

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και είναι γραμμένο σύμφωνα με τις τελευταίες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Με την καθοδήγηση των καθηγητών του ομίλου ΝΕΟ το βιβλίο αυτό αποτελεί μια ολοκληρωμένη πρόταση, που θα σας οδηγήσει με επιτυχία στην κατανόηση της διδακτέας ύλης.

Περιέχει

- *Θεωρία

- *Λυμένες ασκήσεις που καλύπτουν τις ανάγκες όλων των μαθητών

- *Προτεινόμενες ασκήσεις με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας

ΖΑΦΕΙΡΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α ΑΛΓΕΒΡΑ

Σελ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο Οι Φυσικοί αριθμοί

1.1 Οι Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση.....	9
1.2 Πρόσθεση , αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών.....	16
1.3 Δυνάμεις Φυσικών αριθμών	23
1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα	26
1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – Ε.Κ.Π-Μ.Κ.Δ. – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.....	32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο Τα κλάσματα

2.1. Η έννοια του κλάσματος.....	38
2.2. Ισοδύναμα κλάσματα.....	43
2.3. Σύγκριση κλασμάτων.....	48
2.4. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων.....	50
2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	54
2.6. Διαίρεση κλασμάτων.....	58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο Δεκαδικοί αριθμοί

3.1. Δεκαδικά κλάσματα-Δεκαδικοί αριθμοί – διάταξη δεκαδικών αριθμών - στρογγυλοποίηση	63
3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμο.....	68
3.3. Υπολογισμοί με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης.....	74
3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών	76
3.5. Μονάδες μέτρησης.....	78

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο Εξισώσεις και προβλήματα

4.1. Η έννοια της εξίσωσης- Μορφές εξισώσεων	84
4.2. Επίλυση προβλημάτων.....	89
4.3. Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων.....	90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο Ποσοστά

5.1. Ποσοστά.....	92
5.2. Προβλήματα με ποσοστά.....	97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο.....	101
6.2. Λόγος δυο αριθμών – Αναλογία.....	104
6.3. Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες ανάλογων ποσών.....	108
6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας.....	114
6.5. Προβλήματα αναλογιών.....	118
6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά.....	121

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

7.1. Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών αριθμών – Τετμημένη σημείου.....	124
---	-----

7.2. Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών.....	128
7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών.....	134
7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών.....	138
7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών.....	143
7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών	149
7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών.....	154
7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό	156
7.9. Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο.....	162
7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών.....	167

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο Βασικές γεωμετρικές έννοιες

1.1 Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο.....	171
1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα- Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα	175
1.3 Μέτρηση σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος.....	179
1.4 Πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων.....	183
1.5 Μέτρηση , σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας.....	187
1.6 Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες.....	189
1.7 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών.....	193
1.8 Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες.....	196
1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο.....	202
1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παράλληλων.....	204
1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου.....	207
1.12 Επίκεντρα γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου - Μέτρηση τόξου.....	210
1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου.....	214

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο Συμμετρία

2.1. Συμμετρία ως προς άξονα	217
2.2. Άξονας συμμετρίας.....	220
2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.....	222
2.4. Συμμετρία ως προς σημείο	225
2.5. Κέντρο συμμετρίας.....	229
2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία	231

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα - Τραπεζίδια

3.1 Στοιχεία τριγώνου – Άθροισμα γωνιών τριγώνου.....	235
3.2 Είδη τριγώνων – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.....	240
3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπεζίδιο – Ισοσκελές τραπέζιο.....	245
3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετραγώνου – Ισοσκελούς τραπέζιου.....	248

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Α' ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο – Οι Φυσικοί αριθμοί

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση

❖ Φυσικοί αριθμοί – Δεκαδική τάξη – Δεκαδικό σύστημα

- Οι αριθμοί 0,1,2,3, ...,99,100,999,1000,,2000, ονομάζονται **φυσικοί** αριθμοί.
- Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο το 1.
- Μπορούμε να σχηματίσουμε απεριόριστο πλήθος φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας τα δέκα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
 - ✓ Το σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιεί τα δέκα παραπάνω ψηφία λέγεται **δεκαδικό**.
- Σε έναν φυσικό αριθμό η αξία κάθε ψηφίου καθορίζεται από την θέση που κατέχει , δηλαδή τη δεκαδική τάξη του. Η δεκαδική τάξη ενός ψηφίου μπορεί να είναι μονάδες , δεκάδες , εκατοντάδες , χιλιάδες , δεκάδες χιλιάδες, εκατοντάδες χιλιάδες , εκατομμύρια ... κ.λ.π.

❖ Άρτιοι και περιττοί φυσικοί αριθμοί

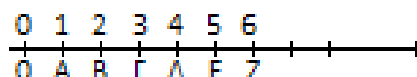
- **Άρτιοι** οι ζυγοί λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2. Οι φυσικοί αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο είναι 0,2,4,6,8 είναι άρτιοι.
- **Περιττοί** ή **μονοί** λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 2. Οι φυσικοί αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο είναι 1,3,5,7,9 είναι περιττοί.

❖ Διάταξη φυσικών αριθμών

- Για να συγκρίνουμε δυο αριθμούς χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:
 - Το = που σημαίνει «ίσος με»
 - Το < που σημαίνει «μικρότερος από»
 - Το > που σημαίνει «μεγαλύτερος από»
- ✓ Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δυο φυσικούς αριθμούς μεταξύ τους. Επομένως μπορούμε να τους διατάξουμε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο , δηλαδή κατά αύξουσα σειρά μεγέθους.
π.χ. $0 < 1 < 2 < 3 \dots < 100 < \dots 999 < \dots$

❖ *Αντιστοίχιση φυσικών αριθμών με σημεία ενός άξονα.*

- Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους φυσικούς αριθμούς με τα σημεία μιας ευθείας ως εξής:
 - Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο O της ευθείας, στο οποίο αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 0 . Το σημείο O είναι η αρχή του άξονα.
 - Δεξιά από το O επιλέγουμε αυθαίρετα ένα δεύτερο σημείο το A . Το OA αποτελεί μονάδα μέτρησης και με την βοήθεια του μπορούμε να τοποθετήσουμε στον άξονα όλους τους φυσικούς αριθμούς.



❖ *Στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών*

- Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό εργαζόμαστε ως εξής:
 - Εντοπίζουμε την τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση και εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
 - Αν αυτό είναι μικρότερο του 5 ($0, 1, 2, 3$ ή 4) τότε αντικαθιστούμε αυτό το ψηφίο, καθώς και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων με 0 .
 Αν αυτό είναι μεγαλύτερο του 5 ($5, 6, 7, 8$ ή 9) τότε αυξάνουμε κατά 1 το ψηφίο της τάξης στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδέν όλα τα ψηφία μικρότερων τάξεων.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Δίνεται ο αριθμός 2.321.513

- i. Τι δηλώνει κάθε ψηφίο αυτού του αριθμού ανάλογα με την θέση του;
- ii. Πως διαβάζεται ο αριθμός αυτός;

Λύση:

- i. Η αξία κάθε ψηφίου του αριθμού 2.321.513 φαίνεται στο παρακάτω πίνακα

2	3	2	1	5	1	3
Εκατομμύρια	Εκατοντάδες χιλιάδες	Δεκάδες χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες

- ii. Ο αριθμός διαβάζεται δυο εκατομμύρια τριακόσιες είκοσι μια χιλιάδες πεντακόσια δέκα τρία.

2. Ποιοι είναι οι 3 προηγούμενοι αριθμοί του 342 και ποιος ο επόμενος;

Λύση:

Οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί είναι οι : 339 , 340 , 341 και ο επόμενος το 343.

3. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς

- i. 1.243 και 895
- ii. 6.052 και 6.061

Λύση:

- i. Ισχύει ότι $1.243 > 895$
- ii. Ισχύει ότι $6.052 < 6.061$

4. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 679.452

- i. Στις εκατοντάδες
- ii. Στις χιλιάδες
- iii. Στις δεκάδες χιλιάδες.

Λύση

- i. Βλέπουμε ότι το αμέσως επόμενο ψηφίο (δεκάδα) είναι το 5 επομένως η στρογγυλοποίηση γίνεται
 $679.452 \rightarrow 679.500$
- ii. Βλέπουμε ότι το αμέσως επόμενο ψηφίο (εκατοντάδα) είναι το 4 επομένως η στρογγυλοποίηση γίνεται
 $679.452 \rightarrow 679.000$
- iii. Βλέπουμε ότι το αμέσως επόμενο ψηφίο (χιλιάδα) είναι το 9 επομένως η στρογγυλοποίηση γίνεται
 $679.452 \rightarrow 680.000$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να γράψετε στη φυσική τους γλώσσα τους αριθμούς:

55 , 652 , 402 , 1.521 , 345.562 , 8.764.897

2. Να γράψετε με ψηφία τους αριθμούς

- i. Δέκα τρία
- ii. Πενήντα έξι
- iii. Διακόσια τριάντα επτά
- iv. Χίλια έξι.
- v. Εξακόσια τριάντα πέντε

3. Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου αριθμού

- i. 234.642
- ii. 3.347
- iii. 435.342
- iv. 5.896
- v. 234.769
- vi. 983.476.819

4. Να γράψετε τους τρεις επόμενους και τους δυο προηγούμενους των αριθμών:

- i. 345
- ii. 1.534
- iii. 673.951

5. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

- i. 562 και 642
- ii. 340 και 430
- iii. 2.512 και 3.401
- iv. 6.430 και 6.429
- v. 265.291 και 292.321

6. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

- i. 34 , 25 , 62 , 4 , 52 , 15
- ii. 14 , 17 , 9 , 16 , 22 , 41 , 5

7. Να βάλετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς

- i. 52 , 15 , 61 , 15 , 37 , 58

ii. 3, 62, 15, 6, 33, 19

8. Να γράψετε τους φυσικούς αριθμούς που είναι:

- i. Μεγαλύτεροι από 26 και μικρότεροι από 39
- ii. Μεγαλύτεροι από 9 και μικρότεροι από 17
- iii. Μεγαλύτεροι από 236 και μικρότεροι από 245
- iv. Μεγαλύτεροι από 1.026 και μικρότεροι από 1.035
- v. Μεγαλύτεροι από 3.426 και μικρότεροι από 3.435

9. Να γράψετε όλους τους τριψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 0 και 4 μια φορά το καθένα.

10. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι και ποιοι περιττοί.

- i. 234
- ii. 521
- iii. 12
- iv. 678
- v. 1.456
- vi. 8.981
- vii. 670

11. Να γράψετε:

- i. Τους άρτιους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 41 και 73
- ii. Τους περιττούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 242 και 288

12. Να γράψετε:

- i. Τους άρτιους αριθμούς από το 22 μέχρι το 46
- ii. Τους περιττούς αριθμούς από το 39 μέχρι το 59

13. Να γράψετε

- i. Τους διψήφιους άρτιους που είναι μεγαλύτεροι από το 75
- ii. Τους πρώτους 4 τριψήφιους περιττούς

14. Σε άξονα με κατάλληλη μονάδα να τοποθετήσετε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 10

15. Σε άξονα με κατάλληλη μονάδα να τοποθετήσετε τους αριθμούς 10, 20, 30, 40, 50

16. Σε άξονα με κατάλληλη μονάδα να τοποθετήσετε τους αριθμούς 100, 200, 250, 400, 550

17. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα

i. 33	iii. 631	v. 1.709
ii. 25	iv. 542	vi. 1.452

18. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη εκατοντάδα

i. 633	iii. 1.631	v. 1.709
ii. 425	iv. 2.542	vi. 1.452

19. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη χιλιάδα

i. 1.433	iii. 5.631	v. 14.709
ii. 2.525	iv. 23.542	vi. 19.452

20. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 345.061 στην πλησιέστερη

- i. Δεκάδα
- ii. Εκατοντάδα
- iii. Χιλιάδα
- iv. Δεκάδα χιλιάδα
- v. Εκατοντάδα χιλιάδα

21. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 920.072 στην πλησιέστερη

- i. Δεκάδα
- ii. Εκατοντάδα
- iii. Χιλιάδα
- iv. Δεκάδα χιλιάδα
- v. Εκατοντάδα χιλιάδα

22. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 392.046 στην πλησιέστερη

- i. Δεκάδα
- ii. Εκατοντάδα
- iii. Χιλιάδα
- iv. Δεκάδα χιλιάδα
- v. Εκατοντάδα χιλιάδα

1.2 Πρόσθεση αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

❖ Πρόσθεση - ιδιότητες πρόσθεσης

- Στη πρόσθεση $\alpha + \beta = \gamma$ οι αριθμοί α και β λέγονται προσθετέοι και ο αριθμός γ λέγεται άθροισμα.
- Το μηδέν όταν προστεθεί σε έναν φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή:
 $\alpha + 0 = \alpha$ ή $0 + \alpha = \alpha$
- Αντιμεταθετική ιδιότητα
Μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των δυο προσθετέων ενός αθροίσματος. Δηλαδή :
 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Ποσεταιριστική ιδιότητα
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύσουμε έναν προσθετέο σε άθροισμα. Δηλαδή ισχύει:
 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

❖ Αφαίρεση - ιδιότητες της αφαίρεσης

- Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία , όταν δίνονται δυο αριθμοί M (μειωτέος) και A (αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά) ο οποίος όταν προστεθεί στον A δίνει το M . Δηλαδή ισχύει $M - A = \Delta$
- Η ισότητα $M = A + \Delta$ μας δίνει ένα τρόπο να επαληθεύουμε την αφαίρεση: Αν προσθέσουμε τον αφαιρετέο και την διαφορά , βρίσκουμε τον μειωτέο.
- Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του μειωτέου.
- Το μηδέν όταν αφαιρεθεί από έναν φυσικό αριθμό α δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή
 $\alpha - 0 = \alpha$
- Αν αφαιρέσουμε έναν φυσικό αριθμό από τον εαυτό του , το αποτέλεσμα είναι μηδέν.
Δηλαδή $\alpha - \alpha = 0$

❖ Πολλαπλασιασμός - ιδιότητες πολλαπλασιασμού

- Στον πολλαπλασιασμό $\alpha \cdot \beta = \gamma$ οι αριθμοί α , β λέγονται παράγοντες κι ο αριθμός γ λέγεται γινόμενο.
- Αντιμεταθετική ιδιότητα

Σε ένα γινόμενο μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των παραγόντων. Δηλαδή

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα

Σε ένα γινόμενο μπορούμε να αντικαταστήσουμε παράγοντες με το γινόμενό του ή να αναλύσουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο. Δηλαδή:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

- Το ένα (1) όταν πολλαπλασιαστεί με έναν φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή

$$\alpha \cdot 1 = \alpha \text{ ή } 1 \cdot \alpha = \alpha$$

- Το γινόμενο κάθε φυσικού αριθμού με το μηδέν είναι ίσο με μηδέν. Δηλαδή

$$\alpha \cdot 0 = 0 \text{ ή } 0 \cdot \alpha = 0$$

❖ Προτεραιότητα των πράξεων

- Στις αριθμητικές παραστάσεις που εμφανίζονται πολλαπλασιασμοί, προσθέσεις και αφαιρέσεις κάνουμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με την σειρά που εμφανίζονται.

Αν στην αριθμητική παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στην παρένθεση με την παραπάνω σειρά.

❖ Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού με το 10, 100, 1000, κ.ο.κ.

- Για να πολλαπλασιάσουμε έναν φυσικό αριθμό με το 10, το 100, το 1000 κ.ο.κ. αρκεί στο τέλος του αριθμού να προσθέσουμε τα αντίστοιχα μηδενικά του παράγοντα 10 ή 100 ή 1000 κ.ο.κ.

❖ Επιμεριστική ιδιότητα

- Επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

- Επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. α) Να βρείτε το γινόμενο των αριθμών 16 και 42

β) Να βρείτε τα γινόμενα $23 \cdot 1$ και $46 \cdot 0$

Λύση

α) $16 \cdot 42 = 672$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 42 \\ \hline 32 \\ + 64 \\ \hline 672 \end{array}$$

β) $23 \cdot 1 = 23$

$46 \cdot 0 = 0$

2. Να γίνουν οι πράξεις στην παρακάτω αριθμητική παράσταση

$$A = 2 \cdot (32 - 6 \cdot 5) + 3 \cdot [5 \cdot 2 - (6 \cdot 3 - 4 \cdot 3)]$$

Λύση

$$A = 2 \cdot (32 - 6 \cdot 5) + 3 \cdot [5 \cdot 2 - (6 \cdot 3 - 4 \cdot 3)]$$

$$A = 2 \cdot (32 - 30) + 3 \cdot [10 - (18 - 12)]$$

$$A = 2 \cdot 2 + 3 \cdot [10 - 6]$$

$$A = 4 + 3 \cdot 4$$

$$A = 4 + 12$$

$$A = 16$$

3. Να υπολογίσετε τα γινόμενα

i. $14 \cdot 10$

ii. $234 \cdot 100$

iii. $651 \cdot 1000$

iv. $4.672 \cdot 10.000$

Λύση

i. $14 \cdot 10 = 140$

ii. $234 \cdot 100 = 23.400$

iii. $651 \cdot 1000 = 651.000$

iv. $4.672 \cdot 10.000 = 46.720.000$

4. Να γίνουν οι πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $13 \cdot 72 + 13 \cdot 28 =$

ii. $15 \cdot 14 - 15 \cdot 4 =$

iii. $6 \cdot (10 - 5) =$

Λύση

i. $13 \cdot 72 + 13 \cdot 28 = 13 \cdot (72 + 28) = 13 \cdot 100 = 1.300$

ii. $15 \cdot 14 - 15 \cdot 4 = 15 \cdot (14 - 4) = 15 \cdot 10 = 150$

iii. $6 \cdot (10 - 5) = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 5 = 60 - 30 = 30$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τα επόμενα αθροίσματα

$$\begin{array}{r} 654 \\ \alpha) 344 \end{array} \quad \begin{array}{r} 897 \\ \beta) 46 \end{array} \quad \begin{array}{r} 578 \\ \gamma) 843 \end{array} \quad \begin{array}{r} 623 \\ \delta) 158 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +23 \\ +32 \\ +253 \\ +55 \end{array}$$

2. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της πρόσθεσης να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & 27 + 55 + 67 + 98 = \\ \text{ii.} & 645 + 335 + 241 + 78 = \\ \text{iii.} & 2.122 + 9.886 + 3.871 = \\ \text{iv.} & 256 + 652 + 987 + 107 = \end{array}$$

3. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της πρόσθεσης να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & 68 + 97 + 33 + 218 = \\ \text{ii.} & 445 + 135 + 141 + 58 + 161 = \\ \text{iii.} & 2.134 + 4.826 + 2.841 + 985 = \\ \text{iv.} & 1.982 + 1908 + 2017 = \end{array}$$

4. Να υπολογίσετε τις διαφορές

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & 153 - 65 = \\ \text{ii.} & 245 - 88 = \\ \text{iii.} & 543 - 189 = \\ \text{iv.} & 12.653 - 8.772 = \\ \text{v.} & 4.761 - 2.651 = \end{array}$$

5. Να κάνετε τις πράξεις

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & (34 + 65) + 13 = \\ \text{ii.} & (54 + 15) + 23 = \\ \text{iii.} & (134 + 635) + 173 = \\ \text{iv.} & (54 + 651) + 103 = \end{array}$$

6. Να κάνετε τις πράξεις

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & (34 + 65) - 13 = \\ \text{ii.} & (54 + 15) - 23 = \\ \text{iii.} & (134 + 635) - 173 = \\ \text{iv.} & (54 + 651) - 103 = \end{array}$$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$\text{i.} \quad A = (12 + 54) - (9 + 17) + (17 - 8) =$$

ii. $B = (32 + 16) - (20 + 17) + (17 - 15) =$

iii. $A = (64 + 54) - (50 + 55) - (17 - 4) =$

iv. $A = (123 + 514) - (99 + 17) + (177 - 138) =$

8. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

i. $12 + \dots = 52$

vi. $67 + \dots = 456$

ii. $42 + \dots = 86$

vii. $55 - \dots = 36$

iii. $67 - \dots = 54$

viii. $1001 + \dots = 1908$

iv. $76 + \dots = 152$

ix. $1837 + \dots = 1966$

v. $12 - \dots = 8$

x. $2004 - \dots = 1935$

9. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς

i. $23 \cdot 5 =$

vi. $67 \cdot 64 =$

ii. $13 \cdot 8 =$

vii. $19 \cdot 43 =$

iii. $17 \cdot 2 =$

viii. $54 \cdot 91 =$

iv. $67 \cdot 3 =$

ix. $75 \cdot 34 =$

v. $42 \cdot 12 =$

x. $56 \cdot 51 =$

10. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς

i. $23 \cdot 10 =$

iv. $10 \cdot 100 =$

ii. $13 \cdot 100 =$

v. $100 \cdot 12 =$

iii. $17 \cdot 1000 =$

11. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς

i. $23 \cdot 20 =$

iv. $10 \cdot 700 =$

ii. $13 \cdot 30 =$

v. $10 \cdot 40 =$

iii. $17 \cdot 80 =$

12. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς

i. $23 \cdot 5 \cdot 7 =$

iv. $15 \cdot 43 \cdot 7 =$

ii. $13 \cdot 10 \cdot 4 =$

v. $100 \cdot 12 \cdot 5 =$

iii. $17 \cdot 100 \cdot 6 =$

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $7 \cdot 2 + 5 \cdot 23 =$

iv. $12 \cdot 2 + 5 \cdot 20 =$

ii. $6 \cdot 2 + 5 \cdot 24 =$

v. $9 \cdot 6 + 6 \cdot 4 =$

iii. $6 \cdot 4 + 4 \cdot 9 =$

14. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 =$

ii. $6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 =$

iii. $4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 =$

v. $2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 7 =$

iv. $6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 =$

15. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $37 \cdot 5 + 21 \cdot 23 =$

iv. $43 \cdot 31 + 17 \cdot 47 =$

ii. $54 \cdot 4 + 5 \cdot 15 =$

v. $97 \cdot 63 + 46 \cdot 98 =$

iii. $45 \cdot 21 + 51 \cdot 23 =$

16. Να κάνετε τις πράξεις

i. $5 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =$

iv. $5 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =$

ii. $5 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =$

v. $5 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =$

iii. $5 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =$

17. Ο Αντρέας έχει 3 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ 6 χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και 7 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. Πόσα χρήματα έχει στο πορτοφόλι του;

18. Ο Γιώργος έχει 3 χαρτονομίσματα των 50 ευρώ 6 χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και 2 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. Πόσα χρήματα έχει στο πορτοφόλι του;

19. Ο Γιάννης έχει 4 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ 3 χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και 4 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. Αγόρασε ρούχα που στοίχιζαν 107 ευρώ. Πόσα χρήματα του έμειναν;

1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

❖ Δυνάμεις φυσικών αριθμών

- Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ που έχει n παράγοντες ίσους με α , λέγεται **δύναμη του α στη n ή νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται α^n . Δηλαδή $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$
 n παράγοντες

- ✓ Ο αριθμός α λέγεται βάση της δύναμης και ο n εκθέτης.
- ✓ Η δύναμη ενός αριθμού α στη δεύτερα δηλαδή α^2 λέγεται και τετράγωνο του α
- ✓ Η δύναμη ενός αριθμού α στη τρίτη δηλαδή α^3 λέγεται και κύβος του α
- ✓ Η πρώτη δύναμη του α είναι ο ίδιος ο αριθμός α . δηλαδή ισχύει ότι $\alpha^1 = \alpha$
- ✓ Όλες οι δυνάμεις του 1 είναι ίσες με 1. Δηλαδή ισχύει ότι $1^n = 1$

❖ Αριθμητική παράσταση

Αριθμητική παράσταση ονομάζεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

❖ Προτεραιότητα των πράξεων

- Η προτεραιότητα των πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση είναι η εξής:
 1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις
 2. Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις
 3. Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις
 - ✓ Αν στην αριθμητική παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στην παρένθεση με την παραπάνω σειρά.

