

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και είναι γραμμένο σύμφωνα με τις τελευταίες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Με την καθοδήγηση των καθηγητών του ομίλου ΝΕΟ το βιβλίο αυτό αποτελεί μια ολοκληρωμένη πρόταση, που θα σας οδηγήσει με επιτυχία στην κατανόηση της διδακτέας ύλης.

Περιέχει

- *Θεωρία

- *Λυμένες ασκήσεις που καλύπτουν τις ανάγκες όλων των μαθητών

- *Προτεινόμενες ασκήσεις με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας

ΖΑΦΕΙΡΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α ΑΛΓΕΒΡΑ

Σελ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΑΛΓΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.1	Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς	
	A. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους.....	12
	B. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών ρίζα πραγματικού αριθμού.....	18
	Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού.....	24
1.2	Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα	
	A. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα.....	31
	B. Πράξεις με μονώνυμα.....	35
1.3	Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων.....	39
1.4	Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων.....	42
1.5	Αξιοσημείωτες ταυτότητες.....	44
1.6	Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.....	48
1.7	Διαίρεση πολυωνύμων.....	56
1.8	Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων.....	60
1.9	Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.....	65
1.10	Πράξεις ρητών παραστάσεων	
	A. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων.....	72
	B. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1.	Η εξίσωση $ax + b = 0$	82
2.2.	Εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	
	A. Επίλυση εξισώσεων 2 ^{ου} βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.....	84
	B. Επίλυση εξισώσεων 2 ^{ου} βαθμού με την βοήθεια τύπου.....	87
2.3.	Προβλήματα εξισώσεων 2 ^{ου} βαθμού.....	92
2.4.	Κλασματικές εξισώσεις.....	96
2.5.	Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο	
	A. Διάταξη πραγματικών αριθμών.....	101
	B. Ιδιότητες διάταξης.....	101
	Γ. Ανισώσεις 1 ^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο.....	103

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης.....	106
3.2. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του.....	113
3.3. Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος.....	117

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1. Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$	124
4.2. Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$	129

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5.1. Σύνολα.....	136
5.2. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα.....	143
5.3. Έννοια της πιθανότητας.....	150

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Ισότητα τριγώνων.....	162
1.2 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων.....	170
1.3 Θεώρημα Θαλή.....	175
1.4 Ομοιοθεσία.....	179
1.5 Ομοιότητα	
Α. Όμοια πολύγωνα.....	182
Β. Όμοια τρίγωνα	187
1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων.....	194

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$	202
2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών.....	207
2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.....	210
2.4. Νόμος ημιτόνων – Νόμος συνημιτόνων.....	215
Επαναληπτικές Ασκήσεις.....	217

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Α' ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Α. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Σύνολα αριθμών:

- **Φυσικοί** αριθμοί είναι οι αριθμοί (0,1,2,3,4,5....)
- **Ακέραιοι** αριθμοί είναι οι φυσικοί και οι αρνητικοί φυσικοί.
(...-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3....)
- **Ρητοί** είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν σε κλασματική μορφή $\frac{\kappa}{\lambda}$ με $\kappa, \lambda \neq 0$ ακέραιους . Είναι όλοι οι γνωστοί αριθμοί(φυσικοί δεκαδικοί κλάσματα) και οι αρνητικοί τους.
- **Άρρητος** ονομάζεται ένας αριθμός που δεν είναι ρητός. πχ ($\sqrt{2}$)
- **Πραγματικοί** είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί.

Τους πραγματικούς αριθμούς τους τοποθετούμε πάνω σε έναν άξονα τον οποίο ονομάζουμε άξονα των πραγματικών αριθμών. Κάθε αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο πάνω στον άξονα.

- **Απόλυτη τιμή** ενός αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και είναι η απόσταση του a από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή είναι πάντα θετικός αριθμός $|a| \geq 0$

Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός

Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

π.χ. $|-5| = 5$, $|+7| = 7$

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς:

1. Πρόσθεση:

Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το κοινό τους πρόσημο και προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.

π.χ. $+7 + 12 = +19$, $-4 - 13 = -17$.

Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το πρόσημο της μεγαλύτερης απόλυτης τιμής και αφαιρούμε από την μεγαλύτερη την μικρότερη απόλυτη τιμή.

π.χ. $-5 + 9 = +4$, $-19 + 13 = -6$.

2. Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το πρόσημο + και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

π.χ. $(+5)(+3) = +15$, $(-7)(-4) = -28$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το πρόσημο - και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

π.χ. $(-6)(+4) = -24$, $(+8)(-7) = -56$

Ιδιότητες πράξεων:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
Αντίθετο – Αντίστροφο Στοιχείο	$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$	

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Στο άθροισμα $\alpha + \beta$ οι α , β ονομάζονται όροι του αθροίσματος.
- Στο γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ οι α , β ονομάζονται παράγοντες του γινομένου.
- Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι έχουν άθροισμα 0.
- Ο αντίθετος του α είναι ο $-\alpha$.
- Ο αντίθετος του $-\alpha$ είναι ο α .
- Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι έχουν γινόμενο 1.
- Ο αντίστροφος του α είναι ο $\frac{1}{\alpha}$ με $\alpha \neq 0$
- Ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$ με $\alpha, \beta \neq 0$
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.
- Άρτιοι οι ζυγοί είναι οι ακέραιοι αριθμοί που διαιρούνται με το 2
($0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$) Αν α άρτιος τότε γράφεται στη μορφή $\alpha = 2 \cdot k$ όπου k ακέραιος.

- Περιττοί οι μονοί αριθμοί είναι οι ακέραιοι που δεν διαιρούνται με το 2 ($\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$) Αν α περιττός τότε γράφεται στη μορφή $a = 2 \cdot k + 1$ όπου κ ακέραιος.

- Κανόνες προσήμων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης:

$$\begin{array}{ll} + \cdot + = + & + \div + = + \\ + \cdot - = - & + \div - = - \\ - \cdot + = - & - \div + = - \\ - \cdot - = + & - \div - = + \end{array}$$

3. Αφαίρεση

Η αφαίρεση πραγματικών ορίζεται με την βοήθεια της πρόσθεσης :

$$a - b = a + (-b)$$

4. Διαίρεση

Η διαίρεση ορίζεται με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Προτεραιότητα των πράξεων :

Η σειρά των πράξεων σε μια παράσταση είναι η εξής:

- 1) Υπολογισμός δυνάμεων
- 2) Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων
- 3) Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

*Αν υπάρχουν πράξεις μέσα στη παρένθεση τις εκτελούμε πρώτα με την παραπάνω σειρά.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{l} \alpha) \left(3 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{5} \right) - \frac{3}{4} \div \left(-\frac{5}{3} + \frac{7}{2} \right) \\ \beta) \frac{-2 - \frac{3}{2}}{-3 + \frac{1}{3}} - 4 \end{array}$$

Λύση

$$\alpha) \left(3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{4} \div \left(-\frac{5}{3} + \frac{22}{6}\right) = \left(\frac{6}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{20} - \frac{16}{20}\right) - \frac{3}{4} \div \left(-\frac{10}{6} + \frac{22}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{11}{20}\right) - \frac{3}{4} \div \left(\frac{12}{6}\right) = -\frac{55}{40} - \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{12} = -\frac{55}{40} - \frac{18}{48} = -\frac{11}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4}$$

$$\beta) \frac{-2 - \frac{3}{2}}{-3 + \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{4}{2} - \frac{3}{2}}{-\frac{9}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{8}{3}} = \frac{21}{16}$$

2. Αν $x = 3$ και $y = -2$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3x - 2y - (x + y)$$

Λύση

Αντικαθιστούμε στην παράσταση όπου $x = 3$ και όπου $y = -2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) - (3 + (-2)) = \\ &= 9 + 4 - (3 - 2) = \\ &= 9 + 4 - 1 = \\ &= 12 \end{aligned}$$

3. Αν $x + y = -6$ και $\varphi - \omega = 4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$B = 3 + x + \varphi - (\omega + 2 - y)$$

Λύση

$$\begin{aligned} B &= 3 + x + \varphi - \omega - 2 + y = \\ &= 3 - 2 + x + y + \varphi - \omega = \\ &= 1 - 6 + 4 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

4. Να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα:

$$-4(a + 2) + 2(2a + x) - 2x = -8$$

Λύση

Θα ξεκινήσουμε από το ά μέλος και με πράξεις θα καταλήξουμε στο β' μέλος.

$$\begin{aligned} -4(a + 2) + 2(2a + x) - 2x &= \\ = -4a - 8 + 4a + 2x - 2x &= \\ = -8 \end{aligned}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) 4 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) + 9 \div (-3) = \quad \gamma) 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 6 + (-2 + 5) \cdot 4 \div (-6) + 5 =$$

$$\beta) 5 - 4 \cdot \frac{2}{20} - \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{4} = \quad \delta) \frac{3 - \frac{1}{3}}{4 + \frac{2}{3}} =$$

$$\epsilon) 2 - [1 - (5 - 7)] = \quad \sigma\tau) 2 - \left(1 + \frac{1}{-2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) \div \left(-\frac{1}{6}\right) =$$

2. Αν $x = -2$ και $y = 3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2 - (3x + y) + 2(2x - 4y) + 3y$$

3. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) 1 + 3(\kappa - \lambda) - 2(\kappa + \lambda) - (-5\lambda + \kappa - 4) = 5$$

$$\beta) \alpha - \beta(2 - 3) - 2(3\beta - \alpha) = 2 - (5\beta + 2) - 3(-\alpha)$$

$$\gamma) 1 - 3(x - 2y) + 2(1 - 3y) - 3(1 - x) = 0$$

4. Αν $a + \beta = -3$ και $\beta - \gamma = 6$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) 1 - 3(\alpha - 2\beta) + (2 - 9\alpha)(-1) =$$

$$\beta) -5\gamma - 8(2 - \beta) - 3(\beta - \gamma) + 3\alpha =$$

5. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

$$\alpha) -5 - 7 = \dots$$

$$\beta) 3 - 5 = \dots$$

$$\gamma) -3 \cdot (-5) = \dots$$

$$\delta) -2 \cdot (+5) = \dots$$

$$\epsilon) -3 \cdot \frac{2}{5} = \dots$$

$$\sigma\tau) \left(-\frac{5}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$$

6. Να κάνετε τις πράξεις :

$$\alpha) -3 + 5(-2) - 6 : (-2)$$

$$\beta) 1 - 2(3 - 7) - (-2 + 5) \cdot (-4) : (-6) - 1$$

$$\gamma) 2 - [1 - (5 - 7)]$$

$$\delta) 5 - 2[3 - (5 - 7)]$$

7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) 1 - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 \left(1 - \frac{1}{4} \right) \quad \beta) \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 1} \quad \gamma) 1 - \frac{\frac{2}{5} - 1}{3}$$

8. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = xy + 3x - 5(x + y) - 11$

για $x = -2$ και $y = 3$.

9. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $B = x(2 - y) + 3x - 5(x - y) + xy$

για $y = 3$.

10. Αν $x = -|5 - 3|$ και $y = -|1 - 2|$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) K = 1 + 3x - 5y - 2xy$$

$$\beta) \Lambda = 1 - 5(x - 3y) + \frac{x}{y}$$

11. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $B = 2x - 3[x - (2x - y)] - y$ και μετά να

βρείτε την τιμή της για $x = 0,2$ και $y = 0,25$

12. Να αποδείξετε την ισότητα :

$$\alpha - \beta(2 - 3) - 2(3\beta - \alpha) = 2 - (5\beta + 2) - 3(-\alpha)$$

13. Αν $\alpha + \beta = -1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) 1 - 3(\alpha - 2\beta) + (2 - 9\alpha)(2 - 3)$$

$$\beta) \alpha - \beta(-2 + 13) - 2(\alpha - 5\beta) - 5$$

14. Αν $\alpha + \beta = -2$ και $\beta - \gamma = 5$, να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = -5\gamma - 8(2 - \beta) - 3(\beta - \gamma) + 3\alpha$$

15. Αν ισχύει ότι $(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι

αντίθετοι ή αντίστροφοι.

16. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = 2(3x - 5) + 6\left(\frac{x}{3} - y\right) - (-2x + 4y) \text{ και να βρείτε την αριθμητική της τιμή για}$$

$x = 0,2$ και $y = 0,5$

1.1 Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

- **Δύναμη** $a^ν$ με βάση a και φυσικό εκθέτη $n > 1$ είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσους με a .

$$a^ν = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(n \text{ παράγοντες})}$$

- **Ιδιότητες δυνάμεων:**

$$1) a^μ \cdot a^ν = a^{μ+ν} \quad 3) a^ν \cdot b^ν = (a \cdot b)^ν$$

$$2) \frac{a^μ}{a^ν} = a^{μ-ν} \quad 4) \frac{a^ν}{b^ν} = \left(\frac{a}{b}\right)^ν$$

$$5) (a^ν)^μ = a^{ν \cdot μ}$$

- **Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο**

1) Η δύναμη κάθε αριθμού διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με την μονάδα. $a^0 = 1$

2) Η δύναμη κάθε αριθμού διάφορου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με το κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού με αντίθετο εκθέτη. $a^{-ν} = \frac{1}{a^ν}$

$$3) \left(\frac{a}{b}\right)^{-ν} = \left(\frac{b}{a}\right)^ν$$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί με ως δύναμη με εκθέτη το 1.

$$\text{π.χ. } 5 = 5^1, \quad -13 = -13^1$$

1. Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι πάντα θετικός αριθμός.

$$\text{π.χ. } 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

- Δύναμη με οποιαδήποτε βάση και άρτιο εκθέτη είναι πάντα θετικός αριθμός

.

$$\text{π.χ. } (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9, \quad (-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$

Προσοχή στις δυνάμεις που έχουν το πρόσημο μπροστά από την δύναμη :

$-2^2 = -4$ εδώ το $-$ δεν ανήκει στην βάση της δύναμης όπως στα παραπάνω παραδείγματα.

- Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

π.χ. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις σε μία δύναμη:

α) $3^5 \cdot 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

β) $\frac{12^5}{4^5} = \left(\frac{12}{4}\right)^5 = 3^5$

γ) $(-3)^2 \cdot 3^{-5} = 3^2 \cdot 3^{-5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

δ) $8 \cdot 2^{15} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{2^3 \cdot 2^{15}}{2^8} = 2^{3+15-8} = 2^{10}$

Πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μεταξύ τους και σε κάθε μεταβλητή βάζουμε το άθροισμα των εκθετών της!!!!

2. Να απλοποιήσετε τις παρατάσεις:

α) $2x^3y^5(-5x^4y) = -10x^{3+4}y^{5+1} = -10x^7y^6$

β) $(3x^4)^2 = 3^2(x^4)^2 = 9x^8$

γ) $\frac{5x^3y^2}{10xy^5} = \frac{1}{2}x^{3-1}y^{2-5} = \frac{1}{2}x^2y^{-3} = \frac{x^2}{2y^3}$

δ) $(15x^2) \div (-3x^4) = -5x^{2-4} = -5x^{-2} = \frac{-5}{x^2}$

Διαιρούμε τους συντελεστές και σε κάθε μεταβλητή βάζουμε την διαφορά των εκθετών της.

3. Να βρείτε τον ακέραιο κ ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $17^k = 1 \Leftrightarrow 17^\kappa = 17^0 \Leftrightarrow \kappa = 0$

β) $\left(\frac{1}{3}\right)^k = 81 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^\kappa = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^\kappa = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow \kappa = -4$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη.

$$\alpha) 4^6 \cdot 4^{-4} = \quad \beta) 5^6 \div 5^5 = \quad \gamma) (4^{-2})^{-2} =$$

$$\delta) 27 \cdot 3^{-2} = \quad \epsilon) (-2)^7 \cdot 16 = \quad \sigma\tau) 2^4 \cdot 3^4 =$$

$$\zeta) \frac{4^{11}}{4^8} = \quad \eta) \frac{15^4}{5^4} = \quad \theta) 8 \cdot 2^{15} \cdot \frac{1}{2^8} =$$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) (-2)^7 \cdot 2^6 = \quad \beta) 9^4 \cdot 3^{-8} = \quad \gamma) 8^{15} \div 2^{45} =$$

$$\delta) (0,01)^3 \cdot 10^7 = \quad \epsilon) 0,3^3 \cdot (-10)^3 = \quad \sigma\tau) \left(\frac{2}{7}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^6$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) 2x^3 \cdot (-3x^4) = \quad \beta) 3x^5 y^2 \cdot (-4x^{-3} y^3) = \quad \gamma) -5xy^3 \cdot (-2x^2 y) =$$

$$\delta) \frac{12x^5}{4x^3} = \quad \epsilon) \frac{6x^2 y}{12xy^4} = \quad \sigma\tau) (-15x^6 y^9) \div (3x^6 (y^3)^3) =$$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) (2x^2)^3 = \quad \beta) (-2x^3 y^5)^3 = \quad \gamma) \left(-\frac{1}{2} x^2 y^3\right)^4 =$$

$$\delta) (3x^4)^2 \cdot 3x^3 = \quad \epsilon) x^3 (-x^4 y)^3 \div (x^{14} y^3) = \quad \sigma\tau) \left(-\frac{1}{2} x^3 y\right)^2 \div (-3x^6 y^2) =$$

5. Να υπολογίσετε την τιμή τις κάθε παράστασης:

$$A = -2^3 + 4 \cdot 3^2 - (-2)^5 - 6^2$$

$$B = 2,5^4 \cdot 4^4 - 0,01^{-2} + 1^{2009}$$

$$\Gamma = (-1)^2 - 2(-1)(-3)^3 - 3(-1)^3(-3)$$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης:

$$A = 3x^2 - 4x^5 + 7x^{13} - 8x^1 \quad \text{για } x=1$$

$$B = -4x^2 - 16x^3 + 8x \quad \text{για } x = -\frac{1}{2}$$

7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2^x - 4^{x+1} + 6^{x+2} - 4^{x+3} \quad \text{για } x=-1$$

$$B = 2^x - x^2 + 2^{x+1} - x^3 \quad \text{όταν } x=-2$$

8. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{2^x - 2^{x-1}}{2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2}}$$

9. Να γράψετε την κάθε παράσταση ως μια δύναμη:

$$A = 3^{12} + 3^{12} + 3^{12}$$

$$B = 2^{15} - 2^{14}$$

10. Αν διπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου πόσο θα μεγαλώσει το εμβαδόν του;

11. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Αριθμός	9	$\frac{1}{8}$	27	$\frac{16}{81}$	$\frac{144}{169}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{8}{27}$
Δύναμη	3^2						

12. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμα της από τη στήλη Β

Στήλη Α

Στήλη Β

α) $(-3)^2$

1. 9

β) -2^3

2. 6

γ) -3^2

3. -9

δ) $-(-2)^3$

4. -8

5. 8

α.	
β.	
γ.	
δ.	

13. Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη .

α) $3^5 \cdot 3^{-7}$

β) $2^6 : 2^{-3}$

γ) $(2^{-5})^{-2} \dots$

δ) $2^5 \cdot 3^5$

ε) $\frac{12^5}{4^5} = \dots$

14. Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη .

α) $8 \cdot 2^5$

β) $9 \cdot 3^{-5}$

γ) $(-2)^7 \cdot 16 \dots$

δ) $(-3)^2 \cdot 3^5$

ε) $\frac{12^5}{(-3)^5} = \dots$

15. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α , το αποτέλεσμα της από τη στήλη Β

Στήλη Α

Στήλη Β

α) $(-1)^{2009}$

1. $\frac{1}{9}$

β) -3^{-2}

2. 1

γ) $9^{-4} \cdot 3^8$

3. $-\frac{1}{9}$

δ) $(3^5 : 3) : 3^6$

4. -1

5. 9

α.	
β.	
γ.	
δ.	

16. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = (-9)^2 + 4^3 - (-2)^3 - [(2^3 - 4) : 2 - 6]$

17. Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη

$A = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$

$B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$

$\Gamma = 2^{59} - 2^{29}$

$\Delta = 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$

18. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{10} : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$

β) $\left[(-2)^7\right]^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{55}$

19. Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\alpha) 10^{12} \cdot x = (10^2)^{-1} \qquad \beta) (10^{-2})^3 \cdot 10^9 \cdot x = 10^2$$

20. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K = 3^x - 3^{x+1} - 3^{x-1} - x^5, \text{ όταν } x = -1$$

21. Να βρείτε τον φυσικό αριθμό κ , ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

$$\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^\kappa = \frac{1}{16} \qquad \beta) \left(\frac{2}{3}\right)^{2\kappa+1} = \frac{8}{27}$$

1.1 Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Ορισμός:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a λέγεται ένας θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό a . Η τετραγωνική ρίζα συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

π.χ. $\sqrt{9} = 3$ διότι $3^2 = 9$, $\sqrt{64} = 8$ διότι $8^2 = 64$.

Ιδιότητες ριζών:

- Αν $a \geq 0$ τότε $\sqrt{a^2} = a$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι $\sqrt{a^2} = |a|$
- Αν $a \geq 0$ και $b \geq 0$ τότε $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Απόδειξη:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \Leftrightarrow \text{Υψώνω και τα 2 μέλη στο τετράγωνο}$$

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \Leftrightarrow \text{τετράγωνο και ρίζα απλοποιούνται.}$$

$a \cdot b = a \cdot b$ Η τελευταία ισότητα ισχύει και λόγω των ισοδυναμιών ισχύει και η αρχική ισότητα.

π.χ. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

- Αν $a \geq 0$ και $b > 0$ τότε $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Απόδειξη:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Leftrightarrow \text{Υψώνω και τα 2 μέλη στο τετράγωνο}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} \Leftrightarrow \text{τετράγωνο και ρίζα απλοποιούνται.}$$

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ Η τελευταία ισότητα ισχύει και λόγω των ισοδυναμιών ισχύει και η

αρχική ισότητα.

$$\text{π.χ. } \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

➤ Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{a^2 \cdot \beta} = a\sqrt{\beta}$ (Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για την απλοποίηση ρίζας που θα αναφερθεί παρακάτω.)

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Η ποσότητα που βρίσκεται κάτω από την ρίζα ονομάζεται υπόριζη ποσότητα.
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{a + \beta} \neq \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τις υπόριζες ποσότητες αλλά στην πρόσθεση και στην αφαίρεση αυτό απαγορεύεται!!!!

- Αν $0 < \alpha < \beta$ τότε $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$

$$\text{π.χ. } 7 > 5 \Leftrightarrow \sqrt{7} > \sqrt{5}$$

Απλοποίηση τετραγωνικής ρίζας :

Αν θέλουμε να απλοποιήσουμε την $\sqrt{\alpha}$, δηλαδή η υπόριζη ποσότητα να γίνει μικρότερος αριθμός τότε προσπαθούμε να γράψουμε το α με την βοήθεια δύο αριθμών, όπου ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο και χρησιμοποιούμε την 5^η ιδιότητα.

π.χ. Να απλοποιήσετε τις ρίζες :

$$\alpha) \sqrt{27} \quad , \quad \beta) \sqrt{48} \quad , \quad \gamma) \sqrt{32}$$

Λύση

$$\alpha) \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\beta) \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\gamma) \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Μετατροπή ενός κλάσματος με παρονομαστή άρρητο σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με παρονομαστή άρρητο σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με την άρρητη ποσότητα του παρονομαστή.

π.χ. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν παρονομαστή άρρητο σε

ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή: α) $\frac{3}{\sqrt{8}}$ β) $\frac{7}{\sqrt{28}}$

Λύση

$$\alpha) \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{3 \cdot \sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{4 \cdot 2}}{8} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta) \frac{7}{\sqrt{28}} = \frac{7 \cdot \sqrt{28}}{\sqrt{28} \cdot \sqrt{28}} = \frac{7 \cdot \sqrt{28}}{(\sqrt{28})^2} = \frac{7 \cdot \sqrt{28}}{28} = \frac{\sqrt{28}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 7}}{4} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) 5\sqrt{3} - 7\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{5} =$$

$$\beta) \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} =$$

Λύση

$$\alpha) 5\sqrt{3} - 7\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{5} = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

$$\beta) \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{15}{20} + \frac{24}{20} = \frac{39}{20}$$

2. Να αποδείξετε τις ισότητες:

$$\alpha) 3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} = -10\sqrt{2}$$

Λύση

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} &= \\ 3\sqrt{2} - \sqrt{2 \cdot 25} + \sqrt{2 \cdot 16} - 6\sqrt{2 \cdot 4} &= \\ 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} &= \\ -10\sqrt{2} & \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους δεν μπορούμε να τις προσθέσουμε για αυτό απλοποιούμε όσες γίνετε ώστε να έχουμε ίδιες

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

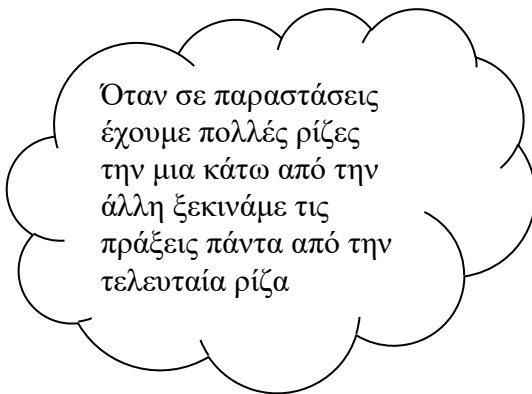
α) $\sqrt{5+\sqrt{16}} =$

β) $\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{9}}} =$ ○ ○ ○

Λύση

α) $\sqrt{5+\sqrt{16}} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$

β) $\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{9}}} = \sqrt{7+\sqrt{7-3}} = \sqrt{7+\sqrt{4}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$



4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{27}) =$

β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5}) =$

Λύση

α) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{27}) = \sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{27} = \sqrt{9} + \sqrt{81} = 3 + 9 = 12$

β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5}) = \sqrt{6}\sqrt{6} - \sqrt{6}\sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{6} - \sqrt{5}\sqrt{5} = \sqrt{36} - \sqrt{30} + \sqrt{30} - \sqrt{25} =$

$6 - 5 = 1$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2, \quad B = \sqrt{7^2} + \sqrt{(-5)^2} + \sqrt{2^4}$$

$$\Gamma = \sqrt{225} - \sqrt{169} + \sqrt{289}, \quad \Delta = \sqrt{0,04} + \sqrt{0,25} + \sqrt{0,81}$$

$$E = \sqrt{9\sqrt{8\sqrt{4}}}, \quad \Sigma T = \sqrt{\sqrt{81}}$$

$$Z = \sqrt{25 \cdot 49} + \sqrt{\frac{64}{4}}, \quad H = \sqrt{12}\sqrt{3} - \sqrt{\frac{32}{2}} - \sqrt{0,01}\sqrt{14400}$$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες

α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$

β) $\sqrt{3} + \sqrt{7} = \sqrt{10}$

γ) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

δ) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3. Να κάνετε τις πράξεις :

α) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

γ) $\frac{6\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$

δ) $\frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$

ε) $\frac{5\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{300}$

β) $\sqrt{8} - \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{200}$

5. Να απλοποιήσετε την παράσταση :
- $A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$

6. Να κάνετε τις πράξεις :

α) $\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{8} - \sqrt{50})$

β) $\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{12} - \sqrt{27})$

γ) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

δ) $(1 - \sqrt{5}) \cdot (1 + \sqrt{5})$

7. Να βρείτε ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους

α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{12}}$

β) $3\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $2\sqrt{18}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

8. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι

i. $\alpha = \sqrt{8}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 2\sqrt{2}$, $\delta = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\tau = \sqrt{\frac{2}{4}}$

ii. $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{3}$, $\beta = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt{12}$, $\delta = \sqrt{3+3}$, $\varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$

9. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων :

$$A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} \quad , \quad B = \sqrt{57 + \sqrt{44 + \sqrt{15 + \sqrt{99 + \sqrt{1}}}}}$$

10. Να συμπληρώσετε το διπλανό τετράγωνο

ώστε να γίνει «μαγικό»

(Υπόδ: Το άθροισμα γραμμών, στηλών και διαγωνίων να είναι σταθερό.

Εδώ: $\sqrt{128} + \sqrt{50} + \sqrt{8} = \dots = 15\sqrt{2}$)

$\sqrt{32}$		$\sqrt{128}$
	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{8}$		

11. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{7} + 2x = \sqrt{28} + x$, β) $\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$

12. Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου είναι 6 και 8 αντίστοιχα . Να βρεθεί η πλευρά ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίδιο με αυτό του ορθογώνιου.

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{27}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{52}$

β) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$ γ) $\frac{\sqrt{8}\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ δ) $\frac{\sqrt{6}\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{4}\sqrt{10}}$ ε) $\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$

14. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{27}) =$ β) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - 2\sqrt{18}) =$

γ) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) =$ δ) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) =$

15. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα με άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{6}{\sqrt{6}}$ γ) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ δ) $\frac{2}{\sqrt{8}}$

16. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}-1$ και $\sqrt{2}+1$ είναι αντίστροφοι.

1.2 Α. ΜονώνυμαΟρισμοί:

- **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς.

Π.χ $6 \cdot 4 - 6^2 \div 4 = \dots$

- **Αλγεβρική παράσταση** λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.

Π.χ $5x^2 - 2\frac{a}{y} =$

- **Ακέραια αλγεβρική παράσταση** λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών είναι φυσικοί αριθμοί.

π.χ. $2xy^4 - \frac{1}{2}x^3$

- **Μονώνυμο** λέγεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

π.χ. $\frac{2}{3}xy^3z$

- Ένα μονώνυμο έχει έναν αριθμητικό παράγοντα που λέγεται **συντελεστής** και το γινόμενο των μεταβλητών που λέγεται **κύριο μέρος**.

π.χ. $\frac{2}{3}xy^3z$ στο διπλανό μονώνυμο το $\frac{2}{3}$ είναι ο συντελεστής και το xy^3z το κύριο μέρος.

- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του είναι το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

π.χ. Το μονώνυμο $\frac{2}{5}x^3y^2z$ είναι 3^{ου} βαθμού ως προς x, 2^{ου} βαθμού ως προς y, και 1^{ου} βαθμού ως προς z, ενώ ως προς x,y,z είναι 3+2+1 = 6^{ου} βαθμού.

- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

π.χ. Τα μονώνυμα $4x^2y$ και $\frac{2}{5}x^2y$ λέγονται όμοια.

- Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ αν έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται **αντίθετα**.

π.χ. Τα μονώνυμα $3xy^3$ και $3y^3x$ είναι ίσα ενώ τα μονώνυμα $3xy^3$ και $-3xy^3$ αντίθετα.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Οι αριθμοί λέγονται σταθερά μονώνυμα και είναι μηδενικού βαθμού.
- Το 0 λέγεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

α) $-x^2y^3 + 2xy^2 - 5$ για $x = -1$ και $y = 1$

Λύση

$$\begin{aligned} -(-1)^2 1^3 + 2(-1)1^2 - 5 &= \\ -1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 5 &= -1 - 2 - 5 = -8 \end{aligned}$$

β) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}y^3$ για $x = 3$ και $y = -2$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-2)^2 + \frac{1}{2}(-2)^3 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2}(-8) = \\ \frac{12}{2} - \frac{8}{2} &= 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

Προσοχή όταν έχουμε να αντικαταστήσουμε μεταβλητή, με τιμή αρνητικό αριθμό θα πρέπει τον αριθμό να τον βάλουμε σε

2. Να βρείτε τις τιμές κ, λ, μ ώστε τα μονώνυμα $3x^4y^\mu$ και $\lambda x^\kappa y^2$ να είναι :

α) όμοια β) ίσα γ) αντίθετα

Λύση

α) Θα πρέπει $\mu = 2$ και $\kappa = 4$ και $\lambda \neq 0$

β) Θα πρέπει $\mu = 2$, $\kappa = 4$ και $\lambda = 3$

γ) Θα πρέπει $\mu = 2$, $\kappa = 4$ και $\lambda = -3$

3. Να προσδιορίσετε την τιμή του αριθμού n ώστε το μονώνυμο $4x^n y^3$

I. Να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x .

II. Να είναι 6^{ου} βαθμού ως προς x και y .

III. Να έχει αριθμητική τιμή 100 για $x = 5$ και $y = 1$.

Λύση

- I. Θα πρέπει $v = 0$
 II. Θα πρέπει $v = 3$
 III. $4 \cdot 5^v \cdot 1^3 = 100 \Leftrightarrow$
 $4 \cdot 5^v = 100 \Leftrightarrow$
 $\frac{4 \cdot 5^v}{4} = \frac{100}{4} \Leftrightarrow 5^v = 25 \Leftrightarrow v = 2$

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
 Α) Μονώνυμο λέγεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των σημειώνεται μόνο η πράξη
 Β) του μονωνύμου λέγεται ο αριθμητικός παράγοντας του μονωνύμου.
 Γ) Κύριο μέρος του μονωνύμου λέγεται το γινόμενο των με τους αντίστοιχους.....
 Δ) Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται μονώνυμα
 Ε) Το σταθερό μονώνυμο 0 λέγεται μονώνυμο.
- Ένα ορθογώνιο έχει τριπλάσιο μήκος από το πλάτος του x . Το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του είναι :

A) $3x$	B) $3x^2$	Γ) x^2	Δ) $4x$
---------	-----------	----------	---------

- Η Μαρία έχει x ευρώ, ενώ η Ελένη έχει 2 ευρώ λιγότερα από το τριπλάσιο ποσό της Μαρίας. Η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το χρηματικό ποσό της Ελένης είναι :

A) $x - 2$	B) $3x + 2$	Γ) $3x$	Δ) $3x - 2$
------------	-------------	---------	-------------

- Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή και μεταβλητές x, ψ . Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς x είναι 3 και ως προς ψ είναι 7.
- Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = 2x\psi - x^2 + 3x\psi^2$ για $x = -3$ και $\psi = 2$.

6. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $B = x^2\psi^5 + 2x^3\psi^2$ για $x = -3$ και $\psi = -1$
7. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;
 α) $6xy$ β) $3+2y$ γ) $3(\sqrt{2}-y^2)$ δ) $\frac{2x}{9z}$
8. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:
 α) $x^5y^2 - 2xy$ για $x=1$ και $y=-2$
 β) $-4x^3y^2 + 6xy$ για $x=\frac{1}{2}$ και $y=-2$
9. Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού n ώστε το μονώνυμο $6x^n y^3$ να είναι : α) μηδενικού βαθμού ως προς x
 β) να είναι $5^{ου}$ βαθμού ως προς x και y .
10. Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού n ώστε το μονώνυμο $2x^2 y^3$ να έχει αριθμητική τιμή 54 για $x=-1$ και $y=3$

1.2 Β. Πράξεις με μονώνυμα**1. Πρόσθεση - Αφαίρεση μονωνύμων**

- Για να προσθέσουμε όμοια μονώνυμα προσθέτουμε τους συντελεστές και στο αποτέλεσμα βάζουμε το κύριο μέρος των μονωνύμων.

π.χ. Από την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \pm \gamma)$ έχουμε ότι :

$$2x^2 + 6x^2 = (2 + 6)x^2 = 8x^2$$

2. Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

- Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους.

π.χ. $3xy^3z \cdot (-4x^2y^4z^2) = -3 \cdot 4x^{1+2}y^{3+4}z^{1+2} = -12x^3y^7z^3$

3. Διαίρεση μονωνύμων

- Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα διαιρούμε τους συντελεστές των μονωνύμων και στο πηλίκο των συντελεστών βάζουμε για εκθέτη της κάθε μεταβλητής την διαφορά των εκθετών του διαιρετέου από τον διαιρέτη.

