

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Α' ΜΕΡΟΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

- Ένα γράμμα που παριστάνει κάποιο αριθμό ονομάζεται **μεταβλητή**. π.χ. (x, y, z)
- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις και αριθμούς. π.χ. $5 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) + 6 \div (-3)$
- **Αλγεβρική παράσταση** λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις αριθμούς και μεταβλητές.

π.χ. $3 \cdot x + 2 \cdot y + 7 \cdot x + 9$

- **Αναγωγή ομοίων όρων** είναι η διαδικασία με την οποία μπορούμε να γράψουμε σε ποιο απλή μορφή μια αλγεβρική παράσταση.

π.χ. $3 \cdot x + 2 \cdot y + 7 \cdot x - 4y = 10x - 2y$

Επιμεριστική είναι η ιδιότητα : $\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Τις μεταβλητές τις χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε κάποιες μαθηματικές εκφράσεις.
- Στην αναγωγή ομοίων όρων προσθέτουμε τους συντελεστές των μεταβλητών.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις :

1. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
 - α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 14
 - β) Το άθροισμα δυο αριθμών πολλαπλασιασμένο επί 4
 - γ) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 4 κιλά μανταρίνια.

Λύση:

α) Αν x ο αριθμός τότε το τριπλάσιό του είναι $3 \cdot x$ επομένως αυξημένο κατά 14

θα είναι $3x + 14$

β) Αν x και y οι αριθμοί το άθροισμά τους είναι $x + y$ επομένως αν

πολλαπλασιάζεται επί 4 έχουμε : $4 \cdot (x + y)$

γ) Αν x η τιμή του κιλού των μανταρινιών τότε για 4 κιλά θα πληρώσουμε $4 \cdot x$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις.

α) $30x - 4x + 10x$

β) $-4x + 5 - 3x - 2$

γ) $-5x + 3y + 4x - 7y + 7x + 3$

Λύση:

α) $30x - 4x + 10x = (30 - 4 + 10)x = 36x$

β) $-4x + 5 - 3x - 2 = (-4 - 3)x + 5 - 2 = -7x + 3$

γ) $-5x + 3y + 4x - 7y + 7x + 3 = (-5 + 4 + 7)x + (3 - 7)y + 3 = 6x - 4y + 3$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να υπολογίσετε την τιμή της :

$A = 3(x + 2y) - 2(2x + 2y)$ όταν $x = 1$ και $y = -2$

Λύση:

$$A = 3(x + 2y) - 2(2x + 2y)$$

$$= 3x + 6y - 4x - 4y$$

$$= (3 - 4)x + (6 - 4)y$$

$$= -1x + 2y$$

Αν $x = 1$ και $y = -2$ τότε $A = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)$

$$= -1 - 4$$

$$= -5$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρείτε τα αποτελέσματα στις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις

$$A = 5 + (9 - 6 + 13 - 2) - (18 + 10 - 7) - (-6)$$

$$B = -(3 + 5 - 12) - (15 + 6 - 10) + (3 - 4)$$

$$\Gamma = 3 - [3^3 : (2^5 - 5 \cdot 1^8)] + 43763 \cdot (2 \cdot 8 - 4^2)$$

$$\Delta = 2^3 \cdot 2^2 + \frac{2^7}{2^3} - (2^2)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$E = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{(2^3)^4}{2^{10}} + \frac{2^{14}}{2^5 \cdot 2^7}$$

$$Z = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$$

2. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική

παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

α) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 9

β) Την περίμετρο και το εμβαδόν ενός τετραγώνου με βάση την πλευρά του

γ) Την τελική τιμή ενός προϊόντος αν το αγοράσουμε με έκπτωση 20%

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x - 3y + 5x - y$

β) $-4x - 5y + 4 + x + 3y$

γ) $3 \cdot (2x + 4y) - 6(x - y)$

δ) $-3y + 7x - 5x - 10y + 3z + 6x - z$

4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους.

α) $A = 5x - 2(6 - 3x) + 4(2 + x)$ όταν $x = -2$

β) $B = 7(x - 2y) - 2(3x + 3y) + 5$ όταν $x = 7$ και $y = -1$

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 40m. Αν x ή μια πλευρά του ορθογωνίου να βρείτε την:

α) Αλγεβρική παράσταση που παριστάνει την περίμετρο του ορθογωνίου

β) Αλγεβρική παράσταση που παριστάνει το εμβαδό του ορθογωνίου.

1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

Ιδιότητες ισοτήτων:

1. Αν και στα δυο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει και πάλι ισότητα.

Δηλαδή αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

2. Αν και στα δυο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει και πάλι ισότητα.

Δηλαδή αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

3. Αν και στα δυο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιάσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει και πάλι ισότητα

Δηλαδή αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

4. Αν και τα δυο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει και πάλι ισότητα

Δηλαδή αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \div \gamma = \beta \div \gamma$

➤ **Εξίσωση** ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και μια μεταβλητή.

π.χ. $3x + 100 = 2x + 300$

➤ **Λύση ή ρίζα** της εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που την επαληθεύει.

Κάθε εξίσωση χωρίζεται σε **δύο μέλη** (1^ο μέλος αριστερά του = και 2^ο μέλος δεξιά του =)

➤ Οι όροι που περιέχουν μεταβλητή λέγονται **άγνωστοι όροι** της εξίσωσης

➤ Ο αριθμός που πολλαπλασιάζεται με την μεταβλητή λέγεται **συντελεστής του αγνώστου**.

π.χ. Στην εξίσωση : $3x + 100 = 2x + 300$

Το πρώτο μέλος είναι $3x + 100$

Το δεύτερο μέλος είναι : $2x + 300$

Οι άγνωστοι όροι είναι : $3x$ και $2x$

Ο συντελεστής του $3x$ είναι το 3 και ο συντελεστής του $2x$ είναι το 2 .

Οι γνωστοί όροι είναι : 100 και 300

- Μια εξίσωση λέγεται **αδύνατη** όταν δεν έχει λύση κανέναν αριθμό ($0x = 3$)
- Μια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα ή Αόριστη** όταν επαληθεύεται από όλους τους αριθμούς ($0x = 0$)

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων:

Βήμα 1^ο Βρίσκω το Ε.Κ.Π των παρονομαστών και πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το ΕΚΠ.

Βήμα 2^ο Απλοποιώ τους παρονομαστές .(Δεν ξεχνώ να βάλω σε παρένθεση τους αριθμητές που έχουν πάνω από δύο όρους)

Βήμα 3^ο Κάνω τις επιμεριστικές ιδιότητες που υπάρχουν.

Βήμα 4^ο Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους αν κάποιος όρος αλλάξει μέλος αλλάζει πρόσημο.

Βήμα 5^ο Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Βήμα 6^ο Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και τα δυο μέλη της εξίσωσης.

(αν ο συντελεστής είναι διάφορος του μηδέν)

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στις πράξεις. Να θυμόμαστε τους κανόνες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού αριθμών.
- Αν μια εξίσωση είναι αδύνατη σημαίνει πως δεν έχει καμία λύση.
- Αν μια εξίσωση είναι ταυτότητα ή αόριστη σημαίνει πως έχει λύσεις όλους τους αριθμούς.
- Αν μια εξίσωση είναι αδύνατη ή ταυτότητα θα πρέπει να το αναφέρουμε.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις :

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-7x + 9 = 3x + 17$

β) $4(3 - x) - 2(3x - 4) = -(16 - x)$

$$\gamma) \frac{3(2x-6)}{5} = 3 + \frac{3x-12}{10}$$

$$\delta) \frac{5x - \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{2}} = \frac{2 - \frac{x}{3}}{3 - \frac{1}{3}}$$

Λύση

$$\alpha) -7x + 9 = -3x + 17 \Leftrightarrow$$

$$-7x + 3x = -9 + 17 \Leftrightarrow$$

$$-4x = 8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{8}{-4} \Leftrightarrow$$

$$x = -2$$

$$\beta) 4(3-x) - 2(3x-4) = -(16-x)$$

$$12 - 4x - 6x + 8 = -16 + x \Leftrightarrow$$

$$-4x - 6x - x = -12 - 8 - 16 \Leftrightarrow$$

$$-11x = -36 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-11x}{-11} = \frac{-36}{-11}$$

$$x = \frac{36}{11}$$

$$\gamma) \frac{3(2x-6)}{5} = 3 + \frac{3x-12}{10} \quad \text{Ε.Κ.Π.}(5,10)=10$$

$$10 \frac{3(2x-6)}{5} = 10 \cdot 3 + 10 \frac{3x-12}{10} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 3(2x-6) = 30 + (3x-12) \Leftrightarrow$$

$$6(2x-6) = 30 + 3x - 12 \Leftrightarrow$$

$$12x - 36 = 30 + 3x - 12 \Leftrightarrow$$

$$12x - 3x = 36 + 30 - 12 \Leftrightarrow$$

$$9x = 54 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{54}{9} \Leftrightarrow$$

$$x = 6$$

$$\delta) \frac{5x - \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{2}} = \frac{2 - \frac{x}{3}}{3 - \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{2} \frac{5x}{1} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{1} + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{3} \frac{2}{1} - \frac{x}{3}}{\frac{3}{1} - \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{10x}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{6}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{6}{9} - \frac{x}{3}}{\frac{9}{1} - \frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{10x-1}{\frac{2}{11}} = \frac{6-x}{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow \frac{2(10x-1)}{2 \cdot 11} = \frac{3 \cdot (6-x)}{8 \cdot 3} \Leftrightarrow \frac{10x-1}{11} = \frac{6-x}{8} \Leftrightarrow$$

$$88 \frac{10x-1}{11} = 88 \frac{6-x}{8} \Leftrightarrow 8(10x-1) = 11(6-x) \Leftrightarrow 80x-8 = 66-11x \Leftrightarrow$$

$$80x + 11x = 8 + 66 \Leftrightarrow 91x = 74 \Leftrightarrow$$

$$\frac{91x}{91} = \frac{74}{91} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{74}{91}$$

2. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

$$(\lambda - 3)x = 7$$

Λύση

$$\text{Θα πρέπει } \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3$$

3. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι αόριστη.

$$(\lambda - 4)x = \lambda - 4$$

Λύση

$$\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 4$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-7x + 49 = 7$ β) $4x - 16 = 8$ γ) $20x = 16x - 6$ δ) $10x = 3x - 7$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3(t - 2) - 2(3 - t) = 3t - 4$ β) $4(3 - x) - 2(3x - 4) = -(16 - x)$

γ) $6(v - 1) - (3v + 11) = -7$ δ) $z - 1 = 2(3 - 3z) - 3(1 - z)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{y+1}{3} - \frac{2y+1}{3} = 7$ β) $\frac{3}{5} - \frac{x+1}{10} = \frac{5-x}{10} + 1$

γ) $\frac{y+6}{3} + \frac{y+1}{2} = y + 5$ δ) $x - \frac{2(x+1)}{4} = \frac{2x-1}{3}$

ε) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = 5(\frac{x}{6} + 1)$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $-x = 5$

ii. $4x = 0$

iii. $5 = 10x$

iv. $8(x - 4) - 6(2 - x) = 2(6x - 1)$

v. $10x + 4(-3x + 1) - 1 = 2x - (4x + 1)$

vi. $-2(-3a + 1) = 6(a + 3) - 12$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\frac{3x+5}{5} = \frac{2(1-x)}{10}$

ii. $\frac{-2(1-x)}{3} - \frac{3(x+2)}{10} = 1 - \frac{x-1}{15}$

iii. $\frac{(-1+3)^2 y}{(-1)^2} - \frac{(-1-2)^2}{(-2)^2} = \frac{y-1}{2}$

iv. $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{3} = x + 1$

v. $\frac{3x+2}{3} = \frac{4x-5}{2}$

vi. $\frac{7(x+3)-5}{5} = 6 - \frac{2x}{3}$

vii. $\frac{3x+1}{2} - \frac{3-2x}{6} = \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$

viii. $1 - \frac{x-3}{8} = \frac{5}{6} - \frac{1-2x}{12}$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{5} - \frac{x}{2} = 3$ β) $\frac{3-5x}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{13x}{6}$ γ) $\frac{x+3}{2} - (x-5) = \frac{2(x+1)}{3}$

$$\delta) \frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{3} = 7 \quad \epsilon) \frac{y-2}{3} = -\frac{11}{13} - \frac{2y-1}{4} \quad \sigma\tau) \frac{x}{4} + \frac{x+3}{6} = \frac{5x}{12} + \frac{1}{2}$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2}{3} \left(6 - \frac{x}{3} \right) = \frac{15}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{2x}{3} + \frac{16}{9} \right) \quad \beta) \frac{1}{9} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) - 1 \right] = \frac{x}{3} + \frac{40}{81}$$

$$\gamma) \frac{5x - \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{2}} = \frac{2 - \frac{x}{3}}{3 - \frac{1}{3}} \quad \delta) \frac{x}{18} - \frac{x - \frac{1}{2}}{9} = \frac{1}{9} \left(-\frac{x}{3} + \frac{2}{5} \right)$$

8. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 3)x - 6 = \lambda(x - 1) + 3$

- i. Αν $\lambda = 1$ να δείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 2$
- ii. Αν η εξίσωση έχει λύση τη $x = 1$ να δείξετε ότι $\lambda = 3$
- iii. Αν $\lambda = -3$ να λύσετε την εξίσωση.

