

Σταθερή συνάρτηση

Θέμα 4ο

23199. Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f .
(Μονάδες 9)

Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B .
(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$.
(Μονάδες 8)

Μονοτονία συνάρτησης

Θέμα 2ο

23937. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$.
(Μονάδες 09)

25764. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

27082. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.
(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.
(Μονάδες 07)

29211. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 08)

γ) i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 - 1”. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} . (Μονάδες 07)

Θέμα 4ο

23376. Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

ii. η συνάρτηση h είναι “1-1”. (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0$, $x > 0$. (Μονάδες 08)

26605. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

• $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

• $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. (Μονάδες 9)

27319. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα $(1, 2)$. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8)

(Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

27455. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

32524. Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{e - x \ln x - ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. (Μονάδες 07)

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23197. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f . (Μονάδες 8)

25761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

26707. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$;

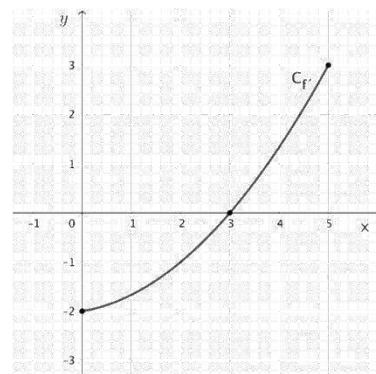
(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_0 = 3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 09)



32390. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2$, $x \in [0, 2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

Θέμα 4ο

23311. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

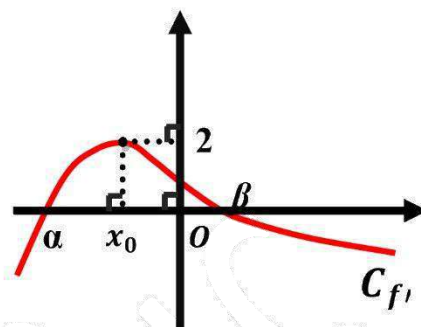
γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους u που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι

ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0,1 \text{ m/sec}$. (Μονάδες 05)

23210. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$. Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα x' η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0 .



α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)

24579. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$.

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

24587. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε , είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} (x_0 - \ln x_0)$. (Μονάδες 05)

β) i. Να βρείτε το σημείο της C_f , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε .

(Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

27650. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x > 0$ και τα σημεία

$A(0,1)$ και $B(1,3)$.

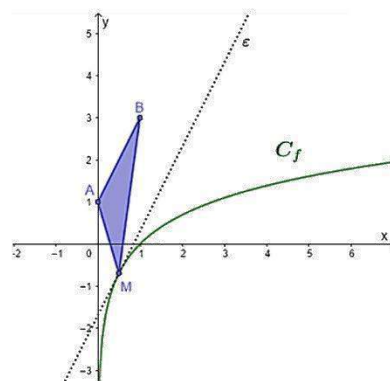
α) i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0 .

(Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x+1-\ln x), x > 0$ η συνάρτηση που

εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Να αποδείξετε ότι το



εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A .

(Μονάδες 07)

28337. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f' , είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0, -2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1, 2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1, 2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

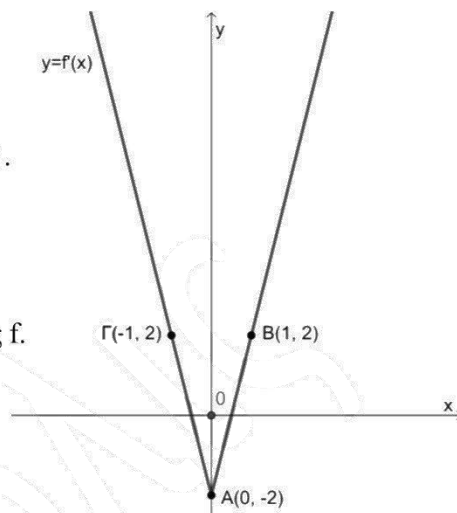
(Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1, 0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Delta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 7)



28342. Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές B και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και

$g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(a, 0)$ με $a < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-a}$,

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$E(a) = e - ae^a$, $a < 1$.

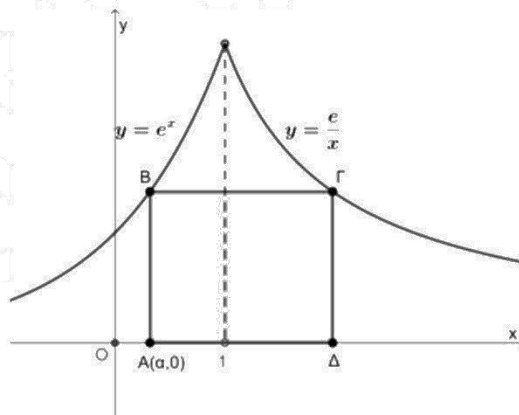
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του a , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται ίσο με 1.

(Μονάδες 6)



28532. Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο A μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο B της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα 3 Km/h και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα 6 Km/h.

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\widehat{PAB}$ είναι θ rad.

α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sin\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το A στο B είναι

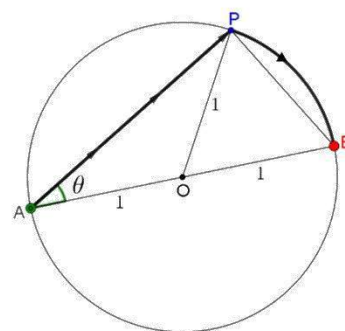
$f(\theta) = \frac{1}{3}(2\sin\theta + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

(Μονάδες 10)

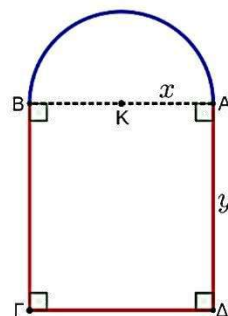
γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$.



(Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία x rad σε κύκλο ακτίνας R , είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) $\times$ (ταχύτητα).

28534. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παραθύρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4m, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x$ m και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(AD) = y$ m. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με

$$x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right).$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.

(Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να

υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$.

(Μονάδες 8)

29644. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[-3, 2]$ η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία A και B.

Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-3, 2]$.

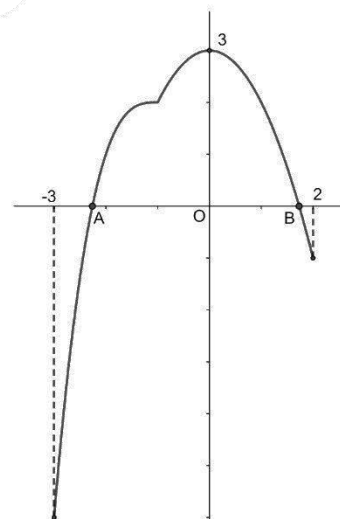
(Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

(Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$.

(Μονάδες 10)



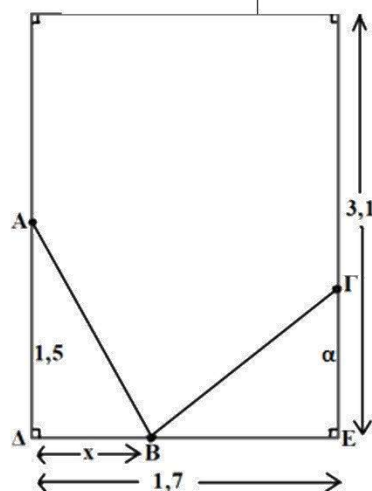
31680. Ένα γαλλικό μπυλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο A, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο B και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$, $\Delta A = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}$,

$$x \in \left(0, \frac{17}{10}\right).$$

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το B απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.



i. Αν $L'(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{(1,7-x)^2}{(1,7-x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$. (Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει. (Μονάδες 08)

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Θέμα 2ο

26736. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1, 5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2, -1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1, 2]$ και κυρτή στο $[2, 5]$.

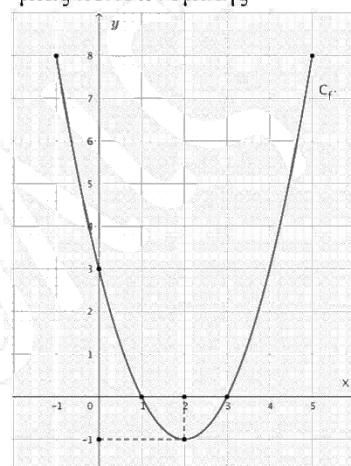
(Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

(Μονάδες 06)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

(Μονάδες 09)



31527. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)

β) Έστω (ϵ) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) . (Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f , διαφορετικό από το A , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ϵ) . (Μόρια 8)

32799. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2$.

Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, και $\Gamma(0, 2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 10)