❖ Δυνάμεις του 10 – Δεκαδικό ανάπτυγμα φυσικού αριθμού με χρήση των δυνάμεων του 10

- Μια δύναμη του 10 δηλαδή το 10^n υπολογίζεται ως εξής: Γράφουμε το 1 και στη συνέχεια συμπληρώνουμε με n μηδενικά
- Δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού η πιο απλά αναπτυγμένη μορφή του αριθμού με βάση το 10 λέγεται η αναλυτική παράσταση του με χρήση δυνάμεων του 10.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

- i. 2^5 και 3^4
- ii. 5^2 και 32^1 και 1^{1453}

Λύση

- i. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- ii. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
 $32^1 = 32$
 $1^{1453} = 1$

2. Να βρείτε την τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης

$$A = 6 + 3 \cdot 5 - 2^3 + 4 \cdot (25 - 6 \cdot 4)^{10}$$

Λύση

$$A = 6 + 3 \cdot 5 - 2^3 + 4 \cdot (25 - 6 \cdot 4)^{10}$$

$$A = 6 + 3 \cdot 5 - 8 + 4 \cdot (25 - 24)^{10}$$

$$A = 6 + 15 - 8 + 4 \cdot 1^{10}$$

$$A = 6 + 15 - 8 + 4 \cdot 1$$

$$A = 6 + 15 - 8 + 4$$

$$A = 21 - 8 + 4$$

$$A = 13 + 4$$

$$A = 17$$

3. α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις 10^2 , 10^4 , 10^9

β) Να γράψετε ως δυνάμεις του 10 τους αριθμούς 1.000 και 1.000.000

γ) Να γράψετε το δεκαδικό ανάπτυγμα του αριθμού 43.523 με χρήση των δυνάμεων του 10.

Λύση:

$$\alpha) 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$$

$$10^9 = 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 = 1.000.000.000$$

$$\beta) 1000 = 10^3$$

$$1.000.000 = 10^6$$

$$\begin{aligned} \gamma) 43.523 &= 4 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 = \\ &= 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

2. Να συμπληρώσετε τα κενά

i. $20^2 =$

iv. $20^3 =$

ii. $30^2 =$

v. $30^3 =$

iii. $40^2 =$

3. Να γράψετε με μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:

i. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

v. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha =$

ii. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$

vi. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x =$

iii. $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha =$

vii. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

iv. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

4. Να βρείτε ποια δύναμη του 10 είναι οι αριθμοί

i. 1.000

iii. 10.000.000.000.

ii. 1.000.000

iv. 100.000

5. Να βρείτε τους επόμενους αριθμούς

i. $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3$

ii. $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 1$

iii. $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$

iv. $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9$

v. $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3$

6. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $15 + 2^3 - 3^2 =$

iv. $5 \cdot 2^3 - 3^2 \cdot 2 =$

ii. $23 + 3^3 - 2^2 =$

v. $2^5 \cdot 5 - 6 \cdot 3^2 =$

iii. $3 \cdot 2^3 - 3^2 =$

7. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $2^3 \cdot (2^5 - 2 \cdot 3) =$

ii. $(5^2 - 4^2) \cdot (3^3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 3^2) =$

iii. $(4^2 + 2^3) \cdot 2 - 4 \cdot (14 - 3^2) =$

iv. $3^4 - 2^4 - (3^2 - 6) =$

v. $6^2 - 5^2 + 3^3 - 2^3 =$

8. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $2^3 \cdot (3^2 - 2) - 4 \cdot [(2^3 + 3^2) \cdot 2 - 3^3] =$

ii. $10^2 - 10 \cdot [3 \cdot (7^2 - 1^8) - 3 \cdot 2^3] =$

iii. $5^3 - 4^3 + 25 \cdot 3 - 2^4 \cdot 3 =$

iv. $(6^2 - 5 \cdot 7) - (2^3 - 7) =$

v. $[9^2 - 8 \cdot 10] + (4^2 - 3 \cdot 5)^{2004} =$

9. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $4^3 \cdot (2^5 - 3 \cdot 4) =$

ii. $(7^2 - 6^2) \cdot (2^3 \cdot 2^2 - 3^2) =$

iii. $(9^2 + 3^3) \cdot 2 - 4 \cdot (52 - 6^2) =$

iv. $2^4 - 1^4 - (3^2 - 8) =$

v. $5^2 - 4^2 + 2^3 - 1^3 =$

10. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $2^3 \cdot (3^2 - 5) + 4 \cdot [(4^3 + 2^2) \cdot 5 - 2^3] =$

ii. $10^3 - 10 \cdot [3 \cdot (5^2 - 1^8) - 3 \cdot 1^3] =$

iii. $3^3 - 2 + 25 \cdot 3 - 5^2 \cdot 3 =$

iv. $(8^2 - 10 \cdot 6) - (2^3 - 4) =$

v. $[6^2 - 5 \cdot 7]^{1908} + (5^2 - 4 \cdot 6)^{2004} =$

11. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = x^3 + 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x = 2$ όταν

i. $x = 2$

ii. $x = 10$

12. Να γράψετε σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10 τους αριθμούς που ακολουθούν

i. 2.321

ii. 452

iii. 32.0872

iv. 2.872.089

13. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $>$, $=$)

i. $2^5 \dots 5^2$

vi. $3^4 \dots 9^2$

ii. $2^3 \dots 5^2$

vii. $2^4 \dots 4^2$

iii. $6^5 \dots 6^2$

viii. $10^3 \dots 3^5$

iv. $1^5 \dots 1^{20}$

ix. $2^{10} \dots 5^3$

v. $3^5 \dots 5^3$

x. $7^2 \dots 3^3$

1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

❖ Ευκλείδεια διαίρεση

- Ευκλείδεια διαίρεση είναι η διαδικασία κατά την οποία όταν δοθούν δυο φυσικοί αριθμοί Δ και δ τότε βρίσκουμε δύο άλλους φυσικούς αριθμούς π και υ ώστε να ισχύει $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$
- ✓ Ο αριθμός Δ λέγεται **Διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης** ο π **πηλίκος** και ο υ **υπόλοιπο**.
- ✓ Το υπόλοιπο πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν αλλά μικρότερο από το διαιρέτη. $0 \leq \upsilon < \delta$
- Αν το υπόλοιπο μιας διαίρεσης είναι ίσο με το μηδέν τότε λέμε ότι έχουμε μια **τέλεια** διαίρεση
 - ✓ Σε μια τέλεια διαίρεση ισχύει η ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi$

❖ Ειδικές περιπτώσεις διαιρέσεων

- Η διαίρεση οποιουδήποτε αριθμού με το μηδέν δεν έχει νόημα. Άρα ο διαιρέτης (δ) δεν μπορεί να είναι μηδέν. $\delta \neq 0$
- Όταν ισχύει $\Delta = \delta$ τότε $\pi = 1$. Δηλαδή οποιοσδήποτε αριθμός που θα διαιρεθεί με τον εαυτό του δίνει πηλίκος την μονάδα. $\alpha : \alpha = 1$
- Όταν $\delta = 1$ τότε $\pi = \Delta$. Δηλαδή κάθε αριθμός που διαιρείται με το ένα δίνει πηλίκος τον εαυτό του. $\alpha : 1 = \alpha$
- Όταν $\Delta = 0$ τότε $\pi = 0$. Δηλαδή η διαίρεση του μηδενός με οποιονδήποτε αριθμό $\alpha \neq 0$ δίνει πηλίκος μηδέν. $0 : \alpha = 0$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε την ευκλείδεια διαίρεση $67 : 4$ και να κάνετε την επαλήθευσή της.

Λύση

Το πηλίκος της διαίρεσης είναι 16 και το υπόλοιπο είναι 3. Η επαλήθευση της διαίρεσης σύμφωνα με τον τύπο γίνεται:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \text{ άρα } 67 = 4 \cdot 16 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 67 & 4 \\ -4 & 16 \\ \hline 27 & \\ -24 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

2. Να κάνετε την διαίρεση $235 : 5$ και να κάνετε την επαλήθευσή της.

Λύση

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι 47 και το υπόλοιπο είναι 0. Η επαλήθευση της διαίρεσης σύμφωνα με τον τύπο γίνεται:

$$\Delta = \delta \cdot \pi \text{ άρα } 235 = 5 \cdot 47$$

$$\begin{array}{r|l} 235 & 5 \\ -20 & 47 \\ \hline 35 & \\ -35 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις αν γίνονται

i. $15:15 =$

ii. $0:23 =$

iii. $24:1 =$

iv. $6:0 =$

Λύση

i. $15:15 = 1$

ii. $0:23 = 0$

iii. $24:1 = 24$

iv. $6:0 =$ Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν γίνεται.

4. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν ευκλείδεια διαίρεση.

i. $42 = 3 \cdot 10 + 12$

ii. $23 = 5 \cdot 4 + 3$

iii. $30 = 5 \cdot 5 + 5$

Λύση

i. $42 = 3 \cdot 10 + 12$

ii. $23 = 5 \cdot 4 + 3$

iii. $30 = 5 \cdot 5 + 5$

5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 12:(2^3 - 2 \cdot 3) + 15:(6^2 - 66:2)$$

Λύση

$$A = 12:(2^3 - 2 \cdot 3) + 15:(6^2 - 66:2)$$

$$A = 12:(8 - 2 \cdot 3) + 15:(36 - 66:2)$$

$$A = 12:(8 - 6) + 15:(36 - 33)$$

$$A = 12:2 + 15:3$$

$$A = 6 + 5$$

$$A = 11$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $24:6 =$

iv. $48:8 =$

ii. $54:9 =$

v. $56:7 =$

iii. $24:4 =$

vi. $124:4 =$

2. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις(αν γίνονται)

i. $4:4 =$

iv. $6:0 =$

ii. $24:1 =$

v. $0:0 =$

iii. $0:16 =$

3. Να κάνετε τις διαιρέσεις με τις δοκιμές τους

i. $156:4 =$

iv. $77.011:11 =$

ii. $344:8 =$

v. $6.432:16 =$

iii. $288:12 =$

4. Να βρείτε τον αριθμό , ο οποίος:

i. Διαιρείται τέλεια με το 6 και δίνει πηλίκο 4

ii. Διαιρείται τέλεια με το 9 και δίνει πηλίκο 72

iii. Διαιρείται τέλεια με το 7 και δίνει πηλίκο 5

iv. Διαιρείται τέλεια με το 12 και δίνει πηλίκο 4

5. Να βρείτε:

i. Ποιόν αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε με το 8 για να βρούμε πηλίκο 6

ii. Ποιόν αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε με το 204 για να βρούμε πηλίκο 5

iii. Ποιόν αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε με το 32 για να βρούμε πηλίκο 61

6. Να κάνετε κάθε μια από τις παρακάτω Ευκλείδειες διαιρέσεις καθώς και την επαλήθευσή τους.

i. $52:8$

v. $32:6$

ii. $82:4$

vi. $4.915:16$

iii. $456:7$

vii. $3.057:75$

iv. $512:9$

viii. $6.342:8$

7. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν Ευκλείδειες διαιρέσεις και να γράψετε το αντίστοιχο πηλίκο.

i. $93 = 8 \cdot 10 + 13$

ii. $46 = 8 \cdot 5 + 6$

iii. $57 = 8 \cdot 7 + 1$

iv. $40 = 3 \cdot 10 + 10$

v. $206 = 8 \cdot 25 + 6$

8. Να βρείτε τους αριθμούς οι οποίοι

i. Όταν διαιρεθούν με το 4, δίνουν πηλίκο 6

ii. Όταν διαιρεθούν με το 5 δίνουν πηλίκο 8

iii. Όταν διαιρεθούν με το 6 δίνουν πηλίκο 9

9. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $40 - 20 : 4 + 3 \cdot 2 =$

ii. $23 - 40 : 8 + 3 \cdot 5 =$

iii. $220 - 55 : 5 - 6 \cdot 2 =$

iv. $72 + 24 : 7 + 9 \cdot 2 =$

10. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $35 - 12 : 4 + 4 \cdot 2 =$

ii. $33 - 21 : 3 + 3 \cdot 5 =$

iii. $12 - 48 : 4 + 5 \cdot 2 =$

iv. $16 - 16 : 4 + 6 \cdot 4 =$

11. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $6 \cdot 2 - 20 : 4 - 3 \cdot 2 =$

ii. $(3 \cdot 2 - 12 : 6) : 2 + 16 : 2 =$

iii. $(2 \cdot 3 + 10 : 5) : 2 - 20 : 10 + 3 \cdot 2 =$

iv. $(12 - 8 : 2) : (3 \cdot 5 - 3^2 - 36 : 9) =$

12. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $[(2^3 - 4) : 2 + 5 \cdot 2] : 4 =$

ii. $3^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 5 - 5^2 + 6^2 : 4 =$

iii. $35 : [(2^5 : 4^2 + 3)^2 : (3 \cdot 2^2 - 7)] =$

iv. $[4^2 : (5 - 3)^2 + 5^2 \cdot (4 - 2)^2] : [20 - 3 \cdot (11 - 7)] =$

13. Ένας πατατοπαραγωγός έχει στην αποθήκη του 240 κιλά πατάτες. Θέλει να τα βάλει σε σακά των 15 κιλών.

i. Πόσα σακιά θα γεμίσει;

ii. Πόσα κιλά πατάτες θα περισσέψουν;

14. Κάποιος αγόρασε έπιπλα για το σαλόνι του και πλήρωσε 6700 ευρώ. Έδωσε 3000 ευρώ προκαταβολή και τα υπόλοιπα σε δόσεις.

- i. Να βρείτε πόσο θα πληρώνει την κάθε δόση αν εξοφλήσει σε 5 μήνες;
- ii. Να βρείτε πόσο θα πληρώνει την κάθε δόση αν εξοφλήσει σε 20 μήνες;

15. Από 6 κιλά γάλα με επεξεργασία παράγεται 1 λίτρο συμπυκνωμένο γάλα. Σε ένα εργοστάσιο συγκεντρώθηκαν 126.000 κιλά γάλα. Πόσα λίτρα συμπυκνωμένο γάλα παράχθηκαν;

16. Αν σήμερα είναι Δευτέρα , τι μέρα θα είναι μετά από

- i. 134 μέρες
- ii. 225 μέρες.

1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – Μ.Κ.Δ – Ε.Κ.Π. – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων .

❖ Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού

- Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή τα πολλαπλάσια του φυσικού αριθμού α είναι $\alpha, 1 \cdot \alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, \dots$
 - ✓ Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
 - ✓ Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του
 - ✓ Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

❖ Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

- Κάθε φυσικός αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α , δηλαδή την μονάδα και τον εαυτό του
- Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 που έχει για διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και την μονάδα λέγεται **πρώτος**.
- Ένας φυσικός αριθμός που εκτός από τον εαυτό του και την μονάδα έχει και άλλους διαιρέτες λέγεται **σύνθετος**.
- Το 1 έχει μόνο για διαιρέτη το 1 οπότε δεν θεωρείται ούτε σύνθετος ούτε πρώτος
 - ✓ Ο μοναδικός πρώτος άρτιος είναι το 2

❖ Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ.

- Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δυο η περισσοτέρων φυσικών αριθμών είναι το μικρότερο από τα κοινά τους πολλαπλάσια.
 - ✓ Δυο η περισσότεροι φυσικοί αριθμοί έχουν άπειρα κοινά πολλαπλάσια.
- Μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δυο η περισσοτέρων φυσικών αριθμών είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες τους.
 - ✓ Αν δυο αριθμοί α, β έχουν Μ.Κ.Δ την μονάδα $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta)=1$ τότε λέγονται πρώτοι μεταξύ τους.

❖ Κριτήρια διαιρετότητας

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10 όταν λήγει σε μηδέν
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 όταν λήγει σε 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 όταν λήγει σε 0 ή 5
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 όταν τα δυο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 25 όταν τα δυο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 25.

❖ *Ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων*

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί, με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών. Η διαδικασία αυτή λέγεται ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
 - ✓ Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δυο αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων παίρνουμε το γινόμενο των κοινών και μη κοινών τους παραγόντων.
 - ✓ Για να βρούμε το Μ.Κ.Δ. δυο αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων παίρνουμε το γινόμενο μόνο των κοινών τους παραγόντων.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. α) Να βρείτε τα 5 πρώτα πολλαπλάσια του 12.
 β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 372 είναι πολλαπλάσιο του 12.
 Λύση
 α) Τα πέντε πρώτα πολλαπλάσια είναι:
 $12 \cdot 1 = 12$
 $12 \cdot 2 = 24$
 $12 \cdot 3 = 36$
 $12 \cdot 4 = 48$
 $12 \cdot 5 = 60$
 β) Αν κάνουμε την διαίρεση $372 : 12$ θα βγάλουμε πηλίκο 31

Άρα $372:12 = 31$.Επομένως $31 \cdot 12 = 372$ άρα το 372 είναι πολλαπλάσιο του 12.

2. Οι αριθμού 16 και 23 είναι πρώτοι οι σύνθετοι;

Λύση:

Το 16 είναι σύνθετος

Το 23 είναι πρώτος αριθμός

3. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 5.238 διαιρείται με το 2 , 3 , 5 , 9 , 10 , 4 , 25 .

Λύση

Ο αριθμός 5.238 τελειώνει σε 8 άρα διαιρείται με το 2.

Ο αριθμός 5.238 δεν τελειώνει σε 0 ή 5 άρα δεν διαιρείται με το 5.

Ο αριθμός 5.238 δεν τελειώνει σε 0 άρα δεν διαιρείται με το 0.

Ο αριθμός 5.238 έχει άθροισμα ψηφίων 18 που είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα διαιρείται με το 3.

Ο αριθμός 5.238 έχει άθροισμα ψηφίων 18 που είναι πολλαπλάσιο του 9 άρα διαιρείται με το 9.

Τα δυο τελευταία ψηφία του αριθμού 5.238 είναι 38 που δεν διαιρείται με το 4 άρα και ο αριθμός 5.238 δεν διαιρείται με το 4.

Τα δυο τελευταία ψηφία του αριθμού 5.238 είναι 38 που δεν διαιρείται με το 25 άρα και ο αριθμός 5.238 δεν διαιρείται με το 25.

4. Να γράψετε τον αριθμό 2.350 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση

Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 2.350 διαδοχικά με πρώτους αριθμούς έχουμε την διπλανή ανάλυση:

Επομένως ισχύει ότι: $2350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 17$

$$\begin{array}{r|l} 2350 & 2 \\ 1275 & 5 \\ 255 & 5 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

5. α) Να βρείτε τα 3 πρώτα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 2 , 3

β) Να βρείτε το Ε.Κ.Π.(2,3)

Λύση

α)

Πολλαπλάσια του 2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Πολλαπλάσια του 3	3	6	9	12	15	18	21	24	

Τα 3 πρώτα κοινά πολλαπλάσια είναι το 6 το 12 και το 18

β) $E.K.P.(2,3)=6$

6. α) Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών 12 , 18

β) Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. (12,18)

Λύση:

Διαίρετες του 12	2	3	4	6	12
Διαίρετες του 18	2	3	6	9	18

Οι κοινοί διαιρέτες είναι το 2 , 3 και το 6

β) $M.K.D. (12,18) = 6$

7. Να αναλυθούν οι αριθμοί 36 , 54 , 72 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με την βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ. τους.