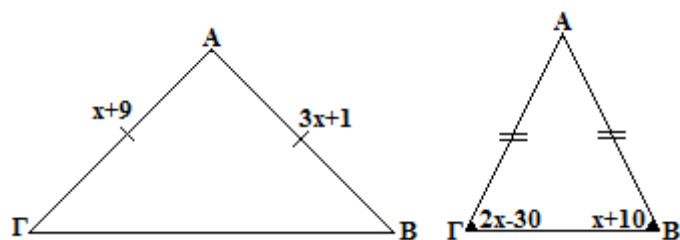
9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) (2x - 4)(x - 1)(x + 6) = 0 \quad \beta) (3x - 1)(6 - x)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

10. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη :

$$\alpha) (\lambda - 5)x = 12 \quad \beta) \lambda x - 6 = 4 + 7x$$

11. Στα παρακάτω τρίγωνα να βρείτε την τιμή του x ώστε να είναι ισοσκελή.



1.3 Επίλυση τύπων

- Στα μαθηματικά, τη φυσική και τη Χημεία βρίσκουμε ισότητες που συνδέουν διάφορα μεγέθη. Τις ισότητες αυτές τις ονομάζουμε τύπους. Ένας τέτοιος τύπος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια εξίσωση και το γράμμα ως προς το οποίο θέλουμε να λυθεί να θεωρηθεί ο άγνωστος. Η διαδικασία επίλυσης ονομάζεται επίλυση τύπου.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους ως προς την μεταβλητή που ζητείται:

α) $L = 2\pi\rho$ ως προς ρ

β) $P = 2x + 2y$ ως προς y

γ) $ax + \beta y + \gamma = 0$ ως προς y με $\beta \neq 0$

δ) $v = \frac{s}{t}$ ως προς t

ε) $P = P_0 + \varepsilon \cdot h$ ως προς h

Λύση:

α) $L = 2\pi\rho \Leftrightarrow$ β) $P = 2x + 2y \Leftrightarrow$ γ) $ax + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{L}{2\pi} = \frac{2\pi\rho}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{L}{2\pi} = \rho$$

$$P - 2y = 2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{P - 2y}{2} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{P - 2y}{2} = x$$

$$\beta y = -ax - \gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta y}{\beta} = \frac{-ax - \gamma}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{-ax - \gamma}{\beta}$$

δ) $v = \frac{s}{t}$

ε) $P = P_0 + \varepsilon \cdot h$

$$v \cdot t = s \Leftrightarrow$$

$$\frac{v \cdot t}{t} = \frac{s}{t} \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$P - P_0 = \varepsilon \cdot h \Leftrightarrow$$

$$\frac{P - P_0}{h} = \frac{\varepsilon \cdot h}{h} \Leftrightarrow$$

$$\frac{P - P_0}{h} = \varepsilon$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε τον τύπο $Q = mc\theta$ ως προς c .
2. Να λύσετε τον τύπο $E = 2\pi r(r + h)$ ως προς h .
3. Να λύσετε τον τύπο $S = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ ως προς v_0
4. Να λύσετε τον τύπο $T = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100}$ ως προς t .
5. Να λύσετε τον τύπο $E = \frac{(\beta + B)v}{2}$ ως προς B .
6. Να λύσετε τον τύπο $E = \frac{1}{2}mv^2$ ως προς m .
7. Να λύσετε τον τύπο $V = V_0(1 + a\theta)$ ως προς a .

1.4 Επίλυση προβλημάτων με την χρήση εξισώσεων

- Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με την βοήθεια των εξισώσεων θα πρέπει να κάνουμε τα εξής:

- 1^{ov} Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα για να καταλάβουμε τα δεδομένα και τι μας ζητάει
- 2^{ov} Εκφράζουμε με μια μεταβλητή (συνήθως x) το ζητούμενο του προβλήματος .
- 3^{ov} Εκφράζουμε όλα τα υπόλοιπα μεγέθη με την βοήθεια της μεταβλητής x .
- 4^{ov} Σχηματίζουμε την εξίσωση του προβλήματος.
- 5^{ov} Λύνουμε την εξίσωση
- 6^{ov} Εξετάζουμε αν η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό . Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού
ο δεύτερος το $\frac{1}{4}$ του ποσού και ο τρίτος το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 ευρώ ακόμα .

Να βρείτε το αρχικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

Λύση:

Ο άγνωστος μας είναι το ποσό! Άρα x είναι το ποσό !

Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού άρα πήρε $\frac{1}{3} \cdot x$

Ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού άρα πήρε $\frac{1}{4} \cdot x$

Ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 ευρώ άρα πήρε $\frac{1}{3} \cdot x + 100$

Αν προσθέσουμε τα ποσά των τριών φίλων θα πάρουμε ολόκληρο το ποσό. Άρα

ισχύει ότι : $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 100 = x$ Λύνουμε την κλασματική εξίσωση που

προκύπτει :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 100 &= x \Leftrightarrow \\ 12\frac{1}{3}x + 12\frac{1}{4}x + 12\frac{1}{3}x + 12 \cdot 100 &= 12x \Leftrightarrow \\ 4x + 3x + 4x + 1200 &= 12x \Leftrightarrow \\ 4x + 3x + 4x - 12x &= -1200 \Leftrightarrow \\ -1x &= -1200 \Leftrightarrow \\ \frac{-1x}{-1} &= \frac{-1200}{-1} \Leftrightarrow \\ x &= 1200\end{aligned}$$

Άρα το ποσό που μοιράστηκαν οι τρεις φίλοι είναι 1200 ευρώ

Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{3}1200 = 400$ ευρώ

Ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{4}1200 = 300$ ευρώ

Ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}1200 + 100 = 500$ ευρώ

2. Όλοι μου οι μαρκαδόροι εκτός από 3 είναι μπλε όλοι μου οι μαρκαδόροι εκτός από 4 είναι κόκκινοι όλοι μου οι μαρκαδόροι εκτός από 5 είναι μαύροι. Πόσους μαρκαδόρους έχω;

Λύση:

Ψάχνω να βρω όλους μου τους μαρκαδόρους! Έστω ότι όλοι μου οι μαρκαδόροι είναι x .

Οι μπλε είναι $x - 3$

Οι κόκκινοι είναι $x - 4$

Οι μαύροι είναι $x - 5$

Αν προσθέσουμε τους μπλε τους κόκκινους και τους μαύρους μαρκαδόρους θα προκύψουν όλοι οι μαρκαδόροι.

Άρα : $x - 3 + x - 4 + x - 5 = x$ (Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει)

$$\begin{aligned}x - 3 + x - 4 + x - 5 &= x \Leftrightarrow \\ x + x + x - x &= 3 + 4 + 5 \Leftrightarrow \\ 2x &= 12 \Leftrightarrow \\ \frac{2x}{2} &= \frac{12}{2} \Leftrightarrow \\ x &= 6\end{aligned}$$

Άρα όλοι μου οι μαρκαδόροι είναι 6 .

Οι μπλε είναι $6-3=3$

Οι κόκκινοι είναι $6-4=2$

Οι μαύροι είναι $6-5=1$

3. Αν μια μητέρα σήμερα είναι 48 ετών και η κόρη της 18 ετών . Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια της ηλικίας της κόρης.

Λύση:

Αν x τα χρόνια που θα περάσουν θα έχουμε ότι :

Η μητέρα θα έχει γίνει $48+x$ χρόνια ενώ

η κόρη θα έχει γίνει $18+x$ χρόνια .

Αφού η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια της ηλικίας της κόρης θα ισχύει ότι:

$$48+x=2(18+x) \text{ Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει}$$

$$48+x=2(18+x) \Leftrightarrow$$

$$48+x=36+2x \Leftrightarrow$$

$$x-2x=-48+36 \Leftrightarrow$$

$$-1x=-12 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1x}{-1}=\frac{-12}{-1} \Leftrightarrow$$

$$x=12$$

Άρα μετά από 12 χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια της ηλικίας της κόρης!

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο με περίμετρο 9 cm ώστε η μια διάσταση του να είναι διπλάσια της άλλης.
2. Οι βάσεις ενός τραπεζίου διαφέρουν κατά 3 cm το ύψος του είναι 17 cm και το εμβαδόν του 119 cm^2 . Να βρείτε τις βάσεις του τραπεζίου.
3. Ένας κτηνοτρόφος εκτρέφει κότες και αγελάδες. Αν τα κεφάλια των ζώων που έχει είναι 70 και τα πόδια των ζώων είναι 240 να βρείτε πόσες κότες και πόσες αγελάδες εκτρέφει.
4. Σε ένα τεστ με 10 ερωτήσεις κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ για κάθε ερώτηση που δεν απαντιέται ή δίνεται λάθος απάντηση αφαιρούνται 3 μονάδες. Ο Γιωργάκης πήρε στο τεστ 26 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;
5. Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε το $\frac{1}{3}$ του αριθμού αυτού βρίσκουμε 35. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;
6. Ο Βασίλης πλήρωσε για ένα εισιτήριο 4€ με έκπτωση 60%. Να βρείτε την τιμή του εισιτηρίου.
7. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς αριθμούς ώστε το άθροισμά τους να είναι 24.
8. Τρία αδέρφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 30€ ακόμη και ο τρίτος το $\frac{1}{4}$ του ποσού. Να βρείτε το ποσό που μοιράστηκαν και πόσα πήρε ο καθένας.
9. Ένα ξενοδοχείο έχει 48 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια. Αν έχει συνολικά 114 κλίνες να βρείτε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια έχει το ξενοδοχείο.
10. Οι σημερινές ηλικίες ενός πατέρα και του γιού του έχουν άθροισμα 50 χρόνια. Σε 8 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιού του. Να βρεις τη σημερινή τους ηλικία.
11. Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ενός τριγώνου αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη.

12. Σε μια συγκέντρωση οι άντρες ήταν διπλάσιοι από τις γυναίκες. Όταν έφυγαν 6 άντρες με τις συζύγους τους έμειναν τριπλάσιοι άντρες από τις γυναίκες. Πόσοι ήταν οι άντρες και πόσες οι γυναίκες στην αρχή της συγκέντρωσης;
13. Το άθροισμα δυο αριθμών είναι 177. Αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο παίρνουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 9. Να βρείτε τους αριθμούς.
14. Ο Νίκος διάβασε ένα βιβλίο 250 σελίδων σε 5 μέρες . Κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα
15. Τρεις φίλοι έχουν συνολικά 400 ευρώ. Ο Πέτρος έχει διπλάσια χρήματα από τον Γιάννη και ο Γιάννης έχει τριπλάσια χρήματα από τον Κώστα. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας.

1.5 Ανισώσεις α΄ βαθμού

➤ **Ιδιότητες ανισοτήτων:**

Μπορούμε να προσθέσουμε η να αφαιρέσουμε και στα δυο μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάξει η φορά της . Δηλαδή αν:

$a < b$ τότε $a + \gamma < b + \gamma$ και

$$a - \gamma < b - \gamma$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε η να διαιρέσουμε με τον ίδιο **θετικό αριθμό** και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης χωρίς να αλλάξει η φορά της . Δηλαδή αν: $a < b$ και γ θετικός ($\gamma > 0$) τότε $a \cdot \gamma < b \cdot \gamma$

$$\frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε η να διαιρέσουμε με τον ίδιο **αρνητικό αριθμό** και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης όμως θα αλλάξει η φορά της
Δηλαδή αν: $a < b$ και γ αρνητικός ($\gamma < 0$) τότε : $a \cdot \gamma > b \cdot \gamma$

$$\frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\gamma}$$

➤ **Μέθοδος επίλυσης ανισώσεων:**

Μέθοδος λύσεις ανίσωσης α΄ βαθμού:

Βήμα 1 Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το ΕΚΠ.

Βήμα 2 Απλοποιώ τους παρονομαστές .Κάνω τις επιμεριστικές ιδιότητες που υπάρχουν.

Βήμα 3 Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους.

Βήμα 4 Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Βήμα 4: Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και τα δύο μέλη της ανίσωσης και αν είναι θετικός αριθμός τότε δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης ενώ αν είναι αρνητικός αριθμός αλλάζουμε την φορά τα ανίσωσης.

Βήμα 5:Κάνουμε διάγραμμα στο οποίο δείχνουμε τις λύσεις της ανίσωσης.

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

- Στο τέλος της λύσης των ανισώσεων θα πρέπει να φτιάξουμε διάγραμμα που περιέχει τις λύσεις.
- Όταν έχουμε να βρούμε τις κοινές λύσεις 2 ή περισσότερων ανισώσεων φτιάχνουμε ένα κοινό διάγραμμα και βλέπουμε που συναληθεύουν οι λύσεις.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $19 - (x + 9) \geq 8(x - 1)$

Λύση:

$$19 - x - 9 \geq 8x - 8 \Leftrightarrow$$

$$-x - 8x \geq -19 + 9 - 8 \Leftrightarrow$$

$$-9x \geq -18 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{-18}{-9} \Leftrightarrow$$

$$x \leq 2$$



ii. $\frac{2x-1}{3} - \frac{2x-5}{6} > \frac{x+2}{3}$

Λύση

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{2x-5}{6} > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow$$

$$6 \frac{2x-1}{3} - 6 \frac{2x-5}{6} > 6 \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow$$

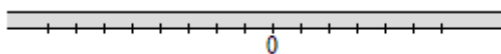
$$2(2x-1) - 1(2x-5) > 2(x+2) \Leftrightarrow$$

$$4x - 2 - 2x + 5 > 2x + 4 \Leftrightarrow$$

$$4x - 2x - 2x > 2 - 5 + 4 \Leftrightarrow$$

$$0x > 1$$

Αληθεύει για όλες τις τιμές του x.



2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

ι. $2(x-1)-3(x+1) \geq -2(x+3)$ και $3(x-3)+6 < 2(x+3)$

Λύση

Λύνουμε τις δύο ανισώσεις ξεχωριστά και θα φτιάξουμε ένα κοινό διάγραμμα λύσεων.

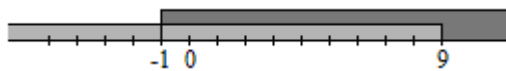
$$2(x-1)-3(x+1) \geq -2(x+3) \Leftrightarrow 3(x-3)+6 < 2(x+3) \Leftrightarrow$$

$$2x-2-3x-3 \geq -2x-6 \Leftrightarrow 3x-9+6 < 2x+6 \Leftrightarrow$$

$$2x-3x+2x \geq 2+3-6 \Leftrightarrow 3x-2x < 9-6+6 \Leftrightarrow$$

$$1x \geq -1 \Leftrightarrow 1x < 9 \Leftrightarrow$$

$$x \geq -1 \quad x < 9$$



Οι κοινές λύσεις είναι: $-1 \leq x < 9$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $12x + 7 \geq 15 + 10x$ β) $x + 13 < -2$ γ) $-5x + 4 \leq -3x + 6$ δ) $3x + 7 \geq -9x - 5$
2. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.
α) $\frac{3x}{4} - 2 \leq 5$ β) $-2(3x - 6) < 6(2 + x)$ γ) $-2(3 - x) + (x + 5) \geq -4(1 - x)$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους
i. $4\omega - 5 \leq 5\omega - \frac{8}{3}$
ii. $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \geq 0$
iii. $11x - (8x + 23) + 2(x - 8) \geq 5(3x - 7)$
iv. $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 3$
4. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.
i. $5(x + 1) > -6(x + 2) + 9x + 3$ και $\frac{x+2}{3} - \frac{2x+3}{2} > \frac{x-10}{6}$
ii. $-2(x - 3) + 5x > 3(x + 1) + x - 1$ και $x - \frac{x+1}{2} > \frac{4x}{3} + 2$
iii. $1 - (-1 - 3x) < 5(x - 2)$ και $4 - \frac{5-2x}{3} < \frac{x+11}{9}$
5. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.
α) $\frac{x-1}{6} - \frac{x-1}{2} < \frac{3-2x}{3}$ β) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 3$ γ) $x + \frac{2x-5}{3} > \frac{x}{6} + \frac{3}{2}$
6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων.
α) $x - 7 < 2$ και $5 - x < 2$
β) $2(x + 3) - 3(x + 1) \geq -2(x - 1)$ και $3(x - 3) + 7 < 2(x + 3)$
γ) $5 > 1 - 2x$ και $3x > 2x + 1$
δ) $5(3x - 1) \geq 11x + 7$ και $3(x - 1) + 5 < 2$
7. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις κοινές λύσεις τους.

α) $12 < 2x + 2 < 20$

β) $-2 < 3 - 5x < 18$

γ) $9 \leq 8x + 1 \leq 13$

8. Η μηνιαία κάρτα διαδρομών στις αστικές συγκοινωνίες μιας πόλης κοστίζει 10 ευρώ . Μια απλή διαδρομή κοστίζει 40 λεπτά. Πόσες διαδρομές το μήνα πρέπει να κάνει κάποιος για να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά της κάρτας;
9. Η Ελένη όταν ρωτήθηκε πόσα γραμματόσημα έχει απάντησε: αν είχα τα τριπλάσια γραμματόσημα θα είχα πιο πολλά από 750 , αν όμως είχα τα μισά θα είχα λιγότερα από 126. Πόσα γραμματόσημα έχει η Ελένη.
10. Να βρείτε τους τρεις μικρότερους ακέραιους που είναι λύσεις της ανίσωσης
- $$120 + 0,08 < 1,6x$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

- **Τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού a λέγεται ένας θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό a . Η τετραγωνική ρίζα συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.
- Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\sqrt{0} = 0$ επειδή $0^2 = 0$
2. $\sqrt{a} \geq 0$ για κάθε $a \geq 0$
3. Αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt{a})^2 = a$
4. $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Δεν ορίζεται η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{144}, \sqrt{1,44}, \sqrt{0,0144}, \sqrt{14400}$$

Λύση

$$\sqrt{144} = 12 \quad \text{διότι } 12^2 = 144$$

$$\sqrt{1,44} = 1,2 \quad \text{διότι } 1,2^2 = 1,44$$

$$\sqrt{0,0144} = 0,12 \quad \text{διότι } 0,12^2 = 0,0144$$

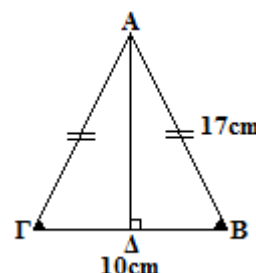
$$\sqrt{14400} = 120 \quad \text{διότι } 120^2 = 14400$$

2. Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο. Από Π.Θ. γνωρίζουμε ότι :

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Leftrightarrow 17^2 = x^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 17^2 - 5^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 289 - 25 \Leftrightarrow x^2 = 264 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{264} \Leftrightarrow x = 16\text{cm}$$



3. Να βρείτε τους Θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 81$ β) $x^2 = -16$

Λύση

α) $x^2 = 81 \Leftrightarrow$

Ο θετικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή είναι το 9 διότι $9^2 = 81$

β) $x^2 = -16$

Δεν υπάρχει θετικός αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός για αυτό η εξίσωση είναι αδύνατη.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{49}, \sqrt{0,49}, \sqrt{4900}, \sqrt{0,0049}$

β) $\sqrt{196}, \sqrt{1,96}, \sqrt{19600}$

γ) $\sqrt{100}, \sqrt{0,01}, \sqrt{0,0001}, \sqrt{10000}$

δ) $\sqrt{\frac{25}{36}}, \sqrt{\frac{49}{121}}, \sqrt{\frac{256}{225}}, \sqrt{\frac{169}{144}}$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{100}$ β) $\sqrt{49}$ γ) $\sqrt{25}$ δ) $\sqrt{169}$ ε) $\sqrt{121}$ στ) $\sqrt{36}$ ζ) $\sqrt{81}$ η) $\sqrt{64}$

3. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{9}, \sqrt{0,09}, \sqrt{0,0009}, \sqrt{0,000009}, \sqrt{0,00000009}$

β) $\sqrt{16}, \sqrt{0,16}, \sqrt{0,0016}, \sqrt{0,000016}, \sqrt{0,00000016}$

γ) $\sqrt{9}, \sqrt{900}, \sqrt{90000}, \sqrt{9000000}, \sqrt{900000000}$

δ) $\sqrt{36}, \sqrt{0,36}, \sqrt{3600}, \sqrt{0,0036}, \sqrt{360000}$

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{\frac{36}{100}}$ β) $\sqrt{\frac{64}{81}}$ γ) $\sqrt{\frac{121}{144}}$ δ) $\sqrt{\frac{0,04}{0,09}}$ ε) $\sqrt{\frac{1,44}{2,25}}$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{16} - \sqrt{100} + 5\sqrt{4}$ β) $\sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{\frac{36}{16}} - \sqrt{\frac{49}{64}}$ γ) $\sqrt{(-2)(-8)} + \sqrt{(-2)(-32)}$

δ) $\sqrt{(-2)(1-3) - 3(-4)}$ ε) $\sqrt{\left(-\frac{1}{27}\right)(-16)}$ στ) $\sqrt{\left(-\frac{25}{36}\right)\left(-\frac{4}{49}\right)}$

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{2\sqrt{16} - 5\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ β) $\frac{\sqrt{169} - 2\sqrt{36}}{\sqrt{144}}$ γ) $\frac{\sqrt{49} - 5\sqrt{16}}{\sqrt{196} - \sqrt{64}}$ δ) $\frac{\sqrt{0,49} - \sqrt{0,16}}{\sqrt{1,96} - \sqrt{0,36}}$

7. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{3\sqrt{9}}$ β) $\sqrt{8\sqrt{4}}$ γ) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}$ δ) $\sqrt{20 + \sqrt{22 + \sqrt{3 + \sqrt{36}}}}$

ε) $\sqrt{13 - \sqrt{21 - \sqrt{29 - \sqrt{16}}}}$ στ) $\sqrt{2 + \sqrt{45 + \sqrt{22 - \sqrt{36}}}}$

8. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{2x + 14}$

α) Για ποιες τιμές του x έχει νόημα;

β) Ποια είναι η τιμή της παράστασης για $x=1$;

9. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{36} + \sqrt{144} = \quad \beta) \sqrt{12^2} - \sqrt{5^2} \quad \gamma) \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{81} =$$

10. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 = 36 \quad \beta) x^2 = \frac{144}{25} \quad \gamma) x^2 = -100$$

2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

- **Ρητός** είναι ένας αριθμός που γράφεται σε κλασματική μορφή με τους όρους του κλάσματος να είναι ακέραιοι.
- **Άρρητος** ονομάζεται ένας αριθμός που δεν είναι ρητός. πχ ($\sqrt{2}$)
- **Πραγματικοί** είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί.
- Τους πραγματικούς αριθμούς τους τοποθετούμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή την οποία ονομάζουμε άξονα των πραγματικών αριθμών.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα αλλά και άλλοι αριθμοί όπως ο αριθμός $\pi \approx 3,14$.
- Οι ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν στους ρητούς αριθμούς ισχύουν και στους πραγματικούς.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

α) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{2}, 1$

Λύση

$$1 < \sqrt{2} < \sqrt{5} < \sqrt{7} < \sqrt{13}$$

2. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως 2 δεκαδικά ψηφία των αριθμών:

α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{7}$

Λύση

$$\sqrt{3} \approx 1,73 \text{ και } \sqrt{7} \approx 2,64$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Να βάλετε σε μια σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:
 α) $\sqrt{3}, 1\sqrt{8}, \sqrt{7}, \sqrt{10}$ γ) $\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{3}$
 β) $\sqrt{12}, \sqrt{6}, \sqrt{2}, 1$ δ) $\sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{2}$
- Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως τρία δεκαδικά ψηφία των αριθμών :
 α) $\sqrt{15}$ β) $\sqrt{7}$
- Να αποδείξετε ότι:
 i. $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$
 ii. $\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5\sqrt{6}$
- Δίνονται οι παραστάσεις $\lambda = \sqrt{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + \sqrt{5x+10}}$ και $\mu = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x-2}}}$
 i. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ για $x = 3$
 ii. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις λ και μ . Να βρείτε το μήκος της διαγώνιου του.
- Να λύσετε τις εξισώσεις :
 α) $x^2 = 7$ β) $x^2 = -6$ γ) $x^2 = 1$ δ) $x^2 = 13$
- Να τοποθετήσετε σε σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $-\sqrt{5}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{15}, 14, -\sqrt{12}$
- Να βρεθεί το εμβαδό ενός τετραγώνου με διαγώνιο 8cm.
- Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
 α) $5\sqrt{2} - \sqrt{50}$ β) $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{48}$ γ) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2\sqrt{12} - \sqrt{27}}$
- Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις πιο κάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να υπολογίσετε προσεγγιστικά τις τιμές τους .
 α) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$
 β) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{7} - 4\sqrt{5} - 6\sqrt{7} + 2\sqrt{7} =$

2.3 Προβλήματα

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Δυο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 12 cm και 13 cm να βρεθεί η τρίτη πλευρά του ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. (Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις)

Λύση:

1^η περίπτωση:

Η ζητούμενη πλευρά να είναι η υποτείνουσα.

$$x^2 = 12^2 + 13^2$$

$$x^2 = 144 + 169$$

$$x^2 = 313$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{313}$$

$$x = \sqrt{313} \text{ cm}$$

2^η περίπτωση:

Η ζητούμενη πλευρά να είναι μια κάθετη πλευρά :

$$13^2 = x^2 + 12^2$$

$$x^2 = 13^2 - 12^2$$

$$x^2 = 169 - 144$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 10 cm Αν Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΔ να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

Λύση:

Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο. Από Π.Θ. γνωρίζω ότι :

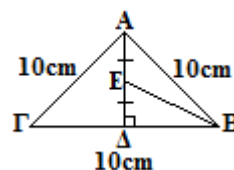
$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 10^2 - 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 100 - 25 \Leftrightarrow x^2 = 75$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{75} \Leftrightarrow x = \sqrt{75} \text{ cm}$$

Την $\sqrt{75}$ μπορούμε να την απλοποιήσουμε:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Αφού το Ε είναι μέσο της ΑΔ ισχύει $BE = \frac{AD}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.



Για να βρούμε την πλευρά ΕΔ εφαρμόζουμε Π.Θ στο τρίγωνο ΕΔΒ.

$$EB^2 = E\Delta^2 + \Delta B^2 \Leftrightarrow$$

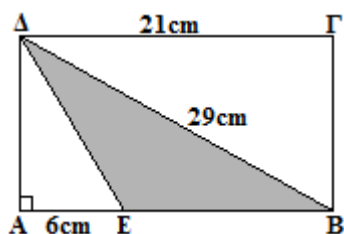
$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{75}}{2}\right)^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{75^2}}{2^2} + 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{75}{4} + 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{75}{4} + \frac{100}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{175}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{175}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{175}}{2} = \frac{7\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Άρα } E\Delta = \frac{7\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δυο τετραγώνων με πλευρές 2,3 cm και 3,6 cm .
2. Δυο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 5cm και 4 cm αντίστοιχα .Να βρεθεί η τρίτη πλευρά ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο.(Να διακρίνεται δυο περιπτώσεις)
3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) έχει βάση $B\Gamma = 30\text{cm}$ και περίμετρο 64cm.Να βρείτε:
α) Το ύψος AD του τριγώνου
β) Το εμβαδόν του τριγώνου
4. Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι $d = 20\text{ cm}$.Μα υπολογίσετε την περίμετρό του.
5. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου $KLMN$ έχει $\hat{K} = \hat{N} = 90^\circ$ με $KL = 29\text{m}$, $MN = 20\text{m}$ και $KN = 12\text{m}$.Θέλουμε να το περιφράξουμε με συρματοπλέγμα που στοιχίζει 12 ευρώ το μέτρο .Πόσο θα μας στοιχίσει η περίφραξη;
6. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEB .



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

- **Συνάρτηση** ονομάζεται μία σχέση όπου κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή της μεταβλητής y .

π.χ. Οι παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις:

α) $y = 2x + 1$, β) $y = 5x - 14$

- Πίνακας τιμών μίας συνάρτησης είναι ένας πίνακας που έχει ζεύγη τιμών που επαληθεύουν την συνάρτηση.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών

της συνάρτησης $y = 3x - 1$

Λύση:

x	-3	-2	-1	0	
y					5

Βλέπουμε τις τιμές που μας έχουν δοθεί για την μεταβλητή x αντικαθιστούμε στην συνάρτηση και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής y .

Για $x = -3$ έχουμε : $y = 3 \cdot (-3) - 1 = -9 - 1 = -10$

Για $x = -2$ έχουμε : $y = 3 \cdot (-2) - 1 = -6 - 1 = -7$ ○ ○ ○

Για $x = -1$ έχουμε : $y = 3 \cdot (-1) - 1 = -3 - 1 = -4$

Για $x = 0$ έχουμε : $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

Για $y = 5$ έχουμε

$$5 = 3x - 1 \Leftrightarrow$$

$$-3x = -5 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-3x = -6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow$$

$$x = 2$$

Προσοχή στην αντικατάσταση αρνητικών να τους βάζουμε **πάντα** σε παρένθεση.

Άρα ο πίνακας συμπληρώνεται:

x	-3	-2	-1	0	2
y	-10	-7	-4	-1	5

2. Ένας υπάλληλος παίρνει μισθό 500 € το μήνα και ποσοστό 8% επί των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y που κερδίζει το μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

Λύση

Αν x είναι οι πωλήσεις που πραγματοποιεί τότε το 8% επί των πωλήσεων είναι

$\frac{8}{100}x$. Ο συνολικός του μισθός θα είναι τα 500 € συν τα χρήματα που παίρνει

από το ποσοστό των πωλήσεων.

Άρα η συνάρτηση είναι $y = 500 + \frac{8}{100}x$ που μπορεί να γραφτεί σαν

$$y = 500 + 0,08x$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Δίνετε η συνάρτηση : $y = 3x - 4$ να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

X	-3	-2	-1	0	2
Y					

2. Δίνεται η συνάρτηση : $y = 2 - 3x$ να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

X	-2	-1	0	3	5
Y					

3. Δίνεται η συνάρτηση : $y = 2x^2 - 1$ να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

X	-2	-1	0	3	5
Y					

4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = -3x + 4$

X	0		1	2	-3		-1
Y		8				10	

5. β) $y = x^2 + 3$

X	0	-1	1	2	-2		
Y						12	

6. Δίνεται η συνάρτηση $y = -3x + \beta$

α) Να βρείτε τον αριθμό β αν γνωρίζετε ότι για $x = -1$ έχουμε ότι $y = 6$

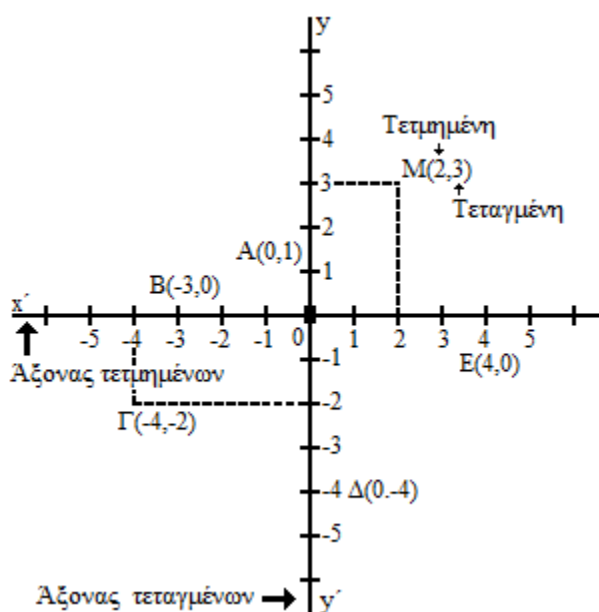
β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	0		-1	2	-3		-2
y		-1				4	

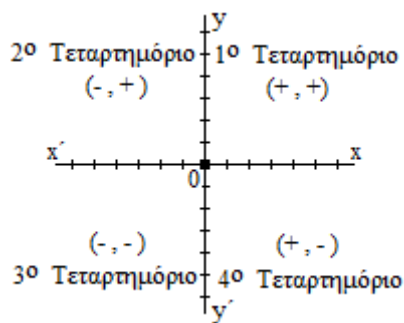
7. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y .
- α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 50 cm να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x . Στη συνέχεια να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου όταν η μια από αυτές είναι 8 cm.
- β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 240 cm^2 .

3.2Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από δυο κάθετους άξονες. Ο οριζόντιος άξονας x' λέγεται άξονας των τετμημένων ενώ ο κατακόρυφος y' άξονας των τεταγμένων .
- Κάθε σημείο M του επιπέδου συμβολίζεται με ένα ζεύγος αριθμών $M(x,y)$ όπου ο πρώτος αριθμός ονομάζεται τετμημένη του σημείου και ο δεύτερος τεταγμένη. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται συντεταγμένες.
- Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) ενός σημείου M αποτελεί τις συντεταγμένες του.
- Κάθε σημείο του άξονα x' έχει τεταγμένη 0 . Αν ένα σημείο έχει 0 τεταγμένη βρίσκεται πάνω στον άξονα x' .
- Κάθε σημείο του άξονα y' έχει τετμημένη 0 . Αν ένα σημείο έχει τετμημένη 0 βρίσκεται πάνω στον άξονα y'
- Το σημείο που ενώνονται οι άξονες λέγεται αρχή των αξόνων και έχει συντεταγμένες $(0,0)$
- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος αριθμών και αντιστρόφως κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο του επιπέδου.
- Οι άξονες x' και y' αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων ή απλώς σύστημα αξόνων.



Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε 4 κομμάτια καθένα από τα οποία ονομάζεται τεταρτημόριο.



- **Γραφική παράσταση συνάρτησης** είναι η απεικόνιση όλων των ζευγών (x, y) που την επαληθεύουν σε άξονες συντεταγμένων.
- **Μέθοδος κατασκευής γραφικής παράστασης συνάρτησης :**

Βήμα 1^ο : Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης

Βήμα 2^ο : Τοποθετούμε τα διατεταγμένα ζεύγη από τον πίνακα τιμών σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων οπότε βρίσκουμε τα αντίστοιχα σημεία.

Βήμα 3^ο : Ενώνουμε τα σημεία με μια γραμμή. Η γραμμή αυτή είναι η γραφική παράσταση.

- **Η απόσταση** δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :**

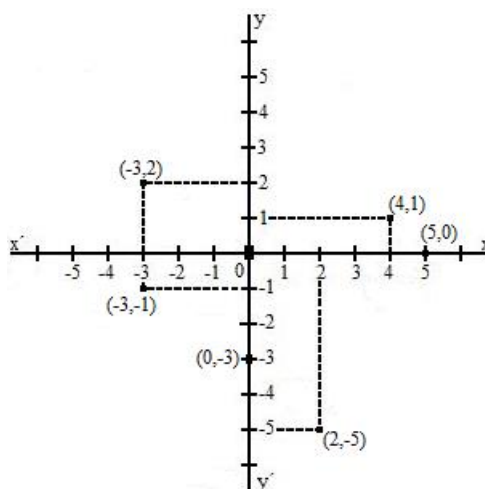
- Όταν οι μονάδες μέτρησης στους άξονες είναι ίδιες το σύστημα αξόνων ονομάζεται ορθοκανονικό ενώ αν δεν είναι ίδιες ονομάζεται ορθογώνιο.
- Όταν ένα σημείο βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x' όταν έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y' όταν έχουν αντίθετη τετμημένη και ίδια τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων όταν έχουν αντίθετη τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών σε άξονες συντεταγμένων:

α) (4,1) β) (-3,2) γ) (-3,-1) δ) (2,-5) ε) (5,0) στ) (0,-3) \

Λύση:



2. Δίνονται τα σημεία A(3,1) και B(-3, $\frac{3}{2}$) να βρείτε τα συμμετρικά τους ως προς τους άξονες xx' και yy'.

Λύση

Το συμμετρικό του σημείου A(3,1) ως προς τον άξονα xx' θα είναι το σημείο Γ (3,-1)

Το συμμετρικό του σημείου A(3,1) ως προς τον άξονα yy' θα είναι το σημείο Δ (-3,1)

Το συμμετρικό του σημείου B(-3, $\frac{3}{2}$) ως προς τον άξονα xx' θα είναι το σημείο Ε (-3, $-\frac{3}{2}$)

Το συμμετρικό του σημείου B(-3, $\frac{3}{2}$) ως προς τον άξονα yy' θα είναι το σημείο Ζ (3, $\frac{3}{2}$)

3. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων : A(2,1) και B(5,5)

Λύση

Για να βρούμε την απόσταση των σημείων A και B χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

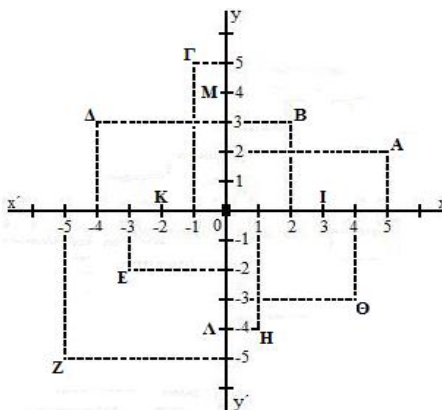
$$\text{Άρα } (AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών σε άξονες συντεταγμένων:

α) $(4,1)$ β) $(-4,3)$ γ) $(\frac{3}{2}, -3)$ δ) $(-2, -5)$ ε) $(0,6)$ στ) $(3,0)$

2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



3. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων:

α) $A(1,4)$ και $B(9,10)$ β) $A(-4,1)$ και $B(8,6)$

γ) $A(0,7)$ και $B(4,-4)$ γ) $(-7,5)$ και $(8,13)$

4. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες .

α) $A(7,5)$ β) $B(-4,-2)$ γ) $\Gamma(-1,9)$ δ) $(0,7)$ ε) $E(-9,0)$

5. Δίνεται το σημείο $A(-3,4)$ Να βρείτε το συμμετρικό του ως προς :

α) Τον άξονα xx' .

β) Τον άξονα yy' .

γ) Την αρχή των αξόνων.

6. Να σχεδιάσετε της γραφική παράσταση της

συνάρτησης $y = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

(Υπόδειξη: Πρώτα να συμπληρώσετε τον διπλανό ένα πίνακα τιμών)

3.3 Η συνάρτηση $y = ax$

Ποσά ανάλογα :

- Δυο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με ένα αριθμό τότε και η τιμή του άλλου πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.
- Όταν δυο ποσά είναι ανάλογα τότε ο λόγος των τιμών τους παραμένει σταθερός.
- **Αν δύο ποσά είναι ανάλογα τότε οι τιμές y του ενός εκφράζονται ως συνάρτηση των τιμών x του άλλου με την σχέση $y = ax$**
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- **Κλίση** της συνάρτησης $y = ax$ είναι ο λόγος y προς x και είναι ίσος με a .
- Για να φτιάξουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ φτιάχνουμε πίνακα τιμών με δύο τιμές του x (Συνήθως η μια είναι το 0) και τοποθετούμε τα διατεταγμένα ζεύγη σε άξονες. Αν ενώσουμε τα σημεία θα προκύψει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία αυτή είναι η γραφική παράσταση.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Η συνάρτηση $y = ax$ όταν είναι $a > 0$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από το 1^ο και το 3^ο τεταρτημόριο, ενώ όταν είναι $a < 0$ διέρχεται από το 2^ο και το 4^ο τεταρτημόριο.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

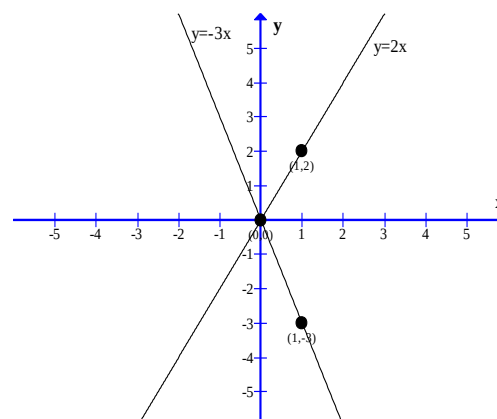
1. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x$ και $\varepsilon_2 : y = -3x$. Ποια είναι η κλίση της ευθείας $\varepsilon_1 : y = 2x$;

Λύση :

Φτιάχνουμε πίνακα τιμών για την κάθε συνάρτηση ξεχωριστά :

$$\varepsilon_1 : y = 2x$$

x	0	1
y	0	2



Τοποθετούμε τα ζεύγη (0,0) και (1,2) σε άξονες συντεταγμένων. Ενώνουμε τα σημεία με την ευθεία που διέρχεται από πάνω τους και έτσι δημιουργήσαμε την γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

x	0	1
y	0	-3

$$\varepsilon_2 : y = -3x$$

Τοποθετούμε τα ζεύγη (0,0) και (1,2) σε άξονες συντεταγμένων. Ενώνουμε τα σημεία με την ευθεία που διέρχεται από πάνω τους

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων και το σημείο A (3,1)

Λύση

Ψάχνουμε να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων . Άρα θα είναι της μορφής $y = ax$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο A (3,1) μπορούμε να βρούμε την κλίση της.

Ισχύει ότι $a = \frac{y}{x}$. Επομένως $a = \frac{1}{3}$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η $y = \frac{1}{3}x$

3. Οι τιμές των προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 30% σε ένα χρόνο.

α) Να βρείτε την σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των προϊόντων ως συνάρτηση των παλιών τιμών τους x .

β) Να σχεδιάσετε την συνάρτηση

γ) Να βρείτε την σημερινή τιμή ενός προϊόντος αν πέρσι είχε 5 €.

Λύση

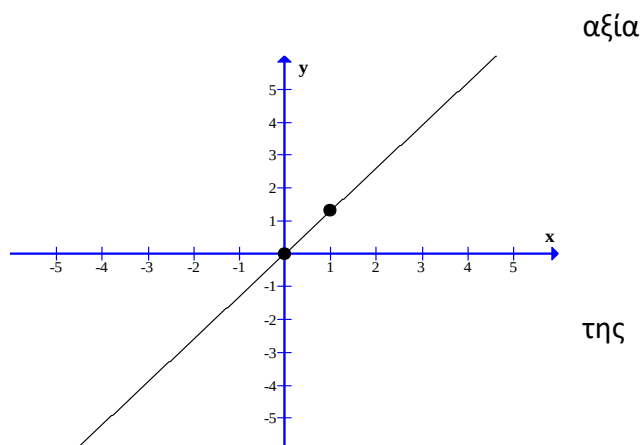
α) Αν x παλιές τιμές τότε η αύξηση θα είναι $\frac{30}{100}x = 0,3x$.

Άρα οι νέες τιμές θα έχουν την παλιά τιμή συν την αύξηση.

Επομένως $y = x + 0,3x \Leftrightarrow$

$$y = 1,3x$$

β) Φτιάχνουμε το πίνακα τιμών συνάρτησης $y = 1,3x$



Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

X	0	1
Y	0	1,3

γ) Αν η περσινή τιμή του προϊόντος είχε $x = 5\text{€}$ Η σημερινή θα είναι :
 $y = 1,3 \cdot 5 = 6,5\text{€}$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Δίνεται ο διπλανός πίνακας τιμών να διαπιστώσετε αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα και στη συνέχεια να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

x	1	2	2,3	5	7
y	3	6	6,9	15	21

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:

$$y = 2x \quad y = -3x \quad y = 5x$$

3. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών δύο ποσών:

x	1	0,5	1,2	4	5,4
y	0,5	0,25	0,6	2	2,7

Να διαπιστώσετε ότι τα ποσά είναι ανάλογα και στη συνέχεια να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

4. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:

$$y = 4x \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{4}x$$

5. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$y = \frac{1}{3}x, \quad y = \frac{2}{3}x, \quad y = x, \quad y = 3x. \quad \text{Τι παρατηρείτε;}$$

6. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{2}{3}x, \quad y = -\frac{3}{2}x. \quad \text{Τι παρατηρείτε;}$$

7. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(-4,4)$.

α) Ποια είναι η κλίση της ευθείας αυτής;

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

8. Μία οικιακή βοηθός για μία ώρα εργασίας πληρώνεται με 7€. Αν y τα χρήματα που παίρνει και x οι ώρες που εργάζεται, να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε.

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(9,3)$

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και

έχει κλίση $-\frac{3}{5}$

11. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $v=5$ m/s. Να εκφράσετε το διάστημα S που διανύει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t . Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση αυτή.

12. Μια επιχείρηση έκανε αύξηση 4% στις αποδοχές των εργαζομένων

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες αποδοχές y ως συνάρτηση των παλιών αποδοχών x .

β) Να βρείτε τις νέες αποδοχές ενός εργαζόμενου που είχε μισθό 900€.

γ) Να βρείτε τις παλιές αποδοχές ενός εργαζόμενου που παίρνει τώρα 990€

13. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(\sqrt{2}, 2)$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση που έχει ως γραφική παράσταση την ευθεία αυτή.

β) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τον άξονα Ox .

3.4 Η συνάρτηση $y = ax + b$

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + b$ είναι μια ευθεία που τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $(0, b)$.
- **Κλίση** της συνάρτησης $y = ax + b$ είναι ο αριθμός a .
- Η συνάρτηση $y = ax + b$ είναι **παράλληλη** με την $y = ax$
- Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει ευθεία.
- Κάθε εξίσωση της μορφής $x = a$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα yy' και διέρχεται από το σημείο $(a, 0)$
- Κάθε εξίσωση της μορφής $y = a$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα xx' και διέρχεται από το σημείο $(0, a)$.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα yy'
- Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα xx'
- Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ τέμνει τον άξονα xx' θέτουμε $y = 0$ και υπολογίζουμε την τετμημένη x .
- Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ τέμνει τον άξονα yy' θέτουμε $x = 0$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη y .
- Η ευθεία $ax + by = \gamma$ είναι παράλληλη με τον άξονα xx' όταν $a = 0$ και $b \neq 0$
- Η ευθεία $ax + by = \gamma$ είναι παράλληλη με τον άξονα yy' όταν $a \neq 0$ και $b = 0$
- Η ευθεία $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν $\gamma = 0$

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -3x + 1$ και $y = -3x - 2$. Τι παρατηρείτε;

Λύση :

Φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών για την κάθε συνάρτηση ξεχωριστά.

$$y = -3x + 1$$

x	0	1
y	1	-2

Τοποθετούμε τα ζεύγη (0,1) και (1,-2)

σε άξονες συντεταγμένων.

Ενώνουμε τα σημεία με την ευθεία

που διέρχεται από πάνω και έτσι

δημιουργήσαμε την γραφική

παράσταση όπως φαίνεται στο

διπλανό σχήμα.

$$y = -3x - 2$$

x	0	1
y	-2	-5

Τοποθετούμε τα ζεύγη (0,-2) και (1,-5) σε άξονες συντεταγμένων.

Ενώνουμε τα σημεία με την ευθεία που διέρχεται από πάνω τους. Παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

2. Δίνεται η εξίσωση $2x + 3y = 6$

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες

β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας

Λύση

Για τον άξονα x ΄ θέτουμε $y = 0$ και έχουμε :

$$2x + 3 \cdot 0 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα το σημείο είναι το (3 , 0)

Για τον άξονα y ΄ θέτουμε $x = 0$ και έχουμε :

$$2 \cdot 0 + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 2$$

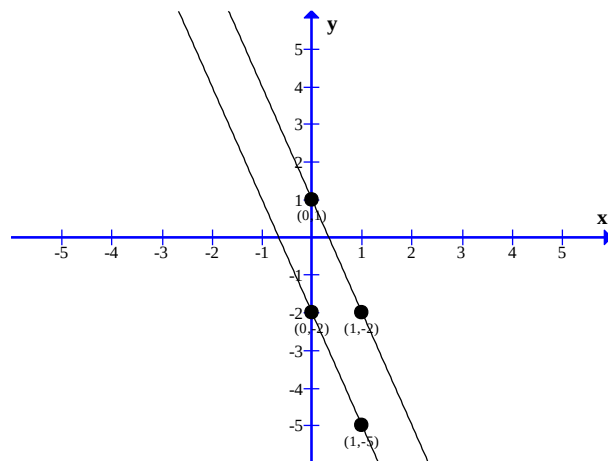
Άρα το σημείο είναι το (0 , 2)

3. Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

και να διέρχεται από το σημείο A(0,6) Στη συνέχεια να :

α) Την σχεδιάσετε σε άξονες συντεταγμένων

β) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B με τους άξονες x ΄ και y ΄



γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB

Λύση

Επειδή η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,6)$ θα είναι της μορφής

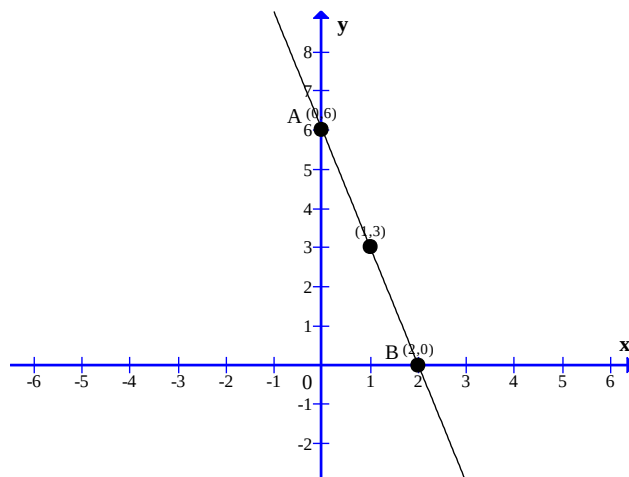
$$y = ax + \beta \text{ με } \beta = 6.$$

Η κλίση της ευθείας $y = -3x$ είναι -3 Επειδή οι δύο ευθείες είναι παράλληλες θα έχουν την ίδια κλίση. Άρα $a = -3$ Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = -3x + 6$

α) Φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών για την

x	0	1
y	6	3

συνάρτηση $y = -3x + 6$



Τοποθετούμε τα ζεύγη $(0,1)$ και $(1,-2)$

σε άξονες συντεταγμένων. Ενώνουμε τα

σημεία με την ευθεία που διέρχεται από πάνω και έτσι δημιουργήσαμε την γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο

διπλανό σχήμα.

β) Το σημείο τομής με τον άξονα x είναι το $B(2,0)$ όπως φαίνεται από το σχήμα.

Το σημείο τομής με τον άξονα y είναι το $A(0,6)$

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = \frac{12}{2} = 6$ τ.μ.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
 $\varepsilon_1 : y = 3x$, $\varepsilon_2 : y = 3x + 2$, $\varepsilon_3 : y = 3x - 4$
Τι παρατηρείτε για τις παραπάνω ευθείες;
2. Να παραστήσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 3$ όταν :
α) Ο x είναι πραγματικός αριθμός
β) $x \leq 0$
γ) $-4 \leq x \leq 3$
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση $\frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $A(0,3)$
4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στη ευθεία $y = -x$ και διέρχεται από το σημείο $A(2,6)$
5. Να βρείτε σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες η ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 12$
6. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση $5x + y = 1$
α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας αυτής.
β) Να βρείτε τα σημεία A και B που τέμνει τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
7. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες με εξισώσεις :
 $x = 4$, $y = 3$, $x = -2$, $y = -1$
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου που σχηματίζεται.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται.
8. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
 $y = 3x + 1$ και $y = 2x + 2$
9. Ένας υπάλληλος εταιρίας κινητών έχει μισθό 800€ και 5% επί της αξίας των πωλήσεων που πραγματοποιεί.
α) Να εκφράσετε τις μηνιαίες αποδοχές του y ως συνάρτηση των πωλήσεων x που πραγματοποιεί.
β) Ποια είναι η αξία του εμπορεύματος που πρέπει να πουλήσει για να φτάσουν οι αποδοχές του τα 1200€ ;

- γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.
10. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
- α) $y=2x$, $y=2x+1$, $y=2x-3$, $y=2x+4$. Τι παρατηρείτε;
- β) $y=x+2$, $y=2x+2$, $y=-\frac{3}{4}x+2$, $y=-x+2$. Τι παρατηρείτε;
11. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $y=-\frac{1}{2}x+4$ όταν:
- α) ο x είναι πραγματικός αριθμός β) $x \leq 1$ γ) $-4 \leq x \leq 5$
12. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=3x$. Στη συνέχεια στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=3x-3$ και $y=3x+2$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε πίνακα τιμών.
13. Μια ευθεία έχει κλίση -1 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,4)$
- α) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω ευθείας.
- β) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- γ) Να εξετάσετε αν η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$
14. Η ευθεία $y=(\lambda+1)x+\beta$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=-2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$.
- α) Να βρείτε τις τιμές των λ και β .
- β) Να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή σε ένα σύστημα αξόνων.
- γ) Να εξετάσετε αν η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $B(2,1)$

3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ - Υπερβολή

- Δυο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.
- Όταν δυο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα όταν το γινόμενο των τιμών τους παραμένει σταθερό.
- Αν $a \neq 0$ το γινόμενο δυο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y , το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{a}{x}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ είναι μία καμπύλη γραμμή που ονομάζεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται :
 - Στο 1^ο και στο 3^ο τεταρτημόριο των αξόνων αν $a > 0$.
 - Στο 2^ο και στο 4^ο τεταρτημόριο των αξόνων αν $a < 0$.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Η υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή 0 των αξόνων, άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων δηλαδή της ευθείας $y = x$ και $y = -x$ και ασύμπτωτες τους άξονες xx' , yy' .

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές:

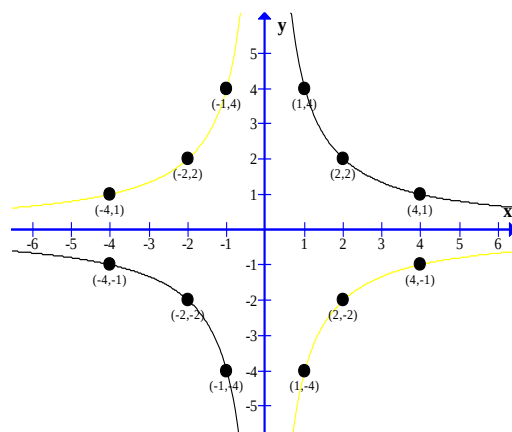
$$y = \frac{4}{x} \quad \text{και} \quad y = -\frac{4}{x}$$

Λύση

Φτιάχνουμε τους πίνακες τιμών για την κάθε συνάρτηση ξεχωριστά.

$$y = \frac{4}{x}$$

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1	-2	-4	4	2	1



$$y = -\frac{4}{x}$$

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	1	2	4	-4	-2	-1

2. Η απόσταση Αθήνα Θεσσαλονίκη είναι περίπου 500km

α) Ποια είναι η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε km/h που διανύει την απόσταση σε 10 ώρες αν υποθέσουμε ότι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση;

β) Να εκφράσετε την ταχύτητα v ενός αυτοκινήτου ως συνάρτηση του χρόνου που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση Αθήνα Θεσσαλονίκη

Λύση

α) Ο τύπος που μας δίνει την ταχύτητα είναι $v = \frac{x}{t}$

$$\text{Άρα } v = \frac{500}{10} = 50 \text{ m/s}$$

β) Επειδή η απόσταση παραμένει σταθερή η ταχύτητα του αυτοκινήτου ως συνάρτηση του χρόνου θα είναι : $v = \frac{500}{t}$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: α) $y = \frac{3}{x}$ β) $y = -\frac{3}{x}$
2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: α) $y = \frac{2}{x}$ β) $y = \frac{4}{x}$ γ) $y = \frac{5}{x}$
3. Χρειαζόμαστε 200 σωλήνες με μήκος 5 μέτρα ο καθένας για ύδρευση. Πόσους σωλήνες θα χρειαστούμε αν ο καθένας έχει μήκος 4 μέτρα;
4. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 200 τετραγωνικά μέτρα. Να εκφράσετε το μήκος του y ως συνάρτηση του πλάτους του x .
5. 12 εργάτες κάνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Ύστερα από 5 ημέρες από τότε που άρχισαν το έργο έφυγαν 2 εργάτες. Να βρεθεί σε πόσες μέρες θα τελειώσουν οι υπόλοιποι εργάτες το έργο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Βασικές έννοιες της στατιστικής : Πληθυσμός – Δείγμα

- **Πληθυσμός** ονομάζεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό. Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού ονομάζεται **μεταβλητή**.
- **Δείγμα** λέγεται το μέρος του πληθυσμού που εξετάζεται και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εξέταση κάθε ατόμου του δείγματος λέγονται **στατιστικά δεδομένα**. Για να έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα κατά της εξέταση του δείγματος , θα πρέπει το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Για να βρούμε το ποσοστό ενός αριθμού πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό επί το ποσοστό.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Για να εκτιμήσουμε τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις των μαθητών γυμνασίου , ρωτήσαμε 500 μαθητές από γυμνάσια της Αθήνας και είχαμε τα ακόλουθα ποσοστά : Παναθηναϊκός 35% , Ολυμπιακός 25% ,ΑΕΚ 20% ΠΑΟΚ 10% , ΑΡΗΣ 5% και Άλλη ομάδα 5%

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο είναι το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;

β) Να βρείτε πόσοι από τους μαθητές του δείγματος είναι Παναθηναϊκός , Ολυμπιακός , ΑΕΚ , ΠΑΟΚ , ΑΡΗΣ .

Λύση

Ο πληθυσμός είναι οι μαθητές από τα γυμνάσια. Το δείγμα είναι οι 500 μαθητές που ρωτήθηκαν. Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό διότι δεν πήραμε μαθητές από όλη την Ελλάδα παρά μόνο από την Αθήνα .

$$\text{Το 35\% του 500 είναι : } \frac{35}{100} \cdot 500 = 35 \cdot 5 = 175$$

$$\text{Το 25\% του 500 είναι : } \frac{25}{100} \cdot 500 = 25 \cdot 5 = 125$$

$$\text{Το 20\% του 500 είναι : } \frac{20}{100} \cdot 500 = 20 \cdot 5 = 100$$

$$\text{Το } 10\% \text{ του } 500 \text{ είναι : } \frac{10}{100} \cdot 500 = 10 \cdot 5 = 50$$

$$\text{Το } 5\% \text{ του } 500 \text{ είναι : } \frac{5}{100} \cdot 500 = 5 \cdot 5 = 25$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε χωρίς μολύβι και χαρτί :
α) Το 50% του 400. β) Το 25% του 200 γ) Το 10% του 90
δ) Το 100% του 500 ε) Το 20% του 250 στ) Το 1% του 1000
2. Να υπολογίσετε:
α) Το 5% του 60 β) Το 30% του 120 γ) Το 15% του 60
δ) Το 13% του 150 ε) Το 90% του 80 στ) Το 65% του 320
3. Να κυκλώσετε την σωστή απάντηση:
i. Το 35 είναι το 20% του αριθμού:
α) 70 β) 700 γ) 175 δ) 140
ii. Το 55% του αριθμού 300 είναι :
α) 110 β) 165 γ) 220 δ) 550
4. Σε μια έρευνα που έγινε σε 500 άτομα οι 300 ήταν άνδρες. Τι ποσοστό του δείγματος είναι οι άνδρες και τι ποσοστό οι γυναίκες;
5. Ένας φοιτητής ήθελε να κάνει εργασία για το είδος μουσικής που προτιμούν να ακούν οι μαθητές γυμνασίων. Πήγε σε ένα σχολείο στα Πατήσια και ρώτησε τους μαθητές. Είναι σωστό το αποτέλεσμα του;
6. Για να βρει ο Κωστάκης ποιες εκπομπές της τηλεόρασης έχουν μεγαλύτερη τηλεθέαση ρώτησε 400 μαθητές ποιες εκπομπές παρακολουθούν. Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας και ποιο είναι το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;
7. Ο Δημήτρης για να υπολογίσει το ποσοστό φιλάθλων της κάθε ομάδας ρώτησε 600 μαθητές από την Αθήνα ποιές ομάδες φίλαθλοι είναι. Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας ποιο είναι το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό ;
8. Σε μια δημοσκόπηση που έγινε για τις επερχόμενες εκλογές 150 άτομα απάντησαν ότι προτιμούν το κόμμα 'Α' , 100 άτομα το κόμμα 'Β' και 50 άτομα το κόμμα 'Γ' . Ποια είναι τα ποσοστά του κάθε κόμματος στη δημοσκόπηση;

4.2 Γραφικές παραστάσεις

➤ **Διαγράμματα** λέγονται οι εικόνες που παρουσιάζουν με σύντομο κατανοητό τρόπο ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων ή πληροφοριών. Έχουμε διάφορα είδη διαγραμμάτων τα οποία είναι τα εξής:

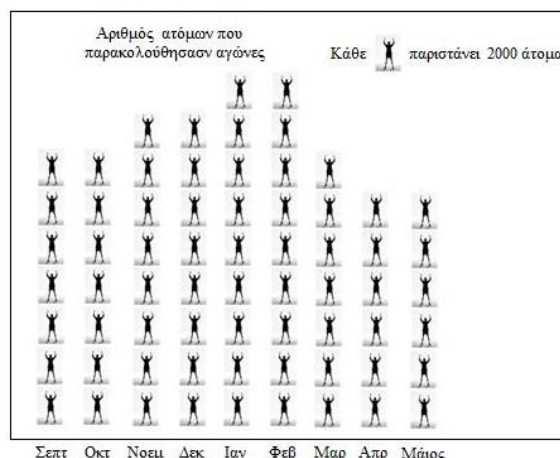
- 1) **Τα εικονογράμματα** στα οποία χρησιμοποιούμε μια εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην ερευνά μας. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα πρέπει να υπάρχει ο τίτλος που μας κατατοπίζει για το είδος και την μεταβλητή της έρευνας η κλίμακα που δείχνει των αριθμό των αντικειμένων που παριστάνει η εικόνα καθώς και ο τίτλος της κάθε στήλης και γραμμής.
- 2) **Τα ραβδογράμματα** στα οποία χρησιμοποιούμε ορθογώνια για να δείξουμε το πλήθος της κάθε μεταβλητής. Σε ένα ραβδόγραμμα πρέπει να υπάρχει ο τίτλος που μας κατατοπίζει για το είδος της έρευνας και οι τίτλοι των αξόνων.
- 3) **Τα κυκλικά διαγράμματα** στα οποία το δείγμα παριστάνεται με ένα κυκλικό δίσκο (πίτα) και οι τιμές της μεταβλητής με κυκλικούς τομείς (συνήθως διαφορετικού χρώματος) Για να βρούμε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\text{γωνία} = \frac{\text{συχνότητα της μεταβλητής}}{\text{Μέγεθος δείγματος}} \cdot 360^\circ$$

- 4) **Τα χρονογράμματα** τα οποία είναι διαγράμματα που χρησιμοποιούμε για να δούμε την διαχρονική εξέλιξη ενός φαινομένου.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Ο αριθμός των θεατών που παρακολούθησαν αγώνες ποδοσφαίρου σε ένα γήπεδο φαίνεται από το διπλανό εικονόγραμμα:
 - α) Να βρείτε πόσοι φίλαθλοι παρακολούθησαν τους αγώνες τους πέντε πρώτους μήνες.
 - β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των φιλάθλων που παρακολούθησαν αγώνες το μήνα Ιανουάριο.



γ) Να μετατραπεί το εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα

Λύση:

α)Τους πέντε πρώτους μήνες παρακολούθησαν συνολικά :

$$14000 + 14000 + 16000 + 16000 + 18000 = 78000 \text{ άτομα}$$

β) Συνολικά παρακολούθησαν αγώνες

$$14000 + 14000 + 16000 + 16000 + 18000 + 18000 + 14000 + 12000 + 12000 = 134000$$

Το μήνα Ιανουάριο παρακολούθησαν τους αγώνες 18.0000 άτομα

Τα 134000 είναι το 100%

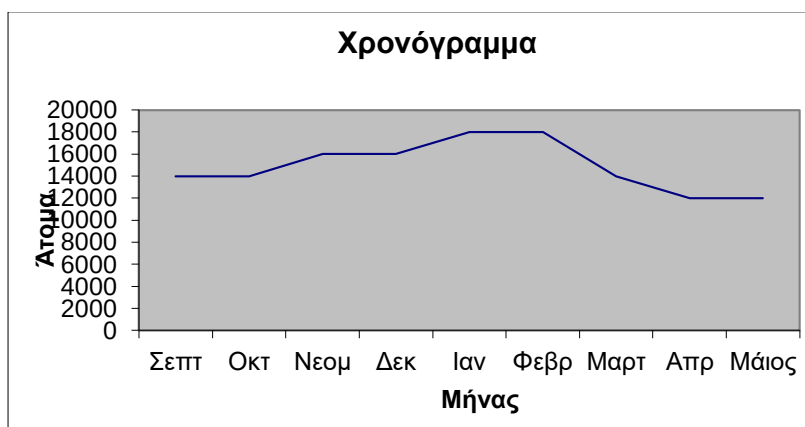
Τα 18000 είναι το x

$$134000 \cdot x = 18000 \cdot 100 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1800000}{134000}$$

$$x = 13,43\%$$

γ) Το χρονόγραμμα είναι:



2. Σε μια έρευνα που έγινε σε ένα 50 οικογενειών ως προς των αριθμό παιδιών ανά οικογένεια πήραμε τις απαντήσεις :

Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα κυκλικό διάγραμμα .

Λύση :

Το ραβδόγραμμα θα είναι το εξής :

Αριθμός παιδιών	Οικογένειες
0	5
1	15
2	20
3	8
4	2
Σύνολο	50

δείγμα

των
εξής

και το

Στον οριζόντιο άξονα γράφουμε των αριθμό των παιδιών ενώ στον κατακόρυφο άξονα τον αριθμό των οικογενειών. Στη συνέχεια φτιάχνουμε ορθογώνια το ύψος των οποίων καθορίζεται από τον αριθμό των οικογενειών.



Για να φτιάξουμε το κυκλικό διάγραμμα θα πρέπει να βρούμε τις μοίρες για την κάθε τιμή του αριθμού των παιδιών από τον γνωστό μας τύπο:

$$\text{γωνία} = \frac{\text{συχνότητα της μεταβλητής}}{\text{Μέγεθος δείγματος}} \cdot 360^\circ$$

Άρα έχουμε :

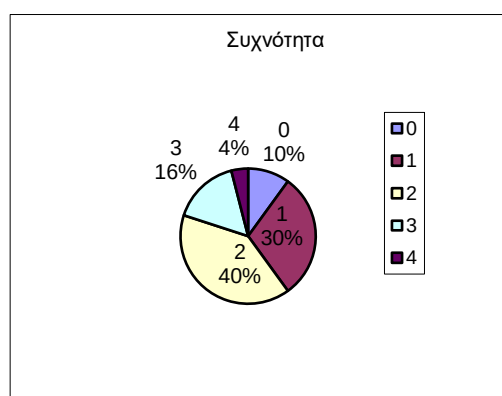
$$\text{Για 0 παιδιά : } \text{γωνία} = \frac{5}{50} \cdot 360^\circ = 36^\circ$$

$$\text{Για 1 παιδί : } \text{γωνία} = \frac{15}{50} \cdot 360^\circ = 108^\circ$$

$$\text{Για 2 παιδιά : } \text{γωνία} = \frac{20}{50} \cdot 360^\circ = 144^\circ$$

$$\text{Για 3 παιδιά : } \text{γωνία} = \frac{8}{50} \cdot 360^\circ = 57,6^\circ$$

$$\text{Για 4 παιδιά : } \text{γωνία} = \frac{2}{50} \cdot 360^\circ = 14,4^\circ$$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των αυτοκινήτων σε μια οικογένεια:

α) Πόσες οικογένειες έχουν 1 αυτοκίνητο;

β) Πόσες οικογένειες έχουν 2

αυτοκίνητα;

γ) πόσες οικογένειες έχουν

τουλάχιστον 1 αυτοκίνητο;

δ) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2

αυτοκίνητα;

ε) Να κάνετε το ραβδόγραμμα .

Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	5
1	30
2	13
3	2
Σύνολο	50

2. Ο πληθυσμός της γης το 1976 ανά ήπειρο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αφρική	Αμερική	Ασία	Ευρώπη	Ωκεανία
412.000.000	572.000.000	2.330.000.000	668.000.000	22.000.000

Να σχεδιάσετε ένα ραβδόγραμμα. Τι μέρος του συνολικού πληθυσμού αποτελεί ο πληθυσμός της κάθε ηπείρου;

3. Με την βοήθεια του διπλανού

ραβδογράμματος να βρείτε:

α) πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2 παιδιά

β) Πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 1

παιδί;

γ) Πόσες οικογένειες έχουν από 2 έως 3 παιδιά;

δ) Να μετατρέψετε το ραβδόγραμμα σε κυκλικό

διάγραμμα.



4. Δίνεται το παρακάτω εικονόγραμμα που

δείχνει των αριθμό των μαθητών που

παρακολουθούν αγώνες αυτοκίνητου.

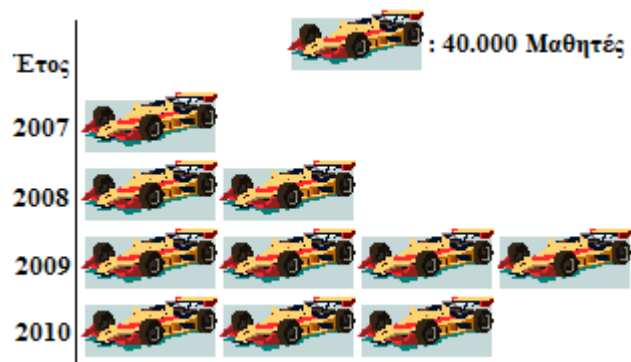
α) Να βρείτε συνολικό αριθμό ανά έτος των

μαθητών που παρακολουθούν αγώνες

β) Τι ποσοστό επί του συνόλου

παρακολούθησε αγώνες το 2008;

γ) Να φτιάξετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.



4.3 Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

- **Συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή αυτή στο δείγμα.
- **Σχετική συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται το πηλίκο της συχνότητας της προς το μέγεθος του δείγματος.
- Η σχετική συχνότητα συνήθως εκφράζεται % .
- Η σχετική συχνότητα όταν εκφράζεται επί τις 100 είναι ένας αριθμός μικρότερος ή ίσος του 100. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 100.
- Τα δεδομένα από μια έρευνα τα τοποθετούμε σε έναν πίνακα ο οποίος είναι **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** . Για να βρούμε την συχνότητα της κάθε μεταβλητής κάνουμε μια διαδικασία που ονομάζεται **διαλογή**. Στη συνέχεια φτιάχνουμε την στήλη με τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες της κάθε μεταβλητής.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.
- Η συχνότητα μιας τιμής είναι ένας αριθμός μικρότερος ή ίσος από τον φυσικό αριθμό που δηλώνει το μέγεθος του δείγματος.
- Τα στατιστικά δεδομένα του πίνακα κατανομής συχνοτήτων μπορούμε να τα αποτυπώσουμε με κάποιο από τα διαγράμματα ώστε τα αποτελέσματα να είναι πιο κατανοητά.
- Αν το διάγραμμα περιέχει της συχνότητες λέγεται διάγραμμα συχνοτήτων ενώ αν περιέχει σχετικές συχνότητες διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Οι απουσίες που έκαναν οι 50 μαθητές τον μήνα Ιανουάριο ήταν
0, 0, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 1, 0, 0, 3, 3, 3, 1, 1, 0, 0, 4, 4, 0
5, 4, 4, 4, 6, 6, 3, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 7, 7, 5, 5, 5, 4, 0, 0, 0, 1, 2
α) Να κατασκευάσετε το πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να παρασταθούν τα δεδομένα του πίνακα με ραβδόγραμμα.

Λύση

Φτιάχνουμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων :

Σύνολο απουσιών	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
0		13	26
1		8	16
2		2	4
3		8	16
4		9	18
5		5	10
6		3	6
7		2	4
Σύνολο	-----	50	100

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων :

Αριθμός παιδιών των οικογενειών ενός χωριού

Λύση:

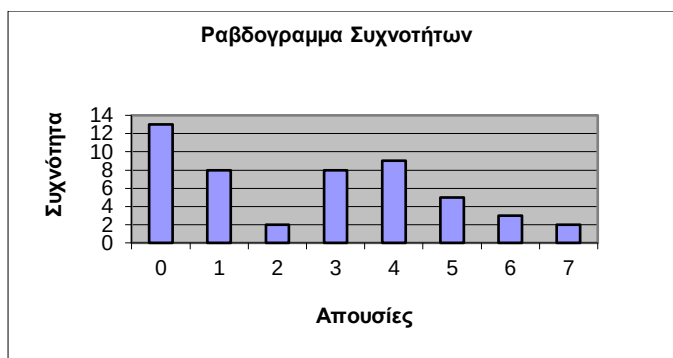
Αριθμός παιδιών	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
0	2	
1	6	
2	10	
3	4	
4	3	
Σύνολο		

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
0	2	8
1	6	24
2	10	40
3	4	16
4	3	12
Σύνολο	25	100

$$\text{Σχετική συχνότητα} = \frac{\text{Συχνότητα}}{\text{Συνολο}} \cdot 100$$

$$\text{Άρα έχουμε : } \frac{2}{25} \cdot 100 = 2 \cdot 4 = 8 \quad , \quad \frac{6}{25} \cdot 100 = 6 \cdot 4 = 24 \quad , \quad \frac{10}{25} \cdot 100 = 10 \cdot 4 = 40$$

$$\frac{4}{25} \cdot 100 = 4 \cdot 4 = 16 \quad , \quad \frac{3}{25} \cdot 100 = 3 \cdot 4 = 12$$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Οι βαθμοί 32 μαθητών της Β΄ Γυμνασίου στα μαθηματικά ήταν:

11 12 12 18 09 18 20 15 17 12 16 11 15 14 15 13
14 15 09 15 13 17 19 11 16 19 20 18 10 10 14 16

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

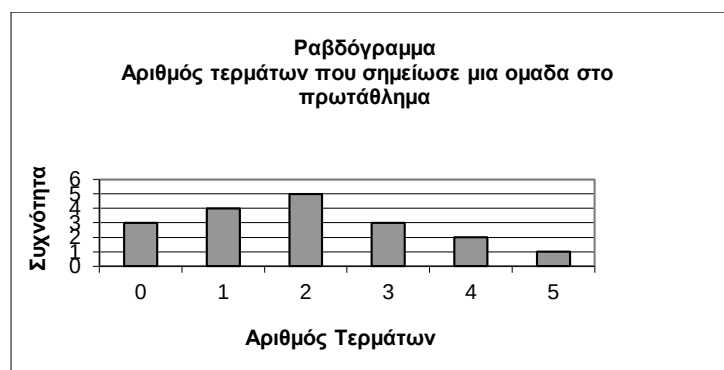
β) Να φτιάξετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

2. Ένα δείγμα 30 μαθητών εξετάστηκε ως προς τις ώρες που παρακολουθούν τηλεόραση και προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

3 3 0 3 2 3 2 6 4 1 4 2 5 0 3

3 3 4 4 1 4 4 5 3 5 2 2 4 2 3

3. Με την βοήθεια του διπλανού ραβδογράμματος να φτιάξετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων



4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

- Πολλές φορές τα δεδομένα μιας έρευνας τα τοποθετούμε σε ένα πίνακα που οι τιμές της μεταβλητής είναι χωρισμένες σε ομάδες. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε **κλάσεις**. Το μέγεθος της κάθε κλάσης το λέμε **πλάτος** της κλάσης. Τις ακραίες τιμές των κλάσεων τις λέμε **άκρα** των κλάσεων.
- **Κέντρο** της κάθε κλάσης είναι το ημιάθροισμα των άκρων της .
- Το διάγραμμα που φτιάχνουμε για τα ομαδοποιημένα δεδομένα ονομάζεται **ιστόγραμμα** και αποτελείται από ορθογώνια ίσου πλάτους το καθένα δίπλα στο άλλο. Η βάση του ορθογωνίου είναι ίση με το πλάτος της κλάσης και το ύψος των ορθογωνίων εξαρτάται από την συχνότητα της κάθε κλάσης.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα σε πίνακα κατανομής συχνοτήτων πρώτα βρίσκουμε την κεντρική τιμή της κάθε κλάσης και στη συνέχεια κάνουμε διαλογή.
- Οι κεντρικές τιμές διαφέρουν μεταξύ τους όσο είναι το πλάτος των κλάσεων.
- Όταν κάνουμε διαλογή σε ομαδοποιημένα δεδομένα την ακριανή τιμή την τοποθετούμε πάντα στην από κάτω κλάση.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις :

1. Σε ένα δείγμα 20 μπαταριών ελέγχθηκε η διάρκεια ζωής τους σε ώρες και τα αποτελέσματα ήταν:

62 60 55 61 58 64 69 68 66 60
50 67 57 53 69 68 59 54 62 63

α) Να κάνετε ομαδοποίηση σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να κάνετε ιστόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

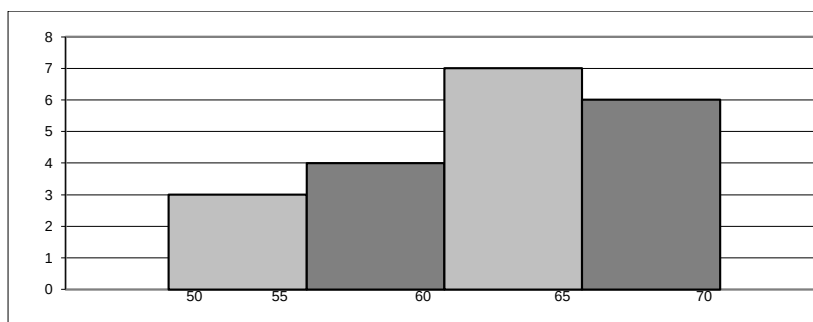
Λύση

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της διάρκειας ζωής κυμαίνονται από 50 μέχρι 69 ώρες. Αφαιρούμε από την μεγαλύτερη τιμή την μικρότερη και βρίσκουμε το **εύρος** των τιμών . $\text{Εύρος} = 69 - 50 = 19$ Με στρογγυλοποίηση 20 . Άρα θέλουμε να χωρίσουμε το 20 σε 4 ίσα μέρη και αν κάνουμε την διαίρεση προκύπτει :

$20 \div 4 = 5$. Αυτό θα είναι το πλάτος των κλάσεων. Ξεκινάμε από την μικρότερη κλάση και δημιουργείται ο πίνακας. Προσοχή την τιμή 55 θα την τοποθετήσουμε στην δεύτερη κλάση (55-60) :

Κλάσεις	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
50-55	3	15
55-60	4	20
60-65	7	28
65-70	6	30
Σύνολο	20	100

Ιστόγραμμα συχνοτήτων θα είναι :



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Οι θερμοκρασίες που καταγράφηκαν μήνα Ιούλιο ήταν οι εξής :

28 26 31 37 33 41 28 37 48 49 42 47 35 31 25

29 38 40 49 35 34 37 42 44 27 48 32 34 45 44 43

α) Να γίνει ομαδοποίηση των παρατηρήσεων σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

2. Σε ένα ορνιθοτροφείο ξεχωρίζουν τα αυγά κατά βάρος. Στο παρακάτω πίνακα

φαίνεται η ομαδοποιημένη κατανομή σχετικών συχνοτήτων:

Βάρος σε g	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
Σχετική Συχνότητα %	5	16	26	28	17	8

α) Να γίνει το ιστόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων

β) Πόσα αυγά κάθε κλάσης αναμένονται την ημέρα αν η ημερήσια παραγωγή είναι 4000 αυγά.

3. Στο παρακάτω σήμα φαίνονται

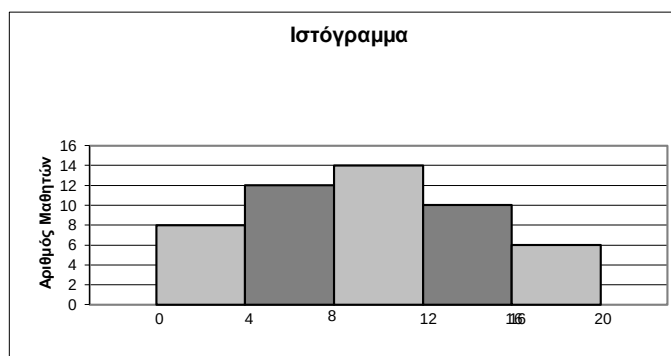
οι βαθμολογίες των μαθητών

μίας τάξης στα μαθηματικά.

α) Πόσοι είναι οι μαθητές;

β) Τι ποσοστό μαθητών πήρε

πάνω από 16;



4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος

- Η **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι το πηλίκο του αθροίσματος των παρατηρήσεων προς το πλήθος των παρατηρήσεων.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος παρατηρήσεων}}$$

- **Μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής:**
- Για να βρούμε την μέση τιμή στα ομαδοποιημένα δεδομένα εργαζόμαστε ως εξής:

- 1) Βρίσκουμε την κεντρική τιμή της κάθε κλάσης
- 2) Πολλαπλασιάζουμε την κεντρική τιμή της κάθε κλάσης επί της συχνότητας της.
- 3) Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα που βρίσκουμε.
- 4) Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των παρατηρήσεων.

- **Διάμεσος** των παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά είναι η μεσαία παρατήρηση όταν το πλήθος είναι μονός αριθμός ή το ημιάθροισμα (μέσος όρος) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το πλήθος είναι ζυγός αριθμός.

** Παρατηρήσεις - Υπενθυμίσεις :

- Η μέση τιμή μπορεί να είναι αριθμός που δεν ανήκει στα δεδομένα της έρευνας.
- Η μέση τιμή είναι ο μέσος όρος των παρατηρήσεων.
- Προσοχή για να βρούμε την διάμεσο θα πρέπει τα δεδομένα να είναι διαταγμένα σε αύξουσα σειρά.

Παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την μέση τιμή και την διάμεσο των παρατηρήσεων:
 - α) -4 , -2 , 10 , 14 , 17
 - β) 5 , 5 , 5 , 7 , 7 , 7

Λύση

$$\alpha) \text{ μέση τιμή} = \frac{-4 - 2 + 10 + 14 + 17}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\text{Διάμεσος } \cancel{-4}, \cancel{-2}, 10, \cancel{14}, \cancel{17} \quad \delta = 10$$

$$\beta) \text{ μέση τιμή} = \frac{5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 7}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\text{Διάμεσος } \cancel{5}, \cancel{5}, 5, 7, \cancel{7}, \cancel{7}$$

$$\delta = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

2. Το ύψος 10 παιχτών μιας ομάδας μπάσκετ είναι το εξής :

$$198, 188, 202, 206, 210, 206, 201, 199, 190, 200$$

α) Να βρείτε το μέσο ύψος και την διάμεσο των υψών .

β) Αν ο παίχτης με ύψος 190cm αντικατασταθεί με ένα άλλον ύψους 200cm να βρείτε το νέο μέσο ύψος της ομάδας.

Λύση

$$\text{Μέσο ύψος} = \frac{198 + 188 + 202 + 206 + 210 + 206 + 201 + 199 + 190 + 200}{10} = \frac{2000}{10} =$$

200cm

β) Το νέο μέσο ύψος θα είναι :

$$\frac{198 + 188 + 202 + 206 + 210 + 206 + 201 + 199 + 200 + 200}{10} = \frac{2010}{10} = 201\text{cm}$$

3. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον χρόνο που χρειάστηκαν μαθητές για να λύσουν μια άσκηση. Να βρείτε τον μέσο χρόνο που χρειάστηκαν οι μαθητές για να λύσουν την άσκηση.

Χρόνος	Αριθμός μαθητών
0-2	10
2-4	15
4-6	20
6-8	5
Σύνολο	50

Λύση

Καταρχήν βρίσκουμε την κεντρική τιμή της κάθε κλάσης και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την κεντρική τιμή επί την συχνότητα της κάθε κλάσης.

Για να βρούμε την κεντρική τιμή της κάθε κλάσης βρίσκουμε το ημιάθροισμα της κάθε μια ξεχωριστά. Άρα :

$$1^{\text{η}} \text{ κλάση } \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$3^{\text{η}} \text{ κλάση } \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$2^{\text{η}} \text{ κλάση } \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$4^{\text{η}} \text{ κλάση } \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Χρόνος	Αριθμός μαθητών	Κεντρική τιμή	Κεντρική τιμή επί συχνότητα
0-2	10	1	10
2-4	15	3	45
4-6	20	5	100
6-8	5	7	35
Σύνολο	50	-----	190

Για να βρούμε την μέση τιμή χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{190}{50} = 3,8 \text{ λεπτά .}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρεθεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων:

α) 3, 12, 8, 17, 10 γ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

β) 1, 2, 3, 4, 5 δ) 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4

2. Να υπολογίσετε την διάμεσο των παρατηρήσεων:

α) 6, 4, 3, 2, 9 γ) -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6

β) 9, 9, 8, 8 δ) -9, -8, 12, 19, -3, 5

3. Να υπολογίσετε την μέση τιμή και την διάμεσο των θερμοκρασιών

4 -2 -3 6 1 0 -1 2 1 -5 2 1

4. Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στα ύψη 50 μαθητών σε εκατοστά . Αν ισχύει ότι η σχετική συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης , και η σχετική συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τέταρτης κλάσης , τότε :

α) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες και τις συχνότητες

β) Να υπολογίσετε το μέσο ύψος των μαθητών.

Κλάσεις	164-170	170-176	176-182	182-188	Σύνολο
Σχετική συχνότητα	f_1	f_2	0,3	f_4	1