π.χ. $\frac{4x^3y^2z}{2xy^2} = \frac{4}{2}x^{3-1}y^{2-2}z = 2x^2y^0z = 2x^2z.$

2^ο π.χ. $\frac{6x^3y^4z^2}{-3x^2y^2z^4} = -2x^{3-2}y^{4-2}z^{2-4} = -2xy^2z^{-2} = -2xy^2 \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{-2xy^2}{z^2}$

**** Παρατηρήσεις**

- Αν υπάρχει μεταβλητή στο διαιρέτη(παρονομαστή) με εκθέτη μεγαλύτερο από τον εκθέτη του διαιρετέου(αριθμητή) τότε το πηλίκο των μονωνύμων

δεν είναι μονώνυμο. Π.χ $\frac{12x^3y}{6xy^3} = \frac{12}{6}x^{3-1}y^{1-3} = 2x^2y^{-2} = \frac{2x}{y^2}$

- Το άθροισμα ή η διαφορά ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- Το άθροισμα ή η διαφορά μονωνύμων δεν είναι μονώνυμο.
- Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις**1. Να κάνετε τις πράξεις:**

α) $-7x^2y + 5x^2y$ β) $0,35xy + 0,25xy + 0,4xy$ γ) $22\sqrt{5}x - 7\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}x$

Λύση

$$\alpha) -7x^2y + 5x^2y = -2x^2y$$

$$\beta) 0,35xy + 0,25xy + 0,4xy = xy$$

$$\gamma) 2\sqrt{5}x - 7\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}x = 1\sqrt{5}x$$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) 5x^2 \cdot \frac{2}{10}x^5 \quad \beta) \left(-\frac{2}{5}xy^3\right)(-3x^2y)\left(-\frac{5}{6}xy^2\right)$$

Λύση

$$\alpha) 5x^2 \cdot \frac{2}{10}x^5 = \frac{10}{10}x^7 = x^7$$

$$\beta) \left(-\frac{2}{5}xy^3\right)(-3x^2y)\left(-\frac{5}{6}xy^2\right) = \left(\frac{6}{5}x^3y^4\right)\left(-\frac{5}{6}xy^2\right) = -\frac{30}{30}x^4y^6$$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$\alpha) 12x^2 \div 4x \quad \beta) (-x^3y^4z) \div \left(\frac{1}{4}x^2y\right)$$

Λύση

$$\alpha) 12x^2 \div 4x = 3x$$

$$\beta) (-x^3y^4z) \div \left(\frac{1}{4}x^2y\right) = -4xy^3z$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1^{ης} στήλης με τα δεδομένα της 2^{ης} στήλης

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $4x^2\psi + 2\psi x^2$	1) $4x\psi^2$
β) $4\psi^2x + 2x\psi^2$	2) $8x^3\psi^3$
γ) $(4x^2\psi) \cdot (2\psi x^2)$	3) $6x^2\psi^3$
δ) $(4x^2\psi) : (2\psi x^2)$	4) 2
ε) $(4x^2\psi) : (2x\psi^2)$	5) $\frac{2x}{\psi}$
	6) $6x^4\psi^2$
	7) Δεν γίνεται πράξη

α.	
β.	
γ.	
δ.	
ε.	

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος

Α) Το γινόμενο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά.

Β) Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά.

Γ) Το πηλίκο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο.

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x + 4x - 7x$ β) $4x^2 - 3x^2$ γ) $5xy^2 - 2xy^2$ δ) $\lambda x^2 - 4\lambda x^2 + 6\lambda x^2$

4. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $3x^3\psi \cdot (-5x^2\psi^3)$

β) $-a^2\beta \cdot (-2a\gamma^3) \cdot 5a^3\beta^2$

γ) $3x^2 \cdot (-2x^3) \cdot 5x$

5. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\frac{3}{4}x^2 : \left(-\frac{1}{4}x^2\right)$

β) $6x^3\psi^4 : (-2x^2\psi)$

6. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $6x^3 : \dots = 3x$

β) $-3a^2\beta \cdot \dots = 15a^3\beta^4$

γ) $\frac{2x^5\psi^2}{\dots} = \frac{x^3}{5\psi}$

7. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε να ισχύουν οι ισότητες :

α) $(-15x^{3\kappa-1}\psi^\lambda) : (-3x^\kappa\psi^2) = 5x^3\psi$

β) $(4a^{2\kappa-1}\beta^{3\lambda}) : (12a^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1}) = \frac{2}{3}a\beta^3$

8. Να βρείτε τις τιμές των κ , λ , μ ώστε να ισχύουν οι ισότητες :

$$\alpha) (\kappa x^\lambda \psi) \cdot (3x^2 \psi^\mu) = -12x^5 \psi$$

$$\beta) (12x^{3\lambda} \psi^{2\kappa}) : (\mu x^\lambda \psi^\kappa) = -3x^4 \psi^3$$

9. Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες $3x$ και $4x$ αντίστοιχα . Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών κύκλων .

10. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) 3x \cdot 2x^3 \quad \beta) -4x \cdot 6x^4 \quad \gamma) \frac{3}{2}x^3 \cdot \frac{4}{3}x^6 \quad \delta) \sqrt{3}x^5 \cdot \sqrt{2}x$$

$$\epsilon) 5x^2 y^3 \cdot (-4xy^3) \quad \sigma\tau) -\frac{3}{5}xy^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3 y\right) \quad \zeta) 0,4x^3 y \cdot (-0,5xy^6)$$

$$\eta) 3x \cdot (-2x^2) \cdot 4x^3 \quad \theta) \sqrt{6}xz \cdot (-\sqrt{2}yz)(\sqrt{3}xy)$$

11. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$\alpha) \frac{20x^6}{4x^3} \quad \beta) \frac{21x^2 y}{3xy} \quad \gamma) \frac{42x^2 y^6}{8xy^4} \quad \delta) \frac{25x^7 y}{50xy^4}$$

$$\epsilon) \sqrt{12}x : (-\sqrt{3}x) \quad \sigma\tau) 6x^3 y^4 : (-2x^2 y) \quad \zeta) \frac{2}{5}xy^3 : \left(-\frac{2}{4}y^2 x\right)$$

12. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις :

$$\alpha) (3x)^2 \quad \beta) (-3y)^3 \quad \gamma) (-4x^2)^2 \quad \delta) (2x^2 yz^3)^2$$

1.3 Πολυώνυμο

Ορισμοί:

Το άθροισμα δύο τουλάχιστον μονωνύμων λέγεται **πολυώνυμο**.

π.χ. $2x^2y - 3xy + 4x$

- **Όρος του πολυωνύμου** λέγεται κάθε μονώνυμο που περιέχεται στο πολυώνυμο.

π.χ. Οι όροι του πολυωνύμου $2x^2y - 3xy + 4x$ είναι οι $2x^2y$, $-3xy$, $4x$

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

π.χ. $2x^2y - 3xy + 4x$

Το παραπάνω πολυώνυμο είναι:

α) 2^{ου} βαθμού ως προς x .

β) 1^{ου} βαθμού ως προς y .

γ) 3^{ου} βαθμού ως προς x και y .

Δύο πολυώνυμα θα είναι **ίσα** όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

π.χ. Τα πολυώνυμα $2x^2y - 3xy + 4x$ και $4x + 2x^2y - 3xy$ είναι ίσα. (Δεν έχει σημασία με ποια σειρά είναι γραμμένοι οι όροι των πολυωνύμων αρκεί να είναι ίδιοι)

- Όταν ένα πολυώνυμο έχει μόνο μία μεταβλητή τότε ονομάζεται **πολυώνυμο μίας μεταβλητής**. π.χ. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 7$ ένα τέτοιο πολυώνυμο μπορούμε τα το συμβολίσουμε: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 7$ ή $Q(x)$ ή $A(x)$ ή $B(x)$

- **Αριθμητική τιμή** πολυωνύμου είναι η τιμή που προκύπτει αν στη θέση του x βάλουμε κάποιο αριθμό.

π.χ. Η αριθμητική τιμή του $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 7$ για $x = 1$ είναι :

$$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 7 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 + 7 = 3 - 2 + 4 + 7 = 12$$

Άρα $P(1) = 12$.

- **Αναγωγή ομοίων όρων** λέγεται η αντικατάσταση των ομοίων όρων με το άθροισμα τους. π.χ. $2x^2 - 3x^3y + 4x^2 + 2x^3y = 6x^2 - 1x^3y$

Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε πολυώνυμα τα τοποθετούμε σε παρενθέσεις κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων και στη συνέχεια αναγωγή ομοίων όρων.

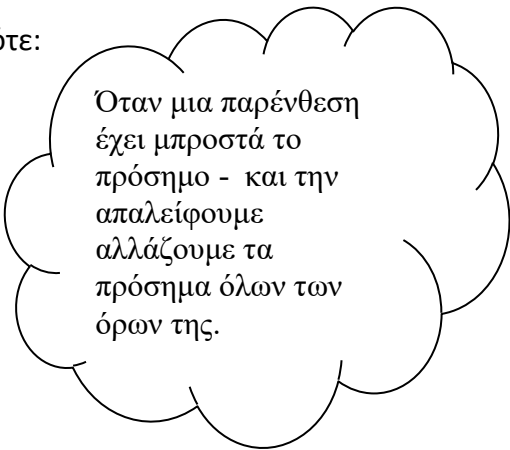
Π.χ Αν $A(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6$ και $B(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ τότε:

$$A(x) + B(x) = (3x^3 - 5x^2 + 6) + (4x^3 - 3x^2 + 7x - 9) =$$

$$3x^3 - 5x^2 + 6 + 4x^3 - 3x^2 + 7x - 9 = 7x^3 - 8x^2 + 7x - 3$$

$$A(x) - B(x) = (3x^3 - 5x^2 + 6) - (4x^3 - 3x^2 + 7x - 9) =$$

$$3x^3 - 5x^2 + 6 - 4x^3 + 3x^2 - 7x + 9 = -x^3 - 2x^2 - 7x + 15$$



Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά το πρόσημο - και την απαλείφουμε αλλάζουμε τα πρόσημα όλων των όρων της.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Αν ένα πολυώνυμο έχει δύο όρους λέγεται διώνυμο π.χ $4x^4y + 3xy^3$
- Αν ένα πολυώνυμο έχει τρεις όρους λέγεται τριώνυμο π.χ $2x^2y - 3xy + 4x$
- Σταθερό πολυώνυμο λέγεται κάθε αριθμός.
- Μηδενικό πολυώνυμο λέγεται ο αριθμός μηδέν.
- Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
- Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψεις τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

α) $P(x) = 4x^2 - 6x^4 + 2x + 7x^5 - 5$

Λύση

$$P(x) = 7x^5 - 6x^4 + 4x^2 + 2x - 5$$

2. Αν $A(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - 5$ και $B(x) = 3x^2 + x + 7$ να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $A(x) + B(x)$ β) $2A(x) + B(x)$

Λύση

$$\begin{aligned}\alpha) A(x) + B(x) &= (2x^3 + 4x^2 + x - 5) + (3x^2 + x + 7) = 2x^3 + 4x^2 + x - 5 + 3x^2 + x + 7 \\ &= 2x^3 + 7x^2 + 2x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) 2 \cdot A(x) + B(x) &= 2 \cdot (2x^3 + 4x^2 + x - 5) + (3x^2 + x + 7) = \\ &4x^3 + 8x^2 + 2x - 10 + 3x^2 + x + 7 = 4x^3 + 11x^2 + 3x - 3\end{aligned}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- A) Πολυώνυμο λέγεται μια παράσταση που είναι τουλάχιστον δύο μη ομοίων πολυωνύμων.
- B) Δύο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν έχουν όρους μονώνυμα.
- Γ) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού τότε έχει τη μορφή
 $P(x)=\dots\dots\dots$ και
- Δ) Η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με το των συντελεστών του.
- E) Το πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.
2. Να γίνουν οι αναγωγές ομοίων όρων στις ακόλουθες παραστάσεις:
- $$A = 7x^2 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^4 + 6x^2 + 7x - 9 + 12x^3$$
- $$B = 3ax^2 - 2ax - 7a^2x + 9ax^2 - 11ax$$
- $$\Gamma = 5x\psi + 3x(x + \psi) - 7\psi^2(x^2 + 2) + 3x^2\psi^2$$
3. Αν $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $Q(x) = -x^3 + 2x - 1$ και $H(x) = x^2 + 2x$, να βρεθούν τα πολυώνυμα:
- | | |
|---------------------------|---------------------|
| α) $P(x) + H(x)$ | β) $P(x) - Q(x)$ |
| γ) $P(x) - [Q(x) - H(x)]$ | δ) $P(-x) + Q(-2x)$ |
4. Αν $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ και $Q(x) = x^2 - x$, να βρεθούν τα πολυώνυμα:
- | | |
|--------------------|---------------------|
| α) $P(x) + Q(x)$ | β) $P(x) - Q(x)$ |
| γ) $P(2x) + Q(3x)$ | δ) $P(-x) + Q(-2x)$ |
5. Αν $P(x) = 4x^2 - 3x$ και $Q(x) = 36x^2 + 9x$ να αποδείξετε ότι:
 $P(3x) - Q(-x) = 0$
6. Αν $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 4$
- | |
|--|
| α) Να βρείτε το $P(1)$ |
| β) Να αποδείξετε ότι $P(1) = P(0) + 1$ |
7. Αν $P(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = \sqrt{2}$

8. Να γράψετε τα παρακάτω πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρείτε τον βαθμό τους.

α) $P(x) = 2x^2 - 4x^4 + 3x + 7$ β) $P(x) = 2 + 6x^2 - 5x + 12x^6$

9. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του λ .

αν $P(x) = \lambda x^3 - 4x^2 + 3x - 9$

10. Δίνετε το πολυώνυμο $P(x) = (a-3)x^3 + \beta x - \gamma$

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α , β ώστε το πολυώνυμο να είναι σταθερό.

β) Αν το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο να βρείτε τις τιμές των α , β , γ .

11. Να βρείτε τις τιμές των α , β , γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = ax^2 + 3x - \beta$ και

$Q(x) = 2x^2 + \gamma x + 5$ να είναι ίσα.

12. Να κάνετε τις αναγωγές ομοίων όρων :

α) $2x + 3y - 4x - 5y$ β) $3x^2 - 5x + 4x + x^2 - 4$

13. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $5x - (3x - 4)$ β) $x - [-x + (3x - 4)] + 2x$

γ) $xy^2 - (x^2y - 2xy) + (2xy^2 + xy - 2x^2y)$

δ) $[x^2 - 3x - (2x + x^2)] - [-x + (x^2 + 1)]$

14. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

α) $3x^3 - 2x^2 + (-x^3 + 3x^2) - 4x + 5x^3$

β) $4x - 3x^2 + (2x - 4x^2 - 4) + 6 + 7x^2$

15. Αν $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2$ και $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ να υπολογίσεις τα

πολυώνυμα : α) $P(x) + Q(x)$ β) $P(x) - 2Q(x)$

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

- Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με τον κάθε όρο του πολυωνύμου.

π.χ. $3x^2y(4x-2y)=12x^3y-6x^2y^2$

- Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε τον κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με όλους τους όρους του άλλου πολυωνύμου.

π.χ. $(2x-4y)(3y+x)=6xy+2x^2-12y^2-4xy=2x^2-12y^2+2xy$

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Προσοχή στα πρόσημα στο πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $xy^2(2x^2y-3y)$ β) $(3x-2)(2x^2-x+4)$

Λύση

α) $xy^2(2x^2y-3y)=2x^3y^3-3xy^3$

β) $(3x-2)(2x^2-x+4)=6x^3-3x^2+12x-4x^2+2x-8=$
 $=6x^3-7x^2+14x-8$

2. Να αποδείξετε την ισότητα:

α) $5x-2x(3x-1)-(6x-1)(1-x)=1$

Λύση

$5x-2x(3x-1)-(6x-1)(1-x)=5x-6x^2+2x-(6x-6x^2-1+x)=$
 $=5x-6x^2+2x-6x+6x^2+1-x=1$

3. Αν $P(x)=-2x^2+5x-3$ και $Q(x)=4x-5$ να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $P(x)+Q(x)$ β) $(P(x)-2)(Q(x)+3)$

Λύση

$$\alpha) P(x) + Q(x) = -2x^2 + 5x - 3 + 4x - 5 = -2x^2 + 9x - 8$$

$$\beta) (P(x) - 2)(Q(x) + 3) = (-2x^2 + 5x - 3 - 2)(4x - 5 + 3) =$$

$$(-2x^2 + 5x - 5)(4x - 2) = -8x^3 + 4x^2 + 20x^2 - 10x - 20x + 10 =$$
$$-8x^3 + 24x^2 - 30x + 10$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Τα πολυώνυμα $P(x) = (x-2) \cdot (x-3)$ και $Q(x) = ax^2 + bx + 6$ είναι ίσα, όταν:

α) $a=1$ και $b=5$ β) $a=2$ και $b=3$ γ) $a=1$ και $b=-5$ δ) $a=-5$ και $b=1$

2. Αν
- $P(x) = 2x^2 - x - 1$
- και
- $Q(x) = 3x - 2$
- , να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $P(x) \cdot Q(x)$

β) $P(x) \cdot [Q(x) - 3x(x+1)]$

γ) $[P(x) - 1] \cdot [Q(x) - x]$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $x^2 + (3x-2)(1-x)$

β) $x - (2x-1) \cdot (x-3)$

γ) $x^2 - 3x(x-2) - (x-1) \cdot (1-3x)$

δ) $3x(x-1) \cdot (2x-3)$

ε) $(x-1) \cdot (2x^2 - x) \cdot (2x+1)$

4. Να υπολογίσετε το γινόμενο
- $(x+2)(x+3)$
- και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά βλέποντας το διπλανό σχήμα.

2	2x	6
x	x^2	3x
	x	3

5. Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $5x - 2x(3x-1) - (6x-1) \cdot (1-x) = 1$

β) $3\beta^2 - 2a(a+3\beta) - 3(a+\beta) \cdot (\beta-2a) - 4a^2 = -3a\beta$

6. Με ποιο πολυώνυμο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το
- $5x - 2$
- , ώστε το γινόμενό τους να είναι το πολυώνυμο
- $10x^2 - 9x + 2$
- .

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-3x^2y(2x-3y)$ β) $5x(2x^2-3x+2)+4$ γ) $3xy(2x-y)-2y^2(x-1)$

δ) $(3x-2y)(4x-y)$ ε) $(x-2)(y-3)$ στ) $(2x-y)(y+4x)$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x(3x-4)(x+1)$ β) $(2x-1)(x-1)(3x+2)$

γ) $(x-1)(2x^2-x)(2x+1)$ δ) $(2x-1)(x+1)(3x-1)(x-2)$

9. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2 + (x-1)(x+1)$

β) $x^2 + (3x-2)(2-x)$

γ) $x^2 - 4x(x-1) - (x-3)(1-2x)$

δ) $1 + 2x(x-2)(x+5)$

10. Να αποδείξετε την ισότητα:

α) $3y^2 - 2x(x+3y) - 3(x+y)(y-2x) - 4x^2 = -3xy$

11. Αν $P(x) = 2x+1$ να βρείτε τα πολυώνυμα

α) $Q(x) = P(2x+1)$

β) $R(x) = P(x^3-2)$

12. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 4x-1$ και $Q(x) = x-2$ να βρείτε τα πολυώνυμα

α) $A(x) = 2 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x)$

β) $B(x) = 3 \cdot P(x) - 2x + 4 \cdot Q(x)$

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

$$1. \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ Άθροισμα τετραγώνου.}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$2. \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ Διαφορά τετραγώνου.}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$3. \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ Άθροισμα κύβου.}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$4. \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ Διαφορά κύβου.}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

$$5. \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ Διαφορά τετραγώνων.}$$

Απόδειξη:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$6. \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ Άθροισμα κύβων.}$$

Απόδειξη:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ Διαφορά κύβων.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \beta^3 = \\
 &= \alpha^3 - \beta^3
 \end{aligned}$$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta + \gamma)^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = \\
 &= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 = \\
 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma
 \end{aligned}$$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha)(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$$

$$\beta)(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\gamma)(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

$$\delta)(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

$$\epsilon)x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + x \cdot 2y + (2y)^2) = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$\zeta)(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1^3$$

3. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 &= \\
 \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= \\
 \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 &= \\
 4\alpha\beta
 \end{aligned}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Για τους οποιουσδήποτε αριθμούς χ , ψ να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης Α τη συμβολική γραφή από τη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Το διπλάσιο γινόμενο τους	1. $2(\chi + \psi)^2$
β. Το τετράγωνο του αθροίσματος τους	2. $2\chi\psi$
γ. Το άθροισμα των τετραγώνων τους	3. $(\chi + \psi)^2$
δ. Το τετράγωνο του γινομένου τους .	4. $\chi^2 + \psi^2$
ε. Το διπλάσιο του αθροίσματός τους .	5. $(\chi \cdot \psi)^2$
στ. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματός τους .	6. $2(\chi + \psi)$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

1. $(-\alpha + \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$	☐
2. $(-\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$	☐
3. $(-\alpha + \beta)^3 = -(\alpha - \beta)^3$	☐
4. $(-\alpha - \beta)^3 = -(\alpha + \beta)^3$	☐
5. $(-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$	☐
6. $(-\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = -(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = -(\alpha^2 - \beta^2)$	☐

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες.

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$	☐
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$	☐
3. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3$	☐
4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3$	☐

5. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \beta^2$

4. Να βρείτε το τελικό αποτέλεσμα στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(2x - 7)^2$

β) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

γ) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})$

δ) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

ε) $(\sqrt{5} + 1)^2 - (\sqrt{5} - 1)^2 - 4\sqrt{5}$

5. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $(x \cdots \dots)^2 = \dots + \dots + 25$

2. $(\dots \cdots 3)^2 = \omega^2 - \dots \cdots \dots$

3. $(\dots + \dots)^2 = 9x^2 \cdots 12x\psi \cdots \dots$

4. $(\dots \cdots 3a)^2 = \dots - 30x^2a \cdots \dots$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $3 + (x - 1)^2 - (x - 2)^2$

β) $1 + 2x(x - 3)^2$

γ) $x - 3x(2x - 1)^2$

δ) $x^2 - (2x - 1) \cdot (x + 1)^2$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + y)^2$ β) $(x + 3)^2$ γ) $(x + 1)^2$

δ) $(x - y)^2$ ε) $(x - 3)^2$ στ) $(y - 1)^2$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(2x + 1)^2$ β) $(2x - y)^2$ γ) $(3x - 2y)^2$

δ) $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2$ ε) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right)^2$ στ) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^2$

9. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x^2 + 2)^2$ β) $(2x^2 - y^2)^2$ γ) $(x^3 - 2x^2)^2$

$$\delta) \left(2x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \epsilon) \left(3y^3 - \frac{x}{2}\right)^2 \quad \sigma\tau) \left(\frac{2x}{3} - \frac{y^2}{2}\right)^2$$

10. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (-x+3)^2 \quad \beta) (-2x-3y)^2 \quad \gamma) (-x^2+5)^2$$

$$\delta) (\sqrt{x}-2)^2 \quad \epsilon) (\sqrt{y}-2\sqrt{x})^2 \quad \sigma\tau) (3\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$$

11. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\alpha) (a+\beta)^2 - (a-\beta)^2 = 4a\beta$$

$$\beta) (a^2-3)^2 - (a-1)(a^3-6a) = a(a^2-6)+9$$

$$\gamma) 4a(a-1) - (2a-1)^2 = -1$$

12. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$i. (a+\beta)^2 - (a-\beta)^2 = 4a\beta$$

$$ii. 4a(a-1) - (2a-1)^2 = -1$$

$$iii. (a^2-3)^2 - (a-1) \cdot (a^3-6a) = a(a^2-6)+9$$

$$iv. (a^2+1) \cdot (x^2+4) - (2a-x)^2 = (ax+2)^2$$

13. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) 2+(x-1)^2 - (x+2)^2 \quad \beta) 2x-x(x+1)^2$$

$$\gamma) 3x^2-2x(2x-3)^2 \quad \delta) (2x-5)^2+2x(x+1)-(4x-3)^2$$

14. Αν $x=\sqrt{2}-1$ και $y=\sqrt{2}+1$ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A=x^2-y^2$$

15. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x-2)^2-(x+3)^2+10x$ είναι σταθερό.

16. α) Να υπολογίσετε την παράσταση $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

$$\beta) \text{ Να δείξετε ότι } \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

17. α) Να αποδείξετε ότι : $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{2}{x}\right)^2 = 8$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \left(442 + \frac{1}{221}\right)^2 - \left(442 - \frac{1}{221}\right)^2$

18. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : α) $(\sqrt{3}-1)^2$ και $(\sqrt{3}+1)^2$

β) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

19. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+2)^3$ β) $(x-2)^3$ γ) $(3x-1)^3$

δ) $(\sqrt{x}-2)^3$ ε) $(x-\sqrt{3})^3$ στ) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^3$

ζ) $(x^2-1)^3$ η) $(2x^2-3y)^3$ θ) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$

20. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-2)$ β) $-10x^2 + 2(x+3)^3 - (2x-1)^2$

21. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

α) $(\alpha - \beta)^3 - (\alpha + \beta)^3 + 2\beta(3\alpha^2 + \beta^2) = 0$

22. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-2)(x+2)$ β) $(x-1)(x+1)$ γ) $(2x-3)(2x+3)$

δ) $(3x+2y)(3x-2y)$ ε) $(x^2-2)(x^2+2)$ στ) $(3a^2-1)(3a^2+1)$

ζ) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ η) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ θ) $(2\sqrt{2}+x)(2\sqrt{2}-x)$

ι) $(x-5)(-x-5)$ κ) $(-y-3)(3-y)$ λ) $(2x-\sqrt{2})(-\sqrt{2}-2x)$

23. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+y-2)(x+y+2)$ β) $[(x-y)+3][(x-y)-3]$

γ) $(2x-3y+1)(2x-3y-1)$ δ) $(\sqrt{2}-x+1)(\sqrt{2}-x-1)$

ε) $[(a+x)-(x-y)][(a+x)+(x-y)]$

24. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ β) $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

25. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(x-2)^2(x+2)^2$ β) $(x-1)^2(x+1)^2$

$$\gamma) (2x+1)^2 (2x-1)^2 \quad \delta) (x-3)^3 (x+3)^3$$

26. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές:

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad \beta) \frac{2}{\sqrt{2}-1} \quad \gamma) \frac{3}{2-3\sqrt{3}}$$

27. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) 4+(x-2)(x+2) \quad \beta) 4-(x-1)(x+1) \\ \beta) 3x^2+2(x-1)(x+1) \quad \gamma) (2x+1)^2-(x-3)(x+3) \\ \epsilon) 3x^2-(2x-5)^2-(3x-5)(3x+5) \end{aligned}$$

28. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{aligned} \alpha) (x-1)(x^2+x+1) \quad \beta) (2x-3)(4x^2+6x+9) \\ \gamma) (3x+1)(9x^2-3x+1) \quad \delta) (2-x^2)(4+2x^2+x^4) \end{aligned}$$

29. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) (x-2)(x^2+2x+4)-(x-1)(x^2+x+1) \\ \beta) (x-1)^2-(2x-1)(4x^2+2x+1) \\ \gamma) (x-2)^3-(x+3)(x-3)-(x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

30. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) (x+y)(x^2-xy+y^2)-(x-y)(x^2+xy+y^2)=2x^3 \\ \beta) (x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)=x^6-64 \\ \gamma) (a+\beta+\gamma)^2-(a-\beta+\gamma)^2=4\beta(\alpha+\gamma) \end{aligned}$$

31. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)-(x+1)^3+3x(x+1) \text{ είναι μηδενικό.}$$

32. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (x+y+1)^2 \quad \beta) (2x-y+3)^2 \quad \gamma) (2x^2+3x-2)^2$$

33. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα :

$$\alpha) (x-1)^4 \quad \beta) (x+2)^4 \quad \gamma) (x^2-2)^4$$

34. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $1 + 3x(x - 2) - (2x + 1)^2$

β) $2x^3 - (x + 1)^2 + (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

γ) $1 - 2x(x - 3) - (3x - 2)^2$

δ) $x^3 - (2x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - 5)(-4x^2)$

35. Αν $a = x + y$, $\beta = x - y$ και $\gamma = 4xy$ να αποδείξετε ότι:

$$(a^2 - \beta^2)^2 = \gamma^2$$

36. Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = -2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2 - \beta^2$ β) $\alpha^3 + \beta^3$ γ) $\alpha^3 - \beta^3$

37. Αν $x + \frac{1}{x} = 1$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ β) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ γ) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ δ) $\left|x + \frac{1}{x}\right|$

38. Αν $2x + \frac{1}{x} = 5$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $4x^2 + \frac{1}{x^2}$ β) $8x^3 + \frac{1}{x^3}$

1.6 Παραγοντοποίηση

- **Παραγοντοποίηση** είναι η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε ένα άθροισμα σε γινόμενο.
- Οι μέθοδοι παραγοντοποίησης είναι οι εξής:
1. **Κοινός παράγοντας.** Είναι το γινόμενο του μέγιστου κοινού διαιρέτη των συντελεστών επί τον κάθε κοινό παράγοντα στο μικρότερο βαθμό που συναντάμε ανάμεσα σε 2 ή περισσότερους όρους ενός πολυωνύμου.
 2. **Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (ομαδοποίηση)** .Στην ομαδοποίηση χωρίζουμε τους όρους σε δύο ή περισσότερες ομάδες και βγάζουμε κοινό παράγοντα στη κάθε ομάδα ξεχωριστά και θα πρέπει να προκύψουν νέοι όροι οι οποίοι θα έχουν κοινό παράγοντα μεταξύ τους.
 3. **Διαφορά τετραγώνων.** Είναι η ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
 4. **Ανάπτυγμα τετραγώνου.** Είναι οι ταυτότητες $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ και $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
 5. **Τριώνυμο.** Το τριώνυμο πρέπει να είναι της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Στην ομαδοποίηση αν δεν πάρουμε τις σωστές ομάδες δεν θα μας βγαίνει κοινός παράγοντας οπότε παίρνουμε διαφορετικές ομάδες.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: (κοινός παράγοντας)

α) $7x + 7\omega = 7(x + \omega)$

β) $5x^3 - 6x^2 = x^2(5x - 6)$

γ) $x(\alpha - 1) - y(\alpha - 1) = (\alpha - 1)(x - y)$

δ) $(4x - 3)^2 - 4x + 3 = (4x - 3)^2 - (4x - 3) = (4x - 3)(4x - 3 + 1) = (4x - 3)(4x - 2)$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: (ομαδοποίηση)

$$\alpha) \lambda x + \lambda y + 3x + 3y = \lambda(x + y) + 3(x + y) = (x + y)(\lambda + 3)$$

$$\beta) \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \alpha(\beta + 1) + (\beta + 1) = (\beta + 1)(\alpha + 1)$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: (Διαφορές τετραγώνων)

$$\alpha) x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$$

$$\beta) 64\lambda^2 - 25\mu^2 = (8\lambda)^2 - (5\mu)^2 = (8\lambda - 5\mu)(8\lambda + 5\mu)$$

$$\gamma) (2x - y)^2 - (x - y)^2 = [(2x - y) + (x - y)][(2x - y) - (x - y)]$$

$$= (2x - y + x - y)(2x - y - x + y) = (3x - 2y)2x$$

$$\delta) 9(2x - y)^2 - 16(x - y)^2 = [3(2x - y)]^2 - [4(x - y)]^2 =$$

$$= [3(2x - y) + 4(x - y)][3(2x - y) - 4(x - y)] =$$

$$= (6x - 3y + 4x - 4y)(6x - 3y - 4x + 4y) = (10x - 7y)(2x + y)$$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις (Τριώνυμο)

$$\alpha) x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

$$\alpha + \beta = 3$$

$$\alpha \cdot \beta = 2$$

$$\alpha = 2$$

$$\beta = 1$$

$$\beta) x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$\alpha + \beta = -3$$

$$\alpha \cdot \beta = 2$$

$$\alpha = -2$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma) x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\alpha \cdot \beta = -6$$

$$\alpha = -3$$

$$\beta = 2$$

Ψάχνουμε πάντα 2 αριθμούς να μας δίνουν ταυτόχρονα άθροισμα τον συντελεστή του x και γινόμενο το σταθερό όρο του τριωνύμου. Πάντα να ξεκινάμε την αναζήτηση από τους αριθμούς που μας δίνουν το γινόμενο. Αφού βρούμε τους αριθμούς η παραγοντοποίηση γίνεται με τον τύπο

$$x^2 + (a + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) a^2 + 2a\beta + \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$$

$$\beta) x^2 - 2xy + y^2 - 1 = (x - y)^2 - 1^2 = (x - y + 1)(x - y - 1)$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $5x - 5y$ β) $ax + \beta x$ γ) $\lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma$
 δ) $3\alpha + 6\beta$ ε) $3xy - 3x$ στ) $-4x + 6y - 10z$
 ζ) $3y^3 - 6y^2 + 9y$ η) $xy^2 - x^2y + xy$ θ) $8a^3x^3 - 12a^2x + 4a^2x^2$

2. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- i. $15a^3\beta^2\gamma - 5a^2\beta^3\gamma^2 - 20a^4\beta^4\gamma^3x$
 ii. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$
 iii. $(2x + y) - a(2x + y) - (2x + y)^2$
 iv. $(4a - 2\beta) \cdot (2x - 3y) + (3y - 2x) \cdot (\beta - 2a)$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $3(a - 1) + x(a - 1)$ β) $2y(x + 7) - 4z(x + 7)$ γ) $x(a + x - y) + 2(a + x - y)$
 δ) $3x(x - 1) - x + 1$ ε) $2x^2(x - 3) - 4x(x - 3)^2$ στ) $(3x - 2)^2 - (15x - 10)$
 ζ) $(x - 2)^3 - (2 - x)^2 - 3(2 - x)$ η) $(4y - 2)^2 - (2 - 4y)(y - 3)$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $\lambda x + \lambda z + 3x + 3z$ β) $\alpha x + \alpha + x + 1$ γ) $8x^2 - 12ax - 15a + 10x$
 δ) $4x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ ε) $x^3 + \sqrt{3}x^2 + x + \sqrt{3}$ στ) $x^3 - 7x^2 - 3x + 21$
 ζ) $3x^2 - 2x + 3ax - 2a - 3x + 2$ η) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5x - 10$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $x^2 - 36$ β) $a^2 - 64$ γ) $81 - a^2$ δ) $x^4 - y^4$
 ε) $\frac{x^2}{16} - \frac{9}{4}$ στ) $\frac{1}{25}x^2 - y^2$ ζ) $x^2 - 2$ η) $x^4 - 1$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $(3x - y)^2 - 4$ β) $(x - 2y)^2 - 4x^2$ γ) $9x^2 - (3x - 1)^2$
 δ) $4(2x - y)^2 - 1$ ε) $36a^2 - 25(a - 2\beta)^2$ στ) $9x^2 - (x - 2)^2$

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $3x^2 - 3y^2$ β) $3x^3 - 24$ γ) $8x^2 - 18$ δ) $27x^3 - 12x$
 ε) $16y^5 - y$ στ) $5(x + y)^2 - 20(2x - y)^2$ ζ) $27(x + y)^2 - 3(x + 2y)^2$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x-1)^2(a-2\beta)-\alpha+2\beta$ β) $(x-1)^3-x+1$

γ) $(x-3)(x^2-4)-(x+2)(x^2-9)$ δ) $(x^2-4)^2+(3x-4)(x+2)^2$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3-2x^2-x+2 β) $x^3-2x^2-9x+18$ γ) x^5+x^4-x-1

δ) $\alpha^2\beta^2-9\beta^2-\alpha^2+9$ ε) $\alpha^2y^2-9y^2-a^2+9$ στ) $x\sqrt{y}+x\sqrt{z}+y-z$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $a^2-x^2+2a-2x$ β) $x^4-x^2-y^4-y^2$ γ) $25x^2-y^2-5x+y$

δ) $(2x-1)(x+3)-x^2+9$ ε) $a^4-y^4-(a+y)(a-y)^3$

11. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3+8 β) x^3-8 γ) $8x^3+27$ δ) $64a^3-125$

ε) $5x^3+40$ στ) a^6-1 ζ) $(2x-1)^3-x^3$ η) $(x+1)^3-(x-1)^3$

θ) $3x^3-81$ ι) $2x^4-54x$ κ) $\frac{1}{8}x^3-27$ λ) x^6+1

12. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) a^3+x^3+a+x β) x^3-y^3-x+y γ) $x^7+8x^4-x^3-8$

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2+6x+9 β) $y^2-10y+25$ γ) z^2-2z+1

δ) $4x^2+12x+9$ ε) $9y^2-12y+4$ στ) $25x^2+4y^2-20xy$

ζ) x^4+2x^2+1 η) $x-6\sqrt{x}+9$ θ) $4x^4-4x^2+1$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x+1)^2-4(x+1)+4$ β) $9(2x-y)^2-6x(2x-y)+x^2$

γ) $(a-1)^4-2(a-1)+1$ δ) $(2x-1)^4+16x(2x-1)+64x^2$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2-12x+18$ β) $-y^2+2y-1$ γ) $4x^4-8x^3+4x$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $a^2+2ax+x^2-y^2$ β) $9-a^2+2ax-x^2$ γ) $1-2x-y^2-z^2+x^2+2yx$

δ) $x^2y+xy^2+2xy+x^2+x+y+y^2$ ε) $x+2\sqrt{x}+1-y^2$

στ) $x^2 + y^2 - z^2 + 2ax + 2ay + 2xy - 2az$

17. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + x - 6$ β) $x^2 + x - 2$ γ) $x^2 - 8x + 15$

δ) $x^2 - x - 2$ ε) $x^2 + 9x + 20$ στ) $x^2 - 10x + 21$

η) $x^2 + (a+3)x + 3a$ θ) $x^2 + (y-2)x - 2y$

18. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^4 - 5x^2 + 4$ β) $x^4 - 5x^2 + 6$ γ) $(x+y)^2 - 5(x+y) - 6$

δ) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y - 8$ ε) $x + 3\sqrt{x} + 2$ με $x \geq 0$

19. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3 - x^2 - 2x$ β) $(x+1)(x^2 - 3x + 2) - x^2 + 1$

γ) $(x^2 + 6x + 4)^2 - 16$ δ) $(x-1)^3 + x^2 - 4x + 3$

20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $5x^2 + 7xy + 2y^2$ β) $2x^2 - 3xy + y^2$ γ) $4k^2 - 9kx + 5x^2$

21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $xy(a^2 + z^2) + az(x^2 + y^2)$ β) $a^2(x-y) + x^2(y-a) + y^2(a-x)$

22. α) $a + \beta + \gamma = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $(3x-3)^3 + (2-x)^3 + (1-2x)^3$

23. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (x+1)^2$ και $B = x^2 + 2x + 3$ να αποδείξετε ότι:

$$B = A + 1 \quad \text{και} \quad A \cdot B + 1 = (A + 1)^2$$

24. Αν $\alpha + \beta = 1 + \alpha\beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ ή $\beta = 1$

25. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta = 3$ να δείξετε ότι $\alpha^2 - \beta^2 = 3(2\alpha - 3)$

26. Αν $x + y = -1$ και $xy = 2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $2x + 2y - 3xy$ β) $x^2y + xy^2$

27. Να αποδείξετε ότι αν ένας ακέραιος αριθμός k είναι άρτιος τότε και ο αριθμός k^2 θα είναι άρτιος.

28. Να αποδείξετε ότι αν ένας ακέραιος αριθμός k είναι περιττός τότε και ο αριθμός k^2 θα είναι περιττός.

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

- Για να διαιρέσουμε 2 πολυώνυμα χρησιμοποιούμε τον κανόνα της ευκλείδειας διαίρεσης. Δηλαδή αν Δ (**διαιρετέος**) , δ (**διαιρέτης**) , π (**πηλίκο**) , υ (**υπόλοιπο**)

Τότε:

$$\Delta = \pi \cdot \delta + \upsilon \text{ με } \upsilon < \delta.$$

- Στην περίπτωση όπου $\upsilon = 0$ δηλαδή $\Delta = \pi \cdot \delta$ η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.
 ➤ Για την διαίρεση πολυωνύμων ισχύει ο τύπος της ευκλείδειας διαίρεσης δηλαδή :

$$\Delta(x) = \pi(x) \cdot \delta(x) + \upsilon(x) \text{ όπου:}$$

$\Delta(x)$ **είναι ο διαιρετέος**

$\pi(x)$ **είναι το πηλίκο**

$\delta(x)$ **είναι ο διαιρέτης**

$\upsilon(x)$ **είναι το υπόλοιπο**

- Μέθοδος διαίρεσης πολυωνύμων :

Βήμα 1: Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά της φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής x . Στο πολυώνυμο του διαιρέτη αν λείπει κάποια δύναμη του x την συμπληρώνουμε με συντελεστή το 0.

Βήμα 2: Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη. Το αποτέλεσμα το τοποθετώ στο πηλίκο.

Βήμα 3: Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα του πηλίκου με όλους τους όρους του διαιρέτη αλλάζουμε το πρόσημο του κάθε όρου που προκύπτει και το τοποθετούμε κάτω από την αντίστοιχη δύναμη του διαιρετέου και προσθέτουμε. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το μερικό υπόλοιπο.

Βήμα 4: Αν ο βαθμός του υπολοίπου είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη η διαδικασία σταματάει αν ο βαθμός του υπολοίπου είναι μεγαλύτερος του βαθμού του διαιρετέου επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 μέχρι ο βαθμός του υπολοίπου να είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη.

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Αν το υπόλοιπο είναι μηδέν η διαίρεση λέγεται τέλεια.

- Στην περίπτωση που η διαίρεση είναι τέλεια ($\upsilon = 0$) ο διαιρέτης λέγεται και **παράγοντας** του διαιρετέου. $\Delta = \pi \cdot \delta$
- Με την τέλεια διαίρεση μπορούμε να **παραγοντοποιήσουμε** το πολυώνυμο του διαιρετέου.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε την διαίρεση: $(8x^4 + 8x^3 + 17x - 5) \div (2x^2 + 3x - 1)$

Λύση

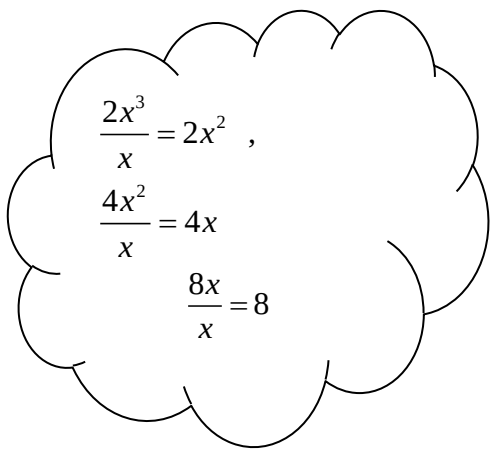
$8x^4 + 8x^3 + 0x^2 + 17x - 5$	$2x^2 + 3x - 1$
$-8x^4 - 12x^3 + 4x^2$	$4x^2 - 2x + 5$
$-4x^3 + 4x^2 + 17x - 5$	
$+4x^3 + 6x^2 - 2x$	
$10x^2 + 15x - 5$	
$-10x^2 - 15x + 5$	
0	

Στην παραπάνω διαίρεση το υπόλοιπο είναι 0 δηλαδή η διαίρεση είναι τέλεια . Σε αυτή την περίπτωση ο διαιρέτης και το πηλίκο λέγονται παράγοντες του διαιρετέου.

2. Να κάνετε την διαίρεση $(2x^3 + \lambda) : (x - 2)$ να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης και να βρείτε για ποια τιμή του λ η διαίρεση είναι τέλεια.

Λύση

$2x^3 + 0x^2 + 0x + \lambda$	$x - 2$
$-2x^3 + 4x^2$	$2x^2 + 4x + 8$
$4x^2 + 0x + \lambda$	
$-4x^2 + 8x$	
$8x + \lambda$	
$-8x + 16$	
$\lambda + 16$	



$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2, \\ \frac{4x^2}{x} = 4x \\ \frac{8x}{x} = 8$$

Το υπόλοιπο είναι: $\lambda + 16$

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι : $\Delta(x) = \pi(x) \cdot \delta(x) + \nu(x)$ άρα

$$2x^3 + \lambda = (x - 2)(2x^2 + 4x + 8)$$

Για να είναι η διαίρεση τέλεια θα πρέπει το υπόλοιπο να είναι ίσο με το 0 άρα

$$\text{θα πρέπει } \lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -16$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) (3x^2 - 2x + 5) \div (x - 2) = \quad \varepsilon) (6x^2 - 7x - 3) : (2x - 1)$$

$$\beta) (x^3 - 2x^2 + 3) \div (x + 1) = \quad \sigma\tau) (x^3 - 2x^2 + 3) : (x + 1)$$

$$\gamma) (4x^3 - 1) \div (4x^2 - x - 1) = \quad \zeta) (4x^3 - 1) : (4x^2 - x - 1)$$

$$\delta) (x^3 - 7x + 6) \div (x - 1) = \quad \eta) (x^3 - x) : (2x - 1)$$

2. Να κάνετε την διαίρεση $(2x^3 - \lambda) : (x + 1)$ και να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η διαίρεση είναι τέλεια.
3. α) Να κάνετε την διαίρεση $(x^3 + 3x + 4) : (x + 1)$
- β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x^3 + 3x + 4$
4. Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το $3x - 5$ δίνει πηλίκο $x^2 - 1$ και υπόλοιπο -7 ;
5. Αν ο ένας παράγοντας του πολυωνύμου $x^3 - 3x - 2$ είναι ο $(x - 1)^2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα.
6. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν $x^2 - 3x + 2$ αν το μήκος του είναι $x + 1$. Να βρείτε το πλάτος του.
7. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι διαιρέτης του $P(x)$ όταν :
- α) $P(x) = x^2 - 4x + 3$ και $Q(x) = x - 3$
- β) $P(x) = x^2 + 4x + 3$ και $Q(x) = x + 1$

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο η περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

π.χ. Το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων : $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$ είναι :

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 72x^3y^3\omega^4$$

Μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο η περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι το γινόμενο **μόνο** των κοινών τους παραγόντων με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

π.χ. Ο Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων : $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$ είναι:

$$\text{Μ.Κ.Δ.} = 6x^2y\omega^2$$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. ή το Μ.Κ.Δ. παραστάσεων θα πρέπει να κάνουμε πρώτα όλες τις δυνατές παραγοντοποιήσεις (ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων)

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $4x^2$, $2x$ β) $3ax^2$, $2a^3x$, $6ax^4$

Λύση

α) Ε.Κ.Π. ($4x^2$, $2x$) = $4x^2$

Μ.Κ.Δ. ($4x^2$, $2x$) = $2x$

β) Ε.Κ.Π. ($3ax^2$, $2a^3x$, $6ax^4$) = $6a^3x^4$

Μ.Κ.Δ. ($3ax^2$, $2a^3x$, $6ax^4$) = ax

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $4\alpha - 4\beta$, $\alpha^2 - \beta^2$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\beta) a^2 - 3a + 2, a^2 - 4, a^3 - 4a$$

Λύση

$$\alpha) 4\alpha - 4\beta = 4(\alpha - \beta)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} (4\alpha - 4\beta, \alpha^2 - \beta^2, \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 4(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2$$

$$\text{Μ.Κ.Δ.} (4\alpha - 4\beta, \alpha^2 - \beta^2, \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = (\alpha - \beta)$$

$$\beta) a^2 - 3a + 2 = (\alpha - 2)(\alpha - 1)$$

$$a^2 - 4 = (\alpha + 2)(\alpha - 2)$$

$$a^3 - 4a = \alpha(\alpha^2 - 4) = \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2)$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} (a^2 - 3a + 2, a^2 - 4, a^3 - 4a) = \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha - 1)$$

$$\text{Μ.Κ.Δ.} (a^2 - 3a + 2, a^2 - 4, a^3 - 4a) = (\alpha - 2)$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

$$\alpha) 3x, 6x^2, x^3$$

$$\beta) 2xy, 6x^2y^4, 4x^2y^6$$

$$\gamma) 2x(x-2), 4x^3(x-2)^2, 5x(x-2)$$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

$$\alpha) x^2 - a^2, x^2a - xa^2, x(x-a)$$

$$\beta) x^2 - 3x + 2, x^2 - 4, 2x^2 - 4x$$

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι της είναι πολυώνυμα ,

λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση**. π.χ. $\frac{2x^3+x}{6x^2+3}$

➤ Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι διάφορος του

μηδενός. Δηλαδή η παράσταση $\frac{x^3+1}{x+1}$ ορίζεται όταν $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

➤ Όταν μας δοθεί μια ρητή αλγεβρική παράσταση τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της

Βήμα 2: Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεις για ποιες τιμές των μεταβλητών ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{2x+3}{x-2}$ β) $\frac{x^2-9}{x+3}$ γ) $\frac{5}{3x-6}$

Λύση

α) Θα πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Η παράσταση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το 2

β) Θα πρέπει $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

Η παράσταση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το -3

γ) Θα πρέπει $3x-6 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq 6 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} \neq \frac{6}{3} \Leftrightarrow x \neq 2$

Η παράσταση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το 2

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6x^2+3xy}{4x^2-y^2}$ β) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$ γ) $\frac{(x+1)(x-2)^2-4(x+1)}{x^3+x^2}$

Λύση

α) $\frac{6x^2+3xy}{4x^2-y^2} = \frac{3x(2x+y)}{(2x)^2-y^2} = \frac{3x(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{3x}{2x-y}$

$$\beta) \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{\cancel{(x-4)}(x-1)}{\cancel{(x-4)}(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \frac{(x+1)(x-2)^2 - 4(x+1)}{x^3 + x^2} &= \frac{(x+1)((x-2)^2 - 4)}{x^2(x+1)} = \frac{(x-2+2)(x-2-2)}{x^2} = \\ &= \frac{\cancel{x}(x-4)}{\cancel{x^2}} = \frac{x-4}{x} \end{aligned}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από την στήλη Β, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{x^2}{x-3}$	1. $x \neq -3$
β. $\frac{1}{x+3}$	2. $x \neq 0$ και $x \neq 3$
γ. $\frac{x+5}{x^2-3x}$	3. $x \neq 3$ και $x \neq -3$
δ. $\frac{5}{x^2-9}$	4. $x \neq 3$
ε. $\frac{5}{x^2+9}$	5. $x \neq 3$ ή $x \neq -3$
	6. Οποιοσδήποτε αριθμός

α	β	γ	δ	ε

2. Να βρείτε πότε ορίζονται οι ακόλουθες ρητές παραστάσεις

α) $\frac{2}{x+2}$ β) $\frac{3x+7}{6+5x}$ γ) $\frac{2a-1}{(a-1)(a-2)}$ δ) $\frac{5\psi-2}{\psi^2-5\psi+6}$

3. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε κλάσμα της 1^{ης} γραμμής το αντίστοιχό του απλοποιημένο κλάσμα από τη 2^η γραμμή.

α) $\frac{x^2+x}{x}$ β) $\frac{x^2-x}{x-1}$ γ) $\frac{x^2-x}{x}$ δ) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$

i) $\frac{x}{x-1}$ ii) $\frac{1}{x+1}$ iii) $x-1$ iv) $x+1$ v) x

4. Να βρεις για ποιες τιμές των μεταβλητών ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2}{2x-4} \quad \beta) \frac{2x}{x(x-2)} \quad \gamma) \frac{x-2}{x^2-4} \quad \delta) \frac{3}{x^2+1}$$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \frac{2x-4}{x^2-2x} & \text{ii.} \quad \frac{x^2-1}{x^2-x} \quad \text{iii.} \quad \frac{3x^2-2x}{9x^2-4} \\ \text{iv.} & \frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6} & \text{v.} \quad \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \end{array}$$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \frac{a\beta - a - \beta + 1}{a - a^2} & \text{ii.} \quad \frac{a^2 - 2a\beta + \beta^2 - \gamma^2}{a^2 - a\beta + a\gamma} \quad \text{iii.} \quad \frac{(\psi - 1)^2 - \psi + 1}{\psi^3 - 1} \\ \text{iv.} & \frac{(x+2)^2 - x - 2}{x(x+3) + 2} & \text{v.} \quad \frac{x(x-5) - x^2 + 25}{x^2 - 6x + 5} \end{array}$$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2x}{8x} \quad \beta) \frac{4x}{16x^2} \quad \gamma) \frac{4x^2yz}{2xy^3z^2} \quad \delta) \frac{8(x-y)}{4(x-y)}$$

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{4x-16}{x^2-4x} \quad \beta) \frac{x^3-1}{x-1} \quad \gamma) \frac{8x^3-27}{2x-3} \quad \delta) \frac{3x^2-2x}{9x^2-4}$$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2-6x+9}{x^2-3} \quad \beta) \frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12} \quad \gamma) \frac{x^2+7x+10}{x^2+8x+15}$$

10. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{a^2-2ax+x^2-z^2}{a^2-ax+az} \quad \beta) \frac{(x-1)^2-4x^2}{x-x^3} \quad \gamma) \frac{x^4-16}{x^3-8}$$

11. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{(x-1)^2-x+1}{x^3-1} \quad \beta) \frac{(x-1)^2-4(x+1)^2}{9x^2-1} \quad \gamma) \frac{(x+3)^3-27}{x}$$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{(x+3)^2 - x - 3}{x^2 + 5x + 6} \quad \beta) \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad \gamma) \frac{x^2-3}{2x+\sqrt{12}}$$

13. Να δείξετε ότι : $\frac{x^3-y^3}{x-y} - (x+y)^2 = -xy$

14. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 + (a+y)x + ay}{x^2 + xa} \quad \beta) \frac{x^3 + ax^2 + ax + a - 1}{x^3 + zx^2 + zx + z - 1} \quad \gamma) \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 1}{x^5 + x^4 + 2x^2 - 1}$$

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεωνΑ' ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ- ΔΙΑΙΡΕΣΗ

- Για να πολλαπλασιάσουμε ρητές παραστάσεις μεταξύ τους χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων.

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot \delta}$$

π.χ. Να κάνετε τις πράξεις:

$$1. \quad 3x^2 \cdot \frac{5xy}{4z} = \frac{15x^3y}{4z}$$

$$2. \quad \frac{3x}{4y} \cdot \frac{2x^2y}{3x} = \frac{6x^3y}{12xy} = \frac{x^2}{2}$$

- Για να διαιρέσουμε ρητές παραστάσεις μεταξύ τους χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της διαίρεσης των κλασμάτων.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\text{π.χ.} \quad \frac{x-2}{x+1} : \frac{x(x-2)}{y(x+1)^2} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{y(x+1)^2}{x(x-2)} = \frac{\cancel{y(x-2)}(x+1)^2}{x\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{y(x+1)}{x}$$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

(πολλαπλασιάζουμε τους εξωτερικούς και τους εσωτερικούς όρους μεταξύ τους)

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$\alpha) \quad \frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x} = \frac{(x^2+x)(x^2+5x+6)}{(x^2-4)(x^2+3x)} = \frac{x(x+1)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)x(x+3)} = \frac{x+1}{x-2}$$

2. Να υπολογίσετε το πηλίκο:

$$\alpha) \frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{x^2-4}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)} = 1$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{6y} \quad \beta) 3x \cdot \frac{4y}{6x^2} \quad \gamma) -5x^2 \cdot \frac{3y^2}{15x^3y} \quad \delta) \frac{3x}{4y^3} \cdot \frac{6y^2}{7x^3}$$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) \frac{1}{x-y} \cdot (x-y) \quad \beta) \frac{3x-6}{x^3} \cdot \frac{x^2}{2-x} \quad \gamma) \frac{x^2-1}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^3-1}$$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα :

$$\alpha) \frac{2x}{3y} : \frac{6x^2}{2y^3} \quad \beta) \left(-\frac{1}{x^2}\right) : x^3 \quad \gamma) \left(-\frac{x}{2y^3}\right) : \left(-\frac{x^2}{6y}\right) \quad \delta) \frac{3a}{2x^2} : \frac{a^3}{4x}$$

4. Να υπολογίσετε τα πηλίκα :

$$\alpha) \frac{x+1}{3} : \frac{x+1}{6} \quad \beta) \frac{10x^2-5x}{1+4x+4x^2} : \frac{25x}{2-8x^2} \quad \gamma) \frac{x^2-49}{x^2} : \frac{ax-7a}{x}$$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις;

$$\alpha) (x-1) \cdot \frac{3x+6}{x+1} : \left(\frac{2x+2}{3-3x}\right)^{-1} \quad \beta) \left(\frac{x}{x+3} : \frac{x-1}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2}{x+1} \quad \gamma) \frac{x^2-1}{\frac{x^2+x}{3}}$$

Β' ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- Για να προσθέσουμε ρητές παραστάσεις μεταξύ τους ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

Βήμα 2: Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Βήμα 3: Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα .

Βήμα 4: Εκτελούμε την πρόσθεση – αφαίρεση , κάνουμε τις δυνατές πράξεις , παραγοντοποιήσεις και τις απλοποιήσεις .

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. π.χ. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{x-6}{x^2+2x} - \frac{4}{x+2} & \beta) \frac{x+1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^3}} \\ \gamma) \frac{x^2-6}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} & \delta) \left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{x+y}{x-y}\right) \end{array}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{x-6}{x^2+2x} - \frac{4}{x+2} &= \frac{x-6}{x(x+2)} - \frac{4}{x+2} = \frac{x-6}{x(x+2)} - \frac{4x}{x(x+2)} = \\ &= \frac{x-6-4x}{x(x+2)} = \frac{-3x-6}{x(x+2)} = \frac{-3(x+2)}{x(x+2)} = \frac{-3}{x} \end{aligned}$$

$$\beta) \frac{x+1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{x^2+x+1}{x}}{\frac{x^3-1}{x^3}} = \frac{(x^2+x+1)x^3}{x(x^3-1)} = \frac{(x^2+x+1)x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\gamma) \frac{x^2-6}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{x^2-6}{(x-3)(x-2)} - \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-6}{(x-3)(x-2)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(x-2)} + \frac{3(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \\ & \frac{x^2-6-2(x-3)+3(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x^2-6-2x+6+3x-6}{(x-3)(x-2)} = \\ & = \frac{x^2+x-6}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} = (x-3)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \delta) & \left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{x+y}{x-y}\right) = \left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x-y}{y} + \frac{y}{x-y}\right) = \\ & \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x(x-y)}{y(x-y)} + \frac{y(x+y)}{y(x+y)}\right) = \\ & \left(\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x(x-y)+y(x+y)}{y(x-y)}\right) = \\ & \left(\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x^2-xy+xy+y^2}{y(x-y)}\right) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{y(x-y)} = \\ & \frac{(x-y)}{y} \end{aligned}$$

2. α) Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} + xy = (x+y)^2$$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{66^3-34^3}{66-34} + 66 \cdot 34$$

Λύση

$$\begin{aligned} & \frac{x^3-y^3}{x-y} + xy = \frac{x^3-y^3}{x-y} + \frac{xy}{1} = \frac{x^3-y^3}{x-y} + \frac{xy(x-y)}{x-y} = \\ \alpha) & = \frac{x^3-y^3+xy(x-y)}{x-y} = \left(\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)}{x-y}\right) = \\ & = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2+xy)}{x-y} = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \end{aligned}$$

$$\beta) \frac{66^3 - 34^3}{66 - 34} + 66 \cdot 34 = (66 + 34)^2 = 100^2 = 10000$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \beta) \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-1} \quad \gamma) \frac{3}{x-4} - 5$$

$$\delta) \frac{4}{x^2+2} - \frac{1}{x^2} \quad \varepsilon) \frac{\alpha}{3x} + \frac{\beta}{xy} \quad \sigma\tau) \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}$$

2. Να υπολογίσετε τι παραστάσεις:

$$a) 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \quad \beta) \frac{1}{a\beta - \beta^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \quad \gamma) \frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\delta) \frac{1}{2\alpha - 2} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \quad \sigma\tau) \frac{1}{2x+6} + \frac{x-1}{3x-x^2} - \frac{x}{x^2-9}$$

$$\zeta) \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{4-x^2} \quad \eta) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{xy}{x^2-y^2}$$

$$\theta) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) xy \quad \iota) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) x^3 \quad \iota\alpha) \left(1 + \frac{x}{y} \right) \left(\frac{x}{y} - 1 \right)$$

3. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα.

$$\alpha) \frac{x - \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \quad \beta) \frac{x - 4 + \frac{4}{x}}{x - \frac{4}{x}} \quad \gamma) \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \quad \delta) \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\delta) \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x - \frac{1}{x}} \quad \sigma\tau) \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{2}{\frac{x}{3} - \frac{3}{x}}$$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (x-y) - (x+y) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

$$\beta) \left(\frac{5x-3y}{15\alpha} - \frac{9x-8y}{12\beta} \right) : \left(\frac{4\beta-9\alpha}{4y} - \frac{3\beta-10\alpha}{5x} \right)$$

$$\gamma) \left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{6}{2x^2-2} - \frac{x+3}{2x+2} \right) : \left(\frac{3}{4x^2-4} \right)$$

$$\delta) \left(\frac{1}{x-2} + \frac{6}{4-x^2} - \frac{2}{x+2} \right) : \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1 \right)$$

$$\varepsilon) \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4x+4} \right) : \left(\frac{x}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x} \right) \cdot \left(3 - \frac{6}{x} \right)$$

$$\sigma\tau) \left[\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \right) : \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 \right] - x^2 - 1$$

5. α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^3-1}{\alpha-1} + \alpha = (\alpha+1)^2$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{9999^3-1}{9998} + 9999$

6. Αν ισχύει ότι : $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha\beta = 3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ γ) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ γ) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

7. α) Να δείξετε ότι ισχύει : $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα : $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$



2.1 Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$

- **Εξίσωση α' βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται** η εξίσωση που ο μέγιστος εκθέτης του αγνώστου είναι ένα.
- **Λύση ή ρίζα** της εξίσωσης είναι οποιοσδήποτε αριθμός επαληθεύει την εξίσωση.
- Πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha \cdot x + \beta = 0$

- Αν $a \neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι **αδύνατη**.
- Αν $a = 0$ και $\beta = 0$ η εξίσωση είναι **ταυτότητα ή αόριστη**.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Μια εξίσωση της μορφής $0 \cdot x = 3$ είναι αδύνατη και δεν έχει λύση (ρίζα) κανέναν αριθμό.
- Μια εξίσωση της μορφής $0 \cdot x = 0$ είναι ταυτότητα ή αόριστη και έχει λύση (ρίζα) οποιονδήποτε αριθμό.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 5(-x+2)-4=6-5x \quad \beta) \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x-5}{6}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) 5(-x+2)-4=6-5x &\Leftrightarrow \beta) \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x-5}{6} \Leftrightarrow \\ -5x+10-4=6-5x &\Leftrightarrow 6 \frac{2x-2}{3} - 6 \frac{x+1}{2} = 6 \frac{x-5}{6} \Leftrightarrow \\ -5x+5x=-10+4+6 &\Leftrightarrow 2(2x-2)-3(x+1)=x-5 \Leftrightarrow \\ 0x=0 &\end{aligned}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

$$4x-4-3x-3=x-5 \Leftrightarrow$$

$$4x-3x-x=4+3-5 \Leftrightarrow$$

$$0x=2$$

ΑΔΥΝΑΤΗ

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(x-2)-4(x+5)=10(x+4)$ β) $x-5(-x+2)=6x-10$

γ) $2(2x-4)+3(x+4)=7(x+1)-3$ δ) $(2x-3)^2+4x=2(2x^2+8)+3$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{3}=\frac{4x+2}{14}$ β) $\frac{8x-22}{4}-20=\frac{5(x-7)}{2}-8$

γ) $\frac{1}{2}-\frac{3x-2}{3}=2x-\frac{x-7}{6}$ γ) $1-\frac{2x-1}{4}=\frac{3-x}{2}$

3. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 είναι ίσο με το μισό του αριθμού ελαττωμένο κατά 1. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός;

2.2 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

A. Επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο

παραγόντων.

- Η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο x είναι :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } a \neq 0$$

- Οι αριθμοί a, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης.
 ➤ Ο όρος γ λέγεται σταθερός όρος της εξίσωσης.
 ➤ **Λύση ή ρίζα** της εξίσωσης είναι ο αριθμός που την επαληθεύει.

Ειδικές μορφές εξισώσεων 2^{ου} βαθμού :

1. Κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x = 0$

Για να την λύσουμε βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ότι αν: $a \cdot \beta = 0$ τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$

Π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $3x^2 + 6x = 0$ με $a \neq 0$

$$3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} 3x = 0 \Leftrightarrow \quad \quad x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ x = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = -2 \end{array}$$

2. Κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

Για να την λύσουμε χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και έχουμε δύο περιπτώσεις: η ή εξίσωση είναι αδύνατη (το μέλος που προέκυψε από την διαίρεση είναι αρνητικός αριθμός) ή έχουμε δύο λύσεις την θετική και την αρνητική ρίζα του μέλους που είναι θετικός αριθμός.

π.χ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 12 = 0$ β) $2x^2 + 50 = 0$

Λύση

$$\alpha) 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=2} \text{ ή } \boxed{x=-2}$$

$$\beta) 2x^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -50 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{-50}{2} \Leftrightarrow x^2 = -25$$

Αδύνατη

Δεν υπάρχει αριθμός που αν τον υψώσουμε στο τετράγωνο να είναι αρνητικός αριθμός. Για αυτό η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

**** Παρατηρήσεις**

- Όταν έχουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού θα πρέπει πρώτα να κάνουμε τις δυνατές πράξεις και να την φέρουμε σε μία από τις δύο παραπάνω μορφές και στη συνέχεια να την λύσουμε.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 3x\left(\frac{x}{3} - 2\right) = 0 \quad \beta) (3x-1)^2 - 4x^2 = 0$$

Λύση

$$\alpha) 3x\left(\frac{x}{3} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x = 0 \Leftrightarrow \text{ ή } \frac{x}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad 3\frac{x}{3} - 3 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 6$$

$$\beta) (3x-1)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3x-1-2x)(3x-1+2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(5x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow \text{ ή } 5x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \quad \frac{5x}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 6x = 0$ β) $x^2 - 8x = 0$ γ) $4x^2 - 12x = 0$ δ) $5x^2 - 3x = 0$

ε) $2x^2 = 4x$ στ) $(x-3)(x+1) = 0$ ζ) $x(x+2) = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 1 = 0$ β) $x^2 = 9$ γ) $x^2 = 8$ δ) $5x^2 - 30 = 0$

ε) $3x^2 + 9 = 0$ στ) $3x^2 = 5$ ζ) $4x^2 - \frac{288}{2} = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 - 4)(x+5) = 0$ β) $x(x+1)(x+2) = 0$ γ) $3x(x^2 + 3)(4x - 12) = 0$

δ) $(5x^2 - 10x)(2x^2 - 1) = 0$ στ) $(16x^2 - 1)(4x + 20) = 0$

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με την βοήθεια τύπου.

Αν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ τότε:

➤ **Ορίζουμε την παράσταση της Διακρίνουσας $\Delta = b^2 - 4ac$**

➤ Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις (Αδύνατη)

Π.χ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 + 6x + 4 = 0$ β) $x^2 - 6x + 9 = 0$ γ) $-2x^2 + 3x - 5 = 0$

Λύση:

α) $2x^2 + 6x + 4 = 0$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 & \Delta &= b^2 - 4ac \\ \beta &= 6 & \Delta &= 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \\ \gamma &= 4 & \Delta &= 36 - 32 \\ & & \Delta &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Επειδή η διακρίνουσα είναι θετικός αριθμός η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 + 2}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Και

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 - 2}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

β) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= -6 & \Delta &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \\ \gamma &= 9 & \Delta &= 36 - 36 \\ & & \Delta &= 0\end{aligned}$$

Επειδή η διακρίνουσα είναι μηδέν η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την :

$$\begin{aligned}x &= \frac{-\beta}{2\alpha} \\ x &= \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3\end{aligned}$$

$$\gamma) -2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -2 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= 3 & \Delta &= 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) \\ \gamma &= -5 & \Delta &= 9 - 40 \\ & & \Delta &= -31 < 0\end{aligned}$$

Επειδή η διακρίνουσα είναι αρνητικός αριθμός η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις (Αδύνατη).

Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής: $ax^2 + \beta x + \gamma$

Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ και αν :

➤ Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις x_1 και x_2 η

παραγοντοποίηση γράφεται: $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$

➤ Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την :

$$x_1 = \frac{-\beta}{2\alpha} \text{ η παραγοντοποίηση γράφεται :}$$

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

➤ Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις (Αδύνατη) το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Όταν έχουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού τότε κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις και φέρνουμε όλους τους όρους σε ένα μέλος για να έρθει η

εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και συνεχίζουμε με την παραπάνω μέθοδο λύσης.

- Μεγάλη προσοχή στα πρόσημα των συντελεστών a , b , c και στις πράξεις της διακρίνουσας.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. α) Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 - 9x - 12 = 0$

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $3x^2 - 9x - 12$

Λύση

α) $3x^2 - 9x - 12 = 0$

$$\begin{aligned} a &= 3 & \Delta &= b^2 - 4ac \\ b &= -9 & &= (-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) \\ c &= -12 & &= 81 + 144 \\ & & &= 225 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{9 + 15}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{9 - 15}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

β) Αφού οι λύσεις της εξίσωσης $3x^2 - 9x - 12 = 0$ είναι οι $x_1 = 4$ και $x_2 = -1$

το τριώνυμο παραγοντοποιείτε $3x^2 - 9x - 12 = 3(x+1)(x+4)$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ β) $4y^2 + 2y + 9 = 0$ γ) $4a^2 + 4a + 1 = 0$

γ) $9x^2 - 3x + 64 = 10x^2 + 9x$ δ) $x(x-1) = 1$ ε) $4x^2 = 4x - 1$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x+4)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2$ β) $x^2 + 24x + 7 = (x+8)^2 - (x-8)^2$

γ) $(9y^2 - 5y - 7) - (5y^2 - 7y - 9) = 2$ δ) $(y+2)(y-1) + (y-2)(y+1) = 4$

ε) $(x+1)(x-1) = 2(x-1)$ στ) $3x^2 - 3(x-1)(2x-1) = 2x+1$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 = \frac{1}{3} - \frac{x}{6}$ β) $\frac{3}{2}x^2 - 2x = -\frac{2}{3}$ γ) $x - \frac{x^2 - 2}{2} = -3$

δ) $x^2 - \frac{2x-1}{6} = 6 - \frac{x^2}{3}$ ε) $\frac{x^2-1}{3} + \frac{x+1}{2} = \frac{x^2-1}{6}$

4. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 3x + 2$ β) $x^2 + 4x + 4$ γ) $x^2 - x - 6$ δ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

δ) $2x^2 - x - 1$ ε) $6x^2 - x - 1$ στ) $10x^2 - x - 2$ ζ) $4x^2 + 20x - 25$

5. Απλοποιήστε τις παρακάτω κλασματικές παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12}$ β) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$

6. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

α. $f(x) = 3x^2 - 7x - 6.$

β. $g(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

γ. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

7. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

α. $f(x) = 5x^2 - 9x - 2.$

β. $g(x) = \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

γ. $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

8. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - 5x + 4}{3x^2 - 11x - 4}.$$

9. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

10. α) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$3x^2 - 9x + 6 \quad \text{και} \quad 6x^2 - 12x - 18$$

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{3x^2 - 9x + 6}{6x^2 - 12x - 18}$$

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

- Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με εξίσωση 2^{ου} βαθμού θα πρέπει :
1. Να διαβάσουμε πολλές φορές και να κατανοήσουμε το πρόβλημα.
 2. Να καταλάβουμε τι μας ζητάει το πρόβλημα και το ζητούμενο να το ονομάσουμε με μια μεταβλητή (συνήθως x)
 3. Να φτιάξουμε την σχέση(εξίσωση) με βάση τον άγνωστο και στη συνέχεια να την λύσουμε.

** Παρατηρήσεις

- Αν στο πρόβλημα εμφανίζονται παραπάνω από ένας άγνωστοι θα πρέπει με κάποιες σχέσεις να τους εκφράσουμε με βάση την μεταβλητή x.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

Λύση

Αφού είναι διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι θα διαφέρουν κατά δύο μονάδες επομένως αν ο ένας αριθμός είναι ο x ο δεύτερος θα είναι ο $x + 2$

.επομένως το άθροισμα των τετραγώνων τους θα είναι $x^2 + (x + 2)^2$ άρα

έχουμε ότι :

$$x^2 + (x + 2)^2 = 74 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 - 74 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 70 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 1 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= 2 & &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35) \\ \gamma &= -35 & &= 4 + 140 \\ & & &= 144 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις :

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 12}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 12}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Επομένως οι δύο διαδοχικοί περιττοί είναι το 5 και το 7 ή το -7 και το -5

2. Ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν 12 cm^2 . Η βάση του είναι κατά 5 cm μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του.

Λύση

Αν το ύψος είναι $x \text{ cm}$ τότε η βάση θα είναι $x+5 \text{ cm}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$

$$\text{Άρα } 12 = \frac{x(x+5)}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 12 = 2 \frac{x^2 + 5x}{2} \Leftrightarrow 24 = x^2 + 5x \Leftrightarrow -x^2 - 5x + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 24 = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= 5 & &= 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) \\ \gamma &= -24 & &= 25 + 96 \\ & & &= 121 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις :

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ Δεκτή}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 11}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \text{ Απορρίπτεται}$$

Άρα το ύψος είναι 3 cm και η βάση θα είναι 8 cm

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο 384 και άθροισμα 44.
2. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο 12 και διαφορά -35
3. Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 100.
4. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
5. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 25 cm^2 . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;
6. Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων του και του ύψους του είναι 10.
α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο;
β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;
7. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm^2 .
8. Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές δίνεται από τον τύπο: $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Αν το πολύγωνο έχει 104 διαγωνίους, πόσες είναι οι πλευρές του;
9. Το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:
$$\Sigma n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Βρείτε το n , αν ξέρουμε ότι $\Sigma n = 300$.
10. Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι 300 cm^2 . Αν το μήκος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.
11. Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι κατά 3cm μικρότερη από την ύψος. Να βρείτε το εμβαδόν του.
12. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 600 m^2 και περίμετρο 100 m . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.
13. Σε ένα γλέντι τσούγκρισαν ανά δύο οι καλεσμένοι τα ποτήρια τους και ακούστηκαν 90 τσούγκρίσματα . Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι;
14. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες. Αν έγιναν συνολικά 380 αγώνες πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

15. Δύο εκσκαφείς χρειάζονται 12 μέρες για ένα έργο , όταν εργάζονται μαζί. Ο ένας μόνος του χρειάζεται 7 μέρες περισσότερες από τον άλλο . Πόσες μέρες χρειάζεται μόνος του ο καθένας για να τελειώσει το έργο.

2.4 Κλασματικές εξισώσεις

- Στη παράγραφο αυτή μελετάμε κλασματικές εξισώσεις που έχουν άγνωστο στον παρονομαστή.
- **Μέθοδος λύσης κλασματικών εξισώσεων:**
 - Βήμα 1:** Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
 - Βήμα 2:** Φτιάχνουμε τα πρόσημα των παρονομαστών αν έχουμε αντίθετους παράγοντες. (μπορούμε να τους αλλάξουμε τα πρόσημα αλλάζοντας το πρόσημο μπροστά από το κλάσμα)
 - Βήμα 3:** Κάνουμε περιορισμούς (βρίσκουμε τις τιμές για τις οποίες οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός).
 - Βήμα 4:** Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
 - Βήμα 5:** Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π.
 - Βήμα 6:** Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, εκτελούμε τις πράξεις και αν η εξίσωση που προκύπτει είναι πρώτου βαθμού χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους ενώ αν είναι δευτέρου βαθμού φέρνουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος και την επιλύουμε.
 - Βήμα 7:** Απορρίπτουμε ή κάνουμε δεκτές τις λύσεις με βάση τους περιορισμούς.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-2}{2x} = \frac{2}{2-x} + \frac{4}{x^2-2x}$$

Λύση

$$\frac{x-2}{2x} = \frac{2}{2-x} + \frac{4}{x^2-2x} \Leftrightarrow$$

Περιορισμοί:

$$\frac{x-2}{2x} = -\frac{2}{x-2} + \frac{4}{x(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x-2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 2$$

$$\text{Ε.Κ.Π. } (2x, x-2, x(x-2)) = 2x(x-2)$$

$$2x(x-2)\frac{x-2}{2x} = -2x(x-2)\frac{2}{x-2} + 2x(x-2)\frac{4}{x(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-2) = -2x \cdot 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = -4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0$$

ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{6}{x-1} = 2 \quad \beta) \frac{2}{2x-1} = -3 \quad \gamma) \frac{3}{x-1} = -\frac{1}{2} \quad \delta) \frac{2x-4}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$$

$$\delta) \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = -2 \quad \epsilon) \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 0 \quad \sigma\tau) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 2 \quad \zeta) \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \quad \beta) \frac{x-3}{3x-2} = \frac{x-1}{3x+4} \quad \gamma) \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\delta) \frac{x+3}{x-3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-3x} \quad \epsilon) \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{x^2-3x+2}$$

$$\sigma\tau) \frac{x}{x-5} = -\frac{5}{x+5} + \frac{x^2+25}{25-x^2} \quad \zeta) \frac{x+4}{2} = \frac{10-2x}{x-5}$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i. \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 1$$

$$ii. \frac{\psi+3}{\psi-3} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi^2-3\psi}$$

$$iii. \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{2(x-3)}{x-1} = \frac{1}{x-3}$$

$$iv. \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{x^2-3x+2}$$

$$v. \frac{4x}{x^2-x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

4. Να λυθούν και να διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$i. \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$$

$$ii. \frac{2x+1}{3x-3} = \frac{7x-1}{6x+6} - \frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4}$$

$$iii. \frac{3+x}{x-4} + \frac{2-x}{2x-8} + \frac{2x-1}{3x-12} = \frac{5}{6}$$

$$iv. \frac{7x+8}{21} - \frac{x+4}{8x-11} = \frac{x}{3}$$

$$v. \frac{2x-3}{2x-4} - 6 = \frac{x-5}{3(x-2)} - \frac{11}{2}$$

$$vi. \frac{7x+16}{21} - \frac{x+8}{4x+10} = \frac{23}{70} + \frac{x}{3}$$

$$vii. \quad \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$$

$$viii. \quad \frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{10x-78}{3x-24}$$

$$ix. \quad \frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-8}{x-6} - \frac{x-9}{x-7}$$

$$x. \quad \frac{x+5}{x+4} - \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-15}{x-16}$$

$$xi. \quad \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}$$

$$xii. \quad \frac{2+2x}{9x^2-4} - \frac{x-2}{9x^2+12x+4} = \frac{x+4}{9x^2-4}$$

$$xiii. \quad \frac{3}{x-2} - \frac{4}{5x-15} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$xiv. \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0$$

$$xv. \quad \frac{1}{3x-1} + \frac{2(x+1)}{x-1} - \frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1} = 1$$

$$xvi. \quad \frac{1}{x + \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-3}}} = 1$$

$$xvii. \quad \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}$$

$$xviii. \quad \frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x}$$

$$xix. \quad \frac{2x}{3} + \frac{\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{9} - \frac{2x-5}{4}} = \frac{2x-4}{3}$$

$$xx. \quad \frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} + \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1-x}} + \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1+x}} + \frac{3}{2x} = 0$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) -\left(\frac{1}{x}-x\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} \quad \beta) \frac{4x}{x^2-x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

$$\gamma) \frac{x+1}{x} - \frac{13}{6} = -\frac{x}{x+1} \quad \delta) \frac{x-2}{2x} - \frac{2}{2-x} = \frac{4}{x^2-2x}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-2}{1-\frac{2}{x}} + 1 = 0 \quad \beta) \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-1} + \frac{1}{x^2-x} \quad \gamma) \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x}$$

7. Αν αφαιρέσουμε από ένα αριθμό τον αντίστροφό του βρίσκουμε 2. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός;

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με ένα άγνωστο

A. Διάταξη πραγματικών αριθμών.

Τους πραγματικούς αριθμούς τους τοποθετούμε πάνω σε έναν άξονα τον οποίο ονομάζουμε άξονα των πραγματικών αριθμών.

Σύγκριση πραγματικών αριθμών:

- Ανάμεσα από δύο πραγματικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται πιο δεξιά στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Όλοι οι θετικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι του μηδενός διότι βρίσκονται πιο δεξιά στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Αν α θετικός τότε $\alpha > 0$
- Όλοι οι αρνητικοί αριθμοί είναι μικρότεροι του μηδενός διότι βρίσκονται πιο αριστερά στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Αν α αρνητικός τότε $\alpha < 0$
- Κάθε θετικός αριθμός είναι πάντα μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Ορισμοί διάταξης: Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha > \beta$

1. Αν $\alpha > \beta$ τότε ισχύει $\alpha - \beta > 0$
2. Αν $\alpha < \beta$ τότε ισχύει $\alpha - \beta < 0$

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς α και β βρίσκουμε την διαφορά $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική αρνητική ή μηδέν. ισχύει ότι αν:

➤ Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$

➤ Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$

➤ Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

B. Ιδιότητες της διάταξης.

Οι ιδιότητες της διάταξης υπάρχουν στη θεωρία της Β' Γυμνασίου.

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. δηλαδή ισχύει $a^2 \geq 0$ ή $(a + \beta)^2 \geq 0$

- Για οποιουδήποτε αριθμούς α και β αν ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε
 $\alpha = \beta = 0$
- Απαγορεύεται να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες διότι θα οδηγηθούμε σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

Λύση :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{\alpha + \beta}{2} < 2\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta < 2\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha < 2\beta - \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha < \beta \quad \text{ισχύει.}$$

2. Να αποδείξετε ότι : $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Λύση:

Αφού α, β ομόσημοι ισχύει ότι $\alpha \cdot \beta > 0$.

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \text{Πολλαπλασιάζω και τα δυο μέλη της ανίσωσης με } \alpha \cdot \beta \text{ και δεν}$$

$$\alpha\beta \frac{1}{\alpha} < \alpha\beta \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \quad \text{αλλάζει η φορά της}$$

$$\beta < \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha > \beta \quad \text{ισχύει.}$$

3. Να αποδείξετε ότι αν $x > 0$ τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \text{Πολλαπλασιάζω και τα δυο μέλη της ανίσωσης με } x \text{ και δεν}$$

$$x \cdot x + x \cdot \frac{1}{x} \geq 2x \Leftrightarrow \quad \text{αλλάζει η φορά της (επειδή } x > 0 \text{)}$$

$$x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \quad \text{ισχύει.}$$

Γ . Ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.

Η λύση των ανισώσεων καθώς και η μεθοδολογία υπάρχει στο αντίστοιχο κεφάλαιο της Β' Γυμνασίου.

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Όταν έχουμε να βρούμε τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων τότε λύνουμε ξεχωριστά τη κάθε μία και στο τέλος τοποθετούμε τις λύσεις σε ένα κοινό διάγραμμα λύσεων και βλέπουμε που έχουμε συναλύθευση λύσεων.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\alpha) x - \frac{(x-2)}{3} > 1 + \frac{x}{2}$$

Λύση:

$$x - \frac{(x-2)}{3} > 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow \text{Ε.Κ.Π.}(3,2) = 6$$

$$6x - 6 \cdot \frac{x-2}{3} > 6 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$6x - 2(x-6) > 6 + 3x \Leftrightarrow$$

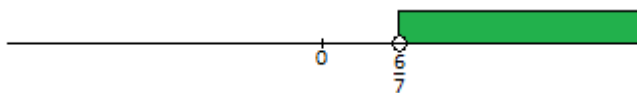
$$6x - 2x + 12 > 6 + 3x \Leftrightarrow$$

$$6x - 2x + 3x > -12 + 6 \Leftrightarrow$$

$$7x > -6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{7x}{7} > \frac{-6}{7} \Leftrightarrow$$

$$x > \frac{-6}{7}$$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Αν $5a - (a + 2) > 3a + 1$ να δείξετε ότι $a > 3$
2. Αν $a < \beta$ να δείξετε ότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$
3. Αν $1 < \alpha < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί:
α) $\alpha + 3$ β) 2α γ) $\alpha - 3$ δ) $4 - \alpha$ ε) $3\alpha + 2$ στ) $6 - 2\alpha$
4. Αν $3 < x < 5$ και $7 < y < 10$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:
α) $x + 3$ β) $y - 5$ γ) $x + y$ δ) $-x$ ε) $-y$ στ) $x - y$ ζ) $-x - y$
5. Αν $x > 1$ και $y > 4$ να αποδείξετε ότι : $(x - 1)(y - 4) > 0$
6. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $x < 0$ τότε $x > 2x$ β) Αν $x > 0$ τότε $x < 2x$
γ) Αν $x > 1$ τότε $x^2 > x$ γ) Αν $0 < x < 1$ τότε $x^2 < x$
7. Αν $0 < a < \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$
8. Να αποδείξετε ότι ισχύει :
α) $\alpha^2 \geq 2\alpha - 1$ β) $3\alpha^2 + 3\alpha \geq -1 - \alpha^2 - \alpha$ γ) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$
9. Αν $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$
10. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $2(x - 1) - (x + 1) > 5$ β) $-2(3x - 6) < 6(2 + x)$ γ) $8x - 3(x - 1) \leq 6x - 5$
δ) $\frac{x - 1}{6} - \frac{x - 1}{2} < \frac{3 - 2x}{3}$ ε) $x + \frac{2x - 5}{3} > \frac{x}{6} + \frac{3}{2}$ στ) $\frac{x - 3}{20} + \frac{x - 1}{5} > \frac{2 + x}{4}$
11. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
α) $2(x + 3) - 3(x + 1) \geq -2(x - 1)$ και $3(x - 3) + 7 < 2(x + 3)$
β) $\frac{x - 2}{3} + \frac{7}{6} < \frac{x - 5}{4}$ και $\frac{3x}{4} - \frac{5}{6} > \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$
γ) $x - 7 < 2$ και $5 - x < 2$
δ) $3x - 2 < 13$ και $2(x - 3) > -2$



3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να παραστήσω ένα σημείο $A(x,y)$ στο επίπεδο φτιάχνω δύο άξονες. Τον άξονα (xx') και τον άξονα (yy')
- Ο οριζόντιος άξονας (xx') ονομάζεται άξονας των τετμημένων ενώ ο κατακόρυφος (yy') άξονας των τεταγμένων.
- Ένα σύστημα αξόνων ονομάζεται **ορθοκανονικό** όταν οι άξονες έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης.
- Κάθε σημείο του άξονα xx' έχει τεταγμένη 0 .
- Κάθε σημείο του άξονα yy' έχει τετμημένη 0.

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

- Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ λέγεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x και y .
- Λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ είναι κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
π.χ. η εξίσωση $3x + 2y = 7$ έχει λύση το ζεύγος $(1, 2)$ διότι την επαληθεύει.
- Μια εξίσωση της μορφής $0x + 0y = 3$ είναι αδύνατη. (Δεν έχει λύση κανένα ζεύγος αριθμών)
- Μια εξίσωση της μορφής $0x + 0y = 0$ είναι αόριστη ή ταυτότητα (οι λύσεις τις είναι άπειρες και είναι κάθε ζεύγος (x, y) του επιπέδου)

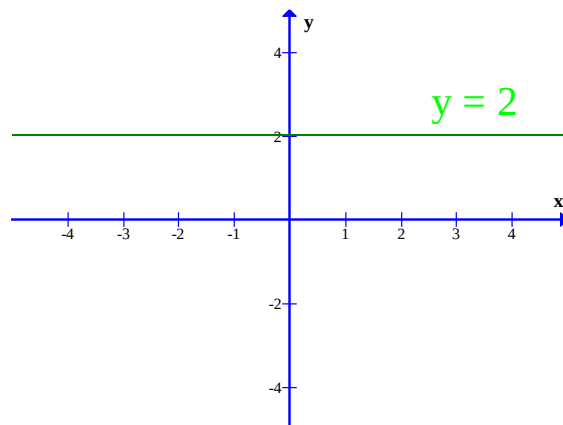
Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων:

1. Η εξίσωση $y = \kappa$ όπου κ ένας αριθμός

(π.χ. $y = 3$)

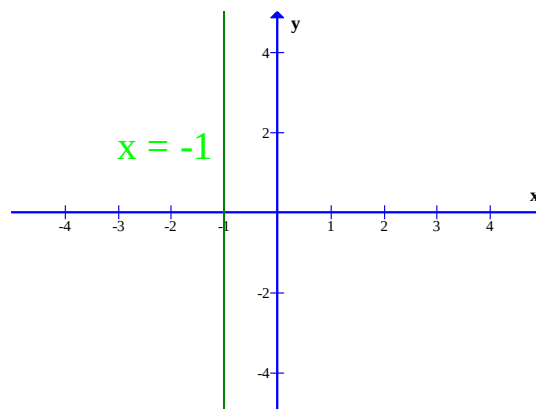
Αν $\kappa \neq 0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα xx' και διέρχεται από το σημείο $(0, \kappa)$ του άξονα yy' ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα xx'

π.χ. Η εξίσωση $y = 2$ δίνεται από το διπλανό γράφημα:



2. Η εξίσωση $x = \kappa$ όπου κ ένας πραγματικός αριθμός (π.χ. $x = 2$)

Αν $\kappa \neq 0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα yy' και διέρχεται από το σημείο $(\kappa, 0)$ του άξονα xx' ενώ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα yy'
π.χ. Η εξίσωση $x = -1$ δίνεται από το διπλανό γράφημα:



Μια γραμμική εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$
ή $b \neq 0$

- **Μέθοδος κατασκευής γραφικής παράστασης της εξίσωσης $ax + by = \gamma$**

Βήμα 1: Φτιάχνουμε ένα πίνακα τιμών τοποθετώντας 2 ζεύγη (x, y)

Βήμα 2: Τοποθετούμε τα δυο ζεύγη (x, y) σε άξονες συντεταγμένων και ενώνουμε τα δυο σημεία με την ευθεία που διέρχεται από πάνω τους. Η ευθεία είναι η γραφική παράσταση της εξίσωσης $ax + by = \gamma$.

- **Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής της εξίσωσης $ax + by = \gamma$ με τους άξονες xx' και yy' .**

Για να βρούμε το σημείο τομής της εξίσωσης $ax + by = \gamma$ με τον άξονα xx' βάζουμε όπου $x = 0$ και βρίσκουμε την τιμή του y .

Για να βρούμε το σημείο τομής της εξίσωσης $ax + by = \gamma$ με τον άξονα yy' βάζουμε όπου $y = 0$ και βρίσκουμε την τιμή του x .

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να είναι μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ παράλληλη με τον άξονα xx' θα πρέπει $a = 0$ και $b \neq 0$.
- Για να είναι μία εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ παράλληλη με τον άξονα yy' θα πρέπει $b = 0$ και $a \neq 0$.
- Για να είναι μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα πρέπει $\gamma = 0$ και a ή $b \neq 0$.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες :

α) $\varepsilon_1: 2x + y = 2$ β) $\varepsilon_2: 4x + 2y = 8$

Λύση

$\varepsilon_1: 2x + y = 2$

x	0	1
y	2	0

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$2 \cdot 0 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0,2)

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$2 \cdot 1 + y = 2 \Leftrightarrow 2 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2 \Leftrightarrow y = 0$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από

το σημείο Β(1,0)

Θα φτιάξουμε τα σημεία στο σύστημα αξόνων και στη συνέχεια την ευθεία που διέρχεται από πάνω τους η οποία θα είναι η ε_1

$\varepsilon_2: 4x + 2y = 4$

x	0	1
y	4	2

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_2 και προκύπτει ότι :

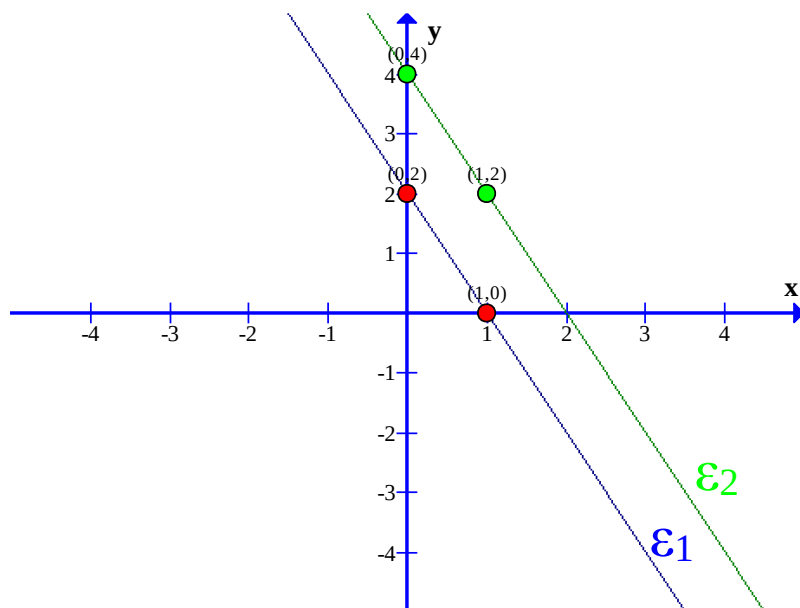
$4 \cdot 0 + 2y = 4 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow \frac{2y}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow y = 2$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από

το σημείο Γ(0,4)

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_2 και προκύπτει ότι :

$4 \cdot 1 + 2y = 8 \Leftrightarrow 4 + 2y = 8 \Leftrightarrow 2y = 8 - 4 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow \frac{2y}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow y = 2$ Επομένως

η ευθεία διέρχεται από το σημείο Δ(1,2) Θα τοποθετήσουμε τα σημεία στο σύστημα αξόνων και στη συνέχεια την ευθεία που διέρχεται από πάνω τους η οποία θα είναι η ε_2



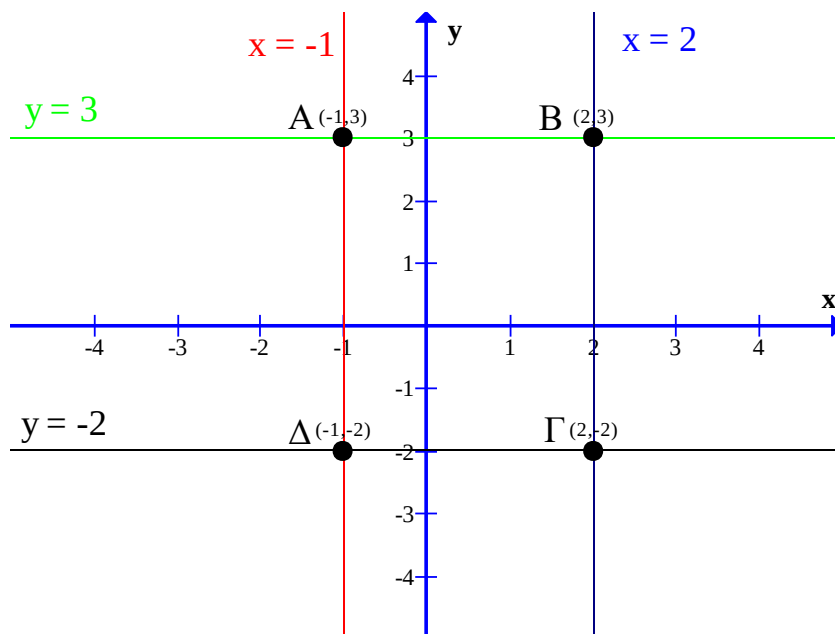
2. α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις :

$$x = 2 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad y = 2$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογώνιου που προκύπτει.

Λύση

α)



β) Βλέπουμε ότι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Η πλευρά ΑΒ έχει μήκος 3 μονάδες ενώ η πλευρά ΑΔ έχει μήκος 5 μονάδες . Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου είναι $E = \beta \cdot \upsilon$. Άρα $E = 3 \cdot 5 = 15$ τ.μ.

3. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x + 3y = 6$ να βρείτε σε ποια σημεία Α και Β που τέμνει τους άξονες x και y αντίστοιχα .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

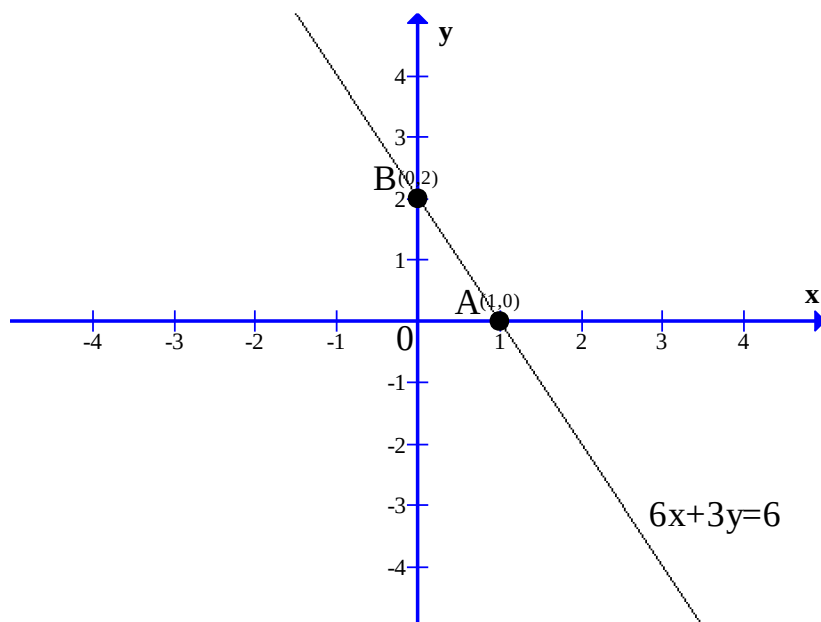
Λύση

α) Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα x βάζουμε στην εξίσωση $6x + 3y = 6$ βάζουμε όπου $x = 0$ και έχουμε:

$$6 \cdot 0 + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 2 \text{ Άρα το σημείο είναι το } A = (0, 2)$$

Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα y βάζουμε στην εξίσωση $6x + 3y = 6$ βάζουμε όπου $y = 0$ και έχουμε:

$$6x + 3 \cdot 0 = 6 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x = 1 \text{ Άρα το σημείο είναι το } B = (1, 0)$$



β) Η πλευρά ΟΑ = 1 μονάδα ενώ η πλευρά ΟΒ = 2 μονάδες.

$$\text{Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι } E = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ τ.μ.}$$

4. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = \lambda + 3$ να παριστάνει ευθεία που :
- α) είναι παράλληλη στον άξονα x
 - β) είναι παράλληλη στον άξονα y
 - γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Για να είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $x\chi'$ θα πρέπει ο συντελεστής του x να είναι 0. Άρα $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ Αν αντικαταστήσουμε με $\lambda = 2$ θα προκύψει η εξίσωση $0x + (2 - 1)y = 2 + 3 \Leftrightarrow y = 5$

β) Για να είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $y\gamma'$ θα πρέπει ο συντελεστής του y να είναι 0. Άρα $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ Αν αντικαταστήσουμε με $\lambda = 1$ θα προκύψει η εξίσωση $(1 - 2)x + 0y = 1 + 3 \Leftrightarrow -1x = 4 \Leftrightarrow x = -4$

γ) Για να είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα πρέπει ο σταθερός όρος να είναι 0. Άρα $\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$. Αν αντικαταστήσουμε με $\lambda = -3$ θα προκύψει η εξίσωση

$$(-3 - 2)x + (-3 - 1)y = -3 + 3 \Leftrightarrow -5x - 4y = 0 \Leftrightarrow 4y = -5x \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες :

$$\alpha) \varepsilon_1 : y - 2x = 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 2y = 4x + 2$$

Τι παρατηρείτε για τις δύο ευθείες;

2. Αν η ευθεία $\varepsilon : 3x - y = 6$ διέρχεται από το σημείο $A(1, \lambda)$ να βρείτε την τιμή του αριθμού λ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

3. Αν η ευθεία $\varepsilon : 2x - y = \beta$ διέρχεται από το σημείο $A(4, 4)$

α) Να βρείτε την τιμή του αριθμού β .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες xx' και yy' .

4. Αν η ευθεία $\varepsilon : 3x - 2y = 6$ τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

5. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda + 2)x + (3\lambda - 6)y = 2\lambda$ να

παριστάνει ευθεία :

α) παράλληλη στον άξονα xx' .

β) παράλληλη στον άξονα yy' .

γ) Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

6. α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες:

$$\varepsilon_1 : x = -3 \quad \varepsilon_2 : y = 2 \quad \varepsilon_3 : x = 1 \quad \varepsilon_4 : y = -3$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζουν οι παραπάνω ευθείες.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική**επίλυσή του**

- Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y λέμε δύο γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους x, y .
- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{aligned} a_1x + \beta_1y &= \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y &= \gamma_2 \end{aligned}$$
- Λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους.

- Για την γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:
Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις και αν :
 1. Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο τότε το σημείο αυτό είναι η λύση του συστήματος.
 2. Οι ευθείες είναι παράλληλες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο τότε το σύστημα δεν έχει λύση είναι αδύνατο.
 3. Οι ευθείες συμπίπτουν τότε έχουν άπειρα κοινά σημεία άρα το σύστημα είναι αόριστο.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & \begin{aligned} y &= x + 5 \\ y &= x - 5 \end{aligned} & \beta) & \begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 3y &= 6 \end{aligned} \end{array}$$

Λύση

- α) Φτιάχνουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις :

$$\varepsilon_1 : y = x + 5$$

x	0	1
y	5	6

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$y = 0 + 5 \Leftrightarrow y = 5$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0,5)

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$y = 1 + 5 \Leftrightarrow y = 6$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(1,6)

$$\varepsilon_2 : y = x - 5$$

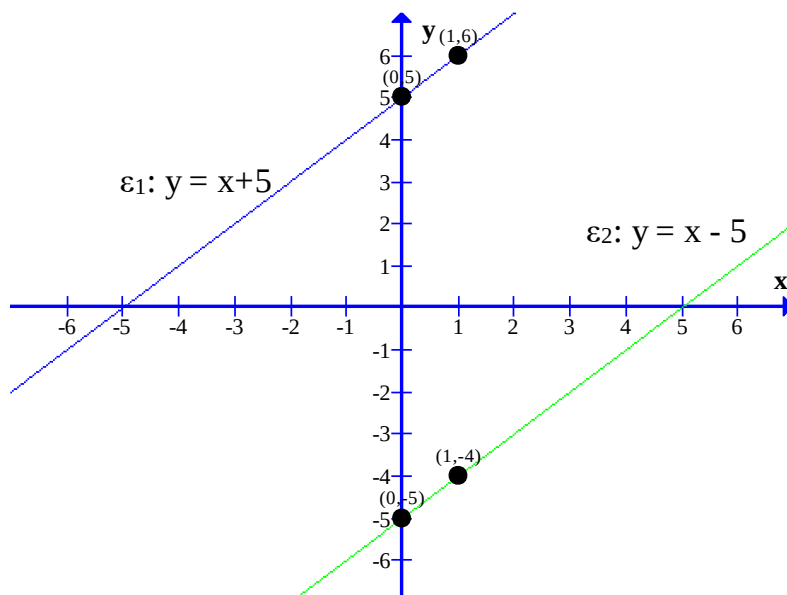
x	0	1
y	-5	-4

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_2 και προκύπτει ότι :

$y = 0 - 5 \Leftrightarrow y = -5$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Γ(0,-5)

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_2 και προκύπτει ότι :

$y = 1 - 5 \Leftrightarrow y = -4$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Δ(1,-4)



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες επομένως δεν έχουν κανένα κοινό σημείο άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Φτιάχνουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις :

$$\varepsilon_1 : x + y = 2$$

x	0	1
y	2	1

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$0 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0,2)

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$1 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1$ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β

(1,1)

$$\varepsilon_2 : x + 3y = 6$$

x	0	3
y	2	1

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

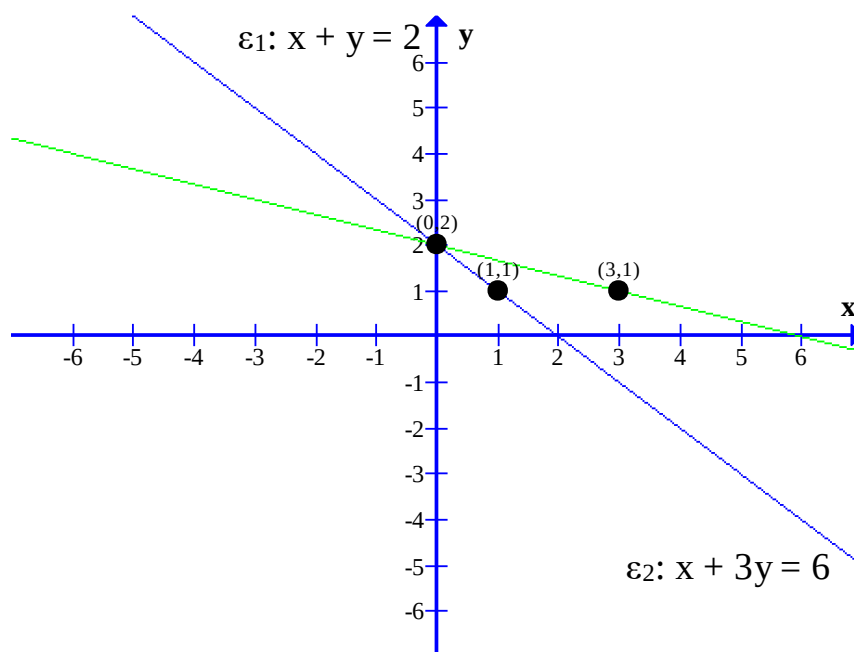
$$0 + 3y = 6 \Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 2 \text{ . Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Γ}$$

(0,2)

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$$3 + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 - 3 \Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow y = 1 \text{ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το}$$

σημείο Δ(3,1)



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο (0,2) Άρα το σύστημα έχει

μία λύση την $(x, y) = (0, 2)$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - y = 3 \\ x = -1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x + y = 8 \\ y = x \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

2. Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} y = x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 8x - 16y = -4 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 1,5x + 4y = 5 \end{cases}$$

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Για να λύσουμε αλγεβρικά μια εξίσωση με ένα άγνωστο προσπαθούμε να απαλείψουμε έναν από τους δύο αγνώστους ώστε να προκύψει εξίσωση πρώτου βαθμού την οποία γνωρίζουμε να επιλύουμε.

Έχουμε 2 μεθόδους λύσης οι οποίες είναι οι εξής:

A Μέθοδος της αντικατάστασης.

- Μέθοδος λύσης με την μέθοδο της αντικατάστασης:

Βήμα 1 Λύνουμε την μία από τις δύο εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο

Βήμα 2 Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση τον άγνωστο με την ίση παράσταση που βρήκαμε στο βήμα 1 .

Βήμα 3 Λύνουμε την εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει και βρίσκουμε την τιμή του ενός αγνώστου.

Βήμα 3 Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στην παράσταση του πρώτου βήματος και βρίσκουμε την τιμή του δεύτερου αγνώστου.

Βήμα 4 Προσδιορίζουμε την λύση του συστήματος

1^ο π.χ. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{array}{l} 2y + x = 0 \\ 4x - y = 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} x = -2y \\ 4 \cdot (-2y) - y = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} x = -2y \\ -8y - y = 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} x = -2y \\ \frac{-9y}{-9} = \frac{3}{-9} \end{array} \right| \begin{array}{l} x = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ y = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

B μέθοδος των αντίθετων συντελεστών.

- Μέθοδος λύσης με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

Βήμα 1 Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους.

Βήμα 2 Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη οπότε προκύπτει εξίσωση πρώτου βαθμού την οποία και λύνουμε(αν γίνεται).

Βήμα 3 Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου σε μια από τις δυο αρχικές εξισώσεις οπότε βρίσκουμε την λύση του δεύτερου αγνώστου.

Βήμα 4 Προσδιορίζουμε την λύση του συστήματος

2^ο π.χ. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 6x + 14y = 3 \end{cases}$$

Λύση :

$$\begin{array}{r|l} 3x + 7y = 2 & \times(-2) \\ 6x + 14y = 3 & \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -6x - 14y = -4 \\ \oplus 6x + 14y = 3 \\ \hline 0x + 0y = -1 \end{array} \quad 0 = -1 \text{ ΑΔΥΝΑΤΟ!}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να ξεκινήσουμε μία από τις δυο μεθόδους λύσης συστήματος θα πρέπει πρώτα να το φέρουμε στην αρχική του μορφή : $\begin{matrix} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{matrix}$
- Αν στη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών μετά την πρόσθεση καταλήξουμε στη μορφή $0x + 0y = a$ όπου a ένας αριθμός διάφορος του μηδενός τότε το σύστημα είναι αδύνατο (βλέπε 2^ο π.χ.)
- Αν στη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών μετά την πρόσθεση καταλήξουμε στη μορφή $0x + 0y = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο. έχει άπειρες λύσεις που βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2,5x + 3,2y = -1,8 \\ 1,6x - 2,4y = -5,6 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy = 60 \end{cases}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} 2,5x + 3,2y = -1,8 \\ 1,6x - 2,4y = -5,6 \end{cases} \begin{matrix} \times 10 \\ \times 10 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 32y = -18 \\ 16x - 24y = -56 \end{cases} \begin{matrix} \times 3 \\ \times 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 75x + 96y = -54 \\ \oplus 64x - 96y = -224 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$139x + 0y = -278$$

$$\begin{cases} \frac{139x}{139} = \frac{-278}{139} \\ 25x + 32y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 25 \cdot (-2) + 32y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ -50 + 32y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ 32y = 50 - 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \frac{32y}{32} = \frac{32}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Άρα η λύση του συστήματος είναι το}$$

ζεύγος $(x, y) = (-2, 1)$

$$\beta) \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases} \begin{matrix} \times 10 \\ \times 12 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \frac{3x}{2} + 10 \frac{y}{5} = 10 \cdot 6 \\ 12 \frac{x+2}{4} - 12 \frac{y-3}{6} = 12 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 2y = 60 \\ 3(x+2) - 2(y-3) = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 2y = 60 \\ 3x + 6 - 2y + 6 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 2y = 60 \\ \oplus 3x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{18x}{18} = \frac{72}{18} \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3 \cdot 4 - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$18x + 0y = 72$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος } (x, y) = (4, 0)$$

$$\gamma) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy = 60 \end{cases} \begin{matrix} x = 2 + y \\ (2 + y)^2 + (2 + y)y = 60 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 4 + 4y + y^2 + 2y + y^2 = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y \\ 2y^2 + 6y - 56 = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$2y^2 + 6y - 56 = 0 \Leftrightarrow \text{Διαιρούμε όλους τους όρους με το 2.}$$

$$y^2 + 3y - 28 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 1 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= 3 & &= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) \\ \gamma &= -28 & &= 9 + 112 \\ & & &= 121 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις :

$$y_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 11}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 11}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Για $y = 4$ έχουμε ότι $x = 2 + 4 \Leftrightarrow x = 6$ Άρα η μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (6, 4)$

Για $y = -7$ έχουμε ότι $x = 2 - 7 \Leftrightarrow x = -5$ Άρα η δεύτερη λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-5, -7)$

2. Μια μηχανή παράγει 40 microships την ώρα ενώ μια άλλη , παλιότερο μοντέλο 30 microships την ώρα . Για μία ποσότητα 400 microships οι δύο μηχανές λειτούργησαν συνολικά 12 ώρες . Να βρείτε πόσες ώρες λειτούργησε η κάθε μηχανή.

Λύση

Έστω x οι ώρες που λειτούργησε η πρώτη μηχανή και y οι ώρες που λειτούργησε η δεύτερη μηχανή. Αφού συνολικά λειτούργησαν 12 ώρες θα έχουμε την σχέση

$$\boxed{x + y = 12} \quad 1$$

Σε x ώρες η πρώτη μηχανή θα παράγει $40x$ microships.

Σε y ώρες η δεύτερη μηχανή θα παράγει $30y$ microships.

Συνολικά παράγουν 400 microships .Άρα θα έχουμε την σχέση

$$\boxed{40x + 30y = 400} \quad 2$$

Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις 1 και 2 .

$$\begin{array}{rcl} x + y = 12 & \left| \begin{array}{l} \times (-30) \\ \times 1 \end{array} \right| & \begin{array}{l} -30x - 30y = -360 \\ 40x + 30y = 400 \end{array} \\ \oplus & & \begin{array}{l} \hline 10x = 40 \\ 10x = 40 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{10x}{10} = \frac{40}{10} \\ x = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ 4 + y = 12 \\ y = 8 \end{array}$$

$10x + 0y = 40$ Επομένως η πρώτη μηχανή θα

δουλέψει 4 ώρες και η δεύτερη μηχανή θα δουλέψει 8 ώρες .

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x=3 \\ 2x-4y=14 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} y=2x \\ 3x-y=5 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 3x-y=0 \\ x+y=12 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x-y=19 \\ 3x+y=16 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 5x-3y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 3x-7y=-1 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x=\frac{3y-1}{2} \\ x=y-3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x=\frac{y-2}{3} \\ y-x=\frac{8}{3} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x+y=x-y \\ x+\frac{y}{4}=2x+1,5 \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x-y(x-1)=-1+x(3-y) \\ xy-x(2x-1)=1-(2x-y)(x+1) \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x-2(x-y+1)=3y-1 \\ 11+3(x-1)=x-2(y-3) \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} xy-(x-1)^2=3-(x-1)(x-y) \\ y-2(x-1)(x+1)=1-2x(x-1) \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 3-2(x-3y)=y-x \\ x-(2y-1)=y-6 \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=3 \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=-5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{3}{3x-2}+\frac{12}{2y-1}=2 \\ \frac{1}{6x-4}-\frac{3}{1-2y}=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{1}{2x-3}+y=4 \\ \frac{5}{2x-3}-2y=-1 \end{cases}$$

6. Αν το σύστημα $\begin{cases} 2\alpha x - \beta y = -1 \\ -\alpha y + \beta x = 1 \end{cases}$ έχει λύση την $x=-1$ και $y=1$, να βρείτε τουςαριθμούς α και β .7. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών λ , μ ώστε η εξίσωση :

$$x^2 - (2\lambda - \mu)x + \lambda - 3\mu = 0 \text{ να έχει ρίζες τους αριθμούς } -2 \text{ και } -1.$$

8. Να βρείτε τις τιμές των x και y ώστε $(2x-y)^2 + (x-3y+5)^2 = 0$

9. Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 3 cm . Αν τα

εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά $16\pi \text{ cm}^2$ να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

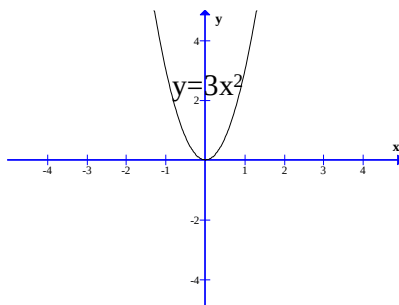
10. Βρείτε δυο αριθμούς που έχουν άθροισμα 50 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο , τότε θα προκύψει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 8 .
11. Μια μηχανή παράγει 40 microchips την ώρα ενώ μια άλλη , παλιότερο μοντέλο 30 microchips την ώρα . Για μια ποσότητα 400 microchips οι δύο μηχανές λειτούργησαν συνολικά 12 ώρες. Να βρείτε πόσες ώρες λειτούργησε η κάθε μηχανή.
12. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 18 m και εμβαδό 20 m^2 . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

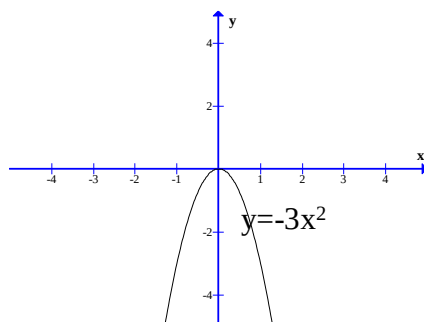
- Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$ έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη γραμμή που ονομάζεται παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα yy' .
- Αν $a > 0$ τότε:
- Η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx' . Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $y = ax^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y = 0$ για $x = 0$.

π.χ. Η συνάρτηση $y = 3x^2$



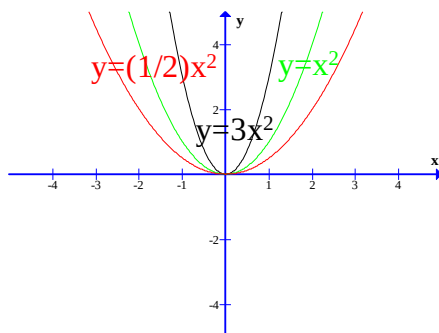
- Αν $a < 0$ τότε:
- Η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx' . Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $y = ax^2$ παίρνει μέγιστη τιμή $y = 0$ για $x = 0$.

π.χ. Η συνάρτηση $y = -3x^2$

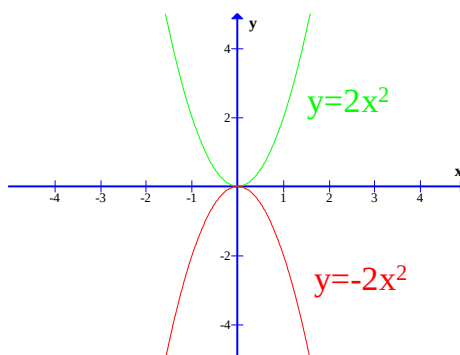


** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Στην παραβολή $y = ax^2$ ο συντελεστής a καθορίζει το άνοιγμα της παραβολής όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή του a τόσο το άνοιγμα της παραβολής είναι μικρότερο.



- Οι παραβολές $y = ax^2$ και $y = -ax^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x\chi'$
π.χ. Οι παραβολές $y = 2x^2$ και $y = -2x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x\chi'$



Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

- Να σχεδιάσετε τις παραβολές :

$$\alpha) y = -3x^2 \quad \beta) y = 3x^2 \quad \gamma) y = \frac{1}{4}x^2$$

Λύση

$$\alpha) y = -3x^2$$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών :

x	-2	-1	0	1	2
y	-12	-3	0	-3	-12

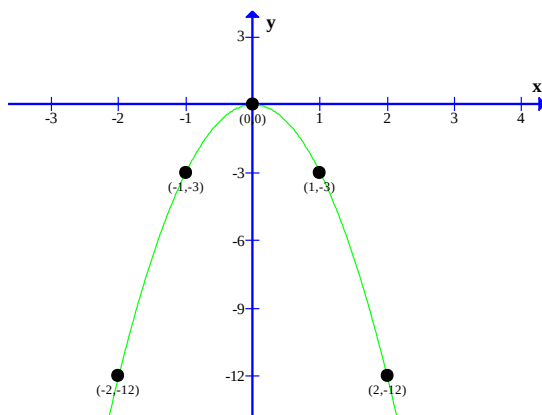
$$\text{Για } x = -2 \text{ έχουμε } y = -3 \cdot (-2)^2 = -3 \cdot 4 = -12$$

Για $x = -1$ έχουμε $y = -3 \cdot (-1)^2 = -3 \cdot 1 = -3$

Για $x = 0$ έχουμε $y = -3 \cdot (0)^2 = 0$

Για $x = 1$ έχουμε $y = -3 \cdot 1^2 = -3 \cdot 1 = -3$

Για $x = 2$ έχουμε $y = -3 \cdot 2^2 = -3 \cdot 4 = -12$



2. Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = -5x^2$ που έχουν τεταγμένη -20 .

Λύση

Αφού έχουν τεταγμένη -20 σημαίνει ότι $y = -20$

$$-20 = -5x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-5x^2}{-5} = \frac{-20}{-5} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$x = 4 \text{ ή } x = -4$$

Επομένως τα σημεία με τεταγμένη -20 είναι $A(4, -20)$ και $B(-4, -20)$

3. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η παραβολή $y = ax^2$ να διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$

Λύση

Αφού διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$ έχουμε ότι για $x = 3$ το $y = 2$

$$\text{άρα ισχύει : } 2 = a \cdot 3^2 \Leftrightarrow$$

$$3 = 4a \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{4a}{4} \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

$$\alpha) y = 2x^2 \quad \beta) y = \frac{2}{3}x^2 \quad \gamma) y = -4x^2$$

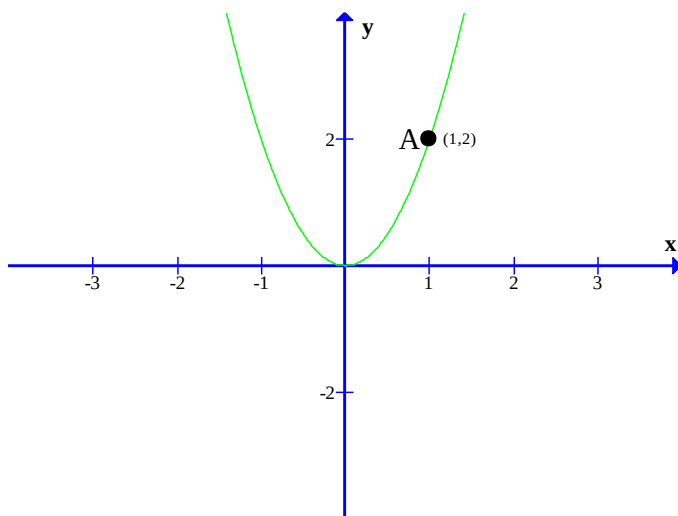
2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

$$\alpha) y = 4x^2 \quad \text{και} \quad y = -4x^2 \quad \beta) y = \frac{2}{5}x^2 \quad \text{και} \quad y = -\frac{2}{5}x^2$$

3. Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = -2x^2$ που έχουν τεταγμένη -8 και να υπολογίσετε την απόστασή τους.

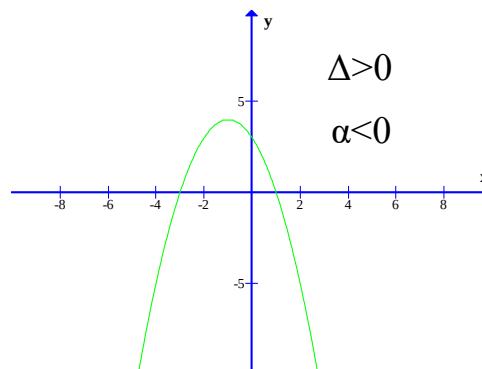
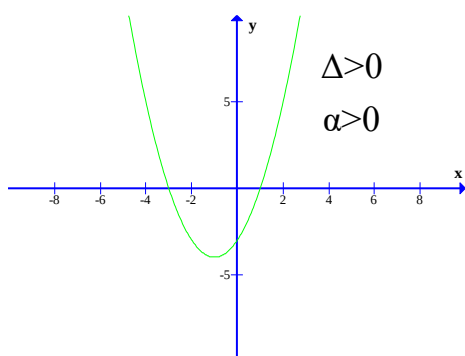
4. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η παραβολή $y = \frac{3a-1}{2}x^2$ να διέρχεται από το σημείο $A(-1, a+1)$

5. Να βρείτε την εξίσωση του παρακάτω σχήματος. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ και να γράψετε την εξίσωσή της.

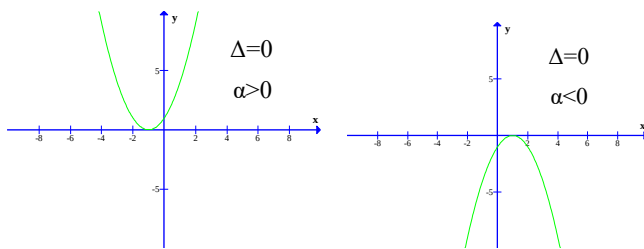


4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

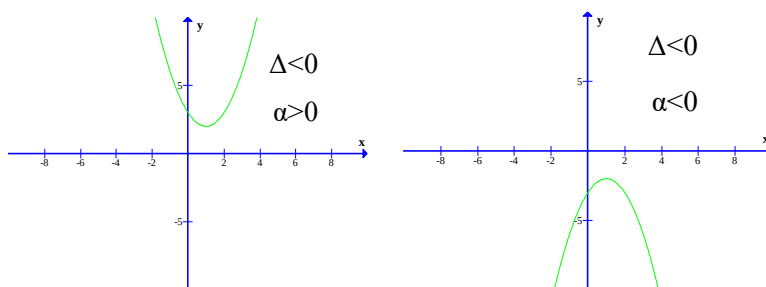
- Κάθε συνάρτηση της μορφής $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ ονομάζεται **τετραγωνική**.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ είναι μια καμπύλη γραμμή που ονομάζεται παραβολή που έχει **κορυφή** το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία που διέρχεται από την κορυφή K και έχει εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- Για την συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ ισχύει ότι αν:
 - $a > 0$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** την $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
 - $a < 0$ παίρνει **μέγιστη τιμή** την $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- ** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :
 - Για να βρούμε τα κοινά σημεία της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με τον άξονα γγ' βάζουμε όπου $x = 0$ και βρίσκουμε την τιμή του γ .
 - Για να βρούμε τα κοινά σημεία της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με τον άξονα χχ' λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και αν :
 - $\Delta > 0$ Η παραβολή έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα χ'χ .



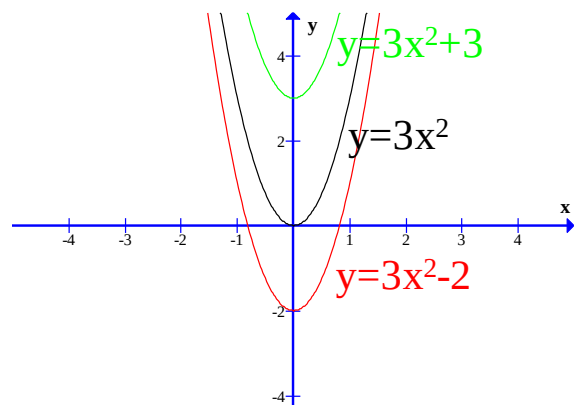
- $\Delta = 0$ Η παραβολή έχει με τον άξονα xx' ένα κοινό σημείο .



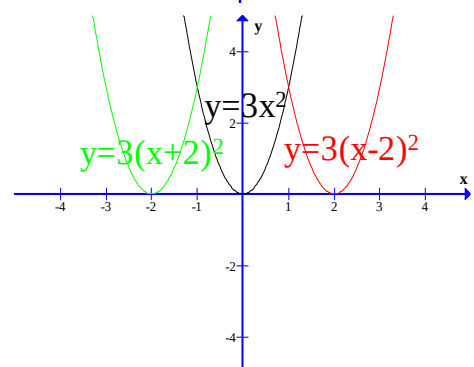
- $\Delta < 0$ Η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα xx' .



- Η συνάρτηση $y = ax^2 + \gamma$ έχει κορυφή το σημείο $K(0, \gamma)$ και προέρχεται από τη κατακόρυφη μετατόπιση της $y = ax^2$ κατά γ μονάδες προς τα πάνω αν $\gamma > 0$ ή κατά γ μονάδες προς τα κάτω αν $\gamma < 0$.



- Η συνάρτηση $y = a(x-c)^2$ με $a \neq 0$ έχει κορυφή το σημείο $K(c, 0)$ και προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της $y = ax^2$ κατά c μονάδες προς τα αριστερά αν $c > 0$ και κατά c μονάδες προς τα δεξιά αν $c < 0$



Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = -x^2 + 3$ για $-3 \leq x \leq 3$ και να βρείτε το μέγιστο ή το ελάχιστό της.

Λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών :

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	3	2	-1

Για $x = -2$ έχουμε

$$y = -(-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

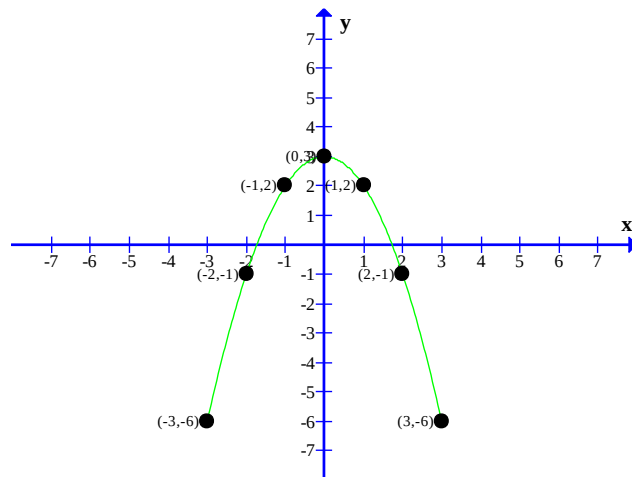
Για $x = -1$ έχουμε

$$y = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

Για $x = 0$ έχουμε $y = -(0)^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

Για $x = 1$ έχουμε $y = -1^2 + 3 = -1 + 3 = 2$

Για $x = 2$ έχουμε $y = -2^2 + 3 = -4 + 3 = -1$



2. Δίνετε η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + \lambda$

α) Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ το σημείο $A(1, 6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

Για να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα πρέπει να την επαληθεύει. Επομένως έχουμε ότι:

$$6 = 1^2 + 3 \cdot 1 + \lambda \Leftrightarrow$$

$$6 = 1 + 3 + \lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 6 - 1 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2$$

β) Αν $\lambda = 2$ να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση για $-4 \leq x \leq 1$ και να βρείτε τα κοινά σημεία με τους άξονες .

$$y = x^2 + 3x + 2$$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών :

X	-3	-2	-1	0	1
Y	2	0	0	2	6

Για $x = -3$ έχουμε

$$y = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 2 = 9 - 9 + 2 = 2$$

Για $x = -2$ έχουμε

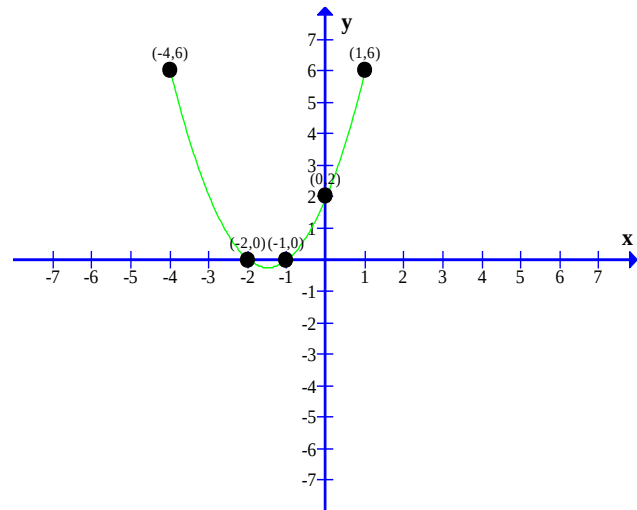
$$y = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

Για $x = -1$ έχουμε

$$y = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Για $x = 0$ έχουμε $y = (0)^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$

Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να σχεδιάσετε τις παραβολές:
α) $y = 2x^2 - 8$ β) $y = -x^2 + 3$ γ) $y = -4x^2 - 4x + 3$ δ) $y = -x^2 - 2x + 3$
2. Να βρείτε την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της κάθε συνάρτησης:
α) $y = x^2 - 6x$ β) $y = -x^2 + 4x$ γ) $y = x^2 + 2x + 5$
3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x$ για $-2 \leq x \leq 6$ και με την βοήθεια αυτής να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $x^2 - 4x = 5$
4. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 - 3x + 2$ να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.
5. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 - \alpha x + \alpha - 1$
 - α) Για ποια τιμή του α το σημείο $M(-1, 6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
 - β) Για $\alpha = 3$ να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
6. Δίνεται η συνάρτηση $y = -x^2 + \lambda x - 1$
 - α) Αν η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή για $x = 4$ να βρείτε την τιμή του λ .
 - β) Για $\lambda = 4$ να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Σύνολα

Ορισμός Συνόλου

- **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται από τη εμπειρία μας ή τη διάνοηση μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σε ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

- Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A »
- Για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A »

Βασικά σύνολα αριθμών

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$
- Το σύνολο των ακέραιων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$
- Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$

Παράσταση συνόλου

- Μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο **με αναγραφή των στοιχείων του**, γράφοντας όλα τα στοιχεία ανάμεσα σε δύο άγκιστρα, από μια φορά το καθένα, χωρίζοντάς τα με κόμμα. Όταν το σύνολο έχει άπειρα στοιχεία τότε γράφουμε μερικά από αυτά αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι τα στοιχεία που παραλείπονται.

π.χ. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα σύνολα:

- α) των ζυγών φυσικών αριθμών μέχρι το 10
- β) των περιττών από το 1 έως το 1000

Λύση

- α) Το σύνολο των ζυγών φυσικών αριθμών μέχρι το 10 είναι

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

- β) Το σύνολο των περιττών από το 1 έως το 1000 είναι $B = \{1, 3, \dots, 999\}$

- Μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο **με περιγραφή των στοιχείων του**, περιγράφοντας όλα τα στοιχεία του, περιγράφοντας μια ιδιότητα που έχουν

όλα αυτά. Γράφουμε $A = \{x \in \Omega / x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$ όπου Ω είναι ένα σύνολο και τα στοιχεία x ανήκουν στο Ω και έχουν μια ιδιότητα I .

π.χ. Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) των περιττών ακέραιων αριθμών

β) των ρητών από το 5 έως το 13

Λύση

α) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ είναι περιττός}\}$

β) $B = \{x \in \mathbb{Q} / 5 \leq x \leq 13\}$

Ίσα σύνολα

➤ Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Γράφουμε $A = B$.

Κενό σύνολο

➤ Κενό σύνολο λέγεται το σύνολο το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

Υποσύνολο συνόλου

➤ Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Συμβολίζουμε $A \subseteq B$.

Ισχύει ότι :

- ✓ $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A
- ✓ Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$
- ✓ Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A=B$
- ✓ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

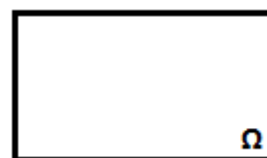
Βασικό σύνολο

➤ Το βασικό σύνολο είναι το σύνολο από τα στοιχεία του οποίου δημιουργούμε άλλα σύνολα. Συμβολίζεται με Ω .

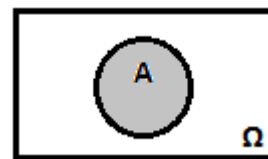
Διάγραμμα Venn

➤ Τα διαγράμματα Venn είναι κλειστές γραμμές (ορθογώνια, κύκλοι) τις οποίες χρησιμοποιούμε για να παρουσιάσουμε με εποπτική εικόνα τα σύνολα.

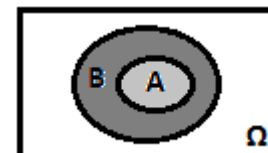
➤ Το βασικό σύνολο Ω το παρουσιάζουμε με ένα ορθογώνιο



- Ένα σύνολο A υποσύνολο του βασικού συνόλου Ω το παρουσιάζουμε με ένα κύκλο.



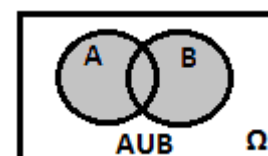
- Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B Όταν το A περιέχεται στο B



Πράξεις με σύνολα

1) Ένωση

- Έστω A και B δυο σύνολα. **Ένωση των συνόλων A και B** συμβολίζεται με $A \cup B$ και είναι το σύνολο που αποτελείται από στοιχεία και των δύο συνόλων αναγραφόμενα μια φορά το κάθε ένα.



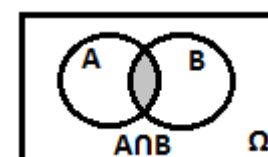
Ισχύει ότι $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$

Ιδιότητες της ένωσης:

- ✓ $A \cup \emptyset = A$ και $A \cup A = A$
- ✓ $A \cup B = B \cup A$
- ✓ $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$
- ✓ Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$

2) Τομή

- Έστω A και B δυο σύνολα. **Τομή των συνόλων A και B** συμβολίζεται με $A \cap B$ και είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία που ανήκουν συγχρόνως και στα δυο σύνολα.



Ισχύει ότι $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$

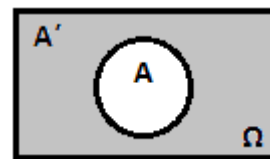
Ιδιότητες της τομής

- ✓ $A \cap \emptyset = \emptyset$ και $A \cap A = A$
- ✓ $A \cap B = B \cap A$
- ✓ $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
- ✓ Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$
- ✓ Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A, B λέγονται ξένα μεταξύ τους.

3) Συμπλήρωμα συνόλου

➤ Έστω Ω το βασικό σύνολο και A ένα υποσύνολό του.

Συμπλήρωμα του A συμβολίζεται με A' και είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A . Ισχύει ότι $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

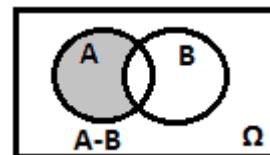


Ιδιότητες συμπληρώματος

- ✓ $\Omega' = \emptyset$ και $\emptyset' = \Omega$
- ✓ $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \Omega$
- ✓ $(A')' = A$

4) Διαφορά συνόλων

Έστω A και B δυο σύνολα. **Διαφορά του B από το A** συμβολίζεται με $B - A$ και είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B .



Ισχύει ότι $A - B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

- Δίνονται οι αριθμοί $2, -3, \frac{2}{7}, \sqrt{3}, 1, \bar{3}, 2,72$. Να βρείτε σε ποια από τα σύνολα αριθμών ανήκει καθένας από τους αριθμούς.

Λύση

- $2 \in \mathbb{N}, 2 \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Q}, 2 \in \mathbb{R}$
- $-3 \in \mathbb{Z}, -3 \in \mathbb{Q}, -3 \in \mathbb{R}$
- $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}, \frac{2}{7} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$
- $1, \bar{3} \in \mathbb{Q}, 1, \bar{3} \in \mathbb{R}$
- $2,72 \in \mathbb{Q}, 2,72 \in \mathbb{R}$

- Να εξετάσετε αν είναι ίσα τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 1\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = x\}$$

Λύση

Ισχύει ότι :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 1\} = \{-2, -1, 0, 1\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$\text{Αφού } x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Τα σύνολα A , B δεν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία άρα δεν είναι ίσα.

3. Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και τα υποσύνολά του

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ και $B = \{0, 6, 8\}$ Να βρείτε τα σύνολα:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A' \cap B$
4. $A' \cup B'$
5. $(A \cup B)'$
6. $(A' \cap B')'$

Λύση

1. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$
2. $A \cap B = \{6\}$
3. $A' \cap B = \{0, 8\}$ αφού $A' = \{0, 4, 5, 7, 8\}$
4. $A' \cup B' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ αφού $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
5. $(A \cup B)' = \{4, 5\}$
6. $(A' \cap B')' = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$ αφού $A' \cap B' = \{4, 5, 7\}$

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:
 - $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 8\}$
 - $B = \{x \in \mathbb{N} / 13 \leq x \leq 20\}$
 - $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 1\}$
 - $\Delta = \{x \in \mathbb{N} / -3 \leq x \leq 0\}$
- Δίνονται τα σύνολα $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$ και $\Gamma = \{1,4,7\}$. Να βρείτε τα σύνολα:
 - $A \cup B$
 - $A \cap B$
 - $A \cup \Gamma$
 - $(A \cap B) \cup \Gamma$
 - $(A \cup B) \cap \Gamma$
 - $(A \cap \Gamma) \cap B$
- Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4\}$ και τα υποσύνολα $A = \{1,2,3\}$ και $B = \{3,4\}$. Να βρείτε τα σύνολα:
 - $A \cup B$
 - $A \cap B$
 - A'
 - B'
 - $A' \cap B$
 - $(A \cap B)'$
 - $(A \cup B)'$
- Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 18\}$
 - Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους
 - Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$
- Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3, \dots, 15\}$ και τα υποσύνολα $A = \{x \in \Omega / x \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$.
 - Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους
 - Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A', B' , $(A \cup B)'$, $B - A$, $A' \cap B$
- Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις:
 - $A \subseteq A \cup B$

β. $A \cap B \subseteq A$

γ. $B \subseteq A \cap B$

δ. $A \cap B \subseteq A \cup B$

ε. $A - B \subseteq A$

στ. $A' \cap B \subseteq A$

5.2 Δειγματικός χώρος-ενδεχόμενα

Πείραμα τύχης

- **Πείραμα τύχης** ονομάζουμε ένα πείραμα του οποίου δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα παρότι επαναλαμβάνεται πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
- **Αιτιοκρατικό** είναι το πείραμα εκείνο του οποίου μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, αν γνωρίζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται κάθε φορά.

Δειγματικός χώρος

- **Δειγματικός χώρος Ω** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.
 - ✓ Για τον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου σε ένα πείραμα τύχης εφαρμόζουμε την μέθοδο του **δεντροδιαγράμματος** ή τον πίνακα **διπλής εισόδου**.

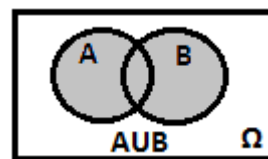
Ενδεχόμενο

- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .
 - ✓ Όταν κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του ενδεχομένου λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Για αυτό και τα στοιχεία του ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές** περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του.
- **Απλό** λέγεται το ενδεχόμενο που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.
- **Σύνθετο** λέγεται το ενδεχόμενο που αποτελείται από τουλάχιστον δύο στοιχεία.
- **Βέβαιο** ενδεχόμενο είναι εκείνο που πραγματοποιείται πάντοτε. Ο δειγματικός χώρος Ω θεωρείται βέβαιο ενδεχόμενο αφού όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης αυτό θα ανήκει στο Ω .
- **Αδύνατο** ενδεχόμενο είναι εκείνο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης. Είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.
- Με **$N(A)$** συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A .

Πράξεις με ενδεχόμενα

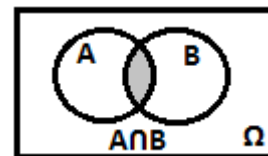
1) Ένωση

- Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B



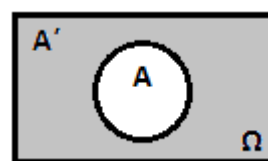
2) Τομή

- Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .



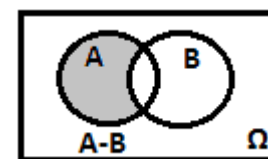
3) Συμπλήρωμα συνόλου A'

- Το ενδεχόμενο A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A .



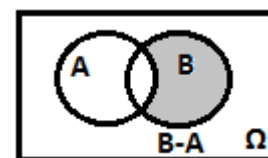
4) Διαφορά του B από το A

Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B .



5) Διαφορά του A από το B

Το ενδεχόμενο $B - A$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A .



Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

- Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες μια άσπρη μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της και την βάζουμε πίσω στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της. (Λέμε παίρνουμε δυο μπάλες με επανατοποθέτηση)
 - Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος
 - Ποιο είναι το ενδεχόμενο A “Η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”
 - Ποιο είναι το ενδεχόμενο B “Να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”.

Λύση

- i. Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο θα χρησιμοποιήσουμε δέντροδιάγραμμα

1^η εξαγωγή 2^η εξαγωγή

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ M \\ K \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A \\ M \\ K \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} A \\ M \\ K \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} A \\ M \\ K \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Άρα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$$

- ii. Αν A το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη έχουμε

$$A = \{KA, KM, KK\}$$

- iii. Αν B το ενδεχόμενο να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα έχουμε $B = \{AA, MM, KK\}$

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως να επανατοποθετήσουμε τις πρώτες μπάλες πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (χωρίς επανατοποθέτηση)

Λύση

- i. Για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης θα χρησιμοποιήσουμε το δέντροδιάγραμμα. Είναι:

1^η Εξαγωγή 2^η εξαγωγή

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ M \\ K \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} M \\ K \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} A \\ K \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} A \\ M \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{Άρα } \Omega = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$$

- ii. $A = \{KA, KM\}$

- iii. $B = \emptyset$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρείτε:
 - α. Τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
 - β. Το ενδεχόμενο A: «στη ρίψη του ζαριού φέρνουμε άρτιο αριθμό»
 - γ. Το ενδεχόμενο B: «στη ρίψη του ζαριού φέρνουμε αριθμό μικρότερο του 4»
2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
3. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να βρείτε:
 - i) Τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
 - ii) Το ενδεχόμενο A: « να έρθει δύο φορές κορώνα»
 - iii) Το ενδεχόμενο B: «να έρθει τουλάχιστον μία φορά γράμματα»
4. Ρίχνουμε πρώτα ένα ζάρι και μετά ένα νόμισμα και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.
5. Σε ένα κουτί υπάρχουν 3 σφαίρες , μια κόκκινη , μια λευκή και μια μπλε. Επιλέγουμε στη τύχη μια σφαίρα , καταγράφουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε στη τύχη μια άλλη σφαίρα και καταγράφουμε το χρώμα της. Να βρείτε:
 - i. Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
 - ii. Το ενδεχόμενο A να επιλέξουμε σφαίρες του ίδιου χρώματος.
 - iii. Το ενδεχόμενο B να επιλέξουμε τουλάχιστον μια κόκκινη σφαίρα.
 - iv. Το ενδεχόμενο Γ να μην επιλέξουμε λευκή σφαίρα.
 - v. Το ενδεχόμενο Δ να επιλέξουμε ακριβώς μια μπλε σφαίρα.
6. Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστούν συνολικά 2 ίδιες ενδείξεις(κεφαλή ή γράμματα)
 - i. Να βρείτε το δειγματικό χώρο
 - ii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα

A: εμφανίστηκε 2 φορές η ένδειξη κεφαλή
 B: ρίξαμε το νόμισμα 3 φορές

 - iii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $B - A$, και B' .

7. Η Ζωή θα πάει το Σάββατο σινεμά με τους φίλους της. Στέκεται λοιπόν μπροστά στην ντουλάπα και σκέφτεται πως θα συνδυάσει τα ρούχα και τα παπούτσια της. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;

Τζιν παντελόνι	Άσπρη μπλούζα	Μπλε σταράκια
Μαύρη φούστα	Ροζ πουκάμισο	Μαύρες μπαλαρίνες
	Κόκκινη ζακέτα	Αθλητικά

Να βρείτε :

- Όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.
 - Το ενδεχόμενο A: «Η Ζωή θα βάλει φούστα»
 - Το ενδεχόμενο B: «Η Ζωή θα βάλει τζιν παντελόνι»
 - Το ενδεχόμενο Γ: «Η Ζωή θα βάλει μαύρες μπαλαρίνες»
 - Το ενδεχόμενο ΒΓ.
8. Σε ένα κουτί έχουμε δυο σφαίρες αριθμημένες με το ψηφίο 1 και 2 και εκτελούμε το εξής πείραμα. Επιλέγουμε μια σφαίρα , σημειώνουμε το ψηφίο της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία άλλες δυο φορές και σχηματίζουμε έτσι ένα τριψήφιο αριθμό.
- Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος
 - Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού να είναι 1

B: Ο αριθμός να είναι περιττός

Να γράψετε τα ενδεχόμενα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους και στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα:

- Να πραγματοποιείτε τουλάχιστον ένα από τα A,B
 - Να πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A,B
 - Να μην πραγματοποιείται το A
 - Να πραγματοποιείται το B και να μην πραγματοποιηθεί το A
 - Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A,B.
9. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 5 \leq \omega \leq 12\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ και $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$. Να βρείτε:
- Τα ενδεχόμενα A και B.

ii) Τα ενδεχόμενα A' και B' .

iii) Τα ενδεχόμενα $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$ και $(A - B) \cup (B - A)$.

10. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ενδεχόμενα A και B είναι

ασυμβίβαστα;

i) A το ενδεχόμενο η πινακίδα ενός αυτοκινήτου να τελειώνει σε 5 και B το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο κυκλοφορεί στον δακτύλιο στις 14 Μαρτίου.

ii) A το ενδεχόμενο να επιλέξουμε ένα φυσικό αριθμό μικρότερο του 18 και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να διαιρείται από το 5.

iii) Δύο καλοί φίλοι, ο Θάνος κι ο Πάνος παίζουν έναν αγώνα τένις. A είναι το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Θάνος και B το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Πάνος.

iv) Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από ένα λύκειο της χώρας. A είναι το ενδεχόμενο να έχει μέσο όρο βαθμολογίας 15,2 και B το ενδεχόμενο να πάρει αριστείο.

v) Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια. A είναι το ενδεχόμενο η οικογένεια να έχει τρία παιδιά και B το ενδεχόμενο η οικογένεια να μην έχει κορίτσι.

vi) Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές. A είναι το ενδεχόμενο να έρθει τουλάχιστον μία φορά γράμματα και B το ενδεχόμενο να έρθει τουλάχιστον μία φορά κορώνα.

11. Ανακατεύουμε τρεις λυχνίες (E) που δε λειτουργούν με μία λυχνία (K) που λειτουργεί και δοκιμάζουμε αυτές μέχρις ότου βρούμε τη λυχνία που λειτουργεί. Να βρείτε ένα δειγματικό χώρο του πειράματος και το ενδεχόμενο A το πειράματα να τελειώσει μέχρι τη δεύτερη δοκιμή.

12. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα:

A : εμφανίζεται ακριβώς μια φορά γράμματα.

B : εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές γράμματα.

Γ : εμφανίζεται το πολύ δύο φορές γράμματα.

Δ : εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές γράμματα.

13. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και σημειώνουμε το αποτέλεσμα K (κεφαλή) ή Γ (γράμματα). Το πείραμα τελειώνει όταν συμπληρώσουμε δύο K ή πέντε ρίψεις.

Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος και το ενδεχόμενο να γίνουν λιγότερες από πέντε ρίψεις.

14. Ρίχνουμε διαδοχικά ένα ζάρι και δύο νομίσματα. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

15. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 3, 10\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ και $\Gamma = \{1, 3, 5, 7\}$ να βρείτε τα ενδεχόμενα :

i. $A' \cap B$

ii. $A \cap B'$

iii. $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$

iv. $(A \cup B \cup \Gamma)'$

v. $(A \cap B \cap \Gamma)'$

5.3 Έννοια της πιθανότητας

Ισοπίθανα ενδεχόμενα

- **Ισοπίθανα ενδεχόμενα:** είναι τα ενδεχόμενα τα οποία σε ένα πείραμα τύχης έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν. Π.χ. στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού όλες οι έδρες έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

- Σε ένα πείραμα με n ισοπίθανα αποτελέσματα, η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{k}{n}$. Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν:

- ✓ $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- ✓ $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$
- ✓ $0 \leq P(A) \leq 1$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

➤ Απλός προσθετικός νόμος

- Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

➤ Προσθετικός νόμος

- Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

➤ Πιθανότητα συμπληρωματικού ενδεχομένου

- Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει ότι:

$$P(A) + P(A') = 1$$

➤ Πιθανότητα διαφοράς ενδεχομένων

- Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

➤ **Πιθανότητα υποσυνόλου**

- Αν A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου
- Ω
- τότε ισχύει:

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } P(A) \leq P(B)$$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δυο φορές και καταγράφουμε κάθε φορά την ένδειξη της άνω έδρας.

- α. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο
- β. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
- A: οι ενδείξεις των δυο ρίψεων είναι ίδιες
 - B: το άθροισμα των δυο ενδείξεων είναι ίσο με 9
 - Γ: το άθροισμα των δυο ενδείξεων είναι μικρότερο του 5
 - Δ: μια τουλάχιστον ένδειξη είναι ίση με 2

Λύση

- α. Για την εύρεση του δειγματικού χώρου φτιάχνουμε τον πίνακα διπλής εισόδου:

2 ^η ρίψη 1 ^η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Επομένως $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$

- β. Τα ενδεχόμενα και οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$\text{i. } A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ii. } B = \{(4,5), (5,4), (6,3), (3,6)\}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\text{iii. } \Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{iv. } \Delta = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

2. Δίνονται τα ενδεχόμενα A , B και Γ ενός δειγματικού χώρου Ω. Τα A και B είναι

ασυμβίβαστα με $P(A) = \frac{2}{15}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ και $P(\Gamma) = \frac{5}{12}$.

α. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$

Λύση

α. Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα επομένως από απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{15} + P(B) \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{4}{5} - \frac{2}{15} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

3. Για τα ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν ότι:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{5}{6} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

Να βρείτε την $P(B)$

Λύση

$$\text{Είναι } P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)' \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

4. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει

$$P(A - B) = \frac{1}{10}, P(A \cap B) = \frac{3}{10} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{3}{5}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες:

α. $P(A)$

β. $P(B)$

Λύση

α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{10} = P(A) - \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{5}$

β. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{3}{10} \Leftrightarrow$

$$P(B) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

5. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση και το 40% δεν έχουν DVD και το 10% δεν έχει ούτε τηλεόραση ούτε DVD. Επιλέγουμε τυχαία ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και DVD.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο το νοικοκυριό να έχει τηλεόραση

B το ενδεχόμενο το νοικοκυριό να έχει DVD

Άρα $P(A') = \frac{15}{100}$ και $P(A \cup B)' = \frac{10}{100}$ και $P(B') = \frac{40}{100}$

Είναι: $P(A) = 1 - P(A') \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{15}{100} = \frac{75}{100}$

$$P(B) = 1 - P(B') \Leftrightarrow P(B) = 1 - \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)' \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$$

Άρα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = \frac{75}{100} + \frac{60}{100} - \frac{90}{100} = \frac{55}{100}$$

Δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου να έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και DVD

είναι $P(A \cap B) = \frac{55}{100} = 55\%$

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{16}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:
 - $P(A')$
 - $P(B')$
- Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{7}{12}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:
 - $P(B)$
 - $P(A \cup B)$
 - $P(A - B)$
 - $P(B - A)$
- Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:
 - $P(A \cap B)$
 - $P(A - B)$
 - $P((B - A)')$
 - $P(A' \cup B)$
- Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$ και $P(A \cup B) = 0,9$. Να βρείτε τις πιθανότητες:
 - $P(A \cap B)$
 - $P(A - B)$
 - $P(A \cup B')$
- Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε το A να είναι ασυμβίβαστο με καθένα από τα B και Γ. Επίσης ισχύουν $P(A') = \frac{7}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ και $P(A \cup \Gamma) = \frac{8}{10}$.
 - Να βρείτε τις $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$
 - Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.
- Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων το 30% δεν έχει αερόσακο, το 20% δεν έχει καινούρια λάστιχα και το 5% δεν έχει ούτε αερόσακο ούτε καινούρια λάστιχα. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο της έκθεσης. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει αερόσακο και καινούρια λάστιχα.

7. Παίρνουμε στην τύχη ένα φύλλο από μία τράπουλα. Να υπολογιστεί κάθε μία από τις πιθανότητες:
- α) Το φύλλο να είναι κόκκινο.
 - β) Το φύλλο να είναι φιγούρα.
 - γ) Το φύλλο να είναι κόκκινη φιγούρα.
 - δ) Το φύλλο να είναι φιγούρα ή κόκκινο.
 - ε) Το φύλλο να είναι μαύρος αριθμός.
 - στ) Το φύλλο να μην είναι μαύρος αριθμός
8. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά και καταγράφουμε την ένδειξη της άνω έδρας του.
- α. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος
 - β. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
 - i. A: Η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός
 - ii. B: Η ένδειξη να είναι περιττός αριθμός και μεγαλύτερος του 3
 - iii. Γ: Η ένδειξη να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή μικρότερη του 4.
9. Σε ένα κουτί υπάρχουν 2 άσπρες , 4 μπλε , 6 πράσινες και 8 κόκκινες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί. Να βρείτε τις πιθανότητες η σφαίρα αυτή
- α. Να είναι μπλε
 - β. Να είναι άσπρη ή πράσινη
 - γ. Να μην είναι άσπρη
10. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άνδρες ο Δημήτρης (Δ) , ο Κώστας (Κ) ο Μιχάλης (Μ) και δυο γυναίκες η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άνδρας και μια γυναίκα και καταγράφονται τα ονόματά τους.
- α. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος
 - β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
- A: Να διαγωνίστηκε ο Κώστας η ο Μιχάλης
- B: Να διαγωνίστηκε η Ζωή
- Γ: Να μην διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

11. Ένα λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α' τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 20% . Να βρείτε:
- Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης
 - Το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης
 - Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι μαθητής της Β' τάξης.
12. Ένα κουτί περιέχει άσπρες , μαύρες , κόκκινες , πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5 οι μαύρες είναι 9 , ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα
- A: η μπάλα που επιλέγουμε είναι Άσπρη
 B: η μπάλα που επιλέγουμε είναι Κόκκινη
 Γ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι Πράσινη
- Χρησιμοποιώντας τα A , K και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:
 - Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη
 - Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη
 - Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δυο ενδεχόμενα του ερωτήματος α)
13. Από τους 150 μαθητές ενός λυκείου , οι 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου , οι 20 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα θεάτρου και οι 40 μαθητές συμμετέχουν σε μια τουλάχιστον από τις παραπάνω ομάδες. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή από το παραπάνω λύκειο , να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός
- Να συμμετέχει σε ομάδα στίβου
 - Να μην συμμετέχει στην ομάδα θεάτρου
 - Να συμμετέχει σε ακριβώς μια από τις παραπάνω ομάδες
 - Να μην συμμετέχει σε καμία από τις παραπάνω ομάδες
 - Να συμμετέχει το πολύ σε μια από τις παραπάνω ομάδες
14. Η Β' τάξη ενός λυκείου έχει 70 μαθητές. Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή του λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της Β' τάξης είναι 40% , ενώ η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 28%. Να βρείτε

- α. Πόσους μαθητές έχει το λύκειο
- β. Πόσοι μαθητές υπάρχουν σε κάθε τάξη.

15. Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει

πιάνο B: ο σπουδαστής αυτός

μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

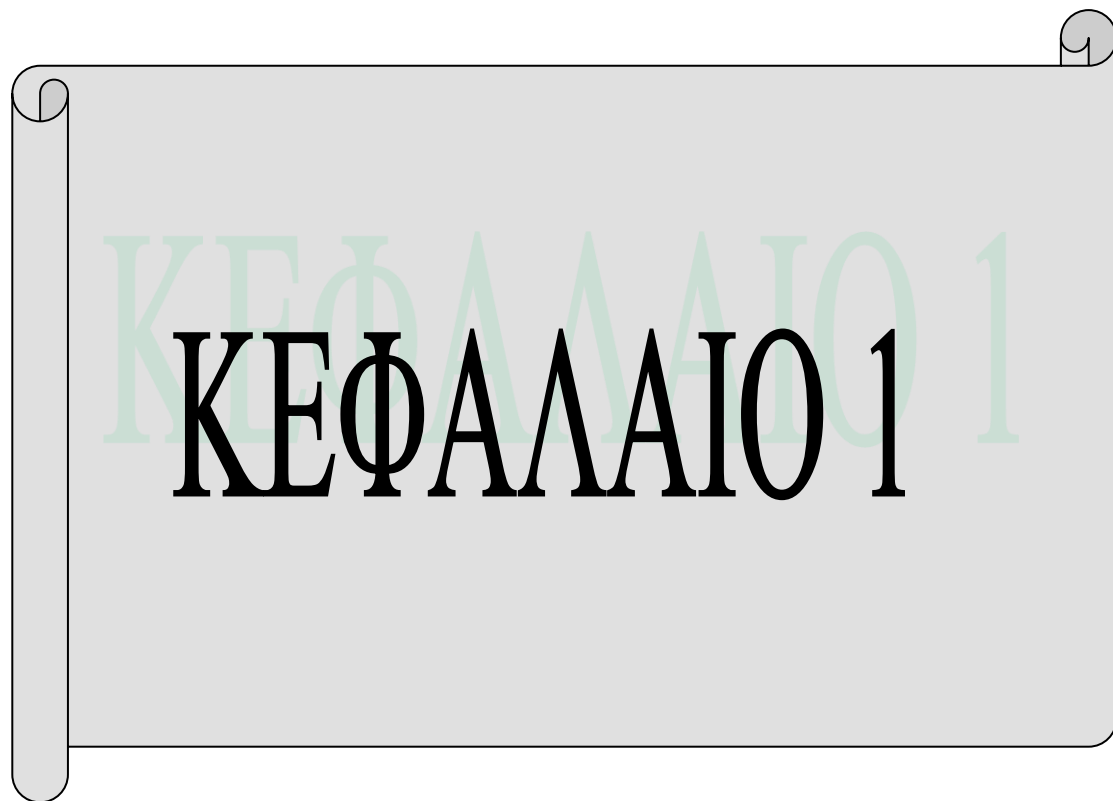
- α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.
- β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

16. Σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

- α. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.
 - i. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;
 - ii. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;
- β. Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Β' ΜΕΡΟΣ



1.1 Ισότητα τριγώνων

****Υπενθυμίσεις:**

Κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι **οι πλευρές και οι γωνίες του**.

Είδη τριγώνων με βάση τις πλευρές:

- 1) Ισόπλευρο (Το τρίγωνο που όλες οι πλευρές είναι ίσες)
- 2) Ισοσκελές (Το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες)
- 3) Σκαληνό (Το τρίγωνο που όλες οι πλευρές είναι άνισες)

Είδη τριγώνων με βάση την γωνία:

- 1) Ορθογώνιο (Το τρίγωνο που έχει μία ορθή γωνία)
- 2) Αμβλυγώνιο (Το τρίγωνο που έχει μία αμβλεία γωνία)
- 3) Οξυγώνιο (Το τρίγωνο που όλες οι γωνίες είναι οξείες)

Δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου.

1) **Διάμεσος:** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους που διέρχονται από το ίδιο σημείο (Βαρύκεντρο)

2) **Ύψος:** είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μια κορυφή προς την απέναντι πλευρά. Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη που διέρχονται από το ίδιο σημείο (ορθόκεντρο)

3) **Διχοτόμος:** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που φέρω από μια κορυφή προς την απέναντι πλευρά και χωρίζει την γωνία σε δυο ίσες γωνίες. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους που διέρχονται από το ίδιο σημείο (έγκεντρο)

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι :

- 1) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- 2) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και ύψος και διχοτόμος.

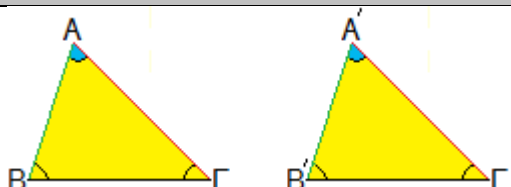
Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

- 1) Κάθε διάμεσος είναι και ύψος και διχοτόμος.
- 2) Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

➤ Δυο τρίγωνα λέγονται ίσα όταν έχουν όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

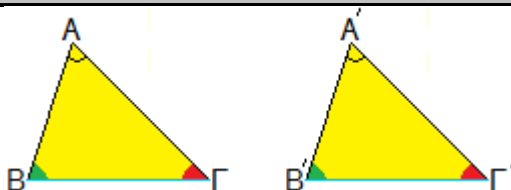
- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουν όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες τους ίσες μια προς μία.
- Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα χρησιμοποιούμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων που είναι τα εξής:

1. (Π – Γ – Π) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση τότε είναι ίσα.



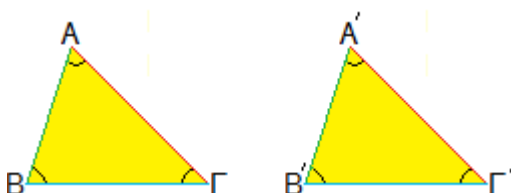
Τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι ίσα διότι έχουν: $AB = A'B'$, $AG = A'G'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$

2. (Γ – Π – Γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στη πλευρά αυτή γωνίες ίσες μια προς μία τότε είναι ίσα



Τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι ίσα διότι έχουν: $BΓ = B'Γ'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

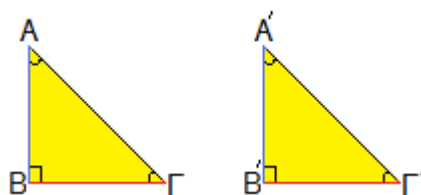
3. (Π – Π – Π) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.



Τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι ίσα διότι έχουν: $AB = A'B'$, $BΓ = B'Γ'$ και $AG = A'G'$

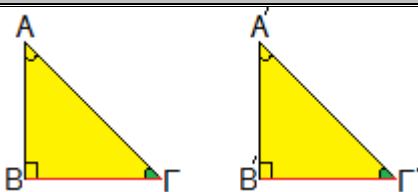
- Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων:

1. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μια προς μία τότε είναι ίσα.



Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα διότι : $AB = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$

2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση μια προς μια τότε είναι ίσα.



Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα διότι : $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Στις ασκήσεις για να δείξουμε ότι δύο γωνίες είναι ίσες ψάχνουμε για **κατακορυφήν** γωνίες ή για γωνίες που **βρίσκονται εκτός ή εντός παράλληλων ευθειών**.
- **Μεσοκάθετος** είναι η ευθεία που διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος και είναι κάθετη σε αυτό.
- Χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου είναι ότι **ισαπέχει** από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ανήκει πάνω στη μεσοκάθετό του.
- Σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουν όλα τα στοιχεία του ίσα (ίσες πλευρές ίσες γωνίες)
- **Διχοτόμος**: είναι το ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζει την γωνία σε δυο ίσες γωνίες.
- Χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου είναι ότι ισαπέχει από τις πλευρές της.
- Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τις πλευρές μιας γωνίας ανήκει στη **διχοτόμο** της.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι $BD = GE$. Να δείξετε ότι και το ADE είναι ισοσκελές.

Λύση

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα διότι:

- $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση
- $BD = GE$ από υπόθεση
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως παραπληρωματικές γωνίες ίσων γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα. Επομένως

$AD = AE$. Επομένως το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.



2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να φέρετε την διχοτόμο

BD . Αν $\Delta E \perp B\Gamma$ να αποδείξετε ότι $AB = BE$

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και ΔEB είναι ίσα διότι:

- $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{\Delta}\hat{B}E$ διότι BD διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$
- DB κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα. Επομένως $AB = BE$

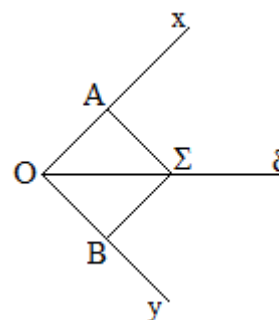
3. Στο παρακάτω σχήμα η OD είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}y$. Αν $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου να αποδείξετε ότι $\Sigma A = \Sigma B$

Λύση

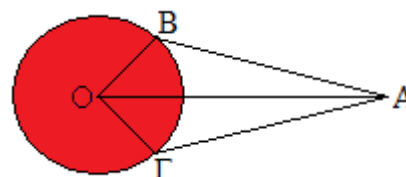
Τα τρίγωνα OAS και OSB είναι ίσα διότι:

- $\Sigma\hat{O}A = \Sigma\hat{O}B$ διότι OS διχοτόμος της γωνίας $\hat{O}$
- OS κοινή πλευρά
- $OA = OB$ από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα. Επομένως $\Sigma A = \Sigma B$



4. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το



σημείο O . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα.

Λύση

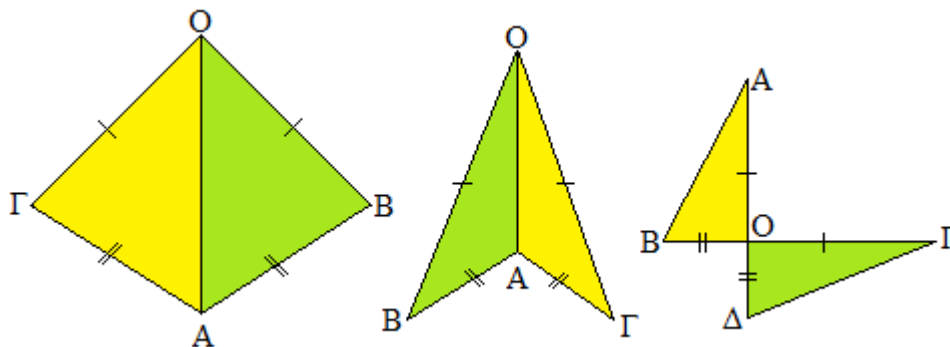
Τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα διότι:

- i. OA κοινή πλευρά
- ii. $OB = OG$ ως ακτίνες κύκλου.
- iii. $OG = OB$ από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα .

Ασκήσεις για εξάσκηση

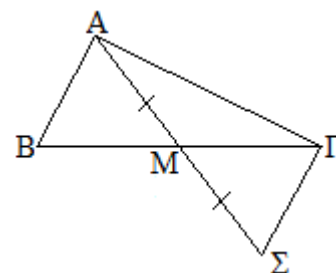
1. Να συγκρίνετε τα παρακάτω τρίγωνα:



2. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=AG) και να συγκρίνετε:

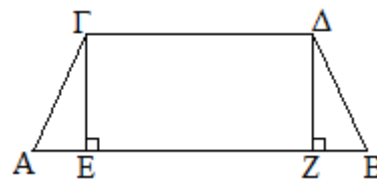
- α) Τις διαμέσους BZ και ΓΕ
- β) Τα ύψη BK και ΓΛ
- γ) Τις διχοτόμους BM και ΓN

3. Δίνετε τρίγωνο ABΓ και φέρνουμε την διάμεσο AM την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα MΣ = AM να δείξετε ότι:



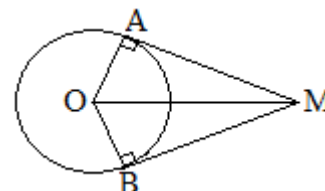
- α) Τα τρίγωνα ABM και ΣΓM είναι ίσα .
- β) Τα τμήματα AB και ΣΓ είναι ίσα .
- γ) Ισχύει η σχέση $AM < \frac{AB + AG}{2}$ (Υπόδειξη: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δυο πλευρών του)

4. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) φέρνουμε τα ύψη ΓΕ και ΔΖ .



- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΔΖ
- β) Ομοίως τα τμήματα ΑΕ και ΖΒ
- γ) Να δείξετε ότι : $AE = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}$

5. Από τα σημεία M φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA και MB του κύκλου (O, R) . Να δείξετε ότι MA = MB και ότι η OM διχοτομεί την γωνία $\widehat{AMB}$



6. Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλόγραμμου είναι ίσες.
7. Αν δύο χορδές κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματα τους είναι ίσα.

8. Αν δύο χορδές κύκλου έχουν ίσα αποστήματα, να αποδείξετε ότι και οι χορδές είναι ίσες.
9. Αν δύο οξυγώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και ίσα ύψη που αντιστοιχούν στις τρίτες πλευρές, να αποδείξετε ότι είναι ίσα.
10. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές AB , $B\Gamma$ και ΓA προς τις κορυφές B , Γ και A αντίστοιχα. Στις προεκτάσεις αυτές παίρνουμε τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα $B\Delta$, ΓE και AZ αντίστοιχα. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΔEZ .
11. Στις πλευρές Ox και Oy μιας γωνίας $\hat{xOy}$ παίρνουμε τα σημεία A και B αντίστοιχα με $OA = OB$. Για οποιοδήποτε σημείο M της διχοτόμου Od της $\hat{xOy}$ να αποδείξετε ότι:
 - (α) $MA = MB$
 - (β) $AG = B\Delta$, όπου Γ και Δ τα σημεία τομής των ημιευθειών AM και BM με τις Ox και Oy αντίστοιχα.
 - (γ) $M\Gamma = M\Delta$ και $B\Gamma = A\Delta$
12. Να αποδείξετε ότι οι δύο κορυφές ενός τριγώνου ισαπέχουν από την διάμεσο που φέρουμε από την τρίτη κορυφή.
13. Προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA ενός τριγώνου $AB\Gamma$, προς το μέρος του A , κατά ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle A\Delta\epsilon$.
14. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου $A\Delta$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ισαπέχει από τα άκρα της βάσης $B\Gamma$.
15. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να αποδείξετε ότι τα ύψη από τις κορυφές B και Γ είναι ίσα.
16. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι από τις κορυφές B και Γ είναι ίσες.
17. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι από τις κορυφές B και Γ είναι ίσοι.
18. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έξω από αυτό σχηματίσουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, ABZ και $A\Gamma E$. Ανα αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι

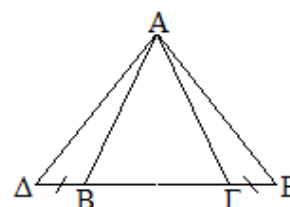
ισοσκελές.

19. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να πάρετε δύο σημεία E και Z της διχοτόμου AD και να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BEZ και ΓEZ είναι ίσα.
20. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση.
21. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τα άκρα της βάσης.
22. Αν μια ευθεία ϵ διέρχεται από το μέσο M ενός ευθυγράμμου τμήματος AB και δεν είναι κάθετη σ' αυτό, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ισαπέχουν από την ευθεία ϵ .

23. Να αποδείξετε ότι δύο σημεία χορδής κύκλου, που είναι συμμετρικά ως προς το μέσο της, ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου.

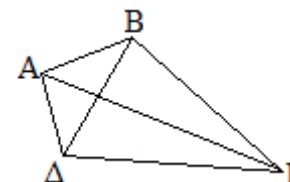
24. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές .

Αν $BD = \Gamma E$ να δείξετε ότι τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.



25. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και την $A\Gamma$ διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι:

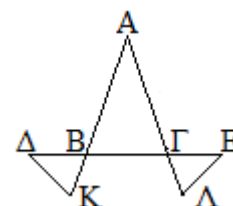
- α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β) Η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της διαγωνίου $B\Delta$.



26. Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και διαμέσους $BM, B'M'$ ίσες να αποδείξετε ότι:

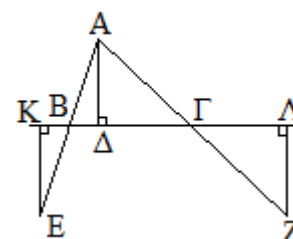
- α) $\hat{A} = \hat{A}'$
- β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

27. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή A , $BD = \Gamma E$ και $\Delta K \perp AB, E\Lambda \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα Δ , E ισαπέχουν από τις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα.



28. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Αν $BE = AB, \Gamma Z = A\Gamma$ και $E\Delta \perp B\Gamma, Z\Lambda \perp B\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

- α) $E\Delta = A\Delta$
- β) Τα σημεία E και Z ισαπέχουν από την βάση $B\Gamma$.



1.2 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

- Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων:

Ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι το

$$\text{κλάσμα } \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda \text{ και ισχύει ότι : } AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$$

- Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους αν έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

- Τα ευθύγραμμα τμήματα α , β είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα γ , δ

$$\text{όταν ισχύει η σχέση αναλογίας : } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

- Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ Οι όροι α , δ ονομάζονται **άκροι**

όροι ενώ οι όροι β , γ ονομάζονται **μέσοι όροι** .

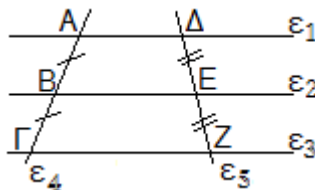
- Ιδιότητες αναλογιών:

$$\begin{array}{l} 1. \text{ Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \\ 2. \text{ Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \\ 3. \text{ Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \end{array}$$

- **Παράλληλες** ονομάζονται οι ευθείες που δεν τέμνονται.

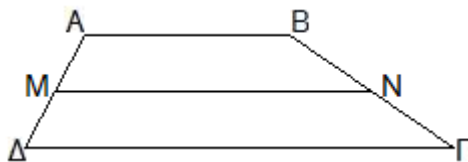
- Ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών:

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη τις τέμνει.



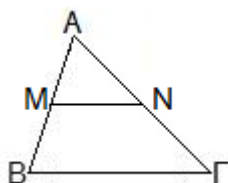
Με βάση την παραπάνω πρόταση ισχύει ότι:

1. Αν σε ένα τραπέζιο από το μέσο M μιας εκ των μη παράλληλων πλευρών του φέρουμε παράλληλη ευθεία προς τις βάσεις τότε αυτή θα διέρχεται από το μέσο N της άλλης μη παράλληλης πλευράς.



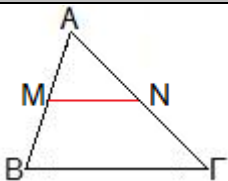
Δηλαδή αν M μέσο της AD και $MN \parallel \Delta\Gamma$ τότε το N θα είναι μέσο της $B\Gamma$.

2. Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά τότε αυτή θα διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς.



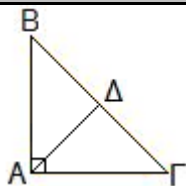
Αν M μέσο της πλευράς AB και $MN \parallel B\Gamma$ τότε N μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

3. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Αν M, N τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα τότε $MN \parallel B\Gamma$ και $MN = \frac{B\Gamma}{2}$

4. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



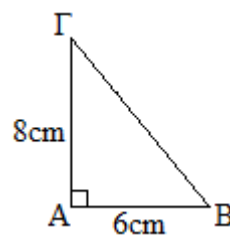
Αν AD διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $AD = \frac{B\Gamma}{2}$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος να βρείτε τους λόγους :

α) $\frac{AB}{AG}$ β) $\frac{BG}{AB}$ γ) $\frac{AG}{BG}$

Λύση



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα βρούμε την πλευρά ΒΓ. $BG^2 = AB^2 + AG^2 \Leftrightarrow$

$$BG^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow$$

$$BG^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow$$

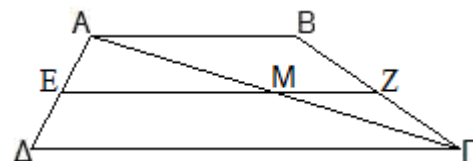
$$BG^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{BG^2} = \sqrt{100} \Leftrightarrow$$

$$BG = 10$$

α) $\frac{AB}{AG} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{BG}{AB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ γ) $\frac{AG}{BG} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

2. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ φέρουμε την διαγώνιο ΑΓ .Απο το μέσο Μ της διαγωνίου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις ΑΒ , ΓΔ του τραpezίου που τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ .



Λύση

Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι :

- i. Το Μ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ
- ii. $EM \parallel \Delta\Gamma$

Από την πρόταση 2 το Ε θα είναι μέσο της πλευράς ΑΔ.

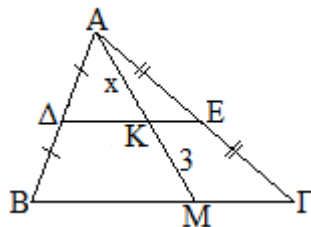
Στο τρίγωνο ΑΓΒ έχουμε ότι :

- i. Το Μ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ
- ii. $MZ \parallel AB$

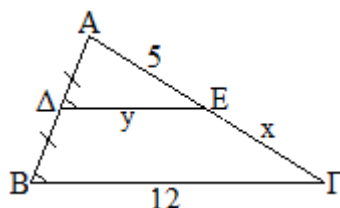
Από την πρόταση 2 το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΒΓ.

Ασκήσεις για εξάσκηση

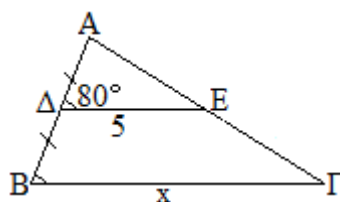
1. Να διαιρεθεί το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ = 5cm$ σε 3 ίσα τμήματα.
2. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x .



3. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{A\Delta E}$. Να υπολογίσετε το x και το y .



4. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε την γωνία $\hat{B}$ και το x .



5. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα μέσα M, N των πλευρών $ΒΓ, ΓΑ$ αντίστοιχα. Η παράλληλη από το μέσο E της διαμέσου $ΑΜ$ προς την MN τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

(α) $A\Delta = \frac{1}{4} A\Gamma$

(β) $\Delta E \parallel AB$

(γ) $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{4}$

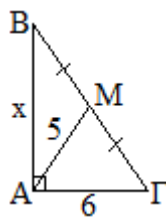
6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ φέρουμε τη διάμεσο $ΑΜ$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΜΑΒ$ είναι ισόπλευρο και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.

7. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου με πλευρές τα μισά των διαγωνίων του $ΑΒΓΔ$.
8. Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$, να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔM και BN διαιρούν τη

διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΒΜΔΝ;

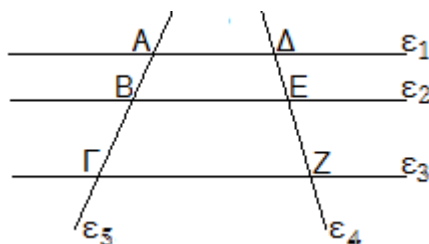
9. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x



1.3 Θεώρημα του Θαλή

➤ Θεώρημα:

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνονται από δύο άλλες ευθείες τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα με αυτά που ορίζονται στην άλλη.



Ισχύει ότι: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

** Παρατηρήσεις

- Σε ένα τρίγωνο αν έχουμε ότι $\Delta E // B\Gamma$ τότε ισχύουν οι λόγοι :

$\frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ και αντίστροφα δηλαδή αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι

λόγοι $\frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ τότε $\Delta E // B\Gamma$.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Delta E = 8 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 13 \text{ cm}$

Να υπολογίσετε τα

α , β , γ και δ .

Λύση

Παρατηρούμε ότι :

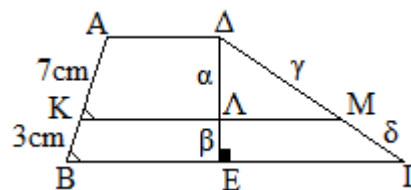
- $A\Delta // K\Lambda // BE$

Από θεώρημα Θαλή θα ισχύουν οι λόγοι :

$$\frac{AK}{\Delta\Lambda} = \frac{KB}{\Lambda E} = \frac{AB}{\Delta E}$$

Επομένως ισχύει : $\frac{AK}{\Delta\Lambda} = \frac{AB}{\Delta E} \Leftrightarrow$

$$\frac{7}{\alpha} = \frac{10}{8} \Leftrightarrow$$



$$10\alpha = 7 \cdot 8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{10\alpha}{10} = \frac{56}{10} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5,6 \text{ cm}$$

$$\Lambda\text{E} = \Delta\text{E} - \Delta\Lambda = 8 - 5,6 = 2,4 \text{ cm} \text{ άρα } \beta = 2,4 \text{ cm}$$

$$\bullet \quad \Lambda\Delta // \text{KM} // \text{B}\Gamma$$

Από θεώρημα Θαλή θα ισχύουν οι λόγοι :

$$\frac{\text{AK}}{\Delta\text{M}} = \frac{\text{KB}}{\text{M}\Gamma} = \frac{\text{AB}}{\Delta\Gamma}$$

$$\text{Επομένως ισχύει : } \frac{\text{AK}}{\Delta\text{M}} = \frac{\text{AB}}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{10} = \frac{\gamma}{13} \Leftrightarrow$$

$$10\gamma = 7 \cdot 13 \Leftrightarrow$$

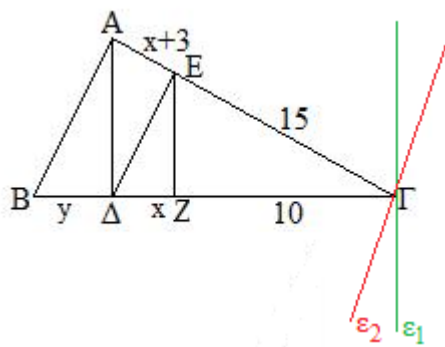
$$10\gamma = 91 \Leftrightarrow$$

$$\frac{10\gamma}{10} = \frac{91}{10} \Leftrightarrow$$

$$\gamma = 9,1 \text{ cm}$$

$$\text{M}\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta\text{M} = 13 - 9,1 = 3,9 \text{ cm} \text{ Άρα } \delta = 3,9 \text{ cm.}$$

2. Στο τρίγωνο ABΓ είναι ΕΔ // AB και ΕΖ // ΑΔ να υπολογίσετε τα x και γ .



Λύση

• Φέρουμε $\varepsilon_1 // \text{EZ} // \text{A}\Delta$ Από Θεώρημα Θαλή ισχύουν οι λόγοι:

$$\frac{\text{E}\Gamma}{\text{Z}\Gamma} = \frac{\text{A}\text{E}}{\Delta\text{Z}} = \frac{\text{A}\Gamma}{\Delta\Gamma} \text{ Επομένως ισχύει : } \frac{\text{E}\Gamma}{\text{Z}\Gamma} = \frac{\text{A}\text{E}}{\Delta\text{Z}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{15}{10} &= \frac{x+3}{x} \Leftrightarrow \\ 15x &= 10(x+3) \Leftrightarrow \\ 15x &= 10x+30 \Leftrightarrow \\ 15x-10x &= 30 \Leftrightarrow \\ \frac{5x}{5} &= \frac{30}{5} \Leftrightarrow \\ x &= 6\end{aligned}$$

Άρα $AE = 6 + 3 = 9$ και $\Delta Z = 6$

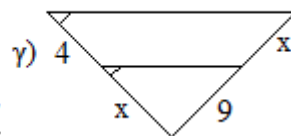
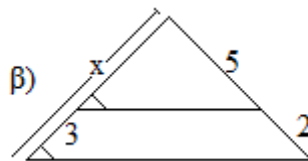
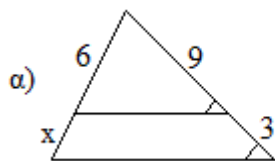
- Φέρουμε $\varepsilon_2 // E\Delta // AB$ Από Θεώρημα Θαλή ισχύουν οι λόγοι:

$$\frac{E\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{AE}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \text{ Επομένως ισχύει : } \frac{E\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{AE}{B\Delta} \Leftrightarrow$$

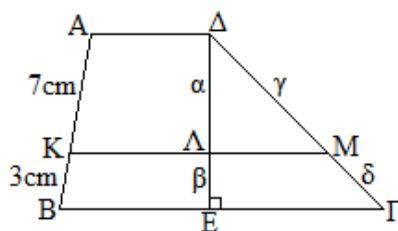
$$\begin{aligned}\frac{15}{16} &= \frac{9}{y} \Leftrightarrow \\ 15y &= 16 \cdot 9 \Leftrightarrow \\ \frac{15y}{15} &= \frac{144}{15} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{144}{15} = \frac{36}{5}\end{aligned}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

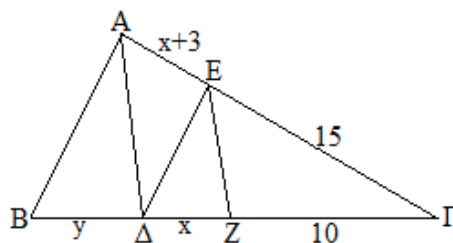
1. Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω σχήματα:



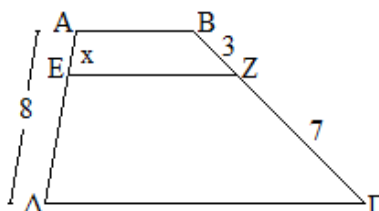
2. Στο παρακάτω τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Delta E = 8cm$ και $\Delta\Gamma = 13cm$ να υπολογίσετε τα α , β , γ και δ .



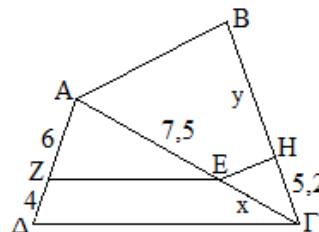
3. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $E\Delta // AB$ και $EZ // A\Delta$. Να υπολογίσετε τα x και y .



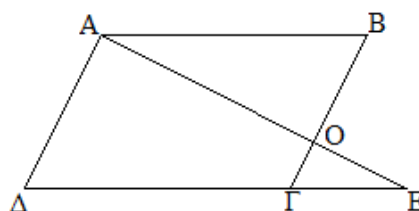
4. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η EZ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το x .



5. Στο διπλανό σχήμα είναι $EZ // \Gamma\Delta$ και $EH // AB$ να υπολογίσετε το x και το y .



6. Το διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Αν $O\Gamma = 6$, $A\Delta = 18$ και $O\epsilon = 13$ να υπολογίσετε το μήκος των OB και OA .



1.4 Ομοιοθεσία

- Ένα σημείο Β ονομάζεται ομοιόθετο ενός άλλου σημείου Α με κέντρο ομοιοθεσίας το Ο και λόγο λ όταν ανήκει πάνω ($\lambda < 1$) ή στην προέκταση ($\lambda > 1$) της ημιευθείας ΟΑ και ισχύει ότι $OB = \lambda \cdot OA$
- Ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζουμε την διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο Ο.
- Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.
- Οι ομοιόθετες γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες.
- Αν το πολύγωνο Π_1 είναι ομοιόθετο του πολυγώνου Π με λόγο λ τότε ισχύει ότι:
 1. Αν $\lambda > 1$ τότε το Π_1 είναι μεγέθυνση του Π.
 2. Αν $\lambda < 1$ τότε το Π_1 είναι σμίκρυνση του Π.
 3. Αν $\lambda = 1$ τότε το Π_1 είναι ίσο με το Π.
- Το ομοιόθετο ενός κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ με κέντρο ομοιοθεσίας το Ο και λόγο λ είναι ένας νέος κύκλος με κέντρο K_1 και ακτίνα ρ_1 και ισχύει ότι :
 $\rho_1 = \lambda \cdot \rho$.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$ να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του .

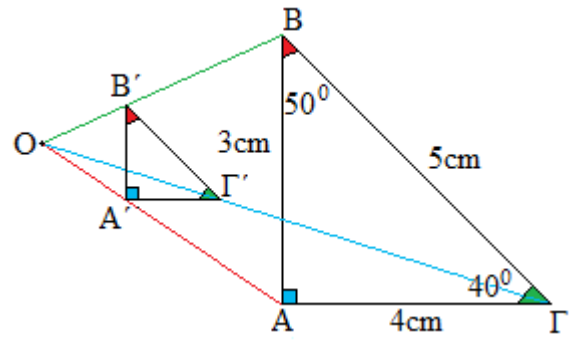
Λύση

Φέρουμε τις ημιευθείες ΟΑ , ΟΒ , ΟΓ και πάνω σε αυτές παίρνουμε τα σημεία Α' , Β' , Γ' αντίστοιχα , ώστε $OA' = \frac{1}{3}OA$, $OB' = \frac{1}{3}OB$ και $OG' = \frac{1}{3}OG$.Τα Α' , Β' , Γ' είναι τα ομοιόθετα των Α , Β , Γ αντίστοιχα .

Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$

έχουμε ότι :

- $B'\Gamma' = \frac{1}{3}B\Gamma = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3} \text{ cm}$
- $A'B' = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{3}{3} = 1 \text{ cm}$
- $A'\Gamma' = \frac{1}{3}A\Gamma = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3} \text{ cm}$
- $B' = 50^\circ$, $A' = 90^\circ$, $\Gamma' = 40^\circ$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις $\alpha = 2cm$ και $\beta = 3cm$. Να κατασκευάσετε το ομοιόθετό του με κέντρο A και λόγο :
α) $\lambda = \frac{1}{2}$ και β) $\lambda = 2$
2. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με βάση $B\Gamma = 2cm$ και ίσες πλευρές $AB = A\Gamma = 4cm$. Με κέντρο την κορυφή A και λόγο $\lambda = \frac{3}{4}$ να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ABΓ και να υπολογίσετε τις πλευρές του.
3. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο ενός κύκλου (O, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας O και λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$.
4. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο ενός τριγώνου ABΓ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ και κέντρο ομοιοθεσίας :
 - α) Το σημείο A.
 - β) Ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
 - γ) Ένα εξωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.

1.5 ΟμοιότηταA. Όμοια Πολύγωνα

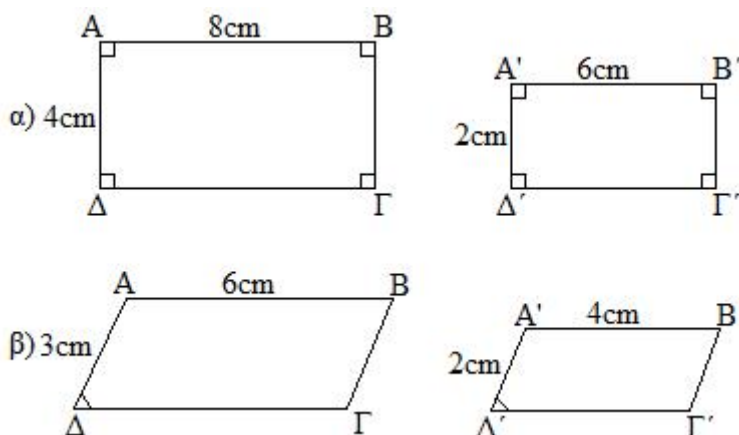
- Δύο πολύγωνα Π_1 και Π λέγονται όμοια όταν το ένα είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου ή είναι ίσα.
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.
- Δύο πολύγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια.
- Ο λόγος των περιμέτρων δύο οποίων πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.
- Δύο κανονικά πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών είναι μεταξύ τους όμοια.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να δείξουμε ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια θα πρέπει να δείξουμε ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες και ότι οι πλευρές τους είναι ανάλογες.
- Οι αντίστοιχες ανάλογες πλευρές λέγονται ομόλογες.
- Ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών ονομάζεται λόγος ομοιότητας των πολυγώνων.
- Τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια
- Τα τετράγωνα είναι μεταξύ τους όμοια.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να εξετάσετε ως προς την ομοιότητα τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' στις παρακάτω περιπτώσεις και σε όσες περιπτώσεις είναι όμοια να βρείτε τον λόγο ομοιότητάς τους .



Λύση

α) Ισχύει ότι : $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}', \hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Επειδή $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} \neq \frac{AB}{A'B'}$ τα παραλληλόγραμμα δεν είναι όμοια .

β) Ισχύει ότι : $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}', \hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Επειδή $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{3}{2}$ τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

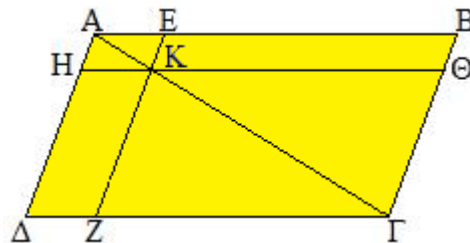
2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι

$$AK = \frac{1}{4} AG, \quad EZ // AD \text{ και } H\Theta // AB.$$

Να αποδείξετε ότι α) το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.

β) το παραλληλόγραμμο

ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΚΘΓΖ



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι :

- $AK = \frac{1}{4} AG \Leftrightarrow \frac{AK}{AG} = \frac{1}{4}$
- Στο τρίγωνο ΑΒΓ $EK // BG$ άρα ισχύουν οι λόγοι $\frac{AK}{AG} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$
- Επίσης ισχύει ότι $HK = AE$ και $AH = EK$

Επομένως τα παραλληλόγραμμα ΑΕΚΗ και ΑΒΓΔ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

- $\hat{A}$ είναι κοινή για τα δύο παραλληλόγραμμα.

Επομένως θα έχουν και όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία. Άρα τελικά είναι όμοια.

β) Παρατηρούμε ότι :

- $H\hat{K}E = Z\hat{K}\Theta$ ως κατακορυφήν

Επομένως θα έχουν και όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

- Επειδή $AK = \frac{1}{4} AG$ θα έχουμε ότι $KG = \frac{3}{4} AG$ άρα $AK = \frac{1}{3} KG \Leftrightarrow$

$$\frac{AK}{KG} = \frac{1}{3}$$

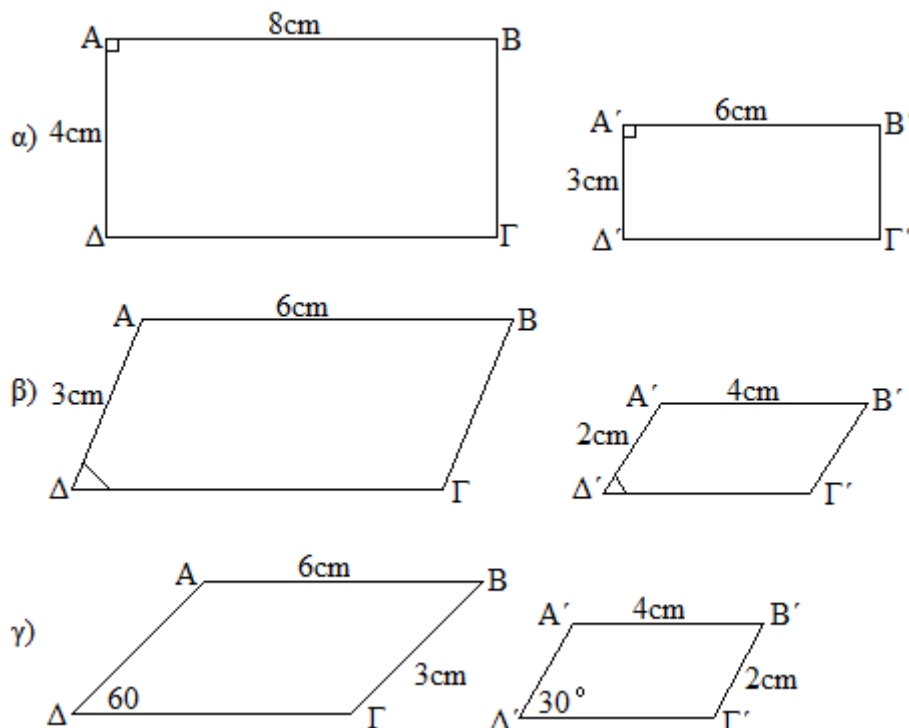
- Επειδή $AE = \frac{1}{4} AB$ θα έχουμε ότι $EB = \frac{3}{4} AB$ άρα $AE = \frac{1}{3} EB \Leftrightarrow$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$$

Επομένως τα παραλληλόγραμμα ΑΕΚΗ και ΚΘΓΖ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Άρα τελικά είναι όμοια.

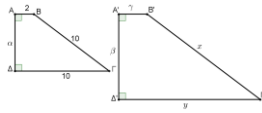
Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Σε ποιες περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

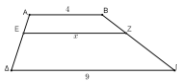


2. Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν $\hat{A} = \hat{E}$ και $\frac{AB}{AD} = \frac{EZ}{EH}$. Να δείξετε ότι είναι όμοια.
3. Δίνονται τα ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ. Να τα εξετάσετε ως προς την ομοιότητα, και αν είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $AB=14\text{ cm}$, $AD=14\text{ cm}$, $KL=7\text{ cm}$, $KM=4\text{ cm}$
- β) $AB=16\text{ cm}$, $AD=10\text{ cm}$, $KL=9\text{ cm}$, $KM=6\text{ cm}$
4. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ. Να τα εξετάσετε ως προς την ομοιότητα, και αν είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $AB=5\text{ cm}$, $AD=7\text{ cm}$, $KL=15\text{ cm}$, $KM=21\text{ cm}$ και $A=K=100^\circ$
- β) $AB=6\text{ cm}$, $AD=8\text{ cm}$, $KL=3\text{ cm}$, $KM=4\text{ cm}$ και $A=K=110^\circ$

5. Δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{5}$. Αν η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι ίση με 36 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του ΚΛΜΝ.
6. Αν τα τραπέζια, ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$, να υπολογιστούν τα μήκη α, β, γ, x και y.



7. Αν τα τραπέζια ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ είναι όμοια, να υπολογίσετε το μήκος x.



8. Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου τέμνονται στο σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι αν ενώσουμε τα μέσα των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ τότε το σχήμα που προκύπτει είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.

Β. Όμοια τρίγωνα

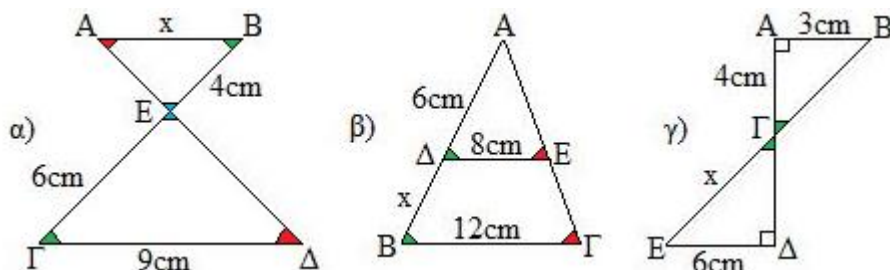
- Δύο τρίγωνα θα λέγονται όμοια όταν έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μια προς μία.
- Τα όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.
- Όταν δύο τρίγωνα είναι όμοια έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να δείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια αρκεί να δείξουμε ότι έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες.
- Για να δείξουμε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια αρκεί να δείξουμε ότι έχουν μία οξεία γωνία ίση μεταξύ τους.
- Ο λόγος ομοιότητας δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το x στις περιπτώσεις:



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABE και ΕΓΔ είναι όμοια διότι :

- i. $\hat{A} = \hat{\Gamma}$
- ii. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- iii. $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$

$$\text{Άρα ισχύουν οι λόγοι : } \frac{AE}{E\Delta} = \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$$

$$\text{Επομένως ισχύει : } \frac{EB}{\Gamma E} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow$$

$$6x = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{36}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = 6$$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι :

i. $\hat{A}$ κοινή γωνία

ii. $\hat{\Delta} = \hat{B}$

iii. $\hat{E} = \hat{\Gamma}$

Άρα ισχύουν οι λόγοι : $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$

Επομένως ισχύει : $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \Leftrightarrow$

$$\frac{6}{x+6} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow$$

$$8(x+6) = 6 \cdot 12 \Leftrightarrow$$

$$8x + 48 = 72 \Leftrightarrow$$

$$8x = 72 - 48 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{24}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = 3$$

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια διότι :

i. $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

ii. $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ ως κατακορυφήν

Άρα ισχύουν οι λόγοι : $\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = \frac{ΓΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΕΔ}$

Επομένως ισχύει : $\frac{ΑΒ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΓΔ} \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{y} \Leftrightarrow$$

$$3y = 6 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{24}{3} \Leftrightarrow$$

$$y = 8$$

Άρα ΓΔ = 8 Το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ορθογώνιο από το Πυθαγόρειο θεώρημα

έχουμε ότι : $ΕΓ^2 = ΓΔ^2 + ΕΔ^2 \Leftrightarrow$
 $x^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow$

$$x^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow$$

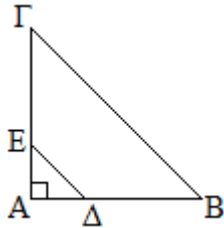
$$x^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{100} \Leftrightarrow$$

$$x = 10$$

2. Στις κάθετες πλευρές $AB = 8 \text{ cm}$ και $AG = 12 \text{ cm}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και E ώστε $A\Delta = 2 \text{ cm}$ και $AE = 3 \text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι : α) $\Delta E \parallel B\Gamma$

β) Τα τρίγωνα ΔDE , $AB\Gamma$ είναι όμοια.



Λύση

α) Παίρνουμε τους λόγους : $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{8}{2} = 4$

$$\frac{AG}{AE} = \frac{12}{3} = 4$$

Άρα ισχύει : $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{AG}{AE} = 4$ Επομένως ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$

β) Τα τρίγωνα ΔDE , $AB\Gamma$ είναι όμοια διότι :

i. $\hat{A} = 90^\circ$ είναι κοινή και για τα δυο τρίγωνα.

ii. $\hat{\Delta} = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες.

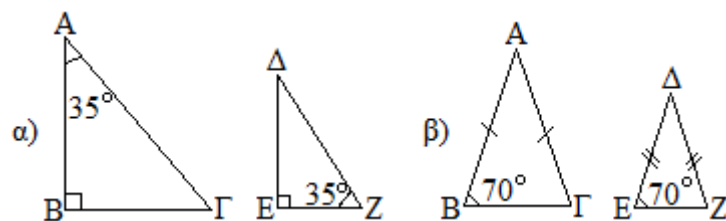
Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Απαντήστε γράφοντας Σ αν είναι σωστή και Λ αν είναι λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:
 - Δύο ίσα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
 - Δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα.
 - Το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο όμοια τρίγωνα.
2. Ποια από τα παρακάτω επίπεδα σχήματα είναι πάντοτε όμοια; Γράψτε, εφ' όσον είναι όμοια, το λόγο ομοιότητας τους.
 - Ορθογώνια
 - Κύκλοι
 - Ισόπλευρα τρίγωνα
 - Παραλληλόγραμμα
 - Κανονικά πολύγωνα
3. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδό του ΚΛΜ αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι 20 cm^2 .
4. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 4, 5, 6 cm αντίστοιχα. Σε ένα όμοιο τρίγωνο η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη είναι 4 cm. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του δεύτερου τριγώνου καθώς και το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.
5. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διπλάσιες από τις κάθετες πλευρές ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου. Να δείξετε ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.
6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι κάθετες πλευρές του είναι $AB = 9 \text{ cm}$, $AG = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} AG$.
 - (α) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ, ΑΕ, ΔΕ και ΒΓ.
 - (β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.
 - (γ) Οι ευθείες ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες.

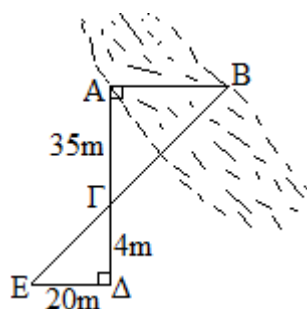
7. Κάποια χρονική στιγμή η σκιά ενός δένδρου στο οριζόντιο έδαφος είναι 14 m . Την ίδια χρονική στιγμή ένα κατακόρυφο ραβδί μήκους 4 m έχει σκιά 7 m . Να υπολογίσετε το ύψος του δένδρου.
8. Από σημείο Δ της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε.
(α) Να δείξετε ότι τα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι όμοια.
(β) Αν $ΒΔ = 3 \text{ cm}$, $ΔΓ = 7 \text{ cm}$, $ΔΕ = 4 \text{ cm}$ να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και το μήκος του ΒΕ.
9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($Α=90^0$) και το ύψος του ΑΔ.Ν αποδείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια
α) ΑΒΔ, ΑΒΓ
β) ΑΒΓ, ΑΔΓ
γ) ΑΒΔ, ΑΔΓ
Σε κάθε περίπτωση να γράψετε τους ίσους λόγους των ομολόγων πλευρών.
10. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{ΒΑ}{ΕΔ} = \frac{2}{5}$. Αν είναι $ΑΒ=8\text{cm}$, $ΒΓ=10\text{cm}$ και $ΓΑ=12\text{cm}$ να υπολογίσετε τις πλευρές του ΔΕΖ.
11. Από τυχαίο σημείο Κ της υποτείνουσας ΒΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε κάθετη ΚΛ στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:
α)τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΓ είναι όμοια
β) $ΑΒ \cdot ΓΛ = ΛΚ \cdot ΒΓ$
12. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$), το σημείο τομής Ο των διαγωνίων και η παράλληλη από το Ο προς τη ΓΔ που τέμνει τις ΑΔ, ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α)τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΔΓ είναι όμοια
β)τα τρίγωνα ΒΟΖ και ΒΔΓ είναι όμοια
γ) $\frac{ΕΑ}{ΑΔ} = \frac{ΒΖ}{ΓΒ}$
δ) $ΟΕ=ΟΖ$

13. Να γράψετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο και να φέρετε τη διχοτόμο της γωνίας. Αν η διχοτόμος τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ και την πλευρά $B\Gamma$ στο K , τότε να αποδείξετε ότι: $\frac{B\Lambda}{A\Lambda} = \frac{K\Lambda}{B\Lambda}$

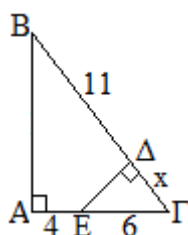
14. Να δείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και σε κάθε περίπτωση να γράψετε τους ίσους λόγους ή τις ίσες γωνίες που προκύπτουν από την ομοιότητα:



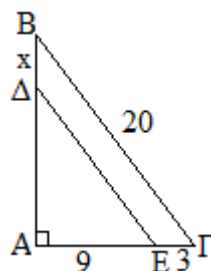
15. Για να υπολογίσουμε το πλάτος ενός ποταμού μετρήσαμε τις αποστάσεις $AG = 35m$ και $DE = 20m$. Να βρείτε το πλάτος x .



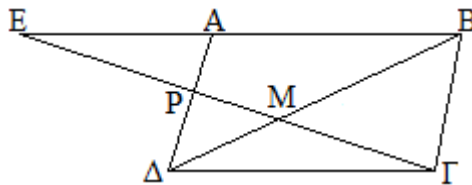
16. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $DE\Gamma$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x .



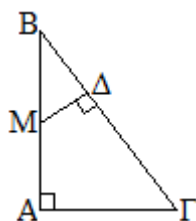
17. Αν $DE \parallel B\Gamma$ να υπολογίσετε το x .



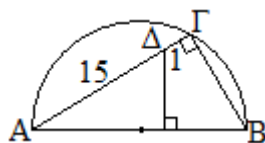
18. Το διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με $AB = 20\text{cm}$ και $B\Gamma = 8\text{cm}$. Αν $\frac{\Delta M}{MB} = \frac{1}{2}$ να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $P\Delta$ και AE .



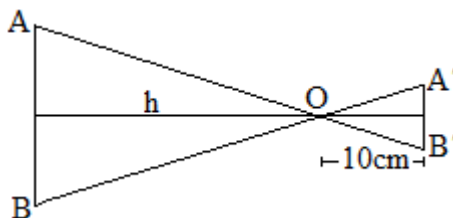
19. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Gamma = 10$ και $A\Gamma = 6$ και M μέσο του AB . Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου $MB\Delta$.



20. Στο παρακάτω σχήμα η AB είναι διάμετρος του ημικύκλιου με $AB = 20$, $A\Delta = 15$ και $\Delta\Gamma = 1$.
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
- β) Να υπολογίσετε το μήκος του OE .



21. Σε πόση απόσταση h πρέπει να τοποθετηθεί το αντικείμενο $AB = 1,5\text{m}$ ώστε το είδωλό του να είναι $A'B' = 1,5\text{cm}$;



1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

- Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ το συμβολίζουμε με : $(ΑΒΓ)$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω τρίγωνο είναι $ΔΕ // ΒΓ$ να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$

Λύση

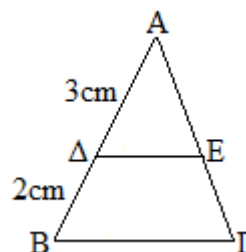
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι :

- i. $\hat{A}$ κοινή γωνία
- ii. $\hat{\Delta} = \hat{B}$
- iii. $\hat{E} = \hat{\Gamma}$

$$\text{Άρα ισχύουν οι λόγοι : } \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

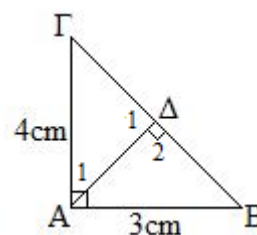
Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{3}{5}$

$$\text{Ο λόγος } \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$



2. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα . Να υπολογίσετε τους λόγους :

$$\alpha) \frac{(ΑΔΓ)}{(ΑΓΔ)} \quad \beta) \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΔ)}$$



Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα βρούμε την πλευρά ΒΓ. $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow$

$$ΒΓ^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$

$$ΒΓ^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{ΒΓ^2} = \sqrt{25} \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma = 5$$

Τα τρίγωνα $\Delta\Gamma\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια διότι :

i. $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$

ii. $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = \hat{A}_1$

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $\Delta\Gamma\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{4}{3}$

Ο λόγος ομοιότητας $\frac{(A\Delta\Gamma)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια διότι :

i. $\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$

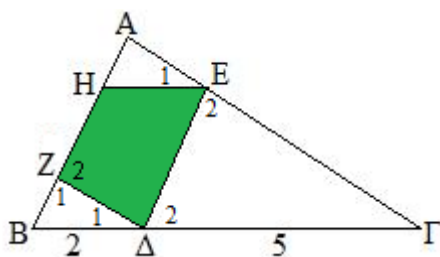
ii. $\hat{B}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{5}{3}$

Ο λόγος ομοιότητας $\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

3. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι $\Delta E // AB$, $\Delta Z // A\Gamma$ και $E H // B\Gamma$ να αποδείξετε ότι : α) $AH = BZ$

β) $(\Delta E H Z) = \frac{16}{49} (AB\Gamma)$



Λύση

α) Το τετράπλευρο $HEB\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο διότι $E H // B\Gamma$ και $E\Delta // HB$

Άρα $HE = B\Delta$.

Το τετράπλευρο $ZAED$ είναι παραλληλόγραμμο διότι $Z\Delta // A\Gamma$ και $E\Delta // AZ$

Άρα $AE = Z\Delta$.

$\hat{A} = \hat{Z}_1$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά των παράλληλων $A\Gamma$ και $Z\Delta$ που τέμνονται από την AB .

$\hat{B} = \hat{H}$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά των παράλληλων ΗΕ και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

Άρα και οι γωνίες $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$

Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΖΔΒ είναι ίσα διότι :

- i. $AE = Z\Delta$
- ii. $HE = B\Delta$
- iii. $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$

Άρα τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΖΔΒ είναι ίσα και όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα. Επομένως $AH = BZ$

β) Τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι:

- i. $\hat{B}$ κοινή
- ii. $\hat{Z}_1 = \hat{A}$

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΒΔΖ και ΑΒΓ είναι: $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{2}{7}$

Ο λόγος ομοιότητας των εμβαδών τριγώνων ΒΔΖ και ΑΒΓ είναι: $\frac{(B\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$

Άρα $\boxed{(B\Delta Z) = \frac{4}{49}(AB\Gamma)}$ 1.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΖΔΒ είναι ίσα θα ισχύει ότι :

$$\boxed{(AHE) = \frac{4}{49}(AB\Gamma)}$$
 2.

Τα τρίγωνα ΕΓΔ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι:

- i. $\hat{\Gamma}$ κοινή
- ii. $\hat{E}_2 = \hat{A}$

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΕΓΔ και ΑΒΓ είναι: $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{5}{7}$

Ο λόγος ομοιότητας των εμβαδών τριγώνων ΕΓΔ και ΑΒΓ είναι: $\frac{(E\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

Άρα $\boxed{(E\Gamma\Delta) = \frac{25}{49}(AB\Gamma)}$ 3.

Από το σχήμα έχουμε ότι :

$$(HE\Delta Z) = (AB\Gamma) - (AHE) - (BZ\Delta) - (E\Delta\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$(\text{HE}\Delta\text{Z}) = (\text{AB}\Gamma) - \frac{4}{49}(\text{AB}\Gamma) - \frac{4}{49}(\text{AB}\Gamma) - \frac{25}{49}(\text{AB}\Gamma) \Leftrightarrow$$

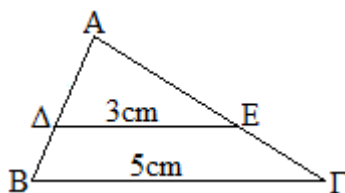
$$(\text{HE}\Delta\text{Z}) = \left(1 - \frac{4}{49} - \frac{4}{49} - \frac{25}{49}\right)(\text{AB}\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$(\text{HE}\Delta\text{Z}) = \left(\frac{49}{49} - \frac{33}{49}\right)(\text{AB}\Gamma) \Leftrightarrow$$

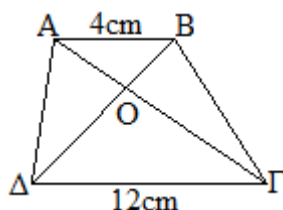
$$(\text{HE}\Delta\text{Z}) = \frac{16}{49}(\text{AB}\Gamma)$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\Delta E // B\Gamma$ να υπολογίσετε $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)}$

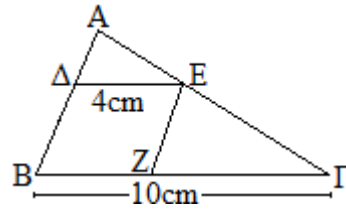


2. Ένα τρίγωνο έχει βάση 8 cm και εμβαδόν 20 cm^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός άλλου τριγώνου που είναι όμοιο με το ABΓ και έχει βάση 4 cm.
3. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου έχουν μήκη 15, 3, 9, 10 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις πλευρές ενός όμοιου τετραπλεύρου που έχει τετραπλάσιο εμβαδόν.
4. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου ABΓ, να αποδείξετε ότι:
- (α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.
- (β) Το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ABΓ.
5. Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου είναι $AB = 3 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 5 \text{ cm}$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ
- (α) Να αποδείξετε ότι τα ABΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.
- (β) Αν το τρίγωνο ΑΒΔ έχει εμβαδόν 9 cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΓΔ.
6. Δύο όμοια πολύγωνα έχουν εμβαδά 15 cm^2 και 135 cm^2 . Να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητας τους.
7. Έστω τρίγωνο ABΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τραπέζιο ΒΔΕΓ έχει τριπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο ΑΔΕ.
8. Στο παρακάτω τραπέζιο ABΓΔ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι 2 cm^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ.

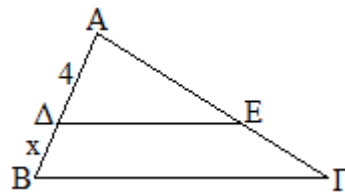


9. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\Delta E // B\Gamma$ και $EZ // AB$. Να υπολογίσετε τον λόγο

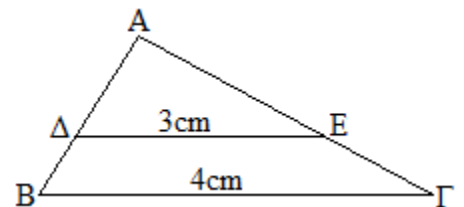
$$\frac{(\Delta \Delta E)}{(\Delta \Gamma Z)}.$$



10. Στο παρακάτω σχήμα είναι $9(\Delta B\Gamma) = 16(\Delta EZ)$. Να υπολογίσετε το x .



11. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E // B\Gamma$. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου $\Delta E\Gamma B$ είναι 7cm^2 να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta \Delta E$.





2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετης πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μίας γωνίας ω που σχηματίζει ένα σημείο

$M(x, y)$ με την αρχή των αξόνων και τον άξονα xx' όπου $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ ορίζονται

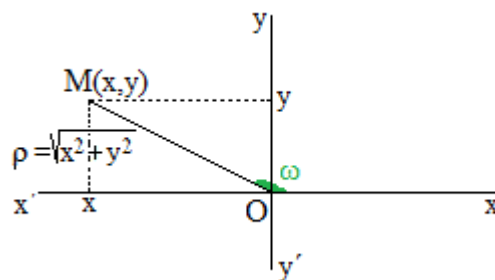
ως εξής:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{Τεταγμένη του σημείου } M}{\text{Τετμημένη του σημείου } M} = \frac{y}{x}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{Τεταγμένη του σημείου } M}{\text{Απόσταση του σημείου } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{Τετμημένη του σημείου } M}{\text{Απόσταση του σημείου } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

Με $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

Γωνία	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\varepsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

Γωνία	0°	90°	180°
ημω	0	1	0
συνω	1	0	-1
εφω	0	Δεν ορίζεται	0

➤ Αν η γωνία ω είναι οξεία τότε για έχουμε ότι : $x > 0, y > 0, \rho > 0$ άρα

$$\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \epsilon\phi\omega > 0$$

➤ Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε έχουμε ότι : $x < 0, y > 0, \rho > 0$ άρα

$$\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \epsilon\phi\omega < 0$$

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Το ημω μια γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.
- Στους τριγωνομετρικούς αριθμούς το ω αναφέρεται σε γωνία ενώ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημω , συνω , εφω είναι καθαροί αριθμοί.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{xOM}$ όταν:

$$\alpha) M(3, -4) \quad \beta) M(0, 5)$$

Λύση

α) Η τετμημένη του σημείου M είναι $x = 3$ και η τεταγμένη του σημείου M είναι

$$y = -4. \text{Θα υπολογίσουμε την απόσταση } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{έχουμε ότι } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Επομένως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{xOM}$ είναι :

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

β) Η τετμημένη του σημείου M είναι $x = 0$ και η τεταγμένη του σημείου M είναι

$$y = 5 \quad \text{Θα υπολογίσουμε την απόσταση } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

έχουμε ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$.

Επομένως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\angle xOM$ είναι :

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{5}{0} \text{ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ}$$

Κλάσμα με παρονομαστή το 0 δεν ορίζεται. Για αυτό δεν ορίζεται και η εφαπτομένη του σημείου M.

2. Το παρακάτω τρίγωνο MAO είναι ισόπλευρο .Να υπολογίσετε

α) Τις συντεταγμένες του σημείου M

β) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120°

Λύση

α) Το τρίγωνο OMB είναι ισόπλευρο άρα $MB = OB = OM = 2$

Φέρνουμε το ύψος MΔ το οποίο όμως είναι και διάμεσος (διότι το τρίγωνο OMB είναι ισόπλευρο) Άρα το σημείο Δ έχει τετμημένη -1 .

Το τρίγωνο MΔO είναι ορθογώνιο από Π.Θ. γνωρίζουμε ότι :

$$MO^2 = M\Delta^2 + O\Delta^2 \Leftrightarrow$$

$$M\Delta^2 = OM^2 - O\Delta^2 \Leftrightarrow$$

$$M\Delta^2 = 2^2 - 1^2 \Leftrightarrow$$

$$M\Delta^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{M\Delta^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$M\Delta = \sqrt{3}$$

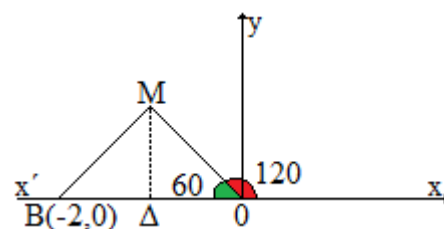
β) Η τετμημένη του σημείου M είναι $x = -1$ και η τεταγμένη του σημείου M είναι

$y = \sqrt{3}$.Θα υπολογίσουμε την απόσταση $\rho = OM = 2$

Επομένως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\angle xOM = 120^\circ$ είναι :

$$\eta\mu 120^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$



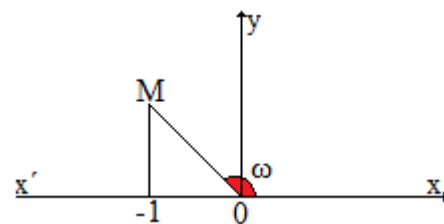
$$\varepsilon\varphi 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του

σημείου M είναι -1 τότε να υπολογίσετε :

α) Την τεταγμένη του σημείου M

β) Το ημω και το συνω .



Λύση

α) Έχουμε ότι: $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{4} = \frac{y}{-1} \Leftrightarrow$$

$$4y = 3 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3}{4}$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου M είναι : $M(-1, \frac{3}{4})$

Η τετμημένη του σημείου M είναι $x = -1$ και η τεταγμένη του σημείου M

είναι $y = \frac{3}{4}$. Θα υπολογίσουμε την απόσταση $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{έχουμε ότι } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{3}{4})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

.

Επομένως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{xOM}$ είναι :

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\omega} = \angle xOM$ όταν :

α) $M(3,4)$ β) $M(5,12)$ γ) $M(-3,0)$

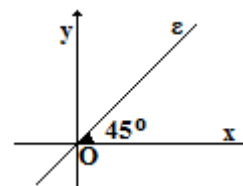
2. Μια ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = -3x$.

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε) και να προσδιορίσετε την τετμημένη ενός σημείου M που έχει τεταγμένη 6.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\omega} = \angle xOM$.

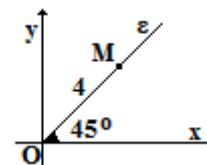
3. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι περνάει από την αρχή των αξόνων και προσπαθήστε να βρείτε την κλίση της)



4. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.

Δίνεται $OM = 4$.

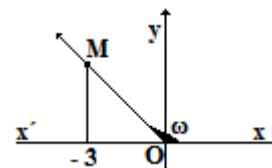


5. Στο διπλανό σχήμα είναι $\sin \omega = -\frac{3}{5}$. Αν η τετμημένη του

σημείου M είναι -3 , να υπολογίσετε :

α) Την τεταγμένη του σημείου M.

β) το $\eta\mu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.



2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

- Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .



π.χ. Η παραπληρωματική των 30° είναι 150° .

Η παραπληρωματική των 45° είναι 135° .

Η παραπληρωματική των 60° είναι 120° .

Η παραπληρωματική της γωνίας ω είναι $180^\circ - \omega$

- Για δυο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύει ότι έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετα συνημίτονα και εφαπτομένες. δηλαδή ισχύουν οι τύποι:

$$\boxed{\eta\mu\omega = \eta\mu(180^\circ - \omega)} \text{ π.χ. } \eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\omega = -\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)} \text{ π.χ. } \sigma\upsilon\nu 150^\circ = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega)} \text{ π.χ. } \varepsilon\varphi 150^\circ = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι μεταξύ 0° και 180° τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές. π.χ. αν ισχύει ότι $\eta\mu x = \eta\mu 50^\circ$ και ισχύει ότι $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ τότε ισχύει ότι $x = 50^\circ$ ή $x = 130^\circ$.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Με τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120°

Λύση:

$$\eta\mu 120^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 120^\circ = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ = 0$$

$$\beta) \eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$$

Λύση

$$\alpha) \eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ =$$

$$\eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ - \sigma\upsilon\nu 87^\circ = 0$$

$$\beta) \eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{4} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

3. Να βρείτε την γωνία x όταν :

$$\alpha) \eta\mu x = \frac{1}{2} \quad \beta) \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \gamma) \varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$$

Λύση

$$\alpha) \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$x = 30^\circ \text{ ή } x = 150^\circ$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ \Leftrightarrow$$

$$x = 135^\circ$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$x = 60^\circ$$

Δύο γωνίες που έχουν αντίθετα συνημίτονα είναι παραπληρωματικές

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

$$\alpha) 135^\circ \text{ και } \beta) 150^\circ$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu 110^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ - \eta\mu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 140^\circ = 0$$

$$\beta) \eta\mu 15^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 130^\circ + \eta\mu 165^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 50^\circ = 0$$

$$\gamma) \sigma\upsilon\nu^2 100^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 80^\circ = 0$$

$$\delta) \eta\mu^2 140^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 130^\circ - \varepsilon\varphi^3 160^\circ = \varepsilon\varphi^3 20^\circ + \eta\mu^2 40^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 50^\circ$$

$$\varepsilon) \eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 45^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 135^\circ = 2$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu(140^\circ + x) = \eta\mu(40^\circ - x)$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu(110^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu(70^\circ + x)$$

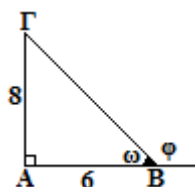
$$\gamma) \varepsilon\varphi(152^\circ - x) + \varepsilon\varphi(28^\circ + x) = 0$$

4. Να βρείτε τη γωνία x όταν:

$$\alpha) \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \beta) \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \quad \gamma) \varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\delta) \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \varepsilon) \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sigma\tau) \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$$

5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ .



2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

➤ Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις:

1. $\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$

Απόδειξη: Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο και ω η γωνία που σχηματίζεται από το τον άξονα x και το σημείο O και το σημείο M τότε ισχύει ότι

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$$

$$\text{με } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Άρα ισχύει ότι: } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

2. $\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$

Απόδειξη:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Από τον τύπο $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$ και ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$.
- Ισχύει ο τύπος $\varepsilon\varphi^2\omega = \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Λύση :

Αντικαθιστούμε στην σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ το $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ και έχουμε:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{169} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow$$

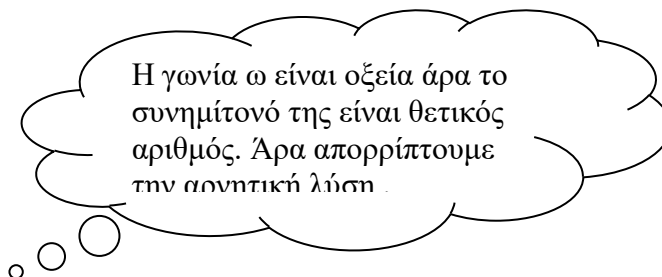
$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{144}{169} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13} \text{ ΔΕΚΤΗ } \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13} \text{ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ }$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5 \cdot 13}{12 \cdot 13} = \frac{5}{12}$$



2. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$ να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Λύση

Δίνεται ότι : $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \boxed{4\eta\mu\omega = 3\sigma\upsilon\nu\omega}$ 1 Υψώνοντας στο τετράγωνο

έχουμε: $(4\eta\mu\omega)^2 = (3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 \Leftrightarrow \boxed{16\eta\mu^2\omega = 9\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ 2

Από την σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με 16

έχουμε : $16\eta\mu^2\omega + 16\sigma\upsilon\nu^2\omega = 16$ Αντικαθιστώντας την σχέση 2 προκύπτει :

$$9\sigma\upsilon\nu^2\omega + 16\sigma\upsilon\nu^2\omega = 16 \Leftrightarrow 25\sigma\upsilon\nu^2\omega = 16 \Leftrightarrow \frac{25\sigma\upsilon\nu^2\omega}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} \text{ ΔΕΚΤΗ } \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5} \text{ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ }$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$ Αντικαθιστώντας στη σχέση 1 έχουμε:

$$4\eta\mu\omega = 3 \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{4\eta\mu\omega}{4} = \frac{12}{20} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{12}{20} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{3}{5}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu^2 115^\circ + \eta\mu^2 65^\circ = 1$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση

$$\alpha) (\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 =$$

$$(\alpha\eta\mu\omega)^2 + 2\alpha\eta\mu\omega\beta\sigma\upsilon\nu\omega + (\beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega)^2 - 2\beta\eta\mu\omega\alpha\sigma\upsilon\nu\omega + (\alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 =$$

$$\alpha^2\eta\mu^2\omega + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \beta^2\eta\mu^2\omega + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\omega =$$

$$\alpha^2(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) + \beta^2(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \beta)$$

$$\alpha^2 + \beta^2$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 115^\circ + \eta\mu^2 65^\circ =$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 65^\circ + \eta\mu^2 65^\circ =$$

$$1$$

$$\gamma)$$

$$\varepsilon\varphi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} =$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} =$$

$$\frac{\eta\mu x(1 + \eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x)} + \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x)} =$$

$$\frac{\eta\mu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x)} =$$

$$\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
2. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
3. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\varphi\omega = -\sqrt{15}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
4. Να αποδείξετε ότι :
 - α) $4\eta\mu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 4$
 - β) $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 - 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$
 - γ) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)(\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega) + 2\eta\mu^2\omega = 1$
 - δ) $\sigma\upsilon\nu^3\omega + \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu\omega$
5. Αν είναι $x = 3\eta\mu\omega$ και $y = 3\sigma\upsilon\nu\omega$, να δείξετε ότι
 - α) $x\eta\mu\omega + y\sigma\upsilon\nu\omega = 3$
 - β) $x^2 + y^2 = 9$
6. Να αποδείξετε ότι :
 - α) $\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$
 - β) $\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$
 - γ) $\eta\mu^2\omega - \eta\mu^4\omega = \eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$
7. Να αποδείξετε ότι:
 - α) $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$
 - β) $\eta\mu^6\omega + \sigma\upsilon\nu^6\omega = 1 - 3\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$
8. Να αποδείξετε ότι:
 - α) $\frac{\eta\mu^2x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 1 - \sigma\upsilon\nu x$
 - β) $\frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\eta\mu\alpha} - \frac{1-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\varepsilon\varphi\alpha$$

$$\delta) \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \varepsilon\varphi\omega + \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\beta) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}$$

$$\gamma) (1-\sigma\upsilon\nu\omega) \left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} \right) = \eta\mu\omega \cdot \varepsilon\varphi\omega$$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \eta\mu^2 140^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 40^\circ$$

$$\beta) \eta\mu^2 28^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 152^\circ$$

$$\gamma) \eta\mu^2 16^\circ + \eta\mu^2 116^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 164^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 64^\circ$$

2.4 Νόμος ημιτόνων – Νόμος συνημιτόνων

➤ Σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ο **νόμος των ημιτόνων**.

➤ Σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι :

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

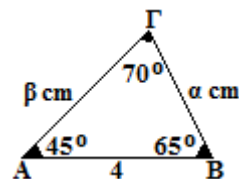
** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Τα α, β, γ είναι πλευρές του τριγώνου ενώ τα A, B, Γ είναι οι γωνίες του τριγώνου.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις πλευρές α και β του τριγώνου ΑΒΓ

Λύση



Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε τον νόμο των ημιτόνων και έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{4}{\eta\mu 70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{0,7071} = \frac{4}{0,9397} \Leftrightarrow 0,9397 \cdot \alpha = 4 \cdot 0,7071 \Leftrightarrow 0,9397 \cdot \alpha = 2,8284 \Leftrightarrow \alpha = 3,009 \text{ cm}$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu 65^\circ} = \frac{4}{\eta\mu 70^\circ} \Leftrightarrow \frac{\beta}{0,9063} = \frac{4}{0,9397} \Leftrightarrow 0,9397 \cdot \beta = 4 \cdot 0,9063 \Leftrightarrow \beta = 3,85 \text{ cm}$$

2. Σε ένα τρίγωνο με $\hat{A} = 112^\circ, \hat{B} = 40^\circ$ και $\beta = 15$ να υπολογίσετε :

α) Την πλευρά α .

β) Την γωνία $\hat{\Gamma}$.

γ) Την πλευρά γ .

Λύση

Εφαρμόζουμε τον νόμο των ημιτόνων και έχουμε:

$$\alpha) \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 112^\circ} = \frac{15}{\eta\mu 40^\circ} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 68^\circ} = \frac{15}{\eta\mu 40^\circ} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{0,9272} = \frac{15}{0,6428} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 21,63 \text{ cm}$$

β) Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° . Άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 112^\circ + 40^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 28^\circ$$

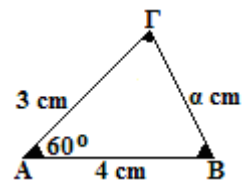
γ) Εφαρμόζουμε τον νόμο των ημιτόνων και έχουμε:

$$\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\eta\mu 28^\circ} = \frac{15}{\eta\mu 40^\circ} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{0,4695} = \frac{15}{0,6428} \Leftrightarrow \gamma = 10,95 \text{ cm}$$

3. Να υπολογίσετε το x στο διπλανό σχήμα:

Λύση

Στο διπλανό τρίγωνο έχουμε: $\beta = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 60^\circ$



Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ ως προς την πλευρά α και έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Leftrightarrow$$

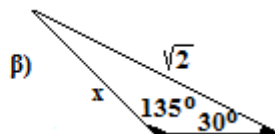
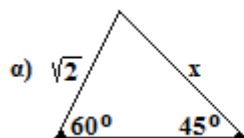
$$\alpha^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 13 \Leftrightarrow$$

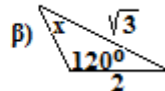
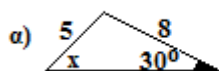
$$\alpha = \sqrt{13} \text{ cm}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις :



2. Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις :



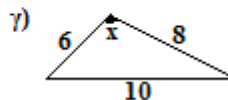
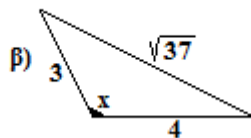
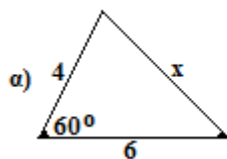
3. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν :

α) $\alpha = 2\sqrt{3}, \beta = 2$ και $\hat{A} = 60^\circ$

β) $\beta = 3\sqrt{2}, \gamma = 3$ και $\hat{B} = 135^\circ$

4. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$, $\alpha = 5$ και $\beta = 5\sqrt{3}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5. Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις :



6. Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ αν $\hat{A} = 30^\circ$ και $\alpha = \sqrt{3} - 1$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3(x-1) + y = 2(y+3) \end{cases}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση:
$$\frac{2x}{3x-9} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x-x^2}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3y - 2x = -1 \\ \frac{3x+2}{4} - \frac{y+5}{6} = 1 \end{cases}$$

4. Δίνεται η παράσταση: $A(x) = (x+3)^2 - 2(x-1)(x+1) - (x-4)^2 - 7$

α) Να εκτελέσετε τις πράξεις και να δείξετε ότι: $A(x) = -2x^2 + 14x - 12$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) = 0$

5. Να λυθεί η εξίσωση:
$$\frac{x-2}{x^2-x} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{5}{x}$$

6. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y+4}{3} = -4 \\ 5x + 4y = -7 \end{cases}$$

7. Αν $A(x) = (2x+1)^2 - 3x$ και $B(x) = (x-3)^2 + (x-2)(x+2)$ να γίνουν

οι πράξεις στα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$ και μετά να λύσετε την εξίσωση

$$A(x) - B(x) = 0$$

8. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - \frac{x-\psi}{2} = -3 \\ \psi + \frac{\psi-2x}{3} = -4 \end{cases}$$

9. Α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

$$3x^2 - 6x, \quad x^2 + 4x + 4, \quad 2x^2 - 8, \quad (2x+1)^2 - (4x-1)^2$$

Β) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}, \quad B = \frac{(2x+1)^2 - (4x-1)^2}{x^2 + 4x + 4}$$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = B$

10. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3x+2\psi}{2} - \frac{x+4\psi}{6} = \psi + 2 \\ \frac{x+\psi}{3} = 2x - \frac{x+5}{2} \end{cases}$$

11. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 + 4x + 4}{3x^2 + 6x} \quad \text{και} \quad B = \frac{x+2}{x^2 - 4}$$

α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να δείξετε ότι:

$$A = \frac{x+2}{3x} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{x-2}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A = B$

12. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2(x-\psi) - (x+2\psi) = 17 \\ \frac{x+1}{2} - \frac{\psi}{3} = 4 \end{cases}$$

13. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x-7y=27 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$$

14. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι 265.

α. Αν συμβολίσουμε με x τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς, αποδείξτε ότι: $x^2 + x - 132 = 0$.

β. Να υπολογίσετε τους δύο αριθμούς.

15. Να λύσετε την παρακάτω κλασματική εξίσωση:

$$1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$$

16. Α) Να δείξετε ότι το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x-2}{4} - 1 = \frac{2(y+1)}{3} \\ 4x+y+8 = 2(y-x) \end{cases}$$
 είναι ισοδύναμο με

το
$$\begin{cases} 3x-8y=26 \\ 6x-y=-8 \end{cases}$$

Β) Στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x-8y=26 \\ 6x-y=-8 \end{cases}$$

17. Α. Να υπολογιστεί η παράσταση: $P(x) = (x+1)^2 - 4(x+1) + 4x$

Β. Αν $P(x) = x^2 + 2x - 3$, να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x+4}{x+3} - \frac{8}{P(x)} = \frac{x+1}{x-1}$

18. Α) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3 + 2(x - 3y) = y + x \\ 1 - \frac{2x - 3y}{5} = \frac{x + 6}{10} - y \end{cases}$$

Β) Αν (x_0, y_0) η λύση του συστήματος, να δείξετε ότι

$$3x_0 + 2y_0 + 1996 = 2010$$

19. Δίνεται η εξίσωση:
$$\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2+x}$$

Α. Να παραγοντοποιηθούν οι παρονομαστές.

Β. Να βρείτε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών και να βάλετε τους κατάλληλους περιορισμούς ώστε να έχει νόημα η εξίσωση.

Γ. Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση.

20. Δίνονται τα παρακάτω συστήματα (Σ1) και (Σ2) :

$$(\Sigma 1) \begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \quad (\Sigma 2) \begin{cases} \alpha y - \beta = -2x \\ -\alpha - \beta y = -3x \end{cases}$$

Α. Να λυθεί το σύστημα (Σ1) .

Β. Αν η λύση του συστήματος (Σ1): $(x, y) = (4, 1)$ είναι και λύση του συστήματος (Σ2), να δημιουργήσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους α, β .

Γ. Να βρεθεί η λύση (α, β) του παραπάνω συστήματος που δημιουργήσατε

21. Δίνεται η κλασματική εξίσωση:
$$\frac{3}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{2}{x-2} = 0$$

Α. Να παραγοντοποιήσετε τους παρονομαστές, να βρείτε το Ε.Κ.Π. τους και στη συνέχεια τους περιορισμούς που πρέπει να έχει το x , ώστε να ορίζονται τα κλάσματα.

Β. Να λύσετε την εξίσωση.

22. Α) Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ και $\epsilon_2: x - y = 1$.

Να τις σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, αφού πριν βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους με τους άξονες. Στη συνέχεια από το σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

Β) Να επιλύσετε αλγεβρικά το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών του προηγούμενου ερωτήματος.

23. Δίνεται η παράσταση:

$$A = 6x(x-3) - (1-2x)^2 - 5(2-x) - (-6-6x).$$

i) Να δείξετε, με κατάλληλες πράξεις, ότι μετασχηματίζεται στην:

$$A = 2x^2 - 3x - 5$$

ii) Να λυθεί η εξίσωση : $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

24. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3(x-1) - 2 = 2(y+3) + 1 \end{cases}.$$

A) Να δείξετε με κατάλληλες πράξεις ότι μετασχηματίζεται στο

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}.$$

B) Να λυθεί (με οποιαδήποτε μέθοδο) το σύστημα του ερωτήματος A.

25. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+3} + \frac{3}{8}$

26. Να υπολογιστεί η παράσταση $\frac{x^2-2x+1}{3x+6} \cdot \frac{x^2+2x}{x-1}$

27. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 4(-x+y) + 2x = 3(1-x) \\ x - \frac{1-y}{6} = 6 \end{cases}$

α) Με κατάλληλες πράξεις, να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα

μετασχηματίζεται στο: $\begin{cases} x + 4y = 33 \\ 6x + y = 37 \end{cases}$

β) Να λυθεί το παραπάνω σύστημα.

28. α) Να αποδείξετε ότι : $4x = (x+1)^2 - (x-1)^2$

β) Να γράψετε τον αριθμό 2000 ως διαφορά τετραγώνων δυο φυσικών αριθμών.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\left(\frac{1005}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{1005}{2} - 1\right)^2$

29. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{x-1}{x}$

30. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

31. Να υπολογίσετε το γινόμενο: $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4\alpha + 8\beta} \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$

32. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = (x - 1)^2 - 2(x - 2) \cdot (x + 3)$$

33. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}{x^3 - 4x}$

34. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x + 2y = 2 - \lambda - \lambda^2$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να βρεθεί ο λ , αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$

β) Αν $\lambda = -1$, να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες.

35. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = \frac{1}{3} \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

36. Να λυθεί η εξίσωση: $1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2 - 4}$

37. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$$

38. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x} + \frac{2}{x} = \frac{3x - 1}{x - 1}$

39. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y}{3} + 1 = 0 \\ \frac{x}{3} + 3 = \frac{y+2}{2} \end{cases}$$

40. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x \cdot (x-1)}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{1}{3}$

41. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $4\alpha^2 - 4\beta^2 - 4\alpha + 1$

42. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x^2 - 2x}$

43. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 5y = -19 \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y-5}{3} = 3 \end{cases}$$

44. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 5x - 2y = -26 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$
.

45. Δίνεται η κλασματική παράσταση

$$\frac{3x - 3 + 5x^2 - 5x + 2y(1 - x)}{3x + 5x^2 - 2xy} \quad (\mu\epsilon \ 3x + 5x^2 - 2xy \neq 0)$$

α) Να παραγοντοποιήσετε το $3x + 5x^2 - 2xy$

β) Να παραγοντοποιήσετε το $3x - 3 + 5x^2 - 5x + 2y(1 - x)$

γ) Να απλοποιήσετε την κλασματική παράσταση.

46. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3(x+1) - 2(y-1) = 12 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y+1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

47. Δίνεται η παράσταση $A = (x-1)^2 + (3x+2)^2 - (x+1)^2 - 5x$

α) Ναδειχθεί ότι $A=9x^2+3x+4$

β) Να λυθεί η εξίσωση $9x^2+3x+4=0$

48. Δίνεται η εξίσωση:
$$\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: $x^2 - x$, $x^2 - 1$, $x^2 + x$

β) Αφού κάνετε όλες τις δυνατές πράξεις να καταλήξετε στην εξίσωση

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

γ) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

49. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-\psi}{2} = \frac{5}{6} - \frac{x-1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{x-4\psi}{6} = \frac{x-2\psi}{4} \end{cases}$$

50. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 5(x-1) - 3x + 3y = 5 \\ \frac{x+y}{2} - \frac{y}{3} = -1 \end{cases}$$

51. Να λυθεί η εξίσωση: $(3x-2)^2 - (3-x)^2 = 9(x^2-1) - 3$

52. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 5(x+y) - 2(x-y) = -3 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{y+x}{3} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

53. Να λυθεί η εξίσωση: $(2x-1)^2 + 7 = (x+2)^2 - (x-4)(x+4)$

54. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2(y-x) - (y-4) = 4 \\ \frac{3x-5}{2} - y = -5 \end{cases}$$

55. Να λυθεί η εξίσωση : $4x^2 + 3x - 1 = 0$

56. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(x+2)^2 = \dots$

β) $(x-3\psi)^2 = \dots$

γ) $(x+2)^2 + 4(x-3\psi)^2 - 10 = \dots$

57. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+2}{x^2-5x+6} - \frac{1-2x}{2x^2-4x} = \frac{2}{3-x}$

58. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{x-y}{3} = \frac{7}{2} - 2y \\ \frac{1}{2} - \frac{2x-3y}{5} = \frac{x+1}{10} - y \end{cases}$$

α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: $2a-2$ και a^2-1

β) Να κάνετε την πράξη: $\frac{1}{2a-2} - \frac{a}{a^2-1}$ και να απλοποιήσετε το
εξαγόμενο.

59. Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων:
$$\begin{cases} 3(x+y)-2=2(x-y) \\ 14+4(x-y)=x+y \end{cases}$$

α) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: $A=(x+1)^2 - (x-1)^2 + 3$ και $B=(2x+1)(2x-2)+5$

β) Αν $A=4x+3$ και $B=4x^2-2x+3$, να λυθεί η εξίσωση: $B=A$

60. Α. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases}$$

Β. Αν $(\alpha, \beta)=(1,1)$ η λύση του συστήματος του Α ερωτήματος, να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: $A=2\alpha x^2+x$ και $B=4x^2-\beta$

Γ. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{A}{B}$ για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$

61. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{7x+y}{3} - \frac{y-1}{2} = x+3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y-1}{4} = -x+1 \end{cases}$$

Δίνεται το $P(x) = x^2 - 3x + 2$

α) Να παραγοντοποιηθεί το $P(x)$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$

62. α) Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, να υπολογιστούν το $\sigma\upsilon\nu\omega$

και η $\epsilon\phi\omega$.

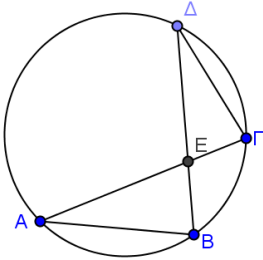
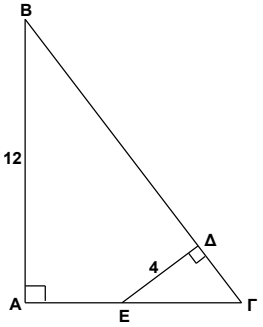
β) Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 13 \cdot \eta\mu\omega + 26 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi\omega$$

63. Δίνεται η αμβλεία γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2\sqrt{3}\eta\mu\omega - 12\sigma\upsilon\nu\omega}{\sqrt{3}\epsilon\phi\omega}$

64. Στο διπλανό σχήμα είναι $AE = 3x$, $EF = x$, $EB = 6$ και $ED = 8$. Να αποδείξετε ότι: α) τα τρίγωνα ABE και GDE είναι όμοια και β) να υπολογίσετε τα τμήματα AE και EG.	
65. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = 12$ cm, $DE = 4$ cm α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και DEG είναι όμοια. β) Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. γ) Αν το τρίγωνο DEG έχει εμβαδόν 6 cm², τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABG.	

66. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ να υπολογίσετε

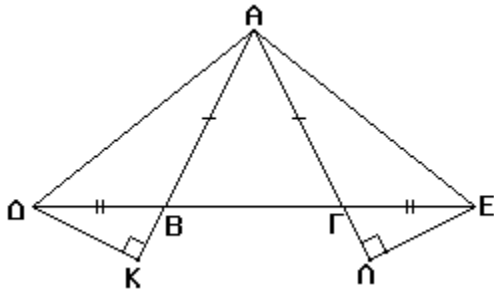
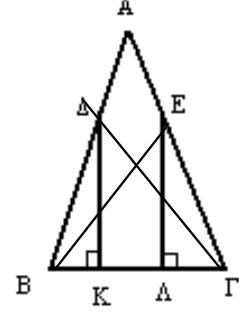
α) το $\sigma\upsilon\nu\omega$

β) την $\epsilon\phi\omega$

γ) τη τιμή της παράστασης $A = 13\eta\mu\omega - 39\sigma\upsilon\nu\omega + 24\epsilon\phi\omega$

67. Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{25\sigma\upsilon\nu^2\omega - 16\epsilon\varphi^2\omega - \frac{9}{\epsilon\varphi^2\omega}}{25\eta\mu^2\omega}$$

68. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ, ώστε ΒΔ=ΓΕ. α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. β) Αν ΔΚ ⊥ ΑΒ και ΕΛ ⊥ ΑΓ, να δείξετε ότι ΔΚ=ΕΛ. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.	
69. Στις ίσες πλευρές , ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα , τέτοια ώστε ΑΔ=ΑΕ. α) Να δειχτεί ότι αυτά ισαπέχουν από τη ΒΓ. (δηλαδή να δείξετε ότι ΔΚ=ΕΛ) β) Να δειχτεί ότι ΒΕ=ΔΓ	

70. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$

α) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$ και την $\epsilon\varphi\theta$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{5\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta}{6\epsilon\varphi\theta}$

71. Α. Αν $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$ και για την γωνία ω ισχύει: $90^\circ < \omega < 120^\circ$ να βρείτε

τους αριθμούς:

α) $\sigma\upsilon\nu\omega$ και β) $\epsilon\varphi\omega$

Α. Για τα παραπάνω $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\epsilon\phi\omega - 13\sigma\upsilon\upsilon\omega}{-5 + 13\eta\mu\omega}$$

72. Δίνεται η οξεία γωνία ω ($0^\circ < \omega < 90^\circ$) για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$

α) Να υπολογίσετε τα $\sigma\upsilon\upsilon\omega$ και $\epsilon\phi\omega$

β) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 5\eta\mu\omega + 10\sigma\upsilon\upsilon\omega - 3\epsilon\phi\omega$.

73. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB, AG ενός ισοσκελούς τριγώνου ABΓ και προς τα σημεία B και Γ αντίστοιχα παίρνουμε τα τμήματα BD και ΓΕ με $BD = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AΔΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ABE και ότι $BE = ΓΔ$.

74. Σε τρίγωνο ABΓ έχουμε ότι $\epsilon\phi B = -1$ και $\sigma\upsilon\upsilon A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του και να βρείτε, σε μοίρες, τη μεγαλύτερη γωνία του.

β) Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας A.

γ) Αν επιπλέον, γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς AG είναι 2, να προσδιορίσετε το μήκος της BΓ.

75. Αν μία γωνία ω είναι αμβλεία και $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, να υπολογιστούν οι άλλοι

τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

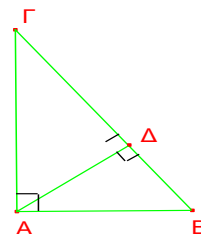
76. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{1 - \epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

77. Στο διπλανό σχήμα δείξτε ότι:

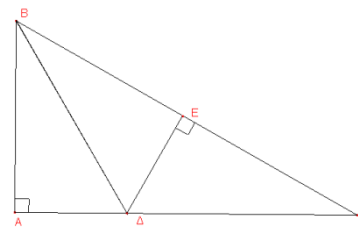
α) τα τρίγωνα ABΓ και AΓΔ είναι όμοια

β) αν $AB = 3 \text{ cm}$, $AG = 4 \text{ cm}$, να υπολογίσετε

τα τμήματα BΓ και AΔ.



78. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) να φέρετε την διχοτόμο BD . Αν DE κάθετη στην $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AB=BE$.

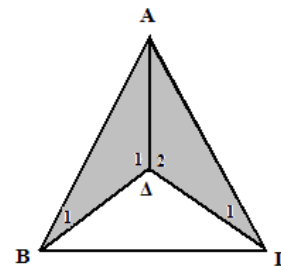


79. Να κάνετε τις πράξεις: $\eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ$

80. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε για το εσωτερικό του σημείο Δ να ισχύουν

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \text{ και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2.$$

- α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
β) Το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$



81. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι BD και ΓE είναι ίσες.

82. (α) Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, να υπολογιστούν το $\sigma\upsilon\nu\omega$

και η $\epsilon\phi\omega$.

- (β) Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

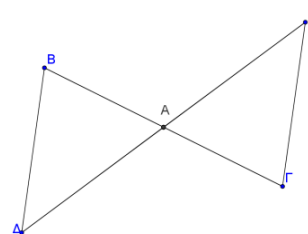
$$A = \frac{13}{2} \eta\mu\omega - \frac{13}{5} \sigma\upsilon\nu\omega + 5\epsilon\phi\omega$$

83. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma$ και $A\Delta =$

$A\epsilon$.

Να αποδείξετε ότι

- α) τα τρίγωνα $BA\Delta$ και $A\epsilon\Gamma$ είναι ίσα
β) τα τρίγωνα $BE\Delta$ και $\Delta\Gamma\epsilon$ είναι ίσα



84. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ τότε να υπολογίσετε τους

άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

85. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sin^2 \omega = \frac{3}{4}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

β) Να δείξετε ότι: $\frac{\sin^2 \omega - \eta\mu^2 \omega}{\eta\mu \omega} = 1$

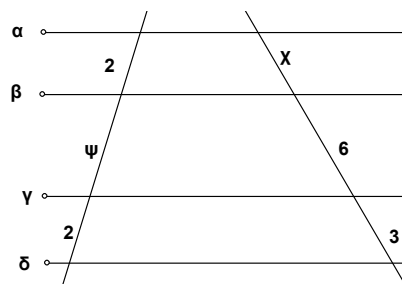
86. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu \omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε το $\sin \omega$

και την $\epsilon\phi \omega$.

87. Στο διπλανό σχήμα είναι $\alpha // \beta // \gamma // \delta$.

Να υπολογίσετε τα τμήματα x και y .

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



88. (Α) Αν είναι $\eta\mu \omega = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να βρείτε το $\sin \omega$ και την $\epsilon\phi \omega$.

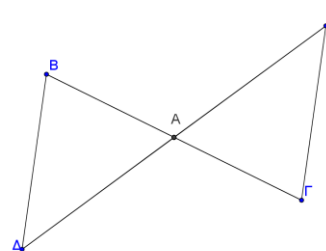
(Β) Αν η $\hat{\omega}$ είναι γωνία του προηγούμενου ερωτήματος, να δείξετε ότι:

$$\frac{5\eta\mu \omega - 15\sin \omega}{-8\epsilon\phi \omega} = \frac{5}{2}$$

89. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB=AG$ και

$AD=AE$.

Να δείξετε ότι: $BD=GE$



90. Δίνεται οξεία γωνία ω ($0^\circ < \omega < 90^\circ$) για την οποία ισχύει $\sin \omega = \frac{5}{13}$. Να

υπολογίσετε το $\eta\mu \omega$ και την $\epsilon\phi \omega$.

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου.

Περιέχει:

- ☒ **Συνοπτική θεωρία.**
- ☒ **Παρατηρήσεις και υπενθυμίσεις** θεωρίας στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ☒ **Λυμένες ασκήσεις και παραδείγματα.**
- ☒ **Ασκήσεις για εξάσκηση** του μαθητή μέσω άλυτων ασκήσεων.