

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΚΥΜΑΤΑ

### ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

#### ΘΕΜΑ Β

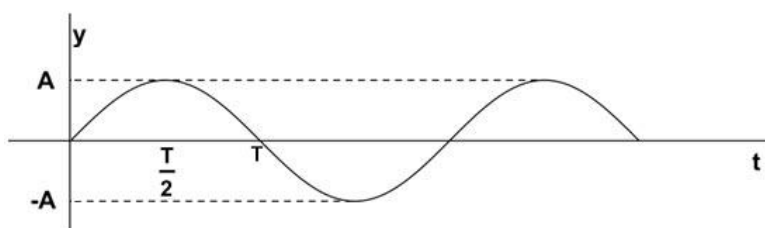
##### Ερώτηση 1.

Κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $Ox$  διαδίδεται αρμονικό κύμα. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου  $O$  της θέσης  $x=0$  (πηγή) είναι  $y=A\eta\mu\omega t$ . Το υλικό σημείο  $A$  που απέχει

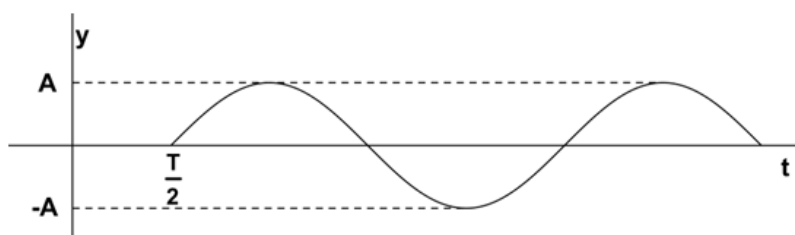
από την πηγή  $x=\frac{\lambda}{2}$

Α. έχει γραφική παράσταση απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο όπως στο διάγραμμα

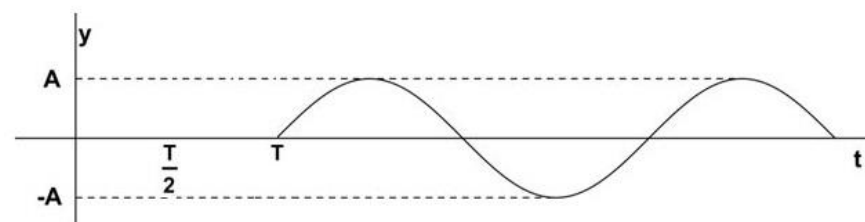
α1)



α2)



α3)



Β. το σημείο Α έχει φάση

Β1) μεγαλύτερη από το σημείο της θέσης  $x = 0$ .

Β2) μικρότερη από το σημείο της θέσης  $x = 0$  κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .

Β3) μικρότερη από το σημείο της θέσης  $x = 0$  κατά  $\pi$ .

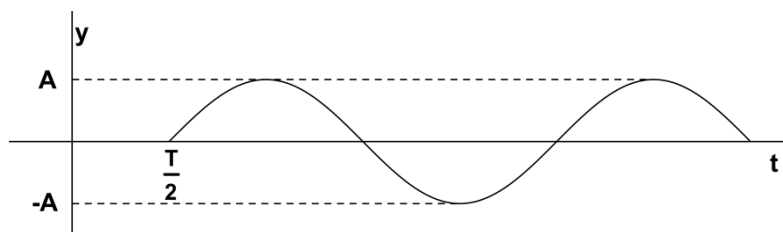
Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

### Λύση

Α. Σωστή απάντηση είναι η α2.

Το υλικό σημείο Α αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{x}{v} = \frac{\lambda}{2v} = \frac{T}{2}$ .

Φυσικά, για  $t < t_1$  ισχύει  $y = 0$



Β. Σωστή απάντηση είναι η Β3.

Το υλικό σημείο Α απέχει από την πηγή  $x = \frac{\lambda}{2}$  και η φάση του είναι:

$$\varphi_A = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_A = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)$$

Άρα η διαφορά φάσης με την πηγή είναι:

$$\varphi_0 - \varphi_A = \frac{2\pi t}{T} - \left( 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \varphi_0 - \varphi_A = \pi \Rightarrow \varphi_A = \varphi_0 - \pi$$

## Ερώτηση 2.

Κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $Ox$  διαδίδεται αρμονικό κύμα. Το σημείο της θέσης  $x = 0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή  $t = \frac{5T}{4}$  το σημείο της θέσης  $x = \frac{\lambda}{2}$  έχει ταχύτητα με μέτρο

1)  $v = 0$ .

2)  $v = v_{\max}$  (μέγιστη).

3)  $0 < v < v_{\max}$ .

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση η 1.

Το κύμα για να φτάσει στη θέση  $x = \frac{\lambda}{2}$  χρειάζεται χρόνο ίσο με  $\frac{T}{2}$ .

Άρα το υλικό σημείο αυτό αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $\frac{T}{2}$ , με θετική ταχύτητα. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή  $t' = \frac{5T}{4}$  έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα ίσο με  $\Delta t = \left(\frac{5T}{4}\right) - \left(\frac{T}{2}\right) = \frac{3T}{4}$ .

Άρα το υλικό σημείο αυτό θα βρίσκεται σε αρνητική απομάκρυνση με μέγιστο μέτρο ( $y = -A$ ) και η ταχύτητά του θα είναι μηδέν.

### Β Τρόπος:

Με αντικατάσταση των δεδομένων:  $x = \frac{\lambda}{2}$  και  $t = \frac{5T}{4}$  στη γενική εξίσωση του κύματος

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ παίρνουμε:}$$

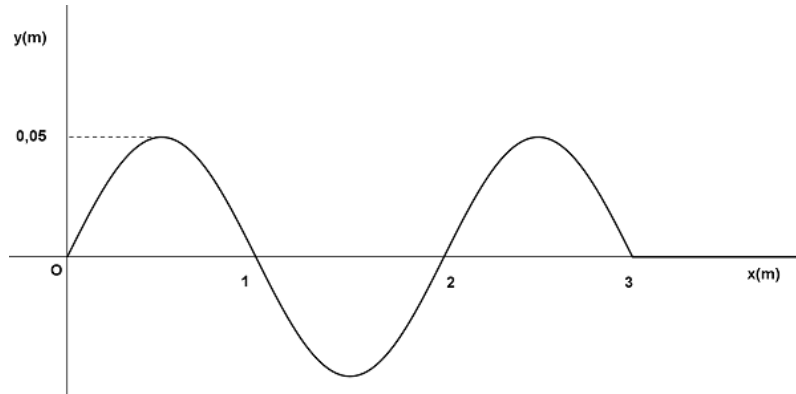
$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{5T}{4T} - \frac{\lambda}{2\lambda} \right) \Rightarrow y = A \sin 2\pi \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = A \sin 2\pi \left( \frac{3}{4} \right) \Rightarrow y = A \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y = -A$$

Άρα, αφού το υλικό σημείο βρίσκεται σε ακραία θέση θα έχει ταχύτητα μηδέν.

### Ερώτηση 3.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με φορά προς την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα  $Ox$ . Το σημείο της θέσης  $x=0$  ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y=0,05\eta\mu(8\pi t)$  (S.I.). Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1$ , κατά την οποία το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $3m$ .



Η ταχύτητα ( $v$ ) διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο, είναι

1)  $v=8\frac{m}{s}$ .

2)  $v=12\frac{m}{s}$ .

3)  $v=\frac{3}{4\pi}\frac{m}{s}$ .

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η 1.

Από τη σύγκριση της σχέσης  $y=0,05\eta\mu(8\pi t)$ , με τη γενική εξίσωση των απλών αρμονικών ταλαντώσεων,  $y=A\eta\mu(2\pi ft)$  προκύπτει:

$$2\pi ft=8\pi t, \text{ συνεπώς, } f=4\text{Hz}, \text{ και } T=\frac{1}{4}\text{s}.$$

Σύμφωνα με το διάγραμμα, το κύμα έχει διανύσει απόσταση  $x=\frac{3\lambda}{2}$  ή  $x=3m$ , που

$$\text{αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα } \Delta t=T+\frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta t=\frac{1}{4}\text{s}+\frac{1}{8}\text{s} \Rightarrow \Delta t=\frac{3}{8}\text{s}$$

$$\text{Άρα } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς η απάντηση 1 είναι η σωστή.

#### Ερώτηση 4.

Κατά μήκος του  $x$  Όχ διαδίδεται αρμονικό κύμα. Το σημείο της θέσης  $x=0$  ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y = A\eta\mu\omega t$ . Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

- 1) αυξάνεται σε σχέση με το χρόνο.
- 2) είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.
- 3) μειώνεται σε σχέση με το χρόνο.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

#### Λύση

Σωστή είναι η πρόταση 2.

Οι εξισώσεις των φάσεων για τα δύο σημεία A και B είναι:

$$\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) \text{ και } \varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$$

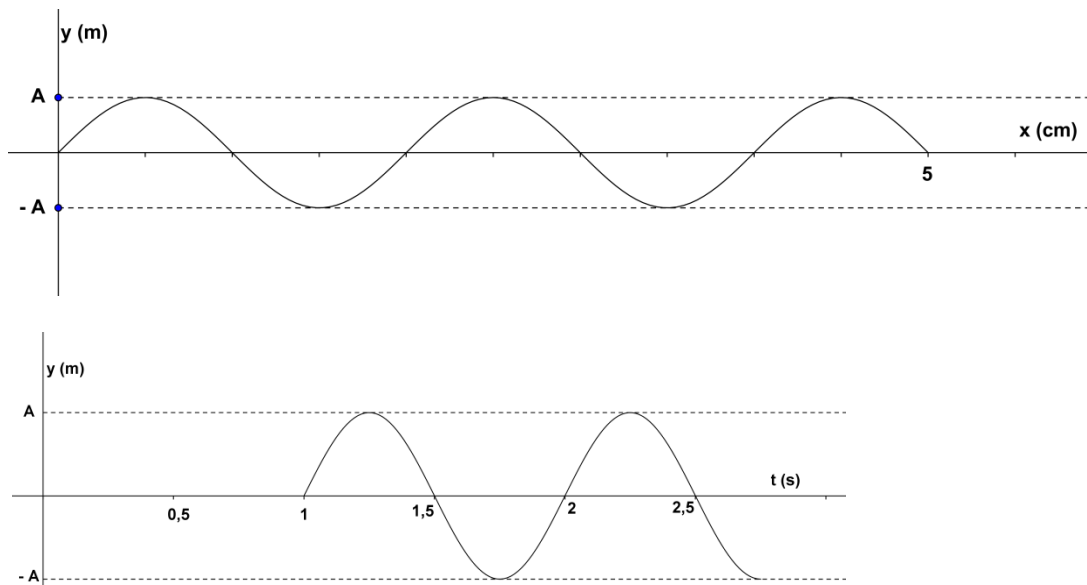
Με αφαίρεση προκύπτει:

$$\varphi_A - \varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda}$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο σημείων είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

### Ερώτηση 5.

Το διάγραμμα 1 παριστάνει το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ το διάγραμμα 2 παριστάνει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο, ενός δεδομένου σημείου Α του ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται το παραπάνω κύμα.



Από τη μελέτη των δύο διαγραμμάτων προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

α)  $0,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ .

β)  $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ .

γ)  $2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

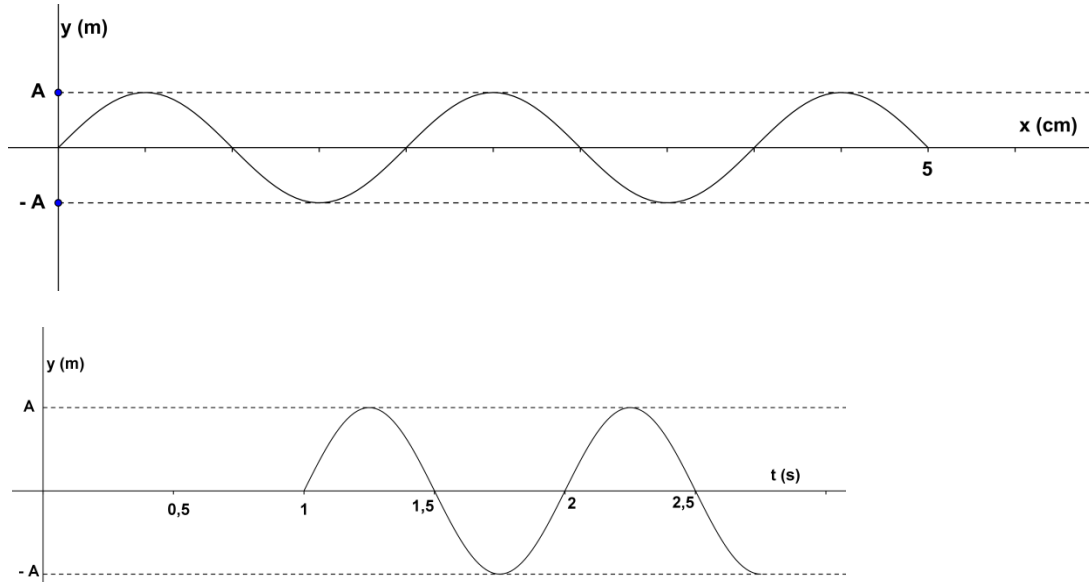
Από το 1<sup>ο</sup> διάγραμμα προκύπτει:  $5 \frac{\lambda}{2} = 5\text{cm} \Rightarrow \lambda = 2\text{cm}$

Από το 2<sup>ο</sup> διάγραμμα προκύπτει:  $2\text{s} - 1\text{s} = T \Rightarrow T = 1\text{s} \Rightarrow f = 1\text{Hz}$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:  $v = \lambda f = 2\text{cm/s}$

### Ερώτηση 6.

Το διάγραμμα 1 παριστάνει το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ το διάγραμμα 2 παριστάνει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο, ενός δεδομένου σημείου A του ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται το παραπάνω κύμα.



Τη χρονική στιγμή  $t$  που αντιστοιχεί το παραπάνω στιγμιότυπο, η πηγή και το υλικό σημείο A περνούν από τη θέση ισορροπίας τους με

- α) αρνητική ταχύτητα.
- β) αντίθετες ταχύτητες.
- γ) θετική ταχύτητα.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα 2 παρατηρούμε ότι το υλικό σημείο A άρχισε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t = T$ , οπότε απέχει από την πηγή απόσταση  $x = \lambda$ . Άρα σημείο A και πηγή είναι σε συμφωνία φάσης.

Το στιγμιότυπο του διαγράμματος 1 δείχνει ότι το κύμα έχει διαδοθεί κατά  $2\lambda + \frac{\lambda}{2}$ , άρα το στιγμιότυπο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή  $t = \frac{T}{2} + 2T$ . Αυτή τη χρονική στιγμή η

πηγή έχει κάνει δύο πλήρεις ταλαντώσεις και μισή επί πλέον ταλάντωση, άρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα. Την ίδια χρονική στιγμή, το ίδιο κάνει και το σημείο Α, εφόσον είναι σε συμφωνία φάσης με την πηγή, όπως προαναφέρθηκε.

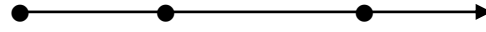
### Ερώτηση 7.

Στο διπλανό σχήμα η πηγή O παράγει

αρμονικό κύμα που διαδίδεται πάνω σε γραμμικό



ελαστικό μέσο με ταχύτητα  $u$ . Δύο σημεία



A, B του μέσου βρίσκονται πάνω στη ευθεία



διάδοσης και έχουν φάσεις  $\varphi_A = \frac{4\pi}{3}$  και  $\varphi_B = \frac{\pi}{3}$ .

A. Να βρείτε αν υπάρχει λάθος στο σχήμα ως προς τις θέσεις των σημείων A και B σε σχέση με την πηγή O, και αν ναι να το διορθώσετε φτιάχνοντας το σωστό σχήμα.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

B. Τη χρονική στιγμή που το σημείο A βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση, το σημείο B θα βρίσκεται στη θέση

α)  $y = A$ .

β)  $y = -A$ .

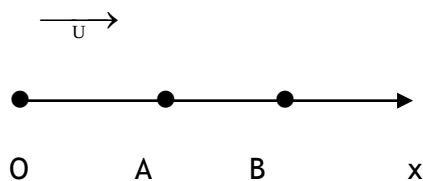
γ)  $y = 0$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

A. Πιο κοντά στην πηγή είναι το υλικό σημείο A.

Από τη σχέση  $\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ , φαίνεται ότι όσο πιο μακριά από την πηγή είναι ένα υλικό σημείο τόσο μικρότερη φάση έχει. Συνεπώς το σημείο με τη μεγαλύτερη φάση θα είναι πιο κοντά στην πηγή. Η σωστή θέση των σημείων A και B φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

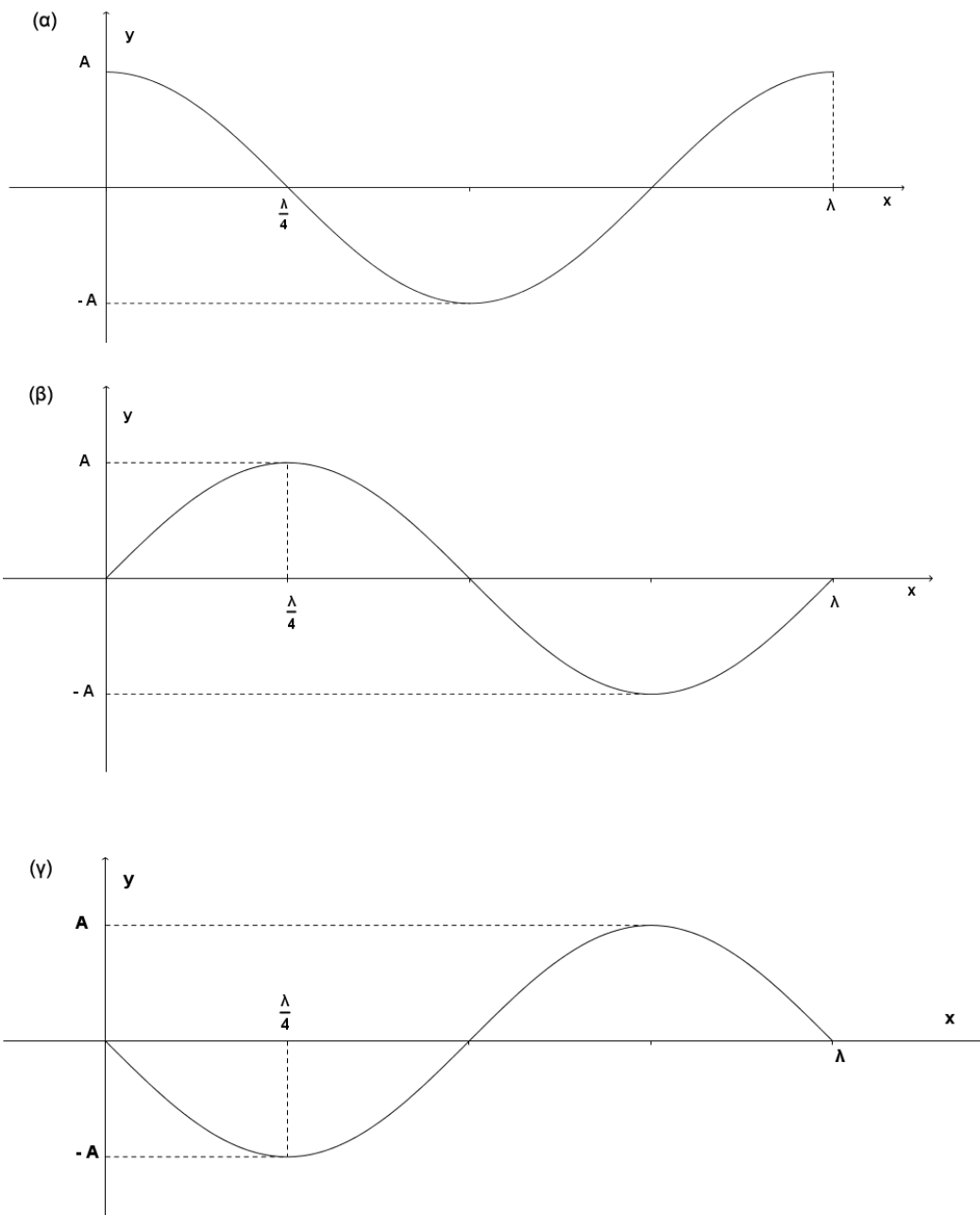


**Β. Σωστή απάντηση είναι η β.**

Επειδή η διαφορά φάσης των δύο σημείων είναι ίση με  $\pi$ , θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Συνεπώς το σημείο Β θα βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y = -A$ .

### Ερώτηση 8.

Μια πηγή κυμάτων  $O$  αρχίζει την χρονική στιγμή  $t=0$ , να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους  $A$ , περιόδου  $T$  και αρχικής φάσης  $\varphi_0=0$ . Το στιγμιότυπο του κύματος, τη χρονική στιγμή  $t=T$ , είναι όπως το διάγραμμα



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

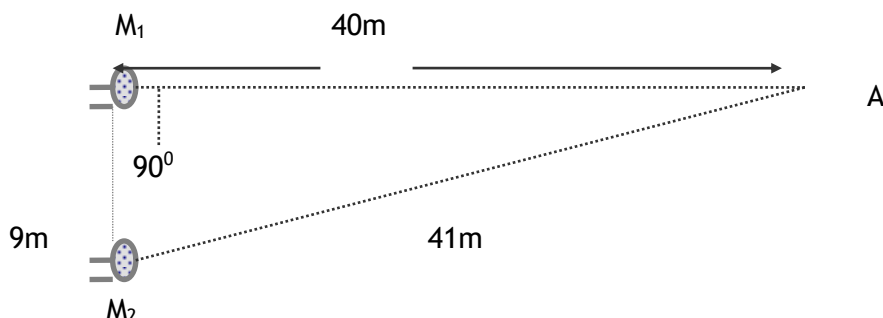
Σε χρόνο μιας περιόδου το κύμα διαδίδεται κατά ένα μήκος κύματος. Αυτό συμβαίνει στα στιγμιότυπα Β, Γ.

Σε ένα κύμα κάθε υλικό σημείο επαναλαμβάνει την κίνηση του προηγούμενού του. Στο διάγραμμα Β, το σημείο της θέσης  $x = \lambda$  δείχνεται να ξεκινά ταλάντωση προς τα κάτω, ενώ στο διάγραμμα Γ, δείχνεται να ξεκινά προς τα πάνω.

Επειδή η πηγή ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y = A\eta\mu\omega t$ , αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο που φτάνει η διαταραχή αυτό ξεκινά αρμονική ταλάντωση προς τα θετικά. Άρα σωστό διάγραμμα είναι το Γ.

### Ερώτηση 9.

Δύο μεγάφωνα  $M_1$  και  $M_2$  τροφοδοτούνται από την ίδια γεννήτρια συχνοτήτων και τοποθετούνται όπως στο σχήμα. Ένας ανιχνευτής ήχου τοποθετείται στο σημείο A.



Καθώς η συχνότητα της γεννήτριας αυξάνεται σιγά - σιγά από 200Hz – 1000Hz διαπιστώνεται ότι ο ανιχνευτής A καταγράφει σειρά ενισχύσεων και αποσβέσεων. Οι αποστάσεις του ανιχνευτή από τις πηγές είναι  $(M_1A) = 40\text{m}$  και  $(M_2A) = 41\text{m}$ , ενώ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι  $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Η συχνότητα για την οποία παρατηρείται η πρώτη απόσβεση είναι

α) 200Hz .

β) 510Hz .

γ) 850Hz .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Για να συμβαίνει απόσβεση πρέπει για τα κύματα που φτάνουν από τα δύο μεγάφωνα στον ανιχνευτή να ισχύει η σχέση :  $r_1 - r_2 = \frac{(2K+1)\lambda}{2}$ . Αντικαθιστώντας,  $\lambda = \frac{v}{f}$ ,

$r_1 = 41\text{m}$ ,  $r_2 = 40\text{m}$  και  $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  παίρνουμε:

$$41\text{m} - 40\text{m} = (2K+1) \frac{v}{2f} \Rightarrow 1\text{m} = (2K+1) \frac{340\text{m/s}}{2f} \Rightarrow f = (2K+1) \cdot 170\text{Hz}$$

Για  $K=0$  βρίσκουμε  $f=170\text{Hz}$  η οποία απορρίπτεται γιατί είναι μικρότερη από 200Hz. Για  $K=1$  βρίσκουμε  $f=510\text{Hz}$  που είναι η ζητούμενη, ενώ για  $K=2$  βρίσκουμε  $f=850\text{Hz}$  κλπ.

### Ερώτηση 10.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος  $A$ , παράγοντας αρμονικά κύματα συχνότητας  $f$  και μήκους κύματος  $\lambda$ . Ένα σημείο  $\Sigma$  της επιφάνειας του υγρού απέχει  $r_1 = 4\lambda$  από την πηγή  $\Pi_1$  και  $r_2 = 7\lambda$  από την πηγή  $\Pi_2$ . Το πλάτος ταλάντωσης του υλικού σημείου  $\Sigma$ , αφού συμβάλλουν σε αυτό τα κύματα, ισούται με:

- α)  $A$ .
- β)  $2A$ .
- γ)  $3A$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η διαφορά των αποστάσεων του σημείου από την πηγή είναι  $\Delta r = |r_1 - r_2| = 3\lambda$ , δηλαδή ακέραιο πολλαπλάσιο μήκους κύματος. Συνεπώς έχουμε ενισχυτική συμβολή και πλάτος ταλάντωσης ίσο με  $2A$ .

### Ερώτηση 11.

Κατά μήκος χορδής μήκους  $L$ , που η μια της άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, με το ελεύθερο άκρο της να είναι κοιλία.

A. Το μήκος της χορδής μπορεί να είναι

α)  $L = \frac{\kappa\lambda}{2}$ .

β)  $L = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ .

γ)  $L = \kappa\lambda$ .

B. Αν A είναι το πλάτος των αρμονικών κυμάτων που συμβάλλουν και παράγεται το στάσιμο κύμα, τότε η σχέση που δίνει τη μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνονται οι κοιλίες, είναι:

α)  $v_{\max} = \omega A$ .

β)  $v_{\max} = 2\omega A$ .

γ)  $v_{\max} = 2\omega A \sin \omega t$ .

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

### Λύση

A. Σωστή απάντηση είναι η β.

Το ένα άκρο της χορδής είναι ακλόνητο, οπότε εκεί θα υπάρχει δεσμός. Στο άλλο άκρο, σύμφωνα με την εκφώνηση, δημιουργείται κοιλία. Η απόσταση μεταξύ μιας κοιλίας και ενός δεσμού είναι  $\frac{\lambda}{4}$ , άρα το μήκος της χορδής θα πρέπει να είναι περιττό πολλαπλάσιο του  $\frac{\lambda}{4}$ . Διαιρώντας το μήκος χορδής με το  $\frac{\lambda}{4}$  βρίσκουμε περιττό αριθμό μόνο στο β.

$$L = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{(2\kappa+1)\lambda}{4}$$

B. Σωστή η απάντηση είναι η β.

Η μέγιστη ταχύτητα ενός υλικού σημείου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση  $v_{\max} = \omega A$ , με  $A$ , να δηλώνει το πλάτος ταλάντωσής του. Οι κοιλίες ταλαντώνονται με πλάτος  $A_0 = 2A$ . Με αντικατάσταση εύκολα προκύπτει  $v_{\max} = 2\omega A$ .

### Ερώτηση 12.

Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$  δημιουργούν κύματα ίδιου πλάτους  $A$  και μήκους κύματος  $\lambda = 0,5\text{cm}$ . Αν για τις αποστάσεις  $r_1$  και  $r_2$  ενός σημείου  $\Sigma$  από τις πηγές ισχύει  $r_1 - r_2 = 4\text{cm}$ , τότε το σημείο  $\Sigma$

α) ταλαντώνεται με πλάτος  $2A$ .

β) ταλαντώνεται με πλάτος  $A$ .

γ) παραμένει ακίνητο.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Γνωρίζουμε ότι για να συμβεί ενισχυτική συμβολή πρέπει να ισχύει η σχέση  $r_1 - r_2 = N\lambda$ . Αυτό πράγματι ισχύει γιατί

$$r_1 - r_2 = 4\text{cm} \Rightarrow r_1 - r_2 = 8 \cdot 0,5\text{cm} \Rightarrow r_1 - r_2 = 8\lambda, \text{ όπου}$$

$\lambda = 0,5\text{cm}$ . Συνεπώς το υλικό σημείο  $\Sigma$  εκτελεί σύνθετη ταλάντωση μεγίστου πλάτους.

### Ερώτηση 13.

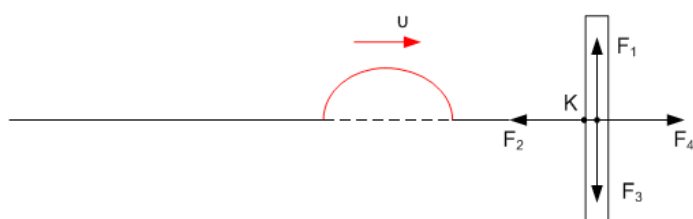
Κατά μήκος χορδής, που έχει στερεωμένο το ένα της άκρο, διαδίδεται ο παλμός του σχήματος. Όταν ο παλμός φτάσει στο σημείο Κ, τότε ο τοίχος θα ασκήσει δύναμη στο σχοινί που θα έχει την κατεύθυνση της

α)  $F_1$ .

β)  $F_2$ .

γ)  $F_3$ .

δ)  $F_4$ .



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Σε ένα κύμα (ή παλμό) κάθε υλικό σημείο επαναλαμβάνει την κίνηση του προηγούμενού του. Ο παλμός του σχήματος κινείται προς τα δεξιά και η μορφή του δηλώνει ότι σε κάθε σημείο που φθάνει αυτό κινείται προς τα πάνω. Έτσι, όταν ο παλμός φτάσει στο σημείο Κ θα τραβήξει προς τα πάνω το πρώτο μόριο του σημείου στήριξης. Σύμφωνα με τον 3<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα το σημείο στήριξης θα ασκήσει στο άκρο του σχοινιού αντίθετη δύναμη.

#### Ερώτηση 14.

Κατά μήκος ομογενούς ελαστικής χορδής αποκαθίσταται στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση :  $y = 4\sigma\upsilon\upsilon\upsilon(\frac{\pi x}{10}) \cdot \eta\mu 6\pi t$ , όπου  $x$ ,  $y$  σε cm και  $t$  σε s.

A. Η συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν είναι

α) 6Hz .

β) 3Hz .

γ) 10Hz .

B. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι

α) 5cm .

β)  $\frac{1}{5}$  cm .

γ) 10cm .

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

#### Λύση

A. Σωστή απάντηση είναι η β.

Από τη σύγκριση της εξίσωσης  $y = 4\sigma\upsilon\upsilon\upsilon(\frac{\pi x}{10}) \cdot \eta\mu 6\pi t$  με τη γενική εξίσωση των στάσιμων κυμάτων  $y = 2A\sigma\upsilon\upsilon\upsilon(\frac{2\pi x}{\lambda}) \cdot \eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$ , έχουμε:

$$\frac{2\pi t}{T} = 6\pi t \Rightarrow 2\pi f = 6\pi \Rightarrow f = 3\text{Hz}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών σε ένα στάσιμο είναι  $\frac{\lambda}{2}$ .

Από τη σύγκριση της εξίσωσης  $y = 4\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi x}{10}) \cdot \eta\mu 6\pi t$  με τη γενική εξίσωση των στάσιμων κυμάτων  $y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$ , έχουμε:

$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{10}$ , από όπου προκύπτει  $\lambda = 20\text{cm}$ . Συνεπώς η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι  $d = \frac{\lambda}{2} = 10\text{cm}$ .

### Ερώτηση 15.

Δύο κύματα που διαδίδονται πάνω στην ίδια ευθεία έχουν εξισώσεις:

$$y_1 = 4\eta\mu(10\pi t - \frac{\pi}{6}x) \text{ και } y_2 = 5\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6}x).$$

Από τη συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων:

α) δεν μπορεί να προκύψει στάσιμο κύμα.

β) θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, γιατί τα δύο κύματα διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση με αντίθετες φορές, έχουν ίδιες συχνότητες και ίδιο μήκος κύματος.

γ) θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, γιατί τα δύο κύματα έχουν ίδιες συχνότητες, και διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, είναι απαραίτητο τα κύματα που συμβάλλουν να διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις και να έχουν όλα τα άλλα στοιχεία τους (πλάτος, συχνότητα, ταχύτητα) ίσα. Τα εν λόγω κύματα διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, έχουν ίσες συχνότητες, ίσες ταχύτητες διάδοσης αλλά δεν έχουν ίσα πλάτη. Συνεπώς θα συμβάλλουν, αλλά δεν θα προκύψουν σημεία που να παραμένουν ακίνητα, δηλαδή στάσιμο κύμα.

### Ερώτηση 16.

Στην επιφάνεια υγρού διαδίδονται δύο αρμονικά εγκάρσια κύματα ίδιου πλάτους  $A$  και ίδιας συχνότητας, που παράγονται από δύο σύγχρονες πηγές  $\Pi_1, \Pi_2$  με εξισώσεις ταλάντωσης  $y_1 = y_2 = A\eta\mu\omega t$ . Σε ένα σημείο  $M$  της επιφάνειας του υγρού πρώτα φτάνει το κύμα από την πηγή  $\Pi_1$  και μετά από χρονικό διάστημα  $3T/4$  φτάνει το κύμα από την πηγή  $\Pi_2$ . Λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων το σημείο  $M$  ταλαντώνεται με πλάτος

α)  $A\sqrt{2}$

β)  $\frac{A\sqrt{2}}{2}$

γ)  $2A$

Δίνεται:  $\text{syn} \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το πλάτος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:  $|A'| = \left| 2A \text{syn} 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \right| \quad (1)$

Για τις αποστάσεις του σημείου  $M$  από τις πηγές ισχύει:

$$r_1 = vt_1 \quad \text{και} \quad r_2 = vt_2$$

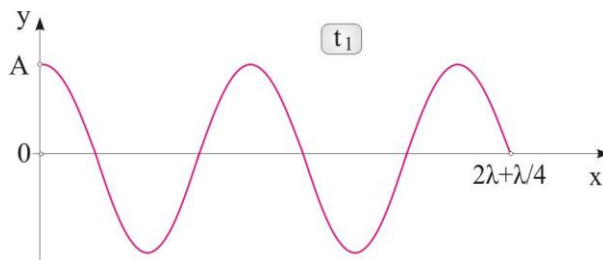
$$r_2 - r_1 = v \left( t_1 + \frac{3T}{4} \right) - vt_1 \Rightarrow r_2 - r_1 = v \frac{3T}{4} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{3\lambda}{4}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$|A'| = \left| 2A \text{syn} 2\pi \frac{\frac{3\lambda}{4}}{2\lambda} \right| = \left| 2A \text{syn} \frac{3\pi}{4} \right| = A\sqrt{2}$$

### Ερώτηση 17.

Κατά μήκος χορδής μεγάλου μήκους διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους  $A$  και μήκους κύματος  $\lambda$ . Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1$  είναι όπως στο σχήμα.



Το σημείο  $M$  που βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{5\lambda}{3}$  τη χρονική στιγμή  $t_1$  έχει απομάκρυνση

α)  $A$ .

β)  $A/3$ .

γ)  $-A/2$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνεται:  $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Το κύμα περιγράφεται από την εξίσωση  $y = A\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$  (1)

Τη χρονική στιγμή  $t_1$  το κύμα έχει προχωρήσει  $2\lambda + \frac{\lambda}{4}$ . Έχοντας υπόψη ότι σε μια

περίοδο το κύμα προχωρά κατά  $\lambda$ , προκύπτει ότι  $t_1 = 2T + \frac{T}{4}$ .

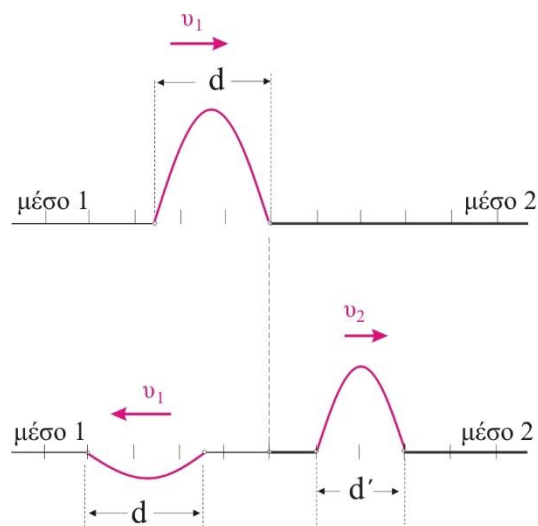
Με αντικατάσταση στη σχέση (1),  $x = \frac{5\lambda}{3}$  και  $t_1 = 2T + \frac{T}{4}$  έχουμε:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left( \frac{2T + \frac{T}{4}}{T} - \frac{\frac{5\lambda}{3}}{\lambda} \right) = A\eta\mu 2\pi \left( \frac{9}{4} - \frac{5}{3} \right) = A\eta\mu \left( \frac{7\pi}{6} \right) = A\eta\mu \left( -\frac{\pi}{6} \right) \text{ ή } y = -\frac{A}{2}$$

### Ερώτηση 18.

Δύο ελαστικές χορδές 1 και 2 είναι συγκολλημένες στο ένα άκρο τους. Ένας κυματοπαλμός, ημιτονοειδούς μορφής, οδεύει από τα αριστερά προς τα δεξιά στο μέσο 1 με ταχύτητα  $v_1$ .

Στο πάνω στιγμιότυπο φαίνεται ο κυματοπαλμός τη στιγμή που φτάνει στο μέσο 2, ενώ στο κάτω στιγμιότυπο φαίνονται ο ανακλώμενος κυματοπαλμός, καθώς και αυτός που διαδίδεται στο μέσο 2, με ταχύτητα  $v_2$ .



Από τη μελέτη των σχημάτων προκύπτει ότι οι ταχύτητες διάδοσης στο μέσο 1 και στο μέσο 2 συνδέονται με τη σχέση

α)  $v_1 > v_2$

β)  $v_1 = v_2$

γ)  $v_1 < v_2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν ένα κύμα αλλάζει μέσω διάδοσης η συχνότητα παραμένει σταθερή.

Από το σχήμα και τον ορισμό του μήκους κύματος, προκύπτει:  $d = \frac{\lambda_1}{2}$  και  $d' = \frac{\lambda_2}{2}$ .

Επίσης από το σχήμα προκύπτει:  $d > d'$  άρα και  $\lambda_1 > \lambda_2$  ή  $\lambda_1 f > \lambda_2 f$  ή  $v_1 > v_2$ .

### Ερώτηση 19.

Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  παράγουν κύματα ίδιου πλάτους στη επιφάνεια υγρού. Μικρό κομμάτι φελλού απέχει  $r_1 = 5\text{m}$  από την πηγή  $\Pi_1$  και  $r_2 = 4,5\text{m}$  από την  $\Pi_2$ . Το μέγιστο μήκος κύματος που μπορεί να παραχθεί από τις πηγές, προκειμένου να παραμένει ακίνητος ο φελλός είναι

α) 2m

β) 1m

γ) 0,5m

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

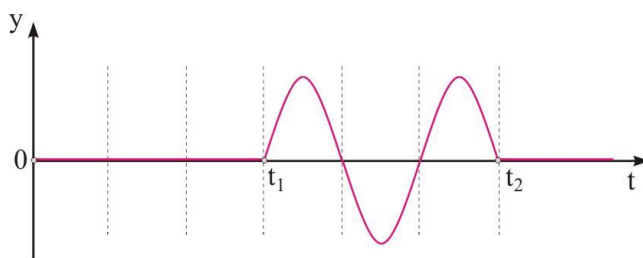
Αφού ο φελλός παραμένει ακίνητος ισχύει η σχέση  $r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2(r_1 - r_2)}{2k+1}$

Με βάση την παραπάνω σχέση το μέγιστο  $\lambda$  προκύπτει για το ελάχιστο  $k$ , δηλαδή για  $k=0$ . Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\lambda = \frac{2 \cdot (5\text{m} - 4,5\text{m})}{2 \cdot 0 + 1} \Rightarrow \lambda = 1\text{m}$$

### Ερώτηση 20.

Στην επιφάνεια ενός υγρού δύο σύγχρονες πηγές παράγουν κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας. Για ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού, η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης  $y$  σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$  είναι όπως στο διάγραμμα. Αν  $r_1$  και  $r_2$  είναι οι αποστάσεις του Μ από τις δύο πηγές, τότε



α)  $|r_2 - r_1| = 2,5\lambda$

β)  $|r_2 - r_1| = 1,5\lambda$

γ)  $|r_2 - r_1| = 5\lambda$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (β).

Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t_1$  και σταματά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t_2$ . Αυτό συμβαίνει γιατί τη χρονική στιγμή  $t_2$  έφτασε το δεύτερο κύμα και προκλήθηκε αποσβεστική συμβολή.

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει:  $t_2 - t_1 = \frac{3T}{2}$ .

$$r_2 - r_1 = v(t_2 - t_1) = v \cdot \frac{3T}{2} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{3T}{2} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{3\lambda}{2}$$

### Ερώτηση 21.

Σε μια χορδή μήκους  $L$  δημιουργείται στάσιμο κύμα, με δεσμούς στα δύο άκρα της και άλλους δύο ενδιάμεσα. Αν  $f$  είναι η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, τότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή είναι

α)  $v = \frac{2Lf}{3}$

β)  $v = \frac{Lf}{3}$

γ)  $v = \frac{3Lf}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

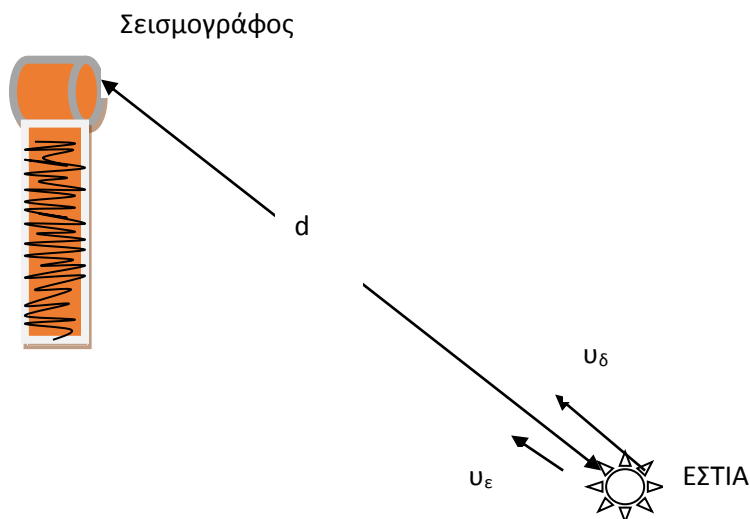
Στα δύο άκρα της χορδής δημιουργούνται δεσμοί, έτσι το μήκος της χορδής και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση:  $L = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3}$

Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$v = \lambda f = \frac{2L}{3} f \Rightarrow v = \frac{2L}{3} f$$

## Ερώτηση 22.

Οι σεισμολόγοι, προκειμένου να προσδιορίσουν την απόσταση της εστίας ενός σεισμού από ένα σειсмоγράφο, χρησιμοποιούν τη διαφορά χρόνου άφιξης με την οποία καταγράφονται από το σειсмоγράφο τα διαμήκη και εγκάρσια κύματα που παράγονται στην εστία του σεισμού. Αν  $\Delta t$  η χρονική διαφορά άφιξης των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων,  $v_\delta$ ,  $v_\epsilon$  οι ταχύτητες των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων αντίστοιχα, ( $v_\delta > v_\epsilon$ ), τότε η απόσταση της εστίας του σεισμού από τον σειсмоγράφο είναι



α)  $\frac{(v_\delta + v_\epsilon) \Delta t}{2}$

β)  $(v_\delta + v_\epsilon) \Delta t$

γ)  $\frac{v_\delta v_\epsilon \Delta t}{v_\delta - v_\epsilon}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Αν με  $t_\delta$  και  $t_\epsilon$  συμβολίσουμε τους χρόνους που απαιτούνται για να φτάσουν το εγκάρσιο και το διαμήκες κύμα από την εστία του σεισμού έως το σειсмоγράφο αντίστοιχα, ισχύει:  $t_\delta = \frac{d}{v_\delta}$  και  $t_\epsilon = \frac{d}{v_\epsilon}$ , όπου  $d$  η απόσταση εστίας σειсмоγράφου.

Επειδή  $v_\epsilon < v_\delta$  θα είναι  $t_\delta < t_\epsilon$ .

Άρα,  $\Delta t = t_\epsilon - t_\delta = \frac{d}{v_\epsilon} - \frac{d}{v_\delta}$  και από εδώ λύνοντας ως προς  $d$  βρίσκουμε:  $d = \frac{v_\delta v_\epsilon \Delta t}{v_\delta - v_\epsilon}$ .

### Ερώτηση 23.

Σε μια χορδή έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Ένα σημείο Μ της χορδής ταλαντώνεται με πλάτος Α και τη χρονική στιγμή  $t = 0$  βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{A}{2}$  κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας του. Η χρονική στιγμή που η επιτάχυνσή του γίνεται μηδέν για πρώτη φορά είναι

α)  $\frac{T}{3}$ .

β)  $\frac{T}{6}$ .

γ)  $\frac{T}{12}$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ και } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0).$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι:

$$x = \frac{A}{2} \text{ και } v < 0 \text{ άρα } \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0. \text{ Επειδή } 0 < \varphi_0 < 2\pi \text{ θα είναι}$$

$$\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}. \text{ Η επιτάχυνση μηδενίζεται για } 1^{\eta} \text{ φορά στην θέση } x = 0, \text{ άρα}$$

$$0 = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ ή } \kappa\pi = \omega t + \frac{5\pi}{6} \text{ ή } \omega t = \kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \text{ και για } \kappa = 1 \text{ έχουμε:}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{6} \text{ ή } t = \frac{T}{12}.$$

### Ερώτηση 24.

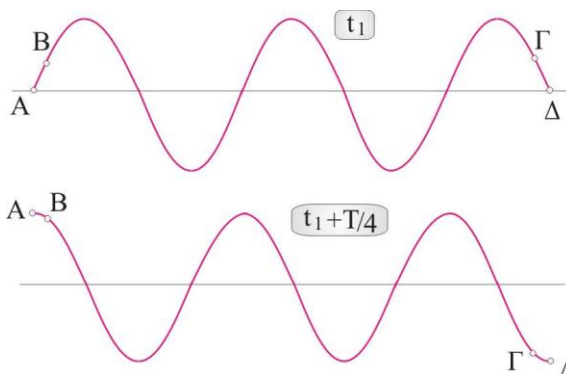
Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τα στιγμιότυπα μέρους μιας χορδής που ταλαντώνεται, τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_1 + \frac{T}{4}$ . Μελετώντας τα στιγμιότυπα αυτά και

έχοντας υπόψη ότι το σημείο της θέσης  $x = 0$  (δεν δείχνεται στο σχήμα) ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y = A\eta\mu\omega t$ , συμπεραίνουμε ότι

α) έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή.

β) παριστάνουν αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τ' αριστερά.

γ) παριστάνουν αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά.



Επιλέξτε τη σωστή πρόταση και δικαιολογείστε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή είναι η (β).

Δεν θα μπορούσε να είναι στάσιμο κύμα, γιατί βλέπουμε ότι τα σημεία που τη χρονική στιγμή  $t_1$  βρίσκονταν στις θέσεις ισορροπίας, τη χρονική στιγμή  $t_1 + \frac{T}{4}$  βρίσκονται στις μέγιστες απομακρύνσεις.

Για να αποφασίσουμε προς τα πού διαδίδεται το κύμα θα στηριχθούμε στην παρατήρηση ότι σε ένα τρέχον κύμα όλα τα σημεία του υλικού εκτελούν διαδοχικά την κίνηση του προηγούμενού τους.

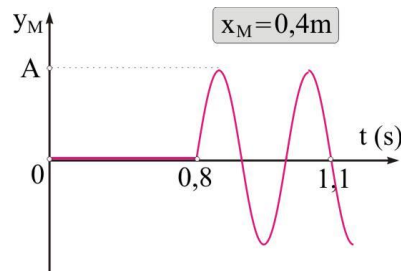
Αν το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, στο στιγμιότυπο της χρονικής στιγμής  $t_1$  τα προηγούμενα του σημείου Α βρίσκονται σε θετική απομάκρυνση και το σημείο Α μετά από χρονικό διάστημα  $T/4$  θα έπρεπε να βρεθεί στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

Αν το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, στο στιγμιότυπο της χρονικής στιγμής  $t_1$  τα προηγούμενα του σημείου Δ βρίσκονται σε θετική απομάκρυνση και το σημείο Δ μετά από χρονικό διάστημα  $T/4$  θα έπρεπε να βρεθεί στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, αλλά αυτό βρίσκεται στο  $-A$ .

Από τη συγκριτική μελέτη των δύο γραφημάτων εύκολα προκύπτει ότι το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά.

### Ερώτηση 25.

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται χωρίς απώλειες κατά μήκος του άξονα  $x'Ox$ . Το σημείο της θέσης  $x = 0$ , ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y = A\eta\mu\omega t$ . Στο διάγραμμα φαίνεται για ένα σημείο  $M$  του ελαστικού μέσου που απέχει  $x_M = 40\text{cm}$  από την πηγή η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο



Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

- α.  $0,1 \text{ m/s}$
- β.  $0,2 \text{ m/s}$
- γ.  $0,5 \text{ m/s}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

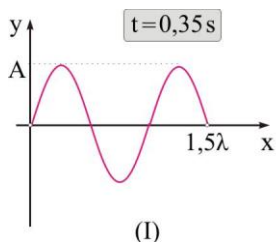
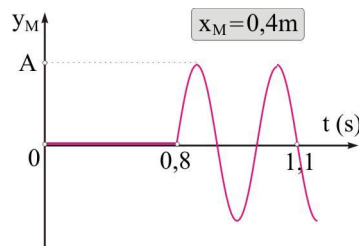
Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το κύμα σε χρονικό διάστημα  $\Delta t = 0,8\text{s}$  διανύει απόσταση  $\Delta x = 0,4\text{m}$ .

Παίρνοντας υπόψη ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι σταθερή έχουμε:

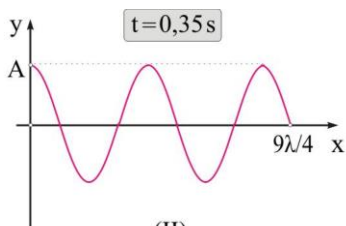
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,4\text{m}}{0,8\text{s}} \Rightarrow v = 0,5 \text{ m/s}$$

### Ερώτηση 26.

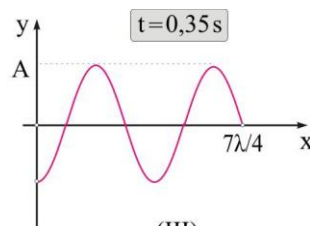
Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται χωρίς απώλειες κατά μήκος του άξονα  $x'Ox$ . Το σημείο της θέσης  $x=0$ , ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y=A\eta\mu\omega t$ . Στο διάγραμμα φαίνεται για ένα σημείο  $M$  του ελαστικού μέσου που απέχει  $x_M=40\text{cm}$  από την πηγή η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο. Το διάγραμμα της απομάκρυνσης όλων των σημείων του ελαστικού μέσου (στιγμιότυπο του κύματος) τη χρονική στιγμή  $t=0,35\text{s}$  είναι το



(I)



(II)



(III)

α. (I)

β. (II)

γ. (III)

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση η (γ).

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το χρονικό διάστημα  $0,8\text{s}$  έως  $1,1\text{s}$  αντιστοιχεί σε  $3T/2$ . Οπότε έχουμε  $0,3\text{s} = 3T/2$  ή  $T = 0,2\text{s}$ .

Η χρονική στιγμή  $t = 0,35\text{s} = 0,20\text{s} + 0,15\text{s}$  αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα  $7T/4$ . Παίρνοντας υπόψη ότι το κύμα σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου προχωρά κατά ένα μήκος κύματος  $\lambda$  εύκολα προκύπτει ότι σε χρονικό διάστημα  $7T/4$  προχωρά κατά  $\Delta x = 7\lambda/4$ .

Άρα σωστό είναι το διάγραμμα (III).

### Ερώτηση 27.

Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος  $\lambda$  κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x'Ox$ . Το σημείο της θέσης  $x = 0$ , ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση  $y = A\eta\mu\omega t$ . Η φάση ενός σημείου  $M$  του μέσου σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_M = \pi t - 4\pi \quad (SI)$$

Όταν το σημείο  $M$  αποκτήσει για τρίτη φορά τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια, η επιτάχυνση της πηγής ( $x=0$ ) θα είναι

- α. μηδέν
- β. θετική
- γ. αρνητική.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η φάση του σημείου  $M$  γράφεται:  $\varphi = \pi t - 4\pi \Rightarrow \varphi = 2\pi \left( \frac{t}{2} - 2 \right)$

Από τη σύγκριση με τη γενική εξίσωση της φάσης προκύπτει:

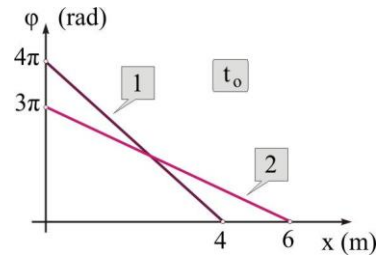
$$T = 2s \quad \text{και} \quad 2 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 2\lambda$$

Η πηγή και το σημείο  $M$  βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, αφού απέχουν μεταξύ τους ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος και θα έχουν κάθε στιγμή ίδιες απομακρύνσεις. Όταν το  $M$  αποκτά τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια για 3<sup>η</sup> φορά, βρίσκεται σε απομάκρυνση  $+A$ , επομένως και η πηγή βρίσκεται σε απομάκρυνση  $+A$ .

Παίρνοντας υπόψη ότι,  $a = -\omega^2 y$ , προκύπτει ότι το σημείο  $M$ , επομένως και η πηγή, έχει αρνητική επιτάχυνση.

### Ερώτηση 28.

Στο σχήμα φαίνονται σε κοινό σύστημα αξόνων τα διαγράμματα φάσης - απόστασης δύο αρμονικών κυμάτων 1 και 2 που διαδίδονται κατά μήκος δύο γραμμικών ελαστικών μέσων τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Τα κύματα ξεκίνησαν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  τη διάδοσή τους από τις πηγές τους χωρίς αρχική φάση.



Ο λόγος των μηκών κύματος των κυμάτων,  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ , είναι

α.  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$

β.  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{3}$

γ.  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{2}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Από τα διαγράμματα βλέπουμε ότι:

- τη στιγμή  $t_0$  τα δύο κύματα προχώρησαν μέχρι  $x_1 = 4\text{m}$  και  $x_2 = 6\text{m}$  αντίστοιχα.

Επομένως

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_1 \cdot t_0}{v_2 \cdot t_0} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\lambda_1 \cdot f_1}{\lambda_2 \cdot f_2} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

- τη χρονική στιγμή  $t_0$  οι φάσεις των πηγών είναι  $4\pi$  και  $3\pi$  αντίστοιχα. Επομένως:

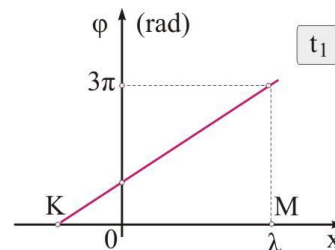
$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{2\pi f_1 t_0}{2\pi f_2 t_0} \Rightarrow \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{4}{3}.$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$\frac{2}{3} = \frac{\lambda_1 \cdot f_1}{\lambda_2 \cdot f_2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\lambda_1 \cdot 4}{\lambda_2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$$

### Ερώτηση 29.

Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται προς την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Τη χρονική στιγμή  $t=0$ , το σημείο  $x=0$  ξεκινά την ταλάντωσή του διερχόμενο από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Το διάγραμμα φάσης-απόστασης τη χρονική στιγμή  $t_1$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Κ βρίσκεται στη θέση



α.  $-\frac{\lambda}{2}$

β.  $-\frac{3\lambda}{2}$

γ.  $-3\lambda$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Τη χρονική στιγμή  $t_1$ :  $\varphi_K = 0$  και  $\varphi_M = 3\pi$ .

Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τον αρνητικό ημιάξονα η φάση ενός σημείου δίνεται από τη σχέση  $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ .

Με αντικατάσταση των τιμών για το σημείο Μ τη χρονική στιγμή  $t_1$  παίρνουμε:

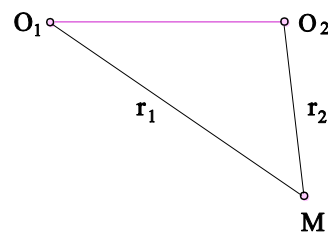
$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_M}{\lambda}\right) \Rightarrow 3\pi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών για το σημείο Κ τη χρονική στιγμή  $t_1$  παίρνουμε:

$$\varphi_K = 0 \Rightarrow 0 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow x_K = -\frac{\lambda}{2}$$

### Ερώτηση 30.

Οι πηγές  $O_1$  και  $O_2$  του σχήματος βρίσκονται σε συμφωνία φάσης και δημιουργούν στην ήρεμη επιφάνεια υγρού αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους  $A$ , που διαδίδονται με ταχύτητα μέτρου  $v=4 \text{ cm/s}$  παράγοντας φαινόμενα συμβολής. Το σημείο  $M$  απέχει  $r_1=51,5 \text{ cm}$  και  $r_2=49,5 \text{ cm}$  από τις πηγές αντίστοιχα. Για να βρίσκεται το σημείο  $M$  σε υπερβολή ενίσχυσης, θα πρέπει οι πηγές να εκπέμπουν τα κύματα με συχνότητες



α.  $f=1,3,5,7,\dots \text{ Hz}$

β.  $f=2,4,6,8,\dots \text{ Hz}$

γ.  $f=1,2,3,4,5,\dots \text{ Hz}$

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Για τη διαφορά των αποστάσεων του  $M$  από τις δύο πηγές ισχύει :  $|r_1 - r_2| = 2 \text{ cm}$

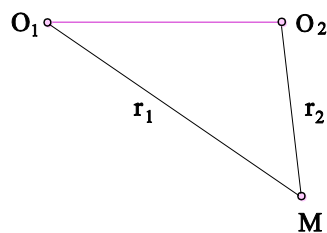
Για να έχουμε ενισχυτική συμβολή πρέπει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda \Rightarrow |r_1 - r_2| = N \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{Nv}{|r_1 - r_2|} = \frac{N \cdot 4 \text{ cm/s}}{2 \text{ cm}} \Rightarrow f = 2N \text{ Hz} \quad \text{με } N=1,2,3,\dots$$

άρα  $f = 2, 4, 6, \dots \text{ Hz}$ .

### Ερώτηση 31.

Οι πηγές  $O_1$  και  $O_2$  του σχήματος βρίσκονται σε συμφωνία φάσης και δημιουργούν στην ήρεμη επιφάνεια υγρού αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους  $A$ , που διαδίδονται με ταχύτητα μέτρου  $v=6 \text{ cm/s}$  παράγοντας φαινόμενα συμβολής. Το σημείο  $M$  απέχει  $r_1=31,5 \text{ cm}$  και  $r_2=34,5 \text{ cm}$  από τις πηγές αντίστοιχα. Για να βρίσκεται το σημείο  $M$  σε υπερβολή απόσβεσης, θα πρέπει οι πηγές να εκπέμπουν τα κύματα με συχνότητες



α.  $f=1,3,5,7,\dots \text{ Hz}$

β.  $f=2,4,6,8,\dots \text{ Hz}$

γ.  $f=1,2,3,4,5,\dots \text{ Hz}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση η (α).

Για τη διαφορά των αποστάσεων του  $M$  από τις δύο πηγές ισχύει :  $|r_1 - r_2| = 3 \text{ cm}$

Για να έχουμε αποσβεστική συμβολή πρέπει:

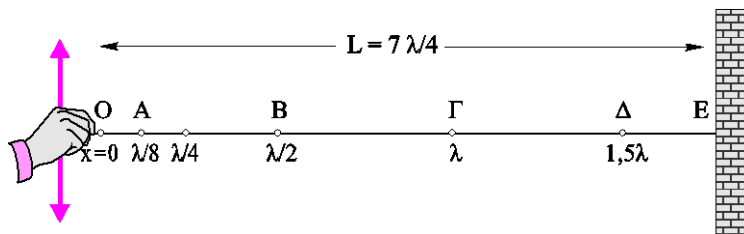
$$|r_1 - r_2| = (2N+1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow |r_1 - r_2| = (2N+1) \frac{v}{2f} \Rightarrow f = \frac{(2N+1)v}{2|r_1 - r_2|} = \frac{(2N+1) \cdot 6 \text{ cm/s}}{2 \cdot 3 \text{ cm}} \Rightarrow$$

$$f = (2N+1) \text{ Hz} \text{ με } N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Άρα } f = 1, 3, 5, 7, \dots \text{ Hz}$$

### Ερώτηση 32.

Σε ένα οριζόντιο σχοινί που έχει το ένα άκρο του ελεύθερο και το άλλο στερεωμένο ακλόνητα, δημιουργούμε στάσιμο κύμα στο οποίο στο ελεύθερο άκρο σχηματίζεται κοιλία. Το μήκος του σχοινιού είναι  $L = 7\lambda/4$  όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του στάσιμου. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  όλα τα σημεία του σχοινιού διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους.



Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Β και Γ είναι

α.  $\Delta\varphi_{BG} = 0 \text{ rad}$

β.  $\Delta\varphi_{BG} = \pi \text{ rad}$

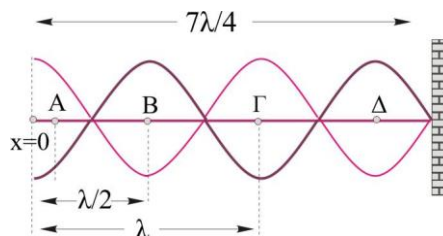
γ.  $\Delta\varphi_{BG} = 2\pi \text{ rad}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του τυχαίου σημείου σε ένα στάσιμο δίνεται από τη σχέση  $y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t$ , όπου  $x$  η οριζόντια απόσταση από το ελεύθερο άκρο που είναι κοιλία.



Το σημείο Β απέχει  $\lambda/2$  από την κοιλία ( $x=0$ ), επομένως

$$y_B = 2A \cdot \sin \frac{2\pi \lambda}{2\lambda} \cdot \eta\mu\omega t = 2A \cdot \sin \pi \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow y_B = -2A \eta\mu\omega t \Rightarrow y_B = 2A \eta\mu(\omega t + \pi)$$

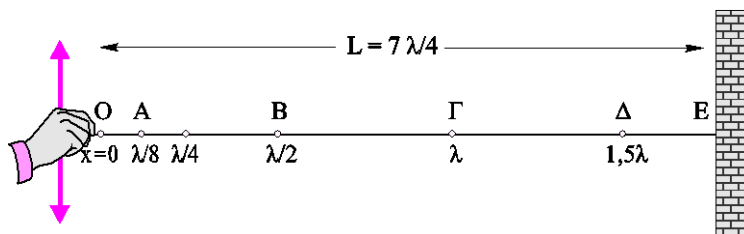
Το σημείο Γ απέχει  $\lambda$  από την κοιλία ( $x=0$ ), επομένως

$$y_G = 2A \cdot \sin \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t = 2A \sin 2\pi \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow y_G = 2A \eta\mu\omega t$$

Άρα τα σημεία Β και Γ έχουν διαφορά φάσης  $\pi$ .

### Ερώτηση 33.

Σε ένα οριζόντιο σχοινί που έχει το ένα άκρο του ελεύθερο και το άλλο στερεωμένο ακλόνητα, δημιουργούμε στάσιμο κύμα σχηματίζοντας στο ελεύθερο άκρο κοιλία. Το μήκος του σχοινιού είναι  $L = 7\lambda / 4$  όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του στάσιμου. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  όλα τα σημεία του σχοινιού διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους.



Ο λόγος των πλατών των ταχυτήτων των σημείων A και Γ είναι αντίστοιχα

α.  $\frac{v_{\max}^A}{v_{\max}^\Gamma} = \sqrt{2}$

β.  $\frac{v_{\max}^A}{v_{\max}^\Gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ.  $\frac{v_{\max}^A}{v_{\max}^\Gamma} = \sqrt{3}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

$$\frac{v_{\max A}}{v_{\max \Gamma}} = \frac{\omega \cdot A_A}{\omega \cdot A_\Gamma}, \quad (1)$$

Το πλάτος ταλάντωσης του τυχαίου σημείου σε ένα στάσιμο δίνεται από τη σχέση

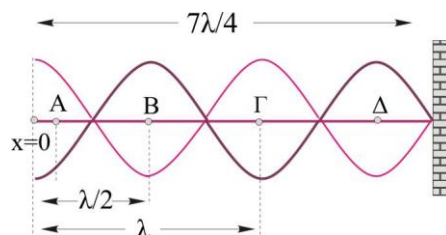
$$|A'| = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right|, \quad \text{όπου } x \text{ η οριζόντια}$$

απόσταση από μια κοιλία, εδώ από το ελεύθερο άκρο.

Το σημείο A απέχει οριζόντια  $\lambda/8$  από το σημείο  $x=0$  και έχει πλάτος

$$A_A = 2A \left| \sin \frac{2\pi \lambda}{8\lambda} \right| = A\sqrt{2}.$$

Το σημείο Γ απέχει οριζόντια  $\lambda$  από το σημείο  $x=0$  και έχει πλάτος  $2A$ .



Η σχέση (1) γίνεται: 
$$\frac{v_{\max A}}{v_{\max \Gamma}} = \frac{A_A}{A_\Gamma} = \frac{A\sqrt{2}}{2A} \Rightarrow \frac{v_{\max A}}{v_{\max \Gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

### Ερώτηση 34.

Τα άκρα μιας ελαστικής χορδής μήκους  $L=2,5\text{m}$  είναι δεμένα στα σταθερά σημεία Α και Β. Στη χορδή έχουμε δημιουργία στάσιμου κύματος από τρέχοντα κύματα που είχαν ταχύτητα διάδοσης  $12\text{m/s}$ .



Η συχνότητα με την οποία ένα σημείο της χορδής ταλαντώνεται μπορεί να είναι

- α. 5 Hz
- β. 4,4 Hz
- γ. 7,2 Hz

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Τα άκρα του σχοινιού είναι δεσμοί, άρα το μήκος του σχοινιού πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\lambda/2$ .

$$L = N \frac{\lambda}{2} = N \frac{v}{2f} \Rightarrow f = \frac{vN}{2L} = \frac{12\text{m/s} \cdot N}{2 \cdot 2,5\text{m}} \Rightarrow f = 2,4 N \text{ (SI)} \text{ με } N=1,2,3,4,\dots$$

Παρατηρούμε ότι για  $N=3$  παίρνουμε  $f=7,2\text{Hz}$

### Ερώτηση 35.

Κατά μήκος μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Το σημείο  $O$  ( $x=0$ ) τη χρονική στιγμή  $t=0$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Η φάση ενός σημείου  $M$  της χορδής δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_M = \pi t - 2\pi$$

Το σημείο  $M$

α. αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t_1=1s$ .

β. έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_2=4s$ .

γ. έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση, όταν η πηγή έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η φάση του σημείου  $M$  δίνεται από τη σχέση  $\varphi_M = \pi t - 2\pi = 2\pi \left( \frac{t}{2} - 1 \right)$

Συγκρίνοντας με τη γενική εξίσωση της φάσης  $\varphi = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ , προκύπτει  $T=2s$  και  $x=\lambda$ .

Το κύμα θα φτάσει στο  $M$  όταν:

$$\varphi_M = 0 \quad \text{ή} \quad \pi t - 2\pi = 0 \quad \text{ή} \quad t = 2s = T$$

Άρα, όταν το κύμα φτάσει στο  $M$ , η πηγή θα έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση.

Όταν η πηγή εκτελέσει 2 ταλαντώσεις θα έχει περάσει χρόνος 2 περιόδων δηλαδή  $t=4s$ .

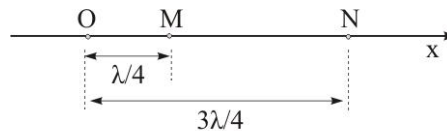
Τη στιγμή αυτή το σημείο  $M$  θα έχει φάση:

$$\varphi_M = \pi(4s) - 2\pi = 2\pi \text{ rad}$$

Άρα το σημείο  $M$  θα έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση.

### Ερώτηση 36.

Κατά μήκος μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Το σημείο  $O$  ( $x=0$ ) τη χρονική στιγμή  $t=0$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Δύο σημεία  $M, N$  της χορδής απέχουν  $x_M=\lambda/4$  και  $x_N=3\lambda/4$  από το σημείο  $O$ , αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή  $5T/4$  ο λόγος των ταχυτήτων



ταλάντωσης  $\frac{v_{(M)}}{v_{(N)}}$  των σημείων  $M$  και  $N$  είναι

α. -1.

β. 1.

γ. 2.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η απομάκρυνση ενός σημείου της χορδής δίνεται από τη σχέση :

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

και η ταχύτητα ταλάντωσής του από τη σχέση :

$$v = \omega A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Για το σημείο  $M$  έχουμε:

$$v_M = \omega A \cos 2\pi \left( \frac{5T}{4} - \frac{\lambda}{\lambda} \right) = \omega A \cos 2\pi \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow v_M = \omega A \cos 2\pi \Rightarrow v_M = \omega A$$

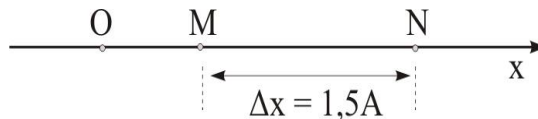
Για το σημείο  $N$  έχουμε:

$$v_N = \omega A \cos 2\pi \left( \frac{5T}{4} - \frac{3\lambda}{\lambda} \right) = \omega A \cos 2\pi \left( \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) \Rightarrow v_N = \omega A \cos \pi \Rightarrow v_N = -\omega A$$

Ο λόγος των ταχυτήτων ταλάντωσης των σημείων  $M$  και  $N$  είναι  $\frac{v_{(M)}}{v_{(N)}} = \frac{\omega A}{-\omega A} = -1$

### Ερώτηση 37.

Κατά μήκος μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x'Ox$  εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Τα σημεία  $M$  και  $N$  της χορδής έχουν διαφορά φάσης  $\pi$  rad και οι θέσεις ισορροπίας τους απέχουν μεταξύ τους  $1,5A$ , όπου  $A$  είναι το πλάτος του κύματος. Η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων  $M$  και  $N$  κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους είναι



α.  $1,5A$ .

β.  $2A$ .

γ.  $2,5A$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

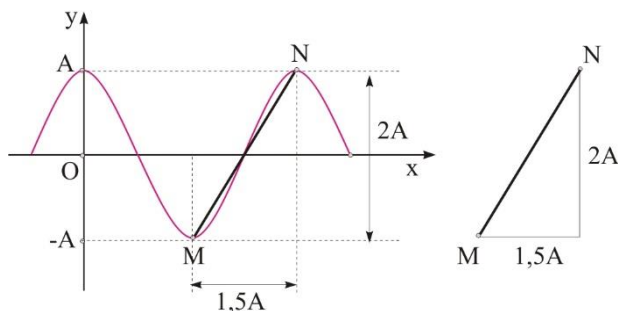
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Εφόσον τα  $M$  και  $N$  έχουν διαφορά φάσης  $\pi$ , η οριζόντια απόσταση μεταξύ τους είναι

$$\varphi_M - \varphi_N = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) - 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi_M - \varphi_N = 2\pi \frac{x_N - x_M}{\lambda} \Rightarrow \pi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$



Επομένως τα  $M, N$  είναι δύο διαδοχικά σημεία που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Τα σημεία αυτά έχουν μεταξύ τους τη μέγιστη απόσταση, όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους (σχήμα). Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$(MN) = \sqrt{(1,5A)^2 + (2A)^2} = \sqrt{6,25A^2} \quad \text{ή} \quad (MN) = 2,5A$$

### Ερώτηση 38.

Κατά μήκος μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  Όχ εγκάρσιο αρμονικό κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Διπλασιάζουμε τη συχνότητα της πηγής και δημιουργούμε νέο

κύμα στην ίδια χορδή, με τρόπο ώστε η ενέργεια ταλάντωσης κάθε στοιχειώδους μάζας της χορδής να είναι η ίδια με αυτή του αρχικού κύματος. Το νέο κύμα περιγράφεται από τη σχέση

α.  $y = \frac{A}{2} \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$

β.  $y = \frac{A}{2} \eta \mu 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$

γ.  $y = \frac{A}{4} \eta \mu 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

$$f' = 2f \quad \text{ή} \quad \frac{1}{T'} = 2 \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad T' = \frac{T}{2}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης, επομένως διπλασιάζοντας τη συχνότητα  $f$  του κύματος στην ίδια χορδή, η ταχύτητα διάδοσης παραμένει ίδια ενώ το νέο μήκος κύματος  $\lambda'$  γίνεται

$$\lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{2f} = \frac{\lambda}{2}$$

Η ενέργεια  $E$  κάθε στοιχειώδους μάζας  $\Delta m$  της χορδής είναι ίδια, επομένως μετά το διπλασιασμό της συχνότητας έχουμε:

$$E = E' \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega'^2 A'^2 \quad \text{ή} \quad (2\pi f)^2 A^2 = (2\pi \cdot 2f)^2 A'^2 \quad \text{ή}$$

$$f^2 A^2 = 4f^2 A'^2 \quad \text{ή} \quad A' = \frac{A}{2}$$

Το νέο κύμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$y = A' \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T'} - \frac{x}{\lambda'} \right) = \frac{A}{2} \eta \mu 2\pi \left( \frac{\frac{t}{T}}{2} - \frac{\frac{x}{\lambda}}{2} \right) \quad \text{ή} \quad y = \frac{A}{2} \eta \mu 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

### Ερώτηση 39.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές  $\Pi_1, \Pi_2$ , που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\omega t$ , δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού προκαλώντας φαινόμενα συμβολής. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στο υγρό είναι  $u=2\text{m/s}$ . Μετά τη συμβολή, μια στοιχειώδης μάζα  $\Delta m$  του υγρού που απέχει  $r_1=2,5\text{m}$  από την πηγή  $\Pi_1$  ταλαντώνεται με πλάτος  $2A$  και αποκτά τη μέγιστη κινητική της ενέργεια 8 φορές το δευτερόλεπτο. Η στοιχειώδης μάζα  $\Delta m$  απέχει από την πηγή  $\Pi_2$

α.  $3\text{m}$ .

β.  $2,65\text{m}$ .

γ.  $2,75\text{m}$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφόσον μετά τη συμβολή το πλάτος της στοιχειώδους μάζας είναι  $2A$ , αυτή βρίσκεται σε υπερβολή ενίσχυσης και ισχύει

$$r_1 - r_2 = N\lambda, \quad (1)$$

όπου  $r_1, r_2$  οι αποστάσεις της  $\Delta m$  από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα.

Η στοιχειώδης μάζα αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια 8 φορές το δευτερόλεπτο, επομένως διέρχεται από τη θέση ισορροπίας 8 φορές εκτελώντας 4 ταλαντώσεις το δευτερόλεπτο, άρα  $f=4\text{Hz}$ .

Το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούνται από τις πηγές είναι:

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\text{Hz}} = 0,5\text{m}$$

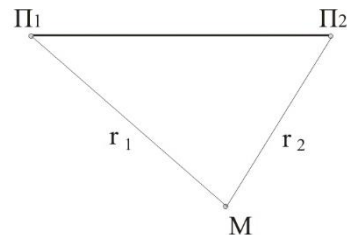
Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad 2,5\text{m} - r_2 = N \cdot 0,5\text{m} \quad \text{ή} \quad r_2 = 2,5\text{m} - N \cdot 0,5\text{m}$$

Για  $N=-1$  παίρνουμε  $r_2=3\text{m}$ .

### Ερώτηση 40.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\omega t$ , δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού προκαλώντας φαινόμενα συμβολής. Ένα υλικό σημείο,  $M$ , του υγρού που απέχει  $r_1=3\lambda/2$  και  $r_2=5\lambda/4$  αντίστοιχα από τις πηγές, τη χρονική στιγμή  $t_1=1,3T$  έχει ενέργεια ταλάντωσης  $E$ . Τη χρονική στιγμή  $t_2=2,3T$ , η ενέργεια ταλάντωσης του  $M$  είναι



α.  $E$ .

β.  $2E$ .

γ.  $4E$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το σημείο  $M$  απέχει από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αποστάσεις  $r_1$  και  $r_2$  αντίστοιχα και τα κύματα φτάνουν στο  $M$  τις χρονικές στιγμές

$$t_A = \frac{r_1}{v} = \frac{\frac{3\lambda}{2}}{v} = \frac{3}{2}T \Rightarrow t_A = 1,5T \text{ και } t_B = \frac{r_2}{v} = \frac{\frac{5\lambda}{4}}{v} = \frac{5}{4}T \Rightarrow t_B = 1,25T$$

Επειδή  $1,5T > 1,3T > 1,25T$ , τη στιγμή  $1,3T$  έχει φτάσει στο σημείο  $M$  μόνο το κύμα από την πηγή  $\Pi_2$  και η ενέργεια ταλάντωσης του  $M$  δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}DA^2$$

Τη χρονική στιγμή  $2,3T$ , στο σημείο  $M$  έχει γίνει συμβολή και αυτό ταλαντώνεται με πλάτος απομάκρυνσης:

$$A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi \left( \frac{3\lambda}{2} - \frac{5\lambda}{4} \right)}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| \text{ ή } A' = A\sqrt{2}$$

Η ενέργεια ταλάντωσης του  $M$  δίνεται από τη σχέση:

$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}D(A\sqrt{2})^2 \text{ ή } E' = 2E.$$

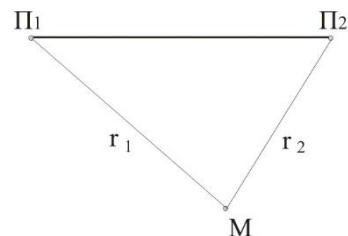
### Ερώτηση 41.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\omega t$ , δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού προκαλώντας φαινόμενα συμβολής. Σε ένα υλικό σημείο  $M$  του υγρού που απέχει  $r_1$  και  $r_2$  από τις πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  αντίστοιχα, τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά  $T/6$ . Μετά τη συμβολή το πλάτος ταλάντωσης του σημείου  $M$  είναι  $A'$  και είναι ίσο με

α.  $A' = A\sqrt{3}$

β.  $A' = \frac{A\sqrt{3}}{2}$ .

γ.  $A' = A\sqrt{2}$



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Στο σημείο  $M$  του υγρού που απέχει  $r_1$  και  $r_2$  από τις πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  αντίστοιχα, τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά  $T/6$ , επομένως

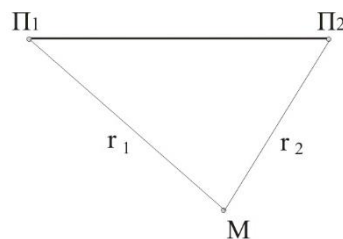
$$t_1 - t_2 = \frac{T}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{r_1}{v} - \frac{r_2}{v} = \frac{\lambda}{6v} \quad \text{ή} \quad r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{6}$$

Μετά τη συμβολή, το πλάτος ταλάντωσης του σημείου  $M$  είναι  $A'$  που είναι ίσο με:

$$A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi \frac{\lambda}{6}}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| \quad \text{ή} \quad A' = A\sqrt{3}$$

### Ερώτηση 42.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\omega t$ , δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού προκαλώντας φαινόμενα συμβολής. Σε ένα σημείο  $M$  του υγρού που απέχει  $r_1$  και  $r_2$  από τις πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  αντίστοιχα, τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά  $T/4$  και μετά τη συμβολή το πλάτος ταλάντωσης του σημείου  $M$  είναι  $A'$ .



Τριπλασιάζουμε τη συχνότητα των πηγών και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Μετά τη συμβολή των κυμάτων στο  $M$ , το πλάτος ταλάντωσης του είναι  $A''$ . Ο λόγος των πλάτων

$\frac{A'}{A''}$  πριν και μετά το τριπλασιασμό της συχνότητας των πηγών είναι

α. 1.

β.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

γ. 2.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Για το σημείο  $M$  έχουμε:

$$t_1 - t_2 = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{r_1}{v} - \frac{r_2}{v} = \frac{\lambda}{4v} \quad \text{ή} \quad r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{4}$$

Μετά τη συμβολή, το πλάτος ταλάντωσης του σημείου  $M$  είναι  $A'$ , που είναι ίσο με:

$$A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| \quad \text{ή} \quad A' = A\sqrt{2}$$

Αν τριπλασιάσουμε τη συχνότητα των πηγών, επειδή η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στο υγρό παραμένει σταθερή, το νέο μήκος κύματος  $\lambda'$  γίνεται:

$$\lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{3f} \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{3}$$

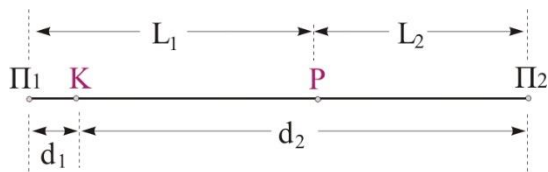
Μετά τη συμβολή, το νέο πλάτος ταλάντωσης του σημείου  $M$  είναι  $A''$ , που είναι ίσο με:

$$A'' = \left| 2A \sin \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda'} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi \frac{\lambda}{4}}{\frac{\lambda}{3}} \right| = 2A \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| \quad \text{ή} \quad A'' = A\sqrt{2}$$

Άρα, ο λόγος των πλατών  $\frac{A'}{A''}$  πριν και μετά το τριπλασιασμό της συχνότητας των πηγών είναι 1.

### Ερώτηση 43.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\omega t$ , δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού προκαλώντας φαινόμενα συμβολής. Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι  $\lambda=2\text{m}$ . Για το σημείο P που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές και απέχει  $L_1$  και  $L_2$  αντίστοιχα από αυτές, ισχύει  $L_1-L_2=2\text{m}$ . Για το σημείο K που επίσης βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές και απέχει  $d_1$  και  $d_2$  αντίστοιχα από αυτές, ισχύει  $d_2-d_1=8\text{m}$ . Ο αριθμός των υπερβολών ενίσχυσης που βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία P και K είναι



α. 4.

β. 5.

γ. 7.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Τα σημεία P και K είναι σημεία ενίσχυσης γιατί ικανοποιούν τη σχέση  $r_1-r_2=N\lambda$ .

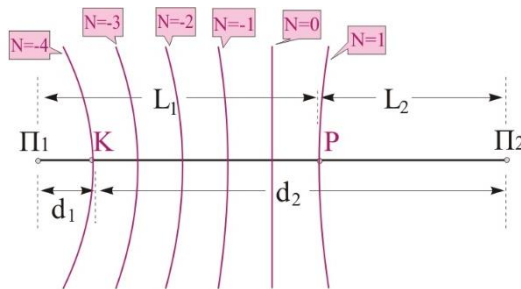
Για το P έχουμε:

$$L_1 - L_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad 2\text{m} = N \cdot 2\text{m} \quad \text{ή} \quad N = 1$$

Για το K έχουμε:

$$d_1 - d_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad -8\text{m} = N \cdot 2\text{m} \quad \text{ή} \quad N = -4$$

Οι υπερβολές ενίσχυσης είναι αυτές που αντιστοιχούν στα  $N$ :  $-4$ ,  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$  και  $1$ .

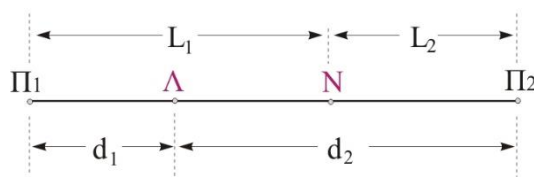


Επομένως ανάμεσα στα K και P υπάρχουν οι υπερβολές που αντιστοιχούν στα  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$  και  $0$ .

(4 υπερβολές ενίσχυσης).

#### Ερώτηση 44.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\omega t$ , δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού προκαλώντας φαινόμενα συμβολής. Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι  $\lambda=2\text{m}$ . Για το σημείο N που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές και απέχει  $L_1$  και  $L_2$  αντίστοιχα από αυτές, ισχύει  $L_1-L_2=4\text{m}$ . Για το σημείο Λ που επίσης βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές και απέχει  $d_1$  και  $d_2$  αντίστοιχα από αυτές, ισχύει  $d_2-d_1=6\text{m}$ . Ο αριθμός των υπερβολών απόσβεσης που βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία Λ και N είναι



α. 4.

β. 5.

γ. 6.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

#### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

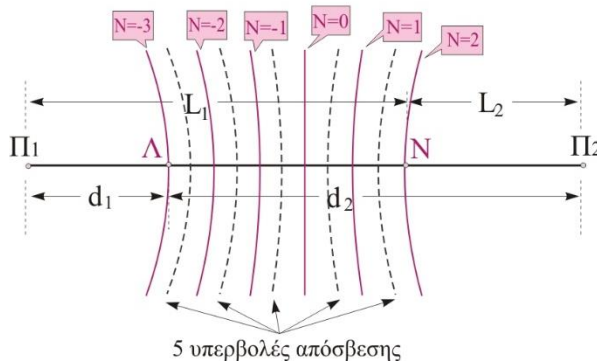
Τα σημεία Λ και N είναι σημεία ενίσχυσης γιατί ικανοποιούν τη σχέση  $r_1-r_2=N\lambda$ .

Για το N έχουμε:

$$L_1 - L_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad 4\text{m} = N \cdot 2\text{m} \quad \text{ή} \quad N = 2$$

Για το Λ έχουμε:

$$d_1 - d_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad -6\text{m} = N \cdot 2\text{m} \quad \text{ή} \quad N = -3$$

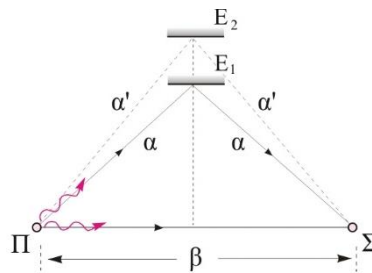


Οι υπερβολές ενίσχυσης από το Λ έως το N είναι 6 και αντιστοιχούν στα N: -3, -2, -1, 0, 1 και 2.

Μεταξύ δύο διαδοχικών υπερβολών ενίσχυσης υπάρχει μια υπερβολή απόσβεσης. Επομένως ανάμεσα στα Λ και N υπάρχουν 5 υπερβολές απόσβεσης (δες σχήμα).

### Ερώτηση 45.

Στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούμε από την πηγή Π αρμονικά κύματα μήκους κύματος  $\lambda$ . Στο σημείο Σ της επιφάνειας και σε απόσταση β από την πηγή, τα κύματα μπορούν να φτάσουν είτε απευθείας (ακολουθώντας τη διαδρομή ΠΣ), είτε αφού ανακλαστούν στον ανακλαστήρα Ε που βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΠΣ. Όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στη θέση  $E_1$ , απέχει από τις πηγές α και στο σημείο Σ έχουμε απόσβεση. Μετακινώντας τον ανακλαστήρα μέχρι τη θέση  $E_2$  που απέχει α' από τις πηγές, παρατηρούμε ότι στο Σ έχουμε για πρώτη φορά ενισχυτική συμβολή. Η διαφορά των αποστάσεων α'-α είναι



α.  $\lambda/4$ .

β.  $\lambda/2$ .

γ.  $\lambda$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν ο ανακλαστήρας είναι στη θέση  $E_1$  έχουμε απόσβεση. Για τη διαφορά των αποστάσεων ισχύει

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad 2\alpha - \beta = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

Όταν ο ανακλαστήρας είναι στη θέση  $E_2$  έχουμε ενίσχυση. Για τη διαφορά των αποστάσεων ισχύει

$$r'_1 - r_2 = N'\lambda \quad \text{ή} \quad 2\alpha' - \beta = N'\lambda, \quad (2)$$

Γιατί  $N'\lambda$  και όχι  $N\lambda$ ; Προσέξτε τα πρώτα μέλη στις σχέσεις (1) και (2). Επειδή  $\alpha' > \alpha$  ισχύει και  $2\alpha' - \beta > 2\alpha - \beta$ .

Επομένως το δεύτερο μέλος της σχέσης (2) πρέπει να είναι μεγαλύτερο της ποσότητας

$(2N+1)\frac{\lambda}{2}$  και ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\lambda$ . Επειδή στην εκφώνηση μας λέει: μετά την απόσβεση έχουμε για πρώτη φορά ενισχυτική συμβολή, το αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας  $(2N+1)\frac{\lambda}{2}$  είναι η ποσότητα  $(N+1)\lambda$ , άρα  $N' = N+1$  και η σχέση (2) γράφεται:

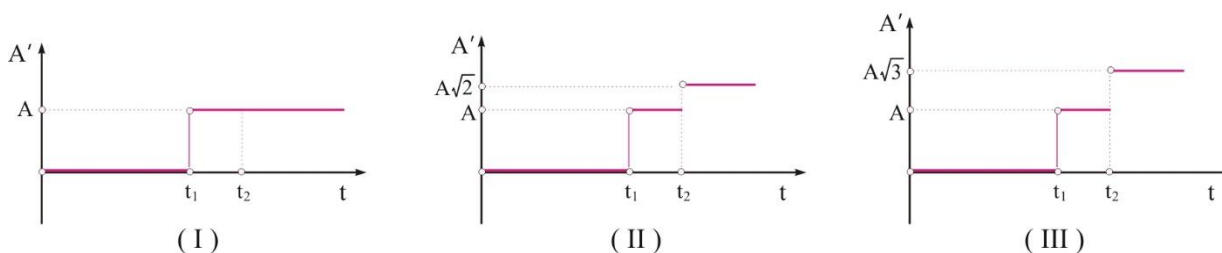
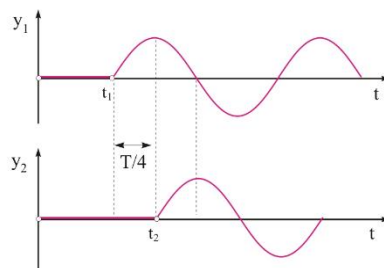
$$2\alpha' - \beta = (N+1)\lambda, \quad (3)$$

Αφαιρώντας την (1) από τη (3) έχουμε

$$2\alpha' - \beta - 2\alpha + \beta = (N+1)\lambda - (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad 2(\alpha' - \alpha) = \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad (\alpha' - \alpha) = \frac{\lambda}{4}$$

### Ερώτηση 46.

Δύο σύγχρονες πηγές δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους  $A$  και μήκους κύματος  $\lambda$ , δίνοντας φαινόμενα συμβολής. Ένα κομμάτι φελλού επιπλέει στο σημείο  $M$  που απέχει  $r_1$  και  $r_2$  από τις πηγές. Στο σχήμα φαίνεται η απομάκρυνση του φελλού σε σχέση με το χρόνο λόγω του κάθε κύματος ξεχωριστά. Το διάγραμμα πλάτους - χρόνου του φελλού είναι το



α. (I).

β. (II).

γ. (III).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από τη στιγμή  $t_1$  μέχρι τη στιγμή  $t_2$  ο φελλός ταλαντώνεται λόγω της πηγής  $\Pi_1$  με πλάτος  $A$ . Από τα διαγράμματα απομάκρυνσης του φελλού σε σχέση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η συμβολή ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t_2$ . Τα δύο κύματα φθάνουν στον φελλό με χρονική διαφορά  $T/4$ . Επομένως

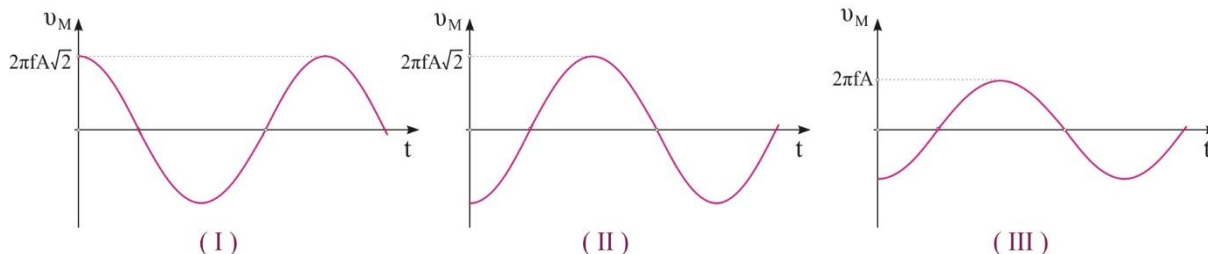
$$t_2 - t_1 = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{r_2 - r_1}{v} = \frac{\lambda}{4v} \quad \text{ή} \quad r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{4}$$

Μετά τη συμβολή, το πλάτος ταλάντωσης του φελλού είναι ίσο με

$$A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| \quad \text{ή} \quad A' = A\sqrt{2}$$

### Ερώτηση 47.

Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα  $x'x$  έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα συχνότητας  $f$ . Το πλάτος ταλάντωσης των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο είναι  $A$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  όλα τα σημεία της χορδής διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους και το σημείο της θέσης  $x=0$ , που είναι κοιλία, έχει θετική ταχύτητα. Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για το σημείο  $M$  που βρίσκεται στη θέση  $x_M=3\lambda/8$  είναι το



α. (I).

β. (II).

γ. (III).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το σημείο  $M$  απέχει  $3\lambda/8$  από την πρώτη κοιλία ( $x=0$ ) και η απομάκρυνση του σημείου αυτού δίνεται από τη σχέση

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu 2\pi f t = 2A \sin \frac{2\pi \frac{3\lambda}{8}}{\lambda} \eta \mu 2\pi f t \quad \text{ή}$$

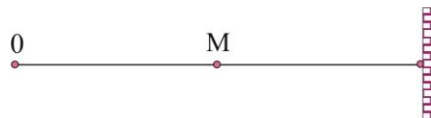
$$y = 2A \sin \frac{3\pi}{4} \eta \mu 2\pi f t \quad \text{ή} \quad y = -A\sqrt{2} \eta \mu 2\pi f t \quad \text{ή} \quad y = A\sqrt{2} \eta \mu (2\pi f t + \pi)$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$v = \omega A \sqrt{2} \cdot \sigma \upsilon \nu (2\pi f t + \pi) \quad \text{ή} \quad v = -\omega A \sqrt{2} \cdot \sigma \upsilon \nu 2\pi f t$$

### Ερώτηση 48.

Σε μια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα  $x$  έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το δεξιό άκρο της χορδής είναι ακλόνητα δεμένο, ενώ στο αριστερό άκρο της χορδής (σημείο  $O$ ) που είναι ελεύθερο δημιουργείται κοιλία. Στο σημείο  $M$  της χορδής βρίσκεται ο τρίτος δεσμός του στάσιμου, μετρώντας από το  $O$ .



Μεταβάλλουμε τη συχνότητα του στάσιμου ώστε το σημείο  $M$  να είναι ο πέμπτος δεσμός από το  $O$ , το οποίο  $O$  εξακολουθεί να είναι κοιλία. Το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας του στάσιμου είναι

α. 40%.

β. 60%.

γ. 80%.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Οι θέσεις των δεσμών από την πρώτη κοιλία στο στάσιμο υπολογίζονται από τη σχέση

$$d = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (1)$$

Η θέση του 3<sup>ου</sup> δεσμού υπολογίζεται από τη σχέση (1) για  $\kappa=2$ .

$$d = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} = (2(2) + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad d = 5 \frac{\lambda}{4}, \quad (2)$$

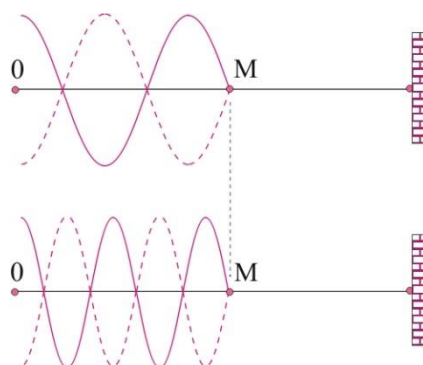
Αν η συχνότητα του κύματος μεταβληθεί σε  $f'$  τότε το μήκος κύματος θα μεταβληθεί σε  $\lambda'$ .

Η θέση του 5<sup>ου</sup> δεσμού υπολογίζεται από τη σχέση (1) για  $\kappa=4$ .

$$d = (2\kappa' + 1) \frac{\lambda'}{4} = (2(4) + 1) \frac{\lambda'}{4} \quad \text{ή} \quad d = 9 \frac{\lambda'}{4}, \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (2), (3) παίρνουμε

$$5 \frac{\lambda}{4} = 9 \frac{\lambda'}{4} \quad \text{ή} \quad 5 \frac{v}{4f} = 9 \frac{v}{4f'} \quad \text{ή} \quad f' = \frac{9}{5} f$$



Το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας του στάσιμου είναι :

$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} 100\% = \frac{\frac{9}{5}f - f}{f} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi\% = 80\%$$

## ΘΕΜΑ Γ

### Άσκηση 1.

Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής μεγάλου μήκους που το ένα άκρο της είναι ακλόνητα στερεωμένο, διαδίδονται δύο κύματα, των οποίων οι εξισώσεις είναι αντίστοιχα:  $y_1 = 10\eta\mu 2\pi(5t - x)$  και  $y_2 = 10\eta\mu 2\pi(5t + x)$ , όπου  $y$  και  $x$  είναι μετρημένα σε cm και το  $t$  σε s. Στη θέση  $x = 0$ , που είναι το “ελεύθερο” άκρο της χορδής δημιουργείται κοιλία.

α) Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη χορδή.

β) Να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα δημιουργηθεί από τη συμβολή των δύο αυτών κυμάτων και το πλάτος ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου της χορδής, συναρτήσει της απόστασής του από το “ελεύθερο” άκρο της.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης - χρόνου, για τα σημεία A, B και Γ, τα οποία απέχουν από το “ελεύθερο” άκρο αντίστοιχα,  $x_A = \frac{\lambda}{4}$ ,  $x_B = \frac{\lambda}{2}$  και  $x_\Gamma = \lambda$ , αφού δημιουργηθεί το στάσιμο.

δ) Να βρείτε τη σχέση που δίνει τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου της χορδής. Μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των υλικών σημείων της χορδής;

ε) Ποιά είναι η απόσταση από το “ελεύθερο” άκρο της χορδής των σημείων που παραμένουν ακίνητα και των σημείων που πάλλονται με μέγιστο πλάτος;

### Λύση

α) Η γενική εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι  $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ . Συγκρίνοντάς την με μία από τις δύο εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων, έστω την εξίσωση  $y_1 = 10\eta\mu 2\pi(5t - x)$ , προκύπτει:

$$5t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{5}s \text{ και } \frac{x}{\lambda} = x \Rightarrow \lambda = 1cm$$

Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1cm}{\frac{1}{5}s} \Rightarrow v = 5 \frac{cm}{s}$$

β) Η γενική εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Με αντικατάσταση των τιμών των  $A$ ,  $\lambda$  και  $T$  προκύπτει:  $y = 20 \sin(2\pi x) \cdot \eta\mu(10\pi t)$ , όπου  $y$  και  $x$  είναι μετρημένα σε cm και το  $t$  σε s. Άρα το πλάτος ταλάντωσης συναρτήσει της απόστασης είναι:

$$A' = 20 |\sin 2\pi x| (\text{cm})$$

γ) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του στάσιμου τις τιμές του  $x$  των τριών σημείων.

Για το υλικό σημείο A:

$$y_A = 20 \cdot \sin\left(2\pi \frac{x_A}{\lambda}\right) \cdot (10\pi t) (\text{cm}, s) \Rightarrow y_A = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (10\pi t) (\text{cm}, s) \Rightarrow$$

$$y_A = 20 \cdot 0 \cdot (10\pi t) (\text{cm}, s) \Rightarrow y_A = 0 \text{ cm}$$

Το σημείο A παραμένει ακίνητο, άρα είναι δεσμός.

Για το υλικό σημείο B:

$$y_B = 20 \cdot \sin\left(2\pi \frac{x_B}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu(10\pi t) (\text{cm}, s) = 20 \cdot \sin(\pi) \cdot \eta\mu(10\pi t) (\text{cm}, s), \text{ δηλαδή}$$

$y_B = -20 \cdot \eta\mu 10\pi t (\text{cm}, s)$ . Άρα το υλικό σημείο B πάλλεται με μέγιστο πλάτος, επομένως είναι κοιλία.

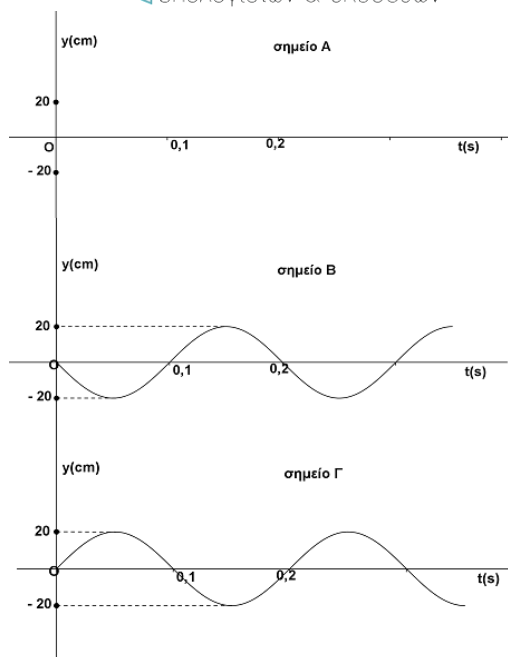
Για το υλικό σημείο Γ:

$$y_\Gamma = 20 \cdot \sin\left(2\pi \frac{x_\Gamma}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu(10\pi t) (\text{cm}, s) \Rightarrow y_\Gamma = 20 \cdot \sin(2\pi) \cdot \eta\mu(10\pi t) (\text{cm}, s) \quad \text{δηλαδή}$$

$$y_\Gamma = 20 \cdot \eta\mu 10\pi t (\text{cm}, s).$$

Άρα και το υλικό σημείο Γ πάλλεται με μέγιστο πλάτος, επομένως είναι κοιλία.

Σχόλιο: Το αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση ταλάντωσης του σημείου B σημαίνει ότι το B βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του όταν το σημείο Γ βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση. Λέμε ότι τα δύο σημεία ταλαντώνονται με διαφορά φάσης  $\Delta\phi = \pi$ . Οι γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης χρόνου φαίνονται στα διαγράμματα που ακολουθούν.



δ) Το τυχαίο υλικό σημείο της χορδής ταλαντώνεται με βάση την εξίσωση

$$y = A' \eta \mu(10\pi t) \text{ (cm, s)}, \text{ όπου } A' = 20 \sigma \upsilon \nu(2\pi x) \text{ (cm)}.$$

Η μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται κάθε υλικό σημείο θα είναι:

$$v_{\max} = \omega |A'| = 200\pi \cdot |\sigma \upsilon \nu(2\pi x)| \text{ (cm/s)}$$

Επειδή  $0 \leq |\sigma \upsilon \nu(2\pi x)| \leq 1$ , το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των υλικών σημείων κυμαίνεται μεταξύ της ελάχιστης τιμής  $v = 0$  και της μέγιστης  $v_{\max} = 200\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ .

ε) Τα σημεία που παραμένουν ακίνητα απέχουν από το ελεύθερο άκρο της χορδής,

$$x = \frac{(2K+1)\lambda}{4} = \frac{(2K+1)}{4} \text{ cm}, \text{ όπου } K = 0, 1, 2, 3$$

Για τα σημεία που πάλλονται με μέγιστο πλάτος ισχύει:  $x = \frac{K\lambda}{2} = \left(\frac{K}{2}\right) \text{ cm}$ , όπου

$K = 0, 1, 2, 3, \dots$

## Άσκηση 2.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  διαδίδεται αρμονικό κύμα με εξίσωση:  $y = 0,1 \cdot \eta\mu(4\pi t - \frac{\pi x}{2})$  (S.I.). Κάποια χρονική στιγμή  $t$  οι φάσεις δυο σημείων (M) και (N) του μέσου, τα οποία βρίσκονται δεξιά της πηγής (O), είναι  $\varphi_M = \frac{10\pi}{3} \text{ rad}$  και  $\varphi_N = \frac{17\pi}{6} \text{ rad}$  αντίστοιχα.

α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του κύματος.

β) Να βρείτε ποιο από τα δυο σημεία (M), (N) είναι πιο κοντά στην πηγή (O), καθώς και την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t = 1\text{s}$ .

δ) Να βρείτε την απομάκρυνση του σημείου (N) από τη θέση ισορροπίας του, κάθε φορά που το σημείο (M) αποκτά τη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

## Λύση

α) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα βρεθεί από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής  $v = \lambda f$ .

Συγκρίνοντας την εξίσωση  $y = 0,1 \eta\mu(4\pi t - \frac{\pi x}{2})$  με τη γενική εξίσωση των κυμάτων,

$y = A \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$  έχουμε ότι:

$$4\pi t = \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow T = 0,5\text{s} \Rightarrow f = 2\text{Hz}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4\text{m}$$

Συνεπώς  $v = \lambda f = 8\text{m/s}$

β) Όπως φαίνεται από τη σχέση που δίνει τη φάση του κύματος  $\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ , όσο πιο μακριά είναι ένα σημείο από την πηγή τόσο μικρότερη είναι η φάση του.

Η φάση του σημείου M,  $\left(\varphi_M = \frac{10\pi}{3} \text{ rad} = \frac{20\pi}{6} \text{ rad}\right)$ , είναι μεγαλύτερη από τη φάση του σημείου N,  $\left(\varphi_N = \frac{17\pi}{6} \text{ rad}\right)$ . Συνεπώς πιο κοντά στην πηγή είναι το σημείο M.

Ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ των σημείων Μ και Ν γίνεται με αφαίρεση των δύο φάσεων.

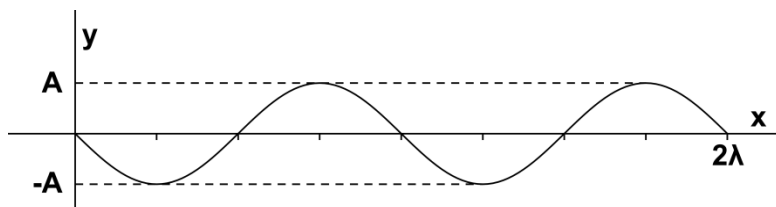
$$\varphi_M - \varphi_N = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) - 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_M - \varphi_N = 2\pi \frac{(x_N - x_M)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{20\pi}{6} - \frac{17\pi}{6} = 2\pi \frac{(x_N - x_M)}{\lambda} \Rightarrow \frac{3\pi}{6} = 2\pi \frac{(x_N - x_M)}{4\text{m}} \Rightarrow (x_N - x_M) = 1\text{m}$$

γ) Υπολογίζουμε σε πόση απόσταση θα έχει διαδοθεί το κύμα σε χρονικό διάστημα 1s. Σε χρόνο  $t = 1\text{s} = 2T$ , το κύμα θα έχει διαδοθεί απόσταση ίση με δύο μήκη κύματος ( $2\lambda$ ).

Βρίσκουμε την κίνηση χαρακτηριστικών υλικών σημείων.

Τα υλικά σημεία στις θέσεις  $x = 0$ ,  $x = \lambda$  και  $x = 2\lambda$ , θα βρίσκονται σε απομάκρυνση  $y = 0$  και είναι έτοιμα να κινηθούν κατά τη θετική φορά.



δ) Επειδή τα σημεία Μ, Ν, απέχουν μεταξύ τους  $1\text{m} = \frac{\lambda}{4}$ , παρουσιάζουν διαφορά φάσης

$\frac{\pi}{2}$ , με το σημείο Μ να προηγείται. Έτσι, όταν το Μ είναι στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, τότε το Ν περνά από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

### Άσκηση 3.

Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής μήκους  $L = 16,25\text{cm}$  διαδίδεται αρμονικό κύμα της μορφής:  $y = 8\eta\mu(10\pi t - \frac{2\pi x}{5})$  όπου  $x, y$  σε  $\text{cm}$  και  $t$  σε  $\text{s}$ . Το ένα άκρο της χορδής είναι στερεωμένο ακλόνητα, με αποτέλεσμα το κύμα να ανακλαστεί και να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το άλλο άκρο της χορδής είναι ελεύθερο, δημιουργείται σε αυτό κοιλία και θεωρούμε ότι βρίσκεται στη θέση  $x = 0$ . Η κοιλία της θέσης  $x = 0$  εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση.

α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του αρμονικού κύματος.

β) Να βρείτε τον αριθμό των κοιλιών που δημιουργούνται.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για την κοιλία  $K$  που απέχει  $\frac{\lambda}{2}$  από το σημείο  $x = 0$ .

δ) Αν ένα σημείο  $M$  του θετικού ημιάξονα ταλαντώνεται με πλάτος  $A_0 = 8\sqrt{3}\text{cm}$ , να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου αυτού από τον πλησιέστερο δεσμό.

### Λύση

α) Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα θα εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

Γράφουμε τη δοθείσα εξίσωση σε μορφή αντίστοιχη της γενικής εξίσωσης του αρμονικού κύματος  $y = A\eta\mu 2\pi(f \cdot t - \frac{x}{\lambda})$

$$\text{Έχουμε } y = 8\eta\mu(10\pi t - \frac{2\pi x}{5}) \Rightarrow y = 8\eta\mu 2\pi(5t - \frac{x}{5}) \text{ (cm, s)}$$

Από τη σύγκριση των δύο εξισώσεων παίρνουμε:

$$2\pi f = 10\pi, \text{ συνεπώς } f = 5\text{Hz} \text{ και } \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ συνεπώς } \lambda = 5\text{cm}$$

$$\text{Άρα } v = \lambda f = 25 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

β) Το σημείο ανάκλασης είναι ακλόνητο, άρα σε αυτό δημιουργείται δεσμός. Στο ελεύθερο άκρο δημιουργείται κοιλία. Επειδή σε ένα στάσιμο, ο δεσμός από την κοιλία

απέχουν  $\frac{\lambda}{4}$  το μήκος της χορδής  $L$  συνδέεται με το μήκος κύματος  $\lambda$  με τη σχέση:

$$L = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

Με αντικατάσταση του  $L$  και του  $\lambda$  προκύπτει ότι  $\kappa=6$ . Συνεπώς μεταξύ πρώτου και τελευταίου δεσμού οι κοιλίες είναι 6 και δεδομένου ότι στη θέση  $x=0$  υπάρχει κοιλία στο σύνολο δημιουργούνται 7 κοιλίες.

γ) Η απομάκρυνση των υλικών σημείων του μέσου σε ένα στάσιμο δίνονται από τη σχέση

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \omega t .$$

Έτσι η κοιλία  $K$  της θέσης  $x = \frac{\lambda}{2}$  θα ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση

$$y_K = 2 \cdot 8 \sin \frac{2\pi\lambda}{\lambda} \cdot \eta \mu 10\pi t \Rightarrow y_K = -16 \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (cm,s) και η ταχύτητα}$$

ταλάντωσής της θα δίνεται από τη σχέση:

$$v_K = 10\pi(-16) \cdot \sigma \nu \nu(10\pi t) \text{ (cm/s)} \Rightarrow v_K = -160\pi \cdot \sigma \nu \nu(10\pi t) \text{ (cm/s)}$$

δ) Το πλάτος συναρτήσει της απόστασης από τη θέση  $x=0$ , δίνεται από τη σχέση:

$$A' = 2A \left| \frac{\sigma \nu \nu 2\pi x}{\lambda} \right| \text{ συνεπώς } 8\sqrt{3} = 16 \left| \frac{\sigma \nu \nu 2\pi x}{5} \right| \text{ δηλαδή } \sigma \nu \nu \left( \frac{2\pi x}{5} \right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα  $\frac{2\pi x}{5} = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$  ή  $\frac{2\pi x}{5} = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ , οπότε  $x = \frac{5\kappa}{2} \pm \frac{5}{12} \text{ cm}$ , όπου  $x$  η απόσταση από το ελεύθερο άκρο της χορδής που πάλλεται με μέγιστο πλάτος (κοιλία).

Οι κοιλίες απέχουν από το ελεύθερο άκρο απόσταση  $x_K = \frac{\kappa\lambda}{2} = \frac{5\kappa}{2} \text{ (cm)}$

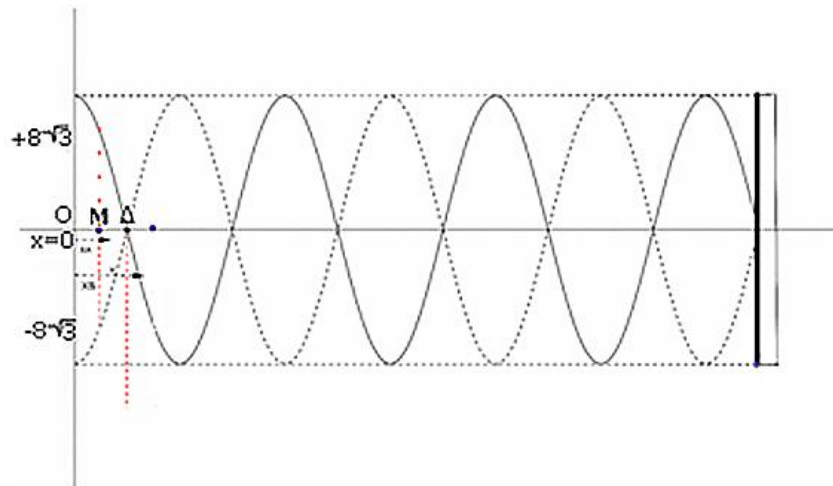
Συνεπώς κάθε σημείο που πάλλεται με πλάτος  $8\sqrt{3} \text{ cm}$ , θα απέχει από την πλησιέστερη κοιλία απόσταση  $d_1 = \frac{5}{12} \text{ cm}$ .

Οι δεσμοί απέχουν από το ελεύθερο άκρο απόσταση

$$x_\Delta = \frac{(2\kappa+1)\lambda}{4} = \frac{5\kappa}{2} + \frac{5}{4} \text{ (cm)} .$$

Συνεπώς κάθε σημείο που πάλλεται με πλάτος  $8\sqrt{3}\text{cm}$ , θα απέχει από τον πλησιέστερο δεσμό απόσταση  $d_2$  για την οποία ισχύει:

$$d_1 + d_2 = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d_2 = \frac{\lambda}{4} - d_1 \Rightarrow d_2 = \frac{5}{4}\text{cm} - \frac{5}{12}\text{cm} \Rightarrow d_2 = \frac{10}{12}\text{cm}$$



#### Άσκηση 4.

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους 10cm και μήκους κύματος  $\lambda = 1 \text{ m}$  διαδίδεται κατά τη θετική φορά σε οριζόντια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x'x$ . Θεωρούμε ότι το σημείο της χορδής στη θέση  $x = 0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  έχει μηδενική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και θετική ταχύτητα. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $v = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

α) Να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής.

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος στο S.I. και να κάνετε τη γραφική παράσταση απομάκρυνσης συναρτήσει του χρόνου, για ένα υλικό σημείο A της χορδής, το οποίο βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{3\lambda}{4}$ .

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης στοιχειώδους τμήματος της χορδής μάζας 0,001 kg. (Να θεωρήσετε το στοιχειώδες τμήμα της χορδής ως υλικό σημείο.)

δ) Στην παραπάνω χορδή διαδίδεται ταυτόχρονα άλλο ένα κύμα πανομοιότυπο με το προηγούμενο, αλλά αντίθετης φοράς, με αποτέλεσμα τη δημιουργία στάσιμου κύματος με κοιλία στη θέση  $x = 0$ . Να υπολογίσετε στο θετικό ημιάξονα τη θέση του 5<sup>ου</sup> δεσμού του στάσιμου κύματος.

Δίνεται:  $\pi^2 = 10$ .

#### Λύση

α) Με βάση τη σχέση:  $v = \frac{\lambda}{T}$  βρίσκουμε ότι:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{1\text{m}}{100\text{m/s}} \Rightarrow T = 10^{-2}\text{s}.$$

β) Η γενική εξίσωση κύματος είναι:  $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

Η συχνότητα είναι  $f = 100\text{Hz}$ , άρα  $\omega = 2\pi f = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , και  $\lambda = 1\text{m}$ .

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος προκύπτει με αντικατάσταση και είναι:

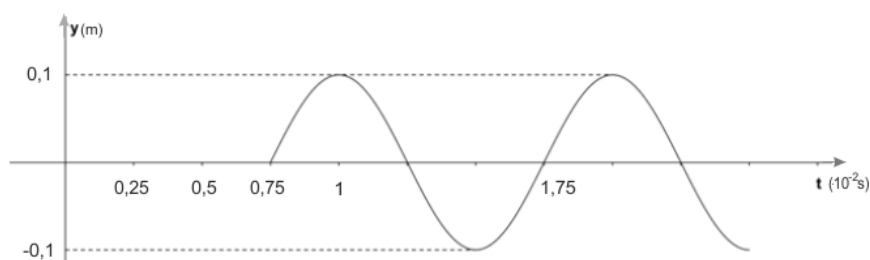
$$y = 0,1\eta\mu 2\pi(100t - x) \text{ (S.I.)}$$

το οποίο βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{3\lambda}{4}$ .

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Α, που βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{3\lambda}{4} = \frac{3}{4} \text{ m}$ ,

θα δίνεται από τη σχέση  $y_A = 0,1\mu 2\pi(100t - \frac{3}{4})$  (S.I.)

Για να φθάσει το κύμα στο σημείο Α, που απέχει από τη πηγή  $3\lambda/4$  χρειάζεται χρόνο ίσο με  $t_1 = \frac{x}{v} = \frac{0,75\text{m}}{100\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ . Άρα για  $t < t_1$  το σημείο Α είναι ακίνητο. Έτσι η παραπάνω εξίσωση ισχύει για  $t \geq t_1$  ή  $t \geq 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$



γ) Η ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια του υλικού σημείου δηλαδή:  $E = K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$

Όμως,  $v_{\max} = \omega A = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow v_{\max} = 20\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Με αντικατάσταση παίρνουμε  $K = 2\text{J}$

δ) Από τον τύπο  $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$  που δίνει τις θέσεις των δεσμών σε ένα στάσιμο, βλέπουμε ότι ο πρώτος δεσμός προκύπτει για  $k=0$ , οπότε η θέση του πέμπτου δεσμού θα προκύψει για  $k=4$ :

$x_5 = (2 \cdot 4 + 1)\frac{\lambda}{4} = 9\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_5 = 2,25\text{m}$

### Άσκηση 5.

Το σημείο Ο ομογενούς ελαστικής χορδής μεγάλου μήκους, τη χρονική στιγμή  $t=0$ , αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση  $y=0,05\eta\mu 8\pi t$  (S.I.) κάθετα στη διεύθυνση της χορδής. Το αρμονικό κύμα που παράγεται διαδίδεται με ταχύτητα μέτρου  $2\text{m/s}$ , κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'$ Ο $x$ , κατά μήκος της χορδής.

α) Να βρεθούν ο χρόνος που χρειάζεται ένα υλικό σημείο του ελαστικού μέσου για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση καθώς και το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος που παράγεται και να βρεθούν οι θέσεις όλων των σημείων που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή.

γ) Να γράψετε και να σχεδιάσετε την εξίσωση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για ένα υλικό σημείο Α που απέχει απόσταση  $x=\frac{3\lambda}{2}$  από την πηγή.

δ) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=\frac{T}{4}$  και  $t_2=\frac{3T}{4}$ .

### Λύση

α) Από την εξίσωση  $y=0,05\eta\mu 8\pi t$  (S.I.) βρίσκουμε:  $A=0,05\text{m}$ ,  $\omega=8\pi\text{rad/s}$ . Η περίοδος προκύπτει από τη σχέση  $\omega=\frac{2\pi}{T}$ , άρα  $T=0,25\text{s}$  και συνεπώς η συχνότητα είναι  $f=4\text{Hz}$ . Ο χρόνος που χρειάζεται ένα υλικό σημείο να κάνει μια πλήρη ταλάντωση, είναι η περίοδος ταλάντωσής του, δηλαδή είναι ίσος με  $0,25\text{s}$ .

Το μήκος κύματος προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

$$v=\lambda f \Rightarrow \lambda=\frac{v}{f}=\frac{2\text{m/s}}{4\text{Hz}} \Rightarrow \lambda=0,5\text{m}.$$

β) Η γενική εξίσωση του κύματος είναι:  $y=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$ , η οποία με αντικατάσταση, των μεγεθών  $A$ ,  $T$  και  $\lambda$  γίνεται:

$$y=0,05\eta\mu 2\pi(4t-2x)(\text{SI})$$

Τα σημεία που είναι σε συμφωνία φάσης με την πηγή απέχουν από αυτή ακέραιο αριθμό μηκών κύματος, δηλαδή βρίσκονται σε θέσεις για τις οποίες ισχύει

$$x=k\lambda=k\cdot 0,5\text{m} \quad k=1,2,3,\dots$$

γ) Η μέγιστη ταχύτητα θα είναι:  $v_{\max} = \omega A = 0,4\pi \text{ m/s}$ , ενώ η εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι:

$$v = v_{\max} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \text{ Άρα } v = 0,4\pi \sin 2\pi (4t - 2x) \text{ στο (S.I.)}.$$

Η γενική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι

$$v = v_{\max} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

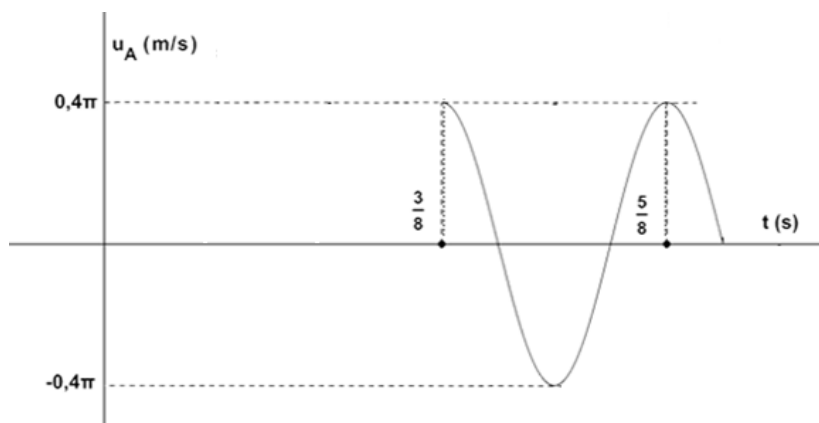
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης θα είναι:  $v_{\max} = \omega A = 0,4\pi \text{ m/s}$

Με αντικατάσταση στη γενική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης:  $T = 0,25\text{s}$ ,

$$\lambda = 0,5\text{m}, \quad x = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3}{4}\text{m} \text{ παίρνουμε } v_A = 0,4\pi \sin 2\pi \left( 4t - \frac{3}{2} \right) (\text{SI})$$

Το κύμα φθάνει στο Α ( $x_A = \frac{3}{4}\text{m}$ ) τη χρονική στιγμή  $t_A = \frac{x_A}{v} = \frac{3}{8}\text{s}$ . Για  $t < t_A$  το σημείο Α παραμένει ακίνητο. Άρα η εξίσωση ταχύτητας - χρόνου είναι:

$$v_A = 0,4\pi \sin 2\pi \left( 4t - \frac{3}{2} \right) (\text{SI}), \text{ για } t \geq \frac{3}{8}\text{s}.$$



δ) Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο, βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης συναρτήσει της απόστασης και υπολογίζουμε που έχει φθάσει το κύμα την κάθε χρονική στιγμή.

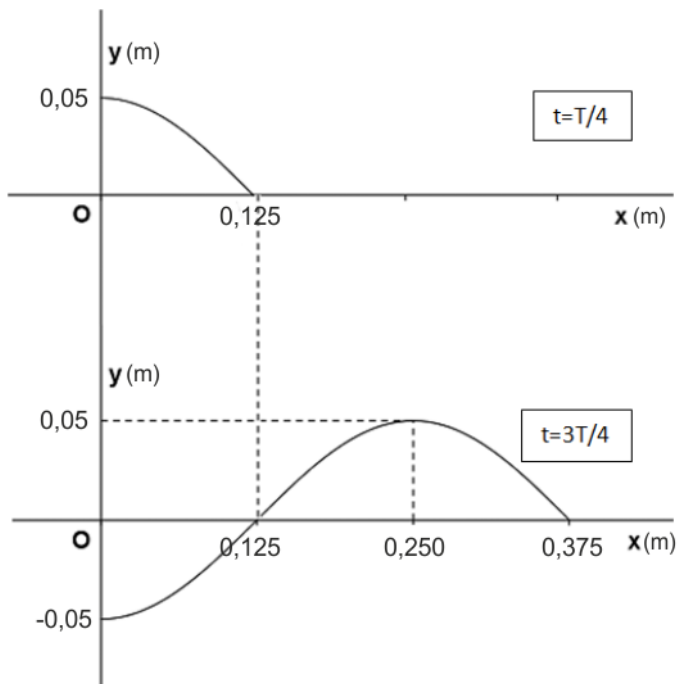
Τη χρονική στιγμή  $\frac{T}{4}$ , η εξίσωση απομάκρυνσης - θέσης είναι:  $y = 0,05\eta\mu 2\pi \left( \frac{1}{4} - 2x \right)$ .

Τη χρονική στιγμή αυτή το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$x = vt = v \frac{T}{4} = \frac{\lambda}{4} = 0,125\text{m}$ , ενώ τη χρονική στιγμή  $\frac{3T}{4}$ , η εξίσωση απομάκρυνσης - θέσης, είναι:  $y = 0,05\eta\mu 2\pi(\frac{3}{4} - 2x)$ .

Τη χρονική στιγμή αυτή το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

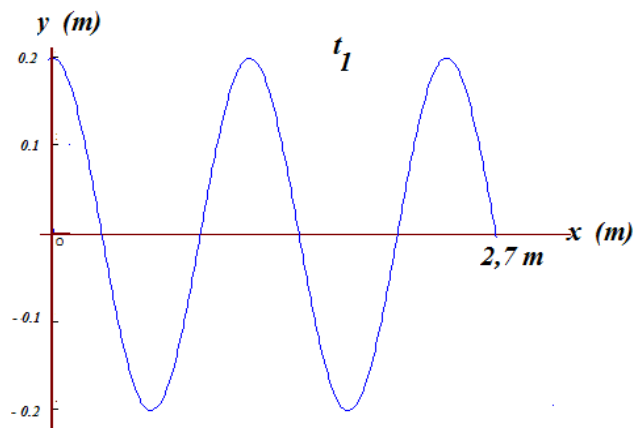
$$x = vt = v \frac{3T}{4} = \frac{3\lambda}{4} = 0,375\text{m}.$$



### Άσκηση 6.

(Η άσκηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αθανάσιο Παπαδημητρίου)

Η εικόνα παριστάνει το στιγμιότυπο ενός γραμμικού αρμονικού κύματος μια χρονική στιγμή  $t_1$ , το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  σε ένα ομογενές ελαστικό μέσο. Το σημείο της θέσης  $x=0$  άρχισε να ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση τη χρονική στιγμή  $t_0=0$ . Η ταχύτητα διάδοσης του παραπάνω κύματος είναι  $v=2\text{m/s}$ .



α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύματος.

γ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της φάσης σε σχέση με τη θέση,  $\varphi=f(x)$ , για τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σημείο Μ, που βρίσκεται στη θέση  $x_M=3,3\text{m}$ , θα απέχει για πρώτη φορά  $0,1\text{m}$  από τη θέση ισορροπίας του.

ε) Να γίνουν τα διαγράμματα της φάσης και της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο,  $\varphi=f(t)$  και  $y=f(t)$ , για το Ν που βρίσκεται στη θέση  $x_N=2,4\text{m}$ .

### Λύση

α) Από το διάγραμμα του στιγμιότυπου φαίνεται ότι το κύμα διαδόθηκε, από την χρονική στιγμή  $t_0=0$  μέχρι την  $t_1$ , κατά  $x=2,7\text{m}$ .

$$\text{Άρα } t_1 = \frac{x}{v} = \frac{2,7\text{m}}{2\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = 1,35\text{s}$$

β) Από την εκφώνηση η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής είναι  $y_{\pi} = A \cdot \eta\mu\omega t$ , οπότε η εξίσωση του (τρέχοντος) κύματος θα είναι της μορφής  $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ .

- Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το πλάτος του κύματος είναι  $A = 0,2\text{m}$ .

- Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το κύμα διαδόθηκε, από την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  μέχρι την  $t_1$ , κατά  $\frac{\lambda}{4} + 2\lambda = 9\frac{\lambda}{4}$ , όπου  $\lambda$  το μήκος κύματος.

$$\text{Άρα } \frac{9}{4}\lambda = 2,7\text{m} \Rightarrow \lambda = 1,2\text{m}.$$

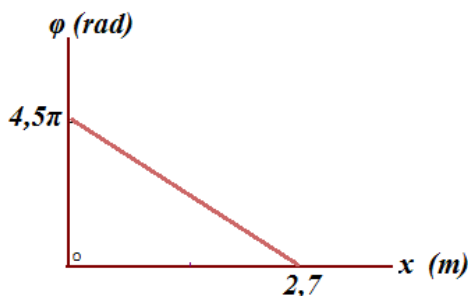
- Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2\text{m/s}}{1,2\text{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{0,6}\text{s}^{-1} \Rightarrow T = 0,6\text{s}$$

Οπότε η εξίσωση του κύματος θα έχει την μορφή  $y = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{1,2})$  (SI).

γ) Η φάση του κύματος, για την χρονική στιγμή  $t_1 = 1,35\text{s}$  περιγράφεται από τη συνάρτηση  $\varphi = 2\pi(\frac{1,35}{0,6} - \frac{x}{1,2}) \Rightarrow \varphi = 4,5\pi - \frac{\pi x}{0,6}$  (SI) ( $0 \leq x \leq 2,7\text{m}$ )

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



δ) Από την εξίσωση του κύματος, για  $x = 3,3\text{m}$  και  $y = 0,1\text{m}$  έχουμε:

$$0,1 = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = \frac{1}{2} \text{ οπότε:}$$

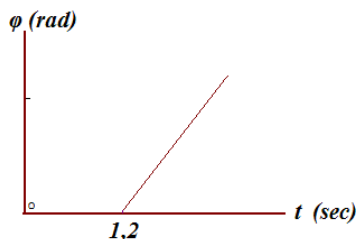
$$2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Αφού, για το σημείο Μ, αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά, δεκτή γίνεται η πρώτη λύση και με  $k = 0$ . Δηλαδή  $2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = \frac{\pi}{6}$  από την οποία προκύπτει  $t = 1,7\text{ s}$ .

ε) Για το σημείο Ν ( $x_N = 2,4\text{ m}$ ) η φάση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_N = 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{2,4}{1,2}) = 2\pi(\frac{t}{0,6} - 2), \text{ με } t \geq \frac{x}{v} = \frac{2,4}{2}\text{ s} \Rightarrow t \geq 1,2\text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:

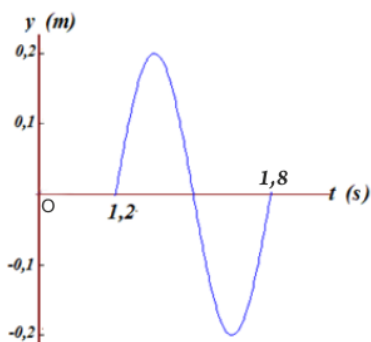


Για το Ν ( $x = 2,4\text{ m}$ )

Η εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Ν θα είναι:

$$y_N = 0,2\mu\text{m}2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{2,4}{1,2}) = 0,2\mu\text{m}2\pi(\frac{t}{0,6} - 2)(\text{SI}) \text{ με } t \geq \frac{x}{v} = \frac{2,4}{2}\text{ s} \Rightarrow t \geq 1,2\text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:

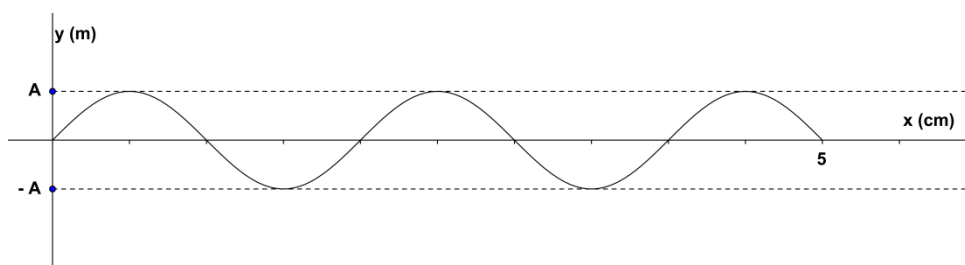


### Άσκηση 7.

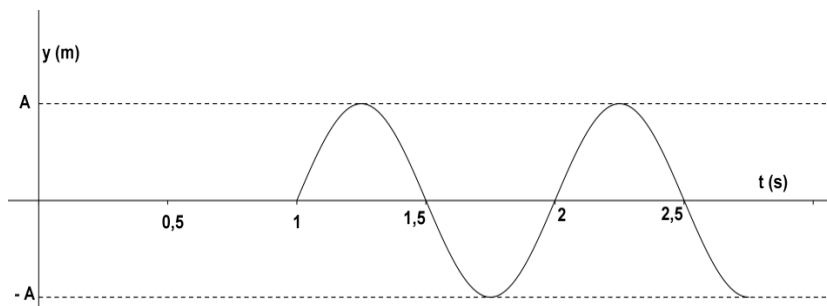
Μια πηγή κυμάτων  $O$  αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή  $t=0$ , σύμφωνα με την εξίσωση  $y=A\eta\mu(2\pi ft)$ . Το εγκάρσιο κύμα που δημιουργείται διαδίδεται σε ομογενές, γραμμικό ελαστικό μέσο κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x'Ox$ . Στο σχήμα 1 παριστάνεται το στιγμιότυπο του κύματος μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t'$ , ενώ στο σχήμα 2 φαίνεται η γραφική παράσταση απομάκρυνσης συναρτήσει του χρόνου για ένα υλικό σημείο  $\Sigma$  του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το εν λόγω κύμα. Να βρείτε:

- την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τη διαφορά φάσης μεταξύ του υλικού σημείου  $\Sigma$  και της πηγής κυμάτων.
- τη χρονική στιγμή  $t'$  στην οποία αντιστοιχεί το στιγμιότυπο του κύματος.
- την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του υλικού σημείου  $\Sigma$  και της πηγής κυμάτων την δεδομένη χρονική στιγμή  $t'$ .
- τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης και τη μέγιστη επιτάχυνση του υλικού σημείου  $\Sigma$ .
- Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της φάσης του υλικού σημείου  $\Sigma$  συναρτήσει του χρόνου.

Δίνεται το πλάτος ταλάντωσης της πηγής  $A=4\text{ cm}$  και  $\pi^2=10$ .



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

### Λύση

Από τα διαγράμματα προκύπτουν τα παρακάτω:

Στο σχήμα 1, παρατηρούμε ότι την χρονική στιγμή  $t'$  το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $x = 5\text{cm}$  (1).

Από το ίδιο σχήμα επίσης προκύπτει ότι η απόσταση αυτή αντιστοιχεί σε  $x = \frac{5\lambda}{2}$  (2)

Εξισώνοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει  $\lambda = 2\text{cm}$ .

Στο σχήμα 2 παρατηρούμε ότι η περίοδος ταλάντωσης του υλικού σημείου Σ είναι  $T = 1\text{s}$ , άρα και η συχνότητα θα είναι  $f = 1\text{Hz}$ .

Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:  $v = \lambda f = 2\text{ cm/s}$ .

Επίσης παρατηρούμε ότι το κύμα για να φτάσει στο υλικό σημείο Σ έκανε χρόνο  $t_1 = 1\text{s}$ .

Ο χρόνος αυτός είναι ίσος με την περίοδο του κύματος ( $T = 1\text{s}$ ), άρα η απόσταση πηγής και σημείου Σ είναι ίση με ένα μήκος κύματος και η διαφορά φάσης μεταξύ της πηγής Ο και του σημείου Σ είναι  $2\pi$ , δηλαδή  $\varphi_0 - \varphi_\Sigma = 2\pi$ .

β) Τη χρονική στιγμή  $t'$  το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$$x = 5\text{cm} \text{ με ταχύτητα } v = 2\text{cm/s}. \text{ Άρα } t' = \frac{x}{v} = \frac{5\text{cm}}{2\text{cm/s}} \Rightarrow t' = \frac{5}{2}\text{s}.$$

γ) Η πηγή τη χρονική στιγμή  $t'$  έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα  $\Delta t = \frac{5}{2}\text{s} = 2T + \frac{T}{2}$ .

Άρα περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη κατά την αρνητική φορά.

Το υλικό σημείο Σ, ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1\text{s}$ . Τη χρονική στιγμή

$$t' \text{ έχει ταλαντωθεί για χρόνο: } \Delta t = t' - t_1 = \frac{5}{2}\text{s} - 1\text{s} = \frac{3}{2}\text{s} = T + \frac{T}{2}.$$

Άρα το υλικό σημείο Σ τη χρονική στιγμή αυτή έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση και μισή δηλαδή περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο και αυτό κατά την αρνητική φορά. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα δύο σημεία παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $2\pi$ .

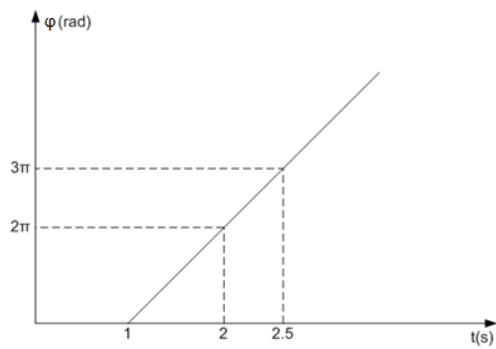
δ) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A = 2\pi f \cdot A \Rightarrow v_{\max} = 2\pi \cdot 1\text{Hz} \cdot 4\text{cm} \Rightarrow v_{\max} = 8\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Η μέγιστη επιτάχυνση στη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση  $a_{\max} = \omega^2 A = 160 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

ε) Η φάση του κύματος δίνεται από τη σχέση  $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ . Για το υλικό σημείο Σ ( $x = \lambda$ ) θα ισχύει  $\varphi = 2\pi(t-1)$ . Η φάση έχει νόημα για  $t \geq 1\text{s}$ .

Διάγραμμα φάσης - χρόνου για το υλικό σημείο Σ:



### Άσκηση 8.

Κατά μήκος ενός γραμμικού, ομογενούς, ελαστικού μέσου διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση του άξονα x'Οx ένα αρμονικό κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu \left[ (200\pi t) - \frac{10\pi x}{17} \right] \text{ (S.I.)}. \text{ Δύο σημεία A και B βρίσκονται πάνω στη}$$

διεύθυνση διάδοσης του κύματος, απέχουν μεταξύ τους 17m, και γνωρίζουμε ότι το πιο κοντινό σημείο στην πηγή Ο είναι το σημείο Α.

α) Να βρείτε τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β) Να δείξετε ότι η διαφορά φάσης των σημείων Α και Β είναι ανεξάρτητη του χρόνου και ότι τα σημεία αυτά είναι σε συμφωνία φάσης.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης - χρόνου για τα δύο αυτά υλικά σημεία Α και Β, αν γνωρίζουμε ότι το σημείο Α βρίσκεται στη θέση  $x_A = 6,8\text{m}$ .

δ) Να βρείτε τη μεταβολή της φάσης του υλικού σημείου Α σε χρονική διάρκεια  $\Delta t = 1\text{s}$ .

ε) Να βρείτε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σημείου Γ της θέσης  $x_\Gamma = 3,4\text{m}$ , τη χρονική στιγμή  $t$  που το υλικό σημείο Β έχει απομάκρυνση  $y_B = 2,2\text{cm}$ , και αρνητική ταχύτητα.

### Λύση

α) Συγκρίνοντας την εξίσωση του συγκεκριμένου κύματος

$$y = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu \left[ (200\pi t) - \frac{10\pi x}{17} \right] \text{ με τη γενική εξίσωση του κύματος έχουμε:}$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{10\pi x}{17} \Rightarrow \lambda = \frac{17}{5} \text{m} \Rightarrow \lambda = 3,4\text{m}$$

$$2\pi f t = 200\pi t \Rightarrow f = 100\text{Hz}$$

Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

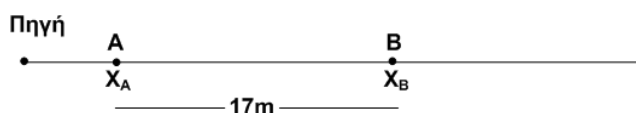
$$v = \lambda f \Rightarrow v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Οι φάσεις των υλικών σημείων Α και Β, δίνονται από τις σχέσεις:  $\varphi_A = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right)$

και  $\varphi_B = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right)$ , αντίστοιχα. Αφαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τη διαφορά φάσης των δύο αυτών σημείων:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{2\pi(x_B - x_A)}{\lambda} = \frac{2\pi(17\text{m})}{3,4\text{m}} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = 10\pi \text{ rad}$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο σημείων είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Επειδή  $\varphi_A - \varphi_B = 10\pi \text{ rad} = 5 \cdot 2\pi \text{ rad}$  (ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ ) ή  $\Delta x = 5\lambda$  (ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος) τα σημεία αυτά βρίσκονται σε συμφωνία φάσης μεταξύ τους.



γ) Το κύμα φτάνει στο σημείο A τη χρονική στιγμή

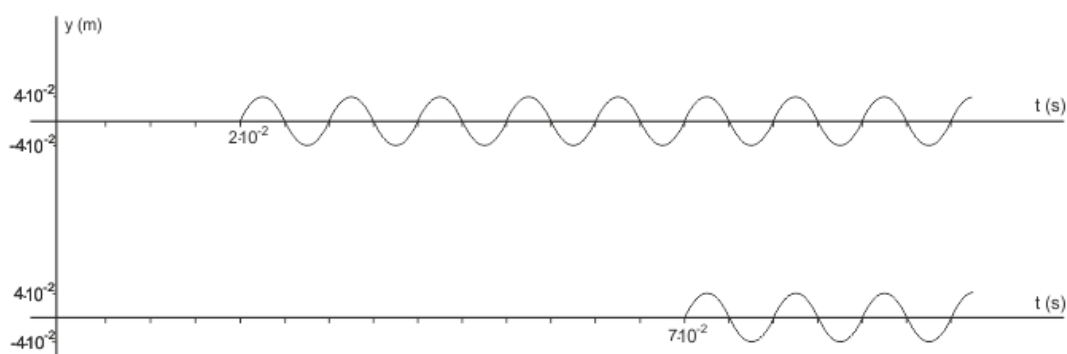
$$t_1 = \frac{x_A}{v} = \frac{6,8\text{m}}{340\text{m/s}} = \frac{2 \cdot 3,4\text{m}}{3,4 \cdot 100\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = \frac{2}{100}\text{s} = 2T, \text{ ενώ το σημείο B αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή}$$

$$t_2 = \frac{x_B}{v} = \frac{17 + 6,8\text{m}}{340\text{m/s}} = \frac{7 \cdot 3,4\text{m}}{3,4 \cdot 100\text{m/s}} \Rightarrow t_2 = \frac{7}{100}\text{s} = 7T$$

Και τα δύο σημεία εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση ταλάντωσης

$$y_A = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu[(200\pi t) - 4\pi], \text{ όπου } t \geq \frac{2}{100}\text{s} \text{ και}$$

$$y_B = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu[(200\pi t) - 14\pi], \text{ όπου } t \geq \frac{7}{100}\text{s}, \text{ αντίστοιχα.}$$



$$\delta) \Delta\varphi_A = 2\pi \cdot f \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\varphi_A = 200\pi \text{ rad}$$

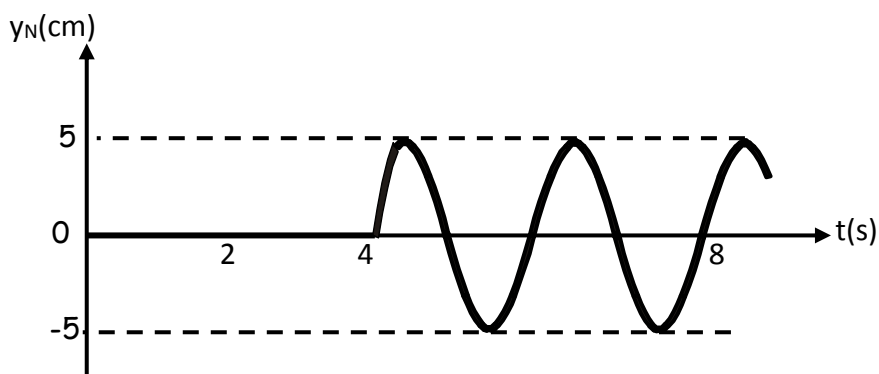
ε) Το σημείο Β βρίσκεται στη θέση  $x_B = 6,8\text{m} + 17\text{m} = 23,8\text{m}$  και απέχει από το σημείο Γ

$$x_B - x_\Gamma = 23,8\text{m} - 3,4\text{m} \Rightarrow x_B - x_\Gamma = 20,4\text{m} \Rightarrow x_B - x_\Gamma = 6 \cdot 3,4\text{m} \Rightarrow x_B - x_\Gamma = 6\lambda$$

Τα δύο σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης και έχουν κάθε στιγμή ίδια απομάκρυνση και ίδια ταχύτητα, άρα η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι  $y_\Gamma = 2,2\text{cm}$ .

### Άσκηση 9.

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά σε οριζόντια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x'Ox$ . Το σημείο  $O$  της χορδής στη θέση  $x=0$ , τη χρονική στιγμή  $t=0$ , έχει μηδενική απομάκρυνση και θετική ταχύτητα. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $v=1\text{m/s}$ . Για ένα σημείο  $N$  της ελαστικής χορδής, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στη γραφική παράσταση που ακολουθεί.



- Να γράψετε την εξίσωση του κύματος στο S.I.
- Να βρείτε πόσο απέχει το σημείο  $N$  από το  $O$ .
- Να βρείτε ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου  $N$ .
- Να βρείτε τη φάση του σημείου  $O$ , τη χρονική στιγμή που το σημείο  $N$  βρίσκεται για πρώτη φορά στην μέγιστή του απομάκρυνση.

### Λύση

- Η εξίσωση που περιγράφει ένα αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'Ox$  είναι:  $y = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ . (1)

Πρέπει να υπολογίσουμε το πλάτος  $A$ , την περίοδο  $T$  και το μήκος κύματος  $\lambda$ .

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$A = 5\text{cm} \text{ και } 2T = 8\text{s} - 4\text{s} = 4\text{s}, \text{ άρα } T = 2\text{s}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, βρίσκουμε το μήκος κύματος.

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = vT = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{s} \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:  $y = 5\eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right)$ , ( $y$  σε cm,  $x$  σε m).

β. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η ταλάντωση του σημείου Ν αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t = 4\text{ s}$ . Άρα, η απόσταση ΟΝ θα είναι ίση με:

$$x_N = v \cdot t = 1\text{ m/s} \cdot 4\text{ s} \quad \text{ή} \quad x_N = 4\text{ m}.$$

γ. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Ν δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \cdot A = \frac{2\pi}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{ m/s} \Rightarrow v_{\max} = 5\pi\text{ cm/s}.$$

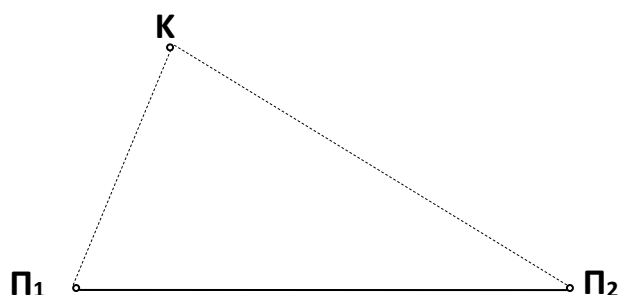
δ. Το σημείο Ν μεγιστοποιεί για πρώτη φορά την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του μετά από χρονικό διάστημα  $T/4$  από τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το σημείο Ν αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή  $t = 4\text{ s}$ . Κατά συνέπεια πρέπει να βρούμε τη φάση του σημείου Ο τη χρονική στιγμή  $t = 4\text{ s} + T/4$  ή  $t = 4,5\text{ s}$ .

Η φάση της πηγής δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{2} \cdot 4,5\text{ rad} \Rightarrow \varphi = 4,5\pi\text{ rad}$$

### Άσκηση 10.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια αρμονικά κύματα. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται με απομακρύνσεις που περιγράφονται από τη σχέση  $y=0,05 \eta\mu(4\pi t)$ , (SI). Η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι ίση με  $v=2 \text{ m/s}$ . Σε ένα σημείο K, της επιφάνειας του υγρού, το κύμα από την πηγή  $\Pi_1$  φτάνει τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$ , ενώ το κύμα από την πηγή  $\Pi_2$  φτάνει στο σημείο K όταν η πηγή  $\Pi_2$  έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις.



Να βρείτε:

- Πόσο απέχει το σημείο K από τις δύο πηγές.
- Πόση θα είναι η συχνότητα και το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου K μετά την συμβολή των δύο κυμάτων;
- Πόσες υπερβολές ενίσχυσης υπάρχουν ανάμεσα στο σημείο K και την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$ ;
- Πόση είναι η ταχύτητα του σημείου K τη χρονική στιγμή  $t=4,75 \text{ s}$ ;

### Λύση

α. Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών  $y=0,05 \eta\mu(4\pi t)$  προκύπτει ότι:

$$A=0,05\text{m} \text{ και } \omega=4\pi \text{ rad/s}.$$

$$\text{Είναι } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} \text{ s} \Rightarrow T=0,5 \text{ s}.$$

Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Άρα η απόσταση του σημείου K από την πρώτη πηγή θα είναι:

$$r_1 = v \cdot t_1 = 2 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} \text{ ή } r_1 = 2 \text{ m}.$$

Η απόσταση του σημείου K από την δεύτερη πηγή θα είναι ομοίως,  $r_2 = v \cdot t_2$ .

Το κύμα από την πηγή  $\Pi_2$  φτάνει στο σημείο Κ όταν η πηγή  $\Pi_2$  έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις, δηλαδή  $t_2 = 4T = 4 \cdot 0,5s$  ή  $t_2 = 2s$ .

Οπότε,  $r_2 = v \cdot t_2 = (2m/s) \cdot 2s$  ή  $r_2 = 4m$ .

β. Το σημείο Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα ίδια με τη συχνότητα των δύο κυμάτων που συμβάλλουν. Άρα

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5s} \Rightarrow f = 2Hz.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα είναι:

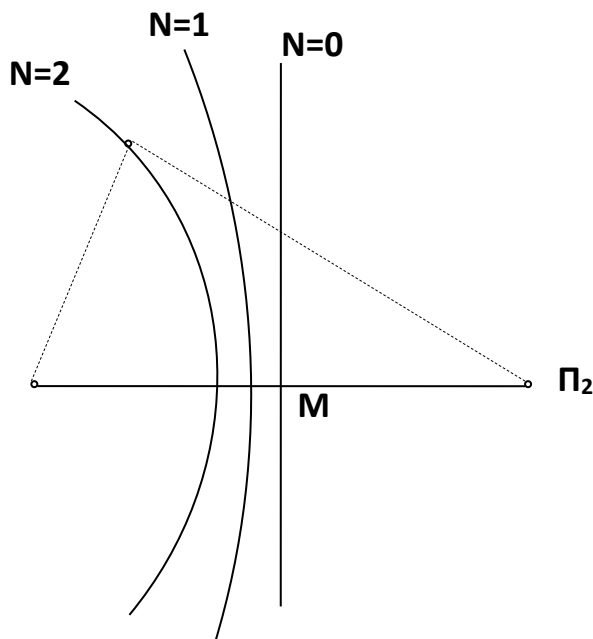
$$|A_K'| = 2A \left| \sin 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \right| = 2 \cdot 0,05 \left| \sin 2\pi \frac{4m - 2m}{2 \cdot 1m} \right| = 0,1 \cdot |\sin 2\pi| \Rightarrow |A_K'| = 0,1m.$$

Το σημείο Κ είναι λοιπόν ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής.

γ. Θα βρούμε το σημείο Κ σε ποια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής ανήκει. Είναι

$$r_2 - r_1 = N \cdot \lambda \Rightarrow 4m - 2m = N \cdot 1m \Rightarrow N = 2.$$

Κατά συνέπεια ανάμεσα στην υπερβολή ενίσχυσης που περνά από το σημείο Κ ( $N = 2$ ) και την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$ , που είναι η υπερβολή ενίσχυσης με  $N = 0$ , περνά μία υπερβολή ενίσχυσης, αυτή που αντιστοιχεί σε  $N = 1$ .



δ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ είναι:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) = 0,1 \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,5} - \frac{2+4}{2} \right) (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot \eta \mu 2\pi (2t - 3) (\text{SI}).$$

Άρα, η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Κ συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

$$v = 0,1 \cdot 4\pi \cdot \sin 2\pi (2t - 3) \Rightarrow v = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi (2t - 3) (\text{SI}).$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 4,75 \text{ s}$  η ταχύτητα του σημείου Κ είναι

$$v = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi (2 \cdot 4,75 - 3) = 0,4\pi \cdot \sin 13\pi = 0,4\pi \cdot \sin \pi \Rightarrow v = -0,4\pi \text{ m/s}.$$

### Άσκηση 11.

Σε οριζόντια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα  $x$  Όχ διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα σε αντίθετες κατευθύνσεις. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = 0,1 \sin(2\pi x) \cdot \eta\mu(10\pi t)$  (S.I.).

Να υπολογίσετε

- την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων που συμβάλλουν.
- τη θέση του δεύτερου δεσμού και της τρίτης κοιλίας, θεωρώντας ότι στη θέση  $x = 0$  βρίσκεται η πρώτη κοιλία.
- την απόσταση μεταξύ του δεύτερου δεσμού και της τρίτης κοιλίας τη χρονική στιγμή  $t_1 = 5/6$  s .
- το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια, ενός υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση της τρίτης κοιλίας τη χρονική στιγμή  $t_1 = 5/6$  s .

Δίνονται:  $\sin \pi/3 = 1/2$ ,  $\eta\mu \pi/3 = \sqrt{3}/2$ .

### Λύση

- Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη γενική εξίσωση των στάσιμων κυμάτων

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T} .$$

προκύπτει:

$$2A = 0,1\text{m} , \text{ άρα } A = 0,05\text{m} = 5\text{cm} ,$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 2\pi x \Rightarrow \lambda = 1\text{m} ,$$

$$\frac{2\pi t}{T} = 10\pi t \Rightarrow T = 0,2\text{s} \text{ ή } f = \frac{1}{T} = 5\text{Hz} .$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων που συμβάλλουν,  $v = \lambda \cdot f = 1\text{m} \cdot 5\text{Hz}$  ή  $v = 5\text{m/s}$ .

β. Οι θέσεις των δεσμών δίνονται γενικά από τη σχέση  $x_{\Delta} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$ . Η θέση του 2ου

δεσμού Δ προκύπτει για  $k=1$  και βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{3\lambda}{4} = 0,75\text{m}$ .

Οι θέσεις των κοιλιών δίνονται γενικά από τη σχέση  $x_K = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ . Η θέση της 3ης κοιλίας Κ προκύπτει για  $k=2$  και βρίσκεται στη θέση  $x = \lambda = 1\text{m}$ .

γ. Η τρίτη κοιλία Κ τη χρονική στιγμή  $t_1 = 5/6 \text{ s}$  έχει απομάκρυνση που υπολογίζεται με αντικατάσταση των  $x, t$  στην εξίσωση του στάσιμου.

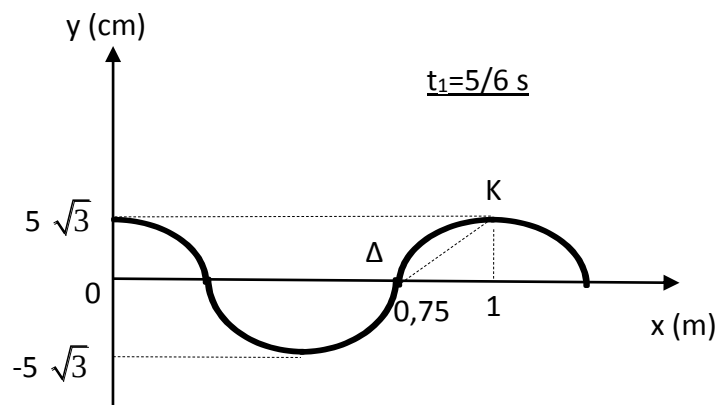
$$y = 0,1 \sin(2\pi x) \eta\mu(10\pi t) = 0,1 \sin(2\pi) \eta\mu\left(10\pi \frac{5}{6}\right) = 0,1 \eta\mu\left(\frac{50}{6}\pi\right) \text{ ή}$$

$$y = 0,1 \eta\mu\left(\frac{2+48}{6}\pi\right) = 0,1 \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ ή } y = 0,05\sqrt{3}\text{m}.$$

Η ζητούμενη απόσταση μεταξύ του δεύτερου δεσμού Δ και της τρίτης κοιλίας Κ, τη χρονική στιγμή  $t_1 = 5/6 \text{ s}$ , βρίσκεται με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος για το τρίγωνο που σχηματίζεται στο παρακάτω στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος:

$$(\Delta K) = \sqrt{0,25^2 + (0,05\sqrt{3})^2} \text{ m} = \sqrt{0,0625 + 0,0025 \cdot 3} \text{ m} \Rightarrow$$

$$(\Delta K) = \sqrt{0,07} \text{ m} \Rightarrow (\Delta K) = 0,1\sqrt{7} \text{ m}$$



δ. Το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια, ενός υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση της τρίτης κοιλίας τη χρονική στιγμή  $t_1 = 5/6 \text{ s}$ , θα είναι

$$\frac{U}{K} = \frac{U}{E-U} = \frac{\frac{1}{2}Dy^2}{\frac{1}{2}D(2A)^2 - \frac{1}{2}Dy^2} = \frac{y^2}{(2A)^2 - y^2} = \frac{(0,05\sqrt{3}\text{m})^2}{(0,1\text{m})^2 - (0,05\sqrt{3}\text{m})^2} = \frac{0,0075}{0,0025} \Rightarrow \frac{U}{K} = 3$$

## Άσκηση 12.

Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού φαινόμενα συμβολής. Οι πηγές ταλαντώνονται χωρίς αρχική φάση, με πλάτος  $A=5\text{cm}$  και συχνότητα  $f=5\text{Hz}$  δημιουργώντας εγκάρσια αρμονικά κύματα. Η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι ίση με  $v=2\text{m/s}$ . Ένα υλικό σημείο  $K$  της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή  $\Pi_1$  απόσταση  $r_1 = 40\text{ cm}$  και από την πηγή  $\Pi_2$  απόσταση  $r_2 = 70\text{ cm}$ .

Α) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που ξεκινάει η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο  $K$  και το μήκος κύματος των κυμάτων.

Β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του υλικού σημείου  $K$  τη χρονική στιγμή  $t=0,3\text{ s}$ .

Γ) Να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου  $K$  σε σχέση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα  $0\text{s} \leq t \leq 0,8\text{s}$ .

Δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σημείο  $K$  θα βρεθεί στη μέγιστή του απομάκρυνση για 1<sup>η</sup> φορά, αφού γίνει συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό.

$$\text{Δίνεται το συν } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### Λύση

Α) Τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο  $K$  τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{40\text{ cm}}{2\text{ m/s}} = \frac{0,4\text{ m}}{2\text{ m/s}} \Rightarrow t_1 = 0,2\text{ s} \text{ και}$$

$$t_2 = \frac{r_2}{v} = \frac{0,7\text{ m}}{2\text{ m/s}} \Rightarrow t_2 = 0,35\text{ s}.$$

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο  $K$  ξεκινάει τη χρονική στιγμή που έχουν φτάσει και τα δύο κύματα στο σημείο  $K$ , άρα τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,35\text{ s}$ .

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\text{Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,4\text{m}.$$

Β) Τη χρονική στιγμή  $t=0,3\text{ s}$  στο υλικό σημείο  $K$  δεν έχει φτάσει το κύμα από την πηγή  $\Pi_2$ , παρά μόνο το κύμα από την πηγή  $\Pi_1$ . Έτσι δεν έχει αρχίσει η συμβολή. Η κυκλική συχνότητα είναι  $\omega=2\pi f=2\pi \cdot 5\text{Hz}= 10\pi\text{ rad/s}$  και η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{5\text{Hz}} \Rightarrow T = 0,2\text{s}.$$

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου  $K$  τη χρονική στιγμή  $t=0,3\text{ s}$  είναι

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = -\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left( \frac{0,3s}{0,2s} - \frac{0,4m}{0,4m} \right) \Rightarrow \alpha = -\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left( \frac{3}{2} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\alpha = -\omega^2 A \eta \mu \pi = 0$$

Γ) Στο χρονικό διάστημα  $0s \leq t < 0,2s$ , το σημείο Κ είναι ακίνητο καθώς δεν έχει φθάσει κάποιο κύμα σε αυτό.

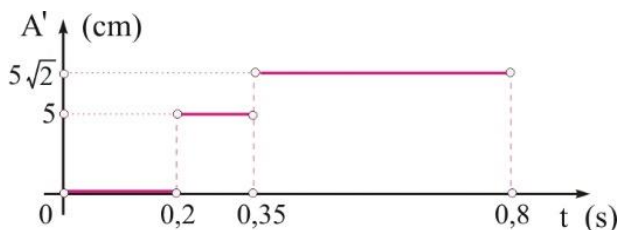
Στο χρονικό διάστημα  $0,2s \leq t < 0,35s$  το σημείο Κ ταλαντώνεται εξαιτίας του ενός μόνο κύματος και έχει πλάτος ταλάντωσης  $A_K' = A = 5cm$  ή  $A_K' = 0,05m$ .

Στο χρονικό διάστημα  $0,35s \leq t$  το σημείο Κ εκτελεί ταλάντωση εξαιτίας και των δύο κυμάτων. Το πλάτος ταλάντωσης του είναι:

$$A_K' = 2A \cdot \left| \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right| = 2 \cdot 0,05m \cdot \left| \sin 2\pi \frac{0,4m - 0,7m}{2 \cdot 0,4m} \right| \Rightarrow$$

$$A_K' = 0,1m \cdot \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| \Rightarrow A_K' = 0,05\sqrt{2}m \text{ ή } A_K' = 5\sqrt{2}cm$$

Στο επόμενο διάγραμμα δείχνεται η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Κ σε σχέση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα  $0s \leq t \leq 0,8s$



Δ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ, αφού γίνει συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό είναι

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0,05m \cdot \sin 2\pi \frac{0,4m - 0,7m}{2 \cdot 0,4m} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2s} - \frac{0,4m + 0,7m}{2 \cdot 0,4m} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,1m \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2s} - \frac{11}{8} \right) \Rightarrow y = -0,1m \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2s} - \frac{11}{8} \right) \Rightarrow$$

$$y = -0,05\sqrt{2}m \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2s} - \frac{11}{8} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Το σημείο Κ θα βρεθεί στη μέγιστή του απομάκρυνση όταν  $y = A_K' = 0,05\sqrt{2}m$ . Άρα

$$y = -0,05\sqrt{2}\text{m} \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{11}{8} \right) \Rightarrow 0,05\sqrt{2}\text{m} = -0,05\sqrt{2}\text{m} \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{11}{8} \right) \Rightarrow$$

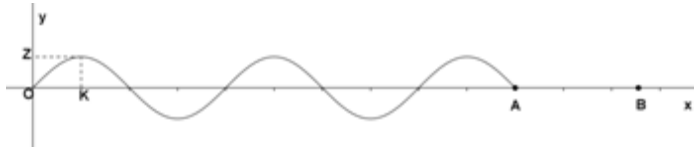
$$\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{11}{8} \right) = -1 = \eta\mu \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{11}{8} \right) = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Το σημείο Κ θα βρεθεί στη μέγιστή του απομάκρυνση για 1<sup>η</sup> φορά, τη στιγμή που θα προκύψει από την επίλυση της τελευταίας σχέσης για  $\kappa=0$

$$2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{11}{8} \right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{11}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow t = \frac{3,4}{8}\text{s} \Rightarrow t = 0,425\text{ s}.$$

### ΘΕΜΑ Δ

#### Πρόβλημα 1.



Το πιο πάνω σχήμα παριστά το στιγμιότυπο ενός οδεύοντος αρμονικού κύματος σε ομογενές γραμμικό ελαστικό μέσο κατά τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σημείο O της θέσης  $x = 0$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Για τις σημειωμένες στο σχήμα αποστάσεις ισχύει:  $(OK) = 0,1\text{m}$ ,  $(OZ) = 0,3\text{m}$ .

Ζητούνται:

- Η χρονική στιγμή  $t_0$  και η μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνονται τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου.
  - Να χαραχθεί πάνω σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1 = t_0 + 0,01\text{s}$ . Την ίδια χρονική στιγμή να βρεθεί η απομάκρυνση ενός σημείου B αν γνωρίζετε ότι το σημείο αυτό απέχει από το O απόσταση,  $OB = 1,4\text{m}$ .
  - Το πιο πάνω οδεύον κύμα μεταφέρει ενέργεια  $4,5 \cdot 10^{-2}\text{J}$ , σε κάθε υλικό σημείο του γραμμικού ελαστικού μέσου. Πόση είναι η σταθερά ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου, δεδομένου ότι όλα εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση;
  - Αν το πιο πάνω στιγμιότυπο παρίστανε στάσιμο κύμα τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία όλα τα σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου, έχουν μηδενική ταχύτητα, τότε, να σχεδιάσετε το στιγμιότυπό του τη χρονική στιγμή  $t_1$ , όπου  $t_1 = t_0 + 0,01\text{s}$ .
- Δίνεται ότι η συχνότητα των οδεύοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι:  $f = 25\text{Hz}$ .

#### Λύση

α) Δίνεται ότι το στιγμιότυπο είναι οδεύοντος κύματος. Συνεπώς σε αυτό φαίνονται οι θέσεις των υλικών σημείων του μέσου τη δεδομένη χρονική στιγμή.

Από το διάγραμμα έχουμε  $(OK) = \frac{\lambda}{4} = 0,1$  συνεπώς  $\lambda = 0,4\text{m}$ .

Επίσης, το πλάτος ταλάντωσης είναι το  $(OZ)$ , δηλαδή η μεγαλύτερη απόσταση από τη θέση ισορροπίας. Συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου θα είναι  $A_0 = (OZ) = 0,3\text{m}$ .

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $v = \lambda f = 0,4\text{m} \cdot 25\text{s}^{-1} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Από το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται ότι τη χρονική στιγμή  $t_0$ , το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $\frac{5\lambda}{2}$ .

$$\text{Άρα, } \frac{5\lambda}{2} = x = v \cdot t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{5\lambda}{v} = \frac{5 \cdot 0,2\text{m}}{10\text{m/s}} \Rightarrow t_0 = 0,1\text{s}$$

Άρα  $t_0 = 0,1\text{s}$ .

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων θα είναι:

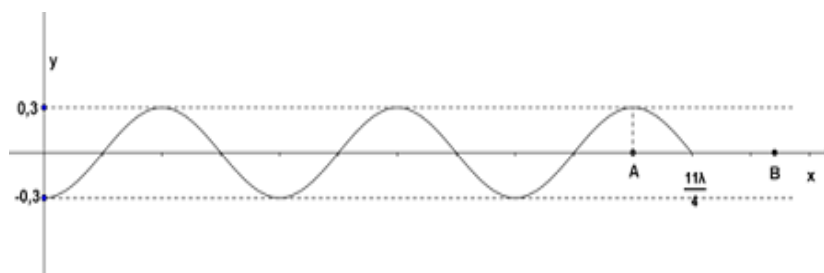
$$v_{\max} = \omega A_0 = 50\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,3\text{m} \Rightarrow v_{\max} = 15\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Δεδομένου ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι  $T = \frac{1}{f} = 0,04\text{s}$ , η χρονική στιγμή

$t_0 = 0,1\text{s}$  αντιστοιχεί σε  $\frac{5T}{2} = 2T + \frac{T}{2}$ . Από την παραπάνω παρατήρηση προκύπτει ότι η πηγή, την χρονική στιγμή  $t_0 = 0,1\text{s}$  περνά από τη θέση ισορροπίας με αρνητική φορά, (δηλαδή προς τα κάτω). Συνεπώς σε χρόνο  $\Delta t = \frac{T}{4} = 0,01\text{s}$  μετά τη χρονική στιγμή  $t_0$ , βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνση, ενώ το κύμα έχει διαδοθεί απόσταση επιπλέον  $\frac{\lambda}{4} = 0,1\text{m}$  και έχει φτάσει μέχρι τη θέση

$$x = 5\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 5 \cdot 0,2\text{m} + 0,1\text{m} \Rightarrow x = 1,1\text{m}$$

Με δεδομένο ότι το τελευταίο σημείο που έχει φτάσει ένα κύμα είναι ακόμα στη θέση ισορροπίας και έτοιμο να κινηθεί όπως το προηγούμενό του, το στιγμιότυπο θα είναι το παρακάτω:

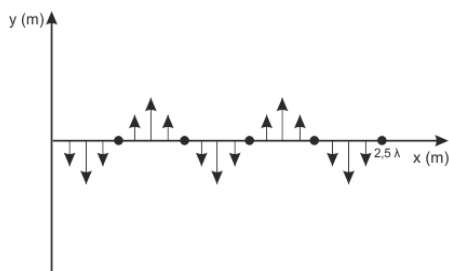


Το σημείο Β θα παραμείνει ακίνητο στη θέση ισορροπίας του, δεδομένου ότι το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα εκεί.

γ) Η ενέργεια της ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου του υλικού μέσου δίνεται από τη σχέση:  $E = \frac{1}{2}DA^2$ . Με αντικατάσταση προκύπτει  $D = 1\frac{N}{m}$ .

δ) Παρατηρούμε ότι τα ακραία σημεία Ο και Α είναι δεσμοί. Γνωρίζουμε ότι στο στάσιμο κύμα όλα τα σημεία περνούν από τη θέση ισορροπίας την ίδια χρονική στιγμή.

Οι χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_0$  διαφέρουν κατά  $\frac{T}{4}$ . Επειδή, σύμφωνα με την εκφώνηση, όλα τα σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή  $t_0$  έχουν μηδενική ταχύτητα και βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνσή τους, μετά από χρόνο  $\frac{T}{4}$  θα βρίσκονται στη θέση ισορροπίας από όπου διέρχονται με τη μέγιστη ταχύτητά τους. Το στιγμιότυπο του γραμμικού ελαστικού μέσου δίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο έχουν σχεδιασθεί και οι ταχύτητες που έχουν διάφορα υλικά σημεία.



## Πρόβλημα 2.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού που ηρεμεί εγκάρσια κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα  $v = 80 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ . Οι δύο πηγές τη χρονική στιγμή  $t = 0$  αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση, σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια του υγρού και η εξίσωση ταλάντωσής τους είναι  $y = A \eta \mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ .

Με την επίδραση των δύο κυμάτων ένα μικρό κομμάτι φελλού που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού ταλαντώνεται, με εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του:

$$y = 4 \eta \mu 2\pi(8t - 4), \text{ όπου } y \text{ σε cm και } t \text{ σε s.}$$

Οι αποστάσεις του φελλού από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  είναι  $r_1, r_2$  αντίστοιχα και συνδέονται με τη σχέση  $r_1 - r_2 = 2\lambda$ , όπου  $\lambda$  το μήκος κύματος  $\lambda$  των δυο κυμάτων.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης των πηγών.

β) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος  $\lambda$  των κυμάτων καθώς και τις αποστάσεις  $r_1$  και  $r_2$ .

γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση ταλάντωσης του φελλού την χρονική στιγμή  $t_1 = 1\text{s}$ .

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή  $t$ , κατά την οποία ο φελλός περνάει από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης  $y = 4\text{cm}$  για 1<sup>η</sup> φορά, εκτελώντας σύνθετη ταλάντωση.

ε) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης των σημείων που βρίσκονται στην μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές.

## Λύση

α) Συγκρίνουμε τη δοθείσα εξίσωση

$$y = 4 \eta \mu 2\pi(8t - 4)(\text{cm}, \text{s})$$

με τη γενική εξίσωση της συμβολής εγκάρσιων κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

$$y = 2A \sigma \nu \left[ \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right] \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

Για το πλάτος του υλικού σημείου ισχύει:

$$2A \sigma \nu \left[ \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right] = 4\text{cm} \Rightarrow 2A \sigma \nu \left[ \frac{2\pi(2\lambda)}{2\lambda} \right] = 4\text{cm} \Rightarrow 2A = 4\text{cm} \Rightarrow A = 2\text{cm}$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης κάθε πηγής είναι  $A = 2\text{cm}$

β) Το μήκος κύματος βρίσκεται με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής αφού πρώτα βρεθεί η περίοδος  $T$ .

Συγκρίνουμε τη δοθείσα εξίσωση με τη γενική εξίσωση της συμβολής εγκάρσιων κυμάτων:

(i) Για την περίοδο ισχύει:  $8t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{8}s$

Υπολογισμός μήκους κύματος:  $v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT \Rightarrow \lambda = 0,8 \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{8}s \Rightarrow \lambda = 0,1m$ . Άρα  $\lambda = 10cm = 0,1m$ .

(ii) Για τον όρο  $\frac{(r_1 + r_2)}{2\lambda}$  ισχύει:

$$\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} = 4 \Rightarrow r_1 + r_2 = 8\lambda \Rightarrow r_1 + r_2 = 8 \cdot 10cm \Rightarrow r_1 + r_2 = 80cm$$

Από τις σχέσεις  $r_1 + r_2 = 80cm$  και  $r_1 - r_2 = 2\lambda = 20cm$  προκύπτει  $r_1 = 50cm$  και  $r_2 = 30cm$ .

γ) Η μέγιστη επιτάχυνση του φελλού θα είναι

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A_0 = \left(16\pi \frac{\text{rad}}{s}\right)^2 \cdot (4 \cdot 10^{-2}m) \Rightarrow \alpha_{\max} = 102,4 \frac{m}{s^2}$$

Άρα για  $t_1 = 1s$  έχουμε

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) = -102,4 \cdot \eta \mu 2\pi (8t - 4) \Rightarrow \alpha = -102,4 \cdot \eta \mu 2\pi (4) \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$\alpha = 0$$

Δηλαδή τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1s$  ο φελλός έχει μηδενική επιτάχυνση άρα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ( $y = 0cm$ ) και η ταχύτητά του είναι μέγιστη.

δ) Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι  $\frac{T}{4}$  μετά από τη χρονική στιγμή άφιξης του δεύτερου κύματος. Για τη χρονική στιγμή άφιξης  $t_1$  του δευτέρου κύματος ισχύει:

$$t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{50cm}{80cm/s} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{8}s$$

Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = t_1 + \frac{T}{4} = \frac{5}{8}s + \frac{1/8}{4}s \Rightarrow t = \left( \frac{20}{32} + \frac{1}{32} \right)s \Rightarrow t = \frac{21}{32}s$$

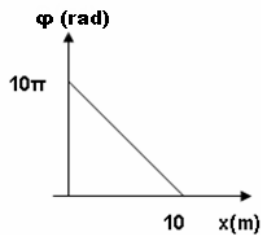
ε) Για τα σημεία της μεσοκαθέτου ισχύει  $r_1 = r_2$ , οπότε το πλάτος της ταλάντωσης για κάθε σημείο είναι:

$$\left| 2A \sin \left( \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda} \right) \right| = 2A \sin 0 = 2A = 4\text{cm}$$

Άρα, όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου πάλλονται με μέγιστο πλάτος 4cm .

### Πρόβλημα 3.

Κατά μήκος ενός γραμμικού, ομογενούς, ελαστικού μέσου διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  ένα αρμονικό κύμα. Το σημείο  $O$  της θέσης  $x = 0$  εκτελεί αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την  $y = A\eta\mu\omega t$ . Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης  $\varphi$  των υλικών σημείων που βρίσκονται στη διεύθυνση διάδοσης του αρμονικού κύματος, σε συνάρτηση με την απόσταση  $x$  από το σημείο  $O$ , σε μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t_1$ .



- α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και να βρείτε τη φάση της πηγής τη χρονική στιγμή  $t_1$ .
- β) Να υπολογίσετε πριν από πόσο χρόνο άρχισε να ταλαντώνεται η πηγή, δηλαδή τη χρονική στιγμή  $t_1$ , αν γνωρίζετε ότι η συχνότητα ταλάντωσης της πηγής, είναι  $f = 10\text{Hz}$ .
- γ) Την παραπάνω χρονική στιγμή  $t_1$

- 1) Να βρείτε την απομάκρυνση του σημείου της θέσης  $x = 0$  (πηγή).
- 2) Να βρείτε τον αριθμό των πλήρων απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχει κάνει η πηγή.
- 3) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος.

Δίνεται ότι το πλάτος ταλάντωσης της πηγής είναι  $A = 0,1\text{m}$

- δ) Τη χρονική στιγμή  $t_1$  να βρείτε την ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται ένα υλικό σημείο, το οποίο βρίσκεται στη θέση  $x = 5\text{m}$  και να αποδείξετε ότι αυτό το υλικό σημείο βρίσκεται σε αντίθετη φάση με την πηγή.

### Λύση

- α) Η φάση δίνεται από τον τύπο  $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$  που μπορεί να γραφεί και ως

$\varphi = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x + \frac{2\pi t}{T}$ . Η σχέση αυτή, για συγκεκριμένη χρονική στιγμή, παριστά μία ευθεία.

Από την κλίση στο διάγραμμα, βρίσκουμε  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{10\pi}{10}$  συνεπώς  $\lambda = 2\text{m}$ .

Η πηγή βρίσκεται στη θέση  $x=0$ , έχει τη μεγαλύτερη φάση από όλα τα σημεία του μέσου και σύμφωνα με το διάγραμμα η φάση της είναι  $\varphi=10\pi\text{rad}$ .

β)

### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Η ταχύτητα του κύματος είναι  $v=\lambda f=2\text{m}\cdot 10\text{Hz}\Rightarrow v=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $x=10\text{m}$ , συνεπώς

$$t=\frac{x}{v}, \text{ από όπου } t_1=0,5\text{s}$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Η πηγή ταλαντώνεται για τόσο χρονικό διάστημα  $t_1$  όσο χρειάζεται για να αποκτήσει σύμφωνα με το διάγραμμα φάση  $10\pi\text{rad}$ . Έτσι με αντικατάσταση στον τύπο της φάσης  $x=10\text{m}$ ,  $\varphi_1=10\pi\text{rad}$  παίρνουμε:

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow 10\pi=2\pi\left(\frac{t_1}{0,1\text{s}}-\frac{0}{2\text{m}}\right)\Rightarrow t_1=0,5\text{s}$$

### 3<sup>ος</sup> τρόπος

Η πηγή ταλαντώνεται για τόσο χρονικό διάστημα  $t_1$  όσο χρειάζεται για να διαδοθεί το κύμα σε απόσταση  $x_1=10\text{m}$ . Επίσης γνωρίζουμε ότι το σημείο της θέσης που ξεκινά να ταλαντώνεται έχει φάση μηδέν. Έτσι με αντικατάσταση στον τύπο της φάσης  $x_1=10\text{m}$ ,  $\varphi_1=0$  παίρνουμε

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow 0=2\pi\left(\frac{t_1}{0,1\text{s}}-\frac{10\text{m}}{2\text{m}}\right)\Rightarrow t_1=0,5\text{s}$$

γ)

1) Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής είναι  $y=A\eta\mu\omega t$ . Τη χρονική στιγμή  $t_1=0,5\text{s}$  η εξίσωση δίνει

$y=A\eta\mu(20\pi\cdot 0,5)\Rightarrow y=A\eta\mu(10\pi)=0\Rightarrow y=A\eta\mu(5\cdot 2\pi+0)\Rightarrow y=0$ , συνεπώς η πηγή τη χρονική στιγμή  $t_1$  περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενη κατά τη θετική φορά, δηλαδή τη φορά που είχε και τη χρονική στιγμή  $t=0$ .

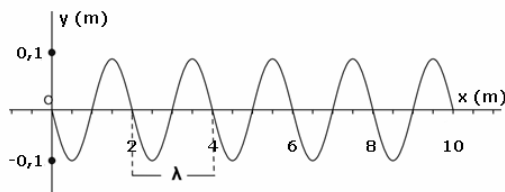
2) Ισχύει  $N = \frac{t}{T} = \frac{0,5s}{0,1s} = 5$ . Άρα η πηγή τη χρονική στιγμή  $t_1$  έχει κάνει 5 πλήρεις ταλαντώσεις.

3) Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος, την χρονική στιγμή  $t_1$ , γράφουμε την εξίσωση του αρμονικού κύματος,  $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ , η οποία με αντικατάσταση

γίνεται:  $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{2})(SI)$

- Αφού συνολικά η πηγή έχει κάνει 5 πλήρεις ταλαντώσεις το κύμα θα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $x = 5\lambda$ .
- Για  $x = 0$ , βρίσκουμε ότι η πηγή τη χρονική στιγμή αυτή, περνά από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, ( $y = 0$ ).
- Για  $x = \frac{\lambda}{4}$ , βρίσκουμε  $y = A\eta\mu(10\pi - \frac{\pi}{2}) = -A$

Συνεπώς το στιγμιότυπο θα είναι:



δ) Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι  $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{2})(SI)$ . Αφού κάθε υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η εξίσωση ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου θα είναι:  $v = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ , η οποία με αντικατάσταση γίνεται:

$$v = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(20\pi t - \pi x)(SI).$$

Με αντικατάσταση  $x = 5m$ ,  $t_1 = 0,5s$  προκύπτει

$$v = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi - 5\pi)(SI) \Rightarrow v = 20\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi) \Rightarrow v = -2\pi \frac{m}{s}$$

Το σημείο αυτό βρίσκεται σε αντίθετη φάση με την πηγή. Αυτό αποδεικνύεται και από το ότι η απόστασή του  $x$  από την πηγή είναι της μορφής  $x = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$ .

#### Πρόβλημα 4.

Δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους ( $A=2\text{cm}$ ) και ίδιας συχνότητας ( $f=10\text{Hz}$ ) διαδίδονται με ταχύτητα  $v=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$  σε ελαστική χορδή  $x'Ox$ , με αντίθετη φορά. Κατά μήκος της χορδής αποκαθίσταται στάσιμο κύμα και στο σημείο  $O$ , της θέσης  $x=0$ , δημιουργείται κοιλία. Το σημείο  $O$  τη χρονική στιγμή  $t=0$  έχει απομάκρυνση  $y=0$  και ταχύτητα  $v>0$ .

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων και να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δυο αυτών κυμάτων.

β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των δεσμών και τις θέσεις των κοιλιών και να βρείτε την απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της γειτονικής του κοιλίας.

γ) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο πλησιέστερων σημείων που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού και ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με το μισό του πλάτους της κοιλίας.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί κατά μήκος της χορδής, τις χρονικές στιγμές  $t_1 = \frac{T}{4}$  και  $t_2 = \frac{T}{2}$ .

#### Λύση

α) Από τη σχέση  $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$ , με αντικατάσταση βρίσκουμε το μήκος κύματος  $\lambda = \frac{20\text{m/s}}{10\text{Hz}} \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$ .

Τα δύο κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις:

Το διαδιδόμενο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x'Ox$ ,

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y_1 = 0,02\eta\mu 2\pi\left(10t - \frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Το διαδιδόμενο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $x'Ox$ ,

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2 = 0,02\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Σχόλιο: Το  $x$  παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Για να βρούμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας των κυμάτων:

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

από όπου προκύπτει:  $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$y = 0,04 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu 20\pi \text{ (SI)}$$

β) Δεσμοί θα είναι τα σημεία για τα οποία το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με μηδέν και ισχύει  $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0$ . Με λύση της εξίσωσης προκύπτει  $x_{\Delta} = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} = \pm\left(\frac{\lambda}{4} + \frac{k\lambda}{2}\right)$ , όπου το  $\pm$  υπάρχει επειδή το στάσιμο κύμα δημιουργείται και στον αρνητικό ημιάξονα.

Κοιλίες θα είναι τα σημεία για τα οποία το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο και ισχύει  $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1$ . Με λύση της εξίσωσης προκύπτει  $x_K = \pm\frac{k\lambda}{2}$ , όπου το  $\pm$  υπάρχει επειδή το στάσιμο κύμα δημιουργείται και στον αρνητικό ημιάξονα.

Η απόσταση  $d$  μεταξύ ενός δεσμού και μιας κοιλίας είναι ίση με  $\frac{\lambda}{4}$ , διότι

$$d = |x_{\Delta} - x_K| = \frac{\lambda}{4}$$

Το μήκος κύματος  $\lambda$  έχει υπολογιστεί από τη σχέση  $v = \lambda f$  και είναι  $\lambda = 2\text{m}$ . Άρα  $d = |x_{\Delta} - x_K| = 0,5\text{m}$

γ) Τα σημεία αυτά θα πάλλονται με πλάτος  $A$ , άρα θα ισχύει:  $2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = A$ , δηλαδή:

$$\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = \frac{1}{2}$$

από όπου προκύπτουν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = -\frac{1}{2}$$

Η 1<sup>η</sup> εξίσωση δίνει  $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Η 2<sup>η</sup> εξίσωση δίνει  $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Οι δύο σειρές λύσεων ενοποιούνται στην

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(k\lambda \pm \frac{\lambda}{3})}{2} \Rightarrow x = (\frac{k}{2} \pm \frac{1}{6})\lambda$$

Θα δουλέψουμε στο θετικό ημιάξονα. Προφανώς ότι ισχύουν στον άξονα αυτόν αντίστοιχα θα ισχύουν και στον αρνητικό.

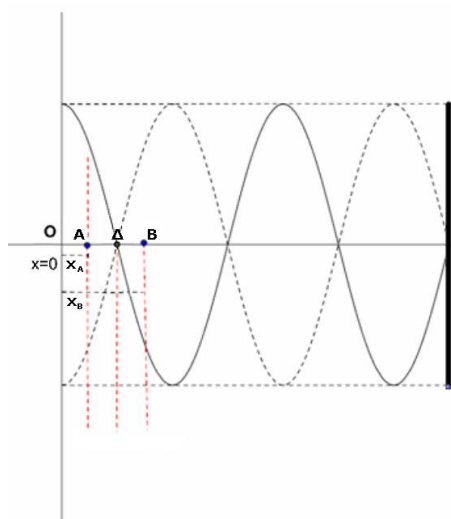
Η θέση του πιο κοντινού σημείου στο σημείο Ο που ταλαντώνεται με πλάτος Α, θα βρεθεί αν θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση,  $k=0$ , οπότε προκύπτει  $x_A = \frac{\lambda}{6}$ . Το σημείο αυτό είναι δεξιά του σημείου Ο, (βλέπε σχήμα) και θα είναι το κοντινότερο στον πρώτο δεσμό.

Αν στην παραπάνω εξίσωση  $x = (\frac{k}{2} \pm \frac{1}{6})\lambda$  θέσουμε  $k=1$ , προκύπτουν  $x_B = \frac{4\lambda}{6}$  και  $x_B = \frac{2\lambda}{6}$ .

Τα δύο πλησιέστερα σημεία στον πρώτο δεσμό είναι τα σημεία Α και Β με αποστάσεις από την αρχή Ο ίσες με  $x_A = \frac{\lambda}{6}$  και  $x_B = \frac{2\lambda}{6}$ .

Συνεπώς η ζητούμενη απόσταση θα είναι:  $d = x_B - x_A = \frac{2\lambda}{6} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{6}$ , άρα  $d = \frac{\lambda}{6} = \frac{1}{3}m$

Σχόλιο: Ότι ισχύει για τα δύο (πλησιέστερα) σημεία Α και Β που είναι εκατέρωθεν του πρώτου δεσμού, για λόγους συμμετρίας θα ισχύει και για όλα τα άλλα σημεία και στους άλλους δεσμούς.



δ) Το στάσιμο κύμα εκτείνεται και προς τις δύο κατευθύνσεις, με αρχή το σημείο Ο. Θέτοντας στην εξίσωση του στάσιμου κύματος  $t = \frac{T}{4}$ , προκύπτει:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 2A \sin(\pi x) \Rightarrow$$

$$y = 0,02 \sin(\pi x) \text{ (SI)}$$

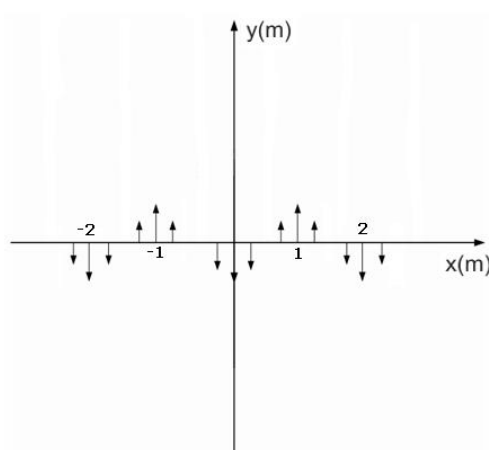
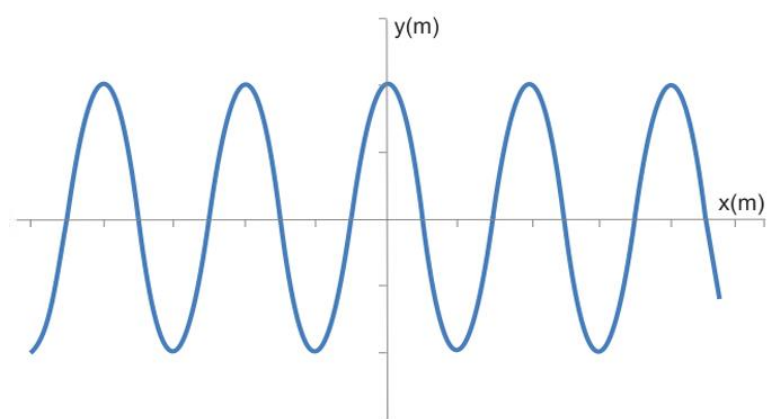
Για  $x = 0 \Rightarrow y = 2A$ , δηλαδή το σημείο Ο τη στιγμή  $t = \frac{T}{4}$  βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

Τη χρονική στιγμή  $t = \frac{T}{2}$  η εξίσωση του στάσιμου δίνει

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\pi \Rightarrow y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot 0 \Rightarrow y = 0$$

Τη χρονική στιγμή  $t = \frac{T}{2}$  το σημείο Ο, περνά από τη θέση ισορροπίας με αρνητική φορά, δηλαδή προς τα κάτω. Προφανώς όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή αυτή, θα περνούν από τη θέση ισορροπίας τους. Γνωρίζουμε επίσης, ότι όλα τα σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση, άρα περνούν από τη θέση ισορροπίας τους με ίδια φορά. Ενώ τα σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού, έχουν διαφορά φάσης  $\pi$  και συνεπώς περνούν από τη θέση ισορροπίας με αντίθετες κατευθύνσεις.

Συνεπώς τα στιγμιότυπα θα είναι:



### Πρόβλημα 5.

Σε ομογενή ελαστική χορδή μήκους  $L = 22,5\text{cm}$  που το ένα άκρο της είναι ακλόνητα στερεωμένο, δημιουργούνται στάσιμα κύματα. Ένα από τα αρμονικά κύματα που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα περιγράφεται από την εξίσωση  $y = 4\eta\mu(8\pi t - \frac{\pi x}{5})$  ( $t$  σε  $s$ ,  $y$  και  $x$  σε  $\text{cm}$ ). Το ελεύθερο άκρο της χορδής βρίσκεται στη θέση  $x=0$  και γνωρίζουμε ότι σε αυτό δημιουργείται κοιλία.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις του ανακλώμενου και του στάσιμου κύματος.

β) Να βρεθούν ο αριθμός των δεσμών και ο αριθμός των κοιλιών, που δημιουργούνται κατά μήκος της χορδής.

γ) Να γίνουν τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1 = \frac{T}{4}$  και  $t_2 = \frac{3T}{4}$  στο ίδιο διάγραμμα.

δ) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων της χορδής που έχουν μέγιστη ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό της μέγιστης ταχύτητας μιας κοιλίας.

### Λύση

α) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$y = 4\eta\mu 2\pi(4t - \frac{x}{10}) \quad (t \text{ σε } s, y \text{ και } x \text{ σε } \text{cm}).$$

Άρα, η εξίσωση του ανακλώμενου κύματος είναι

$$y = 4\eta\mu 2\pi(4t + \frac{x}{10}) \quad (t \text{ σε } s, y \text{ και } x \text{ σε } \text{cm}).$$

Η γενική εξίσωση του τρέχοντος αρμονικού κύματος είναι  $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ .

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με την πρώτη προκύπτει ότι  $T = \frac{1}{4}\text{s} \Rightarrow f = 4\text{Hz}$  και  $\lambda = 10\text{cm}$ .

Στη γενική περίπτωση η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi f t$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{10} \cdot \eta\mu 2\pi 4t \Rightarrow y = 8 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} \cdot \eta\mu 8\pi t \quad (t \text{ σε } s, y \text{ και } x \text{ σε } \text{cm}).$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:  $v = \lambda f = 40 \text{ cm/s}$ .

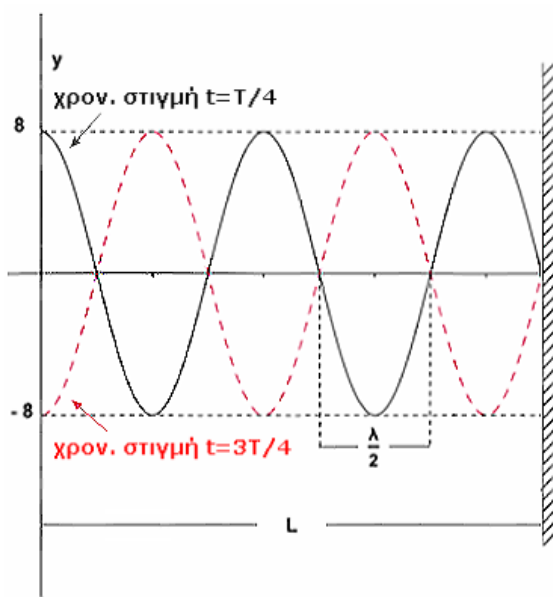
β) Η απόσταση κάθε δεσμού από τη θέση  $x=0$ , όπου δημιουργείται κοιλία θα είναι:

$x = \frac{\lambda}{4} + \frac{\kappa\lambda}{2}$ . Αν θέσουμε όπου  $x = L = 22,5\text{cm}$  και  $\lambda = 10\text{cm}$  βρίσκουμε  $\kappa = 4$ , συνεπώς οι δεσμοί θα είναι συνολικά 5, συμπεριλαμβανόμενου και του δεσμού στο ακλόνητο άκρο. Τόσες θα είναι και οι κοιλίες, δηλαδή 5.

γ) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:  $y = 8 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} \cdot \eta\mu 8\pi t$  ( $t$  σε  $s$ ,  $y$  και  $x$  σε  $\text{cm}$ )

Για  $t = \frac{T}{4}$ , γίνεται:  $y = 8 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} (\text{cm})$ .

Για  $t = \frac{3T}{4}$  γίνεται:  $y = -8 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} (\text{cm})$ . Οπότε τα στιγμιότυπα θα είναι τα παρακάτω:



δ) Κάθε υλικό σημείο της χορδής εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των κοιλιών είναι  $v_{\max(\kappa)} = \omega A_{\max(\kappa)} \Rightarrow v_{\max(\kappa)} = \omega 2A$ . Εμείς ψάχνουμε τις θέσεις των σημείων της χορδής που έχουν μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης  $v_{\max} = \omega A$ , δηλαδή έχουν πλάτος ταλάντωσης  $A' = A = 4\text{cm}$ . Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου περιγράφεται από τη σχέση  $A' = \left| 8 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} \right| (\text{cm})$ .

$$\text{Άρα έχουμε } 4 = \left| 8 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} \right| \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} = \frac{1}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{5} = -\frac{1}{2}.$$

Η λύση της 1ης εξίσωσης δίνει:

$$\frac{\pi x}{5} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 10k \pm \frac{5}{3} (\text{cm}) \text{ με } 0 < x < 22,5\text{cm} \text{ ή } 0 < x < \frac{67,5}{3}\text{cm}$$

$$\text{Για } k=0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Για } k=1 \Rightarrow x = \frac{35}{3} \text{ cm και } x = \frac{25}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Για } k=2 \Rightarrow x = \frac{65}{3} \text{ cm και } x = \frac{55}{3} \text{ cm}$$

Η λύση της 2<sup>ης</sup> εξίσωσης δίνει:

$$\frac{\pi x}{5} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 10k \pm \frac{10}{3} \text{ (cm) με } 0 < x < 22,5 \text{ cm ή } 0 < x < \frac{67,5}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Για } k=0 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Για } k=1 \Rightarrow x = \frac{40}{3} \text{ cm και } x = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Για } k=2 \Rightarrow x = \frac{70}{3} \text{ cm (απορρίπτεται) και } x = \frac{50}{3} \text{ cm}$$

Οι ζητούμενες θέσεις είναι συνολικά 9.

### Πρόβλημα 6.

Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το σημείο  $O$  μιας ομογενούς ελαστικής χορδής με  $x_0=0$ , αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κάθετα στη διεύθυνση της χορδής. Η απομάκρυνση του σημείου  $O$  από τη θέση ισορροπίας του περιγράφεται από τη σχέση  $y_0=0,1\mu\text{m}2\pi\text{t}$  (S.I.) και το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'$   $Ox$  με ταχύτητα μέτρου  $2\text{m/s}$ . Ένα υλικό σημείο  $N$  της χορδής φτάνει για πρώτη φορά στην ακραία αρνητική του θέση τη χρονική στιγμή  $t=2,75\text{s}$ . Να υπολογίσετε:

A) τη θέση του σημείου  $N$ .

B) τη φάση του σημείου  $O$ , όταν η ταχύτητα του σημείου  $N$  γίνεται μηδέν για πρώτη φορά.

Γ) τις θέσεις των σημείων της χορδής, ανάμεσα στο  $O$  και το  $N$ , που είναι ακίνητα ταυτόχρονα με το σημείο  $N$  και να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t=2,75\text{ s}$ .

Δ) την απομάκρυνση του υλικού σημείου  $N$  από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα  $v = 0,1\pi\text{ m/s}$  και επιταχύνεται.

### Λύση

A) Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης ταλάντωσης του σημείου  $O$ ,  $x_0=0$ , της ελαστικής χορδής  $y=0,1\mu\text{m}2\pi\text{t}$  (S.I.) με τη γενική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης  $y = A\eta\mu\omega\text{t}$ , προκύπτει ότι:

$A=0,1\text{ m}$  και  $\omega=2\pi\text{ rad/s}$ .

Η περίοδος της ταλάντωσης της πηγής, άρα και του κύματος είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow T = 1\text{s}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε το μήκος κύματος:

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = vT = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{s} \Rightarrow \lambda = 2\text{m}.$$

Το σημείο  $N$  τη χρονική στιγμή  $t=2,75\text{s}$  φτάνει για πρώτη φορά στην ακραία αρνητική του θέση. Από τη στιγμή που άρχισε να ταλαντώνεται το σημείο  $N$  μέχρι να φτάσει για πρώτη φορά στην ακραία αρνητική του θέση απαιτείται χρόνος  $3T/4$ . Χρειάστηκε όμως

και ένα χρονικό διάστημα  $t_1 = \frac{x_N}{v}$ , για να φτάσει το κύμα από το σημείο  $O$  στο σημείο

$N$ . Άρα

$$t = t_1 + \frac{3T}{4} \Rightarrow 2,75s = \frac{x_N}{v} + \frac{3T}{4} \Rightarrow 2,75s = \frac{x_N}{2m/s} + \frac{3 \cdot 1s}{4} \Rightarrow 2,75s = \frac{x_N}{2m/s} + 0,75s \Rightarrow$$

$$x_N = 4m.$$

### B) Α' τρόπος

Η ταχύτητα του σημείου N γίνεται μηδέν για πρώτη φορά όταν φτάσει στην ακραία θετική θέση, δηλαδή σε χρόνο  $T/4$  από τη στιγμή που άρχισε να ταλαντώνεται. Άρα, από την αρχή διάδοσης του κύματος η ταχύτητα του σημείου N γίνεται μηδέν για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή  $t_2$  για την οποία ισχύει:

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{4} = \frac{x_N}{v} + \frac{T}{4} = \frac{4m}{2m/s} + \frac{1s}{4} \Rightarrow t_2 = 2,25s.$$

Η φάση του σημείου O τη χρονική στιγμή  $t_2$  είναι:

$$\varphi = \omega t_2 = 2\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot 2,25s = 4,5\pi \text{ rad}.$$

### B) Β' τρόπος

Το δημιουργούμενο κύμα έχει φάση που περιγράφεται από τη σχέση

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{T=1s, \lambda=2m} \varphi = 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η ταχύτητα του σημείου N γίνεται μηδέν για πρώτη φορά όταν  $\varphi_N = \pi/2$ .

Με αντικατάσταση στην σχέση (1),  $\varphi_N = \pi/2$ ,  $x_N = 4m$  βρίσκουμε τη χρονική στιγμή  $t_2$

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi \left( t_2 - \frac{4}{2} \right) \Rightarrow t_2 = 2,25s.$$

Η φάση του σημείου O τη χρονική στιγμή  $t_2$  είναι:

$$\varphi = \omega t_2 = 2\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot 2,25s = 4,5\pi \text{ rad}.$$

Γ) Όλα τα σημεία της χορδής που απέχουν από το N κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\lambda/2$  μένουν ακίνητα ταυτόχρονα με το σημείο N, δηλαδή βρίσκονται ταυτόχρονα με το σημείο N στις ακραίες τους θέσεις (είτε θετικές, είτε αρνητικές). Επειδή αναζητούμε τις θέσεις των σημείων της χορδής, ανάμεσα στο O και το N, οι θέσεις τους είναι

$$x = x_N - \kappa \frac{\lambda}{2} \quad \mu\epsilon \quad 0 < x < 4m.$$

$$\text{Για } \kappa=1 \text{ έχουμε } x = 4m - 1 \frac{2m}{2} = 3m.$$

Για  $\kappa=2$  έχουμε  $x = 4\text{m} - 2\frac{2\text{m}}{2} = 2\text{m}$ .

Για  $\kappa=3$  έχουμε  $x = 4\text{m} - 3\frac{2\text{m}}{2} = 1\text{m}$ .

Για  $\kappa=4$  έχουμε  $x = 4\text{m} - 4\frac{2\text{m}}{2} = 0$ .

Άρα, τρία μόνο σημεία, μεταξύ των Ο και Ν μένουν ακίνητα ταυτόχρονα με το σημείο Ν: τα σημεία με θέση  $x=1\text{m}$ ,  $x=2\text{m}$ , και  $x=3\text{m}$ .

Η εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα, που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x$  Όχ είναι

$$y = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,1 \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{1} - \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

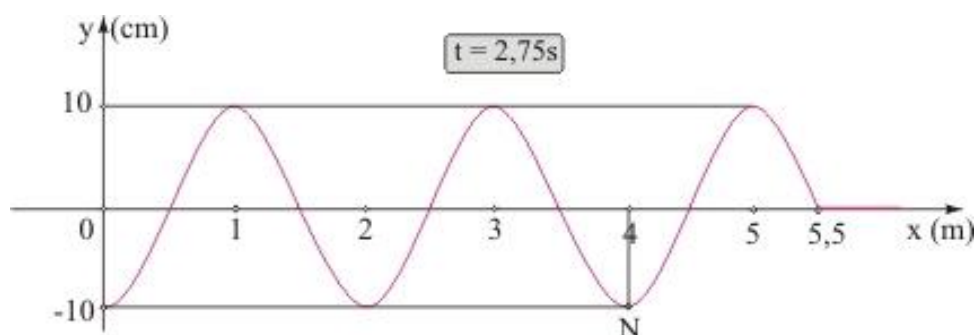
Αντικαθιστώντας τη χρονική στιγμή  $t=2,75\text{ s}$ , που μας ζητείται να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος έχουμε

$$y = 0,1 \eta \mu 2\pi \left( 2,75 - \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Σε χρόνο  $t=2,75\text{ s} = 11T/4$  το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$$x = v \cdot t = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,75\text{ s} \Rightarrow x = 5,5\text{m} = 11 \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x = 2\lambda + \frac{3\lambda}{4}.$$

Η αρχή Ο της ελαστικής χορδής τη χρονική στιγμή  $t=2,75\text{ s} = 11T/4$  θα βρίσκεται στην ακραία αρνητική της θέση και το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t=2,75\text{ s}$  φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Δ) Η απομάκρυνση του σημείου Ν υπολογίζεται με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωσή του

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow m \omega^2 A^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} = \pm \sqrt{(0,1\text{m})^2 - \frac{(0,1\pi \text{ m/s})^2}{(2\pi \text{ rad/s})^2}} \Rightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{10^{-2} - \frac{1}{4} \cdot 10^{-2}} \text{ m} = \pm \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 10^{-2}} \text{ m} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-1} \text{ m}.$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, το σημείο Ν τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα  $v = 0,1\pi \text{ m/s}$ , επιταχύνεται, δηλαδή κινείται προς τη θέση ισορροπίας, έχοντας θετική ταχύτητα. Άρα, δεκτή είναι η αρνητική απομάκρυνση

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-1} \text{ m}.$$

### Πρόβλημα 7.

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση, κατά μήκος του άξονα  $x'$ Ο $x$ , γραμμικού ελαστικού μέσου. Τη χρονική στιγμή  $t=0$ , το σημείο Ο που βρίσκεται στη θέση  $x_0=0$  διέρχεται για πρώτη φορά από την ακραία αρνητική του θέση, ενώ το κύμα έχει φτάσει μέχρι το σημείο Μ το οποίο βρίσκεται στη θέση  $x_M=1,5\text{m}$ . Ένα μικρό κομμάτι φελλού, μάζας  $m=0,01\text{kg}$ , που βρίσκεται στο σημείο Μ, ξεκινά να ταλαντώνεται με πλάτος  $A=2\text{cm}$  διαγράφοντας διαδρομή μήκους  $5\text{cm}$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_1=0,07\text{s}$ .

Α) Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης του σημείου Ο και το μήκος κύματος  $\lambda$ .

Β) Να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης του τρέχοντος κύματος και την ταχύτητα διαδόσής του.

Γ) Να γράψετε την εξίσωση του τρέχοντος κύματος και να σχεδιάσετε το στιγμιότυπό του τη χρονική στιγμή  $t_2=0,21\text{s}$ .

Δ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του φελλού τη χρονική στιγμή  $t_2=0,21\text{s}$ .

$$\Deltaίνεται\ το\ \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

### Λύση

Α) Επειδή τη χρονική στιγμή  $t=0$  το σημείο Ο δεν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, η ταλάντωσή του έχει αρχική φάση  $\varphi_0$ . Η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι

$$y_O = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

και η εξίσωση του δημιουργούμενου κύματος

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right) \quad (2)$$

Για  $t=0$ , η απομάκρυνση του σημείου Ο είναι για 1<sup>η</sup> φορά  $y_0 = -A$ , άρα από τη σχέση (1) προκύπτει

$$-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}.$$

Τη χρονική στιγμή  $t=0$ , το σημείο Μ,  $x_M=1,5\text{m}$ , έχει φάση  $\varphi_M = 0\text{rad}$ , αφού το κύμα μόλις έφτασε στο σημείο Μ. Με αντικατάσταση στη φάση του κύματος, όπως αυτή φαίνεται στη σχέση (2) προκύπτει

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right) \longrightarrow 0 = 2\pi\left(\frac{0}{T} - \frac{1,5\text{m}}{\lambda} + \frac{3\pi/2}{2\pi}\right) \Rightarrow \lambda = 2\text{m}.$$

Β) Η διαδρομή μήκους  $S = 5\text{cm}$  που διέγραψε ο φελλός ισούται με δύο πλάτη  $A$  και μία διαδρομή μήκους  $d = 1\text{cm}$ , όπως φαίνεται από την εξίσωση

$$S = 2A + d \Rightarrow 5\text{cm} = 2 \cdot 2\text{cm} + d \Rightarrow d = 1\text{cm}.$$

Ο φελλός διαγράφει διαδρομή δύο πλατών πηγαίνοντας πρώτα στην ακραία θετική θέση, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του και μετά διαγράφει διαδρομή μήκους  $d$  κινούμενος προς την αρνητική ακραία θέση, άρα τη χρονική στιγμή  $t_1 = 0,07\text{ s}$  βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y_M = -d = -1\text{cm}$ , με αρνητική ταχύτητα. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού θα βρούμε την περίοδο ταλάντωσης του τρέχοντος κύματος

$$y_M = A \eta \mu \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] \Rightarrow -1\text{cm} = 2\text{cm} \cdot \eta \mu \left[ 2\pi \left( \frac{0,07\text{s}}{T} - \frac{1,5\text{m}}{2\text{m}} \right) + \frac{3\pi}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\eta \mu 2\pi \frac{0,07\text{s}}{T} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \frac{0,14\pi\text{s}}{T} = -\frac{1}{2} = \eta \mu \frac{7\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{0,14\pi\text{s}}{T} = \left\{ \begin{array}{l} 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \end{array} \right\}$$

Επειδή ο φελλός φτάνει στη θέση  $y_M = -1\text{cm}$  για πρώτη φορά θέτουμε στις δύο ομάδες λύσεων  $k=0$  και  $k=1$  αντίστοιχα

$$\frac{0,14\pi\text{s}}{T} = \left\{ \begin{array}{l} 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \end{array} \right\} \xrightarrow[k=1]{k=0} \frac{0,14\pi\text{s}}{T} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{7\pi}{6} \\ \frac{11\pi}{6} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$$

Από τις δύο ομάδες λύσεων κάνουμε δεκτή την (3), γιατί ο φελλός βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y_M = -1\text{cm}$ , με αρνητική ταχύτητα και κατά συνέπεια το συνημίτονο της φάσης πρέπει να είναι αρνητικό. Η σχέση (3) δίνει

$$\frac{0,14\pi\text{s}}{T} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow T = 0,12\text{s}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε την ταχύτητα διαδόσεως του τρέχοντος κύματος

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\text{m}}{0,12\text{s}} \Rightarrow v = \frac{50}{3} \text{m/s}.$$

Γ) Η εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα, που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'$  Ο $x$  είναι

$$y = A \eta \mu \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] \Rightarrow y = 0,02\eta \mu \left[ 2\pi \left( \frac{t}{0,12} - \frac{x}{2} \right) + \frac{3\pi}{2} \right] \quad (\text{S.I.})$$

Αντικαθιστώντας τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,21 \text{ s}$ , που μας ζητείται να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος, έχουμε

$$y = 0,02\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{0,21}{0,12} - \frac{x}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow y = 0,02\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \pi x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y = 0,02\eta\mu(5\pi - \pi x) \quad (\text{S.I.})$$

Τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,21 \text{ s} (= 7T/4)$  το κύμα έχει διαδοθεί μετά το σημείο Μ, που είχε φτάσει τη χρονική στιγμή  $t=0$ , σε απόσταση

$$x = v \cdot t = \frac{100 \text{ m}}{6 \text{ s}} \cdot 0,21 \text{ s} \Rightarrow x = \frac{21}{6} \text{ m} = 7\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x = \lambda + \frac{3\lambda}{4}$$

Άρα, τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,21 \text{ s}$  το κύμα έχει φθάσει μέχρι τη θέση

$$x_M + x = 1,5\text{m} + \frac{21}{6}\text{m} = 5\text{m}.$$

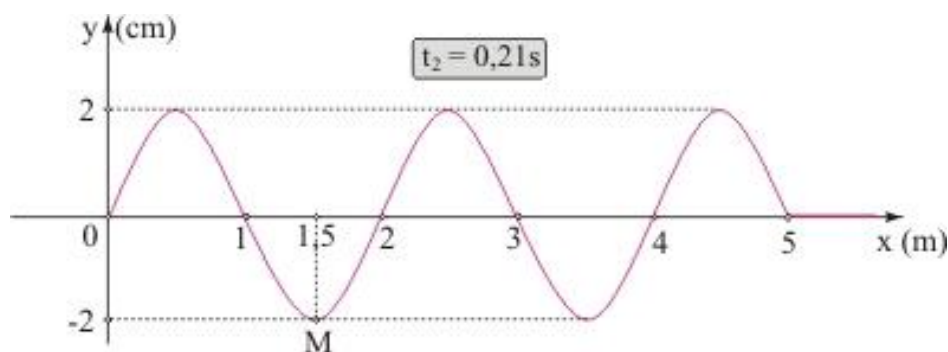
Η αρχή Ο της ελαστικής χορδής τη χρονική στιγμή  $t = 0,21 \text{ s} = 7T/4$  βρίσκεται στη θέση

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,02\text{m} \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{0,12\text{s}}t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y = 0,02\text{m} \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{0,12\text{s}}0,21\text{s} + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 0,02\text{m} \cdot \eta\mu 5\pi \Rightarrow y = 0.$$

Το σημείο Ο τη χρονική στιγμή  $t = 0,21 \text{ s} = 7T/4$  βρίσκεται στη θέση  $y=0$  με ταχύτητα αρνητική, αφού  $v = v_{\max} \sin 5\pi < 0$ .

Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,21 \text{ s}$  φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του φελλού είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma F \frac{dy}{dt} = \Sigma F v = -Dy v \quad (5)$$

Τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,21 \text{ s}$  ο φελλός έχει απομάκρυνση

$$y = 0,02\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{0,21}{0,12} - \frac{1,5}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow y = 0,02\eta\mu\frac{7\pi}{2} = -0,02\text{m} .$$

Άρα ο φελλός είναι στην ακραία αρνητική του θέση και η ταχύτητά του είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, όπως φαίνεται από τη σχέση (5) και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του φελλού είναι μηδέν.

### Πρόβλημα 8.

Στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούνται εγκάρσια επιφανειακά κύματα από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , που βρίσκονται στα σημεία A και B. Η απόσταση AB είναι 8 m. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα με μήκος κύματος  $\lambda=2\text{m}$ . Το πλάτος ταλάντωσης του μέσου M του τμήματος AB μετά την συμβολή των δύο κυμάτων είναι 2cm και η συχνότητα της ταλάντωσής του είναι 0,5 Hz.

Ένα μικρό κομμάτι φελλού, μάζας  $m=0,01\text{ kg}$ , βρίσκεται σε σημείο P της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB, σε αποστάσεις

$r_1 = 6\text{ m}$  και  $r_2$  από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κάθετα στην επιφάνεια του υγρού.

A) Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης του φελλού μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

B) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, έως τη χρονική στιγμή  $t_1 = 12\text{ s}$ .

Γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του φελλού τη χρονική στιγμή  $t_2 = 20\text{ s}$ .

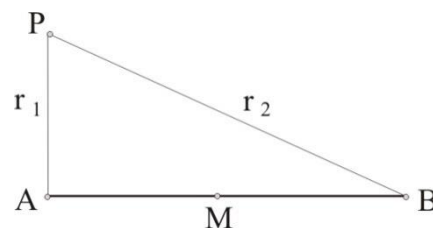
Δ) Να βρείτε πόσα σημεία μεταξύ του A και του P έχουν ενέργεια ταλάντωσης ίση με αυτή του σημείου P.

Δίνεται ότι  $\pi^2=10$ .

### Λύση

A) Η απόσταση  $r_2$  μεταξύ των σημείων B και P βρίσκεται με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος για το τρίγωνο ABP

$$(PB) = r_2 = \sqrt{r_1^2 + (AB)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} \text{ m} \Rightarrow r_2 = 10 \text{ m}.$$



Το πλάτος ταλάντωσης του μέσου M του τμήματος AB μετά την συμβολή των δύο κυμάτων είναι 2cm. Το σημείο M είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, άρα

$$A_M' = 2A \Rightarrow 2\text{cm} = 2A \Rightarrow A = 1\text{cm}.$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι 0,5 Hz, άρα

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ rad/s} \text{ και}$$

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{0,5} \Rightarrow T = 2\text{s}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, βρίσκουμε την ταχύτητα του κύματος

$$v = \lambda f \Rightarrow v = 2\text{m} \cdot 0,5\text{Hz} \Rightarrow v = 1\text{m/s}.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού που βρίσκεται στο σημείο P, μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα είναι:

$$A_p' = 2A \left| \sin 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \right| = 2 \cdot 0,01 \left| \sin 2\pi \frac{10\text{m} - 6\text{m}}{2 \cdot 2\text{m}} \right| \text{m} = 0,02 \cdot \left| \sin 2\pi \right| \text{m} \Rightarrow A_p' = 0,02\text{m}.$$

Το σημείο P είναι λοιπόν ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Η ενέργεια ταλάντωσης του φελλού μετά την συμβολή των δύο κυμάτων είναι

$$E = \frac{1}{2} D A_p'^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A_p'^2 = \frac{1}{2} 0,01\text{kg} \cdot (\pi \text{ s}^{-1})^2 \cdot (0,02\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} 0,01 \cdot \pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{J} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^{-5} \text{J}.$$

Β) Τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο P τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{6\text{m}}{1\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = 6\text{s} \text{ και}$$

$$t_2 = \frac{r_2}{v} = \frac{10\text{m}}{1\text{m/s}} \Rightarrow t_2 = 10\text{s}.$$

Μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_1=6\text{ s}$  ο φελλός είναι ακίνητος. Από τη στιγμή  $t_1=6\text{ s}$  έως τη στιγμή  $t_2=10\text{ s}$  ταλαντώνεται εξαιτίας του ενός μόνο κύματος με εξίσωση

$$y = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = 0,01 \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - 3 \right), \text{ (S.I.)}$$

Τέλος η εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού μετά τη χρονική στιγμή  $t_2=10\text{ s}$ , που ξεκινάει η συμβολή των δύο κυμάτων είναι

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) = 0,02 \cdot \sin 2\pi \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{6\text{m} + 10\text{m}}{2 \cdot 2\text{m}} \right) \Rightarrow$$

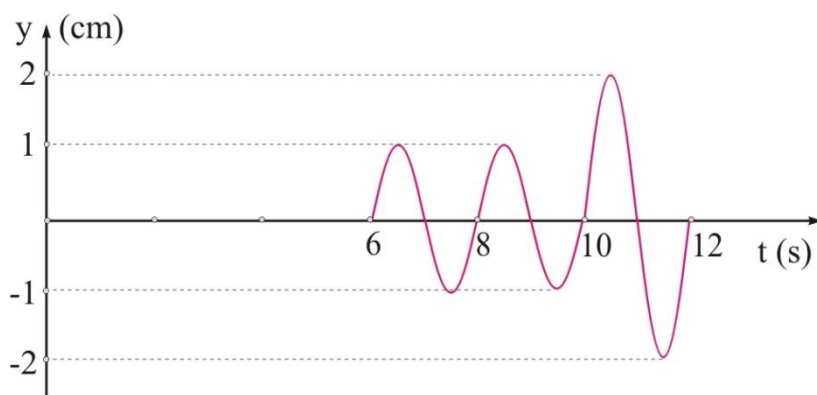
$$y = 0,02 \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - 4 \right) \quad \text{(S.I.)}$$

Άρα η απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, είναι

$$y = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 6 \text{ s} \\ 0,01\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-3\right) \text{ (S.I.)} & \text{για } 6 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s} \\ 0,02 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-4\right) \text{ (S.I.)} & \text{για } t \geq 10 \text{ s} \end{cases}$$

Η περίοδος παραμένει σταθερή και ίση με  $T=2 \text{ s}$ .

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, έως τη χρονική στιγμή  $t_1=12 \text{ s}$  φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Γ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού μετά τη χρονική στιγμή  $t_2=10 \text{ s}$ , που ξεκινάει η συμβολή των δύο κυμάτων είναι

$$y = 0,02 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-4\right) \quad (\text{S.I.})$$

Άρα η εξίσωση της ταχύτητάς του είναι

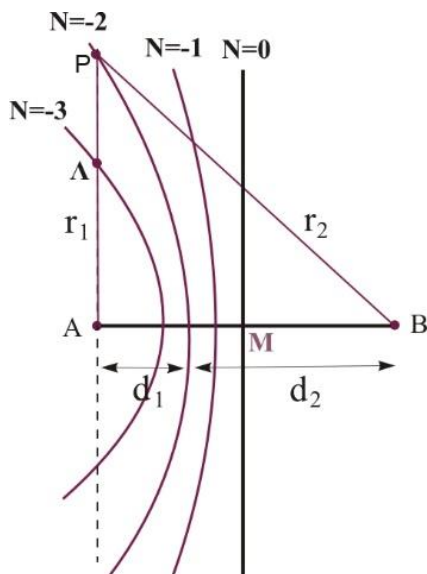
$$v = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{2}-4\right) = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{2}-4\right) \Rightarrow$$

$$v = 0,02\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{2}-4\right) \quad (\text{S.I.})$$

Η ταχύτητα του φελλού τη χρονική στιγμή  $t_2 = 20 \text{ s}$  είναι

$$v = 0,02\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{20}{2}-4\right) = 0,02\pi \text{ m/s}.$$

Δ) Το σημείο Ρ είδαμε ότι είναι ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής. Τα σημεία που έχουν ενέργεια ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του φελλού θα έχουν και το ίδιο πλάτος, κατά συνέπεια θα είναι κι αυτά σημεία ενισχυτικής συμβολής.



Θα βρούμε το σημείο P σε ποια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής ανήκει. Είναι

$$r_1 - r_2 = N \cdot \lambda \Rightarrow 6\text{m} - 10\text{m} = N \cdot 2\text{m} \Rightarrow N = -2.$$

Τώρα θα βρούμε πόσες συνολικά καμπύλες ενισχυτικής συμβολής διέρχονται μεταξύ των σημείων A και M.

$$\text{Είναι } d_1 - d_2 = N \cdot \lambda \quad (1) \text{ και}$$

$$d_1 + d_2 = (AB) = 8\text{ m} \Rightarrow d_2 = 8\text{m} - d_1.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε

$$d_1 - (8\text{m} - d_1) = N \cdot 2\text{m} \Rightarrow 2 d_1 = 8\text{m} + N \cdot 2\text{m} \Rightarrow d_1 = (N + 4) \text{ m} \quad \text{με } 0 < d_1 < (AM).$$

Το  $d_1$  παίρνει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός και μικρότερες του (AM). Άρα

$$0 < d_1 < 4\text{m} \Rightarrow 0 < (N + 4) \text{ m} < 4\text{m} \Rightarrow -4 < N < 0.$$

Υπάρχει λοιπόν, μία ακόμα καμπύλη ενισχυτικής συμβολής για  $N = -3$  και κατά συνέπεια ένα σημείο, το σημείο Λ, μεταξύ του A και του P που έχει ενέργεια ταλάντωσης ίση με αυτή του σημείου P.

### Πρόβλημα 9.

Δύο σύγχρονες πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων, που βρίσκονται στα σημεία Α και Β της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή  $t=0$ , χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα ίδιου πλάτους  $A=4\text{mm}$ , τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα  $v=0,5\text{m/s}$ . Η απόσταση (ΑΒ) είναι  $42\text{cm}$ . Ένα σημείο Μ της 3<sup>ης</sup> υπερβολής ενισχυτικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου, απέχει  $r_1=40\text{cm}$  από την πηγή  $\Pi_1$  και  $r_2$  από την πηγή  $\Pi_2$ , με  $r_1 > r_2$ . Τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο Μ με χρονική διαφορά  $\Delta t=0,6\text{s}$ . Στο σημείο Μ βρίσκεται μικρό κομμάτι φελλού, μάζας  $m=2\text{g}$ , που μπορεί να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κάθετα στην επιφάνεια του υγρού.

Α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος  $\lambda$  των δύο κυμάτων και τη συχνότητα  $f$  των δύο πηγών.

Β) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη δυναμική ενέργεια του φελλού σε σχέση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 1,2\text{s}$  και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες.

Γ) Να υπολογίσετε πόσα σημεία παραμένουν διαρκώς ακίνητα και βρίσκονται μεταξύ των σημείων Α και Β του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Δ) Να υπολογίσετε ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα των δύο πηγών για την οποία ο φελλός που βρίσκεται στο σημείο Μ, μπορεί να παραμένει διαρκώς ακίνητος μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.

Δίνεται ότι  $\pi^2=10$ .

### Λύση

Α) Τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο Μ τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = \frac{r_1}{v} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{r_2}{v} .$$

Άρα για τη χρονική διαφορά  $\Delta t=0,6\text{ s}$  που φτάνουν τα δύο κύματα στο σημείο Μ έχουμε

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{r_1}{v} - \frac{r_2}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{r_1 - r_2}{v} \Rightarrow r_1 - r_2 = v\Delta t \Rightarrow$$

$$r_1 - r_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,6\text{s} \Rightarrow r_1 - r_2 = 0,3\text{m} \Rightarrow 0,4\text{m} - r_2 = 0,3\text{m} \Rightarrow$$

$$r_2 = 0,1\text{m} .$$

Για το σημείο Μ που ανήκει στην 3<sup>η</sup> υπερβολή ενισχυτικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου, έχουμε

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 3\lambda \Rightarrow 0,3\text{m} = 3\lambda \Rightarrow \lambda = 0,1\text{m}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε τη συχνότητα  $f$  των δύο πηγών

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1\text{m}} \Rightarrow f = 5\text{Hz}.$$

Β) Η δυναμική ενέργεια του φελλού δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2}Dy^2.$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του φελλού είναι

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \text{ rad/s}.$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του φελλού είναι

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 2 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \left(10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$D = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο N τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{0,4\text{m}}{0,5\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = 0,8\text{s} \text{ και}$$

$$t_2 = \frac{r_2}{v} = \frac{0,1\text{m}}{0,5\text{m/s}} \Rightarrow t_2 = 0,2\text{s}.$$

Μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,2\text{s}$  κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο M, άρα ο φελλός δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και η δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν. Από τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,2\text{s}$  μέχρι την  $t_1 = 0,8\text{s}$  στο φελλό έχει φτάσει μόνο το κύμα από την πηγή Π<sub>2</sub> και η εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) = 4 \cdot 10^{-3} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{0,1\text{m}}{0,1\text{m}} \right) \Rightarrow y = 4 \cdot 10^{-3} \eta\mu 2\pi (5t - 1) \quad (\text{S.I.})$$

Άρα η δυναμική ενέργεια του φελλού είναι

$$U = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2} 2 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left[ 4 \cdot 10^{-3} \eta\mu 2\pi (5t - 1) \right]^2 \Rightarrow U = 16 \cdot 10^{-6} \eta\mu^2 2\pi (5t - 1) \quad (\text{SI})$$

Τέλος έπειτα από τη χρονική στιγμή  $t_1 = 0,8\text{s}$  αρχίζει η συμβολή των κυμάτων στο σημείο M και η εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού είναι

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \sin 2\pi \frac{0,4\text{m} - 0,1\text{m}}{2 \cdot 0,1\text{m}} \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{s}} - \frac{0,4\text{m} + 0,1\text{m}}{2 \cdot 0,1\text{m}} \right) \Rightarrow$$

$$y = 8 \cdot 10^{-3} \sin 3\pi \cdot \eta \mu 2\pi \left( 5t - \frac{5}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y = -8 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi \left( 5t - \frac{5}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

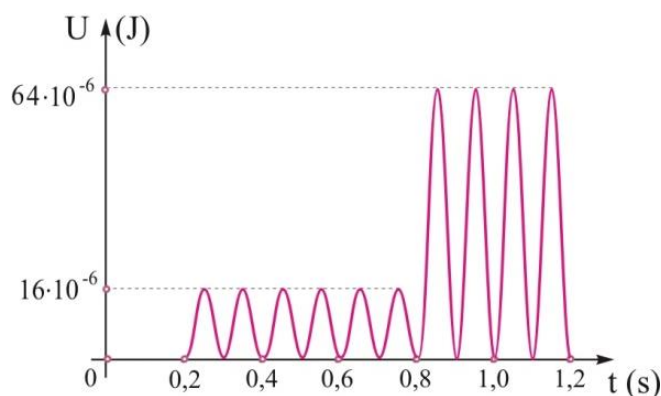
Άρα η δυναμική ενέργεια του φελλού έπειτα από τη χρονική στιγμή  $t_1 = 0,8\text{s}$  είναι

$$U = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} 2 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left[ -8 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi \left( 5t - \frac{5}{2} \right) \right]^2 \Rightarrow U = 64 \cdot 10^{-6} \eta \mu^2 2\pi \left( 5t - \frac{5}{2} \right) \quad (\text{SI})$$

Συνολικά έχουμε:

$$U = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0,2\text{s} \\ 16 \cdot 10^{-6} \eta \mu^2 2\pi (5t - 1) \quad (\text{SI}) & \text{για } 0,2\text{s} \leq t < 0,8\text{s} \\ 64 \cdot 10^{-6} \eta \mu^2 2\pi \left( 5t - \frac{5}{2} \right) \quad (\text{SI}) & \text{για } t \geq 0,8\text{s} \end{cases}$$

Η δυναμική ενέργεια του φελλού σε σχέση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 1,2\text{s}$  φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Γ) Τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος AB που παραμένουν διαρκώς ακίνητα ανήκουν πάνω στις υπερβολές απόσβεσης. Θα υπολογίσουμε τον αριθμό τους. Έστω ένα σημείο K πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB που απέχει  $d_1$  και  $d_2$  από τις δύο πηγές. Θα ισχύει

$$d_1 + d_2 = AB = 0,42\text{ m} \Rightarrow d_2 = 0,42\text{m} - d_1 \text{ και}$$

$$\begin{aligned}d_1 - d_2 &= (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_1 - (0,42\text{m} - d_1) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \\2d_1 - 0,42\text{m} &= (2N+1)\frac{0,1\text{m}}{2} \Rightarrow d_1 = (2N+1)\frac{0,1\text{m}}{4} + 0,21\text{m} \Rightarrow \\d_1 &= (0,05N + 0,235)\text{m} \quad (1)\end{aligned}$$

Το  $d_1$  παίρνει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός και μικρότερες του (AB). Άρα

$$\begin{aligned}0 < d_1 < (AB) &\Rightarrow 0 < (0,05N + 0,235)\text{m} < 0,42\text{m} \Rightarrow \\-0,235\text{m} < 0,05N\text{m} < (0,42 - 0,235)\text{m} &\Rightarrow -0,235\text{m} < N 0,05\text{m} < 0,185\text{m} \Rightarrow \\-\frac{0,235\text{m}}{0,05\text{m}} < N < \frac{0,185\text{m}}{0,05\text{m}} &\Rightarrow -4,7 < N < 3,7.\end{aligned}$$

Οι ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν τη διπλή ανισότητα είναι οκτώ, δηλαδή οι

$N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  και τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος AB που παραμένουν διαρκώς ακίνητα είναι οκτώ.

Δ) Αφού θα αλλάξουμε τη συχνότητα των δύο πηγών, θα αλλάξει και το μήκος κύματος, ενώ η ταχύτητα των κυμάτων μένει σταθερή. Έστω  $\lambda'$  και  $f'$  το νέο μήκος κύματος και η νέα συχνότητα αντίστοιχα. Θα είναι

$$v = \lambda' f' \Rightarrow \lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{f'} \quad (2)$$

Για να μένει ο φελλός διαρκώς ακίνητος μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Μ, αυτό θα ανήκει σε υπερβολή απόσβεσης και θα ισχύει

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda'}{2} \quad \text{με } N = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2), η σχέση (3) γίνεται

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{f'}}{2} \Rightarrow 0,3 = (2N+1)\frac{1}{4f'} \Rightarrow f' = (2N+1)\frac{1}{1,2}.$$

Για να είναι η συχνότητα ελάχιστη πρέπει το N να γίνει μηδέν. Άρα

$$f'_{\min} = (2 \cdot 0 + 1)\frac{1}{1,2} \Rightarrow f'_{\min} = \frac{5}{6} \text{ Hz}.$$

### Πρόβλημα 10.

Στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούνται εγκάρσια επιφανειακά κύματα από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , που βρίσκονται στα σημεία Α και Β. Η απόσταση ΑΒ είναι 0,9 m. Τα πλάτη των δύο κυμάτων είναι  $A=4\text{mm}$ , η ταχύτητα διάδοσής τους  $u=0,2\text{m/s}$  και η συχνότητα των πηγών 1Hz. Το σημείο Λ βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ανήκει στη 2<sup>η</sup> υπερβολή ενισχυτικής συμβολής αριστερά της μεσοκαθέτου και απέχει  $x_2$  από την πηγή  $\Pi_2$  και  $x_1$  από την πηγή  $\Pi_1$ , με  $x_2 > x_1$ . Από το σημείο Λ φέρνουμε κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η οποία τέμνει την πιο κοντινή της υπερβολή απόσβεσης στο σημείο Μ. Στα σημεία Μ και Λ βρίσκονται δύο ίδιοι μικροί φελλοί, ο καθένας με μάζα  $m=0,001\text{ kg}$ , που μπορούν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση κάθετα στην επιφάνεια του υγρού.

Να υπολογίσετε:

Α) τις αποστάσεις  $x_1$ ,  $x_2$  του σημείου Λ από τις δύο πηγές.

Β) τις αποστάσεις  $r_1$ ,  $r_2$  του σημείου Μ από τις δύο πηγές.

Γ) το λόγο της κινητικής ενέργειας των δύο φελλών  $\frac{K_M}{K_\Lambda}$  τη χρονική στιγμή  $t_1 = 3,25\text{ s}$ .

Δ) το ρυθμό μεταβολής της ορμής του φελλού στο σημείο Μ τη χρονική στιγμή

$t_2 = 19/8\text{ s}$ .

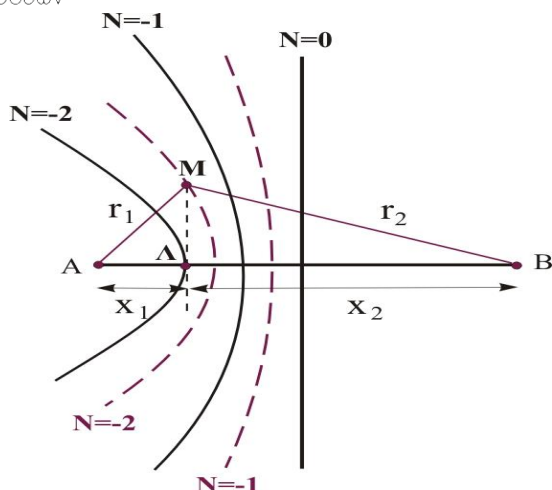
Δίνεται ότι  $\pi^2=10$  και ότι  $\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Λύση

Α. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,2\text{ m}$$

και την περίοδο της ταλάντωσης  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1\text{Hz}} \Rightarrow T = 1\text{ s}$ . Το σημείο Λ είναι ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής, που ανήκει στη 2<sup>η</sup> υπερβολή ενισχυτικής συμβολής αριστερά της μεσοκαθέτου,  $N=-2$ . Για τις αποστάσεις  $x_1$ ,  $x_2$  του σημείου Λ από τις δύο πηγές ισχύει



$$x_1 - x_2 = N\lambda \Rightarrow x_1 - x_2 = -2 \cdot 0,2 \text{ m} \Rightarrow x_2 - x_1 = 0,4 \text{ m} \quad (1)$$

$$x_2 + x_1 = (AB) \Rightarrow x_2 + x_1 = 0,9 \text{ m} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$2x_2 = 1,3 \text{ m} \Rightarrow x_2 = 0,65 \text{ m} \text{ και}$$

$$x_1 = 0,25 \text{ m}.$$

Β) Έστω  $y$  η απόσταση των σημείων  $M$  και  $\Lambda$ . Από τα τρίγωνα  $AM\Lambda$  και  $BM\Lambda$  με χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος παίρνουμε τις σχέσεις

$$r_1^2 = y^2 + x_1^2 \quad (3)$$

$$r_2^2 = y^2 + x_2^2 \quad (4)$$

Τις αφαιρούμε κατά μέλη

$$r_2^2 - r_1^2 = x_2^2 - x_1^2 \Rightarrow (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \quad (5)$$

Το σημείο  $M$ , όπως φαίνεται και από το σχήμα, ανήκει στη δεύτερη υπερβολή απόσβεσης αριστερά της μεσοκαθέτου. Για τις αποστάσεις  $r_1, r_2$  του σημείου  $M$  από τις δύο πηγές, αφού αυτό είναι σημείο απόσβεσης της υπερβολής με  $N=-2$ , ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = [2 \cdot (-2) + 1] \frac{0,2 \text{ m}}{2} \Rightarrow r_2 - r_1 = 0,3 \text{ m} \quad (6)$$

Η σχέση (5) γίνεται

$$0,3 \text{ m} \cdot (r_2 + r_1) = 0,4 \text{ m} \cdot 0,9 \text{ m} \Rightarrow r_2 + r_1 = 1,2 \text{ m} \quad (7)$$

Τελικά, προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (6) και (7) βρίσκουμε

$$2r_2 = 1,5\text{m} \Rightarrow r_2 = 0,75\text{m} \quad \text{και} \\ r_1 = 0,45\text{m}.$$

Γ) Τα δύο κύματα φτάνουν στα δύο σημεία Μ και Λ τις χρονικές στιγμές :

$$t_{M1} = \frac{r_1}{v} = \frac{0,45\text{m}}{0,2\text{m/s}} \Rightarrow t_{M1} = 2,25\text{s}$$

$$t_{M2} = \frac{r_2}{v} = \frac{0,75\text{m}}{0,2\text{m/s}} \Rightarrow t_{M2} = 3,75\text{s}$$

$$t_{\Lambda 1} = \frac{x_1}{v} = \frac{0,25\text{m}}{0,2\text{m/s}} \Rightarrow t_{\Lambda 1} = 1,25\text{s}$$

$$t_{\Lambda 2} = \frac{x_2}{v} = \frac{0,65\text{m}}{0,2\text{m/s}} \Rightarrow t_{\Lambda 2} = 3,25\text{s}$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 3,25\text{ s}$  δεν έχει φτάσει το ένα κύμα στο σημείο Μ, άρα ο φελλός που είναι στο σημείο Μ κάνει ταλάντωση εξαιτίας του ενός κύματος

και η εξίσωση απομάκρυνσής του είναι

$$y_M = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi \left( \frac{3,25\text{s}}{1\text{s}} - \frac{0,45\text{m}}{0,2\text{m}} \right) = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi = 0.$$

Άρα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και έχει μέγιστη ταχύτητα

$$v_{M,\max} = \omega A \Rightarrow v_{M,\max} = 2\pi f A = 2\pi \cdot 1\text{Hz} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\text{m} \Rightarrow$$

$$v_{M,\max} = 8\pi \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 3,25\text{ s}$  και τα δύο κύματα έχουν φτάσει στο σημείο Λ και έχει αρχίσει η συμβολή τους. Η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Λ είναι

$$y_{\Lambda} = 2A \sin 2\pi \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) = 8 \cdot 10^{-3} \sin 2\pi \frac{0,4\text{m}}{2 \cdot 0,2\text{m}} \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{3,25\text{s}}{1\text{s}} - \frac{0,9\text{m}}{2 \cdot 0,2\text{m}} \right) \Rightarrow$$

$$y_{\Lambda} = 8 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi = 0$$

Άρα το σημείο Λ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και έχει μέγιστη ταχύτητα

$$v_{\Lambda,\max} = \omega 2A \Rightarrow v_{\Lambda,\max} = 2\pi f 2A = 2\pi \cdot 1\text{Hz} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\text{m} \Rightarrow$$

$$v_{\Lambda,\max} = 16\pi \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δύο φελλών  $\frac{K_M}{K_{\Lambda}}$  τη χρονική στιγμή  $t_1 = 3,25\text{ s}$  είναι:

$$\frac{K_M}{K_A} = \frac{\frac{1}{2}mv_M^2}{\frac{1}{2}mv_A^2} = \frac{v_M^2}{v_A^2} = \frac{(\omega A)^2}{(\omega 2A)^2} \Rightarrow \frac{K_M}{K_A} = \frac{1}{4}$$

Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του φελλού στο σημείο Μ τη χρονική στιγμή

$t_2 = 19/8$  s δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dy_M \quad (8)$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{19}{8}$  s = 2,375 s δεν έχει φτάσει το δεύτερο κύμα στο σημείο Μ, άρα ο φελλός που είναι στο σημείο Μ κάνει ταλάντωση εξαιτίας του ενός μόνο κύματος και η εξίσωση απομάκρυνσής του δίνει

$$y_M = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi \left( \frac{\frac{19}{8} \text{ s}}{1 \text{ s}} - \frac{0,45 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} \right) \Rightarrow y_M = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi \left( \frac{19}{8} - \frac{18}{8} \right) \Rightarrow$$

$$y_M = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu \frac{\pi}{4} \text{ m} \Rightarrow y_M = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \Rightarrow y_M = 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \text{ m}.$$

Η σχέση (8) δίνει

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dy_M = -m\omega^2 y_M \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -m(2\pi f)^2 y_M \Rightarrow$$

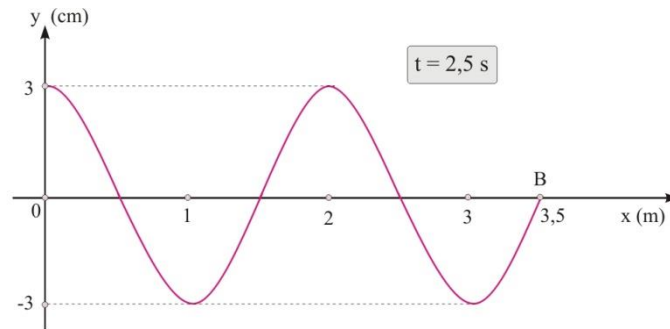
$$\frac{dp}{dt} = -10^{-3} \text{ kg} (2\pi \cdot 1 \text{ Hz})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = -8\sqrt{2} \cdot 10^{-5} \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}.$$

### Πρόβλημα 11.

Κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής AB, μήκους  $d = 3,5 \text{ m}$ , που το ένα άκρο της B είναι ακλόνητα στερεωμένο και το A ελεύθερο, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, με το σημείο A που βρίσκεται στη θέση  $x=0$  να είναι κοιλία. Θεωρούμε ως  $t=0$  μια χρονική στιγμή, κατά την οποία η κοιλία στη θέση  $x=0$ , διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση.

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη στιγμή  $t_1 = 2,5 \text{ s}$ , όταν το υλικό σημείο στη θέση  $x=0$  βρίσκεται για δεύτερη φορά στην ακραία θετική του θέση.



A) Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

B) Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ, που βρίσκεται στη θέση

$x = 2,25 \text{ m}$ , καθώς και τις θέσεις όλων των σημείων του στάσιμου που έχουν ίδιο

πλάτος ταχύτητας με το σημείο Δ.

Γ) Να βρείτε τις θέσεις των υλικών σημείων της χορδής που εκτελούν ταλάντωση με ενέργεια ίση με το  $1/4$  της ενέργειας του υλικού σημείου μιας κοιλίας της χορδής και βρίσκονται μεταξύ των θέσεων  $x=1\text{m}$  και  $x=3\text{m}$ .

Δ) Να βρείτε πόση πρέπει να γίνει η συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν, για να σχηματιστούν στη χορδή 7 συνολικά δεσμοί και στο σημείο A κοιλία.

Δίνεται ότι  $\text{csc} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Λύση

A) Η γενική εξίσωση των στάσιμων κυμάτων είναι

$$y = 2A \cdot \text{csc} \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}$$

Από το διάγραμμα προκύπτουν:

$$2A = 0,03\text{m}, \quad \text{άρα } A = 0,015\text{m} = 1,5 \text{ cm}$$

$$3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 3,5\text{m} \Rightarrow 7\frac{\lambda}{4} = 3,5\text{m} \Rightarrow \lambda = 2\text{m}.$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 2,5\text{ s}$  το σημείο της θέσης  $x=0$  βρίσκεται για δεύτερη φορά στην ακραία θετική του θέση, οπότε έχουμε

$$\frac{5T}{4} = 2,5\text{ s} \Rightarrow T = 2\text{ s}.$$

Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος γίνεται

$$y = 0,03 \sin \pi x \cdot \eta \mu \pi t \quad (\text{S.I.})$$

Β) Το σημείο Δ, που βρίσκεται στη θέση  $x = 2,25\text{ m}$ , έχει πλάτος που δίνεται από τη σχέση

$$|A'_\Delta| = 2A \left| \sin 2\pi \frac{x_\Delta}{\lambda} \right| = 0,03 \left| \sin 2\pi \frac{2,25\text{m}}{2\text{m}} \right| = 0,03 \left| \sin \frac{9\pi}{4} \right| = 0,03 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$|A'_\Delta| = 0,015\sqrt{2}\text{ m}.$$

Το πλάτος της ταχύτητας του σημείου Δ είναι  $u_{\max} = \omega \cdot |A'_\Delta|$  και όλα τα σημεία που έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης με το σημείο Δ, θα έχουν και το ίδιο πλάτος ταχύτητας. Είναι

$$|A'| = 2A \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = |A'_\Delta| = 0,015\sqrt{2}\text{ m} \Rightarrow 0,03 \left| \sin 2\pi \frac{x}{2\text{m}} \right| = 0,015\sqrt{2}\text{ m} \Rightarrow$$

$$\left| \sin 2\pi \frac{x}{2\text{m}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \pi x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Η μία ισότητα δίνει

$$\sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \pi x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k \pm \frac{1}{4}.$$

Οι αποδεκτές λύσεις που προκύπτουν για διάφορες τιμές του  $k$  είναι:

$$x=0,25\text{m}, x=1,75\text{m} \text{ και } x=2,25\text{m}.$$

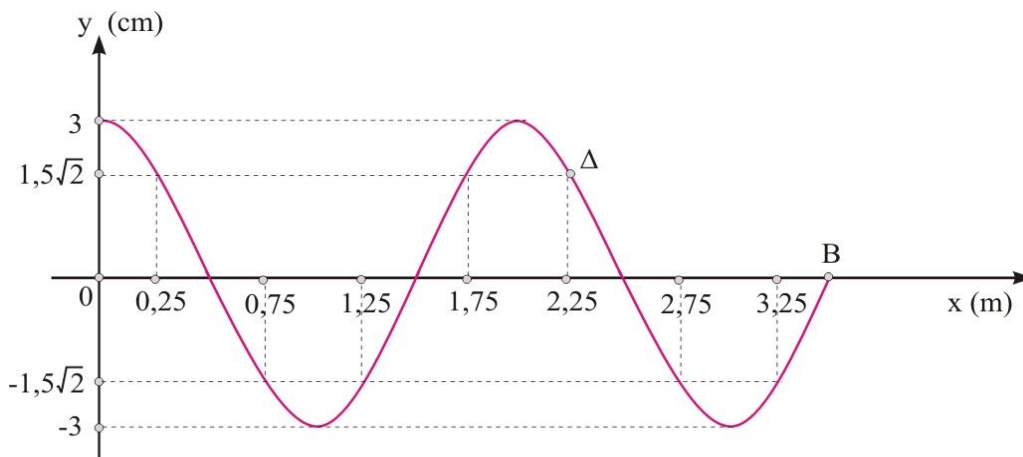
Η άλλη ισότητα δίνει

$$\sin \pi x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \pi x = \sin \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k \pm \frac{3}{4}.$$

Οι αποδεκτές λύσεις που προκύπτουν για διάφορες τιμές του  $k$  είναι:

$$x=0,75\text{m}, x=1,25\text{m}, x=2,75\text{m} \text{ και } x=3,25\text{m}.$$

Συνολικά, τα σημεία της χορδής που έχουν ίδιο πλάτος ταχύτητας με το σημείο Δ είναι άλλα 6 και φαίνονται στο παρακάτω στιγμιότυπο



Γ) Για τα σημεία που εκτελούν ταλάντωση με ενέργεια ίση με το 1/4 της ενέργειας μιας κοιλίας της χορδής έχουμε

$$E = \frac{E_K}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} D |A'|^2 = \frac{1}{2} D (2A)^2 \Rightarrow |A'|^2 = \frac{4A^2}{4} \Rightarrow |A'| = A \Rightarrow 2A \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = A \Rightarrow$$

$$2 \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1 \Rightarrow \left| \sin 2\pi \frac{x}{2m} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \pi x = \pm \frac{1}{2}.$$

Η μία ισότητα δίνει

$$\sin \pi x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \pi x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k \pm \frac{1}{3}.$$

Οι λύσεις που προκύπτουν για διάφορες τιμές του κ είναι:

$$x = 1/3 \text{ m}, x = 5/3 \text{ m} \text{ και } x = 7/3 \text{ m}.$$

Η άλλη ισότητα δίνει:

$$\sin \pi x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \pi x = \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k \pm \frac{2}{3}.$$

Οι λύσεις που προκύπτουν για διάφορες τιμές του κ είναι:

$$x = \frac{2}{3} \text{ m}, x = \frac{4}{3} \text{ m}, x = \frac{8}{3} \text{ m}, x = \frac{10}{3} \text{ m}.$$

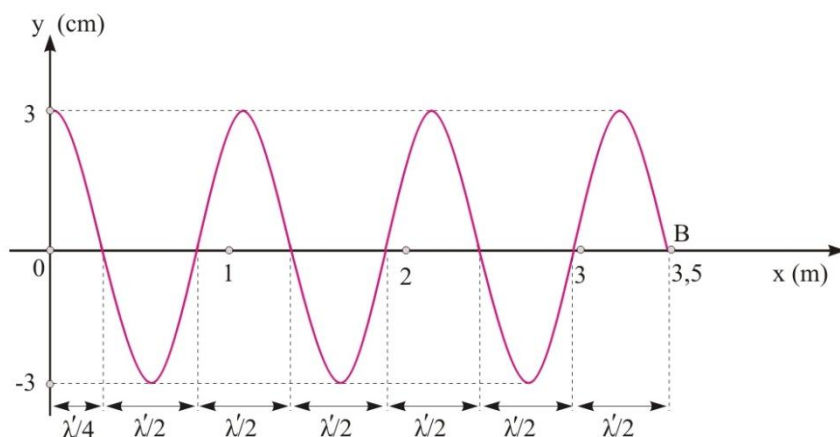
Από τις προηγούμενες θέσεις αυτές που ικανοποιούν τη σχέση  $1\text{m} < x < 3\text{m}$  είναι οι επόμενες τέσσερις:

$$x = \frac{4}{3} \text{ m}, x = \frac{5}{3} \text{ m}, x = \frac{7}{3} \text{ m}, x = \frac{8}{3} \text{ m}.$$

Δ) Αν σχηματιστούν στη χορδή 7 συνολικά δεσμοί και στο σημείο Α κοιλία το μήκος της χορδής θα ισούται με

$$d = 6 \frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = 3,5 \text{ m} \Rightarrow 13 \frac{\lambda'}{4} = 3,5 \text{ m} \Rightarrow \lambda' = \frac{14}{13} \text{ m},$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος



Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, παίρνοντας υπόψη ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος παραμένει σταθερή, βρίσκουμε πόση πρέπει να γίνει η συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν.

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\text{m}}{2\text{s}} \Rightarrow v = 1\text{m/s}.$$

$$v = \lambda' f' \Rightarrow f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{1\text{m/s}}{\frac{14}{13}\text{m}} \Rightarrow f' = \frac{13}{14} \text{ Hz}.$$

## Πρόβλημα 12.

Μια τεντωμένη χορδή AB, μήκους  $d=4,5\text{ m}$ , έχει το άκρο της B ακλόνητα στερεωμένο και το A ελεύθερο. Τη χρονική στιγμή  $t=0$ , το άκρο A που βρίσκεται στη θέση  $x=0$  αρχίζει να ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση κάθετα στη διεύθυνση της χορδής, δημιουργώντας εγκάρσιο αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα  $v=2\text{ m/s}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_1=2\text{ s}$ , ένα σημείο Δ της χορδής που βρίσκεται στη θέση  $x_\Delta=1\text{ m}$ , έχει φάση  $3\pi\text{ rad}$  και ταχύτητα ταλάντωσης μέτρου  $0,05\pi\text{ m/s}$ .

A) Να βρείτε την περίοδο και το μήκος κύματος του κύματος, που διαδίδεται πάνω στη χορδή, στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 2,25\text{ s}$ .

B) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που δημιουργήθηκε στη χορδή στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 2,25\text{ s}$  και να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες το διάγραμμα φάσης - θέσης για όλα τα σημεία της χορδής τη χρονική στιγμή  $t_2 = 2,25\text{ s}$ .

Το κύμα ανακλάται στο ακλόνητο άκρο B της χορδής και δημιουργείται στάσιμο κύμα με το σημείο A να είναι κοιλία.

Θεωρούμε νέα μέτρηση του χρόνου με  $t' = 0$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία η κοιλία A, θέση  $x_A=0$ , διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη κατά τη θετική κατεύθυνση.

Γ) Να βρείτε το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ, καθώς και την επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή  $t'_1 = 1,25\text{ s}$ , μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος.

Δ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της μέγιστης επιτάχυνσης όλων των σημείων της χορδής συναρτήσει της θέσης τους.

Δίνεται ότι  $\pi^2=10$ .

### Λύση

A) Η εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'$  Οχ είναι

$$y = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Η εξίσωση ισχύει μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα στην άκρη της χορδής. Αυτό συμβαίνει τη στιγμή  $t_2$ , για την οποία ισχύει:

$$t_2 = \frac{d}{v} \Rightarrow t_2 = \frac{4,5\text{ m}}{2\text{ m/s}} \Rightarrow t_2 = 2,25\text{ s}.$$

Η φάση ενός σημείου της χορδής είναι

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 2s$ , το σημείο Δ της χορδής που βρίσκεται στη θέση  $x_\Delta = 1m$ , έχει φάση ίση με  $3\pi$  rad, άρα

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t_1}{T} - \frac{x_\Delta}{\lambda} \right) \Rightarrow 3\pi = 2\pi \left( \frac{2s}{T} - \frac{1m}{\lambda} \right) \Rightarrow \frac{2s}{T} - \frac{1m}{\lambda} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT \Rightarrow \lambda = 2 \frac{m}{s} \cdot T \quad (2)$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (2) στη σχέση (1) και βρίσκουμε την περίοδο της ταλάντωσης

$$\frac{2s}{T} - \frac{1m}{2 \frac{m}{s} T} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4s}{2T} - \frac{1s}{2T} = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 1s.$$

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε το μήκος κύματος του κύματος.

$$\lambda = 2 \frac{m}{s} \cdot T \Rightarrow \lambda = 2 \frac{m}{s} \cdot 1s \Rightarrow \lambda = 2m.$$

Β) Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Δ είναι

$$v = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_\Delta}{\lambda} \right)$$

Αφού τη χρονική στιγμή  $t_1 = 2s$  το σημείο Δ έχει φάση  $3\pi$  rad έχουμε

$$v = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 3\pi \Rightarrow v = -v_{\max} \Rightarrow |v| = v_{\max} \Rightarrow |v| = \omega A \Rightarrow |v| = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow 0,05\pi \frac{m}{s} = \frac{2\pi}{1s} A \Rightarrow A = 0,025m.$$

Η εξίσωση του κύματος που δημιουργήθηκε στη χορδή στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 2,25s$  είναι

$$y = A \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,025 \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) \quad (S.I.)$$

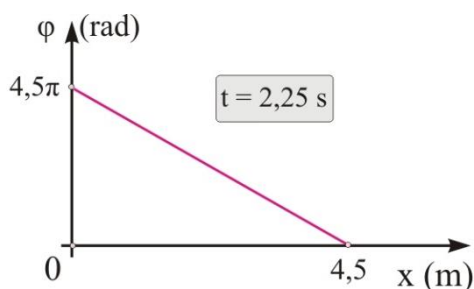
Η φάση ενός σημείου της χορδής τη χρονική στιγμή  $t_2 = 2,25s$  είναι

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi = 2\pi \left( t_2 - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow \varphi = 2\pi \left( 2,25 - \frac{x}{2} \right) \quad (S.I.)$$

Για  $x=0$  προκύπτει  $\varphi=4,5\pi$  rad και για  $x=4,5m$  προκύπτει  $\varphi=0$ .

Το διάγραμμα φάσης - θέσης για όλα τα σημεία της χορδής, δηλαδή για

$0 \leq x \leq 4,5m$  φαίνεται παρακάτω



Γ) Το σημείο Δ, που βρίσκεται στη θέση  $x_{\Delta}=1\text{m}$ , έχει νέο πλάτος, μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος, που δίνεται από τη σχέση

$$|A'_{\Delta}| = 2A \left| \sin 2\pi \frac{x_{\Delta}}{\lambda} \right| = 0,05 \left| \sin 2\pi \frac{1\text{m}}{2\text{m}} \right| = 0,05 |\sin \pi| \Rightarrow$$

$$|A'_{\Delta}| = 0,05\text{m}.$$

Από την εξίσωση των στάσιμων κυμάτων για το σημείο Δ και για τη χρονική στιγμή  $t'_1 = 1,25\text{ s}$ , μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος, βρίσκουμε την απομάκρυνση του σημείου

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t'}{T} \Rightarrow y = 0,05\text{m} \cdot \sin 2\pi \frac{1\text{m}}{2\text{m}} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t'}{1\text{s}} \Rightarrow y = 0,05\text{m} \cdot \sin \pi \cdot \eta\mu 2\pi t' \Rightarrow$$

$$y = -0,05\text{m} \cdot \eta\mu 2\pi t' = -0,05\text{m} \cdot \eta\mu (2\pi \cdot 1,25) \Rightarrow y = -0,05\text{m} \cdot \eta\mu 2,5\pi \Rightarrow y = -0,05\text{m}.$$

Άρα η επιτάχυνση του σημείου Δ είναι

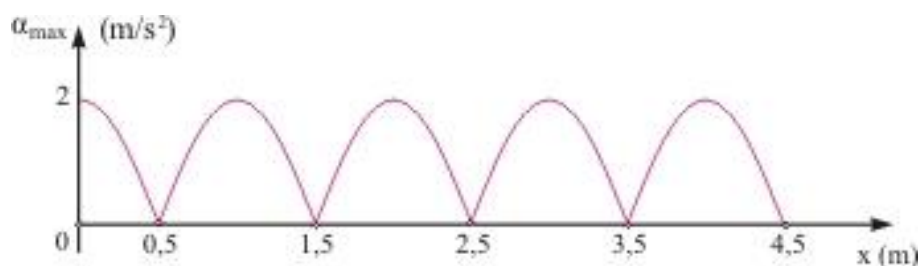
$$\alpha = -\omega^2 y \Rightarrow \alpha = -\left( 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (-0,05\text{m}) \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ) Η μέγιστη επιτάχυνση των σημείων της χορδής συναρτήσει της θέσης τους δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_{\max} = \omega^2 |A'| \Rightarrow \alpha_{\max} = \omega^2 \cdot 2A \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| \Rightarrow \alpha_{\max} = \left( 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot 0,05\text{m} \left| \sin 2\pi \frac{x}{2\text{m}} \right| \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max} = 2 |\sin \pi x| (\text{S.I.})$$

Το διάγραμμα της μέγιστης επιτάχυνσης όλων των σημείων της χορδής συναρτήσει της θέσης τους φαίνεται παρακάτω



Τα σημεία της χορδής που βρίσκονται στις θέσεις  $x = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$ , δηλαδή  $x_1=0,5$  m,  $x_2=1,5$  m,  $x_3=2,5$  m,  $x_4=3,5$  m και  $x_5=4,5$  m είναι δεσμοί, δεν ταλαντώνονται και η επιτάχυνσή τους είναι μηδέν.

Ημερομηνία τροποποίησης: 27/08/2018

Επιμέλεια: Πρόδρομος Κορκίζογλου, Παναγιώτης Μπετσάκος, Αθανάσιος Παπαδημητρίου, Γεώργιος Παπαλεξίου, Ηλίας Ποντικός

Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης