

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Η ελάχιστη χρονική διάρκεια για τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ είναι t_A . Η ελάχιστη χρονική διάρκεια t_B για τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=+\frac{A}{2}$ στη θετική ακραία θέση $x=+A$ της ταλάντωσης είναι

α) μικρότερη από t_A .

β) ίση με t_A .

γ) μεγαλύτερη από t_A .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Κατά τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ διανύεται απόσταση $s=\frac{A}{2}$ σε χρονικό διάστημα t_A . Επομένως, η μέση ταχύτητα της κίνησης είναι

$$\bar{v}_A = \frac{s}{t_A}.$$

Κατά τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=+\frac{A}{2}$ στη θετική ακραία θέση $x=+A$ της ταλάντωσης, διανύεται απόσταση $s=\frac{A}{2}$ σε χρονικό διάστημα t_B . Επομένως, η μέση ταχύτητα της κίνησης είναι $\bar{v}_B = \frac{s}{t_B}$.

Καθώς το σώμα κινείται από τη θέση ισορροπίας προς την ακραία θέση η ταχύτητά του διαρκώς μειώνεται. Έτσι, η κίνηση από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ γίνεται με

μεγαλύτερη μέση ταχύτητα απ' ό,τι η κίνηση από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$ στη θετική ακραία θέση $x = +A$ της ταλάντωσης.

$$\bar{v}_A > \bar{v}_B \Rightarrow \frac{s}{t_A} > \frac{s}{t_B} \Rightarrow t_B > t_A$$

(βλ. σελ. 10 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 2.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αντικαθιστούμε το ελατήριο με άλλο, σταθεράς $2k$, χωρίς να αλλάξουμε το αναρτημένο σώμα. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από τη νέα θέση ισορροπίας κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο λόγος $\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}}$

των μέτρων των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ταλαντώσεων είναι ίσος με

α) 2 .

β) 1 .

γ) $\frac{1}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Η μέγιστη επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο: $a_{\max} = \omega^2 A$.

Επειδή $D = k = m\omega^2$ έχουμε: $k = m\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

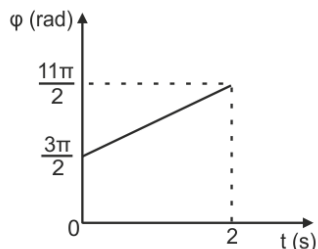
Με αντικατάσταση στο λόγο $\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}}$ των μέτρων των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ταλαντώσεων, έχουμε:

$$\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\omega_1^2 A}{\omega_2^2 A} \Rightarrow \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{2k}{m}} \Rightarrow \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{k}{2k} \Rightarrow \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{1}{2}$$

(βλ. σελ. 10-11 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 3.

Η φάση μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα:



Η περίοδος της ταλάντωσης είναι ίση με

- α) 1 s .
- β) 2 s .
- γ) $2\pi\text{ s}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η α.

Η σχέση της φάσης με το χρόνο δίνεται από τον τύπο: $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι για $t = 0 \rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}\text{ rad}$. Με αντικατάσταση

$$\text{έχουμε: } \frac{3\pi}{2} = 0 + \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{ rad}.$$

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι για $t = 2\text{ s} \rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{2}\text{ rad}$. Με αντικατάσταση

$$\text{έχουμε: } \frac{11\pi}{2} = \omega \cdot 2 + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\text{Από τον τύπο } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ έχουμε: } T = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow T = 1\text{ s}$$

(βλ. σελ. 8-11 του Σχολικού Βιβλίου)

$$\text{Εναλλακτικά, επειδή } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{σταθ.} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\varphi_{\text{τελ}} - \varphi_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{11\pi/2 - 3\pi/2}{2 - 0} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T = 1\text{ s}$$

Ερώτηση 4.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα πάνω μέχρι να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι ίσο με

α) Μηδέν.

β) $k \cdot A$.

γ) $2k \cdot A$.

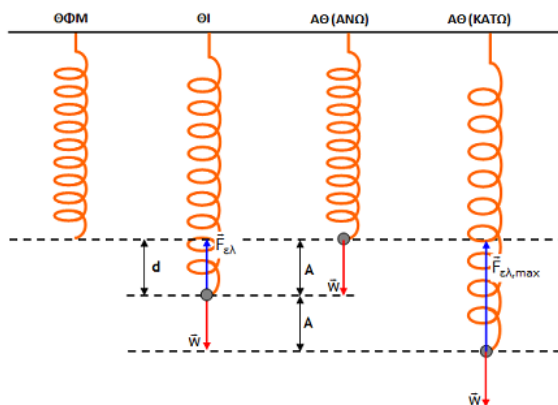
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Το σώμα ελευθερώνεται από τη θέση του Φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα το πλάτος ταλάντωσης A ισούται με την απόσταση d μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους ελατηρίου (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης (ΘΙ).

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα μπορεί να βρεθεί από το Νόμο Hooke: $F_{ελ} = kL$, όπου L η επιμήκυνση του ελατηρίου. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο είναι μέγιστο στη θέση που το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνση L_{max} . Από το σχήμα φαίνεται ότι αυτή είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ΑΘ ΚΑΤΩ στην οποία $L = 2A$.



$$\text{Επομένως: } F_{ελ,max} = kL_{max} \Rightarrow F_{ελ,max} = 2k \cdot A$$

Ερώτηση 5.

Να αποδείξετε ότι σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας, το πλάτος A της ταλάντωσης, η ταχύτητα v του σώματος στην απομάκρυνση x και η μέγιστη ταχύτητα $v_{\max}$ της ταλάντωσης, συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1.$$

Λύση

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στην ταλάντωση, έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA^2} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}DA^2} + \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2} \Rightarrow 1 = \frac{mv^2}{m\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1$$

Ερώτηση 6.

Ένα μικρό σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ενέργεια ταλάντωσης 20 J . Κάποια στιγμή, που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης, του ασκούμε στιγμιαία δύναμη με αποτέλεσμα το διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης. Το έργο που προσφέραμε στο ταλαντούμενο σύστημα μέσω αυτής της στιγμιαίας δύναμης, για το διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης, είναι ίσο με

α) 20 J .

β) 60 J .

γ) 80 J .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Το έργο W που προσφέραμε στο ταλαντούμενο σύστημα για το διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης, είναι ίσο με: $W = E' - E$, όπου E η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης και E' η τελική ενέργεια της ταλάντωσης. Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$W = E' - E \Rightarrow W = \frac{1}{2}D(A')^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}D(2A)^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}D4A^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = 3 \cdot \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = 3E \Rightarrow W = 60 \text{ J}$$

(βλ. σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

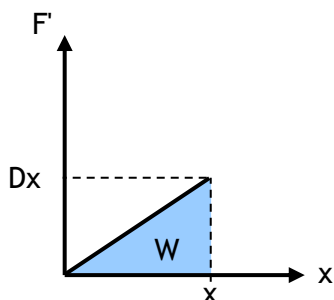
Ερώτηση 7.

Για ένα σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, να γράψετε τη σχέση που δίνει τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Να αποδείξετε τη σχέση που γράψατε.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι $U = \frac{1}{2} Dx^2$ με απόδειξη.

Έστω ότι το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση ισορροπίας. Δεχόμαστε ότι σ' αυτή τη θέση, το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν. Για να μετακινηθεί το σώμα σε μια άλλη θέση που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, πρέπει να του ασκηθεί δύναμη F' , ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς, ώστε να εξουδετερώνει τη δύναμη επαναφοράς F . Το μέτρο της F' , σε κάθε θέση, θα είναι: $F' = Dx$. Το έργο W της δύναμης F' αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια U στο σύστημα. Επομένως, η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί για να μετακινηθεί το σώμα από τη θέση ισορροπίας, στη θέση που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας. Ο υπολογισμός αυτού του έργου γίνεται από τη γραφική παράσταση $F'=f(x)$, επειδή η F' είναι μεταβλητή δύναμη. Το εμβαδόν της επιφάνειας (τριγώνου) μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα x είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της δύναμης F' :



$$U = W = \frac{1}{2} \cdot x \cdot Dx \Rightarrow U = \frac{1}{2} Dx^2$$

(η απόδειξη βρίσκεται και στη σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 8.

Το πλάτος A μιας φθίνουσας ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος και Λ μια θετική σταθερά. Ο απαιτούμενος χρόνος μέχρι το πλάτος της ταλάντωσης να γίνει $\frac{A_0}{2}$ είναι

α) $\frac{\ln 2}{2\Lambda}$.

β) $\frac{\ln 2}{\Lambda}$.

γ) $\frac{2 \ln 2}{\Lambda}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Θέτουμε $A = \frac{A_0}{2}$ στη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t} \Rightarrow$$

$$-\ln 2 = -\Lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

(βλ. σελ. 19 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 9.

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι A η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E . Όταν η ενέργεια της ταλάντωσης γίνει $\frac{E}{2}$, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

α) $\frac{A}{4}$.

β) $\frac{A}{2}$.

γ) $\frac{A\sqrt{2}}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

Με χρήση της σχέσης $E = \frac{1}{2}DA^2$ και με διαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{E_{\alpha\rho\chi}}{E_{\tau\epsilon\lambda}} = \frac{E}{\frac{E}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}DA_{\alpha\rho\chi}^2}{\frac{1}{2}DA_{\tau\epsilon\lambda}^2} = 2 \Rightarrow A_{\tau\epsilon\lambda}^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow A_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

(βλ. σελ. 13 & 18 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 10.

Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Κάποια στιγμή, το πλάτος της ταλάντωσης είναι A και η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E . Όταν το πλάτος της ταλάντωσης μειωθεί κατά 50%, η ενέργεια που έχει απομείνει στο σύστημα είναι

α) $0,75E$.

β) $0,5E$.

γ) $0,25E$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης μειωθεί κατά 50%, θα ισχύει ότι $A' = \frac{A}{2}$.

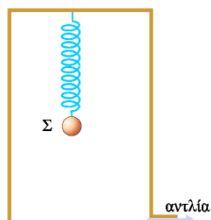
Η ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}DA^2$. Για την ενέργεια E' που έχει απομείνει στο σύστημα, έχουμε:

$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 \Rightarrow E' = \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 \Rightarrow E' = \frac{1}{2}D\frac{A^2}{4} \Rightarrow E' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E' = 0,25E$$

(βλ. σελ. 13 & 18-20 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 11.

Η σφαίρα Σ είναι αναρτημένη σε ιδανικό ελατήριο και εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στο εσωτερικό του δοχείου. Με τη χρήση μιας αεραντλίας μειώνουμε πολύ αργά την πίεση του αέρα στο δοχείο. Από τη στιγμή που σταματά η λειτουργία της αεραντλίας, το πλάτος της ταλάντωσης της σφαίρας Σ σε σχέση με το χρόνο



α) αυξάνεται.

β) παραμένει σταθερό.

γ) μειώνεται.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

(βλ. σελ. 18 του Σχολικού Βιβλίου)

Μετά το σταμάτημα της λειτουργίας της αεραντλίας στο δοχείο εξακολουθεί να υπάρχει μια ποσότητα αέρα. Ο αέρας προκαλεί δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση, επομένως, προκαλεί απόσβεση και ελάττωση του πλάτους.

Ερώτηση 12.

Ένα σώμα μάζας m είναι κρεμασμένο από ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A_1 και συχνότητας f_1 , μικρότερης από την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1 , πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη

α) να αυξηθεί και να πλησιάσει την τιμή f_0 .

β) να μειωθεί.

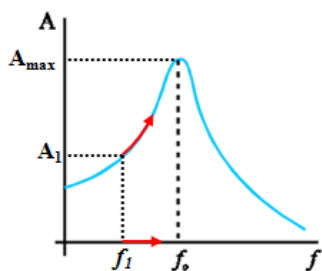
γ) να αυξηθεί και να ξεπεράσει κατά πολύ την τιμή f_0 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το α.

Στο σχήμα φαίνεται η εξάρτηση του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα του διεγέρτη:

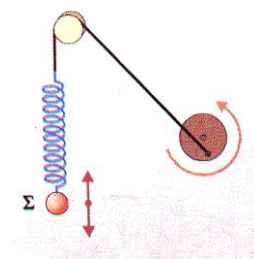


Η συχνότητα f_0 αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού, δηλαδή, στη συχνότητα στην οποία μεγιστοποιείται το πλάτος ταλάντωσης. Όπως φαίνεται, επειδή $f_1 < f_0$, για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1 , πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη να αυξηθεί και να πλησιάσει την τιμή f_0 , δηλαδή, το σύστημα να πλησιάσει στην κατάσταση συντονισμού.

(βλ. σελ. 22 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 13.

Το σώμα μάζας m του σχήματος εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μέσα σε δοχείο που περιέχει αέρα υπό πίεση, από τον οποίο δέχεται δύναμη της μορφής $F' = -bv$ με $b = \text{σταθ.}$. Αν αυξηθεί η πίεση του αέρα στο δοχείο, με αποτέλεσμα να υπάρξει μια μικρή αύξηση της σταθεράς b , το σώμα θα εκτελέσει:



α) φθίνουσα ταλάντωση.

β) αμείωτη ταλάντωση μικρότερου πλάτους.

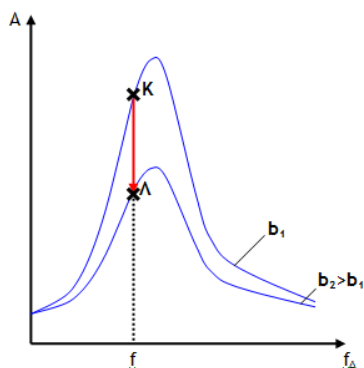
γ) απεριοδική κίνηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Η εξάρτηση του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα f του διεγέρτη, καθώς και από τη σταθερά απόσβεσης b , φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αν αυξηθεί η πίεση του αέρα στο δοχείο, αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b . Για μια συγκεκριμένη συχνότητα f , το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση K του σχήματος, στην κατάσταση L . Επομένως, θα μειωθεί το πλάτος της ταλάντωσης, σε σχέση με το προηγούμενο. Όμως το νέο πλάτος ταλάντωσης θα παραμένει σταθερό σε σχέση με το χρόνο, διότι η ταλάντωση είναι εξαναγκασμένη.

(βλ. σελ. 23 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 14.

Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις, των οποίων το πλάτος σε σχέση με το χρόνο μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t}$$

Μετά από χρονικό διάστημα Δt το ποσοστό ελάττωσης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι 84%. Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το ποσοστό ελάττωσης του πλάτους είναι

α. 60%.

β. 84%.

γ. 90%.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το ποσοστό ελάττωσης της ενέργειας ταλάντωσης είναι

$$\Pi\% = \frac{E_0 - E}{E_0} 100\% = 84\% \quad \text{ή} \quad \frac{E_0 - E}{E_0} = 0,84 \quad \text{ή} \quad E = 0,16E_0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = 0,16 \frac{1}{2}DA_0^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,4A_0$$

Το αντίστοιχο ποσοστό ελάττωσης του πλάτους είναι

$$\Pi\% = \frac{A_0 - A}{A_0} 100\% = \frac{A_0 - 0,4A_0}{A_0} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi\% = 60\%$$

Ερώτηση 15.

Δύο απλοί αρμονικοί ταλαντωτές Α και Β με σταθερές επαναφοράς D_A και D_B αντίστοιχα, με $D_A > D_B$, εκτελούν αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις και έχουν την ίδια μέγιστη κινητική ενέργεια. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

- μεγαλύτερος στον ταλαντωτή Α.
- μεγαλύτερος στον ταλαντωτή Β.
- ίσος και στους δύο ταλαντωτές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η μέγιστη δύναμη,

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{\max} = F_{\max} = D \cdot A.$$

$$\text{Άρα, } \frac{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{A,\max}}{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{B,\max}} = \frac{D_A \cdot A_A}{D_B \cdot A_B} \quad (1)$$

Οι δύο ταλαντωτές έχουν την ίδια μέγιστη κινητική ενέργεια, δηλαδή την ίδια ολική ενέργεια:

$$E_1 = E_2, \text{ άρα } \frac{1}{2} D_A A_A^2 = \frac{1}{2} D_B A_B^2 \Rightarrow \frac{D_A}{D_B} = \frac{A_B^2}{A_A^2} > 1 \Rightarrow A_B > A_A$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{A,\max}}{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{B,\max}} = \frac{A_B^2 \cdot A_A}{A_A^2 \cdot A_B} = \frac{A_B}{A_A} > 1 \Rightarrow \left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{A,\max} > \left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{B,\max}.$$

Ερώτηση 16.

Ένα σώμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση $x = +A$. Η φάση της ταλάντωσης όταν το σώμα εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση είναι

α. $\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$

β. $\varphi = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}.$

γ. $\varphi = \frac{7\pi}{2} \text{ rad}.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα δε διέρχεται από τη θέση ισορροπίας η ταλάντωση έχει αρχική φάση φ_0 και μετά από μια πλήρη ταλάντωση η φάση της θα είναι:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} T + \varphi_0 \Rightarrow \varphi = 2\pi + \varphi_0 \quad (1)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 .

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Για $t=0$ δίνεται $x = +A$, οπότε έχουμε:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi, \text{ άρα } k=0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

$$\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

Ερώτηση 17.

Ένα σώμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$, σύμφωνα με τη σχέση $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$. Τη χρονική στιγμή $t=\frac{T}{2}$ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του γίνεται μέγιστος για πρώτη φορά. Η αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης είναι

α. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

β. $\varphi_0 = \pi \text{ rad}.$

γ. $\varphi_0 = 0 \text{ rad}.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι ίσος με τη συνολική δύναμη που

δέχεται, $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -D \cdot x$ και γίνεται μέγιστος στη θέση $x = -A$. Στο $+A$ η δύναμη επαναφοράς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι αρνητικοί.

Η εξίσωση ταλάντωσης ενός σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Με αντικατάσταση στην εξίσωση θέσης -χρόνου, $t = \frac{T}{2}$ και $x = -A$ βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -A = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + \varphi_0\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu(\pi + \varphi_0) = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi + \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Για $k=0$ παίρνουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Ερώτηση 18.

Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες m και $2m$ αντίστοιχα, είναι δεμένα στα άκρα δύο ελατηρίων με σταθερές k και $\frac{k}{2}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο σώματα εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίσες μέγιστες επιταχύνσεις.



Για τις ολικές ενέργειες των ταλαντώσεων E_1 και E_2 ισχύει

α. $E_2 = E_1$

β. $E_2 = 4 E_1$

γ. $E_2 = 8 E_1$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τις ολικές ενέργειες των ταλαντώσεων E_1 και E_2 ισχύει

$$E_1 = \frac{1}{2} k \cdot A_1^2 \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{2} \cdot A_2^2$$

Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μέγιστες επιταχύνσεις,

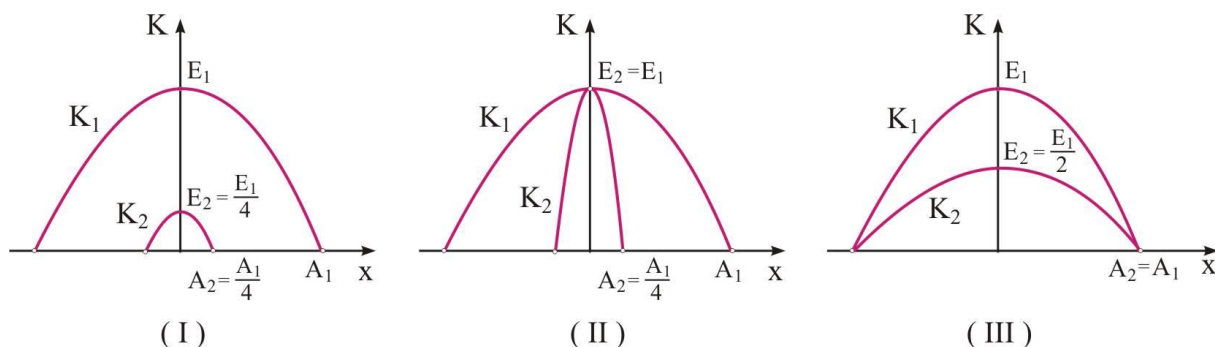
$$a_{1,\max} = a_{2,\max} \Rightarrow \omega_1^2 A_1 = \omega_2^2 A_2 \Rightarrow \frac{k}{m} \cdot A_1 = \frac{k/2}{2m} \cdot A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{4} \Rightarrow A_2 = 4A_1$$

Οπότε με αντικατάσταση στην E_2 παίρνουμε

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{2} \cdot A_2^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{2} \cdot (4A_1)^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} k \cdot A_1^2 \Rightarrow E_2 = 8E_1.$$

Ερώτηση 19.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο και ισορροπεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1 του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ταλάντωση. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με ένα άλλο ελατήριο σταθεράς $k_2 = 4k_1$. Οι γραφικές παραστάσεις των κινητικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος



α. (I)

β. (II)

γ. (III)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

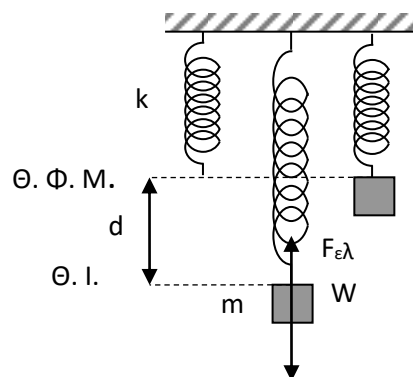
Τα διαγράμματα διαφοροποιούνται στα πλάτη ταλάντωσης και στις ενέργειες ταλάντωσης.

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με την απόσταση της θέσης φυσικού μήκους του ελατηρίου και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης, δηλαδή $A=d$. Η συνθήκη ισορροπίας δίνει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W = F_{ελ} \Rightarrow m \cdot g = k \cdot d \Rightarrow d = \frac{m \cdot g}{k}.$$

$$\text{Άρα } A_1 = d_1 = \frac{m \cdot g}{k_1} \text{ και}$$

$$A_2 = d_2 = \frac{m \cdot g}{k_2} = \frac{m \cdot g}{4k_1} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{4}.$$



Η σχέση αυτή ικανοποιείται στα διαγράμματα (I) και (II).

Η ενέργεια της ταλάντωσης στις δύο περιπτώσεις είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 \cdot d_1^2 = \frac{1}{2} k_1 \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot g^2}{k_1} \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 \cdot d_2^2 = \frac{1}{2} k_2 \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot g^2}{k_2} = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot g^2}{4k_1} \Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{4}.$$

Άρα σωστό είναι το διάγραμμα (I).

Ερώτηση 20.

Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$. Αν με A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 συμβολίσουμε διαδοχικά πλάτη της ταλάντωσης προς την ίδια κατεύθυνση, τότε ισχύει η σχέση

α. $\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}$.

β. $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_3}$.

γ. $\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_2}{A_1}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Α' τρόπος

Στις φθίνουσες ταλαντώσεις, που το πλάτος δίνεται από τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$, για τα

διαδοχικά πλάτη ισχύει $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} = \dots$.

Από την προηγούμενη σειρά σχέσεων επιλέγουμε 2 σχέσεις:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_3}{A_4} \Rightarrow A_0 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_3 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_2 \cdot A_2 = A_1 \cdot A_3 \quad (2)$$

Τα δεύτερα μέλη των προηγούμενων σχέσεων είναι ίσα, άρα και τα πρώτα,

$$A_0 \cdot A_4 = A_2 \cdot A_2 \Rightarrow \frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}.$$

Β' τρόπος

Θα δείξουμε ότι η σχέση $\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}$ είναι σωστή, με βάση τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$.

Σε χρόνο $t=2T$ το πλάτος θα είναι $A_2=A_0e^{-\Lambda 2T}$ και σε χρόνο $t=4T$ το πλάτος θα είναι $A_4=A_0e^{-\Lambda 4T}$. Άρα

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_0}{A_0e^{-\Lambda 2T}} \Rightarrow \frac{A_0}{A_2} = e^{\Lambda 2T} \quad (3)$$

$$\frac{A_2}{A_4} = \frac{A_0e^{-\Lambda 2T}}{A_0e^{-\Lambda 4T}} \Rightarrow \frac{A_2}{A_4} = e^{-\Lambda 2T + \Lambda 4T} \Rightarrow \frac{A_2}{A_4} = e^{\Lambda 2T} \quad (4)$$

Τα δεύτερα μέλη των προηγούμενων σχέσεων είναι ίσα, άρα και τα πρώτα, άρα

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}.$$

Ερώτηση 21.

Ένα σώμα μάζας m είναι προσδεμένο σε ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Αντικαθιστούμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια και διατηρούμε τη συχνότητα του διεγέρτη σταθερή. Η παραπάνω μεταβολή προκαλεί

α. τριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και αύξηση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.

β. υποτριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και μείωση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.

γ. μόνο μείωση του πλάτους της ταλάντωσης του συστήματος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

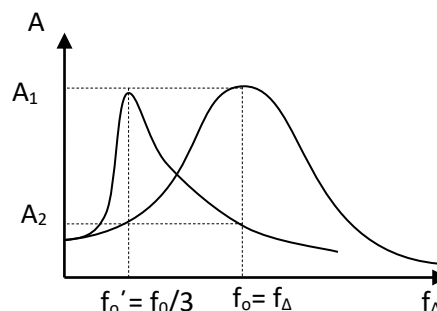
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Αν αντικαταστήσουμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια, $m' = 9m$, η νέα ιδιοσυχνότητα θα είναι

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{9m}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad f_0' = \frac{1}{3}f_0$$

Εφόσον αρχικά η συχνότητα του διεγέρτη ήταν ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος είχαμε το φαινόμενο του συντονισμού και το πλάτος ήταν μέγιστο, A_1 . Με την αλλαγή της ιδιοσυχνότητας παύει η συχνότητα του διεγέρτη να ισούται με τη νέα ιδιοσυχνότητα, με συνέπεια να παύει το φαινόμενο του συντονισμού, οπότε το πλάτος ταλάντωσης ελαττώνεται και γίνεται $A_2 < A_1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Ερώτηση 22.

Ένα ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο είναι στερεωμένο με το κάτω άκρο του σε οριζόντιο δάπεδο, ενώ στο πάνω άκρο του υπάρχει στερεωμένο σώμα μάζας m_1 . Συσπειρώνουμε επιπλέον το ελατήριο απομακρύνοντας το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_1 και συχνότητα f_1 .

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία αντικαθιστώντας μόνο το σώμα με ένα άλλο τετραπλάσιας μάζας ($m_2 = 4m_1$). Η νέα ενέργεια ταλάντωσης E_2 και η νέα συχνότητα f_2 είναι αντίστοιχα

α. $E_2 = E_1$ και $f_2 = f_1$.

β. $E_2 = 2E_1$ και $f_2 = f_1$.

γ. $E_2 = E_1$ και $f_2 = f_1/2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2} k \cdot A^2, \text{ όμως και στις δύο περιπτώσεις } A = d. \text{ Άρα } E_2 = E_1.$$

Για τις συχνότητες f ισχύει:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ και } f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4m_1}}, \text{ άρα } f_2 = \frac{f_1}{2}.$$

Ερώτηση 23.

Ένα σύστημα ξεκινά φθίνουσες ταλαντώσεις με αρχική ενέργεια 100J και αρχικό πλάτος A_0 . Το έργο της δύναμης αντίστασης μετά από N ταλαντώσεις είναι -75J. Άρα το πλάτος ταλάντωσης μετά από N ταλαντώσεις είναι:

α. $A_0/2$.

β. $A_0/16$.

γ. $A_0/5$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

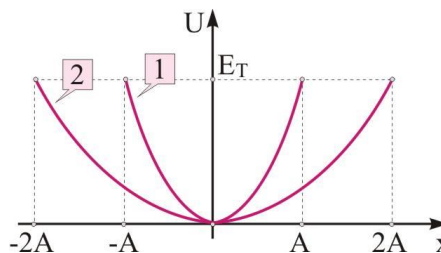
Γνωρίζουμε πως το έργο της $F_{αντ.}$ είναι ίσο με την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, άρα θα έχουμε:

$$|W_{F_{αντ}}| = E_{αρχ} - E_{τελ} \Rightarrow 75J = 100J - E_{τελ} \Rightarrow E_{τελ} = 25J, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{E_{τελ}}{E_{αρχ}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}DA_N^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{A_N}{A_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_N = \frac{A_0}{2}.$$

Ερώτηση 24.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, $U = f(x)$, για δύο συστήματα μάζας – ελατηρίου που εκτελούν α.α.τ. Αν γνωρίζουμε ότι οι μάζες συνδέονται με τη σχέση $m_1 = m_2$, ο λόγος των περιόδων ταλάντωσης $\frac{T_1}{T_2}$ είναι ίσος με



α. 2.

β. 1/2.

γ. 1/4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο λόγος των περιόδων είναι ίσος με:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

Από το σχήμα προκύπτει πως $U_{\max,1} = U_{\max,2}$ και $A_2 = 2A_1 = 2A$.

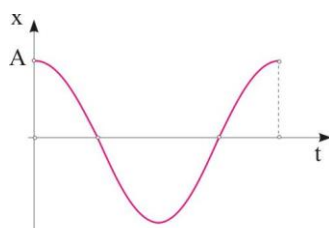
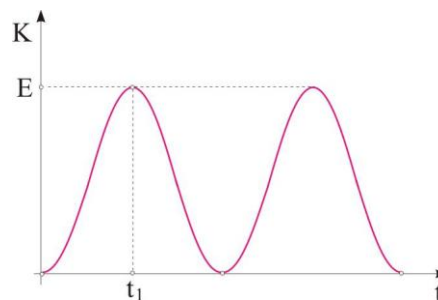
$$U_{\max,1} = U_{\max,2} \Rightarrow \frac{1}{2}k_1A^2 = \frac{1}{2}k_2(2A)^2 \Rightarrow k_1 = 4k_2.$$

Με αντικατάσταση στην αρχική σχέση παίρνουμε:

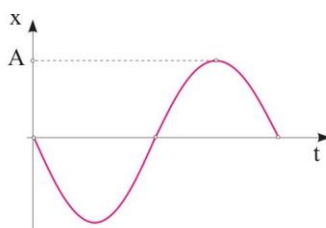
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{4k_2}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 25.

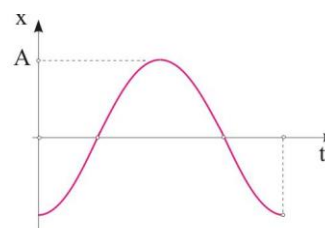
Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος έχει θετικό πρόσημο, η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι η



(α)



(β)



(γ)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

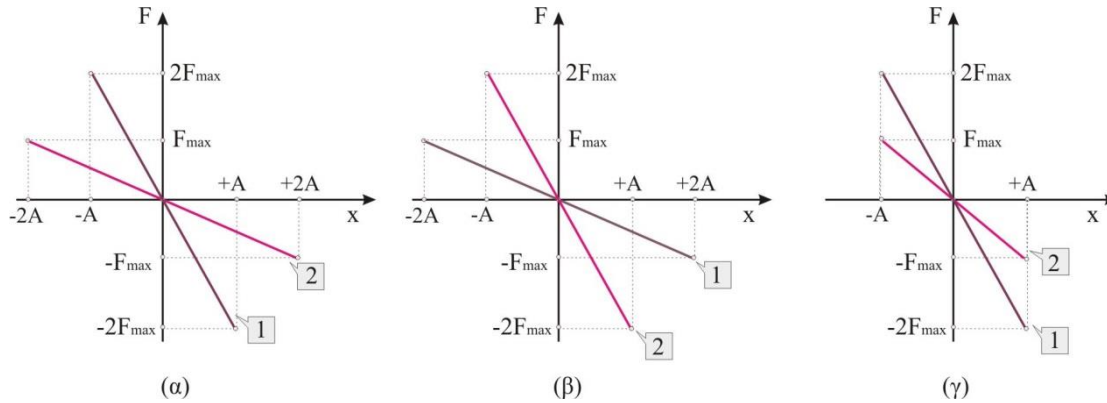
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Από το διάγραμμα $K = f(t)$ προκύπτει πως τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει $K=0$, άρα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής, $x=+A$ ή $x=-A$. Επίσης την χρονική στιγμή t_1 ($t_1=T/4$) η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη, δηλαδή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με μέγιστη ταχύτητα η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι θετική. Άρα το σώμα ξεκινά από $x=-A$.

Άρα το σωστό διάγραμμα, $x = f(t)$, είναι το γ.

Ερώτηση 26.

Δύο αρμονικοί ταλαντωτές (1) και (2) με σταθερές επαναφοράς D_1 και D_2 αντίστοιχα, έχουν σώματα των οποίων οι μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με τη σχέση $m_1 = 4m_2$. Οι δύο ταλαντωτές έχουν τις ίδιες ενέργειες ταλάντωσης E και τις ίδιες περιόδους T . Το σχήμα που δείχνει τα διαγράμματα των δυνάμεων επαναφοράς τους F σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x , $F = f(x)$, είναι το



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α)

Από τη σχέση των δύο περιόδων έχουμε:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{4m_2}{D_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{D_2}} \Rightarrow D_1 = 4D_2$$

Από τη σχέση των ενεργειών έχουμε:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} 4D_2 A_1^2 = \frac{1}{2} D_2 A_2^2 \Rightarrow A_2 = 2A_1. \text{ Έτσι, αν } A_1 = A \text{ τότε } A_2 = 2A.$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνο στο σχήμα (α).

Ερώτηση 27.

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μειώνεται και η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης αυξάνεται. Άρα η ταχύτητα

α. και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση.

β. είναι αρνητική και το μέτρο της μειώνεται.

γ. είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

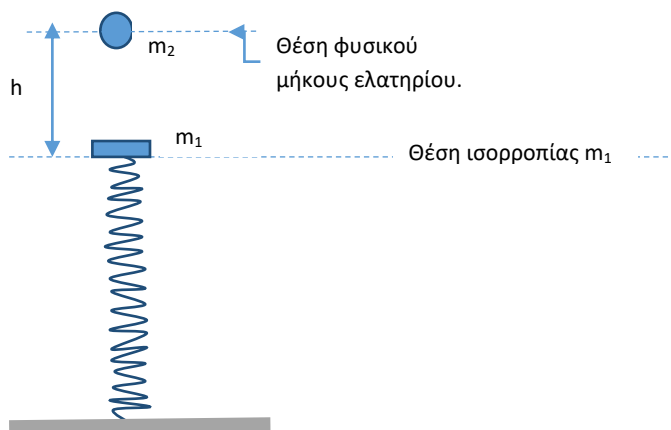
Αφού η κινητική ενέργεια μειώνεται το σώμα κατευθύνεται προς ακραία θέση, δηλαδή πηγαίνει από τη θέση ισορροπίας προς το $+A$ ή προς το $-A$.

Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης ($a = -\omega^2 x$) αυξάνεται καθώς το σώμα κινείται από το $+A$ προς το $-A$.

Άρα, αφού το σώμα έχει μείωση κινητικής ενέργειας και ταυτόχρονα αύξηση της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης κινείται από τη θέση ισορροπίας προς το $-A$.

Στο διάστημα αυτό της κίνησης η ταχύτητα είναι αρνητική και το μέτρο της μειώνεται.

Ερώτηση 28.



Στο σχήμα το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί χαμηλότερα κατά h από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αφήνουμε σώμα ίσης μάζας ($m_2 = m_1 = m$) να κάνει ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα του ελατηρίου. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική ελαστική, και αμέσως μετά την κρούση, απομακρύνεται η μάζα m_2 , ενώ το σώμα m_1 εκτελεί α.α.τ. Το πλάτος ταλάντωσης του m_1 είναι

α) h .

β) $2h$.

γ) $h\sqrt{2}$.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση και αιτιολογείστε.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τη θέση ισορροπίας ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $F_{\text{ελατ.}} = mg$ ή $kh = mg$ (1)

Με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής Ενέργειας για την πτώση της μάζας m_2 βρίσκουμε την ταχύτητά της ελάχιστα πριν την κρούση:

$$mgh = \frac{1}{2}mu_2^2 \quad \text{ή} \quad u_2 = \sqrt{2gh}$$

Επειδή οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες και η κρούση κεντρική ελαστική, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε το σώμα μάζας m_1 θα ξεκινήσει αρμονική ταλάντωση με

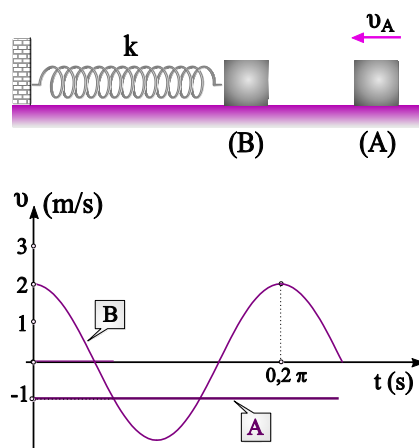
$$v_{\text{max}} = u_2 = \sqrt{2gh}.$$

Έχουμε: $v_{\max} = \omega A \Rightarrow \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{k}{m}} A$ και με αντικατάσταση του k από τη σχέση (1)

εύκολα προκύπτει $A = h\sqrt{2}$.

Ερώτηση 29.

Το σώμα Β του σχήματος είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου. Το σώμα Α, μάζας m_A , κινούμενο με ταχύτητα $u_A=3\text{m/s}$ κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται μετωπικά με το σώμα Β τη χρονική στιγμή $t=0$. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την κρούση (θετική φορά προς τα αριστερά) φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα ταχυτήτων-χρόνου. Οι μάζες των σωμάτων Α και Β συνδέονται με τη σχέση



α. $m_B = m_A$

β. $m_B = 2 m_A$

γ. $m_B = 3 m_A$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

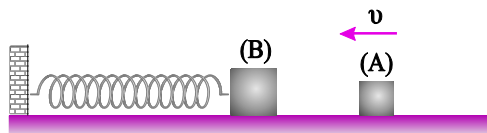
Από το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι αμέσως μετά την κρούση το Β έχει ταχύτητα $u_B' = 2\text{m/s}$ και το Α επιστρέφει με $u_A' = -1\text{m/s}$.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_A u_A = m_B u_B' + m_A u_A' \Rightarrow m_A \cdot (3\text{m/s}) = m_B \cdot (2\text{m/s}) + m_A \cdot (-1\text{m/s}) \Rightarrow m_B = 2m_A$$

Ερώτηση 30.

Τα σώματα (Α) και (Β) του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και έχουν μάζες που συνδέονται με τη σχέση $m_B = 3m_A$. Το σώμα (Α) κινούμενο με ταχύτητα μέτρου v συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με το ακίνητο σώμα (Β) το οποίο είναι δεμένο στην άκρη του οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Μετά την κρούση, το σώμα (Β) ταλαντώνεται με περίοδο T και πλάτος A για το οποίο ισχύει



α. $A = \frac{vT}{2}$

β. $A = \frac{vT}{2\pi}$

γ. $A = \frac{vT}{4\pi}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Α. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα το σώμα Β μετά την κρούση θα αποκτήσει ταχύτητα v_B η οποία έχει μέτρο

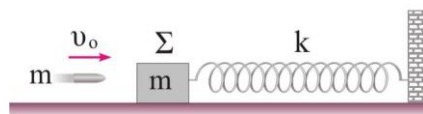
$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v \Rightarrow v_B = \frac{v}{2}$$

Η ταχύτητα v_B είναι η μέγιστη της ταλάντωσης, αφού το σώμα (Β) τη στιγμή της κρούσης βρίσκεται στη θέση ισορροπίας.

$$\text{Επομένως, } v_B = \omega A \Rightarrow \frac{v}{2} = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow A = \frac{vT}{4\pi}$$

Ερώτηση 31.

Το σώμα Σ του σχήματος, μάζας m , είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και δεμένο στην άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k . Ένα βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα u_0 κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ. Το ποσοστό της ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε ενέργεια ταλάντωσης είναι ίσο με



α. 50%

β. $200/3 \%$

γ. 75%

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

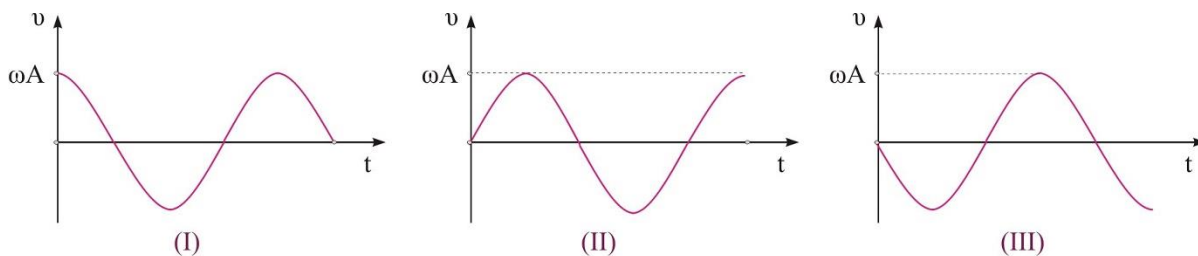
Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ έχουμε: $p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow mv_0 = (m + m)v_K \Rightarrow v_K = \frac{v_0}{2}$

Η u_K είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, αφού η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας

$$\Pi\% = \frac{K_{\text{max}}}{K_{\text{βλ}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} 2m \cdot v_K^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} 100\% = 50\%$$

Ερώτηση 32.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η επιτάχυνσή του περιγράφεται από τη σχέση $a = \omega^2 A \sin \omega t$.



Η ταχύτητα ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη γραφική παράσταση

- α. (I).
- β. (II).
- γ. (III).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από τη δοθείσα εξίσωση, $a = \omega^2 A \sin \omega t$, προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, η επιτάχυνση είναι $a = \omega^2 A \sin 0 = 0$

Άρα, την $t=0$ η επιτάχυνση έχει μέγιστο μέτρο και θετικό πρόσημο.

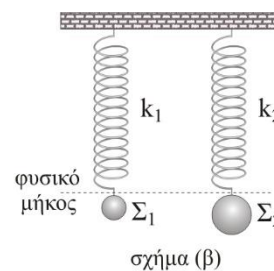
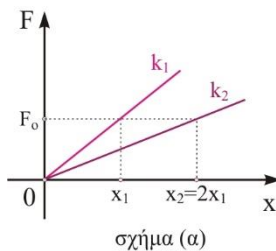
Από τη σχέση $a = -\omega^2 x$ με αντικατάσταση προκύπτει ότι την $t=0$

$$\omega^2 A = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = -A$$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $-A$ και ξεκινά με μηδενική ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα θετικά. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα (II).

Ερώτηση 33.

Στο διπλανό διάγραμμα (σχήμα α) δείχνεται η ασκούμενη δύναμη F σε συνάρτηση με την προκαλούμενη παραμόρφωση x για δύο ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 . Τα δύο ελατήρια έχουν τα πάνω άκρα τους στερεωμένα ακλόνητα στην οροφή και στα κάτω άκρα τους έχουν δεμένα σώματα Σ_1 και Σ_2 μαζών m_1 και $m_2=2m_1$ αντίστοιχα.



Εκτρέπουμε τα σώματα κατακόρυφα, ώστε τα ελατήρια να βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος (σχήμα β) και τα αφήνουμε ελεύθερα να ταλαντωθούν. Ο λόγος των ενεργειών ταλάντωσης $\frac{E_1}{E_2}$ των δύο συστημάτων, είναι

α. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2}$.

β. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$.

γ. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{8}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ενέργεια ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας- ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2} k A^2$.

Από το διάγραμμα δύναμης - παραμόρφωσης, για τη σταθερά κάθε ελατηρίου έχουμε:

$$k_1 = \frac{F_0}{x_1}, \quad k_2 = \frac{F_0}{2x_1} = \frac{k_1}{2} \quad \text{ή} \quad k_1 = 2k_2$$

Όταν ελευθερώσουμε τα σώματα από τις θέσεις φυσικού μήκους των ελατηρίων, τότε οι αποστάσεις από τις θέσεις αυτές μέχρι τις θέσεις ισορροπίας αντιστοιχούν στα πλάτη ταλαντώσεών τους.

Από τις συνθήκες ισορροπίας για τα δύο σώματα παίρνουμε:

$$m_1 g = k_1 A_1 \quad \text{ή} \quad A_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \quad , \quad (1)$$

$$m_2 g = k_2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{2m_1 g}{k_1 / 2} \quad \text{ή} \quad A_2 = 4A_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 A_1^2}{\frac{1}{2} k_2 A_2^2} = \frac{k_1 A_1^2}{\frac{k_1}{2} (4A_1)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{8}$$

Ερώτηση 34.

Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης με θετική ταχύτητα μέτρου $v_{\max}$. Το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη στιγμή $t=0$ μέχρι τη στιγμή $T/12$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης είναι

α. $-\frac{1}{2}mv_{\max}^2$.

β. $-\frac{1}{8}mv_{\max}^2$.

γ. $-\frac{3}{4}mv_{\max}^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

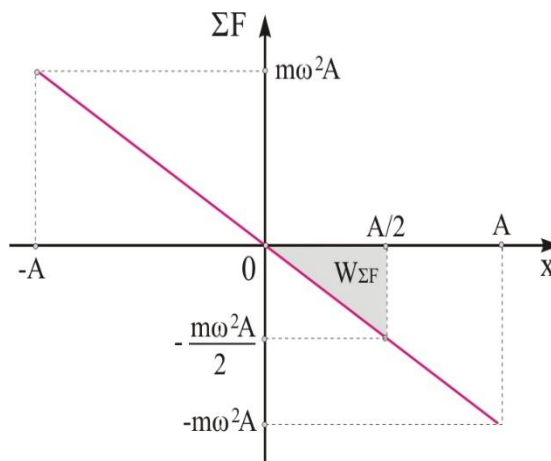
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του και δίνεται από τη σχέση

$$\Sigma F = -m\omega^2 x, \quad (1)$$

Η δύναμη επαναφοράς είναι δύναμη μεταβλητού μέτρου και το έργο της υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής της παράστασης και του άξονα της μετατόπισης στο διάγραμμα δύναμης - μετατόπισης. Πρέπει να βρούμε τη δύναμη τη χρονική στιγμή $T/12$.



$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}\right) = A \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \frac{A}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου $x=A/2$, παίρνουμε

$$\Sigma F = -\frac{m\omega^2 A}{2}$$

Άρα, το έργο της δύναμης επαναφοράς στο ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι:

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} \left(-\frac{m\omega^2 A}{2} \right) \frac{A}{2} = -\frac{1}{8} m \omega^2 A^2 = -\frac{1}{8} m v_{\max}^2$$

Ερώτηση 35. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = 0,01\eta\mu 100\pi t$ και $x_2 = 0,01\eta\mu 102\pi t$ (SI). Οι δύο ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Η εξίσωση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα δίνεται από τη σχέση

α) $x = 0,02\sigma\upsilon\nu(\pi t)\eta\mu 101\pi t$ (SI)

β) $x = 0,02\sigma\upsilon\nu 2\pi t\eta\mu 101\pi t$ (SI)

γ) $x = 0,02\eta\mu 101\pi t$ (SI)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η α.

Οι δύο ταλαντώσεις είναι της μορφής $x_1 = A\eta\mu\omega_1 t$ και $x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$, με $\omega_1 = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_2 = 102\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και $A = 0,01 \text{ m}$. Η απομάκρυνση του σώματος λόγω της σύνθεσης αυτών των ταλαντώσεων δίνεται από τον τύπο:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \Rightarrow x = 0,02\sigma\upsilon\nu\pi t \cdot \eta\mu 101\pi t \quad (\text{SI})$$

(βλ. σελ. 27 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 36. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση των απλών αρμονικών ταλαντώσεων $x_1 = 0,04\eta\mu 400\pi t$ και $x_2 = 0,04\eta\mu 404\pi t$ (SI). Οι δύο ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της κίνησης που εκτελεί το σώμα είναι $0,08\text{ m}$. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος θα μηδενιστεί για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή

α) $t_1 + 0,25\text{ s}$.

β) $t_1 + 0,5\text{ s}$.

γ) $t_1 + 1\text{ s}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το α.

Η κίνηση του σώματος παρουσιάζει διακροτήματα επειδή οι γωνιακές συχνότητες διαφέρουν ελάχιστα. Οι ταλαντώσεις $x_1 = 0,04\eta\mu 400\pi t$ και $x_2 = 0,04\eta\mu 404\pi t$ έχουν πλάτος ταλάντωσης $A = 0,04\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της κίνησης που εκτελεί το σώμα είναι $0,08\text{ m} = 2A$, δηλαδή είναι μέγιστο. Επομένως, το πλάτος της κίνησης του σώματος θα μηδενιστεί για πρώτη φορά μετά από χρόνο ίσο με το μισό της περιόδου T_δ των διακροτημάτων:

$$t_2 = t_1 + \frac{T_\delta}{2} \quad (1)$$

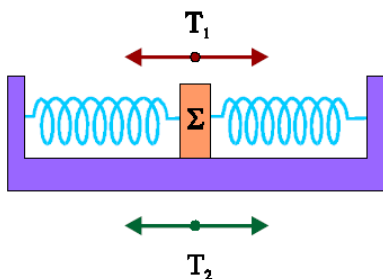
Υπολογίζουμε την περίοδο T_δ των διακροτημάτων (βλ. σελ. 28 του Σχολικού Βιβλίου):

$$T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{|400\pi - 404\pi|} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{4\pi} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{2}\text{ s}$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε: $t_2 = t_1 + 0,25\text{ s}$

Ερώτηση 37. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Το σώμα Σ του σχήματος εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με περιόδους T_1 και T_2 , με αποτέλεσμα η κίνησή του να παρουσιάζει διακροτήματα.



Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα είναι ίσος με

α) $\frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$.

β) $\frac{T_1 + T_2}{2}$.

γ) $|T_1 - T_2|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η α.

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της ταλάντωσης, που θα εκτελέσει το σώμα, ονομάζεται περίοδος των διακροτημάτων και δίνεται από τον τύπο

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}.$$

(βλ. σελ. 28 του Σχολικού Βιβλίου)

Θέτοντας $f_1 = \frac{1}{T_1}$ και $f_2 = \frac{1}{T_2}$ έχουμε:

$$T_\delta = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right|} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{\left| \frac{T_2}{T_1 T_2} - \frac{T_1}{T_1 T_2} \right|} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{\left| \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right|} \Rightarrow T_\delta = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$$

Ερώτηση 38. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που οφείλεται στη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος A και συχνότητες f_1 και f_2 που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους, το σώμα έχει διέλθει από τη θέση ισορροπίας του

α) $\frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$ φορές.

β) $\frac{f_1 + f_2}{|f_1 - f_2|}$ φορές.

γ) $\frac{2(f_1 + f_2)}{|f_1 - f_2|}$ φορές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους ονομάζεται περίοδος των διακροτημάτων και δίνεται από τον τύπο:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Η περίοδος T της ταλάντωσης βρίσκεται από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$:

$$T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{2\pi(f_1 + f_2)} \Rightarrow T = \frac{2}{f_1 + f_2}$$

Ο αριθμός N των ταλαντώσεων που γίνονται σε χρόνο ίσο με την περίοδο των διακροτημάτων είναι:

$$N = \frac{T_\delta}{T} \Rightarrow N = \frac{\frac{1}{|f_1 - f_2|}}{\frac{2}{f_1 + f_2}} \Rightarrow N = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$$

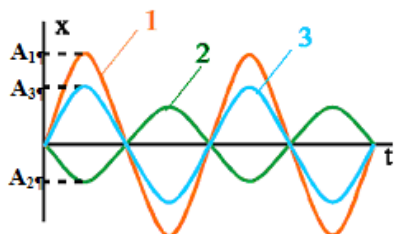
Επειδή σε κάθε ταλάντωση το σώμα διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας, ο αριθμός $N_{\Theta I}$ των διελεύσεων από τη θέση ισορροπίας στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους θα είναι:

$$N_{\Theta I} = 2N \Rightarrow N_{\Theta I} = \frac{f_1 + f_2}{|f_1 - f_2|}$$

(βλ. σελ. 27-28 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 39. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Το σχήμα παρουσιάζει τις απλές αρμονικές ταλαντώσεις 1, 2 και 3, οι οποίες γίνονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από το ίδιο σημείο.



Αν γνωρίζετε ότι ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων από αυτές τότε η ταλάντωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι

α) η ταλάντωση 1.

β) η ταλάντωση 2.

γ) η ταλάντωση 3.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

Από το σχήμα φαίνεται πως οι απλές αρμονικές ταλαντώσεις 1, 2 και 3 έχουν ίδια περίοδο, επομένως έχουν ίδια συχνότητα.

Η ταλάντωση 1 είναι της μορφής $x_1 = A_1 \eta \mu \omega t$

Η ταλάντωση 2 είναι της μορφής $x_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \pi) \Rightarrow x_2 = -A_2 \eta \mu \omega t$

Η ταλάντωση 3 είναι της μορφής $x_3 = A_3 \eta \mu \omega t$

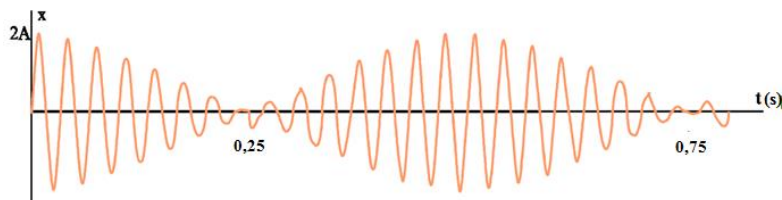
Από το σχήμα φαίνεται ότι: $A_3 = A_1 - A_2 \Rightarrow A_3 \eta \mu \omega t = A_1 \eta \mu \omega t - A_2 \eta \mu \omega t \Rightarrow$

$A_3 \eta \mu \omega t = A_1 \eta \mu \omega t + (-A_2 \eta \mu \omega t) \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2$

Επομένως, η ταλάντωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι η ταλάντωση 3.

Ερώτηση 40. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, που οι συχνότητές τους f_1 και f_2 ($f_2 > f_1$) διαφέρουν πολύ λίγο, προκύπτει η ιδιόμορφη περιοδική κίνηση του σχήματος.



Αν η συχνότητα f_1 ισούται με 29 Hz, η συχνότητα της περιοδικής κίνησης ισούται με

α) 31Hz .

β) 30Hz .

γ) 2Hz .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Από το σχήμα υπολογίζουμε την περίοδο των διακροτημάτων:

$$T_{\delta} = 0,75s - 0,25s \Rightarrow T_{\delta} = 0,5s$$

Επομένως, η συχνότητα των διακροτημάτων θα είναι:

$$f_{\delta} = \frac{1}{T_{\delta}} \Rightarrow f_{\delta} = 2 \text{ Hz}$$

και επειδή $f_{\delta} = |f_2 - f_1|$ και $f_2 > f_1$:

$$f_2 - f_1 = 2 \Rightarrow f_2 - 29 = 2 \Rightarrow f_2 = 31 \text{ Hz}$$

Η συχνότητα της περιοδικής κίνησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} \Rightarrow f = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow f = 30 \text{ Hz}$$

Ερώτηση 41. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας που γίνονται στην ίδια διεύθυνση γύρω από το ίδιο σημείο. Όταν το σώμα εκτελεί μόνο την πρώτη ταλάντωση, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_1 = 2 \text{ J}$. Όταν το σώμα εκτελεί μόνο τη δεύτερη ταλάντωση, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_2 = 8 \text{ J}$. Όταν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα τις δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = 10 \text{ J}$. Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι ίση με

α) 30° .

β) 90° .

γ) 60° .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Η σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση, είναι απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi}$, όπου A_1 , A_2 είναι τα πλάτη των αρμονικών ταλαντώσεων και φ είναι η διαφορά φάσης τους. Έχουμε:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi} \Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 + \frac{1}{2}D \cdot 2A_1A_2\cos\varphi \Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{E - E_1 - E_2}{DA_1A_2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{10\text{J} - 2\text{J} - 8\text{J}}{DA_1A_2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

(βλ. σελ. 26 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 42. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση, με το ίδιο πλάτος και συχνότητες f_1, f_2 που διαφέρουν λίγο ($f_1 < f_2$), ώστε να δημιουργείται διακρότημα. Η μία αρμονική ταλάντωση έχει συχνότητα $f_1 = 98 \text{ Hz}$ και η περίοδος του διακροτήματος είναι $0,25 \text{ sec}$. Μέσα σε χρονικό διάστημα ίσο με την περίοδο του διακροτήματος το σώμα εκτελεί

- α. 25 ταλαντώσεις.
- β. 50 ταλαντώσεις.
- γ. 125 ταλαντώσεις.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η περίοδος του διακροτήματος είναι

$$T_{\Delta} = \frac{1}{f_2 - f_1} \Rightarrow 0,25\text{s} = \frac{1}{f_2 - 98\text{Hz}} \Rightarrow f_2 = 102\text{Hz}.$$

$$\text{Η περίοδος της ταλάντωσης είναι } T_{\text{ταλ}} = \frac{1}{f_{\text{ταλ}}} = \frac{1}{\frac{f_1 + f_2}{2}} = \frac{2}{200} = 0,01\text{sec}$$

Άρα σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος το σώμα εκτελεί

$$N = \frac{T_{\Delta}}{T_{\text{ταλ}}} = \frac{0,25\text{s}}{0,01\text{s}} = 25 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Ερώτηση 43. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση και η μία αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση $x_1 = 5\eta\mu(10\pi t + \pi/2)$ (S.I.).

Αν το αποτέλεσμα της σύνθεσης των δύο ταλαντώσεων είναι $x = 2\eta\mu(10\pi t + \pi/2)$ (S.I.), τότε η δεύτερη αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση

α. $x_2 = 3\eta\mu(10\pi t + \pi)$ (S.I.).

β. $x_2 = 3\eta\mu(10\pi t + \pi/2)$ (S.I.).

γ. $x_2 = 3\eta\mu(10\pi t + 3\pi/2)$ (S.I.).

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η διαφορά φάσης θ της σύνθετης ταλάντωσης από την πρώτη ταλάντωση με την μικρότερη φάση δίνεται από τη σχέση:

$\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$, όπου ϕ η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων.

Επειδή η πρώτη αρμονική ταλάντωση και η σύνθετη ταλάντωση έχουν την ίδια φάση, $\varepsilon\phi\theta = 0$, άρα $\eta\mu\phi = 0$, δηλαδή η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αρμονικών ταλαντώσεων είναι $\phi = 0^\circ$ ή $\phi = 180^\circ$.

Τα πλάτη των αρμονικών ταλαντώσεων και το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης συνδέονται με τη σχέση $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi} \Rightarrow 2^2 = 5^2 + A_2^2 + 2 \cdot 5 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα πρέπει $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$, άρα $\phi = 180^\circ$.

Από τις προτεινόμενες απαντήσεις μόνο η (γ) έχει διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων 180° .

Ερώτηση 44. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιου πλάτους και ίδιας διεύθυνσης. Οι συχνότητες f_1 και f_2 αντίστοιχα των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν μεταξύ τους 4Hz, ($f_2 > f_1$), με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται διακρότημα. Αν η συχνότητα f_1 αυξηθεί κατά 8Hz, χωρίς να μεταβληθεί η συχνότητα f_2 , ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους θα

α. παραμείνει ο ίδιος.

β. μειωθεί κατά 4s.

γ. αυξηθεί κατά 1/4 s.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι ίσος με την περίοδο του διακροτήματος.

$$\text{Αρχικά: } T_8 = \frac{1}{|f_2 - f_1|} \text{ και } f_2 - f_1 = 4\text{Hz}, \text{ άρα } T_8 = \frac{1}{4}\text{s}.$$

$$\text{Τελικά: } T'_8 = \frac{1}{|f_2 - f'_1|} \text{ και}$$

$$f_2 - f'_1 = f_2 - (f_1 + 8\text{Hz}) = (f_2 - f_1) - 8\text{Hz} \Rightarrow f_2 - f'_1 = -4\text{Hz} \Rightarrow |f_2 - f'_1| = 4\text{Hz}$$

$$\text{Με αντικατάσταση εύκολα προκύπτει } T'_8 = \frac{1}{4}\text{s}.$$

Ερώτηση 45. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένας ταλαντωτής εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu 196\pi t \text{ (t σε s) και } x_2 = A\eta\mu 204\pi t \text{ (t σε s)}.$$

Οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους, ο ταλαντωτής διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του

α. 50 φορές.

β. 100 φορές.

γ. 25 φορές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Από τις εξισώσεις $x = f(t)$ προκύπτει ότι $\omega_1 = 196\pi \text{ rad/s}$ και $\omega_2 = 204\pi \text{ rad/s}$, οπότε αντίστοιχα οι συχνότητες είναι $f_1 = 98\text{Hz}$ και $f_2 = 102\text{Hz}$.

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι ίσο με την περίοδο των διακροτημάτων.

$$T_\delta = \frac{1}{f_2 - f_1} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{4} \text{ s}.$$

Η συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{98 + 102}{2} \text{ Hz} \Rightarrow f = 100\text{Hz}$$

Έτσι, σε χρονικό διάστημα $T_\delta = \frac{1}{4} \text{ s}$, ο ταλαντωτής εκτελεί $N = f \cdot T_\delta = 25$ ταλαντώσεις

και επειδή σε κάθε ταλάντωση διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του θα κάνει 50 διελεύσεις.

Ερώτηση 46. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$x_1 = A \eta\mu\omega t \text{ και } x_2 = A \eta\mu(\omega t + \pi/2)$$

Το σώμα θα περάσει για 1^η φορά από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή

α. π/ω .

β. $\pi/2\omega$.

γ. $3\pi/4\omega$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Οι δύο ταλαντώσεις έχουν ίδια συχνότητα. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης είναι μια νέα αρμονική ταλάντωση ίδιας συχνότητας με αυτή των συνιστωσών, της οποίας η απομάκρυνση με το χρόνο περιγράφεται από τη σχέση:

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \theta) \text{ , (1)}$$

Η σύνθετη ταλάντωση έχει :

- πλάτος ταλάντωσης, $A' = \sqrt{A^2 + A^2} = A\sqrt{2}$

- αρχική φάση θ , με $\epsilon\phi\theta = \frac{A}{A} = 1$ ή $\theta = \frac{\pi}{4}$

Η σχέση (1) γίνεται $x = A\sqrt{2}\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

Το σώμα διέρχεται από τη θέση $x=0$ τις χρονικές στιγμές που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$0 = A\sqrt{2}\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ή } \eta\mu 0 = \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ή } \kappa\pi = \omega t + \frac{\pi}{4} \text{ ή } t = \frac{\kappa\pi - \frac{\pi}{4}}{\omega}$$

Για $\kappa=0$, προκύπτει αρνητική χρονική στιγμή, οπότε απορρίπτεται.

Η πρώτη φορά προκύπτει για $\kappa=1$:

$$t = \frac{3\pi}{4\omega}$$

Ερώτηση 47. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα έχει ταχύτητα αρνητική, ρυθμό μεταβολής της ορμής αρνητικό, και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με την κινητική του ενέργεια. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

α. $\pi/4$.

β. $3\pi/4$.

γ. $2\pi/3$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

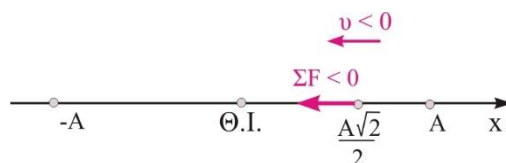
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Βρίσκουμε σε ποιες θέσεις η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ισούται με την κινητική ενέργεια.

$$\left. \begin{array}{l} K = U \\ K + U = E \end{array} \right\} 2U = E \quad \text{ή} \quad 2 \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} DA^2 \quad \text{ή} \quad x = \pm A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Εφόσον ο ρυθμός μεταβολής της ορμής (η δύναμη επαναφοράς) είναι αρνητικός, το σώμα βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα, άρα $x > 0$ και η αρχική φάση βρίσκεται στο 1^ο ή 2^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Η ταχύτητα είναι αρνητική επομένως το σώμα πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας (δες σχήμα), άρα η αρχική φάση βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.



Θα βρούμε την αρχική φάση αντικαθιστώντας στην σχέση θέσης-χρόνου, $t=0$,

$$x = A \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad A \frac{\sqrt{2}}{2} = A \eta \mu \phi_0 \quad \text{ή} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta \mu \phi_0$$

Οι δύο τιμές της ϕ_0 που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση είναι $\phi_0 = \pi/4$ και $\phi_0 = 3\pi/4$.

Επειδή η ταχύτητα είναι αρνητική, δεκτή είναι μόνο η $\phi_0 = 3\pi/4$.

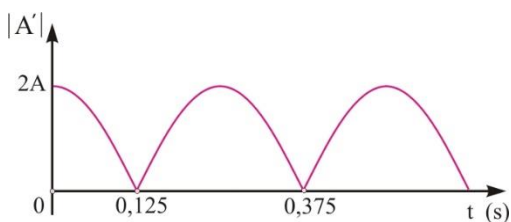
Ερώτηση 48. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu\omega_1 t \text{ και } x_2 = A\eta\mu\omega_2 t.$$

Οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και η συχνότητα της μιας αρμονικής ταλάντωσης είναι $f_1 = 162\text{Hz}$, ενώ της άλλης f_2 , με $f_2 < f_1$.

Στο διάγραμμα παριστάνεται το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο.



Στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους, το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του

- α. 40 φορές.
- β. 80 φορές.
- γ. 160 φορές.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι ίσο με :

$$T_\delta = 0,375\text{s} - 0,125\text{s} \text{ ή } T_\delta = 0,25\text{s} \quad \text{και} \quad f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = \frac{1}{0,25\text{s}} \Rightarrow f_\delta = 4\text{Hz}$$

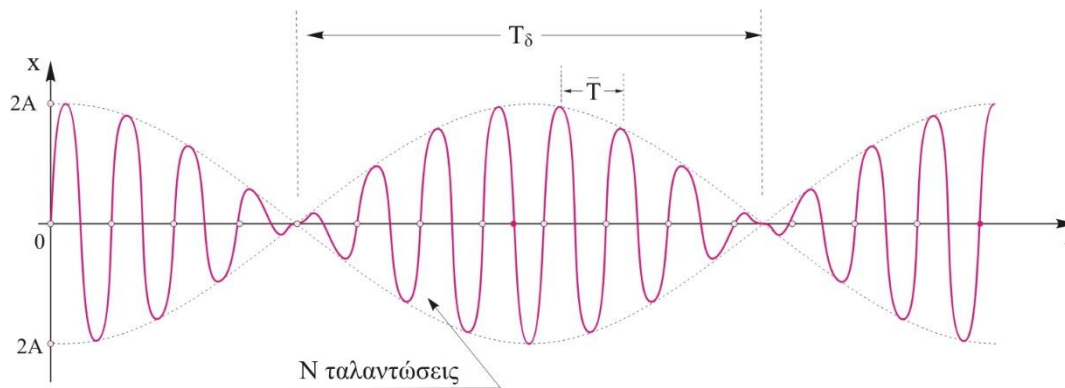
$$\text{Όμως, } f_\delta = f_1 - f_2 \Rightarrow 4\text{Hz} = 162\text{Hz} - f_2 \Rightarrow f_2 = 158\text{Hz}$$

Η συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{162\text{Hz} + 158\text{Hz}}{2} \Rightarrow \bar{f} = 160\text{Hz}$$

$$\text{Η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης είναι } \bar{T} = \frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{160}\text{s}$$

$$\text{Το υλικό σημείο πραγματοποιεί } N \text{ ταλαντώσεις για τις οποίες ισχύει } N = \frac{T_\delta}{\bar{T}}$$



Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$N = \frac{0,25s}{\frac{1}{160}s} \quad \text{ή} \quad N = 40 \text{ ταλαντώσεις}$$

Το σώμα, στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 0,25s$ εκτελεί 40 ταλαντώσεις, άρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 80 φορές.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ είναι στερεωμένο στην άκρη οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο με πλάτος $A = 0,1 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

Να βρείτε:

- τη γωνιακή συχνότητα ω και την ενέργεια E της ταλάντωσης.
- την εξίσωση $x = f(t)$ της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.
- το διάστημα d που θα διανύσει το σώμα μέχρι το μέτρο της ταχύτητάς του να μεγιστοποιηθεί για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή t_0 .
- την ταχύτητα u του σώματος τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{A\sqrt{2}}{2}$ και κινείται με κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του.

Λύση

α) Επειδή το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα, κατά τη διεύθυνση της κίνησης του, είναι αυτή του ελατηρίου, η σταθερά επαναφοράς D ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου k .

Από τη σχέση $D = m\omega^2$, για $D = k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ έχουμε:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(βλ. και σελ. 11 του Σχολικού Βιβλίου)

Από τη σχέση $E = \frac{1}{2}DA^2$ έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,1^2 \text{ J} \Rightarrow E = 0,5 \text{ J}$$

(βλ. και σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

β) Η απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος είναι της μορφής $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

(βλ. και σελ. 11 του Σχολικού Βιβλίου)

Για $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση τη μέγιστης θετικής απομάκρυνσης ($x = +A$).
Επομένως:

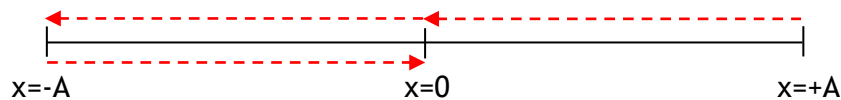
$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \text{ επειδή}$$

$$0 < \varphi_0 < 2\pi$$

Με αντικατάσταση των A , ω , φ_0 προκύπτει:

$$x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$

γ) Η ταχύτητα του σώματος μεγιστοποιείται στη θέση ισορροπίας. Επομένως, αναζητούμε το μήκος της τροχιάς που έχει διανύσει το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή που διέρχεται για 2^η φορά από τη θέση ισορροπίας.



Από το σχήμα φαίνεται ότι αυτό το διάστημα είναι $d = 3A$, το πλάτος A είναι ίσο με $0,1\text{m}$, επομένως:

$$d = 0,3 \text{ m}$$

δ) Η ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος δίνεται από τη σχέση $E = K + U$. Με αντικατάσταση, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση x , έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$|v| = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{s}$$

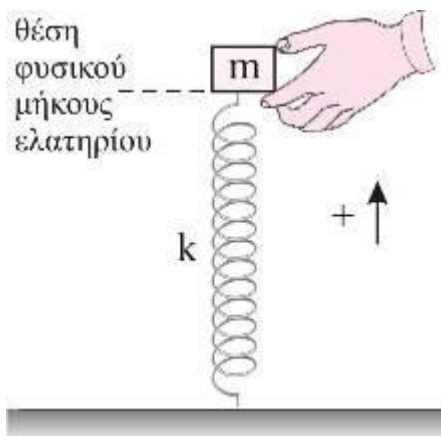
(βλ. και σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

Επειδή $x > 0$ και η κατεύθυνση της κίνησης είναι προς τη θέση ισορροπίας, συμπεραίνουμε ότι $v < 0$. Άρα:

$$v = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{s}$$

Άσκηση 2.

Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 50\text{ N/m}$, του οποίου το κάτω άκρο είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Εκτρέψουμε κατακόρυφα το σώμα προς τα πάνω μέχρι το φυσικό μήκος του ελατηρίου (βλέπε σχήμα) και το αφήνουμε ελεύθερο. Να βρεθούν:



A) το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

B) η ενέργεια που δαπανήθηκε για να εκτρέψουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

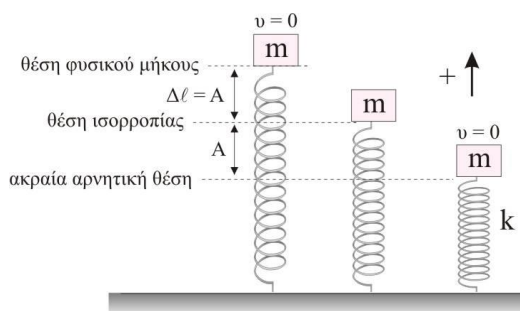
Γ) η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Δ) η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα θα αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ για δεύτερη φορά.

Θεωρείστε θετική φορά προς τα πάνω. Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

A) Όταν αφήσουμε το σώμα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αυτό ξεκινά χωρίς ταχύτητα (πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης). Όταν περάσει από τη θέση ισορροπίας, θα έχει διανύσει απόσταση ίση με το πλάτος της ταλάντωσης.



Στη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k \cdot \Delta \ell \Rightarrow \Delta \ell = A = \frac{mg}{k} = 0,4\text{ m}$$

B) Η ενέργεια που δαπανήθηκε για να εκτρέψουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης.

$$E_{\text{δαν}} = E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (50 \frac{\text{N}}{\text{m}}) (0,4\text{ m})^2 \Rightarrow E_{\text{δαν}} = 4\text{ J}$$

Γ) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την ολική ενέργεια, δηλαδή

$$U_{\max} = E = 4\text{J}$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου εμφανίζεται όταν το ταλαντούμενο σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, δηλαδή όταν η απόσταση από το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $2A=0,8\text{m}$.

$$U_{\max}^{\text{ελ}} = \frac{1}{2}k(2A)^2 = 16\text{J}$$

Δ) Με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση θα βρούμε σε ποια απομάκρυνση x το σώμα αποκτά ταχύτητα μέτρου $v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Με αντικατάσταση εύκολα προκύπτει $x = \pm 0,2\text{m}$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα ξεκινά από τη θέση $+A$, άρα έχει για 2^η φορά ταχύτητα μέτρου $v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ όταν διέρχεται από τη θέση $-0,2\text{m}$ για 1^η φορά. Θα υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή από την εξίσωση θέσης.

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

$$\text{Όπου } A = 0,4\text{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{και} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad} \quad (\text{την } t=0, x=+A)$$

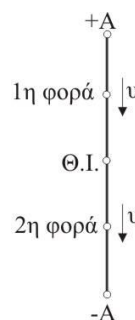
Έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,4 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI})$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του x παίρνουμε:

$$-0,2 = 0,4 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu \frac{7\pi}{6} = \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2)$$

$$\eta\mu \frac{11\pi}{6} = \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3)$$



Η ζητούμενη λύση βρίσκεται στην περιοχή από 0 έως $-A$ με αρνητική ταχύτητα (στο 3^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου), οπότε από τη σχέση (2) για $k=0$

παίρνουμε:
$$\frac{7\pi}{6} = 5t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{15} \text{ s}$$

Άσκηση 3.

Ένα σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής $F' = -bv$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_0 = 10 \text{ cm}$. Το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ s}$ εκτελεί πέντε πλήρεις ταλαντώσεις, ενώ το πλάτος του μειώνεται κατά 50%.

Να υπολογίσετε:

- Α) τη σταθερά Λ της φθίνουσας ταλάντωσης.
- Β) τη συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης μετά από 15 πλήρεις ταλαντώσεις.
- Γ) τη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλάτος θα γίνει $A = 2,5 \text{ cm}$.
- Δ) το έργο της δύναμης απόσβεσης από τη χρονική στιγμή $t=0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ s}$, αν η ενέργεια της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά σε σχέση με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $E = 10 \cdot e^{-2\Lambda t} \text{ (J)}$.

Λύση

Α) Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής $F' = -bv$, άρα το πλάτος A της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow A_5 = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{50}{100} A_0 = A_0 e^{-\Lambda 10 \text{ s}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda 10 \text{ s}} \Rightarrow$$

$$e^{\Lambda 10 \text{ s}} = 2 \Rightarrow \ln e^{\Lambda 10 \text{ s}} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda 10 \text{ s} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{10} \text{ s}^{-1}.$$

Β) Για τη συχνότητα της ταλάντωσης έχουμε

$$f = \frac{N}{t} = \frac{5}{10 \text{ s}} \Rightarrow f = 0,5 \text{ Hz}.$$

Η περίοδος είναι

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,5 \text{ Hz}} \Rightarrow T = 2 \text{ s}.$$

Για το πλάτος ταλάντωσης μετά από 15 πλήρεις ταλαντώσεις έχουμε

$$A_{15} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow A_{15} = 10 \text{ cm} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \text{ s}^{-1} \cdot 15 T} = 10 \text{ cm} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \text{ s}^{-1} \cdot 15 \cdot 2 \text{ s}} \Rightarrow$$

$$A_{15} = 10 \text{ cm} \cdot e^{-3 \ln 2} = 10 \text{ cm} \cdot e^{-\ln 2^3} = \frac{10 \text{ cm}}{e^{\ln 2^3}} = \frac{10 \text{ cm}}{8} \Rightarrow$$

$$A_{15} = 1,25 \text{ cm}.$$

Γ) Στη συνάρτηση του πλάτους με αντικατάσταση $A = 2,5 \text{ cm}$, βρίσκουμε τη ζητούμενη χρονική στιγμή.

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow 2,5 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} s^{-1} t} \Rightarrow e^{-\frac{\ln 2}{10} s^{-1} t} = \frac{2,5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{\frac{\ln 2}{10} s^{-1} t} = 4 \Rightarrow$$

$$\ln e^{\frac{\ln 2}{10} s^{-1} t} = \ln 4 \Rightarrow \ln e^{\frac{\ln 2}{10} s^{-1} t} = \ln 2^2 = 2 \ln 2 \Rightarrow \frac{\ln 2}{10} s^{-1} t = 2 \ln 2 \Rightarrow t = 20 \text{ s}.$$

Δ) Το έργο της δύναμης απόσβεσης ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης

$$W_{F'} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} = E_0 e^{-2\Lambda t} - E_0 = 10 \text{ J} \cdot e^{-2 \cdot \frac{\ln 2}{10} s^{-1} \cdot 10 \text{ s}} - 10 \text{ J} \Rightarrow$$

$$W_{F'} = 10 \text{ J} \cdot e^{-2 \ln 2} - 10 \text{ J} = \frac{10 \text{ J}}{e^{2 \ln 2}} - 10 \text{ J} = \frac{10 \text{ J}}{e^{\ln 2^2}} - 10 \text{ J} = \frac{10 \text{ J}}{4} - 10 \text{ J} \Rightarrow$$

$$W_{F'} = -7,5 \text{ J}.$$

Άσκηση 4.

Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$ έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο σε μια οροφή. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που ισορροπεί. Μετακινούμε το σώμα προς τα πάνω κατά $d = 0,2 \text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά να βρείτε:

α) την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

β) τη μέγιστη ταχύτητα $v_{\max}$ του σώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

γ) την κινητική ενέργεια K του σώματος τις χρονικές στιγμές που η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι $U = 1 \text{ J}$.

δ) το μέτρο της μέγιστης δύναμης $F_{\text{ελ},\max}$ που ασκεί το ελατήριο στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Το σώμα θα ξεκινήσει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από ακραία θέση με $A = d = 0,2 \text{ m}$. Επειδή έχουμε θέσει θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά, η ταλάντωση θα ξεκινήσει από την θετική ακραία θέση της ταλάντωσης. Για την εύρεση της αρχικής φάσης της ταλάντωσης θέτουμε $t = 0$ και $x = +A$ στην εξίσωση της ταλάντωσης:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi, \text{ άρα } k = 0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

β) Θέτουμε $D = k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ και βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow 200 = 2\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τη σχέση $v_{\max} = \omega A$ υπολογίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος κατά τη διάρκεια ταλάντωσης:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Θέτουμε $D = k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ και υπολογίζουμε την ενέργεια της ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E = 4 \text{ J}$$

Επειδή $E = K + U$ έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow 4 = K + 1 \Rightarrow K = 3 \text{ J}$$

δ) Το ελατήριο ασκεί στο σώμα μέγιστη δύναμη $F_{\varepsilon\lambda, \max}$, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, στη θέση που έχει μεγιστοποιηθεί η απόσταση $L_{\max}$ από το φυσικό μήκος του. Αυτή η θέση είναι η κατώτερη θέση της ταλάντωσης (θετική ακραία θέση, ΑΘ(+)), όπως φαίνεται στο σχήμα.

Από το σχήμα φαίνεται ότι η απόσταση $L_{\max}$ ισούται με $d + A$, όπου d είναι η απόσταση μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας (ΘΙ).

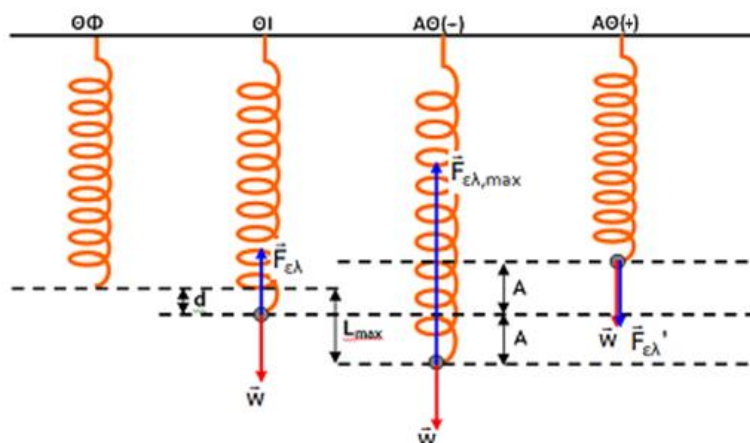
Βρίσκουμε την απόσταση d από τη συνθήκη ισορροπίας:

$$\text{στη } \Theta\text{Ι}: \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow kd = mg \Rightarrow d = \frac{mg}{k} \Rightarrow d = 0,1 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε την απόσταση $L_{\max}$:

$$L_{\max} = d + A \Rightarrow L_{\max} = 0,3 \text{ m}$$

Από το Νόμο Hooke έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda} = kL \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda, \max} = kL_{\max} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda, \max} = 60 \text{ N}$



Άσκηση 5.

Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο σε οροφή. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα μάζας m που ισορροπεί. Στη θέση ισορροπίας, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $d = 0,05 \text{ m}$. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργεια $E = 1 \text{ J}$ και εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0,1\eta\mu(\omega t)$ (SI). Θετική έχει θεωρηθεί η κατακόρυφη προς τα πάνω φορά.

Να βρείτε:

α) τη σταθερά k του ελατηρίου.

β) τη μάζα m του σώματος.

γ) τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

δ) την ταχύτητα u του σώματος, τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{80} \text{ s}$.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

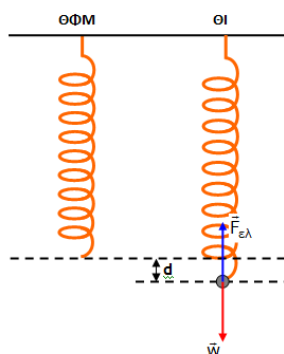
α) Θέτουμε $D = k$ στον τύπο της ενέργειας της ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{A^2} \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

(βλ. σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

β) Από τη συνθήκη ισορροπίας (για τη θέση ισορροπίας, ΘI), θέτοντας $d = 0,05 \text{ m}$ έχουμε:

$$\text{στη } \Theta I: \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow kd = mg \Rightarrow m = \frac{kd}{g} \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$



(βλ. σελ. 12 του Σχολικού Βιβλίου)

γ) Από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{200}} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi\sqrt{2}}{10} \text{ s}$$

Επειδή $\omega = \frac{2\pi}{T}$, με αντικατάσταση έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(βλ. σελ. 12 του Σχολικού Βιβλίου)

δ) Γράφουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο.

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Υπολογίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω συνάρτηση τις τιμές:

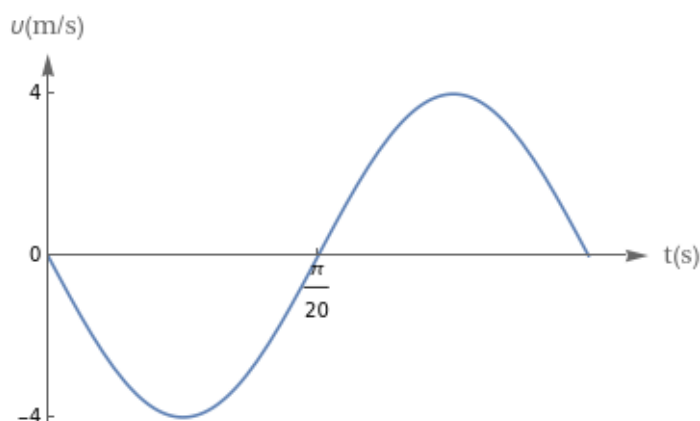
$$t = \frac{\pi\sqrt{2}}{80} \text{ s}, \quad \omega = 10\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad v_{\max} = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = \sqrt{2} \sin(10\sqrt{2} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{80} + 0) \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \text{ (SI)} \Rightarrow v = +1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άσκηση 6.

Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = 0,8 \text{ J}$. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας v του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο t απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



α) να βρείτε το πλάτος A της ταλάντωσης.

β) να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης.

γ) να παραστήσετε γραφικά τη φάση φ της ταλάντωσης συνάρτησι του χρόνου t , στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ ως $t = T$, αν γνωρίζουμε ότι η απομάκρυνση του σώματος μεταβάλλεται όπως το ημίτονο σε σχέση με το χρόνο.

δ) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{40} \text{ s}$.

Λύση

α) Από τον τύπο $\omega = \frac{2\pi}{T}$ υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τον τύπο $v_{\max} = \omega A$ υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

(βλ. σελ. 8-10 του Σχολικού Βιβλίου)

β) Από τον τύπο $E = \frac{1}{2} D A^2$ υπολογίζουμε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης:

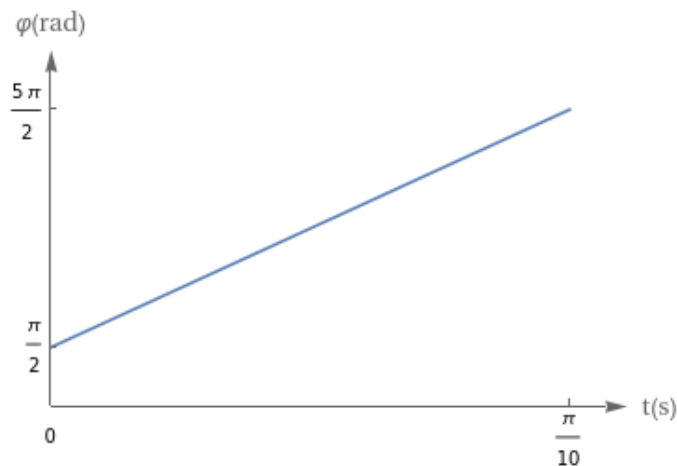
$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow D = \frac{2E}{A^2} \Rightarrow D = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

(βλ. σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

γ) Η φάση φ της ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου t δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \Rightarrow \varphi = 20t + \frac{\pi}{2} \text{ (S.I.)}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι πρώτου βαθμού ως προς t και η γραφική της παράσταση για το χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως $t = T$ δείχνεται στο σχήμα:



δ) Σύμφωνα με το 2^ο Νόμο Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα: $\Sigma F = \frac{dp}{dt}$.

Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η συνισταμένη δύναμη δίνεται από τον τύπο $\Sigma F = -Dx$, επομένως:

$$\frac{dp}{dt} = -Dx$$

Βρίσκουμε την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\pi}{40} \text{ s} :$$

$$x = 0,2 \mu\text{m} \left(20t + \frac{3\pi}{2} \right) \text{m} \Rightarrow x = 0,2 \mu\text{m} \left(\frac{20\pi}{40} + \frac{3\pi}{2} \right) \text{m} \Rightarrow x = 0$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\frac{dp}{dt} = 0$

(βλ. σελ. 11 του Σχολικού Βιβλίου)

Άσκηση 7.

Ένα μικρό σώμα μάζας $m=0,2 \text{ kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης με ταχύτητα μέτρου 4m/s και τη στιγμή $t=(\pi/20)\text{s}$ βρίσκεται στην ακραία θετική του απομάκρυνση για πρώτη φορά.

Α. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_2 που το σώμα θα φτάσει στη ακραία αρνητική απομάκρυνσή του για πρώτη φορά.

Β. Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του.

Γ. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε για μια περίοδο.

Δ. Να βρείτε χρονική στιγμή t_3 που η κινητική ενέργεια ισούται με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης για πρώτη φορά.

Λύση

Α) Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και για να φτάσει στη θέση $x=-A$ θέλει χρονικό διάστημα $\frac{3T}{4}$

Το χρονικό διάστημα που θέλει το σώμα για να μεταβεί από τη θέση ισορροπίας μέχρι

την ακραία θετική απομάκρυνση είναι $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ s}$, άρα $T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$ και $t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$.

Β) $\alpha_{\max} = \omega^2 A$, (1)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. με ταχύτητα $v = v_{\max} = 4\text{m/s}$, άρα

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} = 0,4\text{m}$$

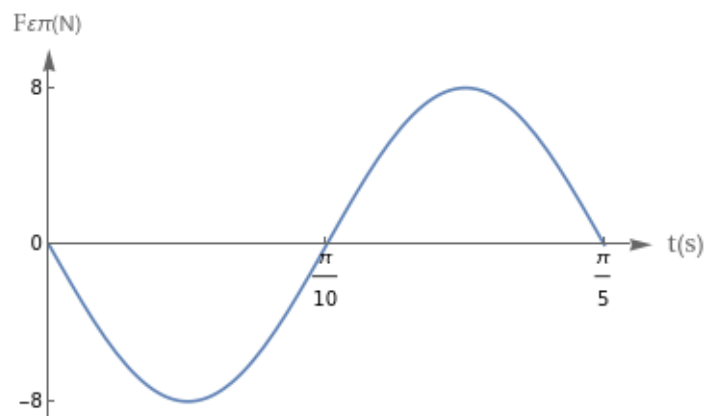
Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $\alpha_{\max} = 40\text{m/s}^2$

Γ) Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$F = m \cdot a = -m\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Την $t=0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, επομένως $\varphi_0 = 0$

Η σχέση (2) γίνεται: $F = -8 \cdot \eta\mu 10t$ (S.I.)



Δ) Με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση βρίσκουμε τις θέσεις που η κινητική ενέργεια ισούται με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

$$\left. \begin{array}{l} K = U \\ K + U = E \end{array} \right\} 2U = E \Rightarrow 2 \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

Το σώμα ξεκινά από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Για πρώτη φορά ισχύει $K=U$ σε θέση από 0 έως $+A$, δηλαδή στη θέση $x = +\frac{\sqrt{2}}{2} A$ με $v > 0$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = A \cdot \eta\mu 10t$ (S.I.)

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} A = A \cdot \eta\mu 10t \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{4} = \eta\mu 10t$$

Οι δύο λύσεις της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι

$$10t = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

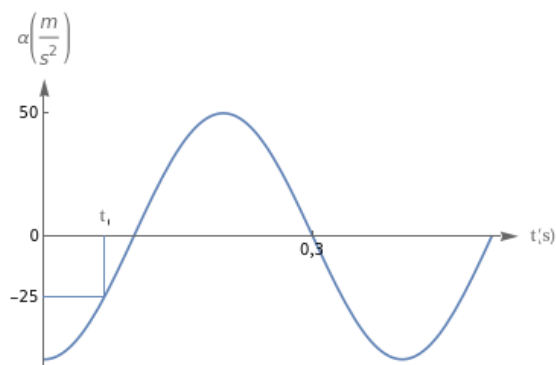
$$10t = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (4)$$

Οι λύσεις της **(4)** αντιστοιχούν σε αρνητική ταχύτητα και απορρίπτονται.

Η 1^η φορά δίνεται από τη σχέση **(3)** για $k = 0$, $10t_3 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{40} \text{ s}$

Άσκηση 8.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το μέτρο της μεταβολής της αλγεβρικής τιμής της ορμής ανάμεσα σε δύο διαδοχικές διελεύσεις του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $\Delta p = 2\pi \text{ kgm/s}$. Να βρεθούν:



A. η αρχική φάση της ταλάντωσης.

B. το πλάτος της ταλάντωσης.

Γ. η μάζα του σώματος.

Δ. ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 που η επιτάχυνση είναι -25 m/s^2 .

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Λύση

A) Από το διάγραμμα φαίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση είναι αρνητική και το μέτρο της έχει τη μέγιστη τιμή, άρα το σώμα βρίσκεται στη θέση $+A$. Από την εξίσωση επιτάχυνσης-χρόνου έχουμε:

$$a = -a_{\max} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -a_{\max} = -a_{\max} \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi, \text{ άρα } k = 0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{B) } a_{\max} = \omega^2 A \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η χρονική στιγμή $t = 0,3 \text{ s}$ ισοδυναμεί με $3T/4$, άρα $T = 0,4 \text{ s}$ και $\omega = 2\pi / T = 5\pi \text{ rad/s}$. Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{50 \text{ m/s}^2}{25\pi^2} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Γ) Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας έχει μέγιστη ταχύτητα $v_{\max} = \omega A$.
Μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων από τη θέση ισορροπίας η μεταβολή της ορμής είναι:

$$|\Delta p| = |p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}}| = |mv_{\max} - (-mv_{\max})| \Rightarrow |\Delta p| = 2mv_{\max} \Rightarrow$$

$$m = \frac{|\Delta p|}{2\omega A} = \frac{2\pi \text{kgm/s}}{2 \cdot 5\pi \text{/s} \cdot 0,2\text{m}} \Rightarrow m = 1\text{kg}$$

$$\Delta) \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -D \cdot x_1 \quad (2)$$

$$\alpha_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow -25 = -25\pi^2 \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) εύκολα προκύπτει:

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 \cdot x_1 = -1\text{kg} \cdot (5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = -25 \text{ N}$$

Άσκηση 9. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = 2\sqrt{3}\eta\mu 10\pi t$ (cm) και $x_2 = \sqrt{3}\eta\mu(10\pi t + \frac{2\pi}{3})$ (cm). Οι δύο ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση.

Να βρείτε:

α) Την περίοδο T της ταλάντωσης του σώματος.

β) Το πλάτος A της ταλάντωσης.

γ) Την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα φτάνει σε ακραία θέση της ταλάντωσης του για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

$$\text{Δίνονται: } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \varepsilon\varphi \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Λύση

α) Οι δύο ταλαντώσεις είναι της μορφής $x_1 = A_1\eta\mu(\omega t)$ και $x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi)$. Επομένως:

$$A_1 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A_2 = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Η σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο με ίδια ω είναι απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια ω , της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Επομένως, για την περίοδο της σύνθετης ταλάντωσης, έχουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10\pi} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

β) Για το πλάτος A της ταλάντωσης έχουμε:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi} \Rightarrow A = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\frac{2\pi}{3}} \text{ cm} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{12 + 3 + 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \text{ cm} \Rightarrow A = 3 \text{ cm}.$$

γ) Για την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\cos\varphi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}\eta\mu\frac{2\pi}{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως (για $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$) έχουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ ή $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$.

Η τιμή $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ απορρίπτεται διότι η φ_0 πρέπει να είναι μεταξύ των αρχικών φάσεων των αρχικών ταλαντώσεων, επομένως πρέπει $0 \leq \varphi_0 < \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$, το οποίο ισχύει για $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

δ) Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, με αντικατάσταση έχουμε: $x = 3\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Η αντίστοιχη εξίσωση της ταχύτητας είναι $v = v_{\max}\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. Θέτοντας $t_0 = 0$

σ' αυτή την εξίσωση έχουμε: $v_0 = v_{\max}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow v_0 = v_{\max}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_0 > 0$.

Επειδή η ταλάντωση ξεκινά με θετική ταχύτητα, το σώμα φτάνει πρώτα στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του ($x = +A$).

Θέτοντας $x = +A = +3 \text{ cm}$ στην εξίσωση $x = 3\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6})(\text{cm})$, έχουμε:

$$3 = 3\eta\mu(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow 10\pi t_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$10\pi t_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{k}{5} + \frac{1}{30}$$

$$\text{Πρέπει: } 0 \leq t_1 < T \Rightarrow 0 \leq t_1 < 0,2\text{s} \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{5} + \frac{1}{30} < \frac{6}{30} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{30} \leq \frac{k}{5} < \frac{5}{30} \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq k < \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα φτάνει σε ακραία θέση της ταλάντωσής του για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, θέτουμε $k = 0$ και έχουμε:

$$t_1 = \left(0 + \frac{1}{30}\right)\text{s} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30}\text{s}$$

Άσκηση 10. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα μάζας $m=0,5\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E=1\text{ J}$. Η μέγιστη δύναμη που δέχεται το σώμα έχει μέτρο $F_{\max}=10\text{N}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα έχει ταχύτητα $v=1\text{m/s}$ και επιτάχυνση με θετική φορά. Να υπολογίσετε:

- A) το πλάτος ταλάντωσης.
- B) το μήκος της διαδρομής που διανύει το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t=2\pi\text{ s}$.
- Γ) τη μέγιστη ορμή του σώματος.
- Δ) την αρχική φάση της ταλάντωσης.
- Ε) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t=2\pi/3\text{ s}$.

Δίνονται: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

A) Η ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad (1)$$

και η μέγιστη δύναμη που δέχεται το σώμα από τη σχέση

$$F_{\max} = DA \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των δύο σχέσεων, διαιρώντας κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{E}{F_{\max}} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = \frac{2E}{F_{\max}} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 1\text{J}}{10\text{ N}} \Rightarrow A = 0,2\text{ m}.$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει η σταθερά επαναφοράς

$$F_{\max} = DA \Rightarrow D = \frac{F_{\max}}{A} \Rightarrow D = \frac{10\text{N}}{0,2\text{m}} \Rightarrow D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

B) Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0,5\text{kg}}{50\text{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}\text{s} \Rightarrow T = 0,2\pi\text{ s}.$$

Η χρονική διάρκεια $t=2\pi\text{ s}$ αντιστοιχεί σε 10 πλήρεις ταλαντώσεις, αφού

$$N = \frac{t}{T} = \frac{2\pi\text{ s}}{\frac{2\pi}{10}\text{ s}} \Rightarrow N = 10.$$

Σε κάθε πλήρη ταλάντωση το μήκος της διαδρομής που διανύει το σώμα είναι ίσο με τέσσερα πλάτη. Άρα το μήκος της διαδρομής που διανύει το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t=2\pi\text{ s}$ είναι

$$d = 10 \cdot 4A = 40A = 40 \cdot 0,2m \Rightarrow d = 8m.$$

Γ) Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{10}s} = 10 \frac{\text{rad}}{s}.$$

Η μέγιστη ορμή του σώματος είναι

$$p_{\max} = mv_{\max} \Rightarrow p_{\max} = m\omega A \Rightarrow p_{\max} = 0,5\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0,2m \Rightarrow p_{\max} = 1 \frac{\text{kgm}}{s}.$$

Δ) Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα δεν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, καθώς έχει θετική επιτάχυνση, άρα η ταλάντωση έχει αρχική φάση φ_0 .

Η εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3), \text{ με}$$

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 10 \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0,2m \Rightarrow v_{\max} = 2 \frac{m}{s}.$$

Για $t=0$ η ταχύτητα του σώματος είναι $v=1\text{m/s}$ και η σχέση (3) δίνει :

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 1 \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s} \sin \varphi_0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{0 \leq \varphi_0 < 2\pi} \varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & (4) \\ \frac{5\pi}{3} & (5) \end{cases}$$

Το σώμα τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει θετική επιτάχυνση, άρα από την εξίσωση της επιτάχυνσης προκύπτει:

$$a = -a_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0) > 0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 < 0.$$

Έτσι κάνουμε δεκτή τη λύση (5), αφού $\eta\mu \frac{5\pi}{3} < 0$. Άρα, η αρχική φάση της ταλάντωσης

$$\text{είναι } \varphi_0 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad.}$$

Ε) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σε μια χρονική στιγμή βρίσκεται από τη σχέση:

$$U + K = E_T \Rightarrow dU + dK = dE_T \Rightarrow dU + dK = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = \frac{-dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -F_{\varepsilon\pi} \frac{dx}{dt} = -F_{\varepsilon\pi} v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -(-Dx)v = Dxv \quad (6)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τη θέση, x και την ταχύτητα, v , του σώματος τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{2\pi}{3} \text{ s.}$$

Η εξίσωση της θέσης είναι :

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \text{ (SI) και με αντικατάσταση δίνει:}$$

$$x = 0,2\text{m} \cdot \eta\mu(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ s} + \frac{5\pi}{3}) = 0,2\eta\mu(\frac{25\pi}{3})\text{m} \Rightarrow x = 0,2\eta\mu\frac{\pi}{3} \text{ m} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι:

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = 2 \sigma\upsilon\nu(10t + \frac{5\pi}{3}) \text{ (SI) και με αντικατάσταση δίνει:}$$

$$v = 2 \sigma\upsilon\nu(\frac{25\pi}{3}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 2 \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (6) παίρνουμε:

$$\frac{dU}{dt} = D_{xv} = \left(50 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m}\right) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 5\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Άσκηση 11. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{ kg}$ εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$x_1 = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{SI}) \quad x_2 = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad (\text{S.I.})$$

- Α) Να υπολογίσετε το πλάτος A της σύνθετης ταλάντωσης.
- Β) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη θέση του σώματος σε σχέση με το χρόνο, $x=f(t)$.
- Γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25\text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 23/12\text{ s}$.
- Δ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος από τη θέση 1, όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής μέχρι τη θέση 2, όπου ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με $8\pi^2\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$.

Λύση

Α) Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αρμονικών ταλαντώσεων είναι

$$\phi = \left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) - \left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}\text{ rad.}$$

Το πλάτος A της σύνθετης ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi} \Rightarrow A = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2\cos\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow A = \sqrt{4 + 4 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow A = 2\text{ m.}$$

Β) Η ζητούμενη σχέση είναι της μορφής: $x = A\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6} + \theta\right)$. Μας λείπει η γωνία θ .

Η διαφορά φάσης, θ , της σύνθετης ταλάντωσης από την ταλάντωση με τη μικρότερη

φάση, δηλαδή την $x_1 = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (SI) βρίσκεται από τη σχέση

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\cos\phi}.$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2 \eta \mu \phi}{A_1 + A_2 \sigma \upsilon \nu \phi} = \frac{2m \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{3}}{2m + 2m \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{2\pi}{3}} = \frac{2m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2m + 2m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Άρα, η συνάρτηση που δίνει τη θέση του σώματος σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$x = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

$$\Gamma) \text{ Η μεταβολή της ορμής είναι : } \vec{\Delta p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta p = m v_2 - m v_1 = m(v_2 - v_1) \quad (1)$$

Πρέπει να βρούμε τις ταχύτητες v_1, v_2 .

Η συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα του σώματος σε σχέση με το χρόνο είναι

$$v = \omega A \sigma \upsilon \nu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2m \cdot \sigma \upsilon \nu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$v = 4\pi \sigma \upsilon \nu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Με αντικατάσταση $t_1 = 1,25 \text{ s}$ βρίσκουμε την v_1 .

$$v_1 = 4\pi \sigma \upsilon \nu\left(2\pi \cdot 1,25 + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI}) = 4\pi \sigma \upsilon \nu(3\pi) (\text{SI}) = 4\pi \sigma \upsilon \nu \pi (\text{SI}) \Rightarrow v_1 = -4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Με αντικατάσταση $t_2 = 23/12 \text{ s}$ βρίσκουμε την v_2 .

$$v_2 = 4\pi \sigma \upsilon \nu\left(2\pi \cdot \frac{23}{12} + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI}) = 4\pi \sigma \upsilon \nu\left(\frac{13\pi}{3}\right) (\text{SI}) = 4\pi \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{3} (\text{SI}) \Rightarrow v_2 = 2\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\Delta p = m(v_2 - v_1) = 2\text{kg} \left(2\pi \frac{\text{m}}{\text{s}} - (-4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}) \right) \Rightarrow \Delta p = 12\pi \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ) Θα βρούμε πρώτα τη δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση 1, όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = 3U_1 + U_1 \Rightarrow E = 4U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{E}{4} \Rightarrow U_1 = \frac{\frac{1}{2} D A^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{4} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{8} 2\text{kg} \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (2\text{m})^2 \Rightarrow U_1 = 4\pi^2 \text{ J}.$$

Έπειτα θα βρούμε τη δυναμική ενέργεια του σώματος τη θέση 2, όπου ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με $8\pi^2 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$. Είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = F_{\varepsilon\pi} = -Dx_2 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{dp/dt}{m\omega^2} = -\frac{8\pi^2 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}}{2\text{kg} \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow x_2 = -1\text{m}$$

Η δυναμική ενέργεια στη θέση x_2 είναι:

$$U_2 = \frac{1}{2} Dx_2^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 = \frac{1}{2} 2\text{kg} \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (-1\text{m})^2 \Rightarrow U_2 = 4\pi^2 \text{ J}.$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 4\pi^2 \text{ J} - 4\pi^2 \text{ J} \Rightarrow \Delta U = 0.$$

Άσκηση 12. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιου πλάτους, οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και χωρίς αρχική φάση. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν παραπλήσιες συχνότητες f_1, f_2 με $f_1 < f_2$ και η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του περιγράφεται από τη σχέση:

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \sin 6\pi t \cdot \eta\mu 600\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Να υπολογίσετε:

- το πλάτος A και τις συχνότητες f_1 και f_2 της κάθε αρμονικής ταλάντωσης.
- τον αριθμό των μηδενισμών του πλάτους μέσα σε 10 δευτερόλεπτα.
- τον αριθμό των ταλαντώσεων του σώματος σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος.
- το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης και τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2/9 \text{ s}$.

Λύση

A) Οι δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής

$$x_1 = A \eta\mu \omega_1 t, \quad x_2 = A \eta\mu \omega_2 t$$

και η σύνθεσή τους δημιουργεί μια ιδιόμορφη ταλάντωση με γενική εξίσωση της θέσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, της μορφής

$$x = 2A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \eta\mu \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (1)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (1) με την

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \sin 6\pi t \cdot \eta\mu 600\pi t \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

παίρνουμε το πλάτος A της κάθε αρμονικής ταλάντωσης

$$2A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow A = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}.$$

Συνεχίζοντας τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε τις συχνότητες f_1 και f_2 των δύο ταλαντώσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 6\pi \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 600\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2} = 6\pi \\ \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} = 600\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_2 - f_1 = 6 \\ f_1 + f_2 = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_2 = 6 + f_1 \\ 6 + f_1 + f_1 = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f_2 = 303 \text{ Hz}, \quad f_1 = 297 \text{ Hz}.$$

Β) Η περίοδος του διακροτήματος είναι

$$T_{\Delta} = \frac{1}{f_2 - f_1} \Rightarrow T_{\Delta} = \frac{1}{303\text{Hz} - 297\text{Hz}} \Rightarrow T_{\Delta} = \frac{1}{6} \text{ s}.$$

Σε κάθε περίοδο του διακροτήματος έχουμε ένα νέο μηδενισμό του πλάτους, σε χρόνο $\Delta t = 10\text{s}$ θα έχουμε N_1 μηδενισμούς με

$$N_1 = \frac{\Delta t}{T_{\Delta}} = \frac{10\text{s}}{\frac{1}{6}\text{s}} = 60 \text{ μηδενισμοί του πλάτους.}$$

Γ) Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T_{\text{ταλ}} = \frac{1}{f_{\text{ταλ}}} \Rightarrow T_{\text{ταλ}} = \frac{1}{\frac{f_1 + f_2}{2}} \Rightarrow T_{\text{ταλ}} = \frac{1}{\frac{600\text{Hz}}{2}} \Rightarrow T_{\text{ταλ}} = \frac{1}{300} \text{ s}.$$

Άρα σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος, T_{Δ} , το σώμα εκτελεί N_2 ταλαντώσεις με

$$N_2 = \frac{T_{\Delta}}{T_{\text{ταλ}}} = \frac{\frac{1}{6}\text{s}}{\frac{1}{300}\text{s}} = 50 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Δ) Το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 2/9 \text{ s}$ είναι

$$\begin{aligned} |A'| &= 2A \left| \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \Rightarrow |A'| = 2 \cdot 10^{-2} \left| \sin 6\pi t \right| \Rightarrow |A'| = 2 \cdot 10^{-2} \left| \sin 6\pi \frac{2}{9} \right| \Rightarrow \\ |A'| &= 2 \cdot 10^{-2} \left| \sin \frac{4\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'| = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{2} \Rightarrow |A'| = 10^{-2} \text{ m} = 1\text{cm}. \end{aligned}$$

Η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2/9 \text{ s}$ είναι

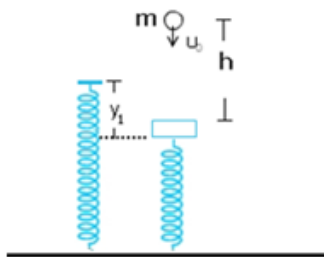
$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(6\pi \frac{2}{9}\right) \cdot \eta\mu\left(600\pi \frac{2}{9}\right) \text{ m} \Rightarrow x = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{400\pi}{3}\right) \text{ m} \Rightarrow \\ x &= 2 \cdot 10^{-2} \sin \frac{4\pi}{3} \cdot \eta\mu\left(396\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \text{ m} \Rightarrow x = 2 \cdot 10^{-2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \eta\mu \frac{4\pi}{3} \text{ m} \Rightarrow \\ x &= -10^{-2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^{-2} \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

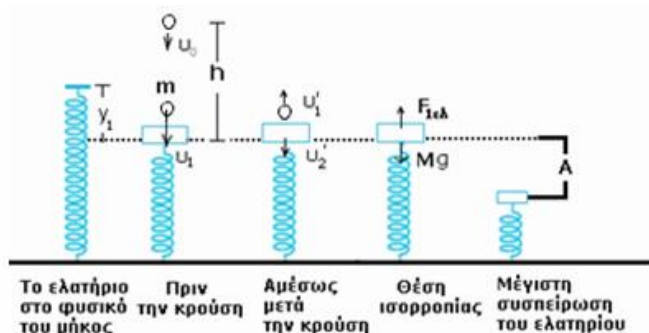
Πρόβλημα 1.

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ είναι στερεωμένος δίσκος Α μάζας $M = 4\text{Kg}$. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο και ο δίσκος ισορροπεί. Από ύψος $h = 0,25\text{m}$ πάνω από το δίσκο βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω, με αρχική ταχύτητα $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, μικρή σφαίρα Β, μάζας $m = 2\text{Kg}$. Η σφαίρα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το δίσκο. Μετά την κρούση απομακρύνουμε τη σφαίρα ενώ ο δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η διάρκεια κρούσης θεωρείται αμελητέα, όπως και οι τριβές και οι αντιστάσεις θεωρούνται αμελητέες.

- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου και της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
- Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου, αν η σταθερά ταλάντωσης είναι $D = k$.
- Να υπολογίσετε τον χρόνο στον οποίο θα μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του δίσκου.
- Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του δίσκου όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας του.



Λύση



α) Το σώμα Β εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα v_0 . Η μόνη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι το βάρος του και επειδή είναι συντηρητική δύναμη, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται.

Συνεπώς

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{(2\text{ m/s})^2 + 2 \cdot (10\text{ m/s}^2) \cdot 0,25\text{ m}} \Rightarrow v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική με το σώμα Β ακίνητο, οπότε για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ισχύουν οι σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m-M}{m+M} \cdot v_1 = \frac{2\text{ kg} - 4\text{ kg}}{2\text{ kg} + 4\text{ kg}} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = -1\text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m}{m+M} \cdot v_1 = \frac{2 \cdot 2\text{ kg}}{2\text{ kg} + 4\text{ kg}} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2' = 2\text{ m/s}$$

Συνεπώς ο δίσκος μετά την κρούση θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και η σφαίρα θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

β) Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση. Επειδή ο δίσκος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα $v_2' = 2\text{ m/s}$ που αποκτά είναι η μέγιστη, συνεπώς η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{Mv_2'^2}{2} = \frac{DA^2}{2} \Rightarrow A = v_2' \sqrt{\frac{M}{D}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{4\text{ kg}}{400\text{ N/m}}} \Rightarrow A = 0,2\text{ m}$$

γ) Αμέσως μετά την κρούση ο δίσκος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και μέχρι να πάει για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης, όπου η ταχύτητά του θα είναι μηδέν, απαιτείται χρόνος $t = \frac{T}{4}$ (1)

Όμως η περίοδος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\text{kg}}{400\text{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

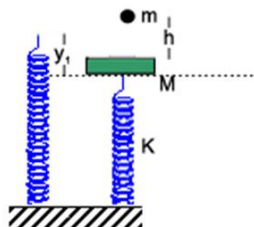
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

$$t = \frac{\pi}{20}\text{s}$$

δ) Από τη γενικευμένη μορφή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα, $\Sigma F = \frac{dp}{dt}$, προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη. Επειδή στη θέση ισορροπίας ισχύει $\Sigma F = 0$, συνεπάγεται ότι και $\frac{dp}{dt} = 0$.

Πρόβλημα 2.

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400 \text{ N/m}$ είναι συνδεδεμένος δίσκος μάζας $M = 3 \text{ kg}$ που ισορροπεί. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε δάπεδο. Από ύψος $h = 0,8 \text{ m}$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερα μια σφαίρα μάζας $m = 1 \text{ kg}$, η οποία συγκρούεται πλαστικά με το δίσκο.

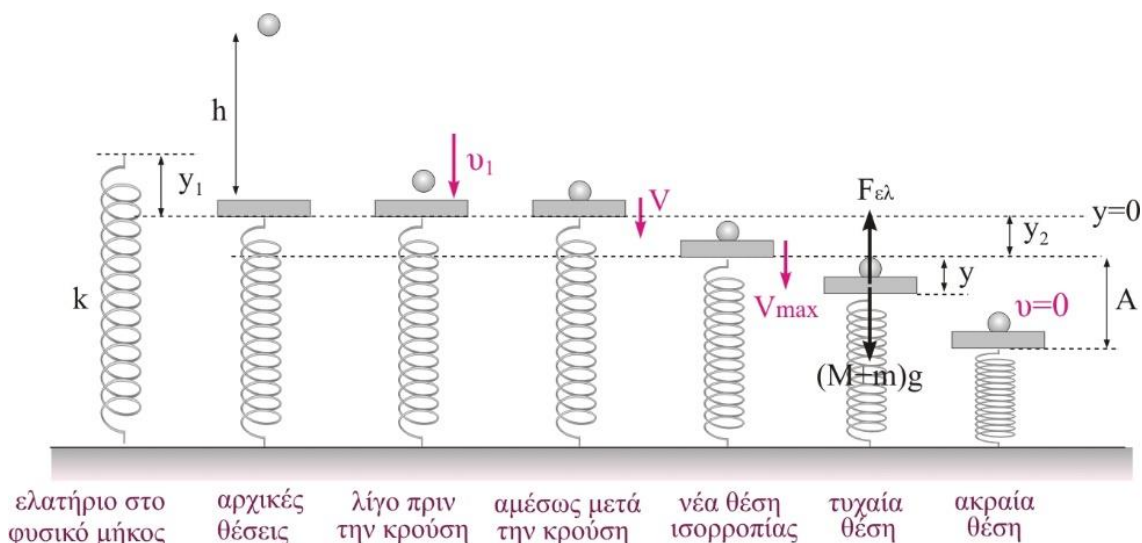


- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Να υπολογίσετε το % ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που έγινε θερμότητα στη διάρκεια της κρούσης.
- Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο ταλάντωσής του.
- Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσής του.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\sqrt{17} = 4,12$.

Λύση

α)



Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση με το δίσκο.

Συνεπώς:

$$E_{\text{μηχ, αρχ}} = E_{\text{μηχ, τελ}} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8\text{m}} \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής. Γράφουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των θέσεων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow mv_1 = (M + m)V \Rightarrow V = \frac{mv_1}{M + m} = \frac{1\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\text{kg} + 1\text{kg}} \Rightarrow V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η ενέργεια που χάθηκε από το σύστημα στη διάρκεια της κρούσης και μεταφέρθηκε στο περιβάλλον, υπό μορφή θερμότητας, είναι ίση με τη μείωση της κινητικής ενέργειας:

$$Q = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M + m)V^2}{2} \Rightarrow Q = \frac{1\text{kg} \cdot (4\text{m/s})^2}{2} - \frac{(3\text{kg} + 1\text{kg}) \cdot (1\text{m/s})^2}{2} \Rightarrow$$

$$Q = 8\text{J} - 2\text{J} \Rightarrow Q = 6\text{J}$$

συνεπώς το % ποσοστό θα είναι:

$$a\% = \frac{Q}{K_{\text{αρχ}}} 100\% \Rightarrow a\% = \frac{6\text{J}}{8\text{J}} 100\% \Rightarrow a\% = 75\%$$

όπου $K_{\text{αρχ}}$ η κινητική ενέργεια πριν την κρούση.

γ) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας που θα είναι χαμηλότερα κατά y_2 από την αρχική θέση. Παίρνουμε μια τυχαία θέση, που απέχει y από τη θέση ισορροπίας, σημειώνουμε τις δυνάμεις και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{w} + \vec{F}_{\text{ελ}}$$

Ορίζοντας φορά θετική προς τα κάτω παίρνουμε:

$$\Sigma F = (M + m)g - k(y_1 + y_2 + y) \quad (1)$$

Γράφοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τη νέα θέση ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{\text{ελ}} = 0 \Rightarrow (M + m)g - k(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (M + m)g = k(y_1 + y_2) \quad (2)$$

Από το συνδυασμό της σχέσης (1) με τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\Sigma F = -ky$$

Το μείον δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει τέτοια φορά ώστε να τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση προς τα πάνω.

Συνεπώς το σώμα θα κάνει Απλή Αρμονική Ταλάντωση, με σταθερά ταλάντωσης $D = k$.

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\text{kg}+1\text{kg}}{400\text{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

δ) Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας στις ταλαντώσεις. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας που έχει αμέσως μετά την κρούση. Επισημαίνεται ότι αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται υψηλότερα κατά y_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απομάκρυνση y_2 βρίσκεται από το συνδυασμό των σχέσεων που ισχύουν για τις δύο θέσεις ισορροπίας.

Για την αρχική θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{ελ} = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \Rightarrow Mg = ky_1 \quad (3)$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει η σχέση (2). Από το συνδυασμό των σχέσεων (2) και (3) παίρνουμε:

$$mg = ky_2 \Rightarrow y_2 = \frac{mg}{k} = \frac{1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{400\text{N/m}} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{40}\text{m}$$

Έτσι η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{ky_2^2}{2} + \frac{(M+m)V^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{y_2^2 + \frac{M+m}{K}V^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{40}\text{m}\right)^2 + \frac{3\text{kg}+1\text{kg}}{400\text{N/m}} \cdot (1\text{m/s})^2} \Rightarrow$$

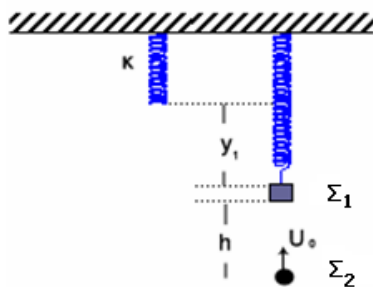
$$A = \frac{\sqrt{17}}{40}\text{m} = 10,3\text{cm}$$

Πρόβλημα 3.

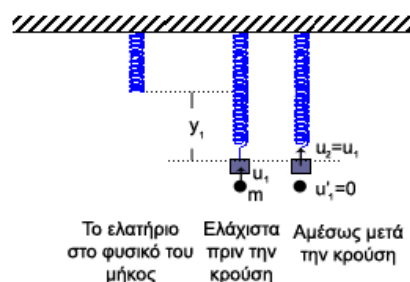
Σώμα Σ_1 , μάζας $m_1 = m = 1\text{Kg}$, ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m = 1\text{Kg}$, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα $u_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1,35\text{m}$ κάτω από το σώμα Σ_1 . Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά ελαστικά και στη συνέχεια το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:

- το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 .
- τη θέση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή, που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 γίνεται για 1^η φορά ελάχιστη.
- το έργο της δύναμης του ελατηρίου καθώς το σώμα Σ_1 κινείται από τη θέση ισορροπίας του μέχρι το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του.
- το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ_1 , τη στιγμή που φτάνει στο ψηλότερο σημείο.

Οι αντιστάσεις λόγω των τριβών θεωρούνται αμελητέες. Δίνονται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\pi^2 = 10$.



Λύση



α) Το σώμα Σ_2 εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα πάνω και η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του, άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου εκτόξευσης και του σημείου ελάχιστα πριν την κρούση. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρυτικού πεδίου, εκείνο από το οποίο ξεκινά το σώμα Σ_2 .

$$E_{\text{μηχ, αρχ}} = E_{\text{μηχ, τελ}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)} = \sqrt{(6\text{m/s})^2 - 2 \cdot (10\text{m/s}^2) \cdot 1,35\text{m}} \Rightarrow$$

$$v_1 = 3\text{m/s}$$

Στη διάρκεια της κρούσης, οι εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος των δύο σωμάτων, είναι αμελητέες σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις και κατά συνέπεια ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, άρα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς η ταχύτητα του Σ_1 μετά την κρούση θα

$$\text{είναι } v_2 = v_1 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το σώμα Σ_1 θα ξεκινήσει ταλάντωση γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του, άρα η ταχύτητα $v_2 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ που αποκτά, αποτελεί την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

$$v_2 = v_{\text{max}} = \omega A = 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

Για την περίοδο της ταλάντωσης ισχύει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{kg}}{900\text{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{30}\text{s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{15}\text{s}$$

$$\text{και } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/15}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = 30\text{rad/s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε: $A = 0,1\text{m}$

β) Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση θα αποκτήσει μηδενική ταχύτητα και θα ξεκινήσει ελεύθερη πτώση. Έτσι, η θέση του σε σχέση με το σημείο σύγκρουσης κάθε στιγμή θα βρίσκεται από τη σχέση $y = \frac{1}{2}gt^2$ (2), θεωρώντας τη θετική φορά προς τα κάτω.

Το σώμα Σ_1 ελαχιστοποιεί την κινητική του ενέργεια για 1^η φορά όταν βρεθεί στην πάνω ακραία θέση. Επειδή ξεκινά από τη θέση ισορροπίας, μέχρι να πάει στη θέση μέγιστης

$$\text{απομάκρυνσης απαιτείται χρονικό διάστημα } t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{\pi}{15}}{4}\text{s} \Rightarrow t = \frac{\pi}{60}\text{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{\pi}{60} \text{s}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{72} \text{m}$$

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ των εξής δύο θέσεων: της θέσης ισορροπίας και του υψηλότερου σημείου της τροχιάς του σώματος

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{Fελ}} + W_{\text{w}} \Rightarrow 0 - \frac{mv_2^2}{2} = W_{\text{Fελ}} - mgA \Rightarrow W_{\text{Fελ}} = -\frac{mv_2^2}{2} + mgA \Rightarrow$$

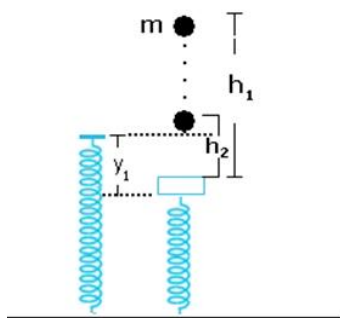
$$W_{\text{Fελ}} = -\frac{1\text{kg} \cdot (3\text{m/s})^2}{2} + 1\text{kg} \cdot (10\text{m/s}^2) \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow W_{\text{Fελ}} = -3,5\text{J}$$

δ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος στη θέση αυτή. Επειδή το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση αυτή θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

$$\alpha = \alpha_{\text{max}} = \omega^2 A = (30\text{rad/s})^2 \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \alpha = \alpha_{\text{max}} = 90 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Πρόβλημα 4.

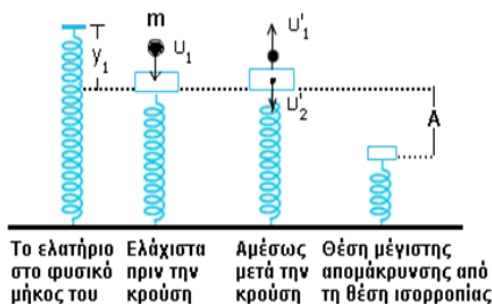
Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 80\pi^2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ είναι συνδεδεμένος δίσκος μάζας $M = 5\text{kg}$ που ισορροπεί. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε δάπεδο. Από ύψος $h_1 = 5\text{m}$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερα μια σφαίρα μάζας $m = 1\text{kg}$, η οποία συγκρούεται μετωπικά με τον δίσκο και η διάρκεια κρούσης είναι αμελητέα. Μετά την κρούση η σφαίρα αναπηδά κατακόρυφα και φτάνει σε ύψος $h_2 = 1,25\text{m}$ πάνω από την θέση ισορροπίας του δίσκου. Να υπολογίσετε:



- το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου και της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
- την % μείωση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας λόγω της κρούσης.
- τη θέση του δίσκου τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο ύψος h_2 .
- τη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο δίσκο σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες.
- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνονται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\pi^2 = 10$.

Λύση



α) Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση με το δίσκο.

$$E_{\text{μηχ, πριν την κρούση}} = E_{\text{μηχ, θέση ελευθέρωσης}}$$

Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του σώματος λόγω βαρυτικού πεδίου, εκείνο στο οποίο βρίσκεται ο δίσκος πριν την κρούση.

$$\frac{mv_1^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\text{m}} \Rightarrow v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μετά την κρούση της σφαίρας με το δίσκο αυτή κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με το βάρος να είναι η μόνη δύναμη που της ασκείται, άρα η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελάχιστα μετά την κρούση και της υψηλότερης θέσης που φτάνει.

Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής ενέργειας του σώματος στο βαρυτικό πεδίο, εκείνο στο οποίο βρίσκεται ο δίσκος πριν την κρούση.

$$\frac{mv_1'^2}{2} = mgh_2 \Rightarrow v_1' = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,25\text{m}} \Rightarrow v_1' = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γράφουμε τη διατήρηση της ορμής του συστήματος δίσκου - σώματος μεταξύ των θέσεων ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow mv_1 = Mv_2' - mv_1' \Rightarrow v_2' = \frac{mv_1' + mv_1}{M} = \frac{1\text{kg} \cdot 5\text{m/s} + 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}}{5\text{kg}} \Rightarrow v_2' = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\beta) a \% = \left| \frac{\Delta K}{K_{\text{πριν}}} \right| \cdot 100\% = \frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{v_1'^2}{v_1^2} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$a \% = \left(1 - \frac{(5\text{m/s})^2}{(10\text{m/s})^2} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$a \% = 75\%$$

γ) Η ταχύτητα της σφαίρας καθώς ανέρχεται περιγράφεται από τη σχέση:

$$v_1'' = v_1' - gt \quad (1)$$

Στο υψηλότερο σημείο έχουμε $v_1'' = 0$, οπότε η σχέση (1) δίνει:

$$0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = 0,5\text{s}$$

Υπολογίζουμε την περίοδο της ταλάντωσης του δίσκου:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\text{kg}}{80\pi^2\text{N/m}}} \Rightarrow T = 0,5\text{s}$$

Άρα τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο ύψος h_2 , ο δίσκος έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κατευθύνεται προς τα κάτω.

δ) Η δύναμη επαναφοράς ενός σώματος που ταλαντώνεται δεμένο στο άκρο ελατηρίου δίνεται από τη σχέση :

$$F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -ky \quad \text{με} \quad -A \leq y \leq A \quad (2)$$

Το πλάτος ταλάντωσης βρίσκεται με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση

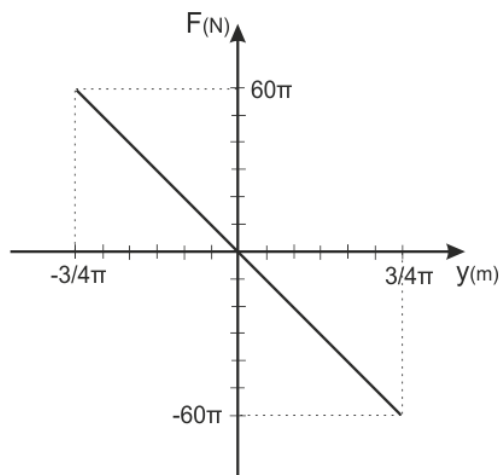
$$\frac{Mv_2'^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = v_2' \sqrt{\frac{M}{k}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{5\text{kg}}{80\pi^2\text{N/m}}} \Rightarrow A = \frac{3}{4\pi} \text{m}$$

Άρα η σχέση (2) γίνεται: $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -80\pi^2 y$ (SI) με $-\frac{3}{4\pi} \text{m} \leq y \leq \frac{3}{4\pi} \text{m}$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

Για $y = \frac{3}{4\pi} \text{m}$ παίρνουμε $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -60\pi \text{N}$

Για $y = -\frac{3}{4\pi} \text{m}$ παίρνουμε $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = 60\pi \text{N}$



ε) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου στη θέση αυτή θα είναι:

$$\frac{|\Delta U_{ελ}|}{\Delta t} = \frac{|F_{ελ} \Delta x|}{\Delta t} = |F_{ελ} v| = ky_1 v' \quad (3)$$

Το y_1 δηλώνει την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Για τον υπολογισμό του γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας για το δίσκο.

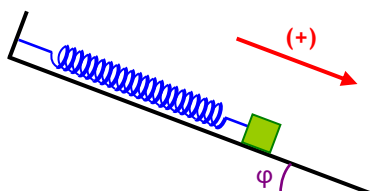
$$\vec{W} + \vec{F}_{ελ} = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{Mg}{k} = \frac{5\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{80\pi^2 \text{N/m}} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{16} \text{m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\frac{|\Delta U_{ελ}|}{\Delta t} = \left(80\pi^2 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \cdot \left(\frac{1}{16} \text{m}\right) \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{\Delta U_{ελ}}{\Delta t} = 150 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 5.

Ένα σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$ ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\varphi = 30^\circ$. Το σώμα είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

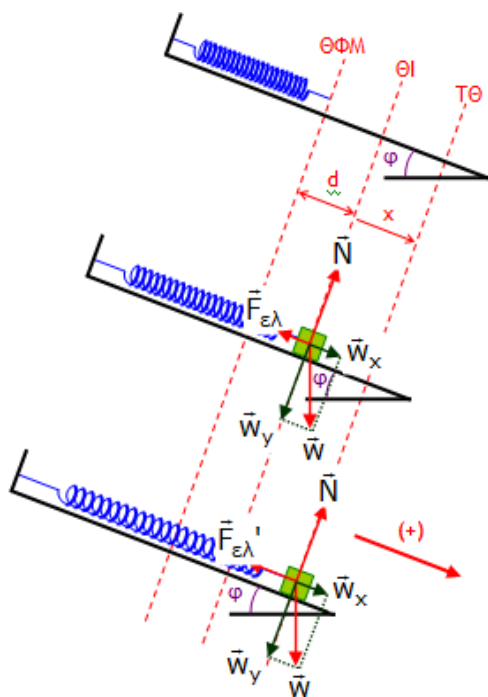


Εκτρέπουμε το σώμα κατά $0,1 \text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Θεωρώντας θετική τη φορά του σχήματος:

- α) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.
- β) Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει πως μεταβάλλεται η επιτάχυνση του σώματος σε σχέση με το χρόνο κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης.
- γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος στη θέση $x = -\frac{A}{2}$, όπου A το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης.
- δ) Να υπολογίσετε την επιπλέον ενέργεια W που πρέπει να δοθεί στο σύστημα, προκειμένου να διπλασιαστεί το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

Λύση

α)



- Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους ($\Theta\Phi\text{Μ}$).
- Σχεδιάζουμε το σύστημα που ταλαντώνεται στη θέση ισορροπίας ($\Theta\text{Ι}$) και σε μια τυχαία θέση (ΤΘ).
- Ονομάζουμε d την απόσταση $\Theta\Phi\text{Μ} - \Theta\text{Ι}$ και x την απόσταση $\Theta\text{Ι} - \text{ΤΘ}$ (Τυχαία Θέση).
- Σχεδιάζουμε τις ασκούμενες δυνάμεις στη $\Theta\text{Ι}$ και στην ΤΘ .
- Στη $\Theta\text{Ι}$ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{w}_x = 0 \Rightarrow kd = w_x \quad (1)$$

- Στην ΤΘ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ελ}' + \vec{w}_x \Rightarrow \Sigma F = -k(d+x) + w_x \Rightarrow \Sigma F = -kd - kx + w_x$$

Με αντικατάσταση της (1) έχουμε:

$$\Sigma F = -kx$$

- Αυτή η εξίσωση είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$, η οποία αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη απλής αρμονικής ταλάντωσης. Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

β) Από τη σχέση $D = m\omega^2$, θέτοντας $D = k$, υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 4\text{kg} \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επειδή εκτρέψαμε το σώμα κατά 0,1 m από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και το αφήσαμε ελεύθερο, το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,1 \text{ m}$.

Από τη σχέση $a_{\max} = \omega^2 A$ υπολογίζουμε τη μέγιστη επιτάχυνση:

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow a_{\max} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης του. Επομένως:

$$t_0 = 0 \begin{cases} x = +A \\ v = 0 \end{cases}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ έχουμε:

$$A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $a_{\max}$, ω και φ_0 στην εξίσωση της επιτάχυνσης, έχουμε:

$$a = -a_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -2,5\eta\mu(5t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$

γ) Σύμφωνα με το 2^ο Νόμο Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη (δύναμη επαναφοράς). Με αντικατάσταση έχουμε:

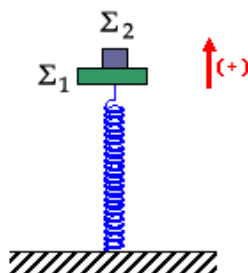
$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -Dx \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -100 \cdot (-\frac{0,1}{2}) \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Αν η αρχική ενέργεια ταλάντωσης είναι E και η τελική ενέργεια ταλάντωσης είναι E' , η διαφορά των δύο ενεργειών οφείλεται στην επιπλέον ενέργεια W που θα δοθεί στο σύστημα. Επομένως:

$$W = E' - E \Rightarrow W = \frac{1}{2} D(2A)^2 - \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow W = \frac{3}{2} kA^2 \Rightarrow W = 1,5 \text{ J}$$

Πρόβλημα 6.

Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο άνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$ που ισορροπεί. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνεται πάνω στο σώμα Σ_1 , χωρίς ταχύτητα, ένα άλλο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$. Το σύστημα ελατήριο - Σ_1 - Σ_2 ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = \frac{1}{30} \text{ m}$.



Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά, να βρείτε:

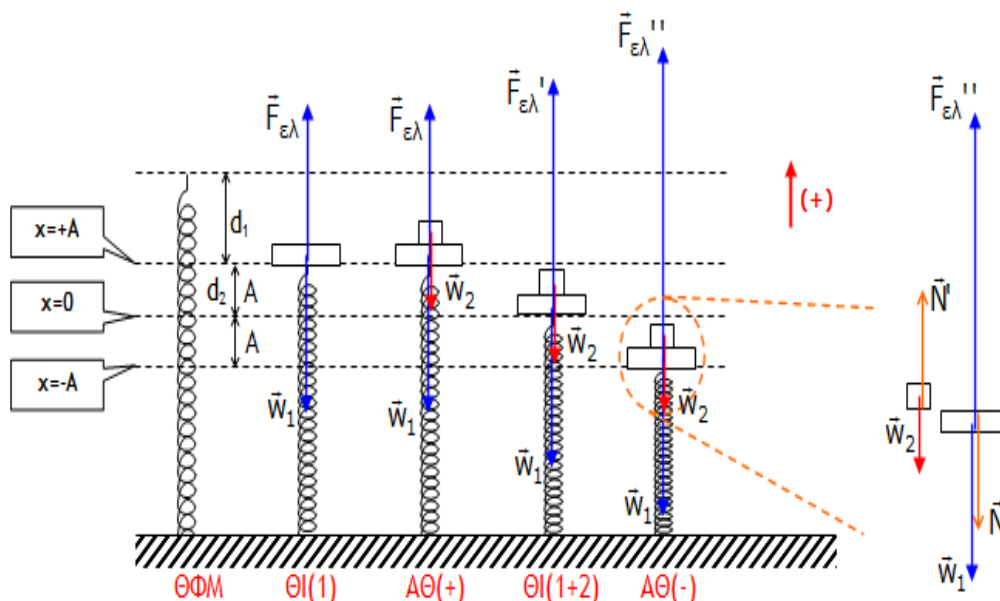
- Τη σταθερά k του ελατηρίου.
- Τη μέγιστη συσπίρωση $\Delta L_{\max}$ του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος.
- Την εξίσωση $U = f(t)$ της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος.
- Τη δύναμη επαφής N που ασκείται από το Σ_2 στο Σ_1 στη θέση μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

(βλ. σελ. 8-13 του Σχολικού Βιβλίου)

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και το σύστημα ελατήριο - Σ_1 στη θέση ισορροπίας του (ΘΙ(1)). Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο - Σ_1 - Σ_2 στην αρχική του θέση, η οποία είναι και ακραία θετική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(+)), στη θέση ισορροπίας του (ΘΙ(1+2)) και στην ακραία αρνητική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(-)), η οποία είναι και θέση μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου:



α) Βρίσκουμε την απόσταση d_1 μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας του σώματος Σ_1 (ΘΙ(1)), από τη συνθήκη ισορροπίας:

$$\text{Στη } \Theta I(1): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{W}_1 = 0 \Rightarrow kd_1 = m_1g \Rightarrow d_1 = \frac{m_1g}{k} \quad (1)$$

Βρίσκουμε την απόσταση d_2 μεταξύ της θέσης ισορροπίας του σώματος Σ_1 και της θέσης ισορροπίας του συστήματος $\Sigma_1 + \Sigma_2$ (ΘΙ(1+2)), από τη συνθήκη ισορροπίας:

Στη ΘΙ(1+2):

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ}' + \vec{W}_1 + \vec{W}_2 = 0 \Rightarrow k(d_1 + d_2) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow kd_1 + kd_2 = m_1g + m_2g$$

και επειδή $kd_1 = m_1g$:

$$kd_2 = m_2g \Rightarrow d_2 = \frac{m_2g}{k}$$

Επειδή το σύστημα ελατήριο - Σ_1 - Σ_2 ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη ΘΙ(1) χωρίς ταχύτητα, αυτή η θέση θα είναι ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, το πλάτος A της ταλάντωσης ισούται με την απόσταση ΘΙ(1) - ΘΙ(1+2), δηλαδή με την απόσταση d_2 :

$$d_2 = A \Rightarrow A = \frac{m_2g}{k} \Rightarrow k = \frac{m_2g}{A} \Rightarrow k = 300 \frac{N}{m}$$

β) Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε την απόσταση d_1 :

$$d_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow d_1 = \frac{2}{30} \text{ m}$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα, η μέγιστη συσπείρωση $\Delta L_{\max}$ του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος είναι:

$$\Delta L_{\max} = d_1 + 2A \Rightarrow \Delta L_{\max} = \frac{4}{30} \text{ m}$$

γ) Η δυναμική ενέργεια μιας α.α.τ. σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$

Όμως

$$E = \frac{1}{2} DA^2$$

Επειδή $D = k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, με αντικατάσταση στον τύπο $E = \frac{1}{2} DA^2$, υπολογίζουμε την ενέργεια της ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{30} \text{ m} \right)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{6} \text{ J}$$

Από τη σχέση $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow 300 = 3\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ταλάντωση ξεκινά από τη θέση $x = +A$. Βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης ως εξής:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Με αντικατάσταση στον τύπο $U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$ έχουμε:

$$U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow U = \frac{1}{6} \eta\mu^2(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow U = \frac{1}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 10t \text{ (SI)}$$

δ) Για να υπολογίσουμε τη δύναμη επαφής N που ασκείται από το Σ_2 στο Σ_1 αρκεί να υπολογίσουμε τη δύναμη επαφής N που ασκείται από το Σ_1 στο Σ_2 . Στη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου, σχεδιάζουμε τις ασκούμενες δυνάμεις στο Σ_2 .

Για την απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος Σ_2 , σε κάθε θέση ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \quad (2)$$

Το σώμα Σ_2 ταλαντώνεται με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω που ταλαντώνεται το σύστημα ελατήριο - Σ_1 - Σ_2 , άρα για τη σταθερά D_2 ισχύει: $D_2 = m_2 \omega^2$

Έτσι η σχέση (2) γίνεται:

$$N' - m_2 g = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow N' = m_2 g - m_2 \omega^2 x$$

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$N' = 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1\text{kg} \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{30} \text{m} \right) \Rightarrow$$

$$N' = 10 + \frac{10}{3} \Rightarrow N' = \frac{40}{3} \text{ N}$$

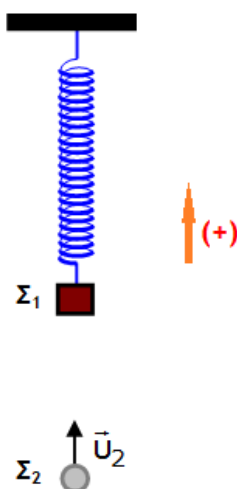
Επειδή οι δυνάμεις $\vec{N}'$ και $\vec{N}$ είναι αντίθετες, για τις αλγεβρικές τιμές τους έχουμε:

$$N = -N' \Rightarrow N = -\frac{40}{3} \text{ N}$$

Δηλαδή, η δύναμη $\vec{N}$ έχει μέτρο $\frac{40}{3} \text{ N}$ και κατεύθυνση προς τα κάτω.

Πρόβλημα 7.

Ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ έχει το άνω άκρο του στερεωμένο σε οροφή. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 3 \text{ kg}$ που ισορροπεί στη θέση $\Theta I(1)$. Ένα βλήμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$ που κινείται στον άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου v_2 και φορά προς τα πάνω, προσκρούει στο σώμα Σ_1 και σφηνώνεται σ' αυτό. Το συσσωμάτωμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά, να βρείτε:

- την επιμήκυνση d_1 του ελατηρίου ως προς το φυσικό του μήκος, στη θέση ισορροπίας $\Theta I(1)$ του σώματος Σ_1 .
- το μέτρο της ταχύτητας v_2 του βλήματος.
- το πλάτος A της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- την εξίσωση $v = f(t)$ της ταχύτητας με την οποία ταλαντώνεται το συσσωμάτωμα, αν θεωρήσουμε $t=0\text{s}$ τη χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα περνά από την πάνω ακραία θέση του.

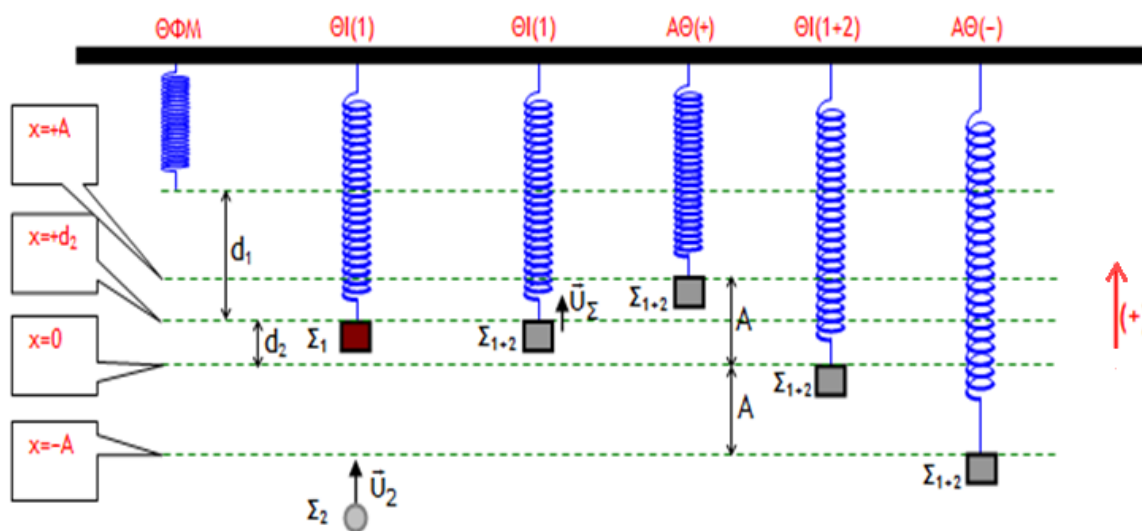
Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

(βλ. σελ. 8-13 και 154, 157 του Σχολικού Βιβλίου)

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους ($\Theta\Phi\text{M}$), το σύστημα ελατήριο - Σ_1 στη θέση ισορροπίας του ($\Theta I(1)$) και στην ίδια θέση το σύστημα ελατήριο - Σ_1 - Σ_2 αμέσως

μετά την κρούση, η οποία είναι και αρχική θέση της ταλάντωσης. Επίσης σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο - Σ_1 - Σ_2 στην ακραία αρνητική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(-)), στη θέση ισορροπίας (ΘΙ(1+2)) και στην ακραία θετική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(+)):



α) Βρίσκουμε την απόσταση d_1 μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας του σώματος Σ_1 (ΘΙ(1)) από τη συνθήκη ισορροπίας στη ΘΙ(1):

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow kd_1 = m_1 g \Rightarrow d_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$d_1 = \frac{3 \cdot 10}{100} \text{ m} \Rightarrow d_1 = 0,3 \text{ m}$$

β) Το σύστημα είναι μονωμένο κατά τον ελάχιστο χρόνο που διαρκεί η κρούση, επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά})$$

Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά και με χρήση αλγεβρικών τιμών έχουμε:

$$p_{ολ}(\text{πριν}) = p_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow p_1 + p_2 = p_{\Sigma} \Rightarrow 0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\Sigma} \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_{\Sigma} \Rightarrow v_2 = \frac{3+1}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ταχύτητα του βλήματος έχει μέτρο $v_2 = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

γ) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ξεκινά αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά d_2 . Το πλάτος της ταλάντωσης θα βρεθεί εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

Από τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος $\Sigma_1 + \Sigma_2$ βρίσκουμε τη μετατόπιση d_2 της θέσης ισορροπίας.

$$\text{Για τη ΘΙ(1+2) ισχύει: } \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = 0 \Rightarrow k(d_1 + d_2) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$kd_1 + kd_2 = m_1g + m_2g$$

και επειδή $kd_1 = m_1g$ παίρνουμε:

$$kd_2 = m_2g \Rightarrow d_2 = \frac{m_2g}{k} \Rightarrow d_2 = 0,1 \text{ m}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ της αρχικής θέσης και της ακραίας και λαμβάνοντας υπόψη ότι $D = k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\sigma}^2 + \frac{1}{2}k(-d_2)^2 \Rightarrow A^2 = \frac{(m_1 + m_2)v_{\sigma}^2}{k} + d_2^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \left(\frac{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{100} + 0,1^2 \right) \text{m}^2 \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

δ) Η εξίσωση της ταχύτητας στη γενική της μορφή δίνεται από τη σχέση

$$v = v_{\max} \sigma \nu \nu(\omega t + \varphi_0)$$

Από τη σχέση $D = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2$ για $D = k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος:

$$D = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow 100 = 4\omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τη σχέση $v_{\max} = \omega A$ υπολογίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $t=0$ και $x=+A$ στην εξίσωση θέσης- χρόνου, παίρνουμε:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi, \text{ άρα } k=0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Με αντικατάσταση των τιμών $v_{\max} = 1 \frac{m}{s}$, $\omega = 5 \frac{rad}{s}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ στη σχέση

$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ έχουμε:

$$v = \sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Πρόβλημα 8.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή t_1 που το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = -20\text{cm}$, οι χρονικοί ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητάς του, της ορμής του και της κινητικής του ενέργειας είναι 5m/s^2 , 10kgm/s^2 και $10\sqrt{3}\text{J/s}$ αντίστοιχα. Να βρείτε:

- τη μάζα του σώματος.
- το μέτρο της ταχύτητας u_1 τη χρονική στιγμή t_1 .
- την ενέργεια της ταλάντωσης.
- τους μέγιστους ρυθμούς μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Δίνεται: $2\eta\mu\sigma\alpha = \eta\mu 2\alpha$.

Λύση

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος ισούται με την επιτάχυνσή του και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Η μάζα του σώματος υπολογίζεται από το 2^ο νόμο του Newton.

$$m = \frac{\Sigma F}{a} = \frac{10}{5} \text{ kg} \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη στιγμή t_1 είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\text{ολ}}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \quad \text{άρα} \quad 10\sqrt{3} \text{ J/s} = 10\text{N} \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Γνωρίζουμε ότι στη θέση x_1 το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου u_1 . Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E_T = K_1 + U_1 \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2, \quad (1)$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι

$$D = m\omega^2$$

$$a_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow 5 \text{ m/s}^2 = -\omega^2 (-0,2 \text{ m}) \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Οπότε} \quad D = 2 \text{ kg} \cdot (5 \text{ rad/s})^2 \Rightarrow D = 50 \text{ N/m}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $E_T = 4J$

δ) Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με τη μέγιστη τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα και είναι ίσος με

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = \Sigma F_{\max} = DA, \quad (2)$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης που δίνεται από τη σχέση

$$E_T = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_T}{D}} = 0,4m$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε: $\left. \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = 20N$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος ισούται με

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -Dx \cdot v = -m\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

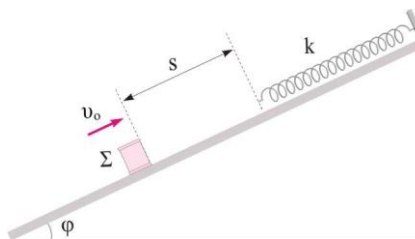
$$\frac{dK}{dt} = -\frac{m\omega^3 A^2}{2} \eta\mu 2(\omega t + \varphi_0)$$

Ο ρυθμός είναι μέγιστος όταν $\eta\mu 2(\omega t + \varphi_0) = -1$ άρα

$$\left. \frac{dK}{dt} \right|_{\max} = \frac{m\omega^3 A^2}{2} = 20 \frac{J}{s}$$

Πρόβλημα 9.

Η μια άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ είναι στερεωμένη στο πάνω μέρος του λείου, πλάγιου επιπέδου γωνίας $\varphi=30^\circ$, όπως στο σχήμα. Από ένα σημείο του πλάγιου επιπέδου που απέχει $s=0,25\text{m}$ από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $u_0=2\text{m/s}$, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου προς τα πάνω ένα σώμα Σ μάζας $m=2\text{kg}$. Όταν το σώμα ακουμπήσει στο ελατήριο, ενώνεται με αυτό και αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση.



α) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος στη διάρκεια της ταλάντωσης.

γ) Να γράψετε τη συνάρτηση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας $t=0$ τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση του και τα θετικά προς τα πάνω.

δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο εκτόξευσης για δεύτερη φορά.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

Λύση

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σώμα Σ από τη θέση (Α) μέχρι τη θέση (Β) λίγο πριν έρθει σε επαφή με το ελατήριο.

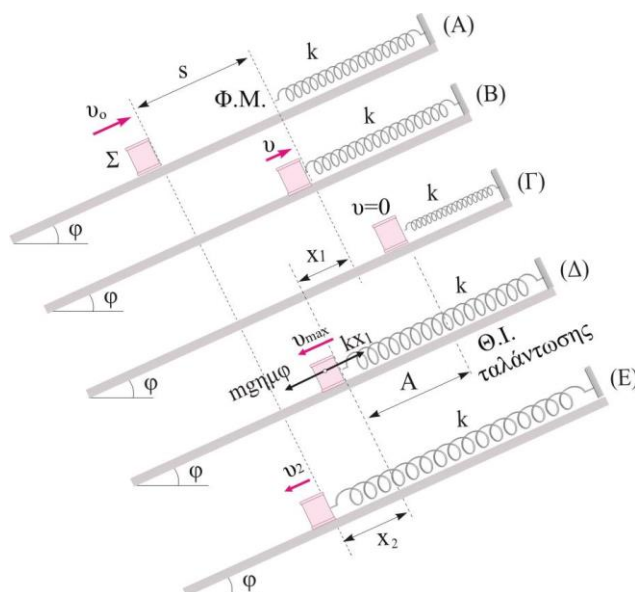
$$K_{(B)} - K_{(A)} = W_{ολ} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \cdot \eta\mu\varphi \cdot s \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s} =$$

$$\sqrt{(2\text{m/s})^2 - 2 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25\text{m}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{1,5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Για να βρούμε τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, θα εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (Β), όπου το σώμα έρχεται σε επαφή

με το ελατήριο με ταχύτητα μέτρου u και στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Δ) όπου το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

Στη Θ.Ι. ασκούνται στο σώμα οι δυνάμεις mg και η δύναμη του ελατηρίου (kx_1) οι οποίες είναι αντίθετες και δίνουν $\Sigma F=0$. Επομένως

$$\Sigma F=0 \quad \text{ή} \quad k \cdot x_1 - mg \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{mg \cdot \eta\mu\varphi}{k} = \frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 1/2}{100\text{N/m}} \Rightarrow x_1 = 0,1\text{m}$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ στις θέσεις (Β) και (Δ).

$$K + U = K_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{v^2 + \frac{kx_1^2}{m}} = \sqrt{\left(\sqrt{1,5}\text{m/s}\right)^2 + \frac{100\text{N/m} \cdot (0,1\text{m})^2}{2\text{kg}}} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

$$\text{με } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Το πλάτος της ταλάντωσης είναι } v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = 0,2 \text{ m}$$

Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης εργαζόμαστε ως εξής:

θέτουμε $t=0$ και $x=+A$ στην εξίσωση θέσης-χρόνου:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi, \quad \text{άρα } k=0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{Η σχέση (1) γίνεται: } x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{50}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

δ) Όταν το ταλαντούμενο σώμα περνά για δεύτερη φορά από το σημείο εκτόξευσης απέχει $s-x_1=0,15\text{m}$ από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης και βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_2=-0,15\text{m}$. Το σώμα κατεβαίνει και έχει αρνητική ταχύτητα μέτρου u_2 . Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας στη θέση αυτή είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k \cdot x_2 \cdot v_2, \quad (2)$$

Η ταχύτητα v_2 θα υπολογιστεί από την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

$$K + U = K_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

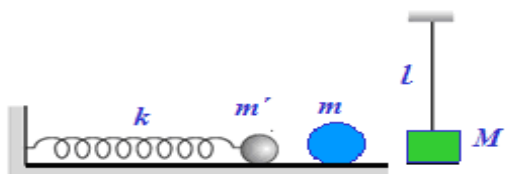
$$v_2 = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_2^2)}{m}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N/m} (0,2^2 \text{ m}^2 - 0,15^2 \text{ m}^2)}{2 \text{ kg}}} \Rightarrow v_2 = -\frac{\sqrt{14}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_2 = -(100 \text{ N/m}) \cdot (-0,15 \text{ m}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{14}}{4} \text{ m/s} \right) v_2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -3,75\sqrt{14} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 10.

Ένα σώμα μάζας $m = 3\text{kg}$, είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Λόγω εσωτερικής αιτίας το σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 , m_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $m_1 = 2m_2$.



Μετά τη διάσπαση το κομμάτι μάζας m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας $m' = 2\text{kg}$, το οποίο είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του μηδενίζεται κάθε $\frac{\pi}{10}\text{s}$.

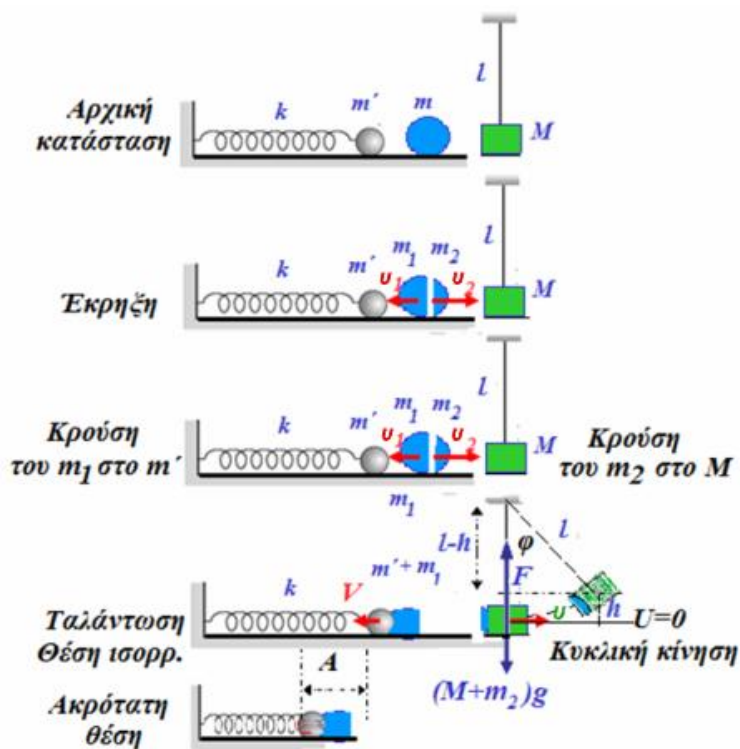
Το κομμάτι μάζας m_2 συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $M = 3\text{kg}$, το οποίο κρέμεται από νήμα μήκους $\ell = 2\text{m}$. Αμέσως μετά την κρούση η δύναμη που ασκεί το νήμα στο συσσωμάτωμα των μαζών m_2 και M είναι $F = 90\text{ N}$.

Να βρεθούν:

- Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος των μαζών m_2 και M αμέσως μετά την κρούση.
- Το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας εκτροπής του νήματος.
- Οι ταχύτητες των κομματιών με μάζες m_1 και m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση.
- Η συνάρτηση που περιγράφει πως μεταβάλλεται η δύναμη επαναφοράς του συσσωματώματος των μαζών m_1 και m' σε σχέση με το χρόνο. Να θεωρήσετε $t = 0$ τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά του άξονα προς τα αριστερά. Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

Τα φαινόμενα που αναφέρονται στην εκφώνηση περιγράφονται στο ακόλουθο σχήμα.



α) Το συσσωμάτωμα μάζας $(M + m_2)$, αμέσως μετά την κρούση, αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας $R = \ell$.

Η συνισταμένη των δυνάμεων, που δρουν στο συσσωμάτωμα, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$F - (M + m_2)g = \frac{(M + m_2)v^2}{\ell} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{[F - (M + m_2)g] \cdot \ell}{M + m_2}} \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } m_1 + m_2 = m \Rightarrow 2m_2 + m_2 = m \Rightarrow m_2 = \frac{m}{3} = 1\text{kg}$$

$$\text{και } m_1 = 2m_2 = 2\text{kg}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$v = \sqrt{\frac{[90\text{N} - (3\text{kg} + 1\text{kg}) \cdot 10\text{m/s}^2] \cdot 2\text{m}}{3\text{kg} + 1\text{kg}}} \Rightarrow v = 5\text{m/s}$$

β) Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε για το συσσωμάτωμα, μεταξύ των θέσεων αμέσως μετά την κρούση και στη μέγιστη εκτροπή. Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό της αρχικής θέσης.

$$E_{\mu\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}(M + m_2)v^2 = (M + m_2) \cdot gh + 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(5\text{m/s})^2}{2 \cdot 10\text{m/s}^2} \Rightarrow h = 1,25\text{m}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$\sin\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{2\text{m} - 1,25\text{m}}{2\text{m}} \Rightarrow \sin\varphi = 0,375$$

γ) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση του σώματος μάζας m_2 με το σώμα μάζας M .

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_2 v_2 = (M + m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{(M + m_2)v}{m_2} \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{(3\text{kg} + 1\text{kg}) \cdot 5\text{m/s}}{1\text{kg}} \Rightarrow v_2 = 20\text{m/s}$$

Στην έκρηξη δρουν εσωτερικές δυνάμεις, οπότε ισχύει η Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow 0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow 2m_2 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$2v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{2} \Rightarrow v_1 = 10\text{m/s}$$

δ) Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -k \cdot x \Rightarrow F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -k \cdot A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των k , A , ω και φ_0 .

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι 0, δηλαδή $\varphi_0 = 0$.

Η ταχύτητα σε μια ταλάντωση μηδενίζεται κάθε $\frac{T}{2}$, άρα:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s} \text{ και } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από την $D = k = (m' + m_1) \cdot \omega^2$ βρίσκουμε τη σταθερά του ελατηρίου

$$D = k = (2\text{kg} + 2\text{kg}) \cdot (10 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \Rightarrow D = k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση του σώματος μάζας m_1 με το σώμα

μάζας m' .

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m_1 v_1 = (m' + m_1) V' \Rightarrow V' = \frac{m_1 v_1}{m' + m_1} \Rightarrow$$

$$V' = \frac{2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg} + 2\text{kg}} \Rightarrow V' = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ακριβώς μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μάζας $(m' + m_1)$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του οπότε ισχύει: $V' = V_{\text{max}}$.

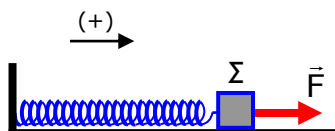
$$\text{Αλλά: } V' = V_{\text{max}} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{V'}{\omega} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}.$$

Με αντικατάσταση των τιμών των k , A , ω και φ_0 στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$F_{\text{επαν}} = -400 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu 10t \Rightarrow F_{\text{επαν}} = -200 \cdot \eta\mu 10t \quad (\text{S.I.})$$

Πρόβλημα 11. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Το σώμα Σ μάζας $m = 1 \text{ kg}$ του σχήματος είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σύστημα ελατήριο - σώμα Σ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα Σ σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F με αποτέλεσμα το σύστημα να ξεκινήσει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,4 \text{ m}$.



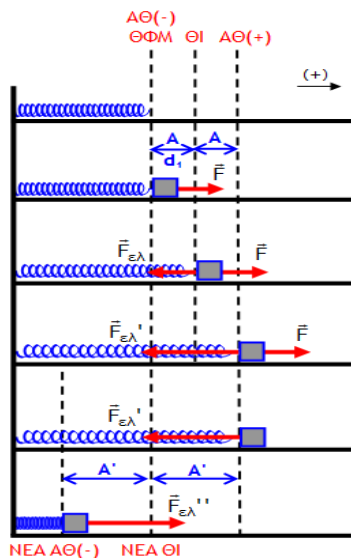
Να βρεθεί:

- το μέτρο F της δύναμης.
- η εξίσωση $x = f(t)$ της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας.
- η εξίσωση $F_{\text{ελ}} = f(t)$ της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα.
- Το πλάτος A' και η ολική ενέργεια E' της νέας ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα, αν κάποια στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ταλάντωσης, καταργηθεί η δύναμη F .

Λύση

(βλ. σελ. 8-13 του Σχολικού Βιβλίου)

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους (ΘΦΜ), το σύστημα ελατήριο - Σ στην αρχική του θέση, η οποία είναι και ακραία αρνητική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(-)), στη θέση ισορροπίας του (ΘΙ), και στην ακραία θετική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(+)). Επίσης, σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο - Σ στην αρχική θέση της νέας ταλάντωσης, η οποία είναι και ακραία θετική θέση ταλάντωσης (ΑΘ(+)) και στη νέα ακραία αρνητική θέση ταλάντωσης (ΝΕΑ ΑΘ(-)). Η νέα θέση ισορροπίας (ΝΕΑ ΘΙ) συμπίπτει με τη ΘΦΜ:



α) Επειδή το σώμα Σ αρχικά δεν έχει ταχύτητα, ξεκινά να ταλαντώνεται από ακραία θέση ταλάντωσης (ΑΘ(-)). Επομένως, η απόσταση d_1 μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας (ΘΙ) του σώματος Σ είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης: $d_1 = A = 0,4 \text{ m}$.

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη ΘΙ παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{F} = 0 \Rightarrow kd_1 = F \Rightarrow F = 400 \cdot 0,4 \text{ N} \Rightarrow F = 160 \text{ N}$$

β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης στη γενική της μορφή δίνεται από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Από τη σχέση $D = k = m\omega^2$ υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ταλάντωση ξεκινά από τη θέση $x = -A$. Βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης ως εξής:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως, η εξίσωση $x = f(t)$ της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τον τύπο: $x = 0,4\eta\mu(20t + \frac{3\pi}{2})$ (SI)

γ) Θέτοντας $D = k$ (βλέπε σχ. Βιβλίο) στη σχέση $\Sigma F = -Dx$ και χρησιμοποιώντας αλγεβρικές τιμές, έχουμε:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{ελ} + F = -kx \Rightarrow F_{ελ} + 160 = -400x \Rightarrow F_{ελ} = -400x - 160 \text{ (SI)}$$

Αντικαθιστώντας την απομάκρυνση με $x = 0,4\eta\mu(20t + \frac{3\pi}{2})$ έχουμε:

$$F_{ελ} = -160\eta\mu(20t + \frac{3\pi}{2}) - 160 \text{ (SI)}$$

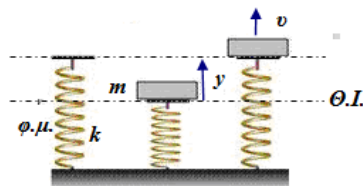
δ) Αν κάποια στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ταλάντωσης, καταργηθεί η δύναμη F , η νέα θέση ισορροπίας (ΝΕΑ ΘΙ) θα συμπίπτει με τη ΘΦΜ. Επομένως: $A' = 2A \Rightarrow A' = 0,8 \text{ m}$

Για τη νέα ολική ενέργεια της ταλάντωσης έχουμε (θέτοντας $D = k$):

$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 \Rightarrow E' = \frac{1}{2} \cdot 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,8^2 \text{ m}^2 \Rightarrow E' = 128 \text{ J}$$

Πρόβλημα 12. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Το σώμα του σχήματος έχει μάζα $m = 2\text{ kg}$ και ισορροπεί στερεωμένο στο πάνω άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 200\text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Εκτρέπουμε το σώμα από τη Θ.Ι. του φέρνοντάς το στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα $v = \sqrt{3}\text{ m/s}$, προς τα πάνω.



α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = f(t)$.

γ) Να υπολογίσετε την μέγιστη ενέργεια του ελατηρίου.

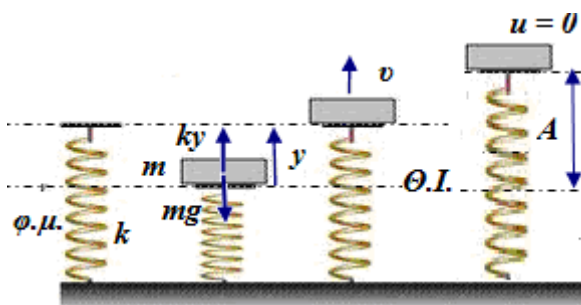
δ) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αποκτά μέγιστη τιμή για δεύτερη φορά, μετά τη στιγμή $t = 0$.

ε) Να βρείτε την ορμή του σώματος κατά τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{10}\text{ s}$.

Δίνονται: $g = 10\text{ m/s}^2$, $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω.

Λύση

α)



Στη θέση ισορροπίας ισχύει

$$mg = ky \Rightarrow y = \frac{mg}{k} = \frac{2 \cdot 10\text{N}}{200\text{N/m}} = 0,1\text{m}$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ της θέσης που ξεκινά η ταλάντωση και της πάνω ακρότατης θέσης.

$$U + K = E$$

$$\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{ky^2 + mv^2}{k}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 0,01 + 2 \cdot 3}{200}}\text{m} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

β) Γενικά η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \text{ και της ταχύτητας είναι } v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$$

Για $t_0 = 0$ γίνονται $y = A\eta\mu\phi_0$ και $v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\phi_0$

Από την εκφώνηση για $t_0 = 0$, $y = 0,1\text{m} = \frac{A}{2}$ και $v > 0$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\eta\mu\phi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$

Δεκτή γίνεται η τιμή $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ (1° τεταρτημόριο, $\sigma\upsilon\nu\phi_0 > 0 \Rightarrow v > 0$).

Από τη σχέση $k = m \cdot \omega^2$ παίρνουμε $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = 10\text{rad/s}$

Άρα, η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται $y = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I.)

γ) Η μέγιστη ενέργεια του ελατηρίου βρίσκεται στη θέση της μέγιστης παραμόρφωσης του, δηλαδή στην κάτω ακρότατη θέση της ταλάντωσης.

$$U_{\epsilon\lambda.,\text{max.}} = \frac{1}{2}k(A + y)^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 0,09\text{J} = 9\text{J}$$

δ) Η ταχύτητα αποκτά τη μέγιστη τιμή της όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή όταν:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 10t + \frac{\pi}{6} = k\pi$$

• $k = 0 \Rightarrow t < 0$ απορρίπτεται

• $k = 1 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{60}$ s 1^η φορά

• $k = 2 \Rightarrow t = \frac{11\pi}{60}$ s 2^η φορά.

ε)

$$p = mv = m \cdot \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot 10 \cdot 0,2 \sigma\upsilon\nu\left(10 \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{6}\right) \text{ kgm/s} = 4 \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \text{ kgm/s} \Rightarrow$$

$$p = 4\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right) \text{ kgm/s} \Rightarrow p = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ kgm/s} \Rightarrow p = -2\sqrt{3} \text{ kgm/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το σώμα κινείται προς τα κάτω.

Πρόβλημα 13. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένας κύβος μάζας $M = 10 \text{ kg}$ ισορροπεί τοποθετημένος πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στη μια κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι δεμένη η μια άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 250 \text{ N/m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι δεμένη σε ακλόνητο σημείο κατακόρυφου τοίχου. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Στην απέναντι κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι δεμένο μη ελαστικό και αβαρές νήμα το οποίο έχει όριο θραύσεως $F_0 = 120 \text{ N}$.



Μέσω του νήματος ασκούμε στο σώμα δύναμη κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και με φορά τέτοια ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται. Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την επιμήκυνση x του ελατηρίου σύμφωνα με την εξίσωση $F = 80 + 200x$ (SI).

α) Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

β) Να βρείτε την ταχύτητα του κύβου τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = f(t)$. Να θεωρήσετε $t_0 = 0$ τη στιγμή που κόβεται το νήμα και άξονα x' με αρχή τη θέση ισορροπίας του κύβου και θετική φορά εκείνη κατά την οποία το ελατήριο επιμηκύνεται.

δ) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή $t_0 = 0$ που κόβεται το νήμα, θα περάσει ο κύβος από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.

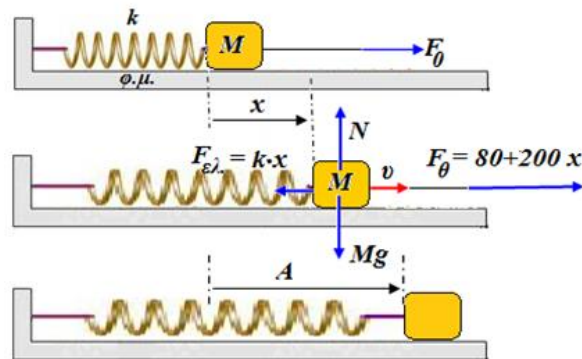
Λύση

α) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x και η δύναμη έχει πάρει την τιμή που καθορίζει το όριο θραύσης του νήματος.

$$F_0 = 80 + 200x \Rightarrow x = \frac{120 \text{ N} - 80 \text{ N}}{200 \text{ N/m}} \Rightarrow$$

$$x = 0,2 \text{ m}$$

Την ίδια στιγμή η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:



$$U_{ελ} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \left(250 \frac{N}{m} \right) \cdot (0,2m)^2 \Rightarrow U_{ελ} = 5J$$

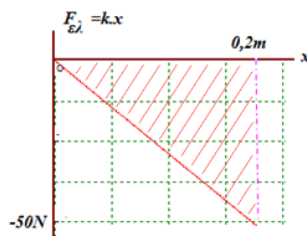
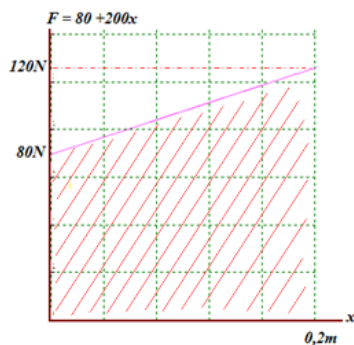
β) Παρατηρούμε ότι από $x=0$ μέχρι $x=0,2m$, η δύναμη που ασκούμε στο σώμα, μέσω του νήματος, είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη που του ασκεί το ελατήριο ($80+200x > 250x$).

Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που προσφέραμε εμείς στο σώμα, μέσω του έργου της $F=80+200x$, είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια που του αφαιρείται, μέσω του έργου της $F_{ελ}=k \cdot x$. Έτσι στη θέση όπου θραύεται το νήμα ($x=0,2m$) το σώμα έχει κινητική ενέργεια.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από $x=0$ μέχρι $x=0,2m$

$$\frac{1}{2} Mv^2 - 0 = W_F + W_{F_{ελ}} \quad (1)$$

Οι δύο δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο είναι μεταβλητές, έτσι τα έργα τους μπορούν να υπολογιστούν από τα εμβαδά των περιοχών που περιλαμβάνονται ανάμεσα από τις γραφικές παραστάσεις και τον άξονα των x .



$$W_F = \frac{80+120}{2} \cdot 0,2J \Rightarrow W_F = 20J$$

$$W_{F_{ελ}} = \frac{-50}{2} \cdot 0,2J \Rightarrow W_{F_{ελ}} = -5J$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} 10kg \cdot v^2 - 0 = 20J - 5J \Rightarrow v = \sqrt{3}m/s$$

γ) Μετά τη θραύση του νήματος το σύστημα ελατήριο - μάζα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους Α. Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας είναι αντίστοιχα:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (2)$$

$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε το πλάτος ταλάντωσης, τη γωνιακή συχνότητα καθώς και την αρχική φάση.

- Για να βρούμε το πλάτος ταλάντωσης εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων, ακριβώς μετά τη θραύση του νήματος και στην ακρότατη θέση:

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} M \cdot v^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2 + 0 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{kx^2 + Mv^2}{k}}$$

Και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$A = 0,4\text{m}$$

- $k = M \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{250}{10}} \text{rad/s} = 5 \text{rad/s}$
- Για $t = 0$, $x = 0,2\text{m}$, $v > 0$

$$\text{Άρα, } 0,2 = 0,4\eta\mu\phi_0 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \phi_0 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Δεκτή γίνεται η τιμή } \phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ (1}^\circ \text{ τεταρτημόριο και } v > 0)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης

$$x = 0,4\eta\mu(5t + \frac{\pi}{6}) \text{ (S.I.)}$$

δ) Όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του, για πρώτη φορά μετά τη θραύση του νήματος, αυτό θα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και θα ισχύει:

$$x = 0 \text{ και } v < 0$$

$$\text{Άρα, } 0 = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi \quad \text{ή} \quad \omega t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi$$

Δεκτή γίνεται η λύση $\omega t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi$, διότι $v < 0$.

Οπότε, η 1^η διέλευση από το $x = 0$ γίνεται για

$$k = 0 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{6\omega} = \frac{5\pi}{6 \frac{2\pi}{T}} \Rightarrow t = \frac{5T}{12} \quad (3)$$

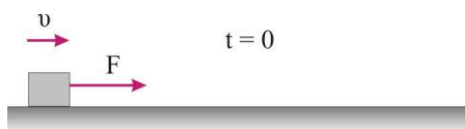
$$\text{Όμως, } T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

και με αντικατάσταση στην σχέση (3) παίρνουμε: $t = \frac{5T}{12} = \frac{10\pi}{60} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \text{ s}$.

Πρόβλημα 14. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται χωρίς τριβές σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $u=\sqrt{3}\text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ καθώς διέρχεται από τη θέση $z=0$ δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης, ίδιας φοράς με την ταχύτητα, της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$F = 8-32z \text{ (S.I.)}$$



α) Αφού βρείτε τη θέση ισορροπίας του σώματος, να αποδείξετε ότι αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα θα σταματήσει για πρώτη φορά.

δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση που βρίσκεται $+0,25\text{m}$ δεξιότερα από τη θέση ισορροπίας για πρώτη φορά.

Λύση

α) Η θέση ισορροπίας είναι αυτή όπου

$$\Sigma F=0 \text{ ή } 8-32z_0=0 \text{ ή } z_0=0,25\text{m}.$$

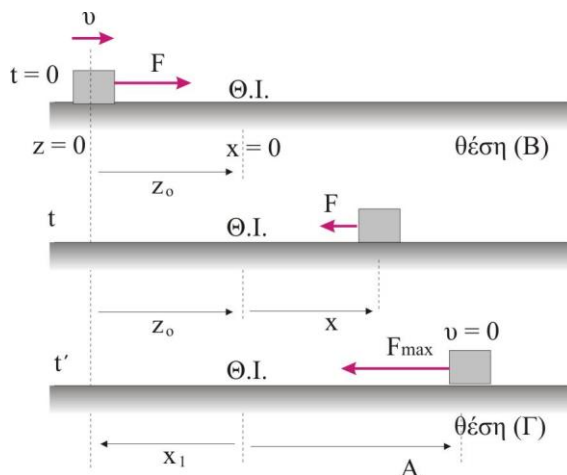
Άρα, η θέση ισορροπίας είναι δεξιότερα κατά $z_0=0,25\text{m}$ από τη θέση που βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t=0$.

Για να εκτελεί το σώμα απλή αρμονική ταλάντωση θα πρέπει να ισχύει $\Sigma F=-Dx$ όπου x η απόσταση από τη θέση ισορροπίας.

Σε τυχαία θέση x από τη Θ.Ι. έχουμε:

$$\Sigma F=8-32(z_0+x)=8-32z_0-32x \text{ ή } \Sigma F=8-32x-32\cdot 0,25 \text{ ή } \Sigma F=-32x,$$

άρα το σώμα εκτελεί α.α.τ με $D=32\text{ N/m}$.



β) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (Β), όπου το σώμα βρίσκεται $0,25\text{m}$ αριστερά της Θ.Ι. με ταχύτητα u και (Γ) όπου αυτό σταματά στιγμιαία.

$$E_{\text{ταλ}}^{(B)} = E_{\text{ταλ}}^{(\Gamma)} \Rightarrow K_B + U_B = U_{\text{max}\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \frac{m}{D}v^2} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{(-0,25\text{m})^2 + \frac{2\text{kg}}{32\text{N/m}}(\sqrt{3}\text{m/s})^2} \Rightarrow A = 0,5\text{m}$$

γ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε σχέση με το χρόνο είναι $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Την $t=0$ το σώμα βρίσκεται σε θέση $0,25\text{m}$ αριστερά της θέσης ισορροπίας ($x=-A/2$), και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, άρα έχουμε αρχική φάση που βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

$$-\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{7\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}, (v < 0) \text{ ή } \varphi_0 = \frac{11\pi}{6}, (v > 0)$$

Η αρχική φάση είναι $11\pi/6$.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{32}{2}} \text{ N/m} \Rightarrow \omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα, η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = 0,5 \cdot \eta\mu\left(4t + \frac{11\pi}{6}\right)$, SI

Το σώμα μηδενίζει για πρώτη φορά την ταχύτητά του στη θέση (Γ) όπου $x=+A$, επομένως

$$A = A \cdot \eta\mu\left(4t_1 + \frac{11\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{2} = \eta\mu\left(4t_1 + \frac{11\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

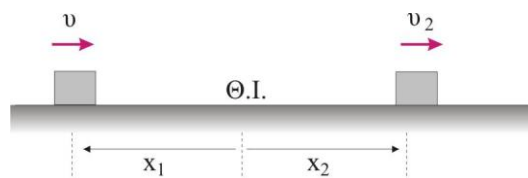
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(4t_1 + \frac{11\pi}{6}\right) \xrightarrow{(k=1)} t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βρίσκεται από τη σχέση :

$$U + K = E_{\text{τ}} \Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\frac{dW}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\Sigma F \cdot v_2 = -(-D \cdot x_2) \cdot v_2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = D \cdot x_2 \cdot v_2$$

Με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ της θέσης που ασκήθηκε η δύναμη ($x_1 = -0,25\text{m}$), και της θέσης $x_2 = +0,25\text{m}$ βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος όταν διέρχεται από τη θέση x_2 .



$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Dx_2^2 \Rightarrow v_2 = \pm v \Rightarrow v_2 = \pm\sqrt{3}\text{m/s}$$

Επειδή διέρχεται για 1^η φορά από τη θέση x_2 αποδεκτή λύση είναι η $v_2 = \sqrt{3}\text{m/s}$.

Με αντικατάσταση εύκολα προκύπτει: $\frac{dU}{dt} = 32(\text{N/m}) \cdot 0,25\text{m} \cdot \sqrt{3}\text{m/s} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 8\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$

Ημερομηνία τροποποίησης: 04/10/2022

Επιμέλεια: Δημήτριος Κλαυδιανός, Πρόδρομος Κορκίζογλου, Παναγιώτης Μπετσάκος, Αθανάσιος Παπαδημητρίου, Γεώργιος Παπαλεξίου, Ηλίας Ποντικός, Παναγιώτης Τσουμάκης, Παναγιώτης Πετρίδης

Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης