεσης και μετά τον τύπο της.
- ♦ Για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$, στηριζόμενοι στον τύπο της, έχουμε :



- ♦ Για το D_{fog} έχουμε :



- ♦ Για το $D_{f \circ f}$ έχουμε :



Εύρεση παραμέτρων

20.

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε για τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha x + 1$, $g(x) = \beta x - 2$, να ισχύει $f \circ f = g$.

Λύση

Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Οπότε $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$. Επίσης

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\alpha x + 1) = \alpha(\alpha x + 1) + 1 = \alpha^2 x + \alpha + 1$$

Για να είναι $f \circ f = g$ πρέπει και αρκεί :

♦ $D_{f \circ f} = D_g$ που ισχύει αφού $D_g = \mathbb{R}$ και

♦ $(f \circ f)(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha^2 x + \alpha + 1 = \beta x - 2$ **(1)** για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η **(1)** ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \alpha^2 = \beta \\ \alpha + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \beta \\ \alpha = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 9 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

Εύρεση συνάρτησης από γνωστή σύνθεση.

21.

Αν $f(x) = 1 + e^x$ και $(g \circ f)(x) = x + e^{1-x}$, να ορίσετε τη συνάρτηση g .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) = 1 + e^x$$

και

$$g(f(x)) = x + e^{1-x}$$

Επομένως είναι :

$$g(1 + e^x) = x + e^{1-x} \quad \textbf{(1)}$$

Αν θέσουμε

$$1 + e^x = y$$

τότε προκύπτει

$$e^x = y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(y - 1)$$

με $y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$.

Οπότε η **(1)** γίνεται :

$$g(y) = \ln(y - 1) + e^{1 - \ln(y - 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(y) = \ln(y - 1) + \frac{e}{e^{\ln(y - 1)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(y) = \ln(y - 1) + \frac{e}{y - 1}, \text{ με } y > 1$$

ή ισοδύναμα

$$g(x) = \ln(x - 1) + \frac{e}{x - 1}, \quad x > 1$$

22.

Μεθοδολογία

Όταν δίνονται

• η σύνθεση $(f \circ g)(x) = h(x)$ **(1)**

• η συνάρτηση $g(x)$

και ζητείται ο τύπος της f

τότε

θέτουμε $g(x) = y$, λύνουμε ως προς x και

αντικαθιστώντας στην **(1)** παίρνουμε

$f(y) =$ παράσταση με μεταβλητή το y

Στη συνέχεια βάζουμε όπου y το x αφού στον τύπο μιας συνάρτησης f μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή

οποιοδήποτε γράμμα. Συνεπώς οι τύποι

$$g(y) = \ln(y - 1) + \frac{e}{y - 1}, \quad y > 1$$

και

$$g(x) = \ln(x - 1) + \frac{e}{x - 1}, \quad x > 1$$

εκφράζουν την ίδια συνάρτηση g .

Αν $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = e^{2x-3}$ να βρείτε τον τύπο της g .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1$$

$$f(g(x)) = x^2 + 1$$

$$e^{2g(x)-3} = x^2 + 1$$

$$2g(x) - 3 = \ln(x^2 + 1)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} [3 + \ln(x^2 + 1)]$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνονται

- η σύνθεση $(f \circ g)(x) = h(x)$

- η συνάρτηση $f(x)$

και ζητείται ο τύπος της g τότε

επιλύουμε την εξίσωση $f(g(x)) = h(x)$ ως προς $g(x)$.

23.

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει $(g \circ f)(x) = |\epsilon f x|$ αν $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Λύση

Έχουμε :

$$g(f(x)) = |\epsilon f x|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x) - 1} = |\epsilon f x|$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f^2(x) - 1} \right)^2 = |\epsilon f x|^2$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 1 = \epsilon f^2 x$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \epsilon f^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} + 1$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \frac{\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = \frac{1}{|\sigma \upsilon \nu x|}$$

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση είναι η

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x},$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

Παρατήρηση

♦ Από τη σχέση $|f(x)| = \left| \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} \right|$ δεν έχουμε ως συμπέρασμα ότι οι μόνες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της άσκησης είναι οι

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{και}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\sigma \upsilon \nu x}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

Το πλήθος των συναρτήσεων είναι άπειρο.

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την οικογένεια των

$$\text{συναρτήσεων } f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x}, & x < \lambda \text{ και } x \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\sigma \upsilon \nu x}, & x \geq \lambda \text{ και } x \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

τότε η f_λ ικανοποιούν τη σχέση $|f(x)| = \left| \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} \right|$ και

φυσικά το πλήθος τους είναι άπειρο αφού άπειρες είναι οι τιμές του λ .

♦ Γενικά αν $|f(x)| = |g(x)|$ για κάθε $x \in A$ δεν ισχύει ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$ ή $f(x) = -g(x)$, για κάθε $x \in A$.

♦ Ομοίως αν για τις συναρτήσεις f, g έχουμε $f(x)g(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ δεν έχουμε ως συμπέρασμα ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ αφού υπάρχουν συναρτήσεις που το γινόμενο τους είναι μηδενική συνάρτηση χωρίς καμία τους να είναι η μηδενική συνάρτηση.

$$\text{π.χ. } f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και } g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

« Αποσύνθεση » συναρτήσεων

24.

Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν :

i. $f(x) = e^{2x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = \eta\mu^2(\ln x), \quad x > 0$

Λύση

i. α' τρόπος

$$f(x) = e^{2x} + 1 \begin{cases} g(x) = e^x + 1 \\ h(x) = 2x \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι :

$$g(h(x)) = g(2x) = e^{2x} + 1 = f(x)$$

Άρα $f = goh$ όπου

$$g(x) = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β' τρόπος

$$f(x) = e^{2x} + 1 \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ h(x) = e^x \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι : $g(h(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1 = f(x)$

Άρα $f = goh$ όπου

$$g(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ii. } f(x) = \eta\mu^2(\ln x) = (\eta\mu(\ln x))^2 \begin{cases} g(x) = x^2 \\ h(x) = \eta\mu(\ln x) \end{cases} \begin{cases} t(x) = \eta\mu x \\ \varphi(x) = \ln x \end{cases}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$g(t(\varphi(x))) = g(t(\ln x)) = g(\eta\mu(\ln x)) = (\eta\mu(\ln x))^2 = \eta\mu^2(\ln x) = f(x)$$

Άρα $f = goh = go(t \circ \varphi) = go \circ t \circ \varphi$, όπου :

$$g(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \ln x, \quad x > 0$$

Συναρτησιακές σχέσεις.

25.

A. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει την ιδιότητα $2f(x) - f(1-x) = x^2 + 2x - 1$.

B. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + x - 2 \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Λύση

- A.** Θέτουμε όπου το x το $1-x$ στη δοθείσα σχέση και παίρνουμε :
- $$2f(1-x) - f(x) = (1-x)^2 + 2(1-x) - 1$$
- $$\Leftrightarrow 2f(1-x) - f(x) = x^2 - 4x + 2$$
- Οπότε :
- $$\begin{cases} 2f(1-x) - f(x) = x^2 - 4x + 2 \\ 2f(x) - f(1-x) = x^2 + 2x - 1 \end{cases} \cdot 2$$
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(1-x) - f(x) = x^2 - 4x + 2 \\ 4f(x) - 2f(1-x) = 2x^2 + 4x - 2 \end{cases}$$
- Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε :
- $$3f(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2$$
- Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή διότι επαληθεύει τη δοθείσα σχέση.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συναρτησιακή σχέση της μορφής :

$$\kappa f(x) + \lambda f(a-x) = \mu$$

και ζητείται ο τύπος της f , θέτουμε

$$\text{όπου } x \text{ το } a-x.$$

Προκύπτει έτσι μια νέα σχέση η οποία περιέχει τα $f(x)$ και $f(a-x)$.

Η σχέση αυτή μαζί με την αρχική δημιουργούν ένα σύστημα με "αγνώστους" τα $f(x)$ και $f(a-x)$ απ' όπου βρίσκουμε το $f(x)$.

- B.** Στη σχέση

$$xf(x) - (1+x)f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + x - 2 \quad (1)$$

θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x+1}{x} f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) - (x+1)f(x) = \frac{1}{x} + 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = (x+1)f(x) + \frac{1}{x} + 1 - 2x$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε

$$xf(x) - (1+x)\left[\left(x+1\right)f(x) + \frac{1}{x} + 1 - 2x\right] = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow xf(x) - (1+x)^2 f(x) - \frac{1+x}{x} - (1+x) + 2x(1+x) = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left[x - (x^2 + 2x + 1)\right] - \frac{1+x}{x} - 1 - x + 2x + 2x^2 = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow f(x)(x - x^2 - 2x - 1) - \frac{1+x}{x} - 1 - x + 2x^2 = x^2 + x - 2$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συναρτησιακή σχέση της

$$\text{μορφής } \kappa f(x) + \lambda f\left(\frac{1}{x}\right) = \mu$$

θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ προκύπτει

μια νέα σχέση η οποία περιέχει τα

$$f(x) \text{ και } f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Η σχέση αυτή μαζί με την αρχική δημιουργούν ένα σύστημα με

"αγνώστους" τα $f(x)$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)$ απ' όπου βρίσκουμε το $f(x)$.

$$\Leftrightarrow f(x)(-x^2 - x - 1) = \frac{1+x}{x} - x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x)(-x^2 - x - 1) = \frac{1+x-x^3-x}{x} \Leftrightarrow f(x)(-x^2 - x - 1) = \frac{-x^3+1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -f(x)(x^2+x+1) = \frac{-(x^3-1)}{x} \quad x^2+x+1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3-1}{x(x^2+x+1)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή διότι επαληθεύει τη δοθείσα σχέση.

26.

Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα :

$$f(x-2) + 2f(3-x) = 11 - 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2f(1-x) = 7 - 2x$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1-x) + 2f(x) = 5 + 2x$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x-2) + 2f(3-x) = 11 - 2x$

Αν θέσουμε όπου x το $x+2$ παίρνουμε :

$$f(x+2-2) + 2f(3-x-2) = 11 - 2x - 4 \Leftrightarrow f(x) + 2f(1-x) = 7 - 2x \quad (1)$$

ii. Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $1-x$, οπότε παίρνουμε

$$f(1-x) + 2f(1-1+x) = 7 - 2(1-x) \Leftrightarrow f(1-x) + 2f(x) = 7 - 2 + 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(1-x) + 2f(x) = 5 + 2x.$$

iii. Έχουμε

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 7 - 2x \\ f(1-x) + 2f(x) = 5 + 2x \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 7 - 2x \\ -2f(1-x) - 4f(x) = -10 - 4x \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$f(x) + 2f(1-x) - 2f(1-x) - 4f(x) = 7 - 2x - 10 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3f(x) = -3 - 6x \Leftrightarrow f(x) = 2x + 1$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή διότι επαληθεύει τη δοθείσα σχέση.

27.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x+y) = xf(y) + yf(x) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$,

ii. η f είναι άρτια.

Λύση

i. Από την υπόθεση έχουμε:

$$f(x+y) = xf(y) + yf(x) \quad (1)$$

Επειδή η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x = y = 0$, οπότε παίρνουμε:

$$f(0) = 0 \cdot f(0) + 0 \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

ii. Για να είναι η f άρτια, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Στην (1) θέτουμε όπου y το $-x$ και παίρνουμε:

$$f(x-x) = xf(-x) + (-x)f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(0) = xf(-x) - xf(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 0 = xf(-x) - xf(x)$$

$$\Leftrightarrow xf(-x) = xf(x) \quad (2)$$

Για $x \neq 0$, η (2) δίνει $f(-x) = f(x)$ και επειδή $f(0) = 0$, θα ισχύει

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι **άρτια**.

28.

Να βρείτε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0) = 1$ και να ισχύει $f(x+y) \leq e^x f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για $y = 0$ η δοθείσα σχέση γίνεται $f(x) \leq e^x f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αλλά $f(0) = 1$ οπότε $f(x) \leq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτοντας όπου x το $-x$ από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$f(-x+y) \leq e^{-x} f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας όπου y το x η τελευταία σχέση δίνει

$$f(-x+x) \leq e^{-x} f(x) \Leftrightarrow f(0) \leq e^{-x} f(x) \Leftrightarrow 1 \leq e^{-x} f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq e^x$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $f(x) \leq e^x$ και $f(x) \geq e^x$

Άρα $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

29.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια μη σταθερή συνάρτηση με τις ιδιότητες:

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ και } f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $f(-1) = 1$

ii. η συνάρτηση f είναι άρτια

iii. ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

i. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (1)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad (2)$$

♦ Η σχέση (2) για $x = y = 0$ δίνει:

$$f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

♦ Η σχέση (1) για $x = y = 1$ δίνει:

$$f(1) = f(1)f(1) \Leftrightarrow f(1) - (f(1))^2 = 0 \Leftrightarrow f(1)(1 - f(1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ ή } f(1) = 1$$

Αν $f(1) = 0$ τότε από τη σχέση (1) για $y = 1$ και $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$f(x) = f(x)f(1) \Leftrightarrow f(x) = 0, \text{ άτοπο αφού η } f \text{ δεν είναι σταθερή.}$$

Επομένως $f(1) = 1$.

♦ Η σχέση (2) για $x = 1$ και $y = -1$ δίνει

$$f(1-1) = f(1) + f(-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \stackrel{f(1)=1}{\Leftrightarrow} f(0) = 1 + f(-1) - 2 \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(-1) - 1 \Leftrightarrow f(-1) = 1$$

ii. Για $y = -1$ η σχέση (1) δίνει:

$$f(x \cdot (-1)) = f(x) + f(-1) \stackrel{f(-1)=1}{\Leftrightarrow} f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η **f είναι άρτια**.

iii. Για $y = -x$ η σχέση (2) δίνει:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) + 2x(-x) \stackrel{f \text{ άρτια}}{\Leftrightarrow} f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2 \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2f(x) - 2x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ επαληθεύει τις δοσμένες σχέσεις και επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θέτοντας όπου x το $f(x)$.

30.

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) = 2x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$ ii. $f(1) = 1$

Λύση

i. Θέτουμε στη σχέση $f(f(x)) = 2x - 1$ (1), όπου x την $f(x)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(f(f(x))) = 2f(x) - 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(2x - 1) = 2f(x) - 1$$

ii. Για $x = 1$ από τη σχέση $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$ παίρνουμε :

$$f(2 - 1) = 2f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 2f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

31.

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$(f \circ f)(x) = 4 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f(2) = 2$.

Λύση

Είναι $f(f(x)) = 4 - x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτοντας στην (1) όπου x την $f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(f(f(x))) = 4 - f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(4 - x) = 4 - f(x)$$

Για $x = 2$, παίρνουμε :

$$f(4 - 2) = 4 - f(2) \Leftrightarrow f(2) = 4 - f(2) \Leftrightarrow 2f(2) = 4 \Leftrightarrow f(2) = 2$$

Ασκήσεις

Σύνθεση συναρτήσεων.

57. Να βρείτε την gof , αν :

i. $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$

ii. $f(x) = x^2 + 5$ και $g(x) = \frac{1}{x-9}$

iii. $f(x) = \sqrt{x} - 1$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

iv. $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \frac{5x+1}{x-4}$

58. Αν $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ να δείξετε ότι :

$$(\text{gof})(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

59. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \sqrt{-x}$. Να βρείτε, αν ορίζονται, οι συναρτήσεις :

i. $g \circ f$ **ii.** $f \circ f$

60. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - x$ και $g(x) = \frac{3x}{x-2}$. Να βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις :

i. $f \circ g$ **ii.** $g \circ g$

61. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{x-3}{2x-1}$ και $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gog .

62. Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ και $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$. Να βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις :

i. $\text{ho}\varphi$ **ii.** $\varphi \circ h$

63. Αν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \ln x$, να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\text{ho}(\text{gof})$.

64. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, $g(x) = \sqrt{9-x^2}$, $h(x) = \sqrt{x-4}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις :

i. fof **ii.** $(\text{fog})\circ h$

65. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog όταν :

i. $f(x) = \frac{x}{x-4}$ και $g(x) = x^2 - x + 2$

ii. $f(x) = \sqrt{8+2x-x^2}$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

- 66.** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :
- i.** $f(x^2)$ **ii.** $f(x-4)$ **iii.** $f(\ln x)$ **iv.** $f(e^{x-1})$
- 67.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση g με τύπο
- $$g(x) = f(x-1) + f(\ln x) + 1$$
- 68.** Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x-1) + f(x^2 - 4x + 2) - \frac{1}{\ln x}$.
- 69.** Αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln(x^3 - 1)$:
- i.** να ορίσετε τη συνάρτηση fog .
ii. να κάνετε τη γραφική παράσταση της fog .
iii. να βρείτε το σύνολο τιμών της fog .
- 70.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ και $g(x) = x - 10$.
- i.** Να βρείτε την fog .
ii. Ποια είναι η θέση της γραφικής παράστασης της fog ως προς τον άξονα $x'x$.
- 71.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση fog .
ii. Να εξετάσετε αν η fog είναι άρτια ή περιτή.
- 72.** Αν $f(x) = 1 + \ln x$ και $g(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ 1-x^2, & x > 1 \end{cases}$, να βρείτε την gof .

Εύρεση παραμέτρων.

- 73.** Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε για τις συναρτήσεις
- $$f(x) = x + 2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - \lambda^2 \quad \text{να ισχύει} \quad \text{fog} = \text{gof}.$$
- 74.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax + \beta$ και $(f \circ f \circ f)(x) = 64x + 21$.
 Να βρείτε τις σταθερές α και β .
- 75.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = 2\alpha^2 x + \alpha$.
 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\text{fog} = \text{gof}$ και $f \neq g$.
- 76.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x + \alpha$ και $g(x) = \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει $\text{fog} = \text{gof}$ και οι C_f, C_g να τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
- 77.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.
 Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει $\text{fog} = \text{gof}$.
- 78.** Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις συνθήκες :

Υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$, $g(x) = x^2 + ax + \beta$ και $f \circ g = g \circ f$. Να αποδείξετε ότι $(a-1)^2 = 4\beta$.

Εύρεση συνάρτησης από γνωστή σύνθεση.

- 79.** Να βρείτε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{1+e^x}, \quad \text{αν } g(x) = -e^x$$

- 80.** Να βρείτε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1, \quad \text{αν } g(x) = 3x - 2$$

- 81.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 3x - 2$.

Αν ισχύει $(f \circ g)(x) = 18x^2 + 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .

- 82.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + x$ και $(g \circ f)(x) = 1 - x^2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις g και $f \circ g$.

- 83.** Δίνεται $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

ii. Αν $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$ να βρεθεί η $f(x)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

- 84.** Αν $g(x) = 3x + 1$ και $(g \circ f)(x) = x^2 + x + 1$, να οριστεί η συνάρτηση f .

- 85.** Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει

$$(g \circ f)(x) = 3x + 2 \quad \text{αν } g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

- 86.** Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε να ισχύει $(g \circ f)(x) = \frac{1+x}{1-x}$ αν $f(x) = \ln x$.

«Αποσύνθεση» συναρτήσεων.

- 87.** Να εκφράσετε ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων τις συναρτήσεις

i. $f(x) = \eta\mu(3x^2 - 2x)$ ii. $f(x) = \sqrt{e^{\frac{x}{2}} + 1}$

iii. $f(x) = 3\eta\mu^2 \sqrt{2x-1} + 2$ iv. $f(x) = \eta\mu(\ln(x^2 + 1))$

v. $f(x) = \ln\left(\eta\mu \frac{1}{x}\right)$ vi. $f(x) = \sqrt{\eta\mu^2(x+3) + 5}$

vii. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ viii. $f(x) = \ln^5\left(\frac{1}{\sin x}\right), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ix. $f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$ x. $f(x) = \eta\mu^3(x + \sqrt{x}) + \eta\mu(x + \sqrt{x})$

xi. $f(x) = \ln(\varepsilon\varphi^2\sqrt{x} + 1)$

xii. $f(x) = x^x, \quad x > 0$

Συναρτησιακές σχέσεις.

- 88.** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$, να προσδιορίσετε το $f(x)$ και το $f(x+1)$ και να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 4$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 89.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

- 90.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x-1) - 2f(3-x) = x^2 + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i.** Να αποδείξετε ότι $f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii.** Να βρείτε την f .

- 91.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

- 92.** Εστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 2f\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) + 1 = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

- 93.** Εστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x^2 + 2) + f(3x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία.

- 94.** Έστω f, g συναρτήσεις ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f(x) + f(3-2x) = 2g(x)$$

- i.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

- ii.** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 2f(1-x) = x^2 - x$ να βρείτε τους τύπους των f και g και το κοινό τους σημείο.

- 95.** Για τη συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, για κάθε $x \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{5}\left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right)$, $x \neq 0$.

- 96.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{2}{x}$ για κάθε $x \neq 0$

Να βρείτε τον τύπο της f .

97. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i. $\ln(e^{f(x)} + 1) = f(x) + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$

ii $f(x) \cdot [f(x) - x] \leq x \cdot [f(x) - x], x \in \mathbb{R}.$

iii $f(1-x) + 2f(x) = 2-x$

iv. $\ln(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = \ln(e^x + 2) + f(x)$

98. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x^3$ τότε :

i. Να βρείτε την $f(x)$.

ii. Αν $g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ να βρείτε την $g \circ f$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $(g \circ f)(x) = 0$.

99. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(xy) = f(x^2) + f(y^2) - \ln(xy), \text{ για κάθε } x, y > 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

ii. Να βρείτε την $f(x)$.

100. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$f(2x) + f^2(x) = 2^{2x+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Αν $f(1) = 2$ να βρείτε την τιμή $f(2)$.

ii. Να βρείτε το $f(0)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) + f^2(x) = 8$.

iv. Αν για την f ισχύει $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $f(x)$.

101. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ και

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

102. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 0$ και :

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f = g$.

103. Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

i. Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

ii. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

104. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = 4e^x[f(x) - e^x], \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

105. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2[f(x)\eta\mu x - g(x)\sigma\upsilon\nu x], \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

106. Μια περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x) \leq x^3$, για κάθε $x \neq 0$.

- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- ii. Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .
- iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

107. Αν για την περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$|x|f(x) \geq x + x^3 \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

108. Να βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

109. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y) \geq x+y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. $f(0) = 0$
- ii. $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iii. $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θ έ τ ο ν τ α ς ό π ο υ x τ η ν f(x).

110. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(f(x)) = \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$.

111. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(3x + 4) = 3f(x) + 4$.
- ii. Να υπολογίσετε το $f(-2)$.

112. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

113. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $(f \circ f)(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

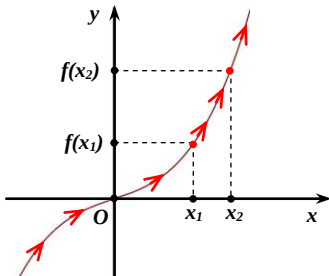
114. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = 4x - 9$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$(f \circ f \circ f)(x) = 8x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

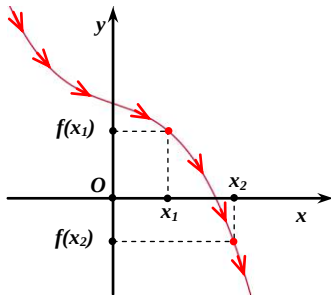
- i. Να αποδείξετε ότι $f(4x - 9) = 4f(x) - 9$.
- ii. Να βρείτε την τιμή $f(3)$.
- iii. Να βρείτε το α .
- iv. Να βρείτε την $f(x)$.

Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης

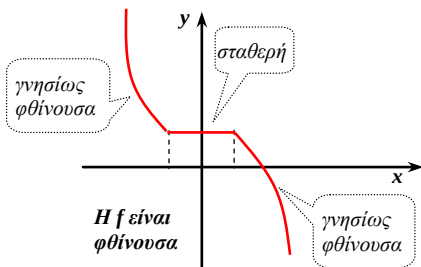
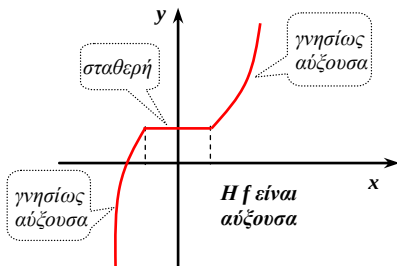
Μονοτονία συνάρτησης



Η C_f «ανεβαίνει» από τα αριστερά προς τα δεξιά.



Η C_f «κατεβαίνει» από τα αριστερά προς τα δεξιά.



- ♦ Μια συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Συμβολίζουμε : $f \nearrow \Delta$

- ♦ Μια συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Συμβολίζουμε : $f \searrow \Delta$

- ♦ Μια συνάρτηση f ονομάζεται **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Συμβολίζουμε : $f \nearrow \Delta$

- ♦ Μια συνάρτηση f ονομάζεται **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

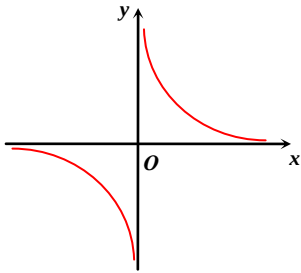
$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Συμβολίζουμε : $f \searrow \Delta$

- ♦ Μια συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως μονότονη** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- ♦ Μια συνάρτηση f ονομάζεται **μονότονη** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο Δ .

Παρατηρήσεις :

1. Στους παραπάνω ορισμούς δεν είναι απαραίτητο να ξεκινάμε με $x_1 < x_2$.
Αν για παράδειγμα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ συνεπάγεται $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .



$$H \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ με}$$

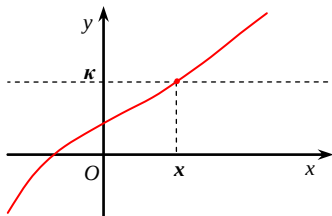
$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Αν υπήρχε κάποιο είδος μονοτονίας στο D_f , αυτό θα ήταν να είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι θα έπρεπε :

$$-3 < 2 \Rightarrow f(-3) > f(2) \Rightarrow -\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$$

που είναι άτοπο



x_0 : μοναδικό

2. Η ανισότητα μεταξύ των τιμών $f(x_1)$, $f(x_2)$ πρέπει να ισχύουν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$.

Για παράδειγμα αν $f(1) < f(2)$ **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ είναι συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα. Δεν είναι όμως ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ_1 και γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ_2 **δεν** είναι αναγκαία γνησίως αύξουσα και στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Ομοίως :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ γν.φθίνουσα στο } \Delta_1 \\ f \text{ γν.φθίνουσα στο } \Delta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ γν.φθίνουσα στο } \Delta_1 \cup \Delta_2$$

5. Δεν είναι απαραίτητο μια συνάρτηση να είναι μονότονη σε κάποιο υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x : \text{θετικός ρητός} \\ \frac{1}{x}, & x : \text{θετικός άρρητος} \end{cases}$$

έχουμε :

- Αν $0 < x_1 < x_2$, όπου x_1, x_2 ρητοί τότε

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- Αν $0 < x_1 < x_2$, όπου x_1, x_2 άρρητοι τότε

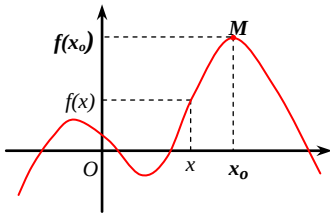
$$f(x_1) > f(x_2)$$

ενώ **δεν** υπάρχει διάστημα του πεδίου ορισμού που να περιέχει μόνο ρητούς ή μόνο άρρητους.

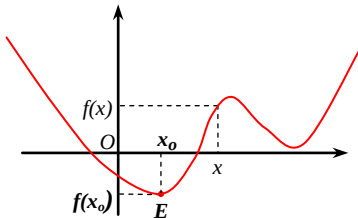
6. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο Δ .

7. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ και $\kappa \in f(\Delta)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μια λύση στο Δ . Συνεπώς αν το $0 \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο Δ .

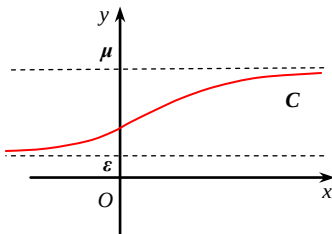
Ακρότατα συνάρτησης



Το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι το «ψηλότερο» σημείο της C_f .



Το σημείο $E(x_0, f(x_0))$ είναι το «χαμηλότερο» σημείο της C_f .



Η f δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

♦ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει :
 $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

♦ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει :
 $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **(ολικά) ακρότατα** της f .

Παρατηρήσεις :

1. Μια συνάρτηση έχει ακρότατο στο x_0 , μόνο αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
2. Άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

3. Αν για μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$f(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in A$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μ είναι το μέγιστο της f .

Η f θα έχει μέγιστο το μ , αν υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = \mu$.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν αν είναι $f(x) \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in A$. Το ε θα είναι ελάχιστο της f , μόνο αν $\varepsilon = f(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in A$.

4. Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, όταν υπάρχουν, είναι **μοναδικά**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μονοτονία συνάρτησης.

32.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

- i.** $f(x) = 3 - 2\sqrt{x-2}$ **ii.** $g(x) = x^3 + 2\ln(x-1) - 5$ **iii.** $h(x) = \sin x - \eta\mu x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Λύση

- i.** Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [2, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \\ &\Leftrightarrow -2\sqrt{x_1 - 2} > -2\sqrt{x_2 - 2} \\ &\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x_1 - 2} > 3 - 2\sqrt{x_2 - 2} \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = [2, +\infty)$.

- ii.** Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1^3 < x_2^3 &\Leftrightarrow x_1^3 - 5 < x_2^3 - 5 \quad (1) \\ \bullet \quad x_1 - 1 < x_2 - 1 &\Leftrightarrow \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \\ &\Leftrightarrow 2\ln(x_1 - 1) < 2\ln(x_2 - 1) \quad (2) \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$x_1^3 - 5 + 2\ln(x_1 - 1) < x_2^3 - 5 + 2\ln(x_2 - 1) \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (1, +\infty)$.

- iii.** Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, \frac{\pi}{2}]$. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$, επειδή

στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι γν. φθίνουσα ενώ η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \sin x_1 &> \sin x_2 \\ \eta\mu x_1 &< \eta\mu x_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} \sin x_1 - \eta\mu x_1 > \sin x_2 - \eta\mu x_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Μεθοδολογία

Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της θεωρούμε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ και με συνθετικό – κατασκευαστικό τρόπο καταλήγουμε στις ανισώσεις $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ βγάζοντας έτσι συμπεράσματα για τη μονοτονία της f .

Παρατήρηση

Η μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης γίνεται ευκολότερα με τη χρήση της παραγώγου της. Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπου μπορούμε να «χτίσουμε» τον τύπο της συνάρτησης.

33.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - e^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης fof .
- Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι $f(5^x) < f(7^x)$

Λύση

- i. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow e^{x_1+1} < e^{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -e^{x_1+1} > -e^{x_2+1} \Leftrightarrow 2 - e^{x_1+1} > 2 - e^{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\text{fof})(x_1) < (\text{fof})(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η fof είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- iii. Επειδή είναι $\frac{5}{7} < 1$ για κάθε $x < 0$, έχουμε :

$$x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^x > \left(\frac{5}{7}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{7^x} > 1 \Leftrightarrow 5^x > 7^x \Leftrightarrow f(5^x) < f(7^x)$$

Θυμηθείτε

Αν $a > 1$ τότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Αν $0 < a < 1$ τότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

34.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + \ln(x-1)$. Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε τις ανισώσεις

- $f(2x-1) < f(5-x)$
- $2e^{3x^2+2} + \ln(3x^2+1) \geq 2e^{x^2+1} + \ln x^2$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$, έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \quad (1)$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε

$$2e^{x_1} + \ln(x_1 - 1) < 2e^{x_2} + \ln(x_2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = (1, +\infty)$

- i. Η ανίσωση $f(2x-1) < f(5-x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν

$$\begin{cases} 2x-1 \in D_f \\ 5-x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 1 \\ 5-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 2 \\ x < 5-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, 4)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ και για κάθε $x \in (1, 4)$

ισχύει $2x - 1 \in (1, +\infty)$ και $5 - x \in (1, +\infty)$,
οπότε έχουμε

$$f(2x - 1) < f(5 - x) \Leftrightarrow 2x - 1 < 5 - x \\ \Leftrightarrow 2x + x < 5 + 1 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2.$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

ii. Η ανίσωση $2e^{3x^2+2} + \ln(3x^2 + 1) \geq 2e^{x^2+1} + \ln x^2$
ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$$\text{ισχύουν } \begin{cases} 3x^2 + 1 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Η ανίσωση

$$2e^{3x^2+2} + \ln(3x^2 + 1) \geq 2e^{x^2+1} + \ln x^2 \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ ισοδύναμα γράφεται}$$

$$f(3x^2 + 2) \geq f(x^2 + 1) \quad (1)$$

Αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$x^2 + 1 \in (1, +\infty) \text{ και } 3x^2 + 2 \in (1, +\infty), \text{ ισοδύναμα από την (1) έχουμε :}$$

$$3x^2 + 2 \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 1 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Παρατήρηση

Για μια γνησίως μονότονη

συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

ισχύουν :

Αν η f είναι γν. αύξουσα τότε:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b) \quad a, b \in A$$

$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \quad a, b \in A$$

Αν η f είναι γν. φθίνουσα τότε:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \quad a, b \in A$$

$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \quad a, b \in A$$

35.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $f(x) < 0$ **ii.** $2^{3x-x^2} - 2^{6-2x} > x^2 - 5x + 6$

Αύση

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \quad 2^{x_1} < 2^{x_2} \\ \bullet \quad x_1 - 3 < x_2 - 3 \end{array} \right\} \xRightarrow{(+)} 2^{x_1} + x_1 - 3 < 2^{x_2} + x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. i. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 2^1 + 1 - 3 = 0$.

$$\text{Επομένως } f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} x < 1$$

ii. Είναι $f(3x - x^2) = 2^{3x-x^2} + 3x - x^2 - 3$ και

$$f(6 - 2x) = 2^{6-2x} + 6 - 2x - 3 = 2^{6-2x} - 2x + 3$$

Οπότε διαδοχικά έχουμε :

$$2^{3x-x^2} - 2^{6-2x} > x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow 2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 3x - 2x + 3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-x^2} + 3x - x^2 - 3 > 2^{6-2x} - 2x + 3 \Leftrightarrow f(3x-x^2) > f(6-2x) \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 3x - x^2 > 6 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

36.

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ , οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Λύση

Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ [αφού } f \text{ γν. αύξουσα στο } \Delta]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} \text{ (1) [αφού } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta]$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \text{ [αφού } g \text{ γν. αύξουσα στο } \Delta]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{g(x_2)} \text{ (2) [αφού } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta]$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(x_2)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)(x_1) > \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)(x_2)$$

Άρα η $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

37.

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f(f(x)) + g(x) = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

$$\text{Είναι } f(f(x)) + g(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -g(x).$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

- ♦ Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \stackrel{g \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2, \quad \text{άτοπο}$$

- ♦ Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι :

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\stackrel{f \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \Leftrightarrow \\
 &\stackrel{g \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2, \quad \text{άτοπο}
 \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

38.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof είναι :

i. γνησίως αύξουσα, αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

ii. γνησίως φθίνουσα, αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

iii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $F(x) = -2(3x^3 + 5)^3 + 7$

Λύση

i. Έστω ότι οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\stackrel{f \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{g \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\text{gof})(x_1) < (\text{gof})(x_2)
 \end{aligned}$$

Άρα η gof είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε ότι f, g γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω ότι οι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\stackrel{f \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \stackrel{g \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\text{gof})(x_1) > (\text{gof})(x_2)
 \end{aligned}$$

Άρα η gof είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 3x^3 + 5, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(x) = -2x^3 + 7, \text{ τότε είναι } F = \text{gof.}$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^3 < 3x_2^3 \\
 &\Leftrightarrow 3x_1^3 + 5 < 3x_2^3 + 5 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)
 \end{aligned}$$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3 \\
 &\Leftrightarrow -2x_1^3 + 7 > -2x_2^3 + 7 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω του β) η F είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Παρατήρηση

Βέβαια μπορούμε να αποδείξουμε ότι η F είναι γνησίως φθίνουσα και χωρίς να κάνουμε χρήση του β) ερωτήματος, ως εξής :

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^3 < 3x_2^3 \\
 &\Leftrightarrow 3x_1^3 + 5 < 3x_2^3 + 5 \\
 &\Leftrightarrow (3x_1^3 + 5)^3 < (3x_2^3 + 5)^3 \\
 &\Leftrightarrow -2(3x_1^3 + 5)^3 > -2(3x_2^3 + 5)^3 \\
 &\Leftrightarrow -2(3x_1^3 + 5)^3 + 7 > -2(3x_2^3 + 5)^3 + 7 \\
 &\Leftrightarrow F(x_1) > F(x_2)
 \end{aligned}$$

39.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = \frac{2e^x}{1+f^2(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε το $f(0)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $\ln(f(x)) > 0$.

Λύση

- i. Είναι $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1+f^2(x) \geq 1 > 0$

$$\text{Επομένως } f(x) = \frac{2e^x}{1+f^2(x)} > 0$$

- ii. Για $x = 0$ από τη δοσμένη σχέση παίρνουμε:

$$f(0) = \frac{2e^0}{1+f^2(0)} \Leftrightarrow f(0) + f^3(0) = 2 \Leftrightarrow f^3(0) + f(0) - 2 = 0$$

Θέτουμε $f(0) = \omega$ οπότε έχουμε :

$$\omega^3 + \omega - 2 = 0 \stackrel{\text{σχ. Horner}}{\Leftrightarrow} (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \\ \text{ή} \\ \omega^2 + \omega + 2 = 0 \text{ αδύνατη αφού } \Delta = -7 < 0 \end{cases}$$

Άρα $\omega = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$

- iii. **α' τρόπος**

Απο τη δοθείσα σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει :

$$f(x) = \frac{2e^x}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 2e^x \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^3 < x_2^3$ οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1^3 < x_2^3 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} x_1 + x_1^3 < x_2 + x_2^3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g: \text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

β' τρόπος

Απο τη δοθείσα σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει :

$$f(x) = \frac{2e^x}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 2e^x \quad (1)$$

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Τότε είναι $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \end{array} \right\} \xRightarrow{(*)} f(x_1) + f^3(x_1) \geq f(x_2) + f^3(x_2) \xRightarrow{(1)} 2e^{x_1} \geq 2e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} \geq e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

άτοπο αφού $x_1 < x_2$.

Επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Επομένως **η f είναι γνησίως αύξουσα.**

iv. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (αφού $f(x) > 0$) έχουμε :

$$\ln(f(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(f(x)) > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως **η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (0, +\infty)$**

40.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι

i. $f(0) = 0$

ii. η f είναι περιττή

iii. η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

i. Για $x = y = 0$ η δοσμένη σχέση (1) δίνει:

$$f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

ii. Για $y = -x$ από τη δοσμένη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \xRightarrow{f(0)=0} \\ &\Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι περιττή.

iii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, οπότε $x_2 - x_1 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f(x_2 - x_1) &> 0 \Leftrightarrow f(x_2 + (-x_1)) > 0 \xRightarrow{(1)} f(x_2) + f(-x_1) > 0 \xRightarrow{f: \text{περιττή}} \\ &\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

41.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(3-x) + f(x+5) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

και είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2 + 2x - 4) < 0.$$

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$f(3 - x) + f(x + 5) = 0 \quad (1)$$

Για $x = -1$ η (1) δίνει :

$$f(3 + 1) + f(-1 + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(4) + f(4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2f(4) = 0 \Leftrightarrow f(4) = 0.$$

Οπότε

$$f(x^2 + 2x - 4) < 0 \Leftrightarrow f(x^2 + 2x - 4) < f(4) \quad \begin{matrix} f: \text{γν. φθίνουσα} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 > 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty). \end{matrix}$$

Παρατήρηση

Η τιμή $x = -1$ που θέσαμε στη δοθείσα σχέση επιλέχθηκε ώστε να είναι:

$$3 - x = x + 5 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

Ακρότατα συνάρτησης.

42.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\frac{1}{3}$.

Λύση

Είναι $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($\Delta < 0$)

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

♦ Για να είναι το 3 μέγιστο της f , αρκεί να αποδείξουμε ότι :

- $f(x) \leq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(x_0) = 3$, για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$

Είναι :

$$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 3x^2 + 3x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Είναι λοιπόν $f(x) \leq 3 = f(-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το 3 είναι μέγιστο της f .

♦ Για να είναι το $\frac{1}{3}$ ελάχιστο της f , αρκεί να αποδείξουμε ότι :

- $f(x) \geq \frac{1}{3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

- η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{3}$ να έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Είναι :

$$f(x) \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 3 \geq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Είναι λοιπόν $f(x) \geq \frac{1}{3} = f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το $\frac{1}{3}$ είναι ελάχιστο της f .

43.

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 5 και ισχύει

$$f(\alpha) + f(\ln \beta) = 10, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

να βρείτε τα α και β .

Λύση

Αφού η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 5, θα ισχύει :

$$f(x) \geq 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 1.$$

Οπότε :

$$f(\alpha) \geq 5 \Leftrightarrow f(\alpha) - 5 \geq 0 \text{ (1) και } f(\beta) \geq 5 \Leftrightarrow f(\beta) - 5 \geq 0 \text{ (2)}$$

Έχουμε :

$$f(\alpha) + f(\ln \beta) = 10 \Leftrightarrow [f(\alpha) - 5] + [f(\ln \beta) - 5] = 0.$$

Λόγω των (1) και (2) προκύπτει :

$$f(\alpha) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 5 \quad \text{και} \quad f(\ln \beta) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(\ln \beta) = 5.$$

Συνεπώς :

$$\alpha = 1 \quad \text{και} \quad \ln \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = e$$

44.

A. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και η g είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .

B. Αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$e^{-f(x)} - f(x) + 1 - x^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0.

Λύση

A. Επειδή οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $g \circ f$ θα έχει και αυτή πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Αφού η $g \circ f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει :

$$(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(x_0) \Leftrightarrow g(f(x)) \geq g(f(x_0)) \quad (1)$$

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα από την (1) προκύπτει :

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0

B. Η δοθείσα σχέση γράφεται :

$$e^{-f(x)} - f(x) + 1 = x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε

$$(g \circ f)(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x^2 \geq 0$ και $(g \circ f)(0) = 0$ θα είναι

$$(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

• Επομένως η $g \circ f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 0. (1)

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι :

$$\left. \begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \\ x_1 < x_2 &\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1 \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{-x_1} - x_1 + 1 > e^{-x_2} - x_2 + 1 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

• Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. (2)

Από (1) και (2) και λόγω του Α. ερωτήματος προκύπτει ότι

η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0.

Ασκήσεις

Μονοτονία συνάρτησης.

115. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = \ln(x-1) - e^{2-x}$

ii. $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x-2}$

116. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot \epsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

117. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(1940) < f(1821)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x) < f(x^2+x)$.

118. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$$

i. Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι γνησίως μονότονες.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

119. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 2 + \ln x$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

120. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

να λύσετε την ανίσωση $(f \circ g)(x^2 - 2x) \geq (f \circ g)(x + 4)$.

121. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = a^x - x$, $g(x) = 1 - x^2$, $h(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$,

και $0 < a < 1$. Να λύσετε την ανίσωση $(f \circ g)(x) > (f \circ h)(x)$.

122. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 2 + \ln(x-1)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με τον άξονα $x'x$.

123. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.** $e^{x-1} + \ln x - 1 < 0$ **ii.** $1 + \ln x < \frac{1}{x}$

124. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$.

i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$.

- iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$.
- 125.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(1 - e^x)$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 2 - \ln(1 - e^{x^2-2}) < x - \ln(1 - e^x)$.
- 126.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$, $x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\ln(2x^2 + 2) - e^{x^2+3} > \ln(x^2 + 3) - e^{2x^2+2}$.
- 127.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{3x}{x^2+2} < x^2 - 3x + 2$.
- 128.** Έστω $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2+x+5} - e^{x^2+5} + x > 0$.
- 129.** Να λυθεί η ανίσωση:
- $(10x+5)^9 - e^{3x-1} < -e^{10x+5} + (3x-1)^9$.
 - $\ln(x^2 + x) + x^2 > \ln(x+3) + 3$.
- 130.** Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.
Αν για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$:
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x < 2 + g(x^2)$.
- 131.** Δίνονται οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = g(1) = 1$
- Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} - 2$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + g(x) \leq 2f(x)g(x)$.
- 132.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

- 133.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = a^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $a \in (0,1)$ σταθερά.
- Na μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Na βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} > \lambda^2 - \lambda - 2$
- 134.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x + 2$.
- Na βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 - Na λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) \geq 12$.
 - Na αποδείξετε ότι $f(2x) + f(1) < f(3x) + f(e^x)$ για κάθε $x > 0$.
- 135.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι
- $$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x).$$
- 136.** Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για κάθε $x > 1$ να αποδείξετε ότι
- $$f(\ln x) + f(\ln x^7) < f(\ln x^2) + f(\ln x^{13}).$$
- 137.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Na μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Na αποδείξετε ότι η εξίσωση
- $$f(2x) + f(4x) = f(3x) + f(5x)$$
- έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.
- 138.** Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
- Na λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$.
- 139.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Na λύσετε την εξίσωση: $f(e^x) + f(e^{5x}) = f(e^{3x}) + f(e^{7x})$.
- 140.** Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Na αποδείξετε ότι και οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $f + g$ είναι γνησίως αύξουσες.
 - Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(2x-1) + f(3x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Na μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.
 - Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0 = 1$ να λύσετε την ανίσωση $f(2x-1) < -f(3x-2)$
- 141.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη.
- Na εξετάσετε τη μονοτονία της $f \circ f$.

- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

142. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(5, -2)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x)) < -2$.

iv. Αν $g(x) = x + \ln x$, να λύσετε την ανίσωση $f(g(x)) > 5$.

143. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 1 - x$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

144. Έστω συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$e^{-f(x)} - 2f(x) = 3x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

ii. Να βρείτε την τιμή της f στο 0.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) > 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < 0$.

145. Θεωρούμε την γνησίως μονότονη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{e^x}{2^{f(x)}}, \quad x > 0$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-x} > 2^{f(x^2)-f(x)}$

146. Θεωρούμε την γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας

η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(5, 2)$

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x) \leq f(x) + 2$

147. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^2(x) - 5f(x) + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι γνησίως μονότονη και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(1, 3)$ ανήκουν στην C_f να βρείτε τη σχετική θέση της C_g με τον άξονα $x'x$.

148. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x - 1$, $x > 0$.

i. Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της.

ii. Αν $1 < \alpha < e < \beta$, να αποδείξετε ότι: $f(\ln \alpha) \cdot f(\ln \beta) < 0$

149. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα της οποίας η C_f περνά από το σημείο

$A(2, 2)$. Αν $g(x) = 3f(x) - (f \circ f)(x)$, τότε:

i. Να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)$.

- ii. Να λύσετε την ανίσωση $3[f(|x|)-1] > (f \circ f)(|x|) + 1$.
- 150.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \operatorname{erf} x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}} < \sqrt{3}$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} < \frac{\operatorname{erf} 1}{\operatorname{erf} x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 151.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x > 0$
- i. Να μελετήσετε την μονοτονία της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι $2017^2 > 2016 \cdot 2018$.
- 152.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
- i. Να μελετήσετε την μονοτονία της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$.
- ii. Συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{e+2}{e+1}$, $\frac{\pi+2}{\pi+1}$ και τους αριθμούς
- $$\alpha = \ln \frac{2016}{2015}, \quad \beta = \ln \frac{2017}{2016}$$
- 153.** Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
- $$f(f(x)) + x = 0,$$
- για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
- 154. i.** Αν η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα Δ να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} e^x - e^x - \sqrt{x} + 1$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x + 2 - \sqrt{x} - 2 \ln x$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $(0, +\infty)$
- 155.** Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει
- $$f^5(x) + x^5 - 1 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- i. Να βρείτε πού τέμνει η C_f τον $x'x$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

156. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = 27f^3 - 8g^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν ισχύει $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2}{3}$, να λύσετε την ανίσωση $27f^3(x) > 8g^3(x)$.

157. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και η

$$\text{συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{\ln(x+1)}, \quad x > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι } g(x) > 0 \text{ για κάθε}$$

$x > 0$.

158. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η

$$\text{συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}^*. \text{ Να αποδείξετε ότι } g(x) < 0 \text{ για κάθε}$$

$x \neq 0$.

159. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$f(e^x - x) + f(1 - x) = e^x - 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 1) < 0$.

160. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$f(x - \ln x) + f(x - 1) = \ln x + 3, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x - 1) < 2$.

161. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$f(4 - x) + f(2 + x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(1) > f(2).$$

Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 6) > 0$.

162. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολα τιμών

$$f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = (0, +\infty).$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα ενώ η g είναι γνησίως αύξουσα, να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^3)g(2x) - f(2x)g(x^3) < 0.$$

163. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

164. α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με g γνησίως φθίνουσα και $g \circ f$ γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $h(x) = e^{-f(x)} - f^3(x) + 2$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα τότε :

i. Ποια η μονοτονία της $f(x)$.

- ii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x^2-x)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4-x)} > 0$.
- 165. i.** Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και f γνησίως αύξουσα και $f \circ g$ γνησίως φθίνουσα να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g^5(x) + e^{g(x)} - 1 - e^{-x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- 166.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2e^x}{1+f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln f(x) > 0$.
- iv. Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να δείξετε ότι: $f(\alpha + \beta) > \frac{\beta f(\alpha) + \alpha f(\beta)}{\alpha + \beta}$
- 167.** Αν για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει
- $$f(x) - f(y) \geq \ln \frac{x}{y} + x - y, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \text{ και } f(1) = 1.$$
- i. Να βρείτε τον τύπο της f .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- 168.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν
- $$f(x) + f(y) = f(x) \cdot f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } f(2018) \neq 0.$$
- α. Να αποδείξετε ότι:
- i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- iv. $f(vx) = [f(x)]^v$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.
- v. $f\left(\frac{x}{v}\right) = \sqrt[v]{f(x)}$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$, $v \geq 2$.
- β. Αν για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και να λυθεί η ανίσωση $f(x^3) > \frac{[f(x)]^7}{[f(1)]^6}$.

169. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα.

170. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq \kappa |x - y|$, για κάθε $x, y \in [\alpha, \beta]$ όπου για κάθε $\kappa \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Ακρότατα συνάρτησης.

171. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = -2|x-1| + 3$

ii. $f(x) = 2e^{1-x} - 3, \quad x \in [0, 1]$

iii. $f(x) = 1 - 2\ln(x-1), \quad x \in [2, 3]$

iv. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^3}}$

172. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = -\frac{4x}{x^2 + 4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

ii. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο 2 το 3 και ισχύει: $f(\alpha) + 2f(\beta) = 9$, να βρείτε τα α και β .

174. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει την ευθεία $y = 1$ στο σημείο A με τετμημένη 2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2^{f(x)} + 2^{2-f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή 4.

175. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 1 - |g(x) - e^x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_g τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = e^x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

176. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 3 + |g(x) - 1| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η g έχει σύνολο τιμών το $g(A) = (0, 2)$ να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

177. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{4f(x)}{1+f^2(x)}$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η g παρουσιάζει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 .

ii. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $\left| \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\beta}{1+\beta^2} \right| \leq 1$.

178. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1821}{x^4 + 1821}$ παρουσιάζει μέγιστο.

179. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και να υπολογίσετε την τιμή του.

ii. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει

$$\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 10} + \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 10} = 6$$

180. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο και να υπολογίσετε την τιμή του.

ii. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5}} + \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 5}} = 1$$

181. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: x = 1$, να βρείτε

το μέγιστο της συνάρτησης $h(x) = 2f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

182. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης

$$h(x) = 2f(x)f(1-x) + 2g(x)g(1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

183. i. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 και η g είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .

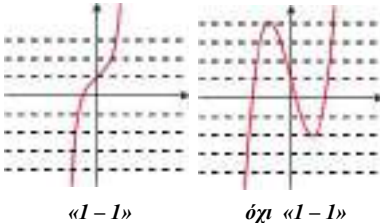
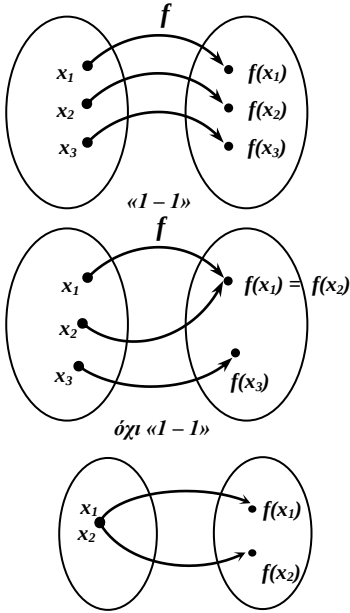
ii. Αν $f^5(x) + f(x) + 1 + x^2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο.

184. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει

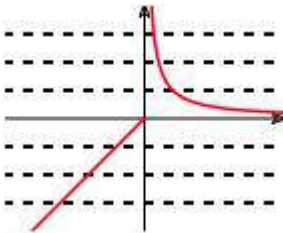
$$f^3(x) + e^{f(x)} + 1 - x^2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

Συνάρτηση «1 - 1»



$$H \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



είναι «1 - 1» στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1 - 1», όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

Με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής, αποδεικνύεται ότι ισχύει :

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1 - 1», όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :

αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$

Παρατηρήσεις :

1. Το αντίστροφο της συνεπαγωγής στους ορισμούς ισχύει πάντοτε επειδή η f είναι συνάρτηση. Δηλαδή :
 - Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ δεν μπορεί να είναι $x_1 = x_2$. Αναγκαστικά θα είναι $x_1 \neq x_2$.
 - Αν $x_1 = x_2$ δεν μπορεί να είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Αναγκαστικά θα είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει την C_f το πολύ σ' ένα σημείο.
3. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών $f(A)$ της f , η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x στο σύνολο A .
4. Αν μια συνάρτηση f είναι «1 - 1» στο A_1 και «1 - 1» στο A_2 αυτό δε σημαίνει ότι είναι «1 - 1» στο $A_1 \cup A_2$.

Θεώρημα

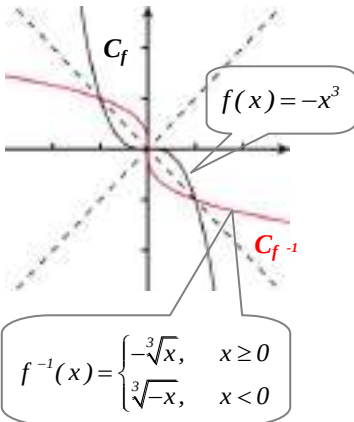
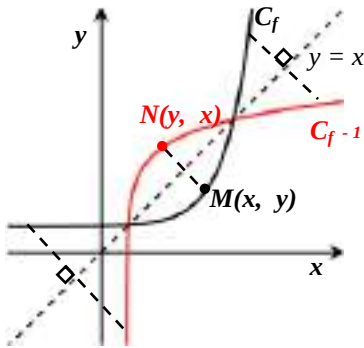
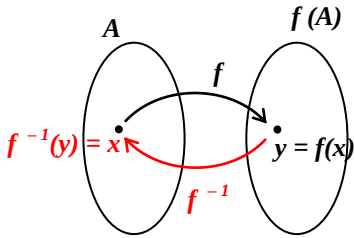
Κάθε συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι συνάρτηση «1 - 1».

Προσοχή !

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή:

Μπορεί μια συνάρτηση f να είναι «1 - 1» και η f να μην είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση.

Αντίστροφη συνάρτηση



Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει

αντίστροφη τον εαυτό της. Οπότε C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν άπειρα κοινά σημεία τα οποία βέβαια δε βρίσκονται όλα στην ευθεία $y = x$.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Αν η συνάρτηση f είναι «1-1», τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1} , τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Παρατηρήσεις :

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ότι αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση για την οποία ισχύουν :

1. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , δηλαδή $D_{f^{-1}} = f(A)$.
2. Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f .
3. Ισχύει : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
4. $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.
5. $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε $y \in f(A)$.
6. $(f^{-1})^{-1} = f$
7. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$

των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Συνέπειες :

Τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$ (αν υπάρχουν) είναι και σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$.

Δηλαδή οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Προσοχή όμως, αυτό δε σημαίνει ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται αναγκαστικά μόνο πάνω στην ευθεία $y = x$. Μπορεί να έχουν κοινά σημεία (συμμετρικά ως προς την $y = x$) τα οποία όμως δεν ανήκουν σ' αυτήν.

Έτσι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ δεν είναι πάντα ισοδύναμες. (Αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμες όταν η f είναι γνησίως αύξουσα)

Λυμένες ασκήσεις

«1-1» συναρτήσεις

45.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» :

i. $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}, x \neq -1$

ii. $f(x) = -x^2 + 7, x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = -x^2 + 7, x \geq 0$

iv. $f(x) = e^x - e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = x^{2017} + x^{2016} - x^3 + x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{2x_1+3}{x_1+1} = \frac{2x_2+3}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x_1+3)(x_2+1) = (2x_2+3)(x_1+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 + 3x_2 + 3 = 2x_1x_2 + 2x_2 + 3x_1 + 3 \\ &\Leftrightarrow 2x_1 - 3x_1 = 2x_2 - 3x_2 \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι «1-1».

ii. α' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow -x_1^2 + 7 = -x_2^2 + 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι «1-1».

β' τρόπος

Είναι $2 \neq -2$ αλλά $f(2) = f(-2) = 3$

Άρα η f δεν είναι «1-1».

iii. Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow -x_1^2 + 7 = -x_2^2 + 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι «1-1».

iv. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$e^{x_1} < e^{x_2} \quad (1)$$

$$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Leftrightarrow -e^{1-x_1} < -e^{1-x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$e^{x_1} - e^{1-x_1} < e^{x_2} - e^{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι και «1-1».

v. Είναι $1 \neq -1$ αλλά $f(1) = f(-1) = 1$. Άρα η f δεν είναι «1-1».

Μεθοδολογία

♦ Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1» εργαζόμαστε συνήθως με ένα από τους δύο παρακάτω τρόπους :

1^{ος}. Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για τυχαία $x_1, x_2 \in A$ και αποδεικνύουμε ότι είναι κατ' ανάγκη $x_1 = x_2$.

2^{ος}. Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο A , οπότε είναι συνάρτηση «1-1».

♦ Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι «1-1» εργαζόμαστε συνήθως με ένα από τους παρακάτω τρόπους :

1^{ος}. Βρίσκουμε δύο συγκεκριμένα $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε να είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

2^{ος}. Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για τυχαία $x_1, x_2 \in A$ και αποδεικνύουμε ότι δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη $x_1 = x_2$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.

46.

Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(gog)(x) + 2017x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. Η g είναι «1 – 1» συνάρτηση.
- ii. Η g δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Λύση

- i. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$.

Επειδή η g είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, θα ισχύει :

$$g(g(x_1)) = g(g(x_2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (gog)(x_1) = (gog)(x_2) \quad (1)$$

Αλλά :

$$(gog)(x_1) + 2017x_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (gog)(x_1) = -2017x_1$$

$$(gog)(x_2) + 2017x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (gog)(x_2) = -2017x_2$$

Οπότε από (1) έχουμε :

$$-2017x_1 = -2017x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η g είναι «1 – 1» συνάρτηση.

- ii. Έστω ότι η g είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

- Αν η g είναι γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ θα έχουμε :
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g(g(x_1)) < g(g(x_2)) \Leftrightarrow -2017x_1 < -2017x_2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x_1 > x_2, \text{ άτοπο}$
- Αν η g είναι γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ θα έχουμε
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow g(g(x_1)) < g(g(x_2)) \Leftrightarrow -2017x_1 < -2017x_2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x_1 > x_2, \text{ άτοπο}$

Επομένως η g δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση.

47.

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1 – 1».
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

- i. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Παρατήρηση

Αν είναι $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε συνεπάγεται $\alpha = \beta$ μόνο αν η f είναι «1 – 1» συνάρτηση.

Αλλά αν $\alpha = \beta$ τότε συνεπάγεται $f(\alpha) = f(\beta)$ για οποιαδήποτε συνάρτηση f (εφόσον βέβαια, $\beta \in D_f$).

Κάθε συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι και «1 – 1». Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή : Αν μια συνάρτηση είναι «1 – 1» δεν συνεπάγεται ότι θα είναι και γνησίως μονότονη.

Επειδή η f είναι συνάρτηση θα είναι : $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ (1)

Επίσης :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (f(x_1))^3 = (f(x_2))^3 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(f(x_1)) + (f(x_1))^3 = f(f(x_2)) + (f(x_2))^3 \quad (3)$$

Επειδή $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η (3) γίνεται :

$$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση «1-1».

ii. Επειδή η f είναι συνάρτηση «1-1» και $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, έχουμε :

$$\begin{aligned} 2x^3 + x = 4 - x &\Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \quad \text{σχ. Homer} \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ \text{ή} \\ x^2 + x + 2 = 0 \text{ αδύνατη γιατί } \Delta < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

48.

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) - f(y) = f(x - y), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

α. Να βρείτε το $f(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

γ. Αν $f(x) < 0$, για κάθε $x < 0$, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + 1) + f(3x - 1) < f(e^x - x)$.

Λύση

α. Για $x = y = 0$ από τη σχέση $f(x) - f(y) = f(x - y)$ (1)

$$\text{έχουμε : } f(0) - f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

β. Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα και $f(0) = 0$ συμπεραίνουμε ότι το 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1 - x_2) = 0$$

Άρα το $x_1 - x_2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ η οποία όμως έχει μοναδική ρίζα το 0.

$$\text{Συνεπώς } x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$ και επομένως η f είναι «1-1» συνάρτηση.

γ. i. Για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) < 0$, συνεπώς για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0, \text{ έχουμε :}$$

$$f(x_1 - x_2) < 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$ και επομένως
η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε :

$$\begin{aligned} f(e^x + 1) + f(3x - 1) &< f(e^x - x) \Leftrightarrow f(3x - 1) < f(e^x - x) - f(e^x + 1) \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(3x - 1) < f((e^x - x) - (e^x + 1)) \Leftrightarrow f(3x - 1) < f(e^x - x - e^x - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(3x - 1) < f(-x - 1) \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} 3x - 1 < -x - 1 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

Αντίστροφες συναρτήσεις.

49.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι
 αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1} .

Λύση

Πρέπει :

- $e^x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq -1$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \Leftrightarrow e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$

- ♦ Εξετάζουμε αν η f είναι «1-1».

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \ln \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} e^{x_2} + e^{x_1} - e^{x_2} - 1 = e^{x_1} e^{x_2} - e^{x_1} + e^{x_2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε η f
 αντιστρέφεται (ορίζεται η f^{-1}).

- ♦ Είναι :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow e^y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^y(e^x + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow e^y e^x + e^y = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^y e^x = 1 + e^y \Leftrightarrow e^x(1 - e^y) = 1 + e^y \Leftrightarrow$$

Μεθοδολογία

Όταν ζητάμε να βρούμε την αντίστροφη
 μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, τότε :

1^{ov}. Εξετάζουμε αν η f είναι
 συνάρτηση «1-1»

- Αν η f δεν είναι «1-1»,
 τότε δεν ορίζεται f^{-1} .
- Αν η f είναι «1-1», τότε η
 f έχει αντίστροφη και
 πηγαίνουμε στο 2^ο βήμα.

2^{ov}. Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως
 προς x θέτοντας περιορισμούς
 για το y ώστε να έχει λύση η
 εξίσωση στο A .

Από τους περιορισμούς του y
 βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f
 το οποίο είναι το πεδίο ορισμού
 της f^{-1} .

3^{ov}. Εναλλάσσουμε τα γράμματα x και
 y στη σχέση $x = f^{-1}(y)$ και
 έχουμε τον τύπο της f^{-1} .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{1+e^y}{1-e^y} \\ 1-e^y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \frac{1+e^y}{1-e^y} \\ \frac{1+e^y}{1-e^y} > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \frac{1+e^y}{1-e^y} \\ 1-e^y > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \frac{1+e^y}{1-e^y} \\ y < 0 \end{cases}$$

Αλλά $x \in A = (0, +\infty)$ οπότε

$$x > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1+e^y}{1-e^y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+e^y}{1-e^y} > 1 \stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow} \frac{1+e^y}{1-e^y} > 1 \Leftrightarrow 1+e^y > 1-e^y \Leftrightarrow 2e^y > 0$$

που ισχύει. Άρα $x = \ln \frac{1+e^y}{1-e^y}$, $y < 0$

Αλλά από τον ορισμό της αντίστροφης, είναι : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
Συνεπώς :

$$f^{-1}(y) = \ln \frac{1+e^y}{1-e^y} \quad \text{με } y < 0$$

Θέτουμε όπου y το x και τελικά έχουμε :

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{1+e^x}{1-e^x}, \quad x < 0$$

50.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x \ln x \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την τιμή $f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$ αφού η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε $\ln x_1 < \ln x_2$.

Επειδή και τα μέλη των παραπάνω ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε :

$$x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι « 1 - 1 » και συνεπώς **αντιστρέφεται**.

ii. Αν $f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right) = x_0$ τότε

$$f\left(f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = f(x_0) \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} = f(x_0).$$

Επομένως αρκεί να βρούμε ένα

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(x_0) = \frac{\pi}{12}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Επομένως } x_0 = \frac{\pi}{6} \text{ και συνεπώς } f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι δε ζητείται ο τύπος της συνάρτησης f^{-1} αλλά η τιμή της στη θέση $\frac{\pi}{12}$.

Αρκεί λοιπόν να εκφράσουμε το

$\frac{\pi}{12}$ ως τιμή της f . Δηλαδή, να

βρούμε το $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε

$$f(x_0) = \frac{\pi}{12}.$$

51.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [2, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1-2} = \sqrt[3]{x_2-2} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x_1-2})^3 = (\sqrt[3]{x_2-2})^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1-2 = x_2-2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Έχουμε : } y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow y^3 = x-2 \Leftrightarrow x = y^3 + 2$$

$$\text{Αλλά } x \in A \text{ οπότε : } x \geq 2 \Leftrightarrow y^3 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

$$\text{Άρα } x = y^3 + 2 \text{ με } y \geq 0.$$

$$\text{Αλλά αν } y = f(x), \text{ τότε } x = f^{-1}(y) \text{ οπότε } f^{-1}(y) = y^3 + 2 \text{ με } y \geq 0,$$

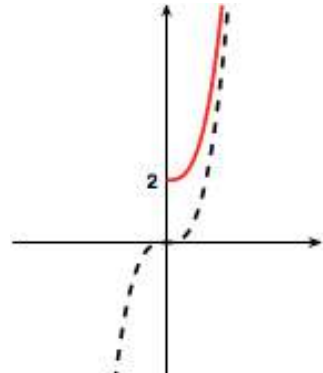
$$\text{ή ισοδύναμα } f^{-1}(x) = x^3 + 2, \quad x \geq 0.$$

ii. Η γραφική παράσταση της

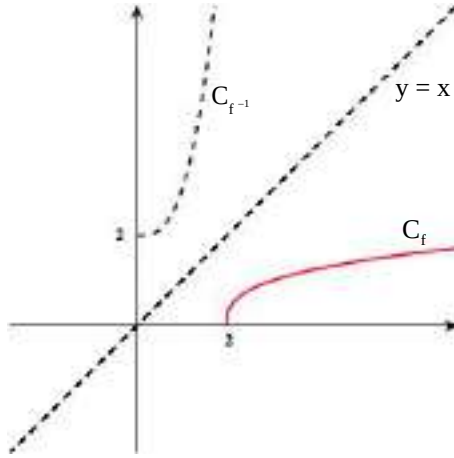
$$f^{-1}(x) = x^3 + 2, \quad x \geq 0$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = x^3$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Επειδή είναι $x \geq 0$ η $C_{f^{-1}}$ είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων).
Επομένως η C_f είναι η παρακάτω :



Παρατήρηση

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f ή της f^{-1} κάνουμε όποια είναι πιο εύκολη και επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, έπειτα κάνουμε την άλλη.

52.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} .
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$.

Λύση

- i. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \\ & \bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(+)} e^{-x_1} - x_1 > e^{-x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (1)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- ii. Η f ως γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1» και επομένως αντιστρέφεται.

- iii. Επειδή η f είναι «1-1», για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = 1 - x & \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(1 - x) \\ & \Leftrightarrow x = e^{-(1-x)} - (1 - x) \\ & \Leftrightarrow x = e^{x-1} - 1 + x \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 \\ & \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

- iv. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \leq 1 - x & \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(1 - x) \\ & \Leftrightarrow x \geq e^{-(1-x)} - (1 - x) \\ & \Leftrightarrow x \geq e^{x-1} - 1 + x \Leftrightarrow e^{x-1} \leq 1 \\ & \Leftrightarrow e^{x-1} \leq e^0 \Leftrightarrow x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Αν $\alpha = \beta$ τότε συνεπάγεται $f(\alpha) = f(\beta)$ για οποιαδήποτε συνάρτηση f (εφόσον βέβαια $\alpha, \beta \in D_f$).

Όμως το αντίστροφο

« αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε συνεπάγεται $\alpha = \beta$ » ισχύει μόνο αν η f είναι «1-1» συνάρτηση.

Επομένως για να ισχύει η ισοδυναμία " $\Leftrightarrow$ " πρέπει απαραίτητα η f να είναι «1-1»

53.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} x_1 - 1 + \ln x_1 < x_2 - 1 + \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα «1 – 1» και επομένως αντιστρέφεται.

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $x \leq 0$ και δεδομένου ότι η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, δηλαδή $f^{-1}(x) > 0$, η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$ αληθεύει.

♦ Αν $x > 0$, τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \geq x &\stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(f^{-1}(x)) \geq f(x) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x - 1 + \ln x \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq e \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq e \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 0] \cup (0, e] = (-\infty, e]$.

54.

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\ln x + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

Λύση

i. Η $f(x) = 2\ln x + x + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \quad (1)$$

$$x_1 + 1 < x_2 + 1 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$2\ln x_1 + x_1 + 1 < 2\ln x_2 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

ii. **α' τρόπος**

Επειδή οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμος πρώτης και τρίτης

γωνίας των αξόνων) τα σημεία τομής της C_f με την $y = x$ και τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$, ταυτίζονται.

Συνεπώς για να βρούμε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$, αρκεί να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με την $y = x$, δηλαδή να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln x + x + 1 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln x = -1 \\ y = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -\frac{1}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1/2} \\ y = e^{-1/2} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ στο σημείο $A(e^{-1/2}, e^{-1/2})$ και αυτό είναι και το σημείο τομής της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$.

β' τρόπος

Τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = x \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{f: "1-1"} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(f^{-1}(x)) = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\ln x + x + 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -\frac{1}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1/2} \\ y = e^{-1/2} \end{cases}$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την ευθεία $y = x$ στο σημείο $A(e^{-1/2}, e^{-1/2})$.

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις

$$f(x) = x \quad \text{και} \quad f^{-1}(x) = x$$

είναι **ισοδύναμες**.

Δηλαδή τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$ ταυτίζονται.

55.

Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 4)$ να λύσετε την ανισότητα

$$f(1 + f^{-1}(x - 1)) > 4.$$

Λύση

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 4)$ θα ισχύει

$$f(2) = 3 \quad (1) \quad \text{και} \quad f(3) = 4 \quad (2)$$

Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα τότε θα είχαμε :

$$2 < 3 \Leftrightarrow f(2) > f(3) \Leftrightarrow 3 > 4, \quad \text{άτοπο}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(1 + f^{-1}(x - 1)) &> 4 \Leftrightarrow \overset{(2)}{f(1 + f^{-1}(x - 1))} > f(3) \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} 1 + f^{-1}(x - 1) > 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x - 1) > 2 \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} f(f^{-1}(x - 1)) > f(2) \xrightarrow{(1)} x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 4 \end{aligned}$$

56.

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} + 2f^3(x) + 1 = x$ (1)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Είναι :

$$e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \quad (2) \quad \text{και} \quad f^3(x_1) = f^3(x_2) \Leftrightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) παίρνουμε :

$$e^{f(x_1)} + 2f^3(x_1) = e^{f(x_2)} + 2f^3(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)} + 2f^3(x_1) + 1 = e^{f(x_2)} + 2f^3(x_2) + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1 - 1» οπότε αντιστρέφεται.

ii. Για κάθε $y \in f(A) = \mathbb{R}$ είναι $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Οπότε η δοθείσα σχέση γράφεται :

$$e^y + 2y^3 - f^{-1}(y) + 1 = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + 2y^3 + 1, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = e^x + 2x^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

57.

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση, τότε υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1} η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Λύση

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση θα είναι και «1 - 1», άρα θα υπάρχει η

αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f το $f(A)$.

♦ Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ έχουμε :

$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)), \quad \text{αφού } f(f^{-1}(y)) = y, \text{ για κάθε } y \in f(A)$$

οπότε :

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2), \quad \text{αφού } f \text{ γνησίως αύξουσα συνάρτηση.}$$

Επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

♦ Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ έχουμε :

$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)), \quad \text{αφού } f(f^{-1}(y)) = y, \text{ για κάθε } y \in f(A)$$

οπότε :

$$f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2), \quad \text{αφού } f \text{ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.}$$

Επομένως η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

58.

Να αποδείξετε ότι αν μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε και η αντίστροφή της f^{-1} είναι περιττή.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Για κάθε $y \in D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$ και $-y \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \stackrel{(f: \text{περιττή})}{=} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

Άρα η f^{-1} είναι περιττή.

59.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- Αν η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$ τότε η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$.
- Αν $f^{-1}(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=x$.

Λύση

- Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$, έχουμε $f(x) < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f(x) < x \Leftrightarrow f(x) < f(f^{-1}(x)) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x < f^{-1}(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έστω ότι υπάρχει } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ ώστε: } f(x_0) \geq x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(f(x_0)) \geq f(x_0) \quad (1)$$

$$\text{Όμως: } f^{-1}(x_0) > f(x_0) \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_0)) > f(f(x_0)) \Rightarrow x_0 > f(f(x_0)) \quad (2)$$

Απο τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $x_0 > f(x_0)$, που είναι άτοπο.

Άρα $f(x) < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

60.

A. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις

$$f(x) = f^{-1}(x) \quad \text{και} \quad f(x) = x$$

είναι ισοδύναμες.

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

Λύση

A. Θα αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

♦ Έστω x_0 : ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ δηλαδή $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

Αν $f(x_0) \neq x_0$ τότε θα είναι $f(x_0) > x_0$ ή $f(x_0) < x_0$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε :

$$\bullet \text{ Αν } f(x_0) > x_0 \Leftrightarrow f(f(x_0)) > f(x_0) \stackrel{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 > f(x_0), \text{άτοπο.}$$

$$\bullet \text{ Αν } f(x_0) < x_0 \Leftrightarrow f(f(x_0)) < f(x_0) \stackrel{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x_0)) < f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 < f(x_0), \text{άτοπο.}$$

Άρα ισχύει $f(x_0) = x_0$ δηλαδή x_0 : ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$.

♦ Έστω x_0 : ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή $f(x_0) = x_0$.

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

έχουμε $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = f^{-1}(x_0)$,

δηλαδή x_0 : ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$

B. i. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 - 1 < 2x_2^3 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς θα είναι και «1 – 1».

Επομένως η f αντιστρέφεται.

ii. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

Αλλά λόγω **A.** αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι :

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 2x^3 - 1 = x \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } 2x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ (αδύνατη)}$$

Για $x = 1$: $f(1) = 1$.

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο $A(1, 1)$.

61.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \\ x_1 &< x_2 \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln(x_1 - 1) + x_1 < \ln(x_2 - 1) + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα,

άρα «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Με χρήση παραγώγων

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 1 > 0,$$

για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως
αύξουσα.

- ii. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

α' τρόπος

Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} αρκεί, για κάθε $x, y \in D_f \cap D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$, να λύσουμε το σύστημα.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f(f^{-1}(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln(x-1) + x \\ x = \ln(y-1) + y \end{cases} \quad (1)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$$y - x = \ln(x-1) + x - \ln(y-1) - y \Leftrightarrow \ln(x-1) + 2x = \ln(y-1) + 2y \Leftrightarrow h(x) = h(y) \quad (3)$$

όπου $h(t) = \ln(t-1) + 2t$, $t \in (1, +\infty)$.

Για κάθε $t_1, t_2 \in (1, +\infty)$ με $t_1 < t_2$ έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} t_1 < t_2 &\Leftrightarrow t_1 - 1 < t_2 - 1 \Leftrightarrow \ln(t_1 - 1) < \ln(t_2 - 1) \\ t_1 < t_2 &\Leftrightarrow 2t_1 < 2t_2 \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln(t_1 - 1) + 2t_1 < \ln(t_2 - 1) + 2t_2 \Leftrightarrow h(t_1) < h(t_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα,

άρα «1-1», οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει $y = x$.

Οπότε το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} x = \ln(x-1) + x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A(2, 2)$.

β' τρόπος

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$f(x) = f^{-1}(x), \text{ με } x \in D_f \cap D_{f^{-1}} = (1, +\infty).$$

Αλλά αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι :

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) + x = x \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2.$$

Για $x=2$: $f(2) = 2$.

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο

$A(2, 2)$.

Με χρήση παραγώγων

$$h'(t) = \frac{1}{t-1} + 2 > 0,$$

για κάθε $t \in (1, +\infty)$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Παρατήρηση

«Αν η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.»

Όμως την παραπάνω πρόταση για να την χρησιμοποιήσετε πρέπει πρώτα να την αποδείξετε.

62.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [0, +\infty)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη.

- ii. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

Λύση

- i. Η $f(x) = 1 - x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow_{\substack{x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Έχουμε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y \Leftrightarrow_{x \geq 0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1-y} \\ 1-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1-y} \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Αλλά $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-y} \geq 0$, ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y) = \sqrt{1-y}$, $y \leq 1$ ή $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$.

ii. Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in A = [0, +\infty) \quad \text{και} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}, \quad x \in B = (-\infty, 1]$$

αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ με $x \in A \cap B = [0, 1]$

Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε :

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow 1 - x^2 = \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)^2 = (\sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 + x^4 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0 \quad \text{σχ. Horner} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Η ρίζα } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \notin [0, 1],$$

άρα απορρίπτεται.

♦ Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$.

♦ Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 0$.

♦ Για $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$$f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Άρα τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα **A(0, 1), B(1, 0)**

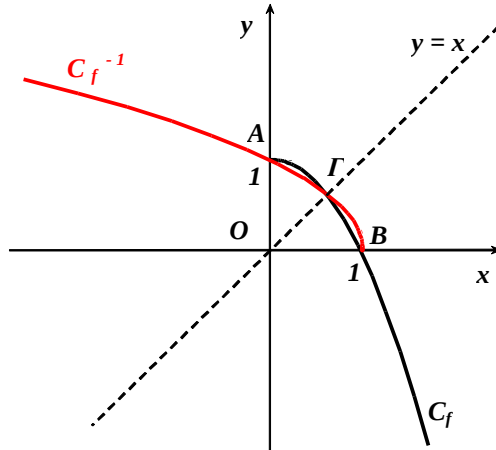
Παρατήρηση

- ♦ Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν) δε βρίσκονται μόνο πάνω στη διχοτόμο $y = x$.
- ♦ Αν η C_f έχει κοινό σημείο με την $y = x$, τότε λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ το σημείο αυτό είναι και σημείο της $C_{f^{-1}}$.
- ♦ Αν όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε όλα τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν) βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο $y = x$. Στην περίπτωση αυτή αντί για τη λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι προτιμότερο να επιλύουμε την ισοδύναμη της $f(x) = x$, δηλαδή να βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τη διχοτόμο $y = x$.

και $\Gamma\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ από τα οποία παρατηρούμε ότι μόνο το Γ ανήκει

στη διχοτόμο $y = x$.

Τα A και B δεν ανήκουν στην $y = x$ είναι όμως συμμετρικά ως προς αυτήν.



Ασκήσεις

Συναρτήσεις «1 - 1».

185. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1 - 1» :

i. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{3 + 4x}}$ ii. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ iii. $f(x) = \ln \frac{e^x}{1-e^x}$

iv. $f(x) = 1 + e^{1+\sqrt{1-x}}$ v. $f(x) = 2 - x - e^x$ vi. $f(x) = 2x + e^x - 1$

vii. $f(x) = \frac{xe^{-x} + 3}{x}, x > 0$ viii. $f(x) = (e^x - 1)\ln(x+2)$ ix. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x+1}$

186. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 3\ln x, x > 0$ είναι «1-1»

187. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1 \\ -\ln x, & x > 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

188. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση $(f \circ f)(x^2 + 4x) = (f \circ f)(x + 4)$

189. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x + 1$.

iii. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $e^{-\lambda} - e^{-\mu} = \lambda - \mu$, να δείξετε ότι $\lambda = \mu$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $e^{-2x+1} - e^{-x} = x - 1$.

190. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.

191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} + x - 2 > 0$.

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x + e^{x-2} = 3$ ii. $e^{x^2-2} + x^2 = 3$ iii. $e^{3x-2} - e^{x^2} = x^2 - 3x + 2$

193. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\ln x^x + x = 1$

ii. $\ln \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2} = \frac{1 - x^2}{(2x^2 + 1)(x^2 + 2)}$

194. α. Να αποδείξετε ότι είναι «1 - 1» οι συναρτήσεις :

i. $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$

ii. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} - x^2$.

195. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει :

$$f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

196. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν

$$f(x) = g(x^2) - g(3x) + 20 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να εξετάσετε αν η f είναι «1 - 1».

197. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^2(1) + f^2(2) + 1 = f(1) + f(2) + f(1)f(2)$$

Να εξετάσετε αν η f είναι «1 - 1».

198. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x)f(2017-x) \geq f^2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι «1 - 1».

199. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι «1 - 1» και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

200. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 2x + 1 \text{ και } g(x) = e^{f(x)} + x^2 + \alpha x - 2, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι ούτε η f ούτε η g είναι «1 - 1».

201. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9 \text{ και } g(x) = x^2 - x \cdot f(x) + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(3) = 3$

ii. Η συνάρτηση g δεν είναι «1 - 1».

202. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i.** Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$.
- ii.** Αν $g(x)=x^2 - xf(x)+1$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την τιμή $g(0)$ και να αποδείξετε ότι η g δεν είναι 1-1.
- 203.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f^3(x) + 2f(x) = 3x^{2017} - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 - 2x) = f(x - 2)$.
- 204.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2(f(x))^3 + f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i.** να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- ii.** να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iii.** να αποδείξετε ότι $f(1)=1$.
- iv.** να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$.
- 205. i.** Αν οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι «1-1».
- ii.** Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση
- $$\varphi(x) = [f(x)]^3 + 2f(x) - 3$$
- είναι «1-1».
- 206.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $g(x) = f(x) - 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- i.** Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii.** Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\lambda - 1) + 2 < f(0) + 2e^{\lambda-1}$
- iii.** Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $g(\ln \alpha) - g(\ln \beta) = 2(\beta - \alpha)$ να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.
- 207.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x + 2$.
- i.** Να βρείτε το είδος της μονοτονίας.
- ii.** Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) \geq 12$.
- iii.** Να αποδείξετε ότι $f(2x) + f(1) < f(3x) + f(e^x)$ για κάθε $x > 0$.
- iv.** Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) + f(e^x) = f(3x) + f(e^{2017x})$ για κάθε $x \leq 0$
- 208.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$.
- A. i.** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i.** Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
- iii.** Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$.

- 209.** **i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 2^x$ είναι συνάρτηση 1-1.
- ii.** Έστω f μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(1,4)$, $N(5,3)$.
Να λύσετε την ανίσωση $f(1 + f(x + 7)) > 3$.
- iii.** Για την παραπάνω συνάρτηση f να λύσετε την εξίσωση $f(x^6 + 2^{x^2} - 2) = 4$.

210. Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x$, $x \in \mathbb{R}$.

- i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii.** Αν η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $x_0 = \rho$, να δείξετε ότι $\rho = 1$.
- iii.** Να αποδείξετε ότι $f(x) < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv.** Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ αν $f(2\alpha^2 - 1) + e^{f(\alpha)} = \alpha$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.

211. Αν για τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει
 $(f \circ g)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

τότε :

- i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1 - 1».
 - ii.** Να λύσετε την εξίσωση $g(x^2 - 5x + 4) = g(1 - x)$.
- 212.** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα :
- $$(f \circ f)(x) + 3f(x) - x^{2017} = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».
 - ii.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x + \eta\mu x) = f(1 - e^x)$, στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- 213.** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα :
- $$f(f(x)) = f(x) + e^x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».
 - ii.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 - 5x) = f(2x - 6)$.
- 214.** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα
 $(f \circ f)(x) = f(x) + \alpha x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι :

i. η f είναι « $1-1$ »

ii. $f(0)=0$

iii. Αν ισχύει $f(g(e^x)-2x+3)=0$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση g .

215. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε :

$$f(f(x)) = xf(x) \text{ και } f(x) > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ »

ii. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

iii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ αν ισχύει : $\frac{f(\alpha^2+2)}{\alpha^2+\alpha+1} = \frac{f(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha^2+2}$.

216. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει :

$$f(f(x)) = f(x) + \ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».

ii. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

iii. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει :

$$f^2(\alpha) + f^2(\beta) - 2f(\alpha) - 2f(\beta) + 2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

217. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα :

$$(g \circ f)(x) = 2x^5 + e^{f(x)} + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1-x^3)$.

218. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».

ii. Να βρείτε το $f(3)$.

219. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει μία ακριβώς λύση.

iii. Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι « $1-1$ » με

$$g(x) = e^x + e^{f(x)}$$

να βρείτε τον τύπο της f .

220. A. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι « $1-1$ », να αποδείξετε ότι και η f είναι « $1-1$ ».

ii. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι « $1 - 1$ » και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η g είναι « $1 - 1$ ».

B. Έστω φ, h δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Αν ισχύει

$$\varphi(\varphi(x)) = e^{-x} + \varphi^3(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τότε :

i. Να αποδείξετε η φ είναι « $1 - 1$ ».

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(h(x) + x^2 - x) = \varphi(h(x) + 2x - 2)$.

221. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x$.

i. Ποια η μονοτονία της f ;

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = e^{e+1} + e + 1$.

iii. Να βρείτε την συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει :

$$f(g(x)) = x + \ln x, \quad x > 0.$$

222. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right), \quad x, y \neq 0.$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε :

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1 - 1$ ».

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$.

v. Αν επιπλέον είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

223. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) + f(e) = 2e + 3$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) - f(y) = \ln \frac{x}{y} + 2(x - y), \quad x, y \in (0, +\infty)$$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(e)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1 - 1$ ».

iv. Να λύσετε την ανίσωση $4(x^2 - 1) < \ln \frac{x^2 + 10}{3x^2 + 8}$

Αντίστροφες συναρτήσεις.

224. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους :

i. $f(x) = 2 + \sqrt{e^x - 1}$

ii. $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$

iii. $f(x) = 3e^{x-2} - 5$

iv. $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-2}}$

v. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

vi. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

vii. $f(x) = e^x - e^{-x}$

viii. $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$

ix. $f(x) = (\sqrt{5} + 2)^x - (\sqrt{5} - 2)^x$

225. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1} όταν

i. $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ **ii.** $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x - 1)$

iii. $f(x) = (x-1)^3 - 2$ **iv.** $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - x$

v. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ **vi.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

226. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = 29$.

227. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \ln x$ και $g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.

ii. Να βρείτε την g^{-1} .

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(f(x)) > 0$.

228. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

229. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = e^x + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε την f^{-1} .
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι περιττή.
- iii. Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f^{-1}$.
- iv. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της $g \circ f^{-1}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- 230.** Έστω $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $(f \circ g)^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$. Τι παρατηρείτε ;
- 231.** Έστω η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$
- i. Να παραστήσετε γραφικά την f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ » και να βρείτε την f^{-1} .
- 232.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3}}$.
- Να βρείτε την f^{-1} και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- 233.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Να βρείτε την f^{-1} και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- 234.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο
- $$f(x) = 2\eta\mu x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».
- ii. Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(2)$.
- 235.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{2x} + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».
- iii. Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(2)$.
- 236.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».
- iii. Να βρείτε την αντίστροφη της f .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) = 3$.
- 237.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
- $$f(f(x)) + f(x) = 2x - 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(3) = 2.$$
- a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β. Να λύσετε τις εξισώσεις

- i. $f^{-1}(x) = 3$ ii. $f^{-1}(x) = 2$
- 238.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
 iii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2 - 3x + 3) < 1$.
 iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 3x + 3) = 1$.
- 239.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
 ii. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} .
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.
 iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$.
 v. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.
- 240.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - 3x + 2$
- a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να λύσετε :
- i. Την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.
 ii. Την ανίσωση $f^{-1}(\ln x) < 1$.
 iii. Την εξίσωση $f^{-1}(x) = x + 1$.
 iv. Την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq x + 1$.
- 241.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη.
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^3+x-7} + \sqrt{x^3+x-8}) = 1$.
- 242.** Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 0)$. Να λύσετε:
- i. την εξίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2x) + 2) = 1$.
 ii. την ανίσωση $f(f^{-1}(x^3 + x) - 2) > 2$.
- 243.** Τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(6, 5)$ βρίσκονται πάνω στη γραφική παράσταση της γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

iii. Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $f^{-1}(3 + f^{-1}(\lambda^2 - 2\lambda + 3)) = 6$.

244. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$ να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.

245. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 3)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

$$f(2 + f^{-1}(e^{\lambda-1})) < 2$$

246. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5.$$

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$

247. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

248. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 8$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της αντίστροφης f^{-1} και της ευθείας $y = x$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^{2x} + e^x) > 2$.

249. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + (f \circ f)(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g είναι 1-1.

ii. Να αποδείξετε ότι $(g \circ f^{-1})(x) = x^3 + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Αν $f(1) = 1$, να λύσετε την εξίσωση $x^3 + f(x) = 2$.

250. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$

251. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^5(x) + f^3(x) + f(x) - x = 4$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-4) = x$.

252. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».
- ii. Να βρείτε την f^{-1} .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(2^{x^2-2}) = f^{-1}(2^x)$ ως προς $x \in \mathbb{R}$.

253. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + 2f(x) - x = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.
- iii. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

254. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - \ln(x-1) = 4 \text{ για κάθε } x > 1.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

255. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$.

- i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = e^x + x$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της f .

256. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(f(x)) = f(x) + 2x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- β. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

γ. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(2) = 3$, τότε :

- i. να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 2 + 2f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. να βρείτε το $f(3)$.
- iii. να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

257. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει $f(x) > 0$ και $e^{f(x)} + \ln f(x) = x + e$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)} + \ln f(x) = e$.

258. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)} + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1” και να βρεθεί η f^{-1} .

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2 + \ln 2)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-4} - e^{2x+1} = x + 5$.

259. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$.

γ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε :

i. να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f ,

ii. να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2 - x)$.

260. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{11} + 8x - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον αριθμό $f^{-1}(-8)$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) < 1$.

261. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εξετάσετε την f^{-1} ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $f(0) = -1$, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .

iii. Αν η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία $y = x$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι κάτω από την ευθεία $y = x$.

262. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$, που έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.

iii. Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(2)$.

iv. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της f^{-1} .

263. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $(f \circ f)(x) = -x$.

Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι 1-1

ii. $f^{-1} = -f$

iii. Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

iv. Η f είναι περιττή.

v. $f(0) = 0$

264. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι 1-1.

ii. $f^{-1}(x) = 1 + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την διχοτόμο της γωνίας xOy .

265. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(0) = 0$

ii. $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. αν η f έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι συνάρτηση “1-1” και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

266. Έστω η μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x+y) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(0) = 1$

iii. $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. αν η $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$, τότε η f είναι «1-1» και ακόμη ότι $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

267. A. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις

$$f(x) = f^{-1}(x) \quad \text{και} \quad f(x) = x$$

είναι ισοδύναμες.

- B.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^9 + 4x + 4$.
- Na αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - Na υπολογίσετε το $f^{-1}(9)$.
 - Na λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^2 - 3x + 11) = 1$.
 - Na βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- 268.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^5 + x + 1$.
- Na αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Na λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.
 - Na υπολογίσετε το $f^{-1}(1)$.
- 269.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3^x + x - 27$, $x \in \mathbb{R}$.
- Na αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Na λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
 - Na βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .
- 270.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + x - 1)$.
- Na βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Na μελετήσετε συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - Na αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} .
- 271.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^3 - 1}{3}$
- Na αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
 - Na προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .
 - Na προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, f^{-1} με την $y = x$.
- 272.** Έστω η συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + 5f(x) + x = 0$ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Na αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
 - Na βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
 - Na βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $y=x$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

273. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε την f^{-1}
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(\ln x + f^{-1}(x) - x - 1) = 0$.

274. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) - e^x - x + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f^3(x) + f(x)) = 0$.

275. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x)(f(x) - x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε την f^{-1}
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(8(x^2 + 1)^2) - f(5(x^2 + 1)^3 - 8) = 0$.

276. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)^2 + 1 = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 1)^3}$.

- iii. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) > f(1 - x^3)$, για κάθε $x > 0$.

277. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{-x} - x - 1) - 1$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- iii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f^{-1}(f(x) - \ln(-x) + 1) + 1 < 0$, για κάθε $x < 0$.

278. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)} + f(x) - x = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

ii. Να βρείτε το $f(0)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-2} < 3 - x^2$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

279. α. Να λύσετε την εξίσωση $e^x + 3x - 1 = 0$.

β. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(e^x + x) + f(1 - 2x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x) - e^{x-1} + 1) > 1$

280. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι περιττή.

iv. Αν g συνάρτηση με τύπο $g(x) = -\ln x$ να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{-1} \circ g$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

281. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι « 1 - 1 ».

B. Θεωρούμε συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

για την οποία ισχύει $f(g(x) - x) - f(\ln x + 1) = 0$, για κάθε $x > 0$.

i. Να βρείτε τον τύπο της g .

ii. Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη.

iii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει

$$g^{-1}(3g(\lambda + 1) - 4) = 1.$$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$.

v. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) + g(x^2) = g(x^5) + g(x^{10})$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

282. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) + x^3 + x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(-1, 1)$.
- β. Να αποδείξετε ότι η f είναι « $1-1$ ».
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(-2 + f^{-1}(\ln^2 x - 10)) = 1$.
- δ. Αν επιπλέον η f είναι γνήσια μονότονη τότε :
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(-2 + f^{-1}(x^2 - 10)) < 1$.
- 283.** Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν
- $$f(\eta\mu x) > f(2) \quad \text{και} \quad f(3-x) + f(x+5) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(8 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$.
 - Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x+4)}{e^x - 1} < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$f(3x) + f(8x) = f(5x) + f(10x)$$
 έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- 284.** Δίνονται οι συναρτήσεις
- $$f(x) = \kappa x + \ln(e^x + 1) - 1, \quad \kappa > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = f(x) - x.$$
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Αν $f^{-1}(\ln 6 - 1) = \ln 2$, να βρείτε το κ .
- Για $\kappa = 1$:
- Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} .
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g^{-1} βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) - f(x) = 0$.
- 285.** Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι $1-1$.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι $1-1$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x) + x^3 + x) = g(f(x) - \ln x + 2)$.
 - Αν $g(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ae^{g(x)} = 1$, έχει μοναδική λύση για κάθε $a \in (0, 1)$.

286. Έστω $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(e^x - 1) = x - e^{-x} + 1, \text{ για κάθε } x > -1.$$

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει :

$$(g^2(x) - g(x) + 1) \ln g(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1, x > -1.$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} - 1 > 0$.

iii. Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x)) = 1$

287. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(1, +\infty)$.

iii. Για κάθε $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha < \beta^\beta$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(x^4 + 2)^{x^4+2}}{(x^2 + 4)^{x^2+4}} = 1$

288. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x} > x + 1$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)e^{x^2} = 1$.

289. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να τη βρείτε.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\frac{1}{1-e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$.

290. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$, $x \geq 0$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x^4 + 1) > \ln(2e) - x^2$.

iii. Να λύσετε στο διάστημα $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ την εξίσωση

$$x^2 - 3x - 4 = \ln \frac{(3x + 4)^2 + 1}{x^4 + 1}.$$

iv. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0, +\infty)$.

291. Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση :

$$f(e^x + 1) = x + e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$.

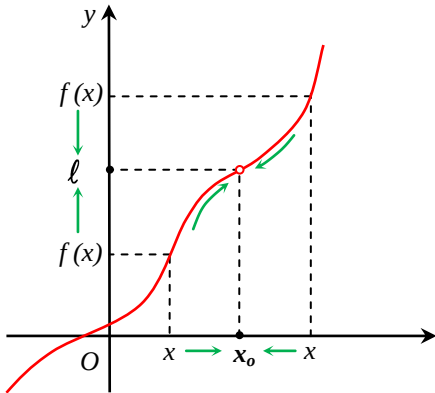
ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} .

iii. Να υπολογίσετε το $f(e^2 + 1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(x+1) - 1 = f^{-1}(e^2 + 3)$$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$



Η έννοια του ορίου

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη (τουλάχιστον) σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta).$$

Αν οι τιμές της f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ , καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 (χωρίς να είναι ίσες με το x_0) τότε λέμε ότι **το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι το ℓ** και γράφουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Παρατηρήσεις :

1. Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε « **κοντά στο x_0** » δηλαδή να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής :

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ ή } (a, x_0) \text{ ή } (x_0, \beta)$$

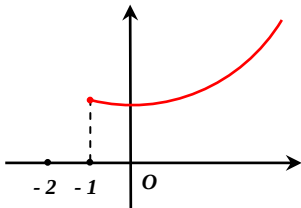
Αρα για να έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αρκεί το x_0 να είναι άκρο ή

σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f .

Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε λέμε ότι « **το όριο δεν έχει νόημα** » ή ότι « **το όριο δεν ορίζεται** »

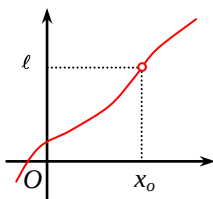
2. Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ή να μην ανήκει σ' αυτό.

3. Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό.

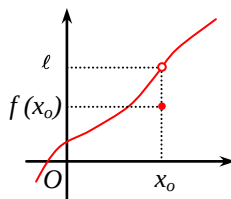


$$D_f = [-1, +\infty) \quad \text{Το } x_0 = -2 \notin D_f$$

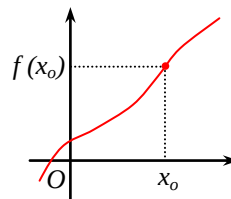
Το πλησίασμα στο -2 δεν επιτρέπεται, δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ **δεν έχει νόημα**



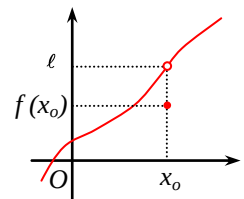
$$x_0 \notin D_f$$



$$x_0 \in D_f$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και στις δύο περιπτώσεις

4. Αποδεικνύεται ότι :

Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό.

Δηλαδή δεν μπορεί μια συνάρτηση f να έχει δύο διαφορετικά όρια στο ίδιο σημείο.

5. Ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \ell] = 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

Πλευρικά Όρια

- ♦ Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$) τότε γράφουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε :

« Το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά είναι ℓ_1 ».

- ♦ Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$) τότε γράφουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε :

« Το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά είναι ℓ_2 ».

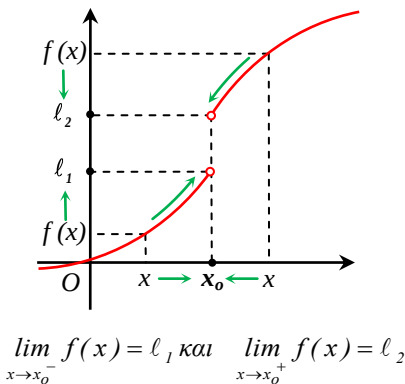
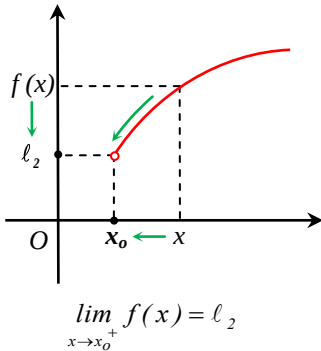
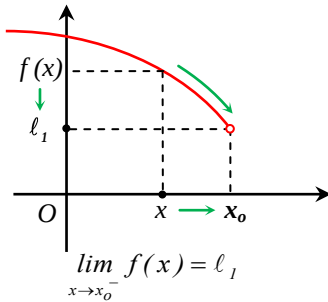
- ♦ Τους αριθμούς :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ και } \ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο της f στο x_0** ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο της f στο x_0** .

- ♦ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$



- ♦ Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, τότε λέμε ότι η f **δεν έχει όριο στο x_0** .

- ♦ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) τότε ορίζουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

- ♦ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε ορίζουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Όρια και Πράξεις

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν :

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις αρκεί να είναι σε πλήθος πεπερασμένο.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} [\kappa \cdot f(x)] = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις αρκεί να είναι σε πλήθος πεπερασμένο.

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .

Παρατηρήσεις:

1. Για να εφαρμόσουμε κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες θα πρέπει ότι τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.
2. Το όριο του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων f και g μπορεί να υπάρχει ακόμα και στην περίπτωση που τα όρια των f και g δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα :

Έστω $f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} -1 + x, & \text{αν } x < 0 \\ 1 + x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = -\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x < 0 \\ -1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Είναι : $f(x) + g(x) = x$, για κάθε $x \neq 0$.

Οπότε : $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$, ενώ **δεν υπάρχουν** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Άρα **ΔΕΝ ισχύει** : $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

3. ΔΕΝ ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right|$

Παράδειγμα :

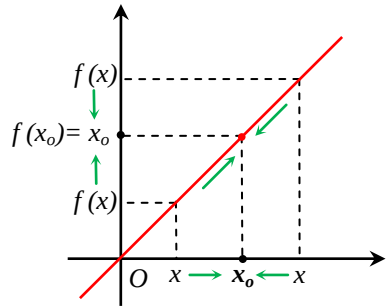
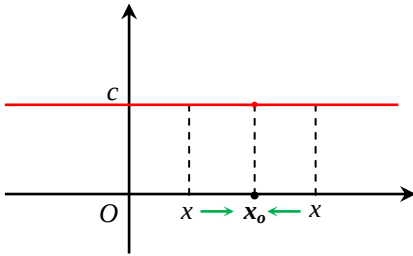
$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}. \quad \text{Είναι } |f(x)| = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 1$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **δεν υπάρχει**.

4. Επειδή ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ έχουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Όριο σταθερής συνάρτησης : $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

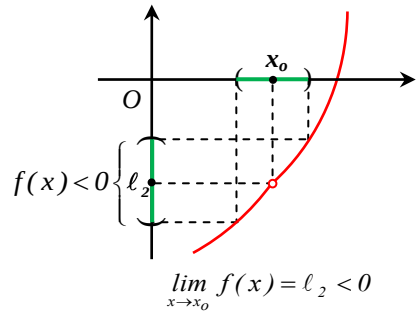
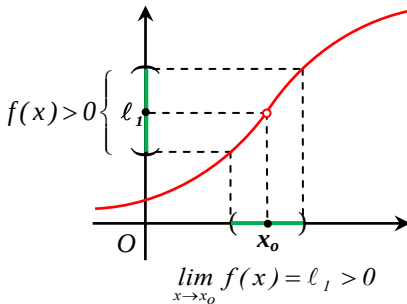
Όριο ταυτοτικής συνάρτησης : $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$



Όριο και Διάταξη

1^ο Θεώρημα

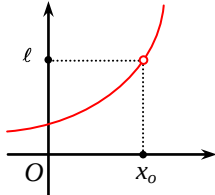
- ♦ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 .
- ♦ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$, κοντά στο x_0 .



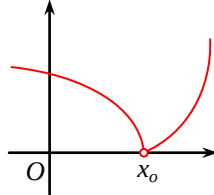
Παρατηρήσεις:

1. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι οι τιμές της συνάρτησης σε μια περιοχή του x_0 είναι **ομόσημες με το όριο** της συνάρτησης στο x_0 .
2. **Δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.**
Αν δηλαδή $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 **δεν** συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

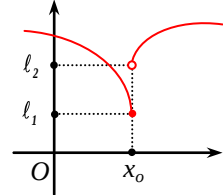
Μπορεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ να είναι θετικό, μηδέν ή να μην υπάρχει.



Είναι $f(x) > 0$ και το όριο είναι θετικό

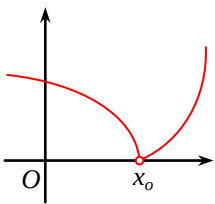


Είναι $f(x) > 0$ και το όριο είναι μηδέν



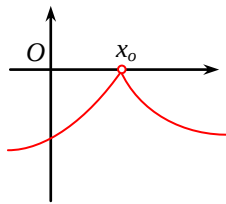
Είναι $f(x) > 0$ και το όριο δεν υπάρχει

3. Μια συνάρτηση με θετικές τιμές κοντά στο x_0 , **δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να έχει αρνητικό όριο.**
Αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει και όταν η συνάρτηση έχει αρνητικές τιμές κοντά στο x_0 .
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ **δεν** μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πρόσημο της f κοντά στο x_0 .



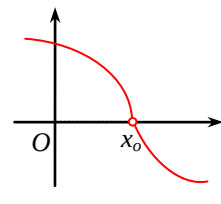
Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0



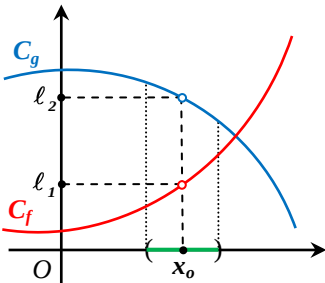
Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0



Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και

$f(x) > 0$ για $x < 0$ και $f(x) < 0$ για $x > 0$

2° Θεώρημα

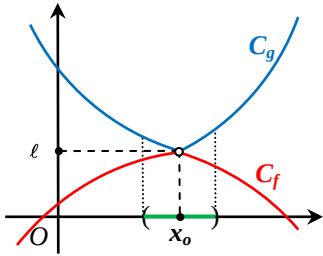
Είναι $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 οπότε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \leq l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει

$$f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0,$$

τότε θα ισχύει και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$



Είναι $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 αλλά
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Παρατηρήσεις :

1. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει

$$f(x) < g(x) \text{ κοντά στο } x_0,$$

τότε κατά μείζονα λόγο ισχύει :

$$f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0,$$

οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

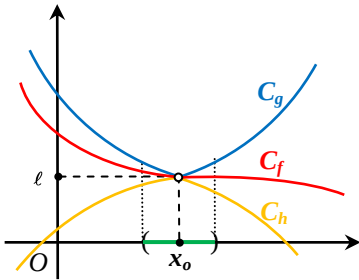
Επομένως το όριο δεν διατηρεί τη **γνήσια** διάταξη.

2. Αν ένα από τα δύο όρια ή και τα δύο δεν υπάρχουν, δεν μπορούμε να μιλάμε για διάταξη.

3. Αν $f(x) \leq g(x)$ **δεν μπορεί** να είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Κριτήριο Παρεμβολής



Έστω οι συναρτήσεις f, g και h .

$$\text{Αν } \begin{cases} h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \\ \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \end{cases}$$

τότε :

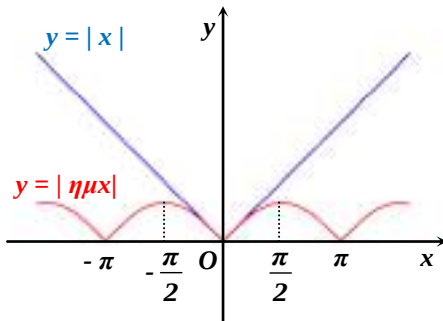
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Παρατήρηση :

Το κριτήριο εξασφαλίζει και την **ύπαρξη** του ορίου της μεσαίας συνάρτησης (που δεν το έχουμε από τις υποθέσεις).

Τριγωνομετρικά Όρια

Αποδεικνύεται ότι :



$$\diamond \lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 0$$

$$\diamond |\eta \mu x| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x = 0$).

Άρα : $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Όριο Σύνθετης Συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(g(x)))$ της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0 , τότε εργαζόμαστε ως εξής :

- Θέτουμε $u = g(x)$
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ .

Δηλαδή ισχύει : $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(g(x))) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

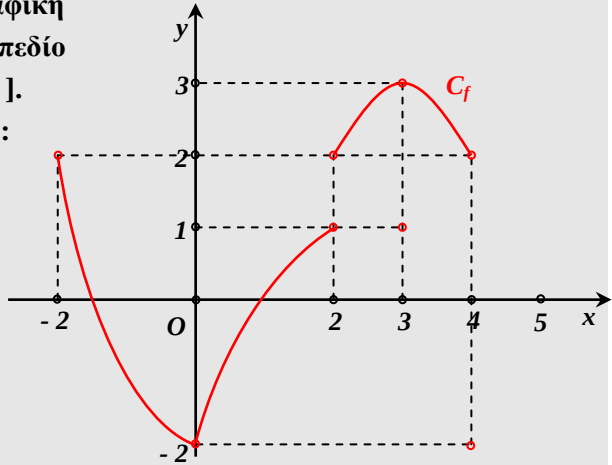
Εισαγωγή στο όριο

63.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-2, 4]$.

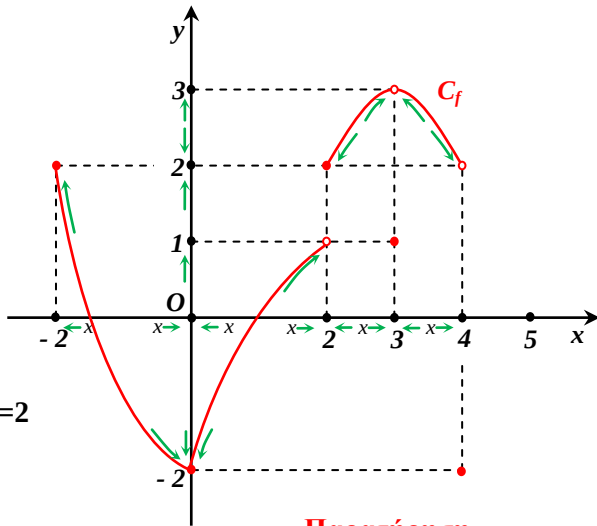
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| i. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | ii. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ | iv. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | vi. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ |
| vii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | viii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ |
| ix. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ | x. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ |



Λύση

- i. Το $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ δεν ορίζεται (δεν έχει νόημα) γιατί η f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [-2, 4]$ και επομένως το x δεν μπορεί να προσεγγίσει το -2 από μικρότερες τιμές.
- ii. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$
- v. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ vi. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$
- vii. Το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα ($\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$)
- viii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$
- ix. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$
- x. Το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δεν ορίζεται (δεν έχει νόημα)



Παρατήρηση

Τονίζουμε ότι οι έννοιες «το όριο ορίζεται» και «το όριο υπάρχει» είναι διαφορετικές και δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση, αφού κάποιο όριο μπορεί να ορίζεται αλλά να μην υπάρχει, όπως συμβαίνει στο vii) της εφαρμογής.

γιατί η f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [-2, 4]$ και επομένως το x δεν μπορεί να προσεγγίσει το 5.

64.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{αν } x < 0 \\ x^3, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

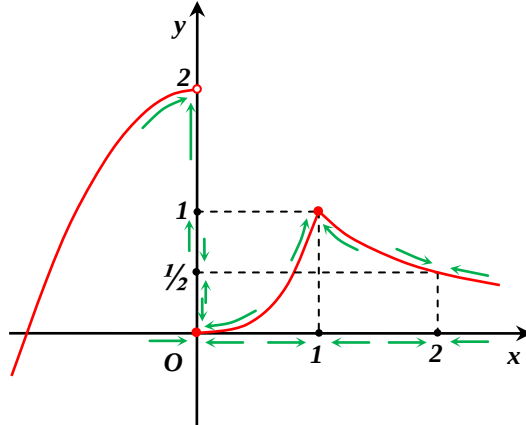
α. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Λύση

α.



β. i. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$

Ιδιότητες του ορίου

65.

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-2)^{2016} (x^2 + x + 5)]$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + |x^2 - x - 6| + 12}{x^2 + x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} + x - 2}{x^2 - 2x + 2}$ **iv.** $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 2} + \frac{|x| + 3}{x + 3} \right)$

Λύση

Για την εύρεση των ζητούμενων ορίων είναι αρκετή η πιστή εφαρμογή των ιδιοτήτων. Έτσι :

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} [(x-2)^{2016}(x^2+x+5)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^{2016} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+5) = \\ &= (1-2)^{2016} (1^2+1+5) = (-1)^{2016} \cdot 7 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + |x^2 - x - 6| + 12}{x^2 + x} &= \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + |x^2 - x - 6| + 12)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} (|x^2 - x - 6|) + \lim_{x \rightarrow 2} 12}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x)} \\ &= \frac{2 + |2^2 - 2 - 6| + 12}{2^2 + 2} = \frac{18}{6} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7} + x - 2}{x^2 - 2x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2+7} + x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 2)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+7)} + \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 2)} \\ &= \frac{\sqrt{3^2+7} + 3 - 2}{3^2 - 2 \cdot 3 + 2} = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 2} + \frac{|x| + 3}{x + 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x| + 3}{x + 3} = \frac{(-1)^2 + (-1) + 1}{-1 + 2} + \frac{|-1| + 3}{-1 + 3} \\ &= 1 + \frac{4}{2} = 3 \end{aligned}$$

Όρια ρητών συναρτήσεων**66.**

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2}{x^2 + 2x + 4} - \frac{3x + 6}{x^3 - 8} + \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{v+1} - (v+1)x + v}{x - 1}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση :

Παρατήρηση

✓ Επισημαίνουμε ότι για να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων που αφορούν πράξεις με συναρτήσεις πρέπει από πριν να γνωρίζουμε την ύπαρξη του ορίου κάθε συνάρτησης. Λέγοντας εδώ ότι υπάρχουν τα όρια εννοούμε να είναι πραγματικοί αριθμοί. Σε αντίθετη περίπτωση οι ιδιότητες δεν εφαρμόζονται.

Για παράδειγμα, μπορούμε να γράψουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

μόνο αν γνωρίζουμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

✓ Αν $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα, τότε :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \text{για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{για κάθε } x_0 \in \mathbb{R} \text{ με } Q(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Η f έχει πεδίο ορισμού :

$$A = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Η μορφή του πεδίου ορισμού εξασφαλίζει ότι το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x - 2) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Μεθοδολογία

Αν κατά την αναζήτηση του ορίου

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα})$$

έχουμε τη μορφή $\frac{0}{0}$, τότε μετατρέπουμε

αριθμητή και παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων και απλοποιούμε τον παράγοντα $x - x_0$ στον οποίο οφείλεται η

μορφή $\frac{0}{0}$ (όταν $x \rightarrow x_0$).

Οπότε ο κανόνας του πηλίκου για τα όρια οδηγεί στη μορφή $\frac{0}{0}$ που είναι μια

«απροσδιόριστη μορφή» με την έννοια ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του ορίου, το οποίο είναι διαφορετικό κατά περίπτωση ή μπορεί και να μην υπάρχει.

Η άρση απροσδιοριστίας θα γίνει κάνοντας γινόμενο παραγόντων αριθμητή και παρονομαστή και απλοποιώντας τον παράγοντα $x - 2$ στον οποίο οφείλεται ο μηδενισμός του παρονομαστή για $x = 2$.

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2+2x+1}{x-3}$$

1	0	-3	-2	2
↓	2	4	2	
1	2	1	0	

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+1}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)} = \frac{9}{-1} = -9$$

ii. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+2x+4} - \frac{3x+6}{x^3-8} + \frac{1}{x-2}$$

είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+4} - \frac{3x+6}{x^3-8} + \frac{1}{x-2} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+4} - \frac{3x+6}{(x-2)(x^2+2x+4)} + \frac{1}{x-2} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2) - (3x+6) + (x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x - 6 + x^2 + 2x + 4}{(x-2)(x^2+2x+4)} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Δεν είναι δυνατή η εφαρμογή της ιδιότητας :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x) + h(x)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \end{aligned}$$

αφού δε γνωρίζουμε αν αυτά τα όρια υπάρχουν.

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + x + 1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{7}{12}$$

1	-1	-1	-2	2
↓	2	2	2	
1	1	1	0	

iii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^{v+1} - (v+1)x + v}{x-1}$ είναι το

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{v+1} - (v+1)x + v}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v x - vx - x + v}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^v - 1) - v(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1) - v(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x(x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1) - v]}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [x(x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1) - v] = 1 \cdot \underbrace{(1^{v-1} + 1^{v-2} + \dots + 1 + 1)}_{v - \text{πληθος}} - v = v - v = 0 \end{aligned}$$

Θυμηθείτε

♦ Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει :

$$a^v - \beta^v = (a - \beta)(a^{v-1} + a^{v-2}\beta + a^{v-3}\beta^2 + \dots + a\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$$

♦ Για $v \in \mathbb{N}^*$ και v περιττός, ισχύει :

$$a^v + \beta^v = (a + \beta)(a^{v-1} - a^{v-2}\beta + a^{v-3}\beta^2 - \dots - a\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$$

Όρια άρρητων συναρτήσεων

67.

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x^2 - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-1}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{3x - 2\sqrt{x} - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 2} - x}{\sqrt[3]{x+6} - 2}$

Λύση

i. Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{x^2 - 1}$$

έχει πεδίο ορισμού το

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Οπότε έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου το οποίο έχει την απροσδιόριστη

μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+3} - (x+1)}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{[\sqrt{x^2+3} - (x+1)][\sqrt{x^2+3} + (x+1)]}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - (x+1)^2}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \frac{x^2 + 3 - x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \\ &= \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \frac{-2}{2(2+2)} = \frac{-1}{4}$$

ii. Έστω $f(x) = \frac{2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$.

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, οπότε έχει νόημα η

αναζήτηση του ορίου το οποίο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$. Είναι :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1} = \frac{(2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3})(2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})}$$

Χρήσιμοι Μετασχηματισμοί

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ \bullet \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[(2\sqrt{2x-1})^2 - (\sqrt{x+3})^2](\sqrt{x}+1)}{[(\sqrt{x})^2 - 1^2](2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})} = \frac{[4(2x-1) - (x+3)](\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})} \\
&= \frac{(8x-4-x-3)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})} = \frac{(7x-7)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})} \\
&= \frac{7(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3})} = \frac{7(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3}}
\end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3}} = \frac{7(\sqrt{1}+1)}{2\sqrt{2-1} + \sqrt{1+3}} = \frac{14}{2+2} = \frac{7}{2}$.

iii. Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-1}}$.

Πρέπει :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-x \geq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1 \\ x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$, οπότε έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου (εδώ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ταυτίζεται με το πλευρικό όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$).

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x(x-1)}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1 - \sqrt{1}}{\sqrt{1+1}} = \frac{0}{2} = 0$

iv. Έστω $f(x) = \frac{x^2-x}{3x-2\sqrt{x}-1}$. Πρέπει :

• $x \geq 0$

• $3x-2\sqrt{x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow 3\omega^2-2\omega-1 \neq 0 \Leftrightarrow 3(\omega-1)\left(\omega+\frac{1}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow$

Παρατήρηση

♦ Η ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας δε σημαίνει πάντοτε χρήση συζυγούς παράστασης. Επειδή για $x = 1$ μηδενίζουν συγχρόνως και το $\sqrt{x-1}$ και το $\sqrt{x^2-x}$ (και κατά συνέπεια μηδενίζει ο αριθμητής του κλάσματος), δεν προχωράμε σε συζυγή παράσταση αλλά αναλύουμε αριθμητή και παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων επιδιώκοντας την απλοποίηση του μηδενιζόμενου παράγοντα.

♦ Γενικά ισχύει ότι :

$$\sqrt{a\beta} = \sqrt{a}\sqrt{\beta} \text{ μόνο αν } a \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0$$

Εδώ ισχύουν

$$\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} \text{ και}$$

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$$

γιατί είναι $x > 1$.

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ \text{και} \\ 3\sqrt{x}+1 \neq 0, \text{ ισχύει} \end{cases}$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, 1) \cup (1, +\infty)$, οπότε έχει νόημα η αναζήτηση

του ορίου το οποίο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$. Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{3x - 2\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

v. Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1}$. Πρέπει :

- $x \geq 0$ • $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ • $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, 1) \cup (1, +\infty)$, οπότε έχει νόημα η

αναζήτηση του ορίου το οποίο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x+3}-2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

♦ Το «σπάσιμο» του 3 σε 1 και 2 έγινε γιατί $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$.

♦ Ο χωρισμός του κλάσματος έγινε έτσι ώστε αμφότερα τα κλάσματα να εμφανίζουν, όταν $x \rightarrow 1$, απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, την οποία εμφάνιζε και αρχικά το ζητούμενο όριο.

Όριο συνάρτησης πολλαπλού τύπου – Εύρεση παραμέτρων

68.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x + 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2 \\ 2x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **iv.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **v.** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Λύση

i. Για x κοντά στο 2 ο τύπος της g είναι

$$g(x) = \frac{3x^2 - 10x + 8}{x - 2}$$

οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x-\frac{4}{3})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 4) = 2$$

ii. Επειδή κοντά στο 0 είναι
 $f(x) = x^2 - 2$

έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = 0^2 - 2 = -2$$

iii. Παρατηρούμε ότι η f εκατέρωθεν του 1 αλλάζει τύπο.

- Αν $x \leq 1$, τότε $f(x) = x^2 - 2$,
 οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = 1^2 - 2 = -1$$

- Αν $1 < x < 2$, τότε $f(x) = 3x - 4$,
 οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 4) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

Μεθοδολογία

Για όρια στο x_0 συναρτήσεων πολλαπλού τύπου εργαζόμαστε ως εξής :

- ♦ Αν το x_0 **δεν** είναι σημείο αλλαγής του τύπου, τότε περιορίζοντας την συνάρτηση **κοντά στο x_0** , (μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης όταν το x πλησιάζει το x_0 και όχι όταν $x = x_0$) επιλέγουμε τον αντίστοιχο τύπο και βρίσκουμε το όριο.
- ♦ Αν το x_0 είναι σημείο αλλαγής του τύπου, τότε βρίσκουμε τα πλευρικά όρια $x \rightarrow x_0^-$ και $x \rightarrow x_0^+$

- iv. • Αν $1 < x < 2$, τότε $f(x) = 3x - 4$,
οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 4) = 3 \cdot 2 - 4$$

$$= 6 - 4 = 2$$

- Αν $x > 2$, τότε $f(x) = 2x - 1$,
οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1$$

$$= 4 - 1 = 3$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x),$$

δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- v. Επειδή κοντά στο 3 είναι
 $f(x) = 2x - 1$

έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

69.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta & , \quad x \leq -1 \\ 3x + 1 & , \quad -1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Λύση

- ♦ Αν $x \leq -1$ τότε $f(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 + \alpha x + \beta) = 2 - \alpha + \beta$$

- Αν $-1 < x < 2$ τότε $f(x) = 3x + 1$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 1) = -2$$

Το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 - \alpha + \beta = -2 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = -4 \quad (1)$$

- ♦ Αν $-1 < x < 2$ τότε $f(x) = 3x + 1$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + 1) = 7$$

- Αν $x > 2$ τότε $f(x) = x^2 - \beta x + \alpha - 2$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - \beta x + \alpha - 2) = 4 - 2\beta + \alpha - 2 = 2 - 2\beta + \alpha$$

Το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 7 = 2 - 2\beta + \alpha \Leftrightarrow \alpha - 2\beta = 5 \quad (2)$$

Παρατήρηση

Το γεγονός ότι ο $1^{\text{ος}}$ κλάδος $x^2 - 2$ της f ισχύει και για $x = 1$ δεν δίνει κάποιο «προβάδισμα» στον τύπο $x^2 - 2$ όταν $x \rightarrow 1$, αφού στο όριο μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της f όταν το x πλησιάζει το 1 και όχι όταν $x = 1$.

Δε θα άλλαζε τίποτα στον τρόπο αντιμετώπισης (ούτε και στο αποτέλεσμα) για το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν η ισότητα

$x = 1$ ήταν στον 2^ο κλάδο ή δεν υπήρχε πουθενά στον τύπο της f . (Όπως δεν υπάρχει τιμή της f για $x = 2$).

Από τις (1) και (2) έχουμε :
$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -4 \\ \alpha - 2\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Όριο συνάρτησης με απόλυτα

70.

Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3x-5| - |3x-1|}{x^2 - 1}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 3x| + x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-2| - |1-2x|}{|x+1|}$

Λύση

i. Αν $f(x) = \frac{|3x-5| - |3x-1|}{x^2 - 1}$, τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

ενώ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ παρουσιάζει την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

α' τρόπος

Βρίσκουμε τα όρια των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα.

Αν αυτά είναι διάφορα του μηδενός, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε το πρόσημο των παραστάσεων αυτών κοντά στο 1.

Είναι :

- $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 5) = -2 < 0$

Άρα $3x - 5 < 0$, κοντά στο 1.

- $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2 > 0$

Άρα $3x - 1 > 0$, κοντά στο 1.

Επομένως, για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x + 5 - (3x - 1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6x + 6}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6}{x+1} = -3 \end{aligned}$$

β' τρόπος

Βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα, καθώς το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της f .

Μεθοδολογία

Αν το όριο της f στο x_0 παίρνει τη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και ο τύπος της f περιέχει απόλυτα, τότε :

♦ Αν το x_0 δεν μηδενίζει τα απόλυτα, τότε βρίσκουμε τα όρια των συναρτήσεων που είναι μέσα στα απόλυτα και :

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) > 0$, τότε $h(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) < 0$, τότε $h(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Οπότε μπορούμε πλέον να απαλλαγούμε από τα απόλυτα.

♦ Αν το x_0 **μηδενίζει** ένα απόλυτο, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της παράστασης που είναι μέσα στο απόλυτο και περιοριζόμαστε σε σύνολα της μορφής $[(x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2)] \cap D_f$ όπου δ_1, δ_2 οσοδήποτε μικροί θετικοί. Ο περιορισμός της f σε σύνολο της παραπάνω μορφής μας δίνει τη δυνατότητα να απαλλαγούμε από τα απόλυτα και ανοίγει το δρόμο για την εύρεση του ορίου.

Είναι :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$\longrightarrow$	1	$\longleftarrow$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$3x-5$	-	-	-		-	0	+	
$3x-1$	-	-	0	+		+		+

Θεωρούμε ότι $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5}{3}\right)$, οπότε : $3x-5 < 0$ και $3x-1 > 0$

$$\text{Επομένως : } f(x) = \frac{-3x+5-(3x-1)}{x^2-1} = \frac{-6x+6}{x^2-1}$$

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6x+6}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6}{x+1} = -3$$

ii. Αν $f(x) = \frac{|x^2-3x|+x^2-4x+3}{x^2-9}$, τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ ενώ το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

παρουσιάζει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-3x) = 0$, οπότε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο του

x^2-3x , κοντά στο 3.

Το πρόσημο του x^2-3x καθώς το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της f , φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-3	0	$\longrightarrow$	3	$\longleftarrow$	$+\infty$
x^2-3x		+	+	0	-	0	+

Θεωρούμε ότι $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$, οπότε :

♦ Αν $x \in (0, 3)$, τότε $x^2-3x < 0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2+3x+x^2-4x+3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}$$

♦ Αν $x \in (3, +\infty)$, τότε $x^2-3x > 0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x+x^2-4x+3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2-7x+3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)(x-\frac{1}{2})}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{5}{6}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, η συνάρτηση f δεν έχει όριο στο $x_0 = 3$.

iii. Αν $f(x) = \frac{|x-2|-|1-2x|}{|x+1|}$, τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

παρουσιάζει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

α' τρόπος

Είναι :

x	$-\infty$	-1	1/2	2	$+\infty$
$x-2$	-		-	0	+
$1-2x$	+		0	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+

Θεωρούμε ότι $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2})$

Έχουμε :

♦ Αν $x \in (-\infty, -1)$, τότε $x-2 < 0$, $1-2x > 0$, $x+1 < 0$, συνεπώς :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x+2-(1-2x)}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1$$

♦ Αν $x \in (-1, \frac{1}{2})$, τότε $x-2 < 0$, $1-2x > 0$, $x+1 > 0$, συνεπώς :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x+2-(1-2x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, η συνάρτηση f **δεν έχει όριο** στο $x_0 = -1$.**β' τρόπος**

Είναι :

• $\lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3 < 0$. Άρα $x-2 < 0$, κοντά στο -1.• $\lim_{x \rightarrow -1} (1-2x) = 3 > 0$. Άρα $1-2x > 0$, κοντά στο -1.Για $x < -1$, κοντά στο -1, είναι $x+1 < 0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x+2-(1-2x)}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{-(x+1)} = -1$$

Για $x > -1$, κοντά στο -1, είναι $x+1 > 0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x+2-(1-2x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, η συνάρτηση f **δεν έχει όριο** στο $x_0 = -1$.**Το «Κριτήριο Παρεμβολής»****71.**Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ναβρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ **Λύση**

i. Έχουμε :

- $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2 - x^2) = 3 \cdot 1 - 2 - 1^2 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = 0$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

ii. Για $x = 1$ η δοθείσα σχέση γίνεται :

$$3 \cdot 1 - 2 - 1^2 \leq f(1) \leq 1^2 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq f(1) \leq 0$$

$$\text{Άρα } f(1) = 0. \text{ Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}.$$

Έχουμε :

- Αν $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, τότε :

$$\begin{aligned} 3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x &\Leftrightarrow \frac{3x - 2 - x^2}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{x^2 - x}{x - 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x - 1)(x - 2)}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{x(x - 1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2 - x \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq x \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$, σύμφωνα με το **Κριτήριο**

Παρεμβολής έχουμε ότι και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ **(1)**.

- Αν $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, τότε :

$$\begin{aligned} 3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x &\Leftrightarrow \frac{3x - 2 - x^2}{x - 1} \geq \frac{f(x)}{x - 1} \geq \frac{x^2 - x}{x - 1} \\ &\Leftrightarrow 2 - x \geq \frac{f(x)}{x - 1} \geq x \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ σύμφωνα με το **Κριτήριο**

Παρεμβολής έχουμε ότι και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ **(2)**.

Από **(1)** και **(2)** έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1.$$

72.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει :

$$|f(x) - g(x)| \leq (x - 2)^2 |g(x)|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$, να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2}$

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq (x-2)^2 |g(x)| \\ \Leftrightarrow -(x-2)^2 |g(x)| &\leq f(x) - g(x) \leq (x-2)^2 |g(x)| \\ \Leftrightarrow g(x) - (x-2)^2 |g(x)| &\leq f(x) \leq g(x) + (x-2)^2 |g(x)| \end{aligned}$$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) - (x-2)^2 |g(x)|] = 1 - (2-2)^2 \cdot |1| = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) + (x-2)^2 |g(x)|] = 1 + (2-2)^2 \cdot |1| = 1$$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

Παρατήρηση

Αν δίνεται ανισοτική σχέση με απόλυτη τιμή της μορφής

$$|f(x)| \leq g(x)$$

τότε αυτή γράφεται

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

η οποία «σηματοδοτεί» το **κριτήριο παρεμβολής**.

ii. Έχουμε $-(x-2)^2 |g(x)| \leq f(x) - g(x) \leq (x-2)^2 |g(x)|$

♦ Αν $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, τότε :

$$\frac{-(x-2)^2 |g(x)|}{x-2} \leq \frac{f(x) - g(x)}{x-2} \leq \frac{(x-2)^2 |g(x)|}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow -(x-2) |g(x)| \leq \frac{f(x) - g(x)}{x-2} \leq (x-2) |g(x)|$$

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x-2) |g(x)|] = -(2-2) \cdot |1| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-2) |g(x)|] = (2-2) \cdot |1| = 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - g(x)}{x-2} = 0 \quad (1).$$

♦ Αν $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, τότε :

$$\frac{-(x-2)^2 |g(x)|}{x-2} \geq \frac{f(x) - g(x)}{x-2} \geq \frac{(x-2)^2 |g(x)|}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow -(x-2) |g(x)| \geq \frac{f(x) - g(x)}{x-2} \geq (x-2) |g(x)|$$

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 2^-} [-(x-2) |g(x)|] = -(2-2) \cdot |1| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [(x-2) |g(x)|] = (2-2) \cdot |1| = 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - g(x)}{x-2} = 0 \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x-2} = 0.$$

73.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. **ii.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} [f^2(x) + g^2(x)] = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Λύση

- i.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

$$|f(x)| \geq f(x)$$

και

$$|f(x)| \geq -f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq -|f(x)|.$$

Άρα

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} [-|f(x)|] = 0$$

από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

- ii.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$$

θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x)} = \sqrt{0} = 0.$$

Οπότε λόγω του **i.** ερωτήματος συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

- iii.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$g^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + g^2(x) \geq f^2(x)$$

Άρα

$$0 \leq f^2(x) \leq f^2(x) + g^2(x)$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f^2(x) + g^2(x)] = 0$$

από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$

Οπότε λόγω του **ii.** ερωτήματος συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Ομοίως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

- $0 \leq g^2(x) \leq f^2(x) + g^2(x)$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f^2(x) + g^2(x)] = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g^2(x) = 0$.

Οπότε λόγω του **ii.** ερωτήματος συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Τριγωνομετρικά όρια

74.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x \cdot \eta\mu 4x}{x^3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{\eta\mu 5x \cdot \eta\mu 7x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - \sigma\upsilon\nu x}{x \cdot \eta\mu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x}$

Λύση

Για x κοντά στο 0 , έχουμε :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x \cdot \eta\mu 4x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 3x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 4x}{x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot 3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x} \cdot 4 \cdot \frac{\eta\mu 4x}{4x} \right) =$
 $= 12 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{4x} =$
 $= 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 12$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{\eta\mu 5x \cdot \varepsilon\phi 7x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x}{\eta\mu 5x \cdot \eta\mu 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 3x}{x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 7x}{\frac{\eta\mu 5x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 7x}{x}} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x} \cdot 3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x}}{5 \cdot \frac{\eta\mu 5x}{5x} \cdot 7 \cdot \frac{\eta\mu 7x}{7x}} \cdot \sigma\upsilon\nu 7x \right) = \frac{6 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x}}{35 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{7x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu 7x =$
 $= \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{35 \cdot 1 \cdot 1} \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = \frac{6}{35}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2 - \eta\mu x}{x}}{\frac{x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2}{x} - \frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} =$

Παρατηρήσεις

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν :

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{ax} = 1, \quad a \neq 0$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\eta\mu(ax)} = 1, \quad a \neq 0$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = 1$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi(ax)}{ax} = 1, \quad a \neq 0$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2x) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - \sigma\upsilon\nu x}{x \cdot \eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - \sigma\upsilon\nu x)(\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)}{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \eta\mu^2 x})^2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + \eta\mu^2 x}{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x}{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu^2 x}{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x}{x \cdot (\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + 1} =$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

v. Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x}$ θεωρούμε ότι $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε :

- Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\varepsilon\phi x < 0$ οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\varepsilon\phi x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = -1$$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\phi x > 0$ οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x}$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon\phi x|}{x}$.

75.

Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x)\eta\mu x - 2x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu x}{2x - \eta\mu x}$

Λύση**i.** Είναι :

$$|f(x)\eta\mu x - 2x| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq f(x)\eta\mu x - 2x \leq x^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 \leq f(x)\eta\mu x \leq x^2 + 2x$$

$$\text{Θεωρούμε ότι } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

♦ Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\eta\mu x < 0$, οπότε :

$$\frac{2x - x^2}{\eta\mu x} \geq f(x) \geq \frac{x^2 + 2x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{x(2 - x)}{\eta\mu x} \geq f(x) \geq \frac{x(x + 2)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{2 - x}{\frac{\eta\mu x}{x}} \geq f(x) \geq \frac{x + 2}{\frac{\eta\mu x}{x}}$$

$$\text{Είναι : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - x}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{2 - 0}{1} = 2 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{0 + 2}{1} = 2$$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ **(1)**

♦ Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\eta\mu x > 0$, οπότε :

$$\frac{2x - x^2}{\eta\mu x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 2x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{2 - x}{\frac{\eta\mu x}{x}} \leq f(x) \leq \frac{x + 2}{\frac{\eta\mu x}{x}}$$

$$\text{Είναι : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - x}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 2 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 2$$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ **(2)**

Από τις **(1)** και **(2)** έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

ii. Για x κοντά στο 0 έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu x}{2x - \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xf(x) + \eta\mu x}{x}}{\frac{2x - \eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{\eta\mu x}{x}}{2 - \frac{\eta\mu x}{x}} \stackrel{(a)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}}{2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \\ &= \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3 \end{aligned}$$

76.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f^2(x) + 2 + 2\sin x \leq 4f(x) - \eta\mu^2 x$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f^2(x) + 2 + 2\sin x \leq 4f(x) - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x) \leq -\eta\mu^2 x - 2 - 2\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x) + 4 \leq -\eta\mu^2 x - 2 - 2\sin x + 4 \Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 \leq 2 - \eta\mu^2 x - 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 \leq 2 - (1 - \sin^2 x) - 2\sin x \Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 \leq 2 - 1 + \sin^2 x - 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 \leq 1 + \sin^2 x - 2\sin x \Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 \leq (1 - \sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - 2| \leq |1 - \sin x| \Leftrightarrow -|1 - \sin x| \leq f(x) - 2 \leq |1 - \sin x|$$

$$\Leftrightarrow 2 - |1 - \sin x| \leq f(x) \leq 2 + |1 - \sin x|$$

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0} (2 - |1 - \sin x|) = 2 - |1 - \sin 0| = 2 - |1 - 1| = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 + |1 - \sin x|) = 2 + |1 - \sin 0| = 2 + |1 - 1| = 2$$

Άρα από **Κριτήριο Παρεμβολής** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

«Μηδενική · Φραγμένη»**77.**

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{2017} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\eta\mu(x-2) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5}{2-x} \right)$

Λύση

i. Για κάθε $x \neq 0$ είναι :

$$\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| x^{2017} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq \left| x^{2017} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| x^{2017} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq \left| x^{2017} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left| x^{2017} \right| \leq x^{2017} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq \left| x^{2017} \right|$$

$$\text{Αλλά : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\left| x^{2017} \right| \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^{2017} \right| = 0$$

Παρατήρηση

Με χρήση του Κριτηρίου Παρεμβολής αποδεικνύεται ότι :

$$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^v \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^v \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

και γενικά :

«Μηδενική · Φραγμένη = Μηδενική»

Συνήθως φραγμένη : $\eta\mu f(x)$ και $\sigma\upsilon\nu f(x)$ αφού
 $|\eta\mu f(x)| \leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu f(x)| \leq 1$

Άρα σύμφωνα με το **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{2017} \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

- ii. Για κάθε $x \neq 2$ είναι : $\left| \sin \frac{5}{2-x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu(x-2)| \cdot \left| \sin \frac{5}{2-x} \right| \leq |\eta\mu(x-2)|$
 $\Leftrightarrow \left| \eta\mu(x-2) \cdot \sin \frac{5}{2-x} \right| \leq |\eta\mu(x-2)| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -|\eta\mu(x-2)| \leq \eta\mu(x-2) \cdot \sin \frac{5}{2-x} \leq |\eta\mu(x-2)|$
 Αλλά : $\bullet \lim_{x \rightarrow 2} (-|\eta\mu(x-2)|) = -|\eta\mu 0| = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 2} |\eta\mu(x-2)| = |\eta\mu 0| = 0$
 Άρα σύμφωνα με το **Κριτήριο Παρεμβολής** είναι
 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\eta\mu(x-2) \cdot \sin \frac{5}{2-x} \right) = 0.$

Α Λ Λ α γ ή μ ε τ α β λ η τ ή ς

78.

- A.** Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1) = 7$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.
B. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $f(x-3) = f(x)$ και είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 4$,
 να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-1}{x-5}$.
Γ. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - \eta\mu x^2}{4x - \eta\mu x}$.
Δ. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x)$.

Λύση

- A.** Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1) = 7$.

Θέτουμε $u = 3x-1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} u = \lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

Δηλαδή όταν $x \rightarrow 2$, το $u \rightarrow 5$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1) = \lim_{u \rightarrow 5} f(u)$.

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1) = 7$.

Άρα $\lim_{u \rightarrow 5} f(u) = 7 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$.

- B.** Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = f(x-3)$, έχουμε :
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-1}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x-3)-1}{x-5} \quad (1)$

Θέτουμε $u = x-3$, οπότε :

- $\bullet \lim_{x \rightarrow 5} u = \lim_{x \rightarrow 5} (x-3) = 5-3 = 2$, δηλαδή όταν $x \rightarrow 5$ το $u \rightarrow 2$ και

Παρατήρηση

Προφανώς :

- ♦ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε και

$$\lim_{u \rightarrow x_0} f(u) = \ell, \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = \ell, \dots \text{ κ.ο.κ.}$$

- ♦ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ τότε και

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 5, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 5, \dots \text{ κ.ο.κ.}$$

• $x = u + 3$

Επομένως από τη σχέση (1) παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 1}{x - 5} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - 1}{u + 3 - 5} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - 1}{u - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 4$$

Γ. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$, οπότε, για x κοντά στο 0, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - \eta\mu x^2}{4x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(2x)}{x} - \frac{\eta\mu x^2}{x}}{\frac{4x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{f(2x)}{2x} - x \cdot \frac{\eta\mu x^2}{x^2}}{4 - \frac{\eta\mu x}{x}} \quad (1)$$

Έχουμε :

♦ Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x}$, θέτουμε $u = 2x$, οπότε : $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

Άρα όταν $x \rightarrow 0$, το $u \rightarrow 0$ και επομένως : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 5$

♦ Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{x^2}$, θέτουμε $t = x^2$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} t = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Άρα όταν $x \rightarrow 0$, το $t \rightarrow 0$ και
επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1$$

Οπότε η (1) γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - \eta\mu x^2}{4x - \eta\mu x} = \frac{2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{x^2}}{4 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{2 \cdot 5 - 0 \cdot 1}{4 - 1} = \frac{10}{3}.$$

Δ. Αφού η f είναι άρτια, θα ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0} f(-x)$.

Θέτουμε $u = -x$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -x_0} u = \lim_{x \rightarrow -x_0} (-x) = x_0$.

Άρα όταν $x \rightarrow -x_0$, το $u \rightarrow x_0$ και επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(-x) = \lim_{u \rightarrow x_0} f(u) = \ell, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \ell$.

Παρατήρηση

Από το βασικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και με αλλαγή μεταβλητής
αποδεικνύεται ότι :

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1$$

79.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt[6]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[6]{3x+1}}$

Λύσηi. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x-3} \right] \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$ θέτουμε $u = x-2$, κοντά στο 2, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} u = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0, \text{ δηλαδή όταν } x \rightarrow 2, \text{ το } u \rightarrow 0.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

$$\text{Οπότε η (1) γίνεται } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3} = 1 \cdot \frac{1}{2-3} = -1.$$

ii. Το Ε.Κ.Π. των τάξεων 2, 3, 6 είναι το 6.

$$\text{Θέτουμε } \sqrt[6]{3x+1} = t, \text{ οπότε : } \sqrt[3]{3x+1} = t^2 \text{ και } \sqrt{3x+1} = t^3$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} t = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{3x+1} = 1, \text{ δηλαδή όταν } x \rightarrow 0, \text{ το } t \rightarrow 1.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt[6]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[6]{3x+1}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - t}{t^2 - t} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t-1)(t+1)}{t(t-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} (t+1) = 2.$$

80.**A.** Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 10.$$

$$\text{Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

B. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

Λύση

- A.** Ζητάμε όριο όταν $x \rightarrow 2$, ενώ στα δεδομένα έχουμε όριο όταν $x \rightarrow 0$. Για να «μεταφέρουμε» το όριο στο 0, θέτουμε $u = x - 2 \Leftrightarrow x = u + 2$, οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} u = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0, \text{ δηλαδή}$$

όταν $x \rightarrow 2$ τότε $u \rightarrow 0$

Άρα :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u + 2) - f(2)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) + f(2) - 2u - f(2)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - 2u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{f(u)}{u} - 2 \right) = 10 - 2 = 8 \end{aligned}$$

- B.** Ζητάμε όριο όταν $x \rightarrow 2$, ενώ στα δεδομένα έχουμε όριο όταν $x \rightarrow 1$.

Για να «μεταφέρουμε» το όριο στο 1, θέτουμε $u = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2u$, οπότε

έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} u = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ δηλαδή όταν } x \rightarrow 2 \text{ τότε } u \rightarrow 1. \text{ Άρα :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(2u) - f(2)}{2u - 2} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(2) + f(u) - f(2)}{2(u - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u - 1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Παρατήρηση

Οι πιο συχνές «μεταφορές» ορίων, είναι στο 0 και στο 1, οπότε αλλάζουμε μεταβλητή έχοντας υπόψιν ότι :

$$\blacklozenge \text{ Αν } x \rightarrow x_0, \text{ τότε } \underbrace{x - x_0}_u \rightarrow 0$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x \rightarrow x_0 \ (x_0 \neq 0), \text{ τότε } \frac{x}{x_0} \rightarrow 1$$

Χρήση βοηθητικής συνάρτησης

81.

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2 + 3x] = 3$

και $f(x) \neq 1$ κοντά στο 2. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2f(x)}{f(x) - 1}$

Λύση

- i. Θέτουμε $g(x) = f(x) - x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$

Οπότε :

$$f(x) = g(x) + x^2 - 3x \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$

Άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) + x^2 - 3x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x) = 3 + 4 - 6 = 1$$

« Αν η f κρύβεται ... θέτουμε»

Αναζητάμε το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 και η $f(x)$ είναι όρος σε κάποια συνάρτηση της οποίας όμως γνωρίζουμε το όριο στο x_0 , τότε θέτουμε τη συνάρτηση αυτή, για παράδειγμα $g(x)$, και βρίσκουμε την $f(x)$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ με τη

βοήθεια των γνωστών ιδιοτήτων των ορίων.

ii. Είναι : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x)+3}-2f(x)}{f(x)-1} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{f^2(x)+3}-2f(x))(\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))}{(f(x)-1)(\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{f^2(x)+3})^2 - (2f(x))^2}{(f(x)-1) \cdot (\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x)+3-4f^2(x)}{(f(x)-1) \cdot (\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-3f^2(x)}{(f(x)-1) \cdot (\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(f^2(x)-1)}{(f(x)-1) \cdot (\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(f(x)-1) \cdot (f(x)+1)}{(f(x)-1) \cdot (\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(f(x)+1)}{\sqrt{f^2(x)+3}+2f(x)} = \frac{-3\left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x)+1\right)}{\sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x)\right)^2+3}+2\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{-3(1+1)}{\sqrt{1^2+3}+2 \cdot 1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Παρατήρηση

Δεν είναι σωστή για την εύρεση του $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ μια «λύση» της μορφής :

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2 + 3x] = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2^2 + 3 \cdot 2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 + 4 - 6 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

γιατί για να χωρίσουμε το όριο σ' ένα άθροισμα, πρέπει πρώτα να έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη των ορίων καθεμιάς από τις συναρτήσεις του αθροίσματος και εδώ δεν γνωρίζουμε την ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

82.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x^3 - 1)] = 5, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)].$$

Λύση

α' τρόπος

Για κάθε x κοντά στο 1, θέτουμε :

$$h(x) = \frac{f(x)}{x-1} \text{ και } \varphi(x) = g(x)(x^3 - 1)$$

Οπότε :

$$f(x) = (x-1)h(x) \text{ και}$$

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{x^3 - 1}$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 5.$$

Επομένως :

Παρατήρηση

Ξεχωριστά τα όρια στο $x_0 = 1$ των συναρτήσεων f και g δεν μπορούμε να τα υπολογίσουμε.

Είναι δυνατόν και να μην υπάρχουν τα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

Το όριο όμως του γινομένου $f(x) \cdot g(x)$ στο $x_0 = 1$ υπάρχει και ισούται με $\frac{10}{3}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1}[f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \cdot h(x) \cdot \frac{\varphi(x)}{x^3-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot h(x) \cdot \varphi(x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) \cdot \varphi(x)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1)} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

β' τρόπος

Για κάθε x κοντά στο 1 έχουμε :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1}[f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x-1} \cdot (x-1) \cdot \frac{g(x) \cdot (x^3-1)}{x^3-1} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x-1} \cdot (x-1) \cdot \frac{g(x) \cdot (x^3-1)}{(x-1) \cdot (x^2+x+1)} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x-1} \cdot g(x) \cdot (x^3-1) \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x^3-1)] \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} &= 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

83.

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v f(x) - 2^v}{x-2}$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$.

Λύση**α' τρόπος**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-1}{x-2}$, για x κοντά στο 2, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$.

Είναι : $g(x)(x-2) = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-2) + 1$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x-2) + 1] = 3 \cdot 0 + 1 = 1$.

Οπότε :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v f(x) - 2^v}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v \left[g(x)(x-2) + 1 \right] - 2^v}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v g(x)(x-2) + x^v - 2^v}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^v g(x)(x-2)}{x-2} + \frac{x^v - 2^v}{x-2} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[x^v g(x) + \frac{(x-2)(x^{v-1} + x^{v-2} \cdot 2 + x^{v-3} \cdot 2^2 + \dots + 2^{v-1})}{x-2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[x^v g(x) + \underbrace{x^{v-1} + x^{v-2} \cdot 2 + x^{v-3} \cdot 2^2 + \dots + 2^{v-1}}_{v\text{-πλήθος}} \right]\end{aligned}$$

Παρατήρηση

Το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v - 2^v}{x-2}$ μπορεί

να υπολογιστεί ευκολότερα με χρήση του **κανόνα DeL' Hospital**, ως εξής :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v - 2^v}{x-2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^v - 2^v)'}{(x-2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{v \cdot x^{v-1}}{1} = \\ &= v \cdot 2^{v-1}\end{aligned}$$

$$= 2^v \cdot 3 + \underbrace{2^{v-1} + 2^{v-1} + 2^{v-1} + \dots + 2^{v-1}}_{v\text{-φορές}} = 3 \cdot 2^v + v \cdot 2^{v-1}$$

β' τρόπος

Πρέπει στο ζητούμενο όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v f(x) - 2^v}{x - 2}$ να εμφανίσουμε το γνωστό όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2}.$$

Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v f(x) - 2^v}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v f(x) - x^v + x^v - 2^v}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v (f(x) - 1) + x^v - 2^v}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[x^v \cdot \frac{f(x) - 1}{x - 2} + \frac{x^v - 2^v}{x - 2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v - 2^v}{x - 2} = \dots = v \cdot 2^{v-1}$$

το ζητούμενο όριο είναι $3 \cdot 2^v + v \cdot 2^{v-1}$.

«lim άρυντας» ισότητες

84.

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f^3(x) - x f^2(x) - x^2 f(-x) = x^2 \eta \mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον ℓ .

Λύση

Για $x = 0$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε $f^3(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

Για κάθε $x \neq 0$, έχουμε :

$$\begin{aligned} f^3(x) - x f^2(x) - x^2 f(-x) &= x^2 \eta \mu x \Leftrightarrow \frac{f^3(x) - x f^2(x) - x^2 f(-x)}{x^3} = \frac{x^2 \eta \mu x}{x^3} \\ \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x^3} - \frac{x f^2(x)}{x^3} - \frac{x^2 f(-x)}{x^3} &= \frac{\eta \mu x}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 - \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 - \frac{f(-x)}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\bullet \text{ Για τον υπολογισμό του } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x}, \text{ θέτουμε } u = -x \Leftrightarrow x = -u,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \text{ δηλαδή όταν } x \rightarrow 0 \text{ το } u \rightarrow 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{-u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = -\ell.$$

Επειδή υπάρχουν τα επιμέρους όρια και στα δύο μέλη της (1), έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 - \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 - \frac{f(-x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$$

Παρατήρηση

Για να πάρουμε όρια στα δύο μέλη μιας ισότητας πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη των ορίων και των δύο μελών της ισότητας.

$$\text{ή } \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right)^3 - \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} = 1$$

$$\text{ή } \ell^3 - \ell^2 - (-\ell) = 1 \Leftrightarrow \ell^3 - \ell^2 + \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell^2(\ell - 1) + (\ell - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ell - 1) \cdot (\ell^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$$

« lim άροντας » ανισότητες

85.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) \leq \eta \mu^2 x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ με την προϋπόθεση ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

$$\text{Έστω } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x < 0, \text{ τότε } f(x) \geq \frac{\eta \mu^2 x}{x} \quad (1)$$

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \eta \mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

Επίσης :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$$

$$\text{Οπότε από την (1) παίρνουμε : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu^2 x}{x}$$

$$\text{Άρα } \ell \geq 0 \quad (2)$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x > 0, \text{ τότε } f(x) \leq \frac{\eta \mu^2 x}{x}, \text{ οπότε : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu^2 x}{x}$$

$$\text{Άρα } \ell \leq 0 \quad (3)$$

$$\text{Από (2) και (3) έχουμε : } \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Παρατήρηση

Για να πάρουμε όρια στα δύο μέλη μιας ανισότητας πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη των ορίων και των δύο μελών της ανισότητας.

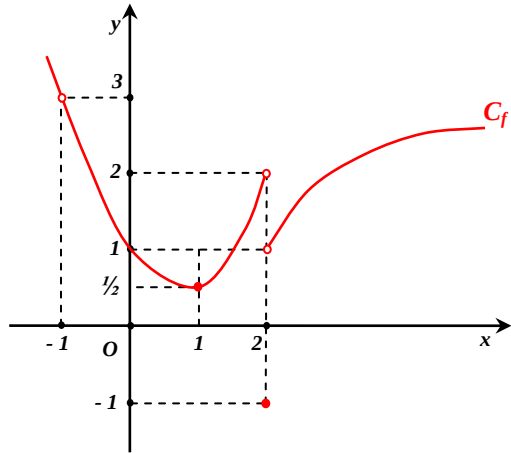
Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

Εισαγωγή στο όριο

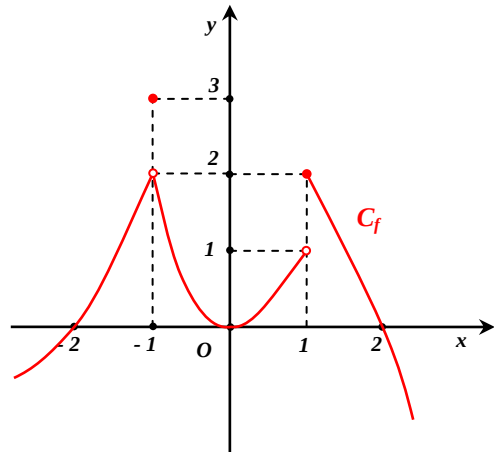
- 292.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- vi. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



- 293.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- vi. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$



- 294.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lambda^2 - 2\lambda + 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2\lambda - 1$$

να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$;

295. Av

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \alpha + 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \beta + 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\alpha + 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3\beta - 4$$

να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι ώστε να υπάρχουν τα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

296. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \\ 2 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f **ii.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

297. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{αν } x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \notin (-1, 1) \end{cases}$

a. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f **β.** Να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

298. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{αν } x < 0 \\ |x - 2|, & \text{αν } x \in [0, 3] \\ 5 - x, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$

a. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f **β.** Να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ**299.** Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-1)^{10}(x^2+x-1)]$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 + x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+2| + x^3 + 2x + 1}{|x+3| - 1}$

300. Av $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 5f(x) + 6}{f^2(x) - 2f(x) + 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}{f(x) + 1}$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f^2(x) - 4| - |3 - f(x)| + 5}{f^2(x) + 1} \quad \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f^2(x) + 8} + 4f(x)}{f(x) + 1}$$

301. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lambda^3 + \lambda - 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lambda^2, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, να βρείτε :

- i. την τιμή του λ ii. το $\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - 1)$ iii. το $\lim_{h \rightarrow 0} f(4 + h)$

Όρια ρητών συναρτήσεων

302. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \\ \text{iii. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 8}{x^3 + 1} & \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 4x + 1} \\ \text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^v - 2^v}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^v - 2^v)'}{(x - 2)'} = & \text{vi. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 1)^3 + 8}{2(x - 1)^2 - 32} \\ \text{vii. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 2} & \text{viii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} \\ \text{ix. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) & \text{x. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \right) \\ \text{xi. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{4}{x^2 - 4x + 3} \right) & \text{xii. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2} \right) \end{array}$$

303. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $v, \mu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma}{x - 1} = v\alpha + \mu\beta.$$

Όρια άρρητων συναρτήσεων

304. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49} & \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x + 10} - 5}{2x - 10} \\ \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{5x - 4}}{x^2 - 16} & \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}} \\ \text{v. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x - 1 - \sqrt{x + 1}} & \text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1} \end{array}$$

$$\text{vii.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - x - 1}{\sqrt{x^2 + 5} + x - 5}$$

$$\text{ix.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$$

$$\text{xi.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x + 2\sqrt{x} - 8}$$

$$\text{xiii.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{3x - 2\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{viii.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3\sqrt{x + 2} + 4}{x - \sqrt{x - 1} - 1}$$

$$\text{x.} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\sqrt{x^2 + 3x - 18}}$$

$$\text{xii.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{(x - 4)^2}$$

$$\text{xiv.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x}}$$

305. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 5}}{x^2 - 1}$$

Να βρείτε :

i. Τα πεδία ορισμού των f και g

ii. Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

306. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$ και για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύει $g(x) \neq 1$, να βρείτε

$$\text{το} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{όταν} \quad f(x) = \frac{\sqrt{g^2(x) + 3} - 2}{g(x) - 1}.$$

307. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ και $f(x) \neq 1$ κοντά στο 2, να βρείτε τα όρια :

$$\text{i.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 5f(x) - 6}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f^2(x) + 8} - 4f(x)}{f(x) - 1}$$

308. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, και $f(x) \neq 4$

$$\text{κοντά στο 2, να βρείτε το} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 5} - 3}{xf(x) - f(x) + 4 - 4x}.$$

309. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, και $f(x) \neq 2$ κοντά στο 1, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ όταν

$$g(x) = \frac{\sqrt{f(x) + 2} + \sqrt{f(x) + 7} - 5}{f(x) - 2}.$$

Όριο συνάρτησης πολλαπλού τύπου – Εύρεση παραμέτρων

310. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 0 \\ x^2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$.

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

311. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 αν $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } x > 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$
και $x_0 = 1$.

312. Αν $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \\ x^2 + 2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

313. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x - 1}{x+1}, & \text{αν } x \neq -1 \\ 2, & \text{αν } x = -1 \end{cases}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

314. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}, & \text{αν } x \neq 2 \\ \frac{2}{3}, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

315. Αν $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ x^2 + 1, & |x| \leq 1 \\ x+3, & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

316. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{αν } x \geq 1 \\ \beta x^2 + 2\alpha x, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

317. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2 + x - \beta, & \text{αν } x \leq -1 \\ -\alpha x + 4\beta, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ x^2 + 5, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν τα όρια της f στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$.

318. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 8\alpha^3 x^2 - \beta x + 1, & x < -1 \\ 2\beta x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.

319. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x), \text{ όταν } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + \beta^2, & x < 1 \\ \beta x^2 + x + \alpha^2, & x > 1 \end{cases}.$$

320. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2\alpha x + 6, & x < 1 \\ 2\beta\sqrt{x^2 + 3} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

321. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^3 + (\beta^2 + 4)x, & x < 1 \\ 4\alpha x + 2\beta x - 1, & x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

322. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2\beta, & x \leq 1 \\ x^2 + \beta x + 2\alpha, & x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ και να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

323. Να βρείτε οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 2 \\ x^2 - \alpha x + 2\beta, & x > 2 \end{cases}$$

να έχει όριο στο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1, 6)$.

Όριο συνάρτησης με απόλυτα

324. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x - 2| + 3|x| - 10}{x^2 - 3x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x^2 - 5x + 6| - 12}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x - 1| + x^2 - 2x}{x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$

v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x| + x - 2}{x^2 - 4}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x + 3}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x|x+2|}{|x^2 + 3x + 2|}$$

$$\text{xi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |x-1| - 3}{x^2 - x}$$

$$\text{xiii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - x - 1| + |x-1| - 1}{x - 1}$$

$$\text{xv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - x - 2| - |2 - x|}{|4 - x^2|}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 3x + 2|}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x - 1}{|x^2 - x| + x - 1}$$

$$\text{xii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{|x-1| - 2}$$

$$\text{xiv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - x| - 2x + 2}{|x^3 - 2x^2|}$$

$$\text{xvi. } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{11 - x}|}{x^2 - 4}$$

325. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - |x|$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

α. Να βρείτε τη συνάρτηση gof . **β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{gof})(x) - 1}{x}$

326. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ και $f(x) \neq 1$ κοντά στο 2, να βρείτε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f^2(x) - 4| + |3 - f(x)| - 5}{f^2(x) - 1}$$

327. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $f(x) \neq 2$ κοντά στο 1, να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{f(x) - 2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 2\sqrt{f^2(x) + 5}}{f^2(x) - 2f(x)}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^3(x) - f(x) - 1| - |f(x) - 3| - 4}{f(x) - 2}$$

328. Έστω η πολωνυμική περιττή συνάρτηση $P(x)$. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x) \eta \mu x + 1| - |xP(-x) + 1|}{x}$$

Το «Κριτήριο Παρεμβολής»

329. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\text{i. } x^2 - 2x \leq f(x) \leq 2x^3 - 3 \text{ και } x_0 = 1.$$

$$\text{ii. } 3x - x^2 \leq f(x) \leq 3x + x^2 \text{ και } x_0 = 0.$$

$$\text{iii. } 7x - x^2 - 11 \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 5x + 7 \text{ και } x_0 = 3.$$

- iv.** $x^3 - 5x^2 + 15x - 18 \leq (x-2)f(x) \leq x^4 - 3x^3 + 11x - 14$ και $x_0 = 2$.
- 330.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $x^2 + 2x \leq f(x) \leq 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια :
- i.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
- 331.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $6\sqrt{x} - 6 \leq f(x) \leq x + 3$ για κάθε $x \geq 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9}$.
- 332.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $x^3 + 1 \geq f(x) + ax \geq x^2 + x$, για κάθε $x \geq -1$ και είναι $f(1) = 1$.
- α.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.
- 333.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|(x-1)f(x) - x^3 + x| \leq (x-1)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 334.** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - g(x)| \leq |x^2 g(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 335.** Αν ισχύει $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2$ για κάθε $x \geq 0$, να υπολογίσετε τα όρια :
- i.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{x + 2} - 2}$
- iv.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 16}{x - 2}$ **v.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - \sqrt{5}}{x - 2}$ **vi.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - 1| - 3}{x^2 - 4}$
- 336.** Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)| + |g(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
- 337.** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :
 $f^2(x) - 6f(x) \leq x^2 g(x) - 9$ και $g(x) \geq 0$
Αν $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell \geq 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 338.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ όταν :
- i.** $f^2(x) \leq 2x^2 f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. **ii.** $f^2(x) \leq 2f(x)\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
- iii.** $f^2(x) + \sin^2 x \leq 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

339. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x \cdot \varepsilon\phi 5x}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \varepsilon\phi x}{3x - \eta\mu x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{3\eta\mu x + x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu |x|}{x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\eta\mu 3x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{4x + 9} - 3}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \eta\mu x} - 1}{x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \eta\mu x} - \sqrt{4 - \eta\mu x}}{x}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

x. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta\mu x|}{x}$

xi. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \sigma\upsilon\nu x} \right)$

340. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$|x f(x)| \leq |\sigma\upsilon\nu x - 1|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και να το υπολογίσετε.

341. Έστω η συνάρτηση $f: [-1, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x + 1} - 1} \text{ για κάθε } x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Να βρείτε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 3| - 1}{4 - f^2(x)}$

342. Αν $x^2 f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

343. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-x^2 + 2\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + 2\eta\mu x$, να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\eta\mu x}$

344. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^2 + |\eta\mu x| \leq f(x) \leq |x| + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

345. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$2x\eta\mu x + f^2(x) \leq 2xf(x) + \eta\mu^2 x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

346. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^2 f^2(x) - 2xf(x)\eta\mu x \leq x^4 - \eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu x + \varepsilon\phi x}{x^2 + 3x - \eta\mu 5x}$

347. Να βρείτε το θετικό ακέραιο n ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x + \dots + \eta\mu nx}{x} = 28.$$

348. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \eta\mu x + \beta |x|}{x^2 + x} = 2 - \alpha.$$

349. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\eta\mu x} + \lambda \right| \leq 1.$$

350. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + 3f(x) + x = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

iii. Να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

iv. Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) + 4}{x^2 - 1}$

« Μ η δ ε ν ι κ ή · Φ ρ α γ μ έ ν η »

351. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - 2x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \left(3 - 5 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x^2} \right) \right]$

iv. $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x - \pi} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^2 - x) \eta\mu \frac{\pi}{x - 1} \right]$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2} \cdot \eta\mu \frac{x^2 + 1}{x} \right)$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} \cdot \eta\mu \frac{3x}{x - 1} \right)$

352. Έστω ότι ισχύει $\left| f(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^4$, για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{1}{2} \right)$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

353. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 2x}$.

354. Έστω η συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$\eta\mu^2 x \leq f(x) \leq x^2 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) \sin \frac{\pi}{x}}{\eta\mu 3x}$$

355. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A) = (-4, 3)$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta\mu x \cdot f(x)] = 0.$$

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

356. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1} & \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 1}{x} & \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7}-3} \\ \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(3-x)}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{v. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\eta\mu(x^2-x)} & \text{vi. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\eta\mu(\eta\mu x)} \end{array}$$

357. Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{2x+1} - 2\sqrt[3]{2x+1} - 1}{2\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt{2x+1} - 1}$$

358. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$|f(x) - x| \leq \sqrt{x^2 + 4} - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{x}$$

359. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi x)}{f(x)}$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

360. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 4$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+3)}{2x}$.

361. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $f(x-2) = -f(x)$ και είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5, \text{ να βρείτε το όριο } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+2}{x-3}.$$

362. Αν για τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + f(-x)\eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x - 2x^2}.$$

363. Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι περιττή, τότε

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -\ell$$

364. Έστω μια άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

i. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x-2) + f(2-x)]$.

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$.

365. Έστω f μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$

και

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + x \cdot f(x) - 2x^2}{f^2(x) - 4x^2}$

366. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x^2}{x} \text{ συν } \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{|x^3 - x - 1| - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x) - 2f(-x)]$

367. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2017$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

368. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$$f(x+y) = f(x)\text{συν}2y + f(y)\text{συν}2x, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \text{συν}2\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

369. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(xy) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 1$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{f(3)}{3}$.

Χρήση βοηθητικής συνάρτησης

370. Έστω μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + x^2 - x + 1] = 12$ και $f(x) \neq 3$ κοντά στο 2.

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 5f(x) + 6}{f^2(x) - 9}$.

371. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3x + 4] = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ii. Αν η f είναι άρτια να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 0} [2f(x) + 3g(x)] = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = 2, \quad \text{να βρείτε τα όρια}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

373. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(\sqrt{2x+7}-3)] = 5,$$

να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$.

374. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)(\sqrt{x^2+1}-1)] = 3$, να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^4 g(x)}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

375. Έστω f και g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες

$$\text{υποθέτουμε ότι} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x} = 3.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - \sqrt{x}}{\eta\mu 2x}$.

376. Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{2x - 4} = \frac{1}{2}.$$

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

377. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2x^2 + 7x + 2 \leq \frac{f(x) - 8}{f(x) + 2} \leq 3x^2 + 5x + 3$, να βρείτε

$$\text{το} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

378. Έστω οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $2\sqrt{g(x)} \leq f(x) \leq g(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 1}{x - 1} = 2, \quad \text{να βρείτε} :$$

i. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$

379. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x^2 - 1} = 2$ να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1}$

380. Έστω g μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - x}{x - 1} = 4$, να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xg(x) - 1}{g(x) - x^2}$, $g(x) \neq x^2$ κοντά στο 1

381. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta\mu x}{x^2 + x} = 3$, να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - x}$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 3f(x)| - 1}{x^2 - x}$

382. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x} = 2$

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \lambda x \eta\mu x}{x^2 \eta\mu x + f^2(x)} = 5$

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + x}{x + \eta\mu x}$

383. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 4x + 3} = 2$.

Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **ii.)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$

384. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1} - 2} = 8$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+3)}{x}$.

385. Αν $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, $x, y \neq 0$.

i. Αν η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 1 να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \sqrt{2}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$.

386. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

a. Να αποδείξετε ότι f περιττή.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2017$ να βρείτε :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + \eta\mu(f(x))}{x}$.

387. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{5-x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ii. Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

iii. Έστω η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - x + 1}{\sqrt{x} - 2} = 12.$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(f^{-1} \circ g)(x) + h(x)}{x - 4}$.

«ΙΜΑΡΟΝΤΑΣ» ΙΣΟΤΗΤΕΣ

388. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f^3(x) + f(x)\eta\mu^2(2x) = 5x^2\eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$, να βρείτε το ℓ .

389. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \ell \text{ και } f^3(x) + f^2(x)\eta\mu x + x^3 f(x) = 2x^2\eta\mu x, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$ να βρείτε :

i. την τιμή $f(0)$

ii. την τιμή του ℓ

390. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$$2f^3(x) + (x-1)^2 f(2-x) = (x-1)^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε να βρείτε το ℓ .

391. Έστω η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει :

$$2x^4 \leq x f^3(x) + x^3 f(x) \leq 2x^4 + x^6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$, να βρείτε το ℓ .

392. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

i. Να αποδείξετε ότι αν $m \neq 0$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(mx)}{x} = 3m$

ii. Αν ισχύει $f^2(mx) + \eta\mu^2x \leq 2f(mx) \cdot \eta\mu x$ να αποδείξετε ότι $m = \frac{1}{3}$

393. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f^2(x)(f(x) - 4x) = x^2(6x - 7f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε :

i. Τον αριθμό λ . ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2 - 6x}{\sqrt{x+4} - 2}$

« λ ι μ ά ρ ο ν τ α ς » α ν ι σ ό τ η τ ε ς

394. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(x-1)f(x) \geq \sqrt{x^2+3} - 2$ για κάθε $x \neq 1$. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του α .

395. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $xg(x) + 2 \leq 2\sigma\eta x - \eta\mu x + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

396. Αν ισχύει $xf(x)\eta\mu^2x \leq \sqrt{x^4+1} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

397. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) \leq x^2 + 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει όριο στο $\mathbb{R}$, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 3f(x) - 1 + |f(x) - 4|}{\sqrt{f(x)+1} - 2}$

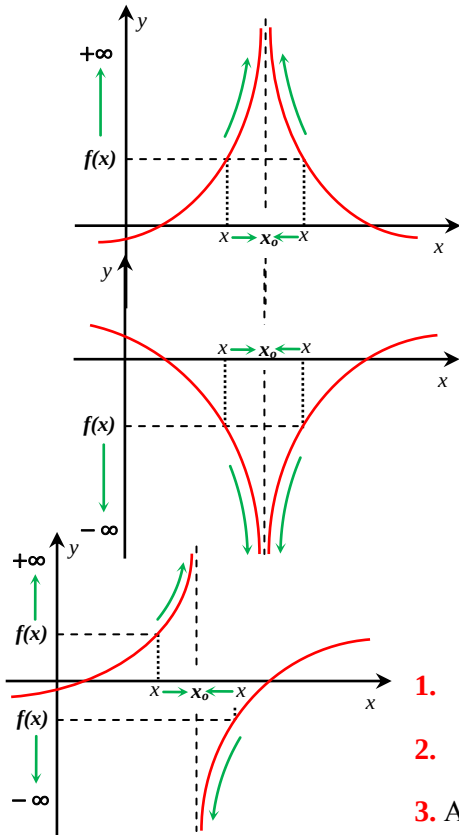
398. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha\eta\mu x + \beta\eta\mu 2x \leq \gamma\eta\mu 3x$ κοντά στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\gamma - 2\beta$.

399. Αν $\eta\mu(\alpha x) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta + \gamma$.

400. Έστω f συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \neq 0$ να ισχύει $x^3 \cdot f(x) < x \cdot \eta\mu^2x$.
 Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει το όριο της f στο 0, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

401. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση
 $f(x)\eta\mu x \leq \eta\mu 5x, x \in \mathbb{R}$. Επίσης ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε τον αριθμό ℓ .

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$



Μνημονικοί τύποι

$$-(+\infty) = -\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

$$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη κοντά σ' ένα $x_0 \in \mathbb{R}$.

♦ Λέμε ότι

«το όριο της f στο x_0 είναι το $+\infty$ »

και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

όταν καθώς το x πλησιάζει με οποιοδήποτε τρόπο το x_0 , οι τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα.

♦ Λέμε ότι «το όριο της f στο x_0 είναι το $-\infty$ »

και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

όταν καθώς το x πλησιάζει με οποιοδήποτε τρόπο το x_0 , οι τιμές της f ελαττώνονται απεριόριστα.

Ισχύουν :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$3. \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$4. \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$5. \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$$

$$6. \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$$

$$7. \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$8. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ \text{με } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0 \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$9. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ \text{με } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0 \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty \quad 10. \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

$$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty \quad \mathbf{11.} \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

Παρατηρήσεις :

1. Τα σύμβολα $-\infty$ και $+\infty$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.
2. Συνέπειες των παραπάνω είναι τα εξής γνωστά όρια με πρακτική αξία.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, \quad v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, \quad v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, \quad v \in \mathbb{N}^*$

Συνέπειες :

- Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$
- Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v+1}}, \quad v \in \mathbb{N}^*$

Θεώρημα 1° (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι :	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Θεώρημα 2° (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι :	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι :	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Θεώρημα 2° (όριο γινομένου)

Στους παραπάνω πίνακες, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**.

Με βάση τις ιδιότητες των άπειρων ορίων μπορούμε να ορίσουμε «πράξεις» μεταξύ $+\infty$, $-\infty$ και αριθμών.

	Επιτρεπτές πράξεις
Πρόσθεση	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
	$(+\infty) + a = +\infty$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
	$(-\infty) + a = -\infty$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
Πολλαπλασιασμός	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
	$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$
	$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a > 0 \\ +\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$
Διάρθρωση	$\frac{a}{+\infty} = 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
	$\frac{a}{-\infty} = 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Μη επιτρεπτές πράξεις (απροσδιόριστες μορφές)			
$(+\infty) + (-\infty) = ;$			
$(+\infty) - (+\infty) = ;$			
$(-\infty) - (-\infty) = ;$			
$0 \cdot (+\infty) = ;$		$0 \cdot (-\infty) = ;$	
$\frac{0}{0} = ;$			
$\frac{+\infty}{+\infty} = ;$	$\frac{+\infty}{-\infty} = ;$	$\frac{-\infty}{+\infty} = ;$	$\frac{-\infty}{-\infty} = ;$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μορφή $\frac{a}{0}$, $a \neq 0$

86.

Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+4}{x^2+6x+9}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x^2-2x-3}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{4-x^2} + \frac{x}{2x-x^2} \right)$

Λύση

i. Η $f(x) = \frac{x+4}{x^2+6x+9}$
έχει πεδίο ορισμού
 $A = \mathbb{R} - \{-3\}$.
Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+4}{x^2+6x+9} = \left(\frac{1}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+4}{(x+3)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{1}{(x+3)^2} (x+4) \right] \end{aligned}$$

Είναι :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)^2 &= 0 \\ (x+3)^2 &> 0, \text{ για κάθε } x \in A \end{aligned} \right\}$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x+4) = -3+4=1$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

ii. Η $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x-3}$

έχει πεδίο ορισμού
 $A = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x^2-2x-3} = \left(\frac{-2}{0} \right)$$

Μεθοδολογία

Αν κατά την αναζήτηση ενός ορίου με $x \rightarrow x_0$ έχουμε τη μορφή $\frac{a}{0}$ με $a \neq 0$, τότε :

1^{ον} Μετατρέπουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο (εφόσον είναι εφικτό).

2^{ον} Απομονώνουμε τον παράγοντα που μηδενίζει τον παρονομαστή (όταν $x \rightarrow x_0$)
Έτσι καταλήγουμε στη μορφή:

$$\frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} \text{ με } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lambda \neq 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

3^{ον} Εξετάζουμε το πρόσημο της $\varphi(x)$ κοντά στο x_0 , οπότε :

Αν η παράσταση $\varphi(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο x_0 (π.χ. αν το $\varphi(x)$ είναι τέλειο τετράγωνο ή απόλυτο) τότε βρίσκουμε το όριο αμέσως σύμφωνα με τους «μνημονικούς τύπους» :

$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lambda \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\lambda \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \lambda > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

Αν η παράσταση $\varphi(x)$ δεν διατηρεί σταθερό το πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε βρίσκουμε τα πλευρικά όρια στο x_0 και εξετάζουμε εάν είναι ίσα, (οπότε υπάρχει το όριο στο x_0) ή διαφορετικά (οπότε δεν υπάρχει το όριο στο x_0).

$$\left(\frac{-2}{0}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x-3} \cdot \frac{1-x}{x+1} \right]$$

- Αν $x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-x}{x+1} = \frac{-1}{2}$

$$\text{θα είναι } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = (-\infty) \left(-\frac{1}{2} \right) = +\infty.$$

- Αν $x > 3 \Leftrightarrow x-3 > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-x}{x+1} = \frac{-1}{2}$

$$\text{θα είναι } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = (+\infty) \left(-\frac{1}{2} \right) = -\infty.$$

Επομένως **δεν υπάρχει** το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

- iii.** Η $f(x) = \frac{2}{4-x^2} + \frac{x}{2x-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{4-x^2} + \frac{x}{2x-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{(2-x)(2+x)} + \frac{x}{x(2-x)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + x(2+x)}{(2-x)(2+x)x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x}{x(2-x)(2+x)} \stackrel{\left(\frac{12}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2 + 4x}{x(2+x)} \right]$$

- Αν $x < 2 \Leftrightarrow 2-x > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 4x}{x(2+x)} = \frac{3}{2} > 0$

$$\text{θα είναι } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty.$$

- Αν $x > 2 \Leftrightarrow 2-x < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4x}{x(2+x)} = \frac{3}{2} > 0$

$$0 \text{ θα είναι } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

Επομένως **δεν υπάρχει** το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

87.

Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 2}{(1-x)^3}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - 1}{(x-2)(1-e^{x-2})}$ **iii.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^3}$

Λύση

- i. Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+2}{(1-x)^3}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

αφού πρέπει : $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και $(x-1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Επειδή $x \in A = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$, έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}+2}{(1-x)^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+2}{(1-x)^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{(1-x)^3} (\sqrt{x^2-1}+2) \right]$$

Αλλά $x > 1 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow (1-x)^3 < 0$
οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{(1-x)^3} (\sqrt{x^2-1}+2) \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

Παρατήρηση

Στο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}+2}{(1-x)^3}$ φαίνεται ο καθοριστικός ρόλος του πεδίου ορισμού της συνάρτησης για τον προσδιορισμό του ορίου της. Το αποτέλεσμα θα ήταν τελείως διαφορετικό αν το πεδίο ορισμού επέτρεπε το x να τείνει στο 1 και από τα αριστερά ($x \rightarrow 1^-$).

- ii. Έστω $f(x) = \frac{\ln x - 1}{(x-2)(1-e^{x-2})}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$$A = (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - 1}{(x-2)(1-e^{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{(x-2)(1-e^{x-2})} \cdot (\ln x - 1) \right]$$

Είναι : • $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2)(1-e^{x-2})] = 0$

• Πρόσημο παρονομαστή : $(x-2)(1-e^{x-2})$

x	0	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$1-e^{x-2}$	+	0	-
Γινόμενο	-	0	-

$$\left[\begin{array}{l} \text{Το πρόσημο του } 1-e^{x-2} \text{ το βρήκαμε ως εξής :} \\ \bullet \quad 1-e^{x-2} > 0 \Leftrightarrow e^{x-2} < 1 \Leftrightarrow e^{x-2} < e^0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \\ \bullet \quad 1-e^{x-2} < 0 \Leftrightarrow e^{x-2} > 1 \Leftrightarrow e^{x-2} > e^0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \end{array} \right]$$

Άρα για κάθε $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$, είναι $(x-2)(1-e^{x-2}) < 0$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)(1-e^{x-2})} = -\infty$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 2} (\ln x - 1) = \ln 2 - 1 < 0$, αφού $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \ln 2 < 1$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{(x-2)(1-e^{x-2})} \cdot (\ln x - 1) \right] = (-\infty) \cdot (\ln 2 - 1) = +\infty$$

iii. $Hf(x) = \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^3}$ έχει πεδίο ορισμού

$$A = [0, 4) \cup (4, +\infty).$$

Είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^3} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(\sqrt{x}-2)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)^2} \quad \left(\frac{4}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} (\sqrt{x}+2) \right] \quad (\sqrt{x}-2)^2 > 0 \\ &= (+\infty) \cdot 4 = +\infty \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Ενώ ένα όριο της μορφής $\frac{a}{0}$

(με $a \neq 0$) σε κάθε περίπτωση

- θα είναι $+\infty$ ή
- θα είναι $-\infty$ ή
- δεν θα υπάρχει και ποτέ δε θα είναι πραγματικός αριθμός

Ένα όριο της μορφής $\frac{0}{0}$ σε κάθε

περίπτωση

- θα είναι πραγματικός αριθμός ή
- θα είναι $+\infty$ ή
- θα είναι $-\infty$ ή
- δεν θα υπάρχει

88.

Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|-3}{|x-2|}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{4-|x+3|}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x|x|}$

Λύση

i. Η $f(x) = \frac{|x|-3}{|x-2|}$ έχει πεδίο

ορισμού $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|-3}{|x-2|} \quad \left(\frac{-1}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{|x-2|} (|x|-3) \right] \\ &\quad |x-2| > 0 \\ &= (+\infty)(-1) = -\infty \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Τα απόλυτα παραστάσεων σε όρια της μορφής

$$\frac{a}{0} \quad (a \neq 0) :$$

Αν βρίσκονται στον αριθμητή τα διατηρούμε αφού η ύπαρξη τους δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του ορίου.

Αν βρίσκονται στον παρονομαστή τότε :

- τα διατηρούμε αν η ύπαρξη τους βοηθάει στον προσδιορισμό του προσήμου του παρονομαστή
- απαλλασσόμαστε από αυτά για να μπορέσουμε να βρούμε το πρόσημο του παρονομαστή και να υπολογίσουμε το όριο.

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+|x|}{4-|x+3|}$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{-7, 1\}$.

(αφού $|x+3| \neq 4 \Leftrightarrow x+3 \neq 4$ και $x+3 \neq -4 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -7$)

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4 > 0 \text{ επομένως } x+3 > 0 \text{ κοντά στο } 1.$$

Άρα για x κοντά στο 1, είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{4-|x+3|} \stackrel{\left(\frac{2}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{4-(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{4-x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} (x+|x|) \right] \end{aligned}$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x < 1 \Leftrightarrow 1-x > 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{1-x} (x+|x|) \right] = (+\infty) \cdot 2 = +\infty.$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x > 1 \Leftrightarrow 1-x < 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1-x} (x+|x|) \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{4-|x+3|}$

iii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x|x|}$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Έχουμε :

$$\blacklozenge \text{ Αν } x < 0 \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x \cdot (-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{-x^2} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{-x^2} (x^2+1) \right] \stackrel{-x^2 < 0}{=} (-\infty) \cdot 1 = -\infty$$

$$\blacklozenge \text{ Αν } x > 0 \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x^2} (x^2+1) \right] \stackrel{x^2 > 0}{=} (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x|x|}$

89.

Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x-2}{\eta\mu x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(x+2)}{\eta\mu x - x}$

Λύση

i. Έστω $f(x) = \frac{x-2}{\eta\mu x - 1}$ με $x \in A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-2}{\eta\mu x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\eta\mu x - 1} (x-2) \right)$$

Είναι :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - 1) = 0 \\ \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 1 < 0 \text{ για κάθε } x \in A \end{array} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x - 1} = -\infty$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x-2) = \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi-4}{2} < 0$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = (-\infty) \frac{\pi-4}{2} = +\infty$$

ii. Έστω $f(x) = \frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$$\text{Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} (x-1) \right)$$

• Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x > 0$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$, θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = (+\infty) \frac{\pi-2}{2} = +\infty.$$

• Αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x < 0$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sigma\upsilon\nu x = 0$, θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = (-\infty) \frac{\pi-2}{2} = -\infty.$$

Επομένως **δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.**

iii. Έστω $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+2)}{\eta\mu x - x}$ η οποία έχει πεδίο

ορισμού το $\mathbb{R} - \{0\}$, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$ και επομένως $\eta\mu x \neq x$.

Θυμίζουμε

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει :

$$|\eta\mu x| \leq |x|.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta\mu x - x} \cdot \sigma\upsilon\nu(x+2) \right].$$

♦ Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $x > 0$ και $\eta\mu x > 0$ οπότε :

$$|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow \eta\mu x < x \Leftrightarrow \eta\mu x - x < 0.$$

Επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\eta\mu x - x} \cdot \sigma\upsilon\nu(x+2) \right] = (-\infty) \cdot \sigma\upsilon\nu 2 = +\infty,$$

$$\text{γιατί } \sigma\upsilon\nu 2 < 0 \text{ αφού } \frac{\pi}{2} < 2 < \pi$$

♦ Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $x < 0$ και $\eta\mu x < 0$ οπότε :

$$|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -\eta\mu x < -x \Leftrightarrow \eta\mu x > x \Leftrightarrow \eta\mu x - x > 0.$$

Επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{\eta\mu x - x} \cdot \sigma\upsilon\nu(x+2) \right] = (+\infty) \cdot \sigma\upsilon\nu 2 = -\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Χρήση βοηθητικής συνάρτησης

90.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} = -\infty$, τότε να προσδιορίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$, για x κοντά στο 1, με

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$$

Για x κοντά στο 1 έχουμε :

$$g(x) = \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1) \cdot g(x) = f(x) \cdot \eta\mu(x-1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot g(x)}{\eta\mu(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)g(x)}{(\sqrt{x}+1)\eta\mu(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{(x-1)g(x)}{(\sqrt{x}+1)\eta\mu(x-1)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \frac{x-1}{\eta\mu(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Είναι : } \bullet \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

- Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\eta\mu(x-1)}$ θέτουμε $u = x-1 \Leftrightarrow x = u+1$.

Οπότε όταν $x \rightarrow 1$ το $u \rightarrow 0$.

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\eta\mu(x-1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\eta\mu u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = (-\infty) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\infty$$

91.

A. Να αποδείξετε ότι :

- i.** Αν ισχύει ότι $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

- ii.** Αν ισχύει ότι $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

B. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(x^2 - 4x + 4)f(x) \leq x - 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Λύση

A.i. Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, άρα κοντά στο x_0 ισχύει ότι $g(x) > 0$.

Από τη σχέση $f(x) \geq g(x)$ προκύπτει ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Έτσι κοντά στο x_0 έχουμε :

$$0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)}.$$

Όμως είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Άρα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\frac{1}{f(x)} > 0$ κοντά στο x_0 .

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, άρα κοντά στο x_0 ισχύει ότι $g(x) < 0$.

Από τη σχέση $f(x) \leq g(x)$ προκύπτει ότι $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Έτσι κοντά στο x_0 έχουμε : $0 > \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{g(x)}$.

Όμως είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Άρα είναι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = -\infty$

διότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\frac{1}{f(x)} < 0$ κοντά στο x_0 .

B. Για κάθε $x \neq 2$ ισχύει ότι :

$$(x^2 - 4x + 4)f(x) \leq x - 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 f(x) \leq x - 5 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x - 5}{(x - 2)^2}$$

Όμως είναι : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x - 5) \cdot \frac{1}{(x - 2)^2} \right] = -\infty$

διότι :

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 = 0$ και $(x - 2)^2 > 0$ κοντά στο x_0 , άρα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) = 2 - 5 = -3 < 0$

Άρα από την προηγούμενη πρόταση **A. ii.**

προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

Παρατήρηση

Οι προηγούμενες προτάσεις στο **A.i.** & **A.ii.** όταν χρησιμοποιούνται πρέπει να αποδεικνύονται.

Παραμετρικά όρια

92.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - \lambda}{|x - 2|}$.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{3x^2 - \lambda}{|x - 2|}$ με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

Αριθμητής : $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - \lambda) = 12 - \lambda$

Παρονομαστής : $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $12 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 12$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{|x-2|} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

• Αν $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} [-3(x+2)] = -12$$

• Αν $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [3(x+2)] = 12$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

♦ Αν $12 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 12$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - \lambda}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{|x - 2|} \cdot (3x^2 - \lambda) \right] = (+\infty)(12 - \lambda) = +\infty$$

♦ Αν $12 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 12$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - \lambda}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{|x - 2|} \cdot (3x^2 - \lambda) \right] = (+\infty)(12 - \lambda) = -\infty$$

Επομένως : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} +\infty & , \text{ αν } \lambda < 12 \\ \text{δεν υπάρχει} & , \text{ αν } \lambda = 12 \\ -\infty & , \text{ αν } \lambda > 12 \end{cases}$

93.

Να μελετήσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Αριθμητής : $\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda x^2 - 1) = \lambda - 1$

Παρονομαστής : $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

♦ Αν $\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x - 1} \cdot (\lambda x^2 - 1) \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Αν } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, \text{ έχουμε :} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x - 1} \cdot (\lambda x^2 - 1) \right] = (+\infty) \cdot (\lambda - 1) \stackrel{\lambda - 1 > 0}{=} +\infty \\ \bullet \text{ Αν } x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1, \text{ έχουμε :} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x - 1} \cdot (\lambda x^2 - 1) \right] = (-\infty) \cdot (\lambda - 1) \stackrel{\lambda - 1 > 0}{=} -\infty \end{array} \right\} \text{ άρα δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

♦ Αν $\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$, τότε : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x - 1} \cdot (\lambda x^2 - 1) \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Αν } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, \text{ έχουμε :} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x - 1} \cdot (\lambda x^2 - 1) \right] = (+\infty) \cdot (\lambda - 1) \stackrel{\lambda - 1 < 0}{=} -\infty \\ \bullet \text{ Αν } x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1, \text{ έχουμε :} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x - 1} \cdot (\lambda x^2 - 1) \right] = (-\infty) \cdot (\lambda - 1) \stackrel{\lambda - 1 < 0}{=} +\infty \end{array} \right\} \text{ Άρα δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1} = \begin{cases} 2, & \text{αν } \lambda = 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } \lambda \neq 1 \end{cases}$.

94.

A. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{(x - 1)^3}$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Γ. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 2x + \lambda^2}{(x - 1)^2}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .

Λύση

A. α' τρόπος

Έστω $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε :

$$f(x) = \frac{\lambda x^2 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \lambda x^2 - 1 = (x - 1)f(x)$$

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)f(x)]$$

Άρα :

$$\lambda \cdot 1^2 - 1 = (1 - 1) \cdot \ell \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

β' τρόπος

Κάνοντας διερεύνηση του ορίου όπως στην προηγούμενη εφαρμογή βρίσκουμε ότι το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μόνο αν $\lambda = 1$.

B. Έστω

$$g(x) = \frac{\lambda x^2 - 1}{(x - 1)^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = L \in \mathbb{R}$, τότε :

$$g(x) = \frac{\lambda x^2 - 1}{(x - 1)^3} \Leftrightarrow \lambda x^2 - 1 = (x - 1)^3 g(x),$$

οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)^3 g(x)]$$

$$\text{Άρα : } \lambda \cdot 1^2 - 1 = (1 - 1)^3 \cdot L \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Για } \lambda = 1 \text{ έχουμε : } g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^3} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^3} = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$\text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(x - 1)^2} \cdot (x + 1) \right] = (+\infty) \cdot 2 = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 1}{(x - 1)^3} \in \mathbb{R}$.

Γ. Έστω $h(x) = \frac{\lambda x^2 - 2x + \lambda^2}{(x - 1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, με $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε : } h(x) = \frac{\lambda x^2 - 2x + \lambda^2}{(x - 1)^2} \Leftrightarrow \lambda x^2 - 2x + \lambda^2 = (x - 1)^2 \cdot h(x), \text{ οπότε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda x^2 - 2x + \lambda^2) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)^2 \cdot h(x)]$$

Παρατήρηση

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \ell \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

τότε πρέπει κατ' ανάγκη να είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (1)$$

$H(1)$ είναι μια αναγκαία συνθήκη για να

είναι το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$ πραγματικός αριθμός,

δεν είναι όμως και ικανή. (Απλά αναγόμεστε στη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$)

Επομένως αν από την εκφώνηση της άσκησης δεν έχουμε ως δεδομένο ότι το όριο

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ ή όταν από την

αναγκαία συνθήκη (1) προκύπτουν περισσότερες από μια τιμές μιας παραμέτρου τότε πρέπει να συνεχίζουμε υπολογίζοντας το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$ εξασφαλίζοντας έτσι ότι το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Άρα: $\lambda \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + \lambda^2 = (1-1)^2 \cdot \ell \Leftrightarrow \lambda - 2 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -2$

♦ Αν $\lambda = 1$, τότε $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 \in \mathbb{R}$.

♦ Αν $\lambda = -2$, τότε :

$$h(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2} = \frac{-2(x^2 + x - 2)}{(x-1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-2x-4}{x-1} = \frac{1}{x-1} \cdot (-2x-4)$$

• Αν $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} \cdot (-2x-4) \right] = (+\infty) \cdot (-6) = -\infty$$

• Αν $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} \cdot (-2x-4) \right] = (-\infty) \cdot (-6) = +\infty$$

Άρα **δεν υπάρχει** το $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

Επομένως το $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μόνο αν $\lambda = 1$.

95.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ax+7}{x^2+x-12}$.

i. Να προσδιορίσετε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$.

Λύση

i. Είναι $f(x) = \frac{ax+7}{x^2+x-12}$, $x \in \mathbb{R} - \{-4, 3\}$

Αν $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε: $f(x) = \frac{ax+7}{x^2+x-12} \Leftrightarrow ax+7 = f(x)(x^2+x-12)$

Οπότε: $\lim_{x \rightarrow -4} (ax+7) = \lim_{x \rightarrow -4} [f(x)(x^2+x-12)] = \ell \cdot 0 = 0$

Άρα $-4a+7=0 \Leftrightarrow a=\frac{7}{4}$

Για $\alpha = \frac{7}{4}$ είναι :

$$f(x) = \frac{\frac{7}{4}x + 7}{x^2 + x - 12} = \frac{7(x+4)}{4(x+4)(x-3)} = \frac{7}{4(x-3)}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{7}{4(x-3)} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$

Συνεπώς η ζητούμενη τιμή είναι $\alpha = \frac{7}{4}$.

ii. Είναι $f(x) = \frac{\alpha x + 7}{x^2 + x - 12}$ με $\lim_{x \rightarrow -4^+} (\alpha x + 7) = -4\alpha + 7$ και

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} (x^2 + x - 12) = 0$$

♦ Αν $-4\alpha + 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{4}$, τότε λόγω του α ερωτήματος :

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\frac{1}{4} \text{ άτοπο}$$

♦ Αν $-4\alpha + 7 \neq 0$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\alpha x + 7}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left[\frac{1}{x+4} \cdot \frac{\alpha x + 7}{x-3} \right] \stackrel{x > -4}{=}_{x+4 > 0} (+\infty) \cdot \frac{-4\alpha + 7}{-7}$$

Για να είναι $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$ πρέπει και αρκεί

$$\frac{-4\alpha + 7}{-7} < 0 \Leftrightarrow -4\alpha + 7 > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{7}{4}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι οι πραγματικοί αριθμοί α με $\alpha < \frac{7}{4}$.

96.

Αν $f(x) = \frac{\alpha|x+2| + \beta|x-4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$.

Λύση

Κατ' αρχήν θα απαλλαγούμε από τα απόλυτα.

Είναι : • $\lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5 > 0$, επομένως $x+2 > 0$ κοντά στο 3.

• $\lim_{x \rightarrow 3} (x-4) = -1 < 0$, επομένως $x-4 < 0$ κοντά στο 3.

Συνεπώς :

$$f(x) = \frac{\alpha(x+2) + \beta(-x+4) - 2}{x^2 - 5x + 6} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\alpha x + 2\alpha - \beta x + 4\beta - 2}{x^2 - 5x + 6}, x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Επειδή η f έχει όριο στο 3 πραγματικό αριθμό (το 10) ενώ ο παρονομαστής

$x^2 - 5x + 6$ έχει όριο στο 3 το 0, θα αποδείξουμε ότι και ο αριθμητής έχει όριο 0.

$$\text{Έχουμε: } f(x) = \frac{\alpha x + 2\alpha - \beta x + 4\beta - 2}{x^2 - 5x + 6} \Leftrightarrow \alpha x + 2\alpha - \beta x + 4\beta - 2 = f(x)(x^2 - 5x + 6)$$

Οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\alpha x + 2\alpha - \beta x + 4\beta - 2) = \lim_{x \rightarrow 3} [f(x)(x^2 - 5x + 6)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\alpha x + 2\alpha - \beta x + 4\beta - 2) = 10 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Άρα: } 3\alpha + 2\alpha - 3\beta + 4\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow 5\alpha + \beta - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2 - 5\alpha \quad (1)$$

Οπότε η $f(x)$ λόγω της (1) γίνεται :

$$f(x) = \frac{\alpha x + 2\alpha - (2 - 5\alpha)x + 4(2 - 5\alpha) - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\alpha x + 2\alpha - 2x + 5\alpha x + 8 - 20\alpha - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{6\alpha x - 2x - 18\alpha + 6}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{6\alpha(x - 3) - 2(x - 3)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(x - 3)(6\alpha - 2)}{(x - 3)(x - 2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{6\alpha - 2}{x - 2}$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6\alpha - 2}{x - 2} = \frac{6\alpha - 2}{1} = 6\alpha - 2$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10, \text{ άρα } 6\alpha - 2 = 10 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\text{Από (1) έχουμε: } \beta = 2 - 5 \cdot 2 \Leftrightarrow \beta = -8$$

97.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x^2 + 1}{\alpha x^2 + \beta x + 2}.$$

$$\text{Να βρείτε τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ έτσι ώστε } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

Λύση

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{x^2 + 1}{\alpha x^2 + \beta x + 2} \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + 2 = \frac{x^2 + 1}{f(x)}$$

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x^2 + 1) \frac{1}{f(x)} \right] = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Οπότε: } \alpha + \beta + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (\alpha x^2 + \beta x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[(x^2 + 1) \frac{1}{f(x)} \right] = 5 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Οπότε: } 4\alpha + 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta + 1 = 0 \quad (2)$$

Παρατήρηση

Το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6\alpha x - 2x - 18\alpha + 6}{x^2 - 5x + 6}$
μπορούσε να υπολογιστεί και με **De L'Hospital** ως εξής :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(6\alpha x - 2x - 18\alpha + 6)'}{(x^2 - 5x + 6)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6\alpha - 2}{2x - 5} = 6\alpha - 2$$

Οι σχέσεις **(1)** και **(2)** δίνουν $\alpha = 1$ και $\beta = -3$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ παίρνουμε: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x-2} \right] = (-\infty) \cdot \frac{2}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2 + 1}{x-1} \right] = (+\infty) \cdot \frac{5}{1} = +\infty$$

Συνεπώς οι ζητούμενες τιμές είναι $\alpha = 1$ και $\beta = -3$.

98.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 6}{x^2 - 4}, & \text{αν } x < 2 \\ \frac{\beta x^2 + \gamma x + 2}{x - 2}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}.$$

Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός τον οποίο και να υπολογίσετε.

Λύση

♦ Αν $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha x + 6}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{x-2} \cdot \frac{\alpha x + 6}{x+2} \right] = (-\infty) \cdot \frac{2\alpha + 6}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Αν } \frac{2\alpha + 6}{4} > 0 \text{ ή } \frac{2\alpha + 6}{4} < 0, \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ ή } +\infty, \text{ οπότε δεν είναι}$$

πραγματικός αριθμός.

Άρα πρέπει κατ' ανάγκη:

$$\frac{2\alpha + 6}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

Για $\alpha = -3$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x + 6}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{x+2} = \frac{-3}{4}$$

♦ Αν $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$ είναι:

Άλλος τρόπος

$$\text{Για } x < 2: f(x) = \frac{\alpha x + 6}{x^2 - 4}$$

$$\text{Άρα } \alpha x + 6 = f(x)(x^2 - 4)$$

$$\text{Πρέπει } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\alpha x + 6) = \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)(x^2 - 4)]$$

$$\text{Άρα } 2\alpha + 6 = \ell \cdot 0$$

$$\text{Άρα } \alpha = -3$$

$$\text{Για } \alpha = -3 \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\beta x^2 + \gamma x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x - 2} \cdot (\beta x^2 + \gamma x + 2) \right] = (+\infty) \cdot (4\beta + 2\gamma + 2)$$

Αν $4\beta + 2\gamma + 2 > 0$ ή $4\beta + 2\gamma + 2 <$

0 , τότε $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$,

οπότε δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Άρα πρέπει κατ' ανάγκη :

$$4\beta + 2\gamma + 2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -2\beta - 1 \quad (1)$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\beta x^2 + (-2\beta - 1)x + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\beta x^2 - 2\beta x - x + 2}{x - 2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\beta x(x - 2) - (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(\beta x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\beta x - 1) = 2\beta - 1$$

Το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2\beta - 1 = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{8}$$

Από (1) παίρνουμε $\gamma = -\frac{5}{4}$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι

$$\alpha = -3, \quad \beta = \frac{1}{8} \quad \text{και} \quad \gamma = -\frac{5}{4}.$$

Άλλος τρόπος

$$\begin{aligned} \text{Για } x > 2 : \quad f(x) &= \frac{\beta x^2 + \gamma x + 2}{x - 2} \\ \text{Άρα } \beta x^2 + \gamma x + 2 &= f(x)(x - 2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (\beta x^2 + \gamma x + 2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)(x - 2)] \\ \text{Άρα } 4\beta + 2\gamma + 2 &= \ell \cdot 0 = 0 \\ \text{Άρα } \gamma &= -2\beta - 1 \\ \text{Οπότε ...} \end{aligned}$$

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

Μορφή $\frac{a}{0}$, $a \neq 0$

402. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-5x}{3(x-2)^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+12}{x^2-6x+9}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^3-3x^2+4}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$

vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3-x} - \frac{2x^2-3}{x^2-5x+6} \right)$

vii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+x+1}{x^2+x-2}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x^2}{x^2-3x+2}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x}{\sqrt{4x-x^2}-2}$

xi. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)}$

xii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x-3\sqrt{x}+2}$

xiii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-4x-3}{x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-1}$

xiv. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4}{x\sqrt{x}-3x-9\sqrt{x}+27}$

xv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{(x-1)\ln x}$

xvi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4}-1}{1-e^{x-2}}$

xvii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1+\sqrt{9-x^2}}{e^{3-x}-1}$

xviii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - 1}{(e^{x-1}-1)(1-x)}$

xix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(1-x)(1-e^{x-x^2})}$

403. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x+2|-7}{9-x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x+3|-2}{|x-2|}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+|x|}{|x+1|-2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-|1-6x|}{|(x-6)^5-x^2+26|}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{|x|-x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+\sqrt{x-2}}{1-|x-1|}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-5x}{\sqrt{x^3-2x^2+x}}$

404. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-7}{\sin x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{\eta \mu x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x - 2}{\sin x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + 1}{1 - \sin^3 x}$

v. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin 3x + 1}{2\eta \mu x - 1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{|x| \eta \mu x}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \eta \mu x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu(x+4)}{\eta \mu x - x}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{\eta \mu^2 x - x^2}$

xi. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \epsilon \phi x}{\sin x}$

xii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3 \cdot \eta \mu^2 \frac{1}{x}}$

xiii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x \cdot \eta \mu^2 \frac{1}{x}}$

405. A. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + x - 3$ τότε να βρείτε :

i. Τη μονοτονία της $f(x)$. **ii.** Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{3 - 2^x - x}$

B. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{1 - \ln x - x}$

406. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(x-1)^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^5 + 2x^3}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^3 \eta \mu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{\sqrt{1+x^3} - 1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1 - \sin x}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x|x|}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x - 2}}{x - 2}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4+x}}{|x| \eta \mu x}$

407. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{(x-1)(x-\sqrt{x})}, & 0 < x < 1 \\ \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)^3}, & x > 1 \end{cases}$.

Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο της f στο x_0 για $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

408. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{3f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - f(x) + 3}$.

Χρήση βοηθητικής συνάρτησης

409. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ όταν :

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu x}{\sqrt{x+1}-1} = -\infty \\ \text{ii.} & \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \eta \mu x \cdot f(x)] = 2017 \\ \text{iii.} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \varepsilon \varphi x}{2x^2 - x} = -\infty \\ \text{iv.} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{f(x) \cdot \eta \mu x} = -\infty \end{array}$$

410. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ όταν :

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow 1} (|x-1|f(x)) = 3 & \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2+1} = -\infty & \text{iii.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x-3} = +\infty \\ \text{iv.} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{f(x)} = -\infty & \text{v.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3}{f(x)} = +\infty & \text{vi.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{3f(x)+1} = -\infty \end{array}$$

411. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} (|x-2|f(x)) = 1$.

Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \qquad \beta. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 5}{f^3(x) + 1}$$

412. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (x^2 - 4)}{x - 1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{g(x) \cdot (x - 2)} = +\infty$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$.

413. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^2 f(x) \geq x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \quad \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{iii.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x) - 2017) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$$

414. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^4 f(x) \leq (x-2) \cdot \eta \mu x \cdot \eta \mu 3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \quad \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{iii.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{f^2(x) - 3f(x) + 7}$$

Π α ρ α μ ε τ ρ ι κ ά ό ρ ι α

415. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x - \lambda^2}{x^2 - 4x + 4} \quad \text{στο } x_0 = 2.$$

416. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \lambda^2}{|x - 2|}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

417. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{|x - 2|}$.

418. Να μελετήσετε την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2 x^2 - 1}{x^2 - 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

419. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\beta - \alpha}{x^2 - 4x + 3} = 2.$$

420. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta \sqrt{x} + 1}{x - 1}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

421. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + \alpha x + \beta}{x^2 - 4x}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την

$$\text{οποία ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{4}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

422. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha|x+1| - \beta|x-3| + 5}{x^2 - 3x + 2}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

423. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \alpha|x-2| + 3|x-1| - \beta}{\eta\mu x} = 1$

424. Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{|x - 2|} = \gamma$.

425. Αν $f(x) = \frac{(\mu^2 - 3\mu)x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4}$, να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f έχει στο $x_0 = 2$ όριο $\ell \in \mathbb{R}$.

- 426.** Να βρείτε τον θετικό αριθμό α ώστε το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2\alpha} - \sqrt{2x+\alpha}}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{στο } x_0 = 3, \text{ να υπάρχει στο } \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια να βρείτε το όριο.

- 427.** Να βρείτε (αν υπάρχει) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2 - \sqrt{x}}{x^2 - 2x + 1}$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

- 428.** Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 6x + 9\lambda^2}{(x-3)^2}$ έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$ στο $x_0 = 3$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .

- 429.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + (\beta + 2)x + 4}{x^2 - 2x + 1}$.

Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$;

- 430.** Αν $f(x) = \frac{x^3 + (\lambda - 1)x + \mu}{|x + 2|}$ βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

- 431.** Έστω μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x - 2} = 4$. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x) = \frac{xf(x) - 3\lambda - \lambda^2}{x^2 - 4}$ έχει στο $x_0 = 2$ όριο $L \in \mathbb{R}$; Ποιο είναι τότε το L ;

- 432.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^3(x) + \alpha f(x) + \beta}{x - 3} = 40$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

- 433.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \lambda}{x - 2} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον αριθμό λ για τον οποίο ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10(f(x) - \lambda + 1) - 5x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf^2(x) - 2\lambda^2}{x - 2}$$

- 434.** Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \alpha}{x - 1} = \alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - \alpha^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f^2(x) - \alpha^2}{x - 1}$$

435. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 6}{(x-2)^2}$

να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

436. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{x^2 + \alpha x + 4}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

437. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x-1}, & x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$,

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = 1$.

438. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + 3}{x-3}, & x < 3 \\ \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - 3x}, & x > 3 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε τους

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε το όριο της f στο $x_0 = 3$ να είναι πραγματικός αριθμός και στη συνέχεια να υπολογίσετε αυτό το όριο.

439. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2}{x} = 2$.

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x + \eta \mu x}{\sqrt{x+1} - 1}$

iv. Να βρείτε το λ , ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - x^3}{\lambda x^2 + f^2(x)} = 2$

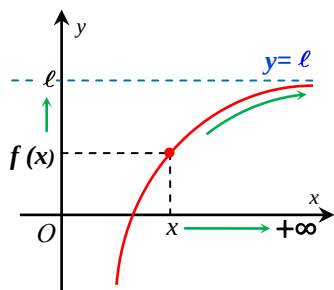
440. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$

και η $g: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5$

και $g(x+3) = g(x) + f(x)$ για κάθε $x \neq 0, 1$ και $x+3 \neq 0, 1$. Να βρείτε:

α. το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **β.** το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **γ.** το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ **δ.** το $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

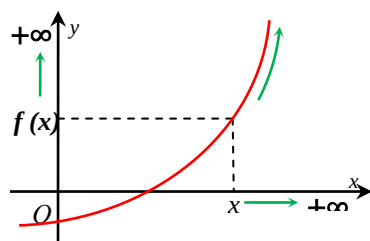
Όριο συνάρτησης στο άπειρο



Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$. (Αυτό επιτρέπει στο x να γίνει οσοδήποτε μεγάλο).

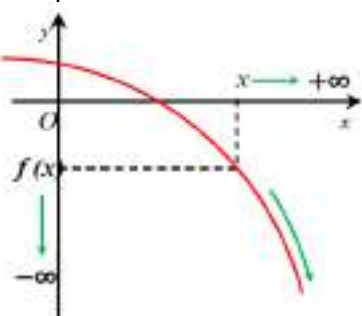
- ♦ Όταν οι τιμές της f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριόριστα, τότε λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το ℓ** και γράφουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



- ♦ Όταν οι τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα, καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριόριστα, τότε λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το $+\infty$** και γράφουμε :

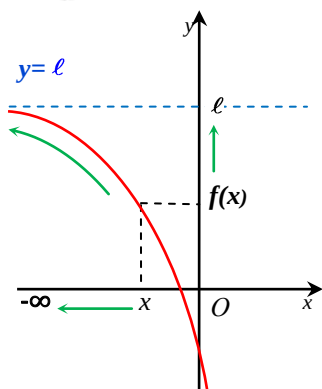
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



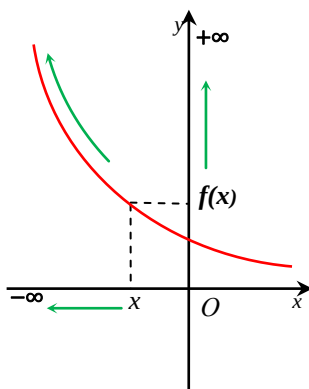
- ♦ Όταν οι τιμές της f μειώνονται απεριόριστα, καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριόριστα, τότε λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το $-\infty$** και γράφουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

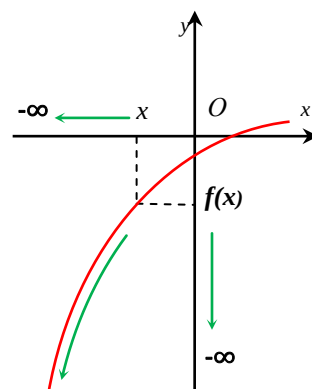
Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν $x \rightarrow -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Βασικά όρια

$$\begin{aligned}
 & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty, \quad v \in \mathbb{N}^* & \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v: \text{άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v: \text{περιττός} \end{cases}, \quad v \in \mathbb{N}^* \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^* & \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

Ιδιότητες

Για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι :

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- δεν καταλήγουμε σ' απροσδιόριστη μορφή.

Όριο πολωνυμικής συνάρτησης

Αν $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$ είναι μια πολωνυμική συνάρτηση, τότε ισχύουν :

$$\begin{aligned}
 & \blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v) \\
 & \blacklozenge \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v)
 \end{aligned}$$

Δηλαδή :

Η οριακή τιμή πολωνύμου (όταν $x \rightarrow \pm\infty$) ισούται με την οριακή τιμή του μεγιστοβάθμιου όρου του πολωνύμου.

Όριο ρητής συνάρτησης

Αν $f(x) = \frac{a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $a_v, \beta_\kappa \neq 0$, είναι μια ρητή συνάρτηση,

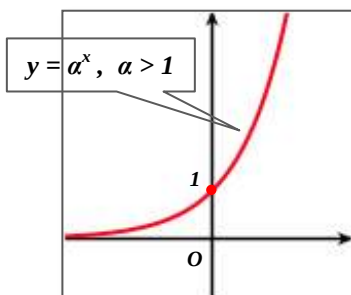
τότε ισχύουν :

$$\begin{aligned}
 & \blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \\
 & \blacklozenge \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή :

Η οριακή τιμή ρητής συνάρτησης (όταν $x \rightarrow \pm\infty$) ισούται με την οριακή τιμή του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων.

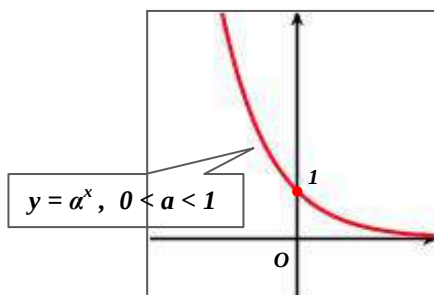
Όριο Εκθετικής και Λογαριθμικής συνάρτησης



♦ Αν $a > 1$, ισχύει ότι :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

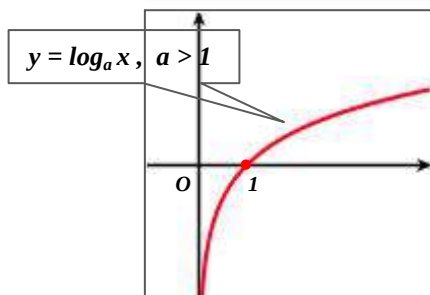
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$



♦ Αν $0 < a < 1$, ισχύει ότι :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

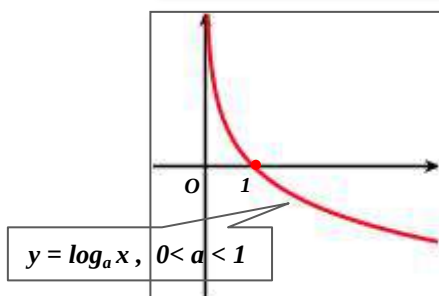
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$



♦ Αν $a > 1$, ισχύει ότι :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$



♦ Αν $0 < a < 1$, ισχύει ότι :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$

Συνέπειες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$