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 54 & 2 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

Λύση:

Ισχύει ότι $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

$E.K.P. (36,5,72) = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$

$M.K.D. (36,5,72) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα πολλαπλάσια του 6 που είναι:
 - i. Μικρότερα του 54
 - ii. Μεταξύ 59 και 82
 - iii. Από το 102 μέχρι το 180
2. Να βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών 12 , 24 , 36 , 48 , 55
3. Ποιοι από τους αριθμούς 14 , 16 , 21 είναι διαιρέτες του 2.184
4. Ποιοι από τους αριθμούς 1.064 , 1.440 , 7.904 είναι πολλαπλάσια του 32
5. Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ των αριθμών
 - i. 14 , 18
 - ii. 12 , 36
 - iii. 7 , 15
 - iv. 15 , 25
 - v. 16 , 24 , 30
6. Δίνονται οι αριθμοί 2 , 3 , 34 , 8 , 11 και 66
 - i. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι;
 - ii. Ποιοι από αυτούς είναι σύνθετοι;
 - iii. Να βρείτε τα ζεύγη των αριθμών που είναι πρώτοι μεταξύ τους.
7. Δίνονται οι αριθμοί 72 , 105 , 333 , 274, 177 , 288 , 315 , 414 ,125
 Να βρείτε ποιοι διαιρούνται με:

i. Το 2	iii. Το 5	v. Το 4
ii. Το 3	iv. Το 9	vi. Το 25
8. Δίνονται οι αριθμοί 1245 , 1405 , 3333 , 2740, 1707 , 18 , 300 , 4104 ,1250
 Να βρείτε ποιοι διαιρούνται με:

i. Το 2	iii. Το 5	v. Το 4
ii. Το 3	iv. Το 9	vi. Το 25
9. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς

i. 45	iii. 36	v. 512
ii. 27	iv. 702	vi. 66
10. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π. των αριθμών:

i. 18,27,45	ii. 16,24,32
-------------	--------------

iii. 24,42,54

v. 2,3,5

iv. 20,30,50

vi. 30, 45, 60

11. Να συμπληρώσετε με κατάλληλο ψηφίο το τετραγωνάκι στον αριθμό 83□ ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 3.
12. Να συμπληρώσετε με κατάλληλο ψηφίο το τετραγωνάκι στον αριθμό 123□ ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 9.
13. Να συμπληρώσετε με κατάλληλο ψηφίο το τετραγωνάκι στον αριθμό 66□ ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται ταυτόχρονα με το 3 και το 5.
14. Να συμπληρώσετε με κατάλληλο ψηφίο το τετραγωνάκι στον αριθμό 73□ ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται ταυτόχρονα με το 3 και το 2.
15. Να συμπληρώσετε με κατάλληλο ψηφίο το τετραγωνάκι στον αριθμό 88□ ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται ταυτόχρονα με το 3 το 9 και το 2.
16. Πρέπει να ποτίζω τα δέντρα μου κάθε 9 μέρες και να βάζω λίπασμα κάθε 24 ημέρες και να το ξεχορταριάζω κάθε 60 μέρες. Αν σήμερα τα ποτίσω τους βάλω λίπασμα και τα ξεχορταριάσω μετά από πόσες μέρες θα πρέπει να κάνω την ίδια μέρα και τις τρεις αυτές εργασίες;
17. Ένας ηλικιωμένος πρέπει να παίρνει τρία φάρμακα την ημέρα. Το ένα κάθε 6 ώρες το δεύτερο κάθε 9 ώρες και το τρίτο κάθε 15 ώρες. Αν στις 12 το μεσημέρι της Δευτέρας πάρει και τα τρία φάρμακα μαζί μετά από πόσες ώρες θα τα πάρει συγχρόνως; Τι μέρα θα έχουμε τότε;
18. Ένας ανθοπώλης έχει 48 τριαντάφυλλα , 36 μαργαρίτες και 24 γαρίφαλα.
 - α) Πόσες το πολύ ίδιες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει χωρίς να του περισσέψει κανένα λουλούδι;
 - β) Πόσα τριαντάφυλλα , πόσες μαργαρίτες και πόσα γαρίφαλα θα έχει κάθε μία από αυτές τις ανθοδέσμες;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° – Κλάσματα

2.1 Η έννοια του κλάσματος

❖ Κλασματική μονάδα – κλασματικός αριθμός

- Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε n ίσα μέρη το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται νιοστό και συμβολίζεται με $\frac{1}{n}$. Ο αριθμός $\frac{1}{n}$ λέγεται κλασματική μονάδα.
- Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από k τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{k}{n}$ και διαβάζεται «κάπα νιοστά».
- Στο κλάσμα $\frac{k}{n}$ ο αριθμός k λέγεται αριθμητής, ο αριθμός n λέγεται παρονομαστής. Ο αριθμητής και ο παρονομαστής λέγονται όροι του κλάσματος.
 - ✓ Ο παρονομαστής μας δείχνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε ένα μέγεθος ενώ ο αριθμητής δηλώνει πόσα μέρη από αυτά πήραμε.
 - ✓ Σε κάθε κλάσμα θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός από το μηδέν.
- Κάθε κλάσμα είναι η διαίρεση που έχει για διαιρετέο τον αριθμητή και διαιρέτη τον παρονομαστή. Δηλαδή $\frac{k}{n} = k : n, n \neq 0$
- Κάθε φυσικός αριθμός a γράφεται σαν κλάσμα με παρονομαστή την μονάδα $a = \frac{a}{1}$
- Όταν οι όροι του κλάσματος είναι ίσοι, τότε το κλάσμα είναι ίσο με την μονάδα. Δηλαδή $\frac{a}{a} = 1$
- Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με το μηδέν τότε και το κλάσμα είναι ίσο με το μηδέν. Δηλαδή $\frac{0}{a} = 0$
- Όταν σε ένα κλάσμα ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από την μονάδα. Δηλαδή αν $a > b$ τότε $\frac{a}{b} > 1$ με $b \neq 0$.
- Όταν σε ένα κλάσμα ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο από την μονάδα. Δηλαδή αν $a < b$ τότε $\frac{a}{b} < 1$ με $b \neq 0$
 - ✓ Για να βρούμε το $\frac{1}{n}$ ενός αριθμού a πολλαπλασιάσουμε το $\frac{1}{n}$ με τον αριθμό a .
Δηλαδή έχουμε $\frac{1}{n} \cdot a = \frac{a}{n}$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Ο Γιάννης αγόρασε μια σοκολάτα και την έκοψε σε 7 ίσα μέρη.
 - i. Πως συμβολίζεται κάθε ένα από αυτά τα ίσα μέρη;
 - ii. Ο Γιάννης έφαγε 3 κομμάτια από τα 7 της σοκολάτας. Πως συμβολίζεται το μέρος της σοκολάτας που έφαγε ο Γιάννης;

Λύση

- i. Κάθε ένα από τα 7 ίσα μέρη συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{1}{7}$.
 - ii. Το μέρος της σοκολάτας που έφαγε ο Γιάννης συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{3}{7}$
2. Να βρείτε με ποιόν φυσικό αριθμό είναι ίσα τα παρακάτω κλάσματα

- i. $\frac{10}{2}$
- ii. $\frac{6}{6}$
- iii. $\frac{4}{1}$
- iv. $\frac{0}{4}$

Λύση

- i. $\frac{10}{2} = 10:2 = 5$
- ii. $\frac{6}{6} = 6:6 = 1$
- iii. $\frac{4}{1} = 4:1 = 4$
- iv. $\frac{0}{4} = 0:4 = 0$

3. Να συγκρίνετε με την μονάδα τα κλάσματα

- i. $\frac{8}{9}$
- ii. $\frac{12}{11}$
- iii. $\frac{5}{5}$

Λύση

- i. Στο κλάσμα $\frac{8}{9}$ ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή επομένως το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1. Δηλαδή $\frac{8}{9} < 1$
- ii. Στο κλάσμα $\frac{12}{11}$ ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή επομένως το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1. Δηλαδή $\frac{12}{11} > 1$
- iii. Στο κλάσμα $\frac{5}{5}$ ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή επομένως το κλάσμα είναι ίσο με 1. Δηλαδή $\frac{5}{5} = 1$

4. Να βρείτε το $\frac{1}{6}$ του αριθμού 42

Λύση

Το $\frac{1}{6}$ του αριθμού 42 είναι $\frac{1}{6} \cdot 42 = \frac{42}{6} = 42:6 = 7$

5. Να βρείτε τα $\frac{4}{7}$ του αριθμού 49

Λύση

Το $\frac{1}{7}$ του 49 είναι $49:7 = 7$

Τα $\frac{4}{7}$ θα είναι $7 \cdot 4 = 28$

6. Τα $\frac{3}{7}$ μιας τάξης είναι 12 μαθητές. Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι μαθητές

Λύση

Το $\frac{1}{7}$ θα είναι $12:3 = 4$ μαθητές

Τα $\frac{7}{7}$ θα είναι $4 \cdot 7 = 28$ μαθητές

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε με ποιόν φυσικό αριθμό είναι ίσα τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{10}{2}$

iii. $\frac{15}{3}$

v. $\frac{10}{5}$

ii. $\frac{16}{2}$

iv. $\frac{21}{3}$

vi. $\frac{40}{2}$

2. Να βρείτε με ποιόν φυσικό αριθμό είναι ίσα τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{110}{5}$

iii. $\frac{256}{4}$

v. $\frac{5.784}{24}$

ii. $\frac{1260}{6}$

iv. $\frac{1028}{8}$

vi. $\frac{11.935}{35}$

3. Να βρείτε με ποιόν φυσικό αριθμό είναι ίσα τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{10}{1}$

iii. $\frac{110}{1}$

v. $\frac{210}{21}$

ii. $\frac{12}{1}$

iv. $\frac{10}{10}$

vi. $\frac{110}{11}$

4. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες

i. $\frac{\quad}{6} = 3$

iii. $\frac{\quad}{3} = 3$

v. $\frac{64}{\quad} = 4$

ii. $\frac{40}{\quad} = 8$

iv. $\frac{15}{\quad} = 3$

vi. $\frac{\quad}{6} = 4$

5. Να συγκρίνεται τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας το σωστό σύμβολο ($<$, $=$, $>$)

i. $\frac{4}{5} \dots 1$

iii. $\frac{1}{5} \dots 1$

v. $\frac{4}{3} \dots 1$

ii. $\frac{24}{5} \dots 1$

iv. $\frac{4}{4} \dots 1$

vi. $\frac{12}{13} \dots 1$

6. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά

i. $\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}$

iii. $\frac{5}{4}, 1, \frac{1}{4}$

ii. $\frac{6}{5}, 1, \frac{2}{5}$

iv. $\frac{3}{7}, 1, \frac{3}{5}$

7. Να βρείτε τα επόμενα μέρη:

i. Το $\frac{1}{2}$ του 12

iii. Το $\frac{1}{6}$ του 72

v. Το $\frac{1}{5}$ του 120

ii. Το $\frac{1}{3}$ του 12

iv. Το $\frac{1}{4}$ του 40

8. Να βρείτε

i. Τα $\frac{2}{8}$ του 40

iv. Τα $\frac{3}{8}$ του 128

ii. Τα $\frac{3}{5}$ του 40

v. Τα $\frac{4}{5}$ του 100

iii. Τα $\frac{2}{7}$ του 21

9. Να βρείτε:

- i. Ποιο μέρος της ώρας είναι τα 15 λεπτά.
- ii. Ποιο μέρος της ημέρας είναι η μια ώρα.
- iii. Ποιο μέρος της εβδομάδας είναι οι 10 ώρες.

10. Τα $\frac{3}{5}$ μιας τάξης είναι αγόρια. Αν τα αγόρια είναι 15 να βρείτε πόσα είναι όλα τα παιδιά της τάξης.

11. Τα $\frac{2}{3}$ μιας τάξης είναι αγόρια. Αν τα αγόρια είναι 20 να βρείτε πόσα είναι όλα τα παιδιά της τάξης.

12. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα παπούτσια ίση με τα $\frac{2}{5}$ της αρχικής τιμής. Αν η αρχική τιμή ήταν 40 ευρώ να βρείτε:

- i. Πόσο είναι η έκπτωση;
- ii. Ποια είναι η τελική τιμή των παπουτσιών;

2.2 Ισοδύναμα κλάσματα

❖ Ισοδύναμα κλάσματα

- Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$
 - ✓ Αν δυο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα χιαστή γινόμενα είναι ίσα.
Δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
 - ✓ Όταν οι όροι ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta \cdot \lambda}$
 - ✓ Όταν οι όροι ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \lambda}{\beta : \lambda}$

❖ Απλοποίηση κλάσματος

- Απλοποίηση κλάσματος ονομάζεται η μετατροπή του σε ισοδύναμο με μικρότερους όρους από το αρχικό.
 - ✓ Αν ένα κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί τότε ονομάζεται **ανάγωγο**.
 - ✓ Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ σε ισοδύναμο ανάγωγο βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ.(α,β) και διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον Μ.Κ.Δ. Αν Μ.Κ.Δ.(α,β)=1 τότε το κλάσμα είναι ανάγωγο.

❖ Ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα

- Όταν δυο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**.
- Όταν δυο κλάσματα έχουν διαφορετικούς παρονομαστές λέγονται **ετερόνυμα**.
- Για να μετατρέψουμε δυο ή περισσότερα ετερόνυμα κλάσματα σε ομώνυμα εργαζόμαστε ως εξής:
 - Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών
 - Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με κατάλληλο αριθμό, ώστε όλοι οι παρονομαστές να γίνουν ίσοι με το παραπάνω Ε.Κ.Π.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα

i. $\frac{6}{8}$ και $\frac{18}{24}$

ii. $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$

Λύση

i. Πολλαπλασιάζουμε χιαστί τα κλάσματα και παίρνουμε τα αποτελέσματα:

$$6 \cdot 24 = 144 \text{ και } 18 \cdot 8 = 144 \text{ επειδή είναι ίσα τα κλάσματα είναι ισοδύναμα.}$$

ii. Πολλαπλασιάζουμε χιαστί τα κλάσματα και παίρνουμε τα αποτελέσματα:

$$3 \cdot 9 = 27 \text{ και } 5 \cdot 7 = 35 \text{ επειδή δεν είναι ίσα τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.}$$

2. Να φτιάξετε ένα κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{12}{18}$ που να έχει

i. Αριθμητή 24

ii. Παρονομαστή 54

iii. Αριθμητή 6

iv. Παρονομαστή 6

Λύση

i. Στο κλάσμα $\frac{12}{18}$ για να γίνει ο αριθμητής 24 θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 2.

$$\text{Επομένως το ζητούμενο κλάσμα θα είναι } \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{24}{36}$$

ii. Στο κλάσμα $\frac{12}{18}$ για να γίνει ο παρονομαστής 54 θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 3.

$$\text{Επομένως το ζητούμενο κλάσμα θα είναι } \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 3}{18 \cdot 3} = \frac{36}{54}$$

iii. Στο κλάσμα $\frac{12}{18}$ για να γίνει ο αριθμητής 6 θα πρέπει να διαιρεθεί με το 2. Επομένως το

$$\text{ζητούμενο κλάσμα θα είναι } \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9}$$

iv. Στο κλάσμα $\frac{12}{18}$ για να γίνει ο παρονομαστής 6 θα πρέπει να διαιρεθεί με το 3.

$$\text{Επομένως το ζητούμενο κλάσμα θα είναι } \frac{12}{18} = \frac{12 \div 3}{18 \div 3} = \frac{4}{6}$$

3. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

i. $\frac{35}{40}$

ii. $\frac{6}{32}$

Λύση

i. Βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ. των όρων του κλάσματος Μ.Κ.Δ.(35,40)=5

$$\text{Άρα } \frac{35}{40} = \frac{35:5}{40:5} = \frac{7}{8}$$

- ii. Βρίσουμε το Μ.Κ.Δ. των όρων του κλάσματος Μ.Κ.Δ.(6,32)=2

$$\text{Άρα } \frac{6}{32} = \frac{6:2}{32:2} = \frac{3}{16}$$

4. Δίνονται τα κλάσματα $\frac{6}{9}$ και $\frac{15}{18}$

- i. Είναι τα κλάσματα ομώνυμα
- ii. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα
- iii. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

Λύση

- i. Τα κλάσματα $\frac{6}{9}$ και $\frac{15}{18}$ έχουν διαφορετικούς παρονομαστές επομένως δεν είναι ομώνυμα.

ii. $\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$ και $\frac{15}{18} = \frac{15:3}{18:3} = \frac{5}{6}$

- iii. Θα μετατρέψουμε τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{5}{6}$ σε ομώνυμα.

$$\text{Ε.Κ.Π.}(3,6)=6 \text{ Άρα } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ και } \frac{5}{6}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα

i. $\frac{2}{4}$ και $\frac{1}{2}$

iii. $\frac{16}{40}$ και $\frac{2}{5}$

v. $\frac{15}{18}$ και $\frac{5}{6}$

ii. $\frac{5}{20}$ και $\frac{1}{5}$

iv. $\frac{3}{4}$ και $\frac{30}{40}$

vi. $\frac{2}{4}$ και $\frac{6}{3}$

2. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα

i. $\frac{0}{4}$ και $\frac{0}{2}$

iii. $\frac{0}{4}$ και $\frac{4}{4}$

v. $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{3}$

ii. $\frac{4}{4}$ και $\frac{2}{2}$

iv. $\frac{2}{4}$ και $\frac{1}{3}$

vi. $\frac{8}{4}$ και $\frac{4}{2}$

3. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{22}{44}, \frac{10}{5}, \frac{12}{16}, \frac{4}{2}, \frac{100}{50}, \frac{33}{44}$$

4. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{4}{12}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή

i. Το 6

iii. Το 70

v. Το 48

ii. Το 36

iv. Το 4

5. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{5}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή

i. Το 15

iii. Το 50

v. Το 125

ii. Το 25

iv. Το 100

6. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{12}{18}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή

i. 6

iii. 9

v. 72

ii. 36

iv. 90

7. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα ανάγωγα .

i. $\frac{9}{27}$

iii. $\frac{60}{40}$

v. $\frac{42}{8}$

ii. $\frac{12}{30}$

iv. $\frac{77}{33}$

8. Να γίνουν τα παρακάτω κλάσματα ομώνυμα

i. $\frac{3}{4}$ και $\frac{2}{5}$

iii. $\frac{12}{13}$ και $\frac{2}{5}$

v. $\frac{3}{9}$ και $\frac{2}{6}$

ii. $\frac{5}{4}$ και $\frac{2}{6}$

iv. $\frac{11}{7}$ και $\frac{4}{9}$

vi. $\frac{3}{3}$ και $\frac{2}{5}$

9. Να γίνουν τα παρακάτω κλάσματα ομώνυμα

i. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}$

iii. $\frac{5}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}$

v. $\frac{3}{9}, \frac{2}{6}, \frac{1}{12}$

ii. $\frac{2}{6}, \frac{4}{7}, \frac{1}{5}$

iv. $\frac{3}{12}, \frac{2}{18}, \frac{1}{36}$

vi. $\frac{3}{7}, \frac{2}{3}, \frac{1}{11}$

10. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ανάγωγα και στην συνέχεια να τα κάνετε ομώνυμα.

i. $\frac{12}{15}$ και $\frac{6}{9}$

iii. $\frac{3}{6}$ και $\frac{4}{20}$

v. $\frac{40}{50}$ και $\frac{6}{12}$

ii. $\frac{4}{8}$ και $\frac{4}{10}$

iv. $\frac{5}{20}$ και $\frac{9}{21}$

vi. $\frac{4}{4}$ και $\frac{15}{3}$

11. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{3+6}{12+9}$

iii. $\frac{31+1}{44+20}$

v. $\frac{45+3}{13+5}$

ii. $\frac{7+14}{9+3}$

iv. $\frac{8+6}{13+7}$

12. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 3}$

iii. $\frac{4 \cdot 6}{8 \cdot 3}$

v. $\frac{3 \cdot 7}{9 \cdot 2}$

ii. $\frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 2}$

iv. $\frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 5}$

13. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{12 \cdot 9}$

iii. $\frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 6}{3^2 2^2}$

v. $\frac{20 \cdot 98 - 8 \cdot 98}{30 \cdot 98 - 9 \cdot 98}$

ii. $\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}{2^3 \cdot 3 \cdot 4}$

iv. $\frac{16 \cdot 789 + 8 \cdot 789}{12 \cdot 789 + 28 \cdot 789}$

2.3 Σύγκριση κλασμάτων

❖ Σύγκριση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων

- Όταν έχουμε δυο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.
- Για να συγκρίνουμε δυο ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και στη συνέχεια τα συγκρίνουμε με βάση τους αριθμητές τους.
- Όταν έχουμε δυο ετερόνυμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να συγκρίνετε τα κλάσματα

i. $\frac{6}{15}$ και $\frac{11}{15}$

ii. $\frac{4}{7}$ και $\frac{4}{9}$

iii. $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{9}$

Λύση

i. Τα κλάσματα $\frac{6}{15}$ και $\frac{11}{15}$ είναι ομώνυμα επομένως μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μεγαλύτερο παρονομαστή. Άρα $\frac{6}{15} < \frac{11}{15}$

ii. Τα κλάσματα $\frac{4}{7}$ και $\frac{4}{9}$ έχουν τον ίδιο αριθμητή επομένως μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή. Άρα $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$

iii. Τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{9}$ είναι ετερόνυμα και δεν έχουν τον ίδιο αριθμητή. Επομένως τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα.

$$\frac{3}{7} \text{ και } \frac{5}{9} \text{ άρα έχουμε } \frac{27}{63} < \frac{35}{63} \text{ . Επομένως } \frac{3}{7} < \frac{5}{9}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να συγκρίνετε τα κλάσματα τοποθετώντας στο κενό το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $=$, $>$).

i. $\frac{5}{12} \dots \frac{9}{12}$

iii. $\frac{6}{12} \dots \frac{3}{6}$

v. $\frac{3}{15} \dots \frac{3}{2}$

ii. $\frac{2}{4} \dots \frac{1}{4}$

iv. $\frac{4}{7} \dots \frac{4}{9}$

vi. $\frac{6}{20} \dots \frac{12}{40}$

2. Να συγκρίνετε τα κλάσματα τοποθετώντας στο κενό το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $=$, $>$).

i. $\frac{2}{5} \dots \frac{3}{6}$

iii. $\frac{6}{2} \dots \frac{12}{4}$

v. $\frac{4}{5} \dots \frac{20}{25}$

ii. $\frac{1}{6} \dots \frac{1}{12}$

iv. $\frac{3}{9} \dots \frac{9}{3}$

vi. $\frac{9}{9} \dots \frac{12}{12}$

3. Να συγκρίνετε τα κλάσματα τοποθετώντας στο κενό το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $=$, $>$).

i. $\frac{5}{2} \dots \frac{6}{4}$

iii. $\frac{6}{9} \dots \frac{2}{15}$

v. $\frac{5}{50} \dots \frac{1}{10}$

ii. $\frac{3}{7} \dots \frac{4}{9}$

iv. $\frac{4}{23} \dots \frac{4}{27}$

vi. $\frac{3}{4} \dots \frac{8}{9}$

4. Να συγκρίνετε τα επόμενα κλάσματα

i. $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$

iii. $\frac{2}{7}$ και $\frac{1}{4}$

v. $\frac{54}{3}$ και $\frac{56}{4}$

ii. $\frac{5}{3}$ και $\frac{6}{4}$

iv. $\frac{24}{5}$ και $\frac{23}{4}$

5. Να συγκρίνετε τα επόμενα κλάσματα

i. $\frac{33}{3}$ και $\frac{16}{4}$

iii. $\frac{51}{3}$ και $\frac{53}{4}$

v. $\frac{452}{6}$ και $\frac{542}{4}$

ii. $\frac{2}{2}$ και $\frac{8}{4}$

iv. $\frac{213}{6}$ και $\frac{215}{4}$

6. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να συγκρίνετε τα κλάσματα με την μονάδα.

i. $\frac{12}{11}$

iii. $\frac{1309}{1121}$

v. $\frac{125}{1132}$

ii. $\frac{14}{11}$

iv. $\frac{112}{112}$

7. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{13}$$

8. Να γράψετε σε φθίνουσα σειρά τα κλάσματα

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{20}$$

9. Να κάνετε ομώνυμα και να γράψετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα

i. $\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{10}$

iii. $\frac{5}{12}, \frac{11}{30}, \frac{7}{20}$

ii. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

iv. $\frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{4}{9}$

2.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

❖ Πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων

- Προσθέτουμε δυο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές και κρατώντας τον ίδιο παρονομαστή. Δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

- Αφαιρούμε δυο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές και κρατώντας τον ίδιο παρονομαστή. Δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

❖ Πρόσθεση και αφαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων

- Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δυο ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

❖ Μεικτό κλάσμα

- Το άθροισμα ενός φυσικού αριθμού α με ένα κλάσμα $\frac{\beta}{\gamma}$ μικρότερο της μονάδας μπορεί να γραφτεί $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} = \alpha \frac{\beta}{\gamma}$. Το κλάσμα $\alpha \frac{\beta}{\gamma}$ λέγεται μεικτός αριθμός.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\frac{4}{7} + \frac{12}{7}$

ii. $\frac{9}{10} - \frac{4}{10}$

Λύση

i. $\frac{4}{7} + \frac{12}{7} = \frac{4+12}{7} = \frac{16}{7}$

ii. $\frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

2. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\frac{4}{9} + \frac{5}{6}$

ii. $\frac{7}{10} - \frac{3}{8}$

Λύση

$$\text{i.} \quad \frac{2}{4} + \frac{3}{6} = \frac{8}{18} + \frac{15}{18} = \frac{23}{18}$$

$$\text{ii.} \quad \frac{4}{10} - \frac{5}{8} = \frac{28}{40} - \frac{15}{40} = \frac{13}{40}$$

3. Να κάνετε τις πράξεις

$$\text{i.} \quad 5 + 3\frac{2}{7}$$

$$\text{ii.} \quad 8 - 3\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

Λύση

$$\text{i.} \quad 5 + 3\frac{2}{7} = \frac{7}{1} + \frac{23}{7} = \frac{35}{7} + \frac{23}{7} = \frac{58}{7}$$

$$\text{ii.} \quad 8 - 3\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{12}{1} - \frac{13}{4} + \frac{2}{3} = \frac{96}{12} - \frac{13}{12} + \frac{8}{12} = \frac{96-13+8}{12} = \frac{91}{12}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5}$

iv. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5}$

v. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5}$

iii. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5}$

vi. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5}$

2. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

iii. $\frac{3}{5} + \frac{7}{5}$

v. $\frac{134}{60} + \frac{56}{60}$

ii. $\frac{3}{7} + \frac{12}{7}$

iv. $\frac{23}{9} + \frac{22}{9}$

vi. $\frac{17}{9} + \frac{10}{9}$

3. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{7}{4}$

iv. $\frac{2}{9} + \frac{3}{5} + \frac{6}{4}$

ii. $\frac{2}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

v. $\frac{3}{7} + \frac{2}{21} + \frac{4}{3}$

iii. $\frac{3}{6} + \frac{2}{5} + \frac{5}{12}$

vi. $\frac{3}{27} + \frac{2}{18} + \frac{5}{6}$

4. Να γράψτε ως κλάσματα τους παρακάτω μεικτούς αριθμούς

i. $1\frac{1}{2}$

iii. $5\frac{4}{7}$

v. $4\frac{3}{4}$

ii. $3\frac{2}{3}$

iv. $4\frac{6}{10}$

vi. $8\frac{1}{2}$

5. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα ως μεικτούς αριθμούς

i. $\frac{7}{2}$

iii. $\frac{19}{7}$

v. $\frac{64}{7}$

ii. $\frac{9}{2}$

iv. $\frac{35}{4}$

vi. $\frac{16}{5}$

6. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5}$

iii. $1\frac{5}{6} + 3\frac{4}{5}$

v. $5\frac{3}{7} + 3\frac{2}{5}$

ii. $2\frac{3}{5} + 5\frac{2}{4}$

iv. $6\frac{3}{6} + 2\frac{1}{6}$

vi. $6\frac{1}{6} + 3\frac{1}{5}$

7. Να κάνετε τις αφαιρέσεις

i. $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$

iii. $\frac{8}{6} - \frac{2}{6}$

v. $\frac{12}{15} - \frac{3}{15}$

ii. $\frac{16}{13} - \frac{3}{13}$

iv. $\frac{15}{19} - \frac{6}{19}$

vi. $\frac{14}{23} - \frac{2}{23}$

8. Να κάνετε τις αφαιρέσεις

i. $\frac{3}{6} - \frac{2}{5}$

iii. $\frac{15}{9} - \frac{3}{4}$

v. $\frac{12}{13} - \frac{7}{9}$

ii. $\frac{7}{6} - \frac{4}{7}$

iv. $\frac{7}{8} - \frac{1}{5}$

vi. $\frac{5}{19} - \frac{1}{20}$

9. Να κάνετε τις αφαιρέσεις

i. $3 - \frac{5}{4}$

iii. $1 - \frac{2}{5}$

v. $7 - \frac{7}{8}$

ii. $2 - \frac{1}{3}$

iv. $8 - \frac{4}{3}$

vi. $12 - \frac{2}{9}$

10. Να κάνετε τις αφαιρέσεις

i. $7\frac{1}{4} - 3\frac{1}{4}$

iii. $3\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6}$

ii. $7\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}$

iv. $\frac{61}{6} - 4\frac{2}{5}$

11. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{15}\right)$

ii. $\left(\frac{8}{9} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{17}{18} - \frac{7}{12}\right)$

iii. $2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$

iv. $4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}\right)$

v. $\left(3 - 1\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{7}{2} - 2\frac{3}{4}\right)$

vi. $50 - 15\frac{1}{2} - \left(8\frac{1}{4} + 6\frac{1}{6}\right) - \left(9\frac{5}{8} - 3\frac{11}{12}\right)$

vii. $\frac{5^2 - 2 \cdot 3^2}{1 + 3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 7 - 2 \cdot 5}{17 - 3^2}$

viii. $2 - \left[\frac{37}{36} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)\right]$

12. Δυο φίλοι βάζουν έναν τοίχο. Ο πρώτος έχει βάψει τα $\frac{3}{10}$ του τοίχου και ο δεύτερος τα $\frac{8}{15}$ του τοίχου. Τι μέρος του τοίχου μένει να βαφτεί ακόμα;

13. Το μεικτό βάρος μιας κονσέρβας είναι $5\frac{1}{4}$ κιλά. Το βάρος του κουτιού είναι $\frac{1}{6}$ κιλά. Πόσο είναι το βάρος του περιεχομένου;

2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

❖ Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

- Το γινόμενο δυο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$
- Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του φυσικού αριθμού με τον αριθμητή του κλάσματος και τον ίδιο παρονομαστή. Δηλαδή $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$

❖ Αντίστροφα κλάσματα

- Τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφα.
 - ✓ Ο αντίστροφος του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι το κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$
 - ✓ Ο αντίστροφος κάθε φυσικού αριθμού $\alpha \neq 0$ είναι το κλάσμα $\frac{1}{\alpha}$
 - ✓ Το μηδέν δεν έχει αντίστροφο αριθμό
 - ✓ Ο αντίστροφος της μονάδας είναι η μονάδα.

❖ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού κλασμάτων

- Το 1 δε μεταβάλλει το γινόμενο $1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$
- Αντιμεταθετική ιδιότητα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$
- Προσεταιριστική ιδιότητα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$
- Επιμεριστική ιδιότητα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$
 $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να βρείτε τα γινόμενα

i. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$

ii. $4 \cdot \frac{6}{12}$

Λύση

i. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

$$\text{ii. } 4 \cdot \frac{6}{12} = \frac{4 \cdot 6}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

2. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών

$$\text{i. } \frac{6}{11}$$

$$\text{ii. } 4$$

$$\text{iii. } \frac{1}{9}$$

$$\text{iv. } 2\frac{1}{3}$$

Λύση

$$\text{i. } \text{Ο αντίστροφος του } \frac{6}{11} \text{ είναι ο αριθμός } \frac{11}{6}$$

$$\text{ii. } \text{Ο αντίστροφος του } 4 \text{ είναι ο αριθμός } \frac{1}{4}$$

$$\text{iii. } \text{Ο αντίστροφος του } \frac{1}{9} \text{ είναι ο αριθμός } \frac{9}{1} = 9$$

$$\text{iv. } \text{Ο αντίστροφος του } 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ είναι ο αριθμός } \frac{3}{7}$$

3. Να κάνετε τις πράξεις

$$\text{i. } \frac{3}{4} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right]$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i. } \frac{3}{4} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right] &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right] = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{20}{54} - \frac{4}{27} \right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{10}{27} - \frac{4}{27} \right) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{27} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα γινόμενα

i. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

iii. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

v. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

iv. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

vi. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

2. Να βρείτε τα γινόμενα

i. $6 \cdot \frac{2}{5}$

iii. $\frac{3}{6} \cdot 5$

v. $2 \cdot \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{6} \cdot 4$

iv. $9 \cdot \frac{2}{5}$

vi. $8 \cdot \frac{3}{20}$

3. Να βρείτε τα γινόμενα

i. $5 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4}$

iii. $9 \cdot 3 \cdot \frac{2}{27}$

ii. $8 \cdot 7 \cdot \frac{2}{15}$

iv. $16 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2^5}$

4. Να βρείτε τα γινόμενα

i. $\frac{4}{3} \cdot 6 \cdot \frac{3}{4}$

iii. $\frac{9}{20} \cdot 2^3 \cdot \frac{6}{4}$

ii. $\frac{7}{5} \cdot 5 \cdot 2$

iv. $\frac{9}{2} \cdot 3^3 \cdot \frac{5}{9}$

5. Να βρείτε τα παρακάτω γινόμενα

i. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$

iii. $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12}$

v. $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{21} \cdot \frac{4}{3}$

ii. $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$

iv. $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{4}$

vi. $\frac{3}{27} \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{5}{6}$

6. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

i. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

iii. $\left(\frac{6}{7}\right)^2$

ii. $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

iv. $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

7. Να βρείτε

i. Τα $\frac{3}{5}$ του 45

iii. Τα $\frac{4}{6}$ του 72

ii. Τα $\frac{2}{3}$ του 81

iv. Τα $\frac{2}{5}$ του 1000

8. Να βρείτε

i. Τα $\frac{3}{5}$ του $\frac{6}{20}$

iii. Τα $\frac{4}{6}$ του $\frac{24}{8}$

ii. Τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{9}{10}$

iv. Τα $\frac{2}{5}$ του $\frac{15}{12}$

9. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών

i. $\frac{4}{7}$

ii. $\frac{1}{10}$

iii. $\frac{6}{1}$

iv. 1

v. 33

vi. 4

10. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών

i. $\frac{4}{7} + \frac{1}{2}$

iii. $\frac{2}{7} + \frac{1}{5}$

v. $\frac{3}{5} + 4$

ii. $5 + \frac{3}{4}$

iv. $\frac{5}{8} + \frac{2}{9}$

11. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{6}$

v. $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \right)$

ii. $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{4}$

vi. $\frac{6}{7} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right)$

iii. $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

vii. $\left(3\frac{4}{7} - \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{4}{9}$

iv. $\frac{11}{9} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6}$

viii. $\left(3\frac{4}{7} + 1\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{21}{110}$

12. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{6} \right) \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10} \right)$

iv. $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{20}$

ii. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \right)^2$

v. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \right)^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$

iii. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} \right)^2$

vi. $\left(\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \left[18 \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{4} \right) \right]$

13. Ο Βασίλης αγόρασε μια φόρμα με $30\frac{1}{2}$ ευρώ. Στο ταμείο του έκαναν έκπτωση ίση με τα $\frac{1}{5}$ της τιμής.

i. Πόσα ευρώ είναι η έκπτωση;

ii. Πόσα ευρώ αγόρασε τελικά τη φόρμα;

2.6 Διαίρεση κλασμάτων

❖ Διαίρεση κλασμάτων

- Για να διαιρέσουμε δυο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$
- Για να διαιρέσουμε δυο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$

❖ Σύνθετο κλάσμα

- Ένα κλάσμα που έχει τουλάχιστον ένα όρο του (αριθμητή ή παρονομαστή) κλάσμα λέγεται σύνθετο κλάσμα. Για να μετατραπεί ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό πολλαπλασιάζουμε τους εξωτερικούς όρους μεταξύ τους και το γινόμενο είναι ο αριθμητής του απλού κλάσματος και τους μεσαίους όρους μεταξύ τους και το γινόμενο είναι ο παρονομαστής του απλού κλάσματος. Δηλαδή

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις

i. $\frac{3}{4} : \frac{6}{7}$

ii. $\frac{4}{5} : 3$

iii. $5 : \frac{2}{3}$

Λύση

i. $\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

ii. $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

iii. $5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα σε απλά.

i. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$

$$\text{ii. } \frac{5}{\frac{4}{9}}$$

$$\text{iii. } \frac{\frac{2}{3}}{6}$$

Λύση

$$\text{i. } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ii. } \frac{5}{\frac{4}{9}} = \frac{5 \cdot 9}{1 \cdot 4} = \frac{45}{4}$$

$$\text{iii. } \frac{\frac{2}{3}}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{1}} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{4} : \frac{6}{4}}{1 + \frac{3}{5} : \frac{9}{10}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{4} : \frac{6}{4}}{1 + \frac{3}{5} : \frac{9}{10}} = \frac{2 + \frac{2}{6} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9}} = \frac{2 + \frac{2}{6} - \frac{12}{24}}{1 + \frac{30}{45}} = \frac{\frac{6}{1} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{9}{1} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{12}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{6}}{\frac{9}{9} + \frac{6}{9}} = \frac{\frac{12 + 1 - 3}{6}}{\frac{15}{9}} \\ &= \frac{\frac{10}{6}}{\frac{15}{9}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1 \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα πηλίκα

i. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5}$

iii. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5}$

v. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5}$

iv. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5}$

vi. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5}$

2. Να βρείτε τα πηλίκα

i. $6 : \frac{2}{5}$

iii. $\frac{3}{6} : 5$

v. $2 : \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{6} : 4$

iv. $9 : \frac{2}{5}$

vi. $8 : \frac{3}{20}$

3. Να βρείτε τα πηλίκα

i. $5 \cdot 2 : \frac{3}{4}$

iii. $9 \cdot 3 : \frac{2}{27}$

ii. $8 \cdot 7 : \frac{2}{15}$

iv. $16 \cdot 2 : \frac{5}{2^5}$

4. Να βρείτε τα πηλίκα

i. $\frac{4}{3} : 6 : \frac{3}{4}$

iii. $\frac{9}{20} : 2^3 : \frac{6}{4}$

ii. $\frac{7}{5} \cdot 5 : 2$

iv. $\frac{9}{2} : 3^3 : \frac{5}{9}$

5. Να βρείτε τα παρακάτω πηλίκα

i. $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} : \frac{7}{4}$

iii. $\frac{3}{6} : \frac{2}{5} : \frac{5}{12}$

v. $\frac{3}{7} : \frac{2}{21} \cdot \frac{4}{3}$

ii. $\frac{2}{7} : \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$

iv. $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} : \frac{6}{4}$

vi. $\frac{3}{27} \cdot \frac{2}{18} : \frac{5}{6}$

6. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} : \frac{2}{6}$

v. $\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \right)$

ii. $\frac{5}{3} : \frac{7}{4} + \frac{5}{4}$

vi. $\frac{6}{7} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right)$

iii. $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} : \frac{3}{4}$

vii. $\left(3\frac{4}{7} - \frac{2}{5} \right) : \frac{4}{9}$

iv. $\frac{11}{9} : \frac{7}{4} + \frac{5}{3} : \frac{5}{6}$

viii. $\left(3\frac{4}{7} + 1\frac{2}{3} \right) : \frac{21}{110}$

7. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

i. $\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{6} \right) : \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10} \right)$

iv. $\frac{5}{2} : \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{20}$

ii. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} : \frac{5}{3} \right)^2$

v. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \right)^2 \cdot 3 : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$

iii. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} \right)^2$

vi. $\left(\frac{2}{5} \right)^2 : \left[18 \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{5}{3} : \frac{7}{4} - \frac{5}{4} \right) \right]$

8. Να μετατρέψετε τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα σε απλά

i. $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$

iii. $\frac{\frac{2}{5}}{6}$

v. $\frac{9}{\frac{3}{4}}$

ii. $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{4}}$

iv. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{7}}$

vi. $\frac{\frac{2}{5}}{5}$

9. Να μετατρέψετε τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα σε απλά

i. $\frac{2\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}$

iii. $\frac{6\frac{2}{9}}{7}$

v. $\frac{2\frac{2}{5}}{4\frac{1}{3}}$

ii. $\frac{3\frac{1}{7}}{5}$

iv. $\frac{2}{5\frac{1}{3}}$

vi. $\frac{2\frac{2}{7}}{9\frac{1}{3}}$

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3}}$

iii. $\frac{4\frac{3}{4} - \frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{3}}$

v. $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$

ii. $\frac{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}{3 - \frac{2}{7}}$

iv. $\frac{4\frac{1}{6} - 3\frac{1}{7}}{8 + \frac{2}{3}}$

vi. $\frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5}}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο – Δεκαδικοί αριθμοί

3.1 Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί – Διάταξη δεκαδικών αριθμών – Στρογγυλοποίηση

❖ Δεκαδικοί αριθμοί

- Ένας δεκαδικός αριθμός αποτελείται από το ακέραιο μέρος και το δεκαδικό μέρος που χωρίζονται με την υποδιαστολή (κόμμα)
- Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι οι μονάδες , δεκάδες , κ.τ.λ. όπως στους φυσικούς αριθμούς.
- Στο δεκαδικό μέρος οι τάξεις είναι τα δέκατα , τα εκατοστά τα , τα χιλιοστά , τα δεκάκις χιλιοστά , τα εκατοντάκις χιλιοστά , εκατομμυριοστά ...
 - ✓ Η αξία του δεκαδικού αριθμού δεν αλλάζει αν στο τέλος του προσθέσουμε η του αφαιρέσουμε μηδενικά.

❖ Δεκαδικά κλάσματα

- Δεκαδικό λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10 (10 , 100 , 1.000, ...)
 - ✓ Για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό εργαζόμαστε ως εξής:
 - Γράφουμε μόνο τον αριθμητή και χωρίζουμε με υποδιαστολή τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής. Αν τα ψηφία του αριθμητή δεν επαρκούν συμπληρώνουμε με μηδενικά αριστερά του αριθμητή όσα ψηφία χρειαζόμαστε.
 - ✓ Για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα εργαζόμαστε ως εξής:
 - Στο κλάσμα βάζουμε αριθμητή τον φυσικό αριθμό χωρίς την υποδιαστολή και στον παρονομαστή την μονάδα και μετά τόσα μηδενικά όσα ψηφία έχει το δεκαδικό μέρος.

❖ Σύγκριση δεκαδικών αριθμών

- Μπορούμε να συγκρίνουμε τους δεκαδικούς αριθμούς ως εξής:

Συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη μεταξύ τους και αν είναι διαφορετικά μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος αν είναι ίσα τότε συγκρίνουμε τα δεκαδικά μέρη και μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που έχει μεγαλύτερο ψηφίο της ίδιας τάξης αρχίζοντας από τα δέκατα προς τα δεξιά.

❖ *Στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών*

- Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα δεκαδικό αριθμό:
 - Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
 - Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως επόμενης τάξης. Αν αυτό είναι μικρότερο του 5 το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία μικρότερων τάξεων μηδενίζονται ενώ αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5 το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης της στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.
- ✓ Μερικές φορές με τη στρογγυλοποίηση χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\approx$ που σημαίνει περίπου ίσο.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να μετατρέψετε τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς

i. $\frac{4}{10}$

iii. $\frac{2334}{1.000}$

ii. $\frac{41}{1.000}$

iv. $\frac{432234}{10.000}$

Λύση

i. $\frac{4}{10} = 0,4$

ii. $\frac{41}{1.000} = 0,041$

iii. $\frac{2334}{1.000} = 2,334$

iv. $\frac{432234}{10.000} = 43,2234$

2. Να μετατρέψετε τους δεκαδικούς αριθμούς σε δεκαδικά κλάσματα

i. 1,24

iii. 0,004

ii. 0,126

iv. 0,1500

Λύση

i. $1,24 = \frac{124}{100} = \frac{31}{25}$

$$\text{ii. } 0,126 = \frac{126}{1000} = \frac{63}{500}$$

$$\text{iii. } 0,004 = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$$

$$\text{iv. } 0,1500 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

3. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς

$$\text{i. } \frac{42}{6}$$

$$\text{ii. } \frac{15}{4}$$

$$\text{iii. } \frac{524}{3}$$

Λύση

$$\text{i. } \frac{42}{6} = 42:6 = 7$$

$$\text{ii. } \frac{15}{4} = 15:4 = 3,75$$

$$\text{iii. } \frac{524}{3} = 524:3 = 174,6666 \dots \approx 174,667 \text{ (με προσέγγιση χιλιοστού)}$$

4. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό

i. 34,4443 με προσέγγιση δεκάτου

ii. 6,45593 με προσέγγιση εκατοστού

iii. 42,561702 με προσέγγιση χιλιοστού

Λύση

i. 34,4443 βλέπουμε ότι το επόμενο ψηφίο είναι το 4 άρα η στρογγυλοποίηση γίνεται:

$$34,4443 \approx 34,4000 = 34,4$$

ii. 6,4561702 βλέπουμε ότι το επόμενο ψηφίο είναι το 6 άρα η στρογγυλοποίηση γίνεται:

$$6,45593 \approx 6,46000 = 6,46$$

iii. 42,561702 βλέπουμε ότι το επόμενο ψηφίο είναι το 7 άρα η στρογγυλοποίηση γίνεται:

$$42,561702 \approx 42,562000 = 42,562$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς

i. $\frac{2}{5}$

v. $\frac{33}{11}$

ii. $\frac{4}{16}$

vi. $\frac{6}{20}$

iii. $\frac{8}{40}$

vii. $\frac{1257}{8}$

iv. $\frac{1}{25}$

viii. $\frac{542}{16}$

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς

i. $\frac{3}{10}$

v. $\frac{72}{1.000}$

ii. $\frac{51}{100}$

vi. $\frac{522}{100}$

iii. $\frac{35231}{10.000}$

vii. $\frac{459}{10.000}$

iv. $\frac{2743}{100.000}$

viii. $\frac{223423}{1.000.000}$

3. Να γράψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς ως δεκαδικά κλάσματα

i. 0,001

v. 0,6003

ii. 4,211

vi. 0,3432234

iii. 34,3241

vii. 0,896462

iv. 1,34123

viii. 3423,2479

4. Να γράψετε τα επόμενα κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς και ως δεκαδικά κλάσματα

i. $\frac{17}{2}$

v. $\frac{3}{25}$

ii. $\frac{24}{5}$

vi. $\frac{16}{50}$

iii. $\frac{17}{20}$

vii. $\frac{172}{200}$

iv. $\frac{15}{25}$

viii. $\frac{57}{12}$

5. Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα < , = , >

i. 0,02 0,0001

v. 0,02 0,0001

ii. 0,02 0,0001

vi. 0,02 0,0001

iii. 0,02 0,0001

vii. 0,02 0,0001

iv. 0,02 0,0001

viii. 0,02 0,0001

6. Να στρογγυλοποιήσετε στο πλησιέστερο δέκατο τους αριθμούς

i. 5,213

ii. 54,267

- | | |
|-------------|-----------|
| iii. 3,0213 | v. 0,013 |
| iv. 51,2013 | vi. 0,063 |

7. Να στρογγυλοποιήσετε στο πλησιέστερο εκατοστό τους αριθμούς

- | | |
|--------------|-------------|
| i. 4,2636 | iv. 6,21453 |
| ii. 3,7063 | v. 6,00143 |
| iii. 0,20365 | vi. 51,220 |

8. Να στρογγυλοποιήσετε στο πλησιέστερο χιλιοστό τους αριθμούς

- | | |
|---------------|--------------|
| i. 54,22313 | iv. 5,21908 |
| ii. 25,768213 | v. 123,2138 |
| iii. 14,00001 | vi. 206,2183 |

9. Να στρογγυλοποιήσετε στη πλησιέστερη μονάδα τους αριθμούς

- | | |
|-------------|-------------|
| i. 5,213 | iv. 4,613 |
| ii. 21,013 | v. 13,013 |
| iii. 31,913 | vi. 15,9013 |

10. Να στρογγυλοποιήσετε τους αριθμούς 32,124 , 5,1232 , 45,1201 , 0,001 στο πλησιέστερο

- i. Δέκατο
- ii. Εκατοστό
- iii. Χιλιοστό

3.2 Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

❖ Πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών

- Για να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) δυο δεκαδικούς αριθμούς τους τοποθετούμε τον έναν κάτω από τον άλλο ώστε οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια στήλη. Μετά προσθέτουμε τα ψηφία όπως στους φυσικούς αριθμούς και στο άθροισμα (ή την διαφορά) βάζουμε την υποδιαστολή στην ίδια στήλη με τις άλλες.
 - ✓ Για ευκολία μπορούμε να συμπληρώσουμε με μηδενικά τα δεκαδικά μέρη στα οποία λείπουν τα ψηφία κάποιας τάξης.

❖ Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών

- Ο πολλαπλασιασμός των δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών. Στο αποτέλεσμα βάζουμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά , όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία των παραγόντων.

❖ Διαίρεση δεκαδικών αριθμών

- Η διαίρεση δεκαδικού με φυσικό γίνεται όπως η διαίρεση φυσικών μόνο που όταν «κατεβάσουμε» το πρώτο δεκαδικό ψηφίο βάζουμε στο πηλίκο υποδιαστολή.
- Γι να διαιρέσουμε δεκαδικό με δεκαδικό , πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε το διαιρέτη σε φυσικό. Έτσι πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτεο και τον διαιρέτη με την κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός. Μετά προκύπτει διαίρεση δεκαδικού με φυσικό.

❖ Πολλαπλασιασμός δεκαδικού με 0,1 , 0,01 , 0,001 , ...

- Για να πολλαπλασιάσουμε ένα δεκαδικό με το με 0,1 , 0,01 , 0,001 , ... για να βρούμε το αποτέλεσμα αρκεί να μετακινήσουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία.

❖ Διαίρεση δεκαδικού με 10 , 100 , 1000 , ...

- Όταν διαιρούμε έναν δεκαδικό αριθμό με το 10 , 100 , 1000 , ... για να βρούμε το αποτέλεσμα αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσα είναι τα μηδενικά του 10 ή του 100 ή του 1000 , ...κ.ο.κ.

❖ *Διαίρεση δεκαδικού με 0,1 , 0,01 , 0,001 , ...*

- Για να διαιρέσουμε ένα δεκαδικό με το με 0,1 , 0,01 , 0,001 , ... για να βρούμε το αποτέλεσμα αρκεί να μετακινήσουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά τόσες θέσεις όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία.

❖ *Πολλαπλασιασμός δεκαδικού με 10 , 100 , 1000 , ...*

- Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με το 10 , 100 , 1000 , ... για να βρούμε το αποτέλεσμα αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά τόσες θέσεις όσα είναι τα μηδενικά του 10 ή του 100 ή του 1000 , ...κ.ο.κ.

❖ *Δυνάμεις δεκαδικών αριθμών*

- Οι δυνάμεις δεκαδικών αριθμών υπολογίζονται όπως οι δυνάμεις των φυσικών αριθμών. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του αποτελέσματος προκύπτει από το γινόμενο του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων της βάσης επί τον εκθέτη της δύναμης.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε τις πράξεις

i. $2,31 + 42,231$

ii. $78,24 - 59,3$

Λύση

i. $2,310$

ii. $78,240$

$+42,231$

$+59,305$

$44,541$

$18,83$

2. Να κάνετε τις πράξεις

i. $3,52 \cdot 10$

iv. $45,21 \cdot 0,001$

ii. $6,3421 \cdot 100$

v. $3452,3 \cdot 0,01$

iii. $34,56 : 1000$

vi. $42,32 : 0,0001$

Λύση

i. $3,52 \cdot 10 = 3,52$ Μεταφέρουμε την υποδιαστολή μια θέση δεξιά

ii. $6,3421 \cdot 100 = 634,21$ Μεταφέρουμε την υποδιαστολή δυο θέσεις δεξιά

iii. $34,56 : 1000 = 0,03456$ Μεταφέρουμε την υποδιαστολή 3 θέσεις αριστερά.

iv. $45,21 \cdot 0,001 = 0,04521$ Μεταφέρουμε την υποδιαστολή 3 θέσεις αριστερά.

v. $3452,3 \cdot 0,01 = 34,523$ Μεταφέρουμε την υποδιαστολή 2 θέσεις αριστερά.

vi. $42,32 : 0,0001 = 423200$ Μεταφέρουμε την υποδιαστολή 4 θέσεις δεξιά.

3. Να κάνετε τις πράξεις

i. $3,64 \cdot 23,15$

ii. $42,72 : 0,6$

Λύση

i. $3,64$

$\times 23,15$

1820

364

1092

$+728$

84,2660

ii. Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη με το 10 και θα κάνουμε την

διαίρεση $427,2 : 6$

$$\begin{array}{r|l} 427,2 & 6 \\ -42 & 71,2 \\ \hline 07 & \\ -6 & \\ \hline 12 & \\ -12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

4. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

i. $1,5^2$

ii. $2,21^2$

iii. $1,1^3$

Λύση

i. $1,5^2 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25$

ii. $2,21^2 = 2,21 \cdot 2,21 = 4,8841$

iii. $1,1^3 = 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 1,331$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| i. $1,2 + 3,45$ | vi. $892,2 + 323,23$ |
| ii. $45,322 + 31,45$ | vii. $729,11 + 30,045$ |
| iii. $9,782 + 332,45$ | viii. $4231,00120 + 32,4345$ |
| iv. $1004,2 + 10623,45$ | ix. $0,0002 + 3,45$ |
| v. $62,122 + 112,45$ | x. $15,243 + 413,415$ |

2. Να υπολογίσετε τις διαφορές

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| i. $11,2 - 3,45$ | vi. $892,2 - 323,23$ |
| ii. $45,322 - 31,45$ | vii. $729,11 - 30,045$ |
| iii. $976,782 - 332,45$ | viii. $4231,00120 - 32,4345$ |
| iv. $12004,2 - 10623,45$ | ix. $8,0002 - 3,45$ |
| v. $623,122 - 112,45$ | x. $1554,243 - 413,415$ |

3. Να υπολογίσετε τα γινόμενα

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| i. $1,2 \cdot 3,45$ | vi. $892,2 \cdot 323,23$ |
| ii. $45,322 \cdot 31,45$ | vii. $729,11 \cdot 30,045$ |
| iii. $9,782 \cdot 332,45$ | viii. $4231,00120 \cdot 32,4345$ |
| iv. $1004,2 \cdot 10623,45$ | ix. $0,0002 \cdot 3,45$ |
| v. $62,122 \cdot 112,45$ | x. $15,243 \cdot 413,415$ |

4. Να κάνετε τις πράξεις

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| i. $1,2 \cdot 0,01$ | vi. $892,2 \cdot 0,1$ |
| ii. $45,322 \cdot 0,1$ | vii. $729,11 \cdot 100$ |
| iii. $9,782 \cdot 1000$ | viii. $4231,00120 \cdot 100000$ |
| iv. $1004,2 \cdot 100$ | ix. $0,0002 \cdot 10000$ |
| v. $62,122 \cdot 0,001$ | x. $15,243 \cdot 0,0001$ |

5. Να κάνετε τις διαιρέσεις

- | | |
|---------------------|----------------------|
| i. $4,52 : 2$ | vi. $63,42 : 2,1$ |
| ii. $628,48 : 0,02$ | vii. $524,34 : 0,09$ |
| iii. $4,52 : 2$ | viii. $17,5 : 0,15$ |
| iv. $42,24 : 0,4$ | ix. $8 : 0,008$ |
| v. $44,55 : 0,03$ | x. $51,12 : 2,4$ |

6. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $4,52:0,1$

ii. $628,48:0,01$

iii. $4,52:100$

iv. $42,24:1000$

v. $44,55:0,01$

vi. $63,42:0,1$

vii. $524,34:10000$

viii. $17,5:0,0001$

ix. $8:0,001$

x. $51,12:1000$

7. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

i. $4,1^2$

ii. $2,11^2$

iii. $5,31^2$

iv. $2,71^2$

v. $1,2^3$

vi. $3,3^3$

vii. $2,1^3$

viii. $5,1^3$

8. Να κάνετε τις πράξεις

i. $5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,1^3 + 3 \cdot 0,1^2$

ii. $[3,3 - (2,44 - 1,2^2)]^2$

iii. $12,3 \cdot 0,1 + 105:10 - 4,32 + 6,4:2$

iv. $(54,21 - 1,1^2) \cdot 4,2$

v. $(1,2^2 \cdot 6,8 - 1,2^2 \cdot 1,8)^2:2,5$

vi. $(0,3^2 - 0,2^2)^3 \cdot 3,2$

vii. $(2,5^2 - 0,25):1,2$

viii. $(5 \cdot 0,1^3 + 4,995)^3:0,25$

3.3 Υπολογισμοί με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης

❖ Τα βασικά πλήκτρα του υπολογιστή τσέπης

Στους υπολογιστές τσέπης τα βασικά πλήκτρα είναι:

 Το πλήκτρο της πρόσθεσης

 Το πλήκτρο της αφαίρεσης

 Το πλήκτρο του πολλαπλασιασμού

 Το πλήκτρο της διαίρεσης

 Εμφανίζει στην οθόνη τον αριθμό που είναι τοποθετημένος στη μνήμη

 Σβήνει το περιεχόμενο της μνήμης

 Προσθέτει στον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

 Αφαιρεί από τον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης τις παρακάτω πράξεις

$$(2,1 \cdot 3,5 + 2,3 \cdot 1,5 - 8 \cdot 1,1) \cdot 95,4$$

Πατάμε το  για να μπει το 0 στη μνήμη του υπολογιστή και πατάμε διαδοχικά:

○ $2,1 \times 3,5 = 7,35$ 

(τώρα στην μνήμη υπάρχει ο αριθμός 7,35)

○ $2,3 \cdot 1,5 = 3,45$ 

(τώρα στη μνήμη προστέθηκε ο αριθμός 3,45 , δηλαδή τώρα στη μνήμη είναι ο αριθμός $7,35 + 3,45 = 10,8$)

○ $8 \cdot 1,1 = 8,8$ 

(τώρα στη μνήμη αφαιρέθηκε ο αριθμός 8,8 , δηλαδή τώρα στη μνήμη είναι ο αριθμός $10,8 - 8,8 = 2$)

○   6,36  19,08

(έγινε η πράξη $2 \cdot 95,4 = 1,908$)

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να κάνεις με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης τις πράξεις

- i. $(2,43 \cdot 3,1 + 4,2 \cdot 3,7) \cdot 2,1$
- ii. $(4,43 \cdot 3,5 + 4,2 \cdot 1,7) \cdot 43,2$
- iii. $(21,43 \cdot 32,1 + 41,2 \cdot 35,7) \cdot 22,1$
- iv. $(0,13 \cdot 6,2 + 5,2 \cdot 1,7) \cdot 88,2$
- v. $(15,43 \cdot 2,1 - 4,1 \cdot 2,7) \cdot 5,6$
- vi. $(1,43 \cdot 2,1 - 1,2 \cdot 0,2) \cdot 21,21$
- vii. $(21,13 \cdot 3,1 - 4,2 \cdot 5,1) \cdot 2,7$
- viii. $(2,1 \cdot 3,8 - 2,1 \cdot 1,8) : 2,1$

2. Να κάνεις με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης τις πράξεις

- i. $(4,3 + 4,1 \cdot 1,7) \cdot 5,1$
- ii. $(21,43 + 1,2 \cdot 6,7) : 3,2$
- iii. $(3,1 + 1,5 \cdot 7,9) \cdot 3,6$
- iv. $(5,43 \cdot 32,1 - 41,2 \cdot 1,7) : 2,2$
- v. $25,8 : (0,75 \cdot 2 + 3 \cdot 0,3) \cdot 2$
- vi. $15,3 : (2,3 \cdot 3,4 - 1,7 \cdot 2,1) \cdot 5$
- vii. $(5,3^2 - 2,4 \cdot 3,7) \cdot 2,1$
- viii. $(1,1^2 \cdot 100 + 1,2^2 \cdot 100) : 1,21$

3.4 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

❖ Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

- Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός αριθμού a με μια δύναμη του 10. Δηλαδή στη μορφή $a \cdot 10^ν$. Ο αριθμός a είναι ένα δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10. Η μορφή αυτή λέγεται τυποποιημένη μορφή αριθμού.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς

- i. 2.000.000
- ii. 173.000

Λύση

- i. $2.000.000 = 2 \cdot 1.000.000 = 2 \cdot 10^6$
- ii. $173.000 = 1,73 \cdot 100.000 = 1,73 \cdot 10^5$

2. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς

- i. $3 \cdot 10^4$
- ii. $9,21 \cdot 10^6$

Λύση

- i. $3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10.000 = 30.000$
- ii. $9,21 \cdot 10^6 = 9,21 \cdot 1.000.000 = 9.210.000$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς

i. $6.000.000$

v. $5.210.000.$

ii. 473.000

vi. $3.200.000$

iii. 21.000

vii. $54.000.000.000$

iv. $431.200.000$

viii. $2.394.000$

2. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς

i. $5 \cdot 10^4$

v. $5,9992 \cdot 10^6$

ii. $4,21 \cdot 10^6$

vi. $7,89 \cdot 10^3$

iii. $4,892 \cdot 10^3$

vii. $2,762 \cdot 10^9$

iv. $2,31 \cdot 10^9$

viii. $3,54 \cdot 10^7$

3. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις και να γράψετε τα αποτελέσματα σε τυποποιημένη μορφή

i. $34 \cdot 11.000 =$

v. $562,4 \cdot 7.000.000 =$

ii. $120 \cdot 200.000 =$

vi. $12,34 \cdot 102.000 =$

iii. $300 \cdot 130.000 =$

vii. $9,3 \cdot 450.000 =$

iv. $512 \cdot 500.000 =$

viii. $5,5 \cdot 1.200 =$

4. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς τοποθετώντας το κατάλληλο σύμβολο

($<$, $=$, $>$).

i. $3 \cdot 10^4 \dots 5 \cdot 10^6$

v. $5,426 \cdot 9 \dots 1,1 \cdot 7$

ii. $5,31 \cdot 10^6 \dots 2,2 \cdot 10^6$

vi. $4,32 \cdot 10^4 \dots 1,1 \cdot 10^6$

iii. $3,14 \cdot 10^4 \dots 314$

vii. $3,61 \cdot 10^2 \dots 361,00$

iv. $2,71 \cdot 10^2 \dots 271$

viii. $5,2 \cdot 1000 \dots 5,1 \cdot 10^3$

3.5 Μονάδες μέτρησης

❖ Μονάδες μέτρησης μήκους

- Η βασική μονάδα μέτρησης μήκους είναι το **μέτρο** που συμβολίζεται με 1m.

Υποδιαίρεσεις του μέτρου είναι:

- 1 δεκατόμετρο ή παλάμη 1 dm
- 1 εκατοστό ή πόντος 1cm
- 1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό 1mm
- ✓ Ισχύει ότι:

$$1dm = \frac{1}{10}m = 0,1m$$

$$1cm = 0,1dm = 0,01m$$

$$1mm = 0,1cm = 0,01dm = 0,001m$$

Πολλαπλάσια του μέτρου είναι

- 1 χιλιόμετρο 1km

$$1km = 1000m$$

- ✓ Στη ναυσιπλοΐα υπάρχει ως μονάδα μέτρησης το ναυτικό μίλι.

$$1 \text{ ναυτικό μίλι} = 1.852m$$

❖ Μονάδες μέτρησης εμβαδού

- Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο** που συμβολίζεται με $1m^2$.

Υποδιαίρεσεις του μέτρου είναι:

- 1 τετραγωνικό δεκατόμετρο $1dm^2$
- 1 τετραγωνικό εκατοστό $1cm^2$
- 1 τετραγωνικό χιλιοστό $1mm^2$
- ✓ Ισχύει ότι:

$$1dm^2 = \frac{1}{100}m^2 = 0,01m^2$$

$$1cm^2 = 0,01dm^2 = 0,0001m^2$$

$$1mm^2 = 0,01cm^2 = 0,0001dm^2 = 0,0000001m^2$$

Πολλαπλάσια του μέτρου είναι

- 1τετραγωνικό χιλιόμετρο $1km^2$

$$1km^2 = 1.000.000m^2$$

- ✓ Στην Ελλάδα ως μονάδα επιφάνειας χρησιμοποιούμε το στρέμμα. 1 στρέμμα = $1000m^2$

❖ Μονάδες μέτρησης όγκου

- Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι **το κυβικό μέτρο** που συμβολίζεται με $1m^3$.

Υποδιαιρέσεις του μέτρου είναι:

- 1 κυβικό δεκατόμετρο $1dm^3$
- 1 κυβικό εκατοστό $1cm^3$
- 1 κυβικό χιλιοστό $1mm^3$
- ✓ Ισχύει ότι:

$$1dm^3 = \frac{1}{1000}m^3 = 0,001m^3$$

$$1cm^3 = 0,001dm^3 = 0,000001m^3$$

$$1mm^3 = 0,001cm^3 = 0,000001dm^3 = 0,0000000001m^3$$

- ✓ Ισχύει ότι $1dm^3$ είναι ίσο με το 1 λίτρο (lt)
- ✓ Το cm^3 λέγεται και χιλιοστόλιτρο (ml)

❖ Μονάδες μέτρησης χρόνου

- Η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το **1 δευτερόλεπτο** που συμβολίζεται με **1sec**.

Πολλαπλάσια:

- 1 λεπτό (min) = 60 sec
- 1 ώρα (h) = 60 min = 3.600 sec
- 1 μέρα = 24h = 1.440min = 86.400sec.

❖ Μονάδες μέτρησης μάζας

- Η βασική μονάδα μέτρησης μάζας είναι **το χιλιόγραμμα ή κιλό** συμβολίζεται με 1kg.

Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι

- 1 γραμμάριο (g) $1g = 0,001kg$

- 1 χλιοστόγραμμα (mg) $1mg = 0,001g = 0,000001kg$

Πολλαπλάσια του κιλού

- 1 τόνος (t) $1t = 1000kg$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να μετατρέψετε σε m τα παρακάτω μεγέθη

$2,31dm$, $211cm$, $1234mm$, $12km$

Λύση

$$2,31dm = 0,231m$$

$$211cm = 2,11m$$

$$1234mm = 1,234m$$

$$12km = 12.000m$$

2. Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη :

$35000mm^2$, $120000cm^2$, $249dm^2$

Λύση :

$$35000mm^2 = 0,035m^2$$

$$120000cm^2 = 12m^2$$

$$249dm^2 = 2,49m^2$$

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
15,4			
	352		
		23408	
			987.321

Λύση :

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
15,4	1540	154000	15400000
3,52	352	35200	3520000
2,3408	234,08	23408	2340800
0,987321	98,7321	9873,21	987321

4. Να μετατρέψετε σε m^3 τα παρακάτω μεγέθη

$$250dm^3, 3.700.000 cm^3, 1500 lt, 2.400.000ml$$

Λύση :

$$250dm^3 = 250:1000m^3 = 0,25m^3$$

$$3.700.000 cm^3 = 3.700.00:1.000.000m^3 = 3,7m^3$$

$$1500 lt = 1500dm^3 = 1.500:1000 = 1,5m^3$$

$$2.400.000ml = 2.400.000cm^3 = 2.400.000:1.000.000 = 2,4m^3$$

5. Να βρείτε πόσα min και πόσα sec είναι οι 5 μέρες

Λύση

Η μία μέρα έχει 24h (ώρες) . Άρα οι 5 μέρες έχουν $24 \cdot 4 = 120h$

Η μία ώρα έχει 60 min άρα οι 120h έχουν $120 \cdot 60 = 7.200 min$

Το ένα λεπτό έχει 60 sec άρα τα 7.200min έχουν $7.200 \cdot 60 = 432.000 sec$

Άρα οι 5 μέρες έχουν 7.200 min και 432.000 sec .

6. Να βρείτε πόσα kg είναι:

i. Τα 250g

ii. Τα 3.500g

iii. Οι 2,5t

iv. Τα 2.450 mg

Λύση

i. Τα $250g = 250:1.000 = 0,25 kg$

ii. Τα $3.500g = 3.500:1.000 = 3,5 kg$

iii. Οι $2,5t = 2,5 \cdot 1.000 = 2.500 kg$

iv. Τα $2.450g = 2.450:1.000.000 = 0,00245 kg$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να μετατρέψετε σε m τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|-------------|-------------|
| i. 32cm | iv. 41834mm |
| ii. 84dm | v. 12km |
| iii. 1233cm | vi. 41mm |

2. Να μετατρέψετε σε dm τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|-----------|-------------|
| i. 19m | iv. 15122mm |
| ii. 311mm | v. 2km |
| iii. 13cm | vi. 123m |

3. Να μετατρέψετε σε cm τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|------------|------------|
| i. 324mm | iv. 2,42dm |
| ii. 43m | v. 0,231km |
| iii. 0,12m | vi. 234mm |

4. Να μετατρέψετε σε mm τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|-------------|--------------|
| i. 3112m | iv. 0,0012km |
| ii. 0,1213m | v. 24dm |
| iii. 32km | vi. 3,56cm |

5. Να μετατρέψετε σε km τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|-------------|---------------|
| i. 3.423m | iv. 19211mm |
| ii. 2.473dm | v. 52292cm |
| iii. 531m | vi. 2343222mm |

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

- i. $12dm + 137mm + 1,4m + 0,006km$
- ii. $135m + 11264dm + 12663cm + 1087342mm$
- iii. $32dm + 640cm + 1256mm$
- iv. $2km + 4000m + 250000dm + 900000cm$

7. Ένας ξυλουργός έχει τρεις 4 σανίδες ξύλο. Η πρώτη έχει μήκος 3m η δεύτερη 1m λιγότερο από την πρώτη η Τρίτη 2,5m περισσότερα από την πρώτη και η τέταρτη 650cm περισσότερα από την πρώτη.

- i. Να βρείτε τα μήκη της δεύτερης της τρίτης και της τέταρτης σανίδας
- ii. Να βρείτε το συνολικό μήκος που έχουν όλες οι σανίδες

8. Ένα χωράφι έχει σχήμα ορθογωνίου με μήκος 1560 dm και πλάτος 35m.

- i. Θέλουμε να περιφράξουμε το χωράφι με συρματοπλέγμα που κοστίζει 7 ευρώ το μέτρο. Να βρείτε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε για την περίφραξη.
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωραφιού και την αξία του αν γνωρίζουμε ότι το $1m^2$ έχει αξία 25 ευρώ.

9. Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|--------------------|------------------|
| i. $32cm^2$ | iv. $418340mm^2$ |
| ii. $840 dm^2$ | v. $12km^2$ |
| iii. $12.330 mm^2$ | vi. $413 mm^2$ |

10. Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|--------------------|-------------------|
| i. $32m^2$ | iv. $418340 mm^2$ |
| ii. $840 dm^2$ | v. $12 km^2$ |
| iii. $12.330 mm^2$ | vi. $413 mm^2$ |

11. Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|-----------------|---------------|
| i. $3,2m^2$ | iv. $412 m^2$ |
| ii. $0,84 dm^2$ | v. $1,2 km^2$ |
| iii. $0,12 m^2$ | |
| vi. $43 dm^2$ | |

12. Να μετατρέψετε σε dm^2 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|------------------|------------------|
| i. $3112m^2$ | iv. $45212 mm^2$ |
| ii. $0,84 m^2$ | v. $1,2 km^2$ |
| iii. $1200 cm^2$ | vi. $4073 cm^2$ |

13. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα

- i. $45dm^2 + 34.000cm^2$
- ii. $6,78dm^2 + 5.800mm^2$
- iii. $0,25m^2 + 45.200cm^2$
- iv. $18,4m^2 + 430dm^2$

14. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα σε m^2

- i. $2,45 \text{ στέρμματα} + 0,0211km^2$
- ii. $0,0564 \text{ στρέμματα} + 350dm^2$
- iii. $0,00875 \text{ στρέμματα} + 200cm^2$
- iv. $0,0673km^2 + 3.000.000cm^2$

15. Η επιφάνεια της Ελλάδας είναι $131.940 km^2$. Να υπολογίσετε την επιφάνεια της Ελλάδας σε

- i. m^2
- ii. στρέμματα

16. Ένα χαλί σχήματος ορθογωνίου πουλήθηκε προς 350 ευρώ ο m^2 . Αν κάποιος το αγόρασε με 2100 ευρώ να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το χαλί;

17. Να μετατρέψετε σε m^3 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|--------------------|---------------------|
| i. $32000 cm^3$ | iv. $401.8340 mm^3$ |
| ii. $840 dm^3$ | v. $12324 lt$ |
| iii. $12.330 mm^3$ | vi. $434513 ml$ |

18. Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|--------------------|-------------------|
| i. $2032 m^2$ | iv. $418340 mm^2$ |
| ii. $840 lt$ | v. $12 lt$ |
| iii. $12.330 mm^2$ | vi. $413 mm^2$ |

19. Να μετατρέψετε σε dm^3 τα παρακάτω μεγέθη

- | | |
|------------------|------------------|
| i. $3112 m^3$ | iv. $45212 mm^3$ |
| ii. $0,84 m^3$ | v. $0,12 mm^3$ |
| iii. $1200 cm^3$ | |

20. Να μετατρέψετε τις παρακάτω μάζες σε Kg

- | | |
|-------------|------------------|
| i. $4000g$ | iv. $3250g$ |
| ii. $200g$ | v. $1.582.200mg$ |
| iii. $215g$ | |

21. Να μετατρέψεις σε g τις παρακάτω μάζες

- | | |
|----------------|---------------|
| i. $2,134kg$ | iv. $0,500kg$ |
| ii. $4,14kg$ | v. $342mg$ |
| iii. $0,200kg$ | vi. $0,002kg$ |

22. Οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου πήγαν εκδρομή > Έφυγαν από το σχολείο στις 8:45 και επέστρεψαν μετά από 5h και 25min. Τι ώρα επέστρεψαν;

23. Σε ένα τουρνουά πινγκ πονγκ έγιναν τρεις αγώνες που διήρκησαν 1h και 5min ο πρώτος, 2h και 26min ο δεύτερος και 1h και 47min ο τρίτος. Αν οι αγώνες ξεκίνησα στις 2:45 και ανάμεσα σε κάθε αγώνα υπήρχε διακοπή 10min να βρείτε τι ώρα τελείωσαν οι αγώνες;

24. Σε ένα ζαχαροπλαστείο ο Γιώργος αγόρασε 3 είδη γλυκών και πήρε 350g από το πρώτο είδος 674g από το δεύτερο είδος και 550 από το τρίτο είδος; Ποια είναι η συνολική ποσότητα γλυκών σε g και σε kg που αγόρασε ο Γιώργος;

25. Να βρείτε πόσα min και πόσα sec έχουν οι παρακάτω ώρες

- | | |
|-----------|--------------------|
| i. 2h | iv. $\frac{1}{4}h$ |
| ii. 12h | v. $2\frac{1}{2}h$ |
| iii. 3,5h | vi. 6h |

26. Να μετατρέψετε σε min και sec τα μεγέθη

- | | |
|-----------------|----------------------------|
| i. Μια εβδομάδα | iii. Ο Ιανουάριος |
| ii. 1 μέρα | iv. Ο Φεβρουάριος του 2016 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο – Εξισώσεις και προβλήματα

4.1 Η έννοια ης εξίσωσης – Οι εξισώσεις $a + x = \beta$, $x - \alpha = \beta$,

$$a - x = \beta, a \cdot x = \beta, \alpha : x = \beta, x : \alpha = \beta$$

❖ Εξίσωση με έναν άγνωστο

- Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα που είναι ο άγνωστος.
- Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο επαληθεύει την ισότητα
- Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε την λύση μιας εξίσωσης λέγεται επίλυση της εξίσωσης.
- Μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.
- Μια εξίσωση λέγεται αδύνατη, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

❖ Βασικές μορφές εξισώσεων με τις λύσεις τους.

Μορφή εξίσωσης	Λύση εξίσωσης
$x + \alpha = \beta$	$x = \beta - \alpha$
$\alpha + x = \beta$	$x = \beta - \alpha$
$\alpha - x = \beta$	$x = \alpha - \beta$
$x - \alpha = \beta$	$x = \beta + \alpha$
$\alpha \cdot x = \beta$	$x = \beta : \alpha$
$x : \alpha = \beta$	$x = \beta \cdot \alpha$
$\alpha : x = \beta$	$x = \alpha : \beta$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να γράψετε ποιο σύντομα τις παρακάτω παραστάσεις

- i. $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$
- ii. $x + x + x + \beta + \beta + \beta + \beta$
- iii. $2 \cdot x + 3 \cdot x + x$

Λύση

- i. $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4 \cdot \alpha$

$$\text{ii. } x + x + x + \beta + \beta + \beta + \beta = 3 \cdot x + 4 \cdot \beta$$

$$\text{iii. } 2 \cdot x + 3 \cdot x + x = 6 \cdot x$$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\text{i. } x + 2 = 5$$

$$\text{ii. } x - 6 = 12$$

$$\text{iii. } 3 \cdot x = 45$$

$$\text{iv. } x:6 = 4$$

$$\text{v. } 18:x = 3$$

$$\text{vi. } 9 - x = 2$$

Λύση

i. Έχουμε την εξίσωση της μορφής $x + a = \beta$ οπότε για την λύση εργαζόμαστε ως εξής:

$$x + 2 = 5 \text{ ή } x = 5 - 2 \text{ ή } x = 3$$

ii. Έχουμε την εξίσωση της μορφής $x - a = \beta$ οπότε για την λύση εργαζόμαστε ως εξής:

$$x - 6 = 12 \text{ ή } x = 12 + 6 \text{ ή } x = 18$$

iii. Έχουμε την εξίσωση της μορφής $a \cdot x = \beta$ οπότε για την λύση εργαζόμαστε ως εξής:

$$3 \cdot x = 45 \text{ ή } x = 45:3 \text{ ή } x = 15$$

iv. Έχουμε την εξίσωση της μορφής $x:a = \beta$ οπότε για την λύση εργαζόμαστε ως εξής:

$$x:6 = 4 \text{ ή } x = 6 \cdot 4 \text{ ή } x = 24$$

v. Έχουμε την εξίσωση της μορφής $a:x = \beta$ οπότε για την λύση εργαζόμαστε ως εξής:

$$18:x = 3 \text{ ή } x = 18:3 \text{ ή } x = 6$$

vi. Έχουμε την εξίσωση της μορφής $a - x = \beta$ οπότε για την λύση εργαζόμαστε ως εξής:

$$9 - x = 2 \text{ ή } x = 9 - 2 \text{ ή } x = 7$$

3. Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση

$$3 \cdot (x - 2) + 2x = 19$$

Λύση

$$3 \cdot (x - 2) + 2x = 19 \text{ «εκτελούμε την επιμεριστική ιδιότητα»}$$

$$3x - 6 + 2x = 19 \text{ «προσθέτουμε } 3x + 2x \text{ »}$$

$$5x - 6 = 19 \text{ «έχουμε εξίσωση της μορφής } x + a = \beta \text{ »}$$

$$5x = 19 + 6 \text{ «κάνουμε την πρόσθεση } 19 + 6 \text{ »}$$

$$5x = 25 \text{ «έχουμε εξίσωση της μορφής } a \cdot x = \beta \text{ »}$$

$$x = 25:5$$

$$x = 5$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $x + x + x$

ii. $a + a + a + x + x$

iii. $\beta + \beta + \beta + \alpha + \alpha + \alpha$

iv. $x + x + x + x + x$

v. $a + a + 2 + 5 + 7$

vi. $\beta + \beta + \alpha + \alpha + \alpha + 2 + 4$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $2x + 5x$

ii. $9x + x + 6x$

iii. $2x + x + 3\alpha + 2\alpha$

iv. $5x + x + 9x + \alpha + 9\alpha$

v. $4x + 6x + 5x + 3 + 3\alpha + 2\alpha + 7$

vi. $3x + x + 7x + 2\alpha + 9\alpha + 3\alpha$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $2 + x = 6$

ii. $5 + x = 14$

iii. $7 + x = 23$

iv. $12 + x = 59$

v. $x + 6 = 16$

vi. $x + 9 = 36$

vii. $x + 12 = 76$

viii. $x + 52 = 106$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $9 - x = 6$

ii. $15 - x = 12$

iii. $35 - x = 23$

iv. $14 - x = 1$

v. $9 - x = 6$

vi. $32 - x = 12$

vii. $90 - x = 57$

viii. $145 - x = 132$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $x - 6 = 5$

ii. $x - 9 = 19$

iii. $x - 12 = 76$

iv. $x - 52 = 116$

v. $x - 13 = 5$

vi. $x - 91 = 19$

vii. $x - 52 = 76$

viii. $x - 12 = 11$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $2 \cdot x = 6$

ii. $5 \cdot x = 45$

iii. $7 \cdot x = 49$

iv. $12 \cdot x = 72$

v. $x \cdot 6 = 24$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $9 : x = 2$

ii. $15 : x = 1$

iii. $35 : x = 7$

iv. $16 : x = 8$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $x : 6 = 5$

ii. $x : 9 = 19$

iii. $x : 12 = 76$

iv. $x : 52 = 16$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\frac{12}{4} + x = \frac{25}{4}$

ii. $\frac{19}{5} + x = \frac{24}{4}$

iii. $\frac{12}{7} - x = 1$

iv. $\frac{1}{4} + x = \frac{25}{3}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\frac{12}{4} \cdot x = \frac{25}{4}$

ii. $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{5}{4}$

iii. $\frac{2}{7} \cdot x = \frac{2}{9}$

iv. $\frac{2}{9} : x = \frac{5}{20}$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $(2 + 5) + x = 34$

ii. $(1 + 3) + x = 13 + 4$

iii. $(2 + 5) + x = 53$

iv. $(2 \cdot 5) + x = 72$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $(2 \cdot 3 - 4) \cdot x = 34$

vi. $x \cdot 9 = 72$

vii. $x \cdot 8 = 64$

viii. $x \cdot 13 = 169$

v. $27 : x = 3$

vi. $32 : x = 2$

vii. $90 : x = 6$

viii. $145 : x = 29$

v. $x : 13 = 5$

vi. $x : 1 = 19$

vii. $x : 52 = 76$

viii. $x : 12 = 116$

v. $x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

vi. $x + \frac{5}{9} = 4$

vii. $x - \frac{1}{2} = \frac{12}{3}$

viii. $x - \frac{7}{4} = \frac{2}{3}$

v. $\frac{12}{4} : x = 3$

vi. $x : \frac{1}{2} = \frac{6}{7}$

vii. $x : \frac{8}{9} = \frac{25}{4}$

viii. $x \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{4}$

v. $(2^3 + 3 \cdot 1) + x = 39$

vi. $(3^2 - 2 \cdot 3) + x = 16$

vii. $(6 \cdot 2^2 - 3 \cdot 7) + x = 2$

viii. $(2 \cdot 3^2 + 5) + x = 23$

ii. $(2 + 5) \cdot x = 35$

iii. $(3^2 + 1) \cdot x = 90$

iv. $(2^3 + 4 + 3 \cdot 5) \cdot x = 27$

v. $(37 - 3^3 + 5) : x = 5$

vi. $(4^2 - 3 \cdot 5) : x = 3^2 - 2^3$

vii. $(5 + 3 \cdot 7) : x = 13$

viii. $x : (6^2 \cdot 3 - 3^3) = 8$

13. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες και ποιες αόριστες.

i. $0 \cdot x = 0$

ii. $0 \cdot x = 12$

iii. $0 = 0 \cdot x$

iv. $0 \cdot x = 6 \cdot 0$

v. $(4^2 - 2 \cdot 8) \cdot x = 3^2 - 2^3$

vi. $x + 3 = 3 + x$

vii. $x + 2x - 3x = 3 - 2 - 1$

viii. $0 \cdot x + x = 0 + 6 - 6 + x + 1$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $3 \cdot x + 9 = 30$

ii. $9 \cdot x - 4 = 68$

iii. $8 + 4 \cdot x = 32$

iv. $x : 2 + 18 = 41$

v. $14 : x + 9 = 12$

vi. $18 : x - 3 = 6$

vii. $144 : x - 8 = 16$

viii. $6 + 24 : x = 12$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $3x + 2x = 3^2 + 6$

ii. $3x + 4x = 12 + 1^{20} + 8$

iii. $12x - 7x - 4x = 2^3 - 4 \cdot 2$

iv. $2x + 3x + 8 = 3x + 18$

v. $(2x + 5x) + 9 = 29 - 3x$

vi. $2 \cdot (x + 5) - 3 = 18$

4.2 Επίλυση προβλημάτων

❖ Επίλυση προβλήματος

- Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με την βοήθεια μιας εξίσωσης εργαζόμαστε ως εξής:
 - Εντοπίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το συμβολίζουμε με ένα γράμμα (συνήθως x ή y)
 - Εκφράζουμε τα στοιχεία του προβλήματος με την βοήθεια του αγνώστου.
 - Περιγράφουμε το πρόβλημα με εξίσωση.
 - Λύνουμε την εξίσωση.
 - Επαληθεύουμε την λύση.
 - ✓ Υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν με την βοήθεια εξίσωσης
 - ✓ Υπάρχουν άλυτα προβλήματα ή προβλήματα που δεν μπορούμε να βρούμε την λύση τους.

4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Ο Ιάσοντας σε 5 χρόνια θα μπορεί να βγάλει δίπλωμα οδήγησης αυτοκινήτου (18 χρονών) .Πόσο χρονών είναι τώρα;

Λύση

Αν x τα χρόνια που έχει ο Ιάσοντας σήμερα η εξίσωση που επαληθεύει το πρόβλημα είναι

$x + 5 = 18$. Επομένως αν την λύσουμε θα έχουμε

$$x = 18 - 5 \text{ ή } x = 13$$

Άρα ο Ιάσοντας είναι σήμερα 13 χρονών.

Κάνουμε και την επαλήθευση $13 + 5 = 18$ επομένως η λύση είναι σωστή.

2. Τρία αδέρφια πήραν χρήματα από τη γιαγιά τους. Ο Γιώργος πήρε διπλάσια από τον Βασίλη και η Μαρία 20 ευρώ παραπάνω από το Βασίλη. Αν η γιαγιά μοίρασε 60 ευρώ πόσα πήρε ο καθένας.

Λύση

Αν x τα χρήματα που πήρε ο Βασίλης τότε τα χρήματα του Γιώργου που είναι διπλάσια είναι

$2 \cdot x$ ενώ τα χρήματα της Μαρίας που είναι 20 ευρώ παραπάνω είναι $x + 20$. Η εξίσωση που επαληθεύει το πρόβλημα είναι:

$$x + 2 \cdot x + x + 20 = 60$$

$$4 \cdot x + 20 = 60$$

$$4 \cdot x = 60 - 20$$

$$4 \cdot x = 40$$

$$x = 40 : 4$$

$$x = 10$$

Άρα ο Βασίλης πήρε 10 € ο Γιώργος $2 \cdot 10 = 20$ € και η Μαρία $10 + 20 = 30$ €.

Κάνουμε την επαλήθευση $10 + 20 + 30 = 60$.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Ο Γιάννης είχε στο κουμπαρά του x €. Πήρε 22€ και του έμειναν 67€. Να βρείτε το x με την βοήθεια εξίσωσης.
2. Ο Γιώργος αγόρασε x πένες αξίας 2,5€ η κάθε μια. Αν πλήρωσε συνολικά 15€ να βρείτε με την βοήθεια μιας εξίσωσης το x .
3. Ο Παύλος έχει 3 χαρτονομίσματα των 5€ και x χαρτονομίσματα των 10€. Αν συνολικά έχει 55€ να βρείτε το x με την βοήθεια εξίσωσης.
4. Η Αγνή είχε x λουλούδια και τα μοίρασε εξίσου σε 6 βάζα. Αν κάθε βάζο είχε 4 λουλούδια να βρείτε το x με την βοήθεια εξίσωσης.
5. Ο Γιώργος είναι 25 χρόνια μικρότερος από τον Πατέρα του. Αν ο πατέρας του είναι 37 χρονών να βρείτε με την βοήθεια εξίσωσης την ηλικία του Γιώργου.
6. Ένας πατέρας ταξίδεψε με τον γιο του με τρένο και πλήρωσαν για τα εισιτήρια τους 102€. Το εισιτήριο του γιού κόστιζε το μισό του πατέρα. Να βρείτε πόσο κόστιζε το κάθε εισιτήριο;
7. Να βρείτε 3 διαδοχικούς φυσικούς με άθροισμα 33
8. Να βρείτε 3 διαδοχικούς άρτιους με άθροισμα 42
9. Να βρείτε 3 διαδοχικούς περιττούς με άθροισμα 69
10. Ο Γιάννης είχε x €, ο Παναγιώτης είχε τα διπλάσια από τον Γιάννη και η Ελένη 10 € παραπάνω από τον Γιάννη. Αν συνολικά είχαν 74 € πόσα είχε ο κάθε ένας;
11. Ο Γιάννης είχε x €, ο Παναγιώτης είχε τα τριπλάσια από τον Γιάννη και η Ελένη 10 € λιγότερα από τον Γιάννη. Αν συνολικά είχαν 90 € πόσα είχε ο κάθε ένας;
12. Ο Γιάννης είχε x €, ο Παναγιώτης είχε τα διπλάσια από τον Γιάννη και 10 € ακόμα και η Ελένη $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του Γιάννη. Αν συνολικά είχαν 160 € πόσα είχε ο κάθε ένας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο – Ποσοστά

5.1 Ποσοστά

❖ Συμβολισμός ποσοστού

- Το σύμβολο α% ονομάζεται ποσοστό επί της εκατό ή πιο απλά ποσοστό και ισχύει

$$\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$$

❖ Μετατροπή ποσοστού % σε δεκαδικό κλάσμα και αντίστροφα

- Για να μετατρέψουμε το ποσοστό % σε δεκαδικό κλάσμα εργαζόμαστε ως εξής:
- Γράφουμε το ποσοστό % ως κλάσμα με παρονομαστή το 100
 - Γράφουμε το κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό.
- Για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε ποσοστό % τον γράφουμε ως κλάσμα με παρονομαστή το 100.

❖ Μετατροπή κλάσματος σε ποσοστό %.

- 1^{ος} τρόπος: Μετατρέπουμε το κλάσμα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100 πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας με κατάλληλο αριθμό τους όρους του κλάσματος.
- 2^{ος} τρόπος: Γράφουμε το κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό κι στη συνέχεια μετατρέπουμε τον δεκαδικό σε ποσοστό % .

❖ Ποσοστό ‰ (επί της χιλιάς)

- Το σύμβολο ‰ ονομάζεται ποσοστό επί της χιλιάς και ισχύει ότι $\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω ποσοστά σε ανάγωγα κλάσματα

- i. 12%
- ii. 150%
- iii. 12,5%

Λύση

- i. $12\% = \frac{12}{100} = \frac{12:4}{100:4} = \frac{3}{25}$
- ii. $150\% = \frac{150}{100} = \frac{150:50}{100:50} = \frac{3}{2}$
- iii. $12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000} = \frac{125:125}{1000:125} = \frac{1}{8}$

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω ποσοστά σε δεκαδικούς αριθμούς

i. 30%

ii. 6,4%

iii. 134%

Λύση

i. $30\% = \frac{30}{100} = 0,30$

ii. $6,4\% = \frac{6,4}{100} = 0,064$

iii. $134\% = \frac{134}{100} = 1,34$

3. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς σε ποσοστά %

i. 0,234

ii. 1,34

iii. 0,01

Λύση

i. $0,234 = \frac{23,4}{100} = 23,4\%$

ii. $1,34 = \frac{134}{100} = 134\%$

iii. $0,01 = \frac{1}{100} = 1\%$

4. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά

i. $\frac{15}{100}$

iii. $\frac{1}{50}$

ii. $\frac{4}{25}$

iv. $\frac{1}{8}$

Λύση

i. $\frac{15}{100} = 15\%$

ii. $\frac{4}{25} = \frac{4 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{16}{100} = 16\%$

iii. $\frac{1}{50} = \frac{1 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{2}{100} = 2\%$

iv. $\frac{1}{8} = 1:8 = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$

5. Να βρείτε

i. Το 20% το 45

ii. Το 40% του 130

Λύση

i. Το 20% το 45 είναι

$$20\% \cdot 45 = \frac{20}{100} \cdot 45 = \frac{20 \cdot 45}{100} = \frac{900}{100} = 9$$

ii. Το 40‰ του 130 είναι

$$40\text{‰} \cdot 130 = \frac{40}{1000} \cdot 130 = \frac{40 \cdot 130}{1000} = \frac{5200}{1000} = 5,2$$

6. Να βρείτε ποιο ποσοστό % του 80 είναι ο αριθμός 60

Λύση

1^{ος} τρόπος

Θέλουμε να βρούμε το %. Αν υποθέσουμε ότι είναι $x\%$ δηλαδή το κλάσμα $\frac{x}{100}$ θα φτιάξουμε

την εξίσωση

$$\frac{x}{100} \cdot 80 = 60 \text{ ή } x \cdot \frac{80}{100} = 60 \text{ ή } x \cdot 0,8 = 60 \text{ ή } x = 60 : 0,8 \text{ ή } x = 75$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι 75%

2^{ος} τρόπος

Το ζητούμενο ποσοστό είναι το κλάσμα $\frac{60}{80} = \frac{60:20}{80:20} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 75\%$

7. Να βρείτε ποιού αριθμού το 20% είναι το 60

Λύση

Εδώ θέλουμε να βρούμε τον αριθμό του οποίου γνωρίζουμε το ποσοστό. Αν x ο αριθμός τότε για να τον βρούμε λύνουμε την εξίσωση

$$20\% \cdot x = 60 \text{ ή } \frac{20}{100} \cdot x = 60 \text{ ή } 0,2 \cdot x = 60 \text{ ή } x = 60 : 0,2 \text{ ή } x = 300$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι 300.

