

Νέο Φροντιστήριο

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Γ Λυκείου

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ



νέο φροντιστήριο

Συναρτήσεις

Θέμα 2ο

26603. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

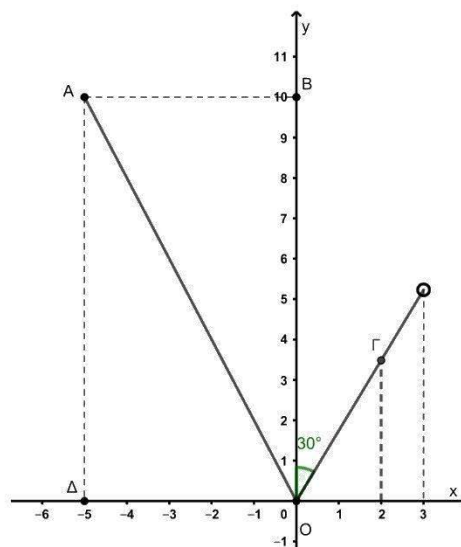
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ;

(Μονάδες 5)



26637. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$.

(Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β).

(Μονάδες 7)

29830. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$ (Μονάδες 7) **ii.** $\frac{f}{g}$ (Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

26604. Δυο εταιρείες $E1$ και $E2$ δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία $E1$ χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η $E2$ χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία $E1$ για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

i. Τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία $E1$ σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό. (Μονάδες 2)

iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)

β) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία $E2$ για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 3)

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό;

(Μονάδες 6)

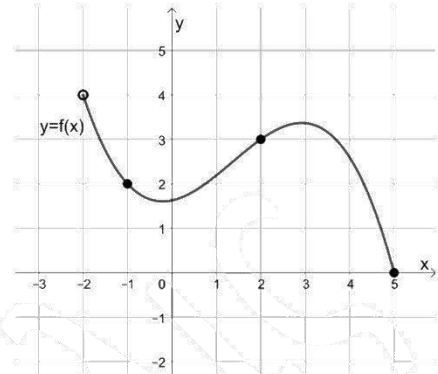
- δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας Ε1;
(Μονάδες 6)

Σύνθεση – Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

28300. Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

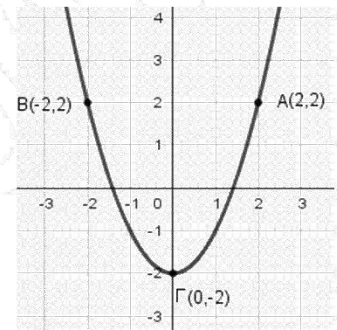
- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ,
(Μονάδες 6)
β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$,
(Μονάδες 6)
γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν,
(Μονάδες 7)
δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 .
(Μονάδες 6)



28314. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.
(Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$.
(Μονάδες 8)
γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$.
(Μονάδες 9)



29832. Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$.
(Μονάδες 8)
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.
(Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.
(Μονάδες 9)

Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 2ο

23196. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = \ln(x+1), x > -1$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} . (Μονάδες 9)

23198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

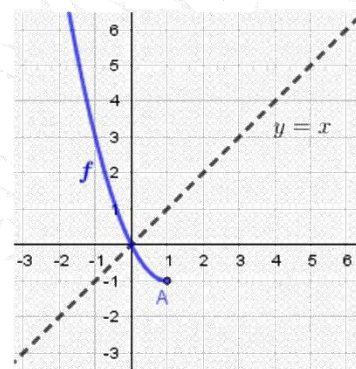
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} . (Μονάδες 9)

23209. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 - 1, x \leq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 8)



23216. Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$. (Μονάδες 10)

24569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0, 1]$. (Μονάδες 05)

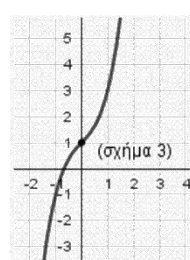
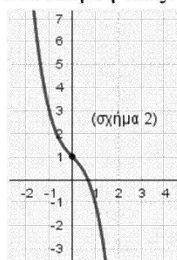
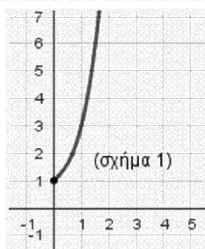
β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1-1”. (Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0, 1]$. (Μονάδες 10)

23642. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.

(Μονάδες 06)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

(Μονάδες 05)

24130. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

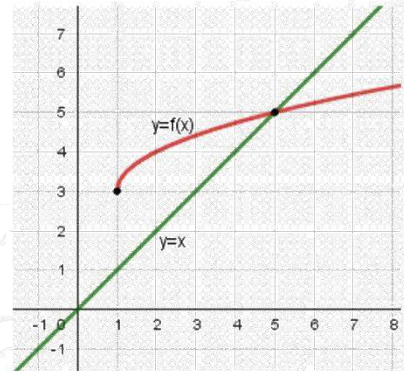
(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .

(Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y=x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} .

(Μονάδες 08)



24703. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $x \in (-\infty, 1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 8)

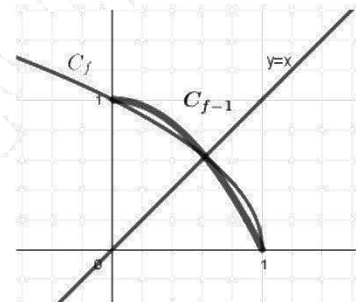
β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} .

Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 7)



24991. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2 \ln x + 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

25124. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 7)

26602. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$.

(Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h .

(Μονάδες 10)

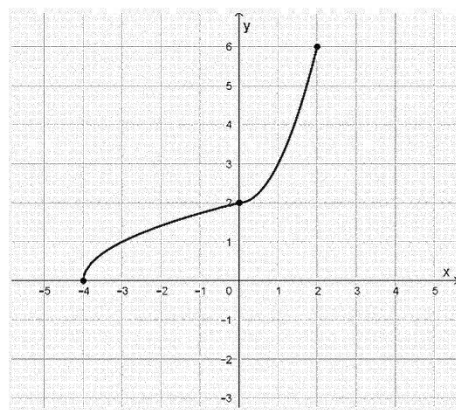
27277. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)



28299. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$

και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

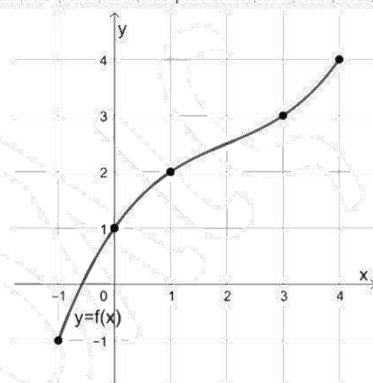
Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

(Μονάδες 9)



29926. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x - 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)

β) i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

31528. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 11)

32695. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο

$$f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο

$$g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x} \right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $(0, 1)$. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 08)

Θέμα 4ο

23200. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

- α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$. (Μονάδες 7)
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$. (Μονάδες 6)
 δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Όριο συνάρτησης στο x_0

Θέμα 2ο

24768. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 9)
 γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$. (Μονάδες 10)

28477. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 04)
 β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$. (Μονάδες 08)
 γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - 4}{x}$. (Μονάδες 13)

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Θέμα 2ο

23217. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x - 1)$ και $g(x) = \frac{1}{x - 1}$.

- α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$
 β) Να βρείτε
 i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$.

Όριο στο άπειρο

Θέμα 2ο

23641. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x \right) = -\infty$.

(Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

(Μονάδες 08)

23314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 .

και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .

α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

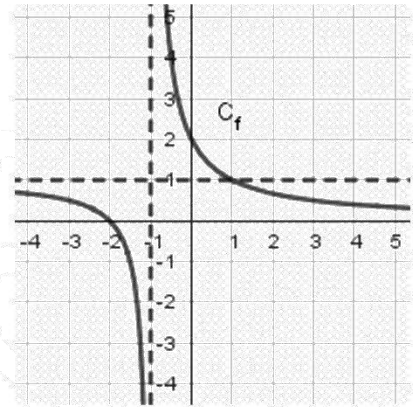
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$ (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



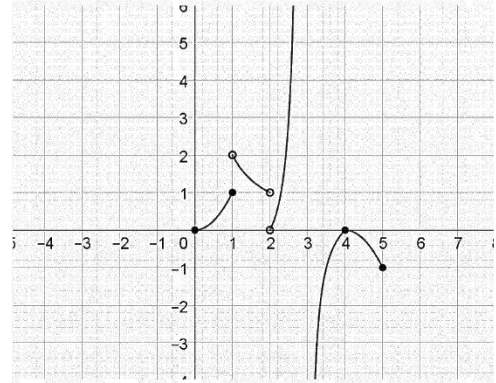
Συνέχεια Συνάρτησης

Θέμα 2ο

24767. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 12)

25749. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0, 0)$ και $(4, 0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1) = 1$. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



- α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
 β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
 γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 10)

31548. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

- α) $f(1) = 2$. (Μονάδες 10)
 β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. (Μονάδες 10)
 γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

Θέμα 4ο

26640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 5)
 δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$. (Μονάδες 5)

Θέμα 3ο

24761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

28684. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta \mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$.

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 08)

Θεωρήματα Συνέχειας

Θέμα 2ο

29834. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. (Μονάδες 9)

Θέμα 4ο

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο

$[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$(g \circ f)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου

ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

(Μονάδες 07)

Ορισμός παραγώγου

Θέμα 2ο

24756. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$. (Μονάδες 8)

24757. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$

σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$. (Μονάδες 9)

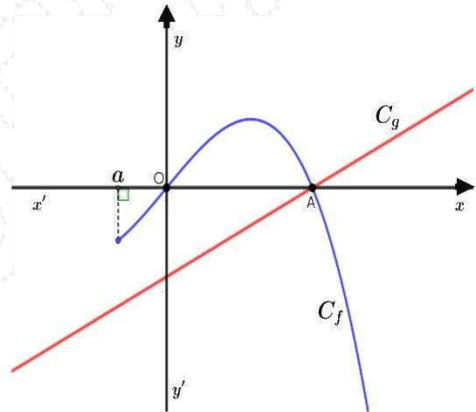
25234. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και την συνάρτηση

$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g

των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f , C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x' εκτός από τα σημεία O και A .



α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)

26712. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 4]$, και της παραγώγου της, f' .

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$.

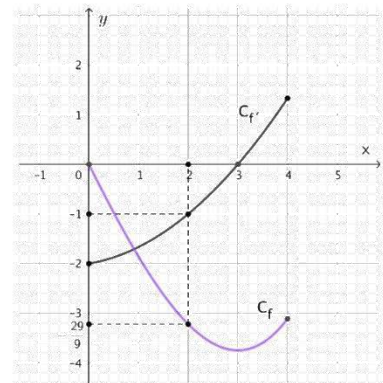
(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)



25762. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$. (Μονάδες 10)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$. (Μονάδες 7)

Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 2ο

26630. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

27315. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ \alpha x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 2$, δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. (Μονάδες 07)
γ) Αν $\alpha = 2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

28302. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $\text{gof}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή $(\text{gof})(0)$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)
δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

Θέμα 4ο

23375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδειχθεί ότι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. (Μονάδες 06)
β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)
γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(g \circ f)(x) = |\sin x|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\sin x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. (Μονάδες 07)

28340. Έστω μια συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(f \circ g)'(2)$ και $(g \circ f)'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f \circ g}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της $C_{g \circ f}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

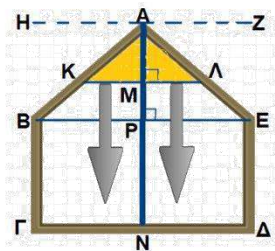
Ρυθμός μεταβολής

Θέμα 4ο

25257. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $BΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο ABE . Είναι $AP = 0,8$ m, $BE = 1,6$ m, $AM = x$ m, $BΓ = 1$ m. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση HZ , με σταθερό ρυθμό, ώστε το M να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AN (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E , ισχύει

$$E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } m^2.$$



(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = \frac{4}{5}$ m, είναι ίσος με

$$E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} m^2 / m. \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t , τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5}$ m, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08$ m/s για κάθε $t \geq 0$. (Μονάδες 08)

28685.α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

(Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM , όπου

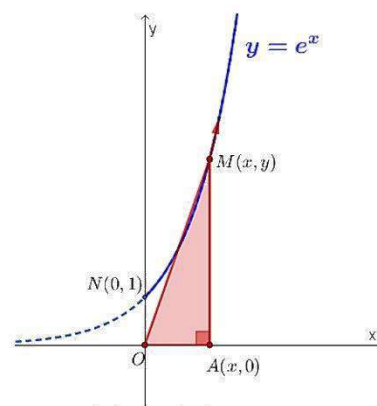
$O(0,0)$, $A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι

$3e^2 \text{ cm}^2 / \text{sec}$.

(Μονάδες 10)



Θεώρημα Rolle

Θέμα 2ο

31643. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 13)

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θέμα 2ο

24283. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1,2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2,5] \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$.

(Μονάδες 06)

Θέμα 4ο

29150. Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού A , που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό A είχε ταχύτητα μηδέν.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό A κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διένυσε το κινητό A .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού A , από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του

A ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το A στο διάστημα αυτό.

(Μονάδες 06)