

Θέμα 4ο

23312. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε: f συνεχής στο $[-2, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμψής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$. (Μονάδες 08)

23531. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

24760. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$, $x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$. (Μονάδες 7)

25745. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f(0) = f(2)$ και $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

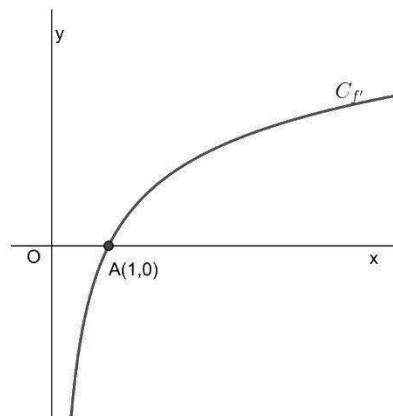
27320. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1^ο: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2^ο: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».



Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
(Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας.
(Μονάδες 06)

27667. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)

ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η εξίσωση $e^x + x = a$ έχει μοναδική ρίζα ρ . (Μονάδες 05)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η συνάρτηση $g(x) = ax - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$. (Μονάδες 09)

31549. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e \approx 2,71$.

31550. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0} + x_0$. (Μονάδες 6)

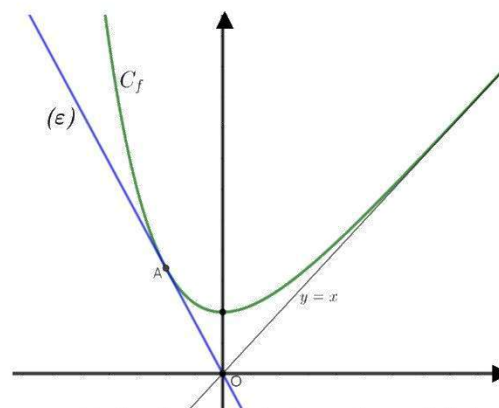
δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

Κανόνες De L' Hospital- Ασύμπτωτες

Θέμα 2ο

23530. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

(Μονάδες 8)

24755. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

25748. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$.

(Μονάδες 8)

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$.

(Μονάδες 9)

28314. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x + 1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 5)

31547. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3 - 2x}{(x - 2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$. (Μονάδες 10)
- β) Να εξετάσετε αν η f είναι
- i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8) ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Θέμα 4ο

24759. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)
- β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:
- i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (Μονάδες 5) ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

29130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)
- ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 06)
- β) Για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)
- ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$. (Μονάδες 04)
- γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 06)

Αρχική συνάρτηση

Θέμα 4ο

24769. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς

τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 6)

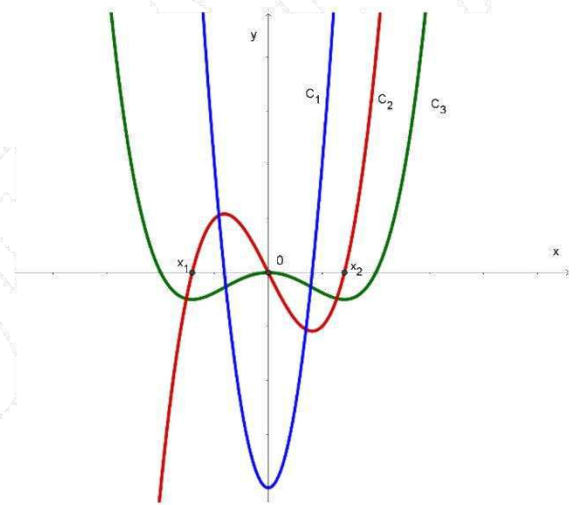
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$.

(Μονάδες 5)

32694. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2 ,

α) i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F .

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					



(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F .

(Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F .

(Μονάδες 07)

Υπολογιστικά ολοκληρώματα

Θέμα 4ο

23957. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$. (Μονάδες 10)

24770. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

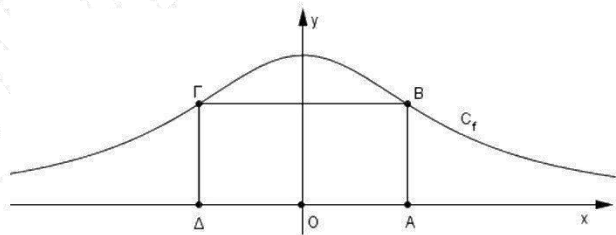
- α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$. (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$. (Μονάδες 4)
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$. (Μονάδες 8)

24771. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$, $\alpha > 0$. Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)



- δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

26184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

- α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$. (Μονάδες 9)

27321. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0, 1)$ και $\alpha \in (1, +\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ; (Μονάδες 9)

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε ότι

$$F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

27322. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \quad \text{όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

27668. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 3)(x - \lambda)(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4 - x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το

$$\text{ολοκλήρωμα } \int_1^3 f(x) dx. \quad (\text{Μονάδες 05})$$

29549. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε: $f'(0) = f(0) = 0$ και $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx. \quad (\text{Μονάδες 07})$$

$$\beta) f(\pi) = 0. \quad (\text{Μονάδες 08})$$

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Θέμα 4ο

23219. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 xf'(x) dx < 1$. (Μονάδες 6)

24758. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x) dx \leq 0$. (Μονάδες 6)

25766. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
f'(x)		+	o	-	o	+	o	-

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1$ και $f(2) = 5$ τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$. (Μονάδες 5)

31551. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x} & , x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

και $\varphi(x) = x \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \varphi(x) dx = 0$. (Μονάδες 5)

32225. Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x+1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,

- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} \cdot g(x) > 0$

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1}-1)$, $x \geq -1$.

(Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι

γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx$. (Μονάδες 06)

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Θέμα 2ο

32800. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 7]$.

Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_7^9 f(x) dx = 4.$$

(Μονάδες 10)

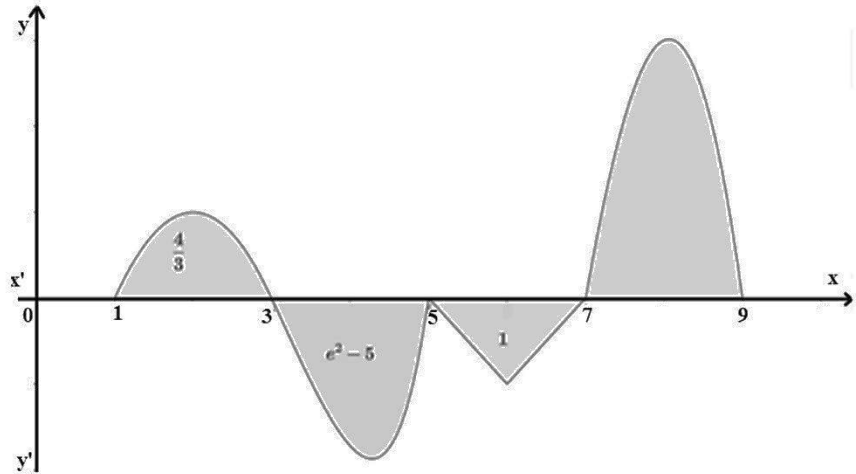
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν

του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 9]$.

(Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x) dx$.

(Μονάδες 08)



Θέμα 4ο

23218. Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.

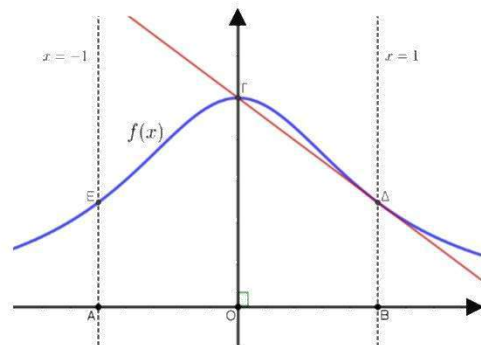
i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_p στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_2, x = -1$. (Μονάδες 8)

23955. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και οι

ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ , είναι η ευθεία $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)



β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\Gamma\Delta$, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ .

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

24275. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \rho$ ισούται με $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$

τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

24704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$.

(Μονάδες 10)

25147. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \eta \mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο

διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g .

(Μονάδες 9)

25235. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της

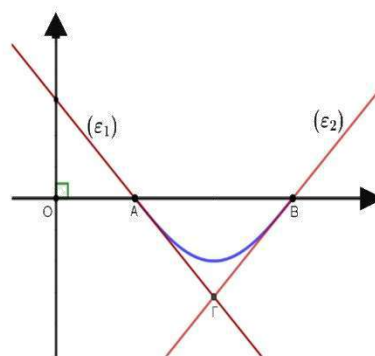
οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα

σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί

οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών

$(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1): y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.



(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)

25259. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. (Μονάδες 06) ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$. (Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. (Μονάδες 06)
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$. (Μονάδες 06)

25746. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. (Μονάδες 6)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$. (Μονάδες 7)
- δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$. (Μονάδες 6)

25747. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$. (Μονάδες 6)
- γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)
- δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$. (Μονάδες 6)

25757. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

- α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 09)
- β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0, 1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1 - x$. (Μονάδες 07)
- γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

25765. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x$, $x > 0$

- α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . (Μονάδες 7)
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$, $x = 1$. (Μονάδες 6)

26183. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4 \ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

27031. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο

$A\left(a, -\frac{a^3}{3}\right)$ με $a < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A .

(Μονάδες 06)

β) i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$

πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).

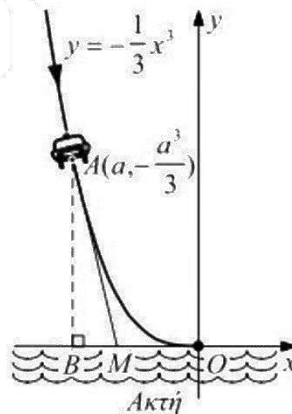
Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $a'(t) = -a(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 .

(Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M .

(Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 . (Μονάδες 09)



28476. Δίνεται η παραγωγίσμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0$ και

$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

(Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 07)

27408. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

Οι κορυφές $A(x, 0)$ και $\Delta(-x, 0)$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του $x \in [0, 3]$ δίνεται από την συνάρτηση

$$E(x) = 18x - 2x^3. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία.

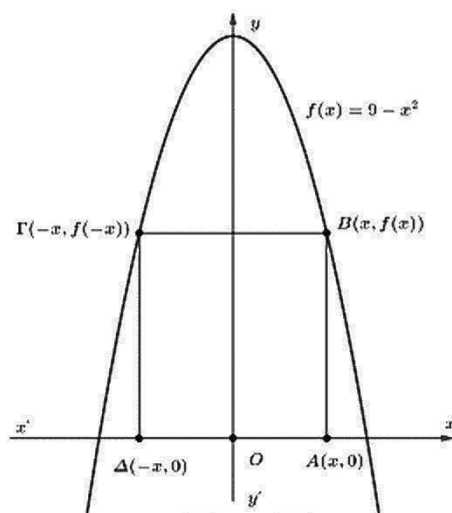
(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 7)



28870. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3, 2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η C_f που στο διάστημα $(-1, 2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

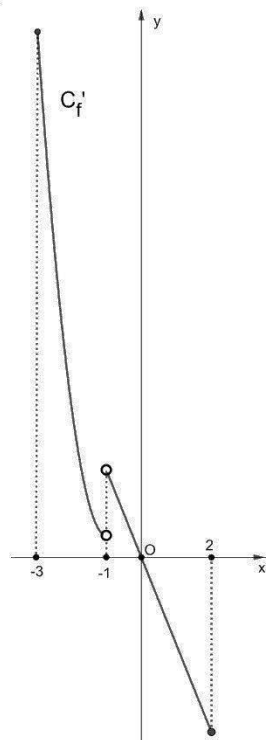
(Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

(Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x) dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.

(Μονάδες 06)



29646. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$, $x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο

$\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

(Μονάδες 09)

ii. Τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB .

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

(Μονάδες 08)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B , η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα $y'y$.

(Μονάδες 05)

31148. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$h(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln \sqrt{2}e - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

31149. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f ,

τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

(Μονάδες 9)

31530. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

(Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5}$, αν x_0 είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ

ένας θετικός αριθμός.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, 4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.

(Μονάδες 7)

31533. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f .

(Μονάδες 9)

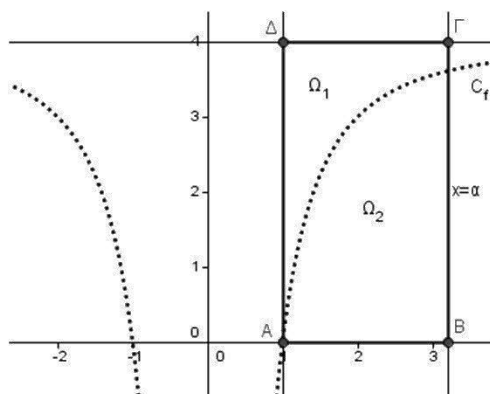
β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

(Μονάδες 6)

γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = a$, $a > 1$ και $y = 4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2 .

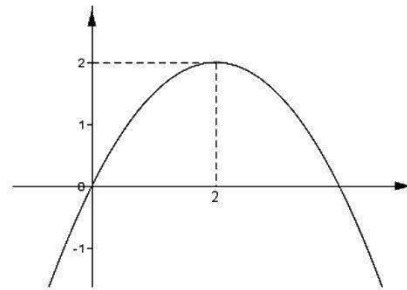
i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του a , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)



- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.
(Μονάδες 5)

31534. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



- α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

- β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.
(Μονάδες 6)

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

(Μονάδες 5)

31792. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(\ln x)^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 9)

- β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

(Μονάδες 7)

- γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$. (Μονάδες 9)