8. Να βρείτε πόσο θα γίνει ο αριθμός 35 αν αυξηθεί κατά 20%

Λύση

Πρώτα βρίσκουμε το ποσοστό 20% του 35

$$20\% \cdot 35 = \frac{20}{100} \cdot 35 = 0,2 \cdot 35 = 7$$

Άρα θα προσθέσουμε στο 35 τον αριθμό 7 επομένως έχουμε

$$35 + 7 = 42$$

9. Να βρείτε ποιος αριθμός αν μειωθεί κατά 30% θα γίνει 14

Λύση

Αν x ο αριθμός που ψάχνουμε τότε η μείωση είναι $30\% \cdot x = 0,3x$

Για να βρούμε τον αριθμό λύνουμε την εξίσωση

$$x - 0,3x = 14 \text{ ή } (1 - 0,3)x = 14 \text{ ή } 0,7x = 14 \text{ ή } x = 14 : 0,7 \text{ ή } x = 20$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 20.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω % σε δεκαδικά κλάσματα

- | | |
|----------|------------|
| i. 10% | iv. 300% |
| ii. 25% | v. 12,5% |
| iii. 40% | vi. 132,5% |

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω % σε δεκαδικούς αριθμούς

- | | |
|-------------|-------------|
| i. 5% | iv. 32,65% |
| ii. 23% | v. 1.235% |
| iii. 1,234% | vi. 456,78% |

3. Να μετατρέψετε σε ποσοστά % τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς

- | | |
|-----------|------------|
| i. 0,3 | iv. 55,125 |
| ii. 0,23 | v. 0,99 |
| iii. 1,34 | vi. 0,673 |

4. Να μετατρέψετε σε % τα παρακάτω κλάσματα

- | | |
|--------------------|----------------------|
| i. $\frac{1}{2}$ | iv. $\frac{2}{5}$ |
| ii. $\frac{1}{4}$ | v. $\frac{9}{25}$ |
| iii. $\frac{3}{4}$ | vi. $\frac{3}{1000}$ |

5. Να μετατρέψετε τα παρακάτω ‰ σε δεκαδικά κλάσματα και στη συνέχεια σε %

- | | |
|-----------|------------|
| i. 10‰ | iv. 1200‰ |
| ii. 250‰ | v. 12,5‰ |
| iii. 410‰ | vi. 132,5‰ |

6. Να μετατρέψετε τα παρακάτω ‰ σε δεκαδικούς αριθμούς

- | | |
|-------------|-------------|
| i. 5‰ | iv. 32,65‰ |
| ii. 23‰ | v. 1.235‰ |
| iii. 1,234‰ | vi. 456,78‰ |

7. Να μετατρέψετε σε ποσοστά ‰ τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς

- | | |
|------------|------------|
| i. 0,332 | iv. 55,125 |
| ii. 0,213 | v. 0,99 |
| iii. 1,324 | vi. 0,023 |

8. Να μετατρέψετε σε % τα παρακάτω κλάσματα

i. $\frac{1}{200}$

iv. $\frac{2}{50}$

ii. $\frac{1}{4}$

v. $\frac{9}{25}$

iii. $\frac{3}{4}$

vi. $\frac{3}{1000}$

9. Να υπολογίσετε

i. Το 50% του 30

iv. Το 12% του 50

ii. Το 25% του 40

v. Το 5% του 25

iii. Το 20% του 80

vi. Το 75% του 2000

10. Να υπολογίσετε

i. Το 8% του 300

iv. Το 23% του 20

ii. Το 12,5% του 62

v. Το 45% του 15,5

iii. Το 35% του 70

vi. Το 34,5% του 160

11. Να υπολογίσετε

i. Το 15‰ του 300

iv. Το 1‰ του 43.000

ii. Το 4‰ του 150

v. Το 7‰ του 1.200

iii. Το 250 ‰ του 50

vi. Το 50‰ του 46.000

12. Να υπολογίσετε

i. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν αυξηθεί κατά 10%

ii. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν αυξηθεί κατά 10%

iii. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν αυξηθεί κατά 10%

iv. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν αυξηθεί κατά 10%

13. Να υπολογίσετε

i. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν μειωθεί κατά 10%

ii. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν μειωθεί κατά 10%

iii. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν μειωθεί κατά 10%

iv. Πόσο θα γίνει ο αριθμός 20 , αν μειωθεί κατά 10%

14. Να βρείτε

i. Ποιος αριθμός αν αυξηθεί κατά 20% θα γίνει 18

ii. Ποιος αριθμός αν μειωθεί κατά 30% θα γίνει 42

iii. Ποιος αριθμός αν αυξηθεί κατά 40% θα γίνει 350

iv. Ποιος αριθμός αν μειωθεί κατά 85% θα γίνει 48.

15. Σε έναν αγώνα μπάσκετ ένας αθλητής έριξε 8 τρίποντα με ποσοστό ευστοχίας 50% , 15 δίποντα με ποσοστό ευστοχίας 60% και 10 ελεύθερες βολές με ποσοστό ευστοχίας 80%. Πόσους πόντους έβαλε ο αθλητής;
16. Για να φτιάξουμε γύψο χρειαζόμαστε 6Kg σκόνη γύψου και την ανακατεύουμε με 4kg νερό. Τι ποσοστό % του γύψου που φτιάξαμε είναι το νερό και τι ποσοστό % η σκόνη;

5.2 Προβλήματα με ποσοστά

❖ Υπολογισμός έκπτωσης τελικής τιμής

- Αν στην τιμή ενός προϊόντος γίνει έκπτωση α% τότε το ποσό της έκπτωσης είναι:

$$\text{Έκπτωση} = \frac{\alpha}{100} \cdot (\text{αρχική τιμή})$$

- Η τελική τιμή του προϊόντος είναι

$$\text{Τελική τιμή} = (\text{Αρχική τιμή}) - (\text{Έκπτωση})$$

❖ Υπολογισμός Φ.Π.Α. και τελικής τιμής

- Ο φόρος προστιθέμενης αξίας (Φ.Π.Α.) είναι ένας γενικός φόρος που επιβάλλεται σχεδόν σε όλα τα προϊόντα και παρεχόμενες υπηρεσίες.

Αν για ένα προϊόν ο συντελεστής Φ.Π.Α. είναι α% τότε ο Φ.Π.Α. που του αντιστοιχεί

$$\text{είναι } \Phi. \Pi. \Lambda. = \frac{\alpha}{100} \cdot (\text{αρχική αξία})$$

- Η τελική τιμή του προϊόντος είναι

$$\text{Τελική τιμή} = (\text{Αρχική τιμή}) + \Phi. \Pi. \Lambda.$$

❖ Υπολογισμός τόκου.

- Τόκος (Τ) λέγεται το κέρδος που έχει κάποιος όταν αποταμιεύει σε κάποια τράπεζα ή όταν δανείζει τα χρήματά του.

Ο τόκος Τ που μας δίνει ένα κεφάλαιο Κ, όταν αυτό τοκίζεται με επιτόκιο Ε% είναι

$$T = K \cdot \frac{E}{100} \quad \text{«Τόκος = κεφάλαιο} \cdot \text{επιτόκιο»}$$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

- Ένα drone κοστίζει 210€. Αν πουληθεί με έκπτωση 20% να βρείτε:

- Την έκπτωση
- Την τελική τιμή μετά την έκπτωση

Λύση

- Για την έκπτωση θα βρούμε το 20% το 210

$$20\% \cdot 210 = 0,2 \cdot 210 = 42$$

Άρα η έκπτωση είναι 42€

- Η τελική τιμή είναι η αρχική τιμή μείον την έκπτωση

$$\text{Άρα } 210 - 42 = 168$$

Επομένως η τελική τιμή είναι 168€

2. Αγοράσαμε ένα dvd που έχει συντελεστή Φ.Π.Α. 23% με 379€. Να βρείτε

- i. Την αξία το dvd χωρίς Φ.Π.Α.
- ii. Τον Φ.Π.Α.

Λύση

- i. Αν η αξία του dvd χωρίς τον Φ.Π.Α, είναι x €. Ο Φ.Π.Α. της τιμής αυτής είναι $23\% \cdot x = 0,23 \cdot x$. Έχουμε ότι η τελική τιμή είναι η τιμή χωρίς Φ.Π.Α. συν το Φ.Π.Α. άρα έχουμε την εξίσωση

$$x + 23\%x = 379 \text{ ή } x + 0,23x = 379 \text{ ή } 1,23x = 379 \text{ ή } x = 379 : 1,23 \text{ ή } x = 300$$

Άρα η τιμή του dvd χωρίς Φ.Π.Α. είναι 300€
- ii. Το Φ.Π.Α είναι $379 - 300 = 79$ €

3. Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 20.000€ με επιτόκιο 4% τον χρόνο. Να βρείτε τον τόκο που θα πάρουμε μετά από

- i. 1 χρόνο
- ii. 7 μήνες
- iii. 2 χρόνια

Λύση

- i. Μετά από 1 χρόνο ο τόκος θα είναι $\text{Τόκος} = \text{κεφάλαιο} \cdot \text{επιτόκιο}$

Άρα $T = 20.000 \cdot 3\% = 20.000 \cdot \frac{3}{100} = \frac{60.000}{100} = 600$ €
- ii. Οι 7 μήνες είναι τα $\frac{7}{12}$ του έτους άρα ο τόκος θα είναι ίσος με τα $\frac{7}{12}$ του τόκου του έτους.

Επομένως $\frac{7}{12} \cdot 600 = \frac{4200}{12} = 350$ €
- iii. Μετά από 1 χρόνο ο τόκος θα προστεθεί στο κεφάλαιο
 $(20.000 + 600 = 20.600)$ και θα τοκιστεί το νέο κεφάλαιο. Άρα ο τόκος στο δεύτερο έτος θα είναι

$$20.600 \cdot 3\% = 20.600 \cdot \frac{3}{100} = \frac{61800}{100} = 618$$
€

Άρα ο συνολικός τόκος που θα πάρουμε μετά από δυο χρόνια θα είναι
 $600\text{€} + 618\text{€} = 1218\text{€}$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Σε ένα προϊόν αξίας 40€ γίνεται έκπτωση 20%
 - i. Πόσα € είναι η έκπτωση;
 - ii. Ποια θα είναι η τελική τιμή του προϊόντος;
2. Ένα βιντεοπαιχνίδι κοστίζει 420€ και πωλείται με έκπτωση 30%. Ποια είναι η τιμή του βιντεοπαιχνιδιού;
3. Σε μια μπλούζα αρχικής αξίας 40€ γίνεται έκπτωση 15%. Πόσα € είναι η έκπτωση και πόσα € κοστίζει η μπλούζα;
4. Μια κουζίνα κόστιζε 600€ . Κάποιος την αγόρασε με έκπτωση και έδωσε 480€. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης που έγινε στην κουζίνα;
5. Ο Γιώργος αγόρασε μια τηλεόραση με έκπτωση 12%. Αν πλήρωσε 836€ να βρείτε:
 - i. Την αρχική τιμή της τηλεόρασης
 - ii. Το ποσό της έκπτωσης.
6. Μια τηλεόραση αξίας 250€ έχει Φ.Π.Α 23%. . Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε την τηλεόραση;
7. Σε κάποιο ζευγάρι παπούτσια επιβάλλεται Φ.Π.Α. 23%. Αν ο φόρος είναι 46€ να βρείτε την αξία των παπουτσιών χωρίς τον Φ.Π.Α. και την αξία με τον Φ.Π.Α.
8. Ένα ποσό 1.200€ κατατέθηκε σε τράπεζα σε κλειστό λογαριασμό για 2 χρόνια με επιτόκιο 2% τον χρόνο. Να βρείτε
 - i. Τον τόκο μετά από 1 χρόνο
 - ii. Το κεφάλαιο μετά από 1 χρόνο
 - iii. Τον τόκο μετά από 2 χρόνια
 - iv. Το συνολικό κεφάλαιο μετά από 2 χρόνια.
9. Ένα ποσό 2.500€ κατατέθηκε σε τράπεζα σε κλειστό λογαριασμό για 2 χρόνια με επιτόκιο 2% τον χρόνο. Να βρείτε
 - i. Τον τόκο μετά από 1 χρόνο
 - ii. Το κεφάλαιο μετά από 1 χρόνο
 - iii. Τον τόκο μετά από 2 χρόνια
 - iv. Το συνολικό κεφάλαιο μετά από 2 χρόνια.
10. Μια τηλεόραση κοστίζει 900€ χωρίς τον Φ.Π.Α. κάποιος την αγόρασε και έδωσε 50% προκαταβολή και το υπόλοιπο ποσό σε 12 μηνιαίες δόσεις με τόκο 2% τον μήνα.

- i. Πόσα χρήματα έδωσε προκαταβολή αν μαζί με αυτή κατέβαλε και ολόκληρο το Φ.Π.Α;
- ii. Ποιο είναι το ποσό της κάθε δόσης
- iii. Πόσο του στοίχισε η τηλεόραση;

11. Η τιμή μιας μετοχής την Δευτέρα στο χρηματιστήριο ήταν 12€. Την Τρίτη η τιμή αυξήθηκε κατά 3%. Την Τετάρτη η τιμή αυξήθηκε κατά 1,3% , την Πέμπτη μειώθηκε κατά 2% και την Παρασκευή αυξήθηκε κατά 3,5%. Ποια είναι η τιμή της μετοχής στο τέλος της εβδομάδας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο – Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

7.1 Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου.

❖ Πρόσημο – θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

- Τα σύμβολα + και – ονομάζονται πρόσημα.
- Οι αριθμοί που έχουν μπροστά στο το πρόσημο + η δεν έχουν πρόσημο λέγονται θετικοί.
- Οι αριθμού που έχουν μπροστά τους το πρόσημο – λέγονται αρνητικοί.
 - ✓ Το 0 δεν έχει πρόσημο επομένως δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

❖ Ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί

- Οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται ομόσημοι.
- Οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται ετερόσημοι.

❖ Ακέραιοι αριθμοί

- Ακέραιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

❖ Ρητοί αριθμοί

- Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί , κλάσματα , δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.
 - ✓ Όλοι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν με την μορφή κλάσματος με τους όρους του κλάσματος να είναι ακέραιοι.

❖ Παράσταση ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας

- Τους ρητούς αριθμούς μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε μια ευθεία (άξονα) , σε ένα σημείο βάζουμε το μηδέν και δεξιά του μηδενός όλους τους θετικούς αριθμούς σε αύξουσα σειρά και αριστερά από το μηδέν τους αρνητικούς αριθμούς σε φθίνουσα σειρά. Ο άξονας αυτός ονομάζεται άξονας ρητών αριθμών.
 - ✓ Η θέση ενός σημείου Α επάνω στον άξονα ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται τετμημένη του σημείου.
 - ✓ Το μηδέν 0 ονομάζεται αρχή του άξονα

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικοί και αρνητικοί.

- i. +3
- ii. -10
- iii. 0
- iv. 22

Λύση

- i. Το +3 είναι θετικός αριθμός
- ii. Το - 10 είναι αρνητικός αριθμός
- iii. Το 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός
- iv. Το 22 είναι θετικός αριθμός.

2. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι.

- i. 10 και -4
- ii. -5 και -6
- iii. +10 και 4

Λύση

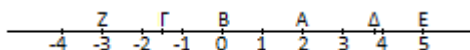
- i. Οι αριθμοί 10 και -4 είναι ετερόσημοι.
- ii. Οι αριθμοί -5 και -6 είναι ομόσημοι αρνητικοί.
- iii. Οι αριθμοί +10 και 4 είναι ομόσημοι θετικοί.

3. Να παραστήσετε με σημεία ενός άξονα τους αριθμούς.

- | | |
|---------------------|---------|
| i. +2 | iv. 3,8 |
| ii. 0 | v. +5 |
| iii. $-\frac{3}{2}$ | vi. -3 |

Λύση

Τοποθετούμε τους αριθμούς στον άξονα των ρητών με τα σημεία Α , Β , Γ , Δ , Ε , Ζ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ασκήσεις προς επίλυση

1. Δίνονται οι αριθμοί -4 , $+\frac{3}{7}$, -15 , $-3,6$, 19 , $+\frac{3}{5}$, $+12,3$, 0 . Να βρείτε ποιοι από αυτούς είναι:

- | | |
|---------------|--------------|
| i. Θετικοί | iv. Ακέραιοι |
| ii. Αρνητικοί | v. Ρητοί |
| iii. Φυσικοί | |

2. Δίνονται οι αριθμοί $+6$, $-3,1$, $\frac{10}{3}$, $-\frac{6}{7}$, $-4,3$. Να βρείτε ποιοι από αυτούς είναι:

- i. Ομόσημοι με το -12
- ii. Ομόσημοι με το $\frac{2}{9}$
- iii. Ετερόσημοι με το $-3,6$
- iv. Ετερόσημοι με το $+19$

3. Δίνονται τα ζεύγη ρητών αριθμών

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| i. 4 και $+2,1$ | vi. $+\frac{3}{4}$ και $\frac{12}{5}$ |
| ii. $+12$ και $-2,1$ | vii. -17 και $-\frac{4}{9}$ |
| iii. -3 και $-4,7$ | viii. -6 και $-2,1$ |
| iv. -4 και $+2,1$ | |
| v. $-\frac{9}{2}$ και -9 | |

Να βρείτε τα ζεύγη που αποτελούνται από

- α. Από θετικούς αριθμούς
- β. Από αρνητικούς αριθμούς
- γ. Από ομόσημους αριθμούς.
- δ. Από ετερόσημους αριθμούς.

4. Να εκφράσετε με ρητούς αριθμούς τις εκφράσεις

- i. Θερμοκρασία 12°C κάτω από το μηδέν
- ii. Θερμοκρασία 32°C πάνω από ο μηδέν
- iii. Αύξηση της τιμής ενός προϊόντος κατά 12%
- iv. Μείωση της τιμής ενός προϊόντος κατά 2%
- v. Το υψόμετρο μιας περιοχής κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας κατά 20m .

5. Να τοποθετήσετε σε άξονα ρητών αριθμών τους αριθμούς: $+3$, -5 , 0 , 6 , -1 , 9 , -6

6. Να τοποθετήσετε σε άξονα ρητών αριθμών τους αριθμούς: $+\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0 , 1 , -1 , 2 , $-\frac{4}{5}$, $\frac{6}{4}$

7. Να τοποθετήσετε σε άξονα ρητών αριθμών τους αριθμούς: $+3,1$, $-5,2$, 0 , $6,5$, $-1,5$, $4,3$, $-3,2$
8. Το σημείο A έχει τετμημένη -4 και το σημείο B έχει τετμημένη $+6$. Να βρείτε
 - i. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB
 - ii. Την τετμημένη του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB
 - iii. Την τετμημένη Δ του συμμετρικού του σημείου A ως προς την αρχή του άξονα.
 - iv. Την τετμημένη E του συμμετρικού του σημείου B ως προς την αρχή του άξονα.
 - v. Την τετμημένη N του συμμετρικού του σημείου M ως προς την αρχή του άξονα.
9. Το σημείο A έχει τετμημένη -6 και το σημείο B έχει τετμημένη $+8$. Να βρείτε
 - i. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB
 - ii. Την τετμημένη του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB
 - iii. Την τετμημένη Δ του συμμετρικού του σημείου A ως προς την αρχή του άξονα.
 - iv. Την τετμημένη E του συμμετρικού του σημείου B ως προς την αρχή του άξονα.
 - v. Την τετμημένη N του συμμετρικού του σημείου M ως προς την αρχή του άξονα.

7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών

❖ Απόλυτη τιμή ρητού αριθμού

- Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$
 - ✓ Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός
 - ✓ Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
 - ✓ Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

❖ Αντίθετοι αριθμοί

- Δυο αριθμοί λέγονται αντίθετοι όταν είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.
(π.χ. $+3$ και το -3)
 - ✓ Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

❖ Σύγκριση ρητών αριθμών

- Ανάμεσα από δυο ρητούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
 - ✓ Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό. Αν x θετικός τότε $x > 0$.
 - ✓ Μεγαλύτερος ανάμεσα από δυο θετικούς αριθμούς είναι αυτός που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Αν x αρνητικός αριθμός τότε $x < 0$.
 - ✓ Μεγαλύτερος ανάμεσα από δυο αρνητικούς αριθμούς είναι αυτός που έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να βρείτε τους αντίθετους των παρακάτω αριθμών

- i. -3
- ii. $\frac{2}{3}$
- iii. $-\frac{1}{2}$
- iv. $-4,2$

Λύση

- i. Ο αντίθετος του -3 είναι το $+3$

- ii. Ο αντίθετος του $\frac{2}{3}$ είναι το $-\frac{2}{3}$
- iii. Ο αντίθετος του $-\frac{1}{2}$ είναι ο $\frac{1}{2}$
- iv. Ο αντίθετος του -4,2 είναι ο 4,2.

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω απόλυτες τιμές.

- i. $|+4|$
- ii. $|-3|$
- iii. $|0|$
- iv. $|2,1|$
- v. $\left|-\frac{4}{7}\right|$
- vi. $|-3,3|$

Λύση

- i. $|+4| = 4$
- ii. $|-3| = 3$
- iii. $|0| = 0$
- iv. $|2,1| = 2,1$
- v. $\left|-\frac{4}{7}\right| = \frac{4}{7}$
- vi. $|-3,3| = 3,3$

3. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή.

- i. 50
- ii. 12,1
- iii. 0

Λύση

- i. Ο ρητός αριθμός που έχει απόλυτη τιμή είναι αυτός που απέχει στον άξονα των ρητών αριθμών από την αρχή 50 μονάδες άρα έχουμε δυο τέτοιους αριθμούς το +50 και το -50.
- ii. Ομοίως οι αριθμοί που έχουν απόλυτη τιμή 12,1 είναι το 12,1 και το -12,1
- iii. Ο αριθμός που έχει απόλυτη τιμή το 0 είναι το 0.

4. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς

- i. $3 \dots -4$
- ii. $-7,1 \dots -12,2$
- iii. $0 \dots -6$
- iv. $3 \dots 12,6$
- v. $-6,4 \dots -4$
- vi. $4,3 \dots 4,2$
- vii. $-3,1 \dots -3,3$

Λύση

- i. $3 > -4$

- ii. $-7,1 > -12,2$
- iii. $0 > -6$
- iv. $3 < 12,6$
- v. $-6,4 < -4$
- vi. $4,3 > 4,2$
- vii. $-3,1 > -3,3$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τους αντίθετους των παρακάτω αριθμών

i. $+5$

ii. $4,6$

iii. -15

iv. $-4,5$

v. 0

vi. $+\frac{3}{7}$

vii. $-\frac{5}{4}$

viii. $\frac{12}{5}$

ix. -3

x. -16

2. Να βρείτε τις παρακάτω απόλυτες τιμές

i. $|+4|$

ii. $|-12|$

iii. $|+3,2|$

iv. $|-1,1|$

v. $|4,3|$

vi. $|0|$

vii. $\left|-\frac{5}{4}\right|$

viii. $\left|\frac{2}{3}\right|$

ix. $|-15|$

x. $|-9|$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $|3| + |-5|$

ii. $|-4| + |-4|$

iii. $|-3| - |-3|$

iv. $|+8| - |-5|$

v. $|12| - |+9|$

vi. $|+16| + |-4|$

vii. $|-13| + |-8|$

viii. $|-19| - |-3,5|$

ix. $|45,6| + |-3,4|$

x. $|-12,93| + |-12,55|$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{3}{2}\right|$

ii. $\left|-\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{2}{3}\right|$

iii. $\left|-\frac{9}{4}\right| - \left|\frac{5}{4}\right|$

iv. $\left|-\frac{19}{6}\right| - \left|\frac{7}{6}\right|$

v. $\left|-\frac{4}{3}\right| - \left|-\frac{4}{3}\right|$

vi. $\left|+\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{4}{5}\right|$

vii. $\left|-\frac{5}{6}\right| + \left|-\frac{4}{9}\right|$

viii. $\left|\frac{7}{8}\right| + \left|-\frac{6}{5}\right|$

ix. $\left|-\frac{12}{5}\right| - \left|-\frac{3}{4}\right|$

x. $\left|-\frac{16}{11}\right| - \left|\frac{12}{13}\right|$

5. Να βρείτε την απόσταση από την αρχή Ο του άξονα των αριθμών με τετμημένες

i. $+1,1$

ii. $+4$

iii. $0,4$

iv. -6

v. $-\frac{3}{2}$

vii. $\frac{6}{7}$

vi. $-7,4$

viii. $+\frac{4}{3}$

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

α	5		-3		3,4
$-\alpha$		9		-4	
$ \alpha $					
$- \alpha $					
$ - \alpha $					
$-(-\alpha)$					

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

α	$\frac{4}{9}$		$-\frac{3}{5}$		0
$-\alpha$		-2,2		-4,3	
$ \alpha $					
$- \alpha $					
$ - \alpha $					
$-(-\alpha)$					

8. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή ίση με

i. 12

iv. 0

ii. +4,7

v. 3,3

iii. -6

vi. 20

9. Να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς τοποθετώντας τα κατάλληλα σύμβολα ($<$, $=$, $>$)

i. $5 \dots +3$

vi. $0 \dots -3$

ii. $-5 \dots -3$

vii. $-35 \dots +31$

iii. $0 \dots +3$

viii. $-12 \dots 13$

iv. $-125 \dots -123$

ix. $0 \dots +14$

v. $+53 \dots +12$

x. $-5,1 \dots -5,2$

10. Να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς τοποθετώντας τα κατάλληλα σύμβολα ($<$, $=$, $>$)

i. $+\frac{1}{2} \dots +2$

ii. $-\frac{5}{3} \dots -2$

$$\text{iii. } -\frac{1}{2} \dots -\frac{2}{5}$$

$$\text{iv. } -\frac{8}{3} \dots +\frac{9}{2}$$

$$\text{v. } 0 \dots \frac{4}{3}$$

$$\text{vi. } \frac{6}{7} \dots -\frac{4}{3}$$

$$\text{vii. } \frac{1}{3} \dots +\frac{1}{4}$$

$$\text{viii. } -\frac{3}{5} \dots -\frac{9}{15}$$

$$\text{ix. } \frac{2}{3} \dots +\frac{10}{15}$$

$$\text{x. } 0 \dots -\frac{1}{100}$$

11. Να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς τοποθετώντας τα κατάλληλα σύμβολα ($<$, $=$, $>$)

$$\text{i. } |5| \dots -5$$

$$\text{ii. } |+9| \dots |-9|$$

$$\text{iii. } -|-4| \dots +4$$

$$\text{iv. } |-12| \dots -(-12)$$

$$\text{v. } |0| \dots 0$$

$$\text{vi. } -|-6| \dots -6$$

$$\text{vii. } -|+8| \dots |-8|$$

$$\text{viii. } -|-2| \dots -|+2|$$

$$\text{ix. } \frac{2}{3} \dots \left| -\frac{4}{6} \right|$$

$$\text{x. } \left| -\frac{3}{5} \right| \dots \left| \frac{5}{3} \right|$$

12. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $12, -3,5, -4, -3, 0, 31, 3,1, 4, 2$

13. Να γράψετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς

$$|-3|, -\left| \frac{3}{2} \right|, -4, 0, -1, |-2|, \left| \frac{4}{3} \right|, 1, 6$$

14. Να βρείτε τους αριθμούς για τους οποίους ισχύει

$$\text{i. } |a| = +5$$

$$\text{ii. } |a| = 4$$

$$\text{iii. } |a| = 0$$

$$\text{iv. } |a| = +2,1$$

$$\text{v. } |a| = -2$$

$$\text{vi. } |a| = +\frac{4}{5}$$

15. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

$$\text{i. } |-2| + |+4| - |-5|$$

$$\text{ii. } (|-8| + |+6| - |-13|)^{1966}$$

$$\text{iii. } |-3| \cdot 4 + |+4| \cdot 6 - |-5| \cdot 2$$

$$\text{iv. } |-2| \cdot 2^2 + |+3| \cdot |-5| - |-1| \cdot |-1|$$

$$\text{v. } |-6| \cdot |-3| + |+4| \cdot |-2| - |3| \cdot |2|$$

7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών

❖ Πρόσθεση ρητών αριθμών

- Για να προσθέσουμε δυο ομόσημους ρητούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε δυο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε τη μικρότερη από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και στην διαφορά βάζουμε το πρόσημο της μεγαλύτερης απόλυτης τιμής.

❖ Ιδιότητες πρόσθεσης ρητών αριθμών

- Αντιμεταθετική ιδιότητα
Σε ένα άθροισμα μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των προσθετέων. Δηλαδή:
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
- Προσεταιριστική ιδιότητα
Σε ένα άθροισμα πολλών προσθετέων μπορούμε να αντικαταστήσουμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύσουμε έναν προσθετέο σε άθροισμα. Δηλαδή $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου
Το μηδέν όταν προστεθεί σε έναν ρητό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου
Το άθροισμα δυο αντίθετων ρητών αριθμών είναι μηδέν. Δηλαδή ισχύει: $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

- i. $(+3) + (+12)$
- ii. $(+8) + (-11)$
- iii. $(-3) + (-18)$
- iv. $(-3) + (+9)$
- v. $0 + (+6)$
- vi. $(-3) + 0$

Λύση

i. $(+3) + (+12) = +15$

ii. $(+8) + (-11) = -3$

iii. $(-3) + (-18) = -21$

iv. $(-3) + (+9) = +6$

v. $0 + (+6) = 6$

vi. $(-3) + 0 = -3$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $(+3) + (+9)$

ii. $(-5) + (-4)$

iii. $(-13) + (+19)$

iv. $(-31) + (+23)$

v. $(+54) + (-17)$

vi. $12 + (-9)$

vii. $(-153) + 134$

viii. $(-37) + (-19)$

ix. $(-64) + 43$

x. $(-15) + (+32)$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $(+6) + (-6)$

ii. $(+16) + 0$

iii. $0 + (-4)$

iv. $(-8) + (-8)$

v. $(-12) + (+12)$

vi. $(-9) + 0$

vii. $(+3) + 0$

viii. $0 + (+9)$

ix. $(-9) + (+9)$

x. $(+3) + (-3)$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $(+3,1) + (+1,9)$

ii. $(-5,2) + (-4,9)$

iii. $(-3,9) + (+6,9)$

iv. $(+3,1) + (-12,1)$

v. $(-3,7) + (-5,3)$

vi. $(-12,6) + (-3,9)$

vii. $(+3,17) + (-3,91)$

viii. $(-15,3) + (-4,9)$

ix. $(-17,63) + (+14,9)$

x. $(+15,3) + (+4,7)$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

i. $\left(+\frac{3}{5}\right) + (-2)$

ii. $\frac{3}{4} + (-4)$

iii. $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right)$

iv. $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right)$

v. $\left(-\frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right)$

vi. $\left(-\frac{12}{5}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$

vii. $\left(-\frac{4}{9}\right) + \left(+\frac{8}{3}\right)$

viii. $\left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$

ix. $\left(-\frac{4}{11}\right) + \left(+\frac{6}{5}\right)$

x. $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{6}\right)$

5. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

i. $(+3) + (+9) + (-12)$

ii. $(-5) + (+8) + (+16)$

iii. $(-41) + (+91) + (-55)$

iv. $(-13) + (+9) + (-132)$

v. $(-33) + (-9) + (-52)$

vi. $(-37) + (+12) + (-12)$

vii. $(-15) + 0 + (+15)$

viii. $(+67) + (+12) + (+34)$

ix. $(-43) + (-49) + (-78)$

x. $(-54) + (-6) + (+60)$

6. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

i. $(+3,1) + (+3,9) + (-1,2)$

ii. $(-5,3) + (-4,7) + (+12)$

iii. $(-7,23) + (+1,23) + (-2,22)$

iv. $(-42,6) + (+5,4) + (-1,8)$

v. $(-12,5) + (-12,9) + (-1,2)$

vi. $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$

vii. $\left(+\frac{1}{3}\right) + (+2) + \left(-\frac{5}{3}\right)$

viii. $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$

ix. $\left(+\frac{4}{10}\right) + \left(+\frac{1}{10}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

x. $\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{6}{5}\right)$

7. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $||+22| + (-32)|$

ii. $|(-9) + (-4) + (+3) + 10|$

iii. $(-4) + |-12|$

iv. $-|-3| + (-8)$

v. $+|-12| + |-9|$

vi. $-|-6| + (-|-19|)$

8. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με το κατάλληλο πρόσημο ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες.

i. $(... 4) + (... 8) = -12$

vi. $(-5) + (...) = -8$

ii. $(... 5) + (... 3) = -2$

vii. $(+4) + (...) = -6$

iii. $(... 9) + (... 7) = +16$

viii. $(...) + (-12) = -19$

iv. $(... 8) + (... 23) = -15$

ix. $(...) + (-3) = +5$

v. $(... 14) + (... 33) = +19$

x. $(...) + (+12) = -16$

7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών

❖ Αφαίρεση ρητών αριθμών

- Για να αφαιρέσουμε από έναν αριθμό α τον αριθμό β , προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β . Δηλαδή ισχύει $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

❖ Κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το πρόσημο $+$ ή δεν έχει πρόσημο, τότε μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το πρόσημο $+$ (αν υπάρχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημα τους όπως είναι.
- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το πρόσημο $-$ μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το $-$ και γράφουμε τους όρους της με αντίθετα πρόσημα.
 - ✓ Οι κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων εφαρμόζονται σε αριθμητικές παραστάσεις όταν στις παρενθέσεις υπάρχουν αριθμοί με τα πρόσημα τους.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές

i. $(+3) - (+12)$

iv. $(-3) - (+9)$

ii. $(+8) - (-11)$

v. $0 - (+6)$

iii. $(-3) - (-18)$

vi. $(-3) - 0$

Λύση

i. $(+3) - (+12) = (+3) + (-12) = -9$

ii. $(+8) - (-11) = (+8) + (+11) = +19$

iii. $(-3) - (-18) = (-3) + (+18) = +15$

iv. $(-3) - (+9) = (-3) + (-9) = -12$

v. $0 - (+6) = 0 + (-6) = -6$

vi. $(-3) - 0 = (-3) + 0 = -3$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-5 + 6 - 4 + 9 - 3 - 1 + 5$

ii. $(-3) + (+8) + (-3) - (-2) - (+4)$

iii. $(-5 - 1 + 5 - 7) - (-1 + 6 + 3 - 8)$

Λύση

i. $-5 + 6 - 4 + 9 - 3 - 1 + 5 = +6 + 9 + 5 - 5 - 4 - 3 - 1$

$$= +20 - 13 = +7$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } (-3) + (+8) + (-3) - (-2) - (+4) &= -3 + 8 - 3 + 2 - 4 \\ &= +8 + 2 - 3 - 3 - 4 = 10 - 10 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } (-5 - 1 + 5 - 7) - (-1 + 6 + 3 - 8) &= \\ -5 - 1 + 5 - 7 + 1 - 6 - 3 + 8 &= \\ +5 + 1 + 8 - 5 - 1 - 7 - 6 - 3 &= \\ 14 - 17 &= -3 \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές

i. $(+3) - (+9)$

ii. $(-5) - (-4)$

iii. $(-13) - (+19)$

iv. $(-31) - (+23)$

v. $(+54) - (-17)$

vi. $12 - (-9)$

vii. $(-153) - 134$

viii. $(-37) - (-19)$

ix. $(-64) - 43$

x. $(-15) - (+32)$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές

i. $(+6) - (-6)$

ii. $(+16) - 0$

iii. $0 - (-4)$

iv. $(-8) - (-8)$

v. $(-12) - (-12)$

vi. $(-9) - 0$

vii. $(+3) - 0$

viii. $0 - (+9)$

ix. $(-9) - (+9)$

x. $(-3) - (-3)$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-4 + 6$

ii. $-4 - 9$

iii. $-2 - (-3)$

iv. $4 - 26$

v. $12 - 15$

vi. $14 - (-26)$

vii. $(-9) - 6$

viii. $-17 - (+4)$

ix. $-12 - 6$

x. $4 - 29$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-4,1 + 6,3$

ii. $-2,5 - 1,6$

iii. $+7,3 - 6,2$

iv. $-4,2 - (-4,6)$

v. $-7,5 - 6,1$

vi. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

vii. $-\frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

viii. $\frac{1}{4} - 3$

ix. $\frac{3}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)$

x. $-\frac{4}{7} + \frac{3}{5}$

5. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές

i. $(+3,1) - (+1,9)$

ii. $(-5,2) - (-4,9)$

iii. $(-3,9) - (+6,9)$

iv. $(+3,1) + (-12,1)$

v. $(-3,7) - (-5,3)$

vi. $(-12,6) - (-3,9)$

vii. $(+3,17) - (-3,91)$

viii. $(-15,3) - (-4,9)$

ix. $(-17,63) - (+14,9)$

x. $(+15,3) - (+4,7)$

6. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές

i. $\left(+\frac{3}{5}\right) - (-2)$

ii. $\frac{3}{4} - (-4)$

iii. $\left(+\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{5}{3}\right)$

iv. $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{7}\right)$

v. $\left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{6}{7}\right)$

vi. $\left(-\frac{12}{5}\right) - \left(+\frac{1}{3}\right)$

vii. $\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(+\frac{8}{3}\right)$

viii. $\left(+\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)$

ix. $\left(-\frac{4}{11}\right) - \left(+\frac{6}{5}\right)$

x. $\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{2}{6}\right)$

7. Να υπολογίσετε τις διαφορές

i. $(+3) - (+9) - (-12)$

ii. $(-5) - (+8) - (+16)$

iii. $(-41) - (+91) - (-55)$

iv. $(-13) - (+9) - (-132)$

v. $(-33) - (-9) - (-52)$

vi. $(-37) - (+12) - (-12)$

vii. $(-15) - 0 - (+15)$

viii. $(+67) - (+12) - (+34)$

ix. $(-43) - (-49) - (-78)$

x. $(-54) - (-6) - (+60)$

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i. $(+3,1) - (+3,9) + (-1,2)$

ii. $(-5,3) + (-4,7) - (+12)$

iii. $(-7,23) - (+1,23) + (-2,22)$

iv. $(-42,6) - (+5,4) + (-1,8)$

v. $(-12,5) - (-12,9) - (-1,2)$

vi. $\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$

vii. $\left(+\frac{1}{3}\right) + (+2) - \left(-\frac{5}{3}\right)$

viii. $\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)$

ix. $\left(+\frac{4}{10}\right) - \left(+\frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$

x. $\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{6}{5}\right)$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-(+5 - 3) - (-8 + 4)$

ii. $-(+7) - (-3 - 5 + 6)$

iii. $-(12 - 31) - (-3 + 8 - 4)$

iv. $-(-5 - 8) - (8 + 5)$

v. $-(-4 + 1) + (-2 + 7)$

- vi. $(-1 - 3 + 5 - 2) - (-8 - 4 + 5)$
- vii. $(+5 - 3 - 12) - (+108 - 41 - 34)$
- viii. $(-6 - 1 - 2 - 3) - (-8 - 4)$
- ix. $(+5,6 - 3,1) - (-5,2 + 3,4)$
- x. $-(+5,1 - 3,4) - (-8,3 + 2,4)$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

- i. $-[-(-2 + 5 - 9) - (6 - 5 - 9) + 8 - 3 + 6]$
- ii. $-(-2 - 5) + [-4 + 6 - (4 - 8 + 7)]$
- iii. $- \{ - [- (-1)] \} - 1$
- iv. $- \{ + [+ (-1)] \} + 1$
- v. $15 - \{ 3 - [12 - 6 - (5 - 1)] \} - 8$
- vi. $16 + \{ 3 - [26 - (8 - 3)] \} + 4$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

- vii. $||+22| - (-32)|$
- viii. $|(-9) - (-4) - (+3) - 10|$
- ix. $(-4) - |-12|$
- x. $-|-3| - (-8)$
- xi. $+|-12| - |-9|$
- xii. $-|-6| - (-|-19|)$

7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

❖ Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

- Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο τους βάζουμε ο πρόσημο +.
- Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο τους βάζουμε το πρόσημο −.

✓ Οι παραπάνω προτάσεις συνοψίζονται στους παρακάτω κανόνες προσήμων:

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

❖ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

- Αντιμεταθετική ιδιότητα

Σε ένα γινόμενο μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των παραγόντων. Δηλαδή:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα

Σε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων μπορούμε να αντικαταστήσουμε δυο παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύσουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο. Δηλαδή

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου

Το ένα όταν πολλαπλασιαστεί με έναν ρητό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

- Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου

Το γινόμενο δυο αντίστροφων ρητών αριθμών είναι ένα. Δηλαδή ισχύει: $\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot$

$$\alpha = 1$$

✓ Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο

✓ Ο αντίστροφος του κ είναι ο $\frac{1}{\kappa}$

✓ Ο αντίστροφος του $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ο αριθμός $\frac{\lambda}{\kappa}$

- Επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

- Επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

- Γινόμενο με το 0

Όταν ένας ρητός αριθμός πολλαπλασιαστεί με το 0 το γινόμενο μηδενίζεται.

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0.$$

❖ *Γινόμενο πολλών παραγόντων*

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (διαφόρων του μηδενός) πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- Το πρόσημο + αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιος αριθμός
- Το πρόσημο – αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττός αριθμός.
- ✓ Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν , τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα

i. $(+3) \cdot (+4)$

iv. $(+3) \cdot (-6)$

ii. $(-2) \cdot (+5)$

v. $0 \cdot (+4)$

iii. $(-6) \cdot (-8)$

vi. $2 \cdot (-4)$

Λύση

i. $(+3) \cdot (+4) = +12$

ii. $(-2) \cdot (+5) = -10$

iii. $(-6) \cdot (-8) = -48$

iv. $(+3) \cdot (-6) = -18$

v. $0 \cdot (+4) = 0$

vi. $2 \cdot (-4) = -8$

2. Να βρείτε του αντίστροφους των αριθμών

i. -3

ii. $+5$

iii. $-\frac{1}{2}$

iv. $\frac{5}{3}$

v. $+1$

vi. -1

Λύση

i. Ο αντίστροφος του -3 είναι ο αριθμός $-\frac{1}{3}$

ii. Ο αντίστροφος του $+5$ είναι ο αριθμός $\frac{1}{5}$

iii. Ο αντίστροφος του $\frac{5}{3}$ είναι ο αριθμός $\frac{3}{5}$

iv. Ο αντίστροφος του $+1$ είναι ο αριθμός $+1$

v. Ο αντίστροφος του -1 είναι ο αριθμός -1

3. Να βρείτε τα παρακάτω γινόμενα

i. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

ii. $(-2) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (+4) \cdot (-2)$

iii. $(-2) \cdot (+3) \cdot (-12) \cdot 0 \cdot (+8) \cdot (-2)$

Λύση

i. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

ii. $(-2) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = +2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = +48$

iii. $(-2) \cdot (+3) \cdot (-12) \cdot 0 \cdot (+8) \cdot (-2) = 0$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα

i. $(+3) \cdot (+9)$

ii. $(-5) \cdot (-4)$

iii. $(-13) \cdot (+19)$

iv. $(-31) \cdot (+23)$

v. $(+54) \cdot (-17)$

vi. $12 \cdot (-9)$

vii. $(-15) \cdot 13$

viii. $(-37) \cdot (-19)$

ix. $(-64) \cdot 43$

x. $(-15) \cdot (+32)$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα

i. $(+6) \cdot (-6)$

ii. $(+16) \cdot 0$

iii. $0 \cdot (-4)$

iv. $(-8) \cdot (-8)$

v. $(-12) \cdot (-12)$

vi. $(-9) \cdot 0$

vii. $(+3) \cdot 0$

viii. $0 \cdot (+9)$

ix. $(-9) \cdot (+9)$

x. $(-3) \cdot (-3)$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα

i. $-4 \cdot 6$

ii. $-4 \cdot 9$

iii. $-2 \cdot (-3)$

iv. $4 \cdot (-26)$

v. $12 \cdot (-15)$

vi. $-14 \cdot (-26)$

vii. $(-9) \cdot 6$

viii. $-17 \cdot (+4)$

ix. $-12 \cdot (-6)$

x. $4 \cdot (-29)$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα

i. $-4,1 \cdot 6,3$

ii. $-2,5 \cdot (-1,6)$

iii. $+7,3 \cdot (-6,2)$

iv. $-4,2 \cdot (-4,6)$

v. $-7,5 \cdot (-6,1)$

vi. $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

vii. $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3)$

viii. $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$

ix. $\frac{3}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

x. $\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα

i. $(+3,1) \cdot (+1,9)$

ii. $(-5,2) \cdot (-4,9)$

iii. $(-3,9) \cdot (+6,9)$

iv. $(+3,1) \cdot (-12,1)$

v. $(-3,7) \cdot (-5,3)$

vi. $(-12,6) \cdot (-3,9)$

vii. $(+3,17) \cdot (-3,91)$

viii. $(-15,3) \cdot (-4,9)$

ix. $(-17,63) \cdot (+14,9)$

x. $(+15,3) \cdot (+4,7)$

6. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές

i. $\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot (-2)$

ii. $\frac{3}{4} \cdot (-4)$

iii. $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$

iv. $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)$

v. $\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right)$

vi. $\left(-\frac{12}{5}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)$

vii. $\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(+\frac{8}{3}\right)$

viii. $\left(+\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

ix. $\left(-\frac{4}{11}\right) \cdot \left(+\frac{6}{5}\right)$

x. $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{2}{6}\right)$

7. Να υπολογίσετε τα γινόμενα

i. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

ii. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

iii. $(-4) \cdot (+9) \cdot (-5)$

iv. $(-13) \cdot (+9) \cdot (-2)$

v. $(+3) \cdot (-9) \cdot (-5)$

vi. $(+3) \cdot (+2) \cdot (-12)$

vii. $(-15) \cdot 0 \cdot (+9)$

viii. $(+7) \cdot (+12) \cdot (+4)$

ix. $(-3) \cdot (-9) \cdot (-8)$

x. $(-54) \cdot (+60) \cdot 0$

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i. $(+3,1) \cdot (+3,9) + (-1,2)$

ii. $(-5,3) + (-4,7) \cdot (+12)$

iii. $(-7,23) \cdot (+1,23) + (-2,22)$

iv. $(-42,6) \cdot (+5,4) + (-1,8)$

v. $(-12,5) \cdot (-12,9) - (-1,2)$

vi. $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

vii. $\left(+\frac{1}{3}\right) \cdot (+2) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$

viii. $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

ix. $\left(+\frac{4}{10}\right) \cdot \left(+\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

x. $\left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{6}{5}\right)$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-[+5 \cdot (-3)] - (-8 \cdot 4)$

ii. $(-1) \cdot (+7) - 2 \cdot (-3 - 5 + 6)$

iii. $-(12 - 31) - (-3 \cdot 8 - 4)$

iv. $-(-5 \cdot 8) - (8 \cdot 5)$

v. $-[-4 \cdot (-1)] + (-2 \cdot 7)$

- vi. $(-1 - 3 + 5 - 2) - (-8 - 4 \cdot 5)$
 vii. $(+5 - 3 \cdot 12) - (+10 \cdot 41 - 340)$
 viii. $-[(-6)(-1)(-2)(-3)] - (-36)$
 ix. $[+5,6 \cdot (-3,1)] - 3 \cdot (-5,2 + 3,4)$
 x. $-2 \cdot (+5,1 - 3,4) - 5 \cdot (-8,3 + 2,4)$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

- i. $- \{ -(-2 \cdot 5 - 9) - [6 \cdot (-5)(-9)] + 8 - 3 + 6 \}$
 ii. $-(-2 - 5) + [-4 + 6 - (4 - 8 + 7)]$
 iii. $- \{ -[-(-1)] \} \cdot (-1)$
 iv. $- \{ +[+(-1)] \} \cdot (+1)$
 v. $15 - \{ 3 \cdot [12 - 6 \cdot (5 - 1)] \} - 8$
 vi. $16 + \{ 3 \cdot [26 - 2 \cdot (8 - 3)] \} - 54$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

- i. $||+2| \cdot (-32)|$
 ii. $|(-9) \cdot (-4) - (+3) \cdot 10|$
 iii. $(-4) \cdot |-12|$
 iv. $-|-3| \cdot (-8)$
 v. $+|-12| \cdot |-9|$
 vi. $-|-6| \cdot (-|-19|)$

12. Να κάνετε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς

- | | |
|---|--|
| i. $(\alpha - 3) \cdot (\alpha + 3)$ | v. $(\alpha - 2) \cdot (\beta + 3)$ |
| ii. $(\alpha - 2) \cdot (\alpha - 2)$ | vi. $(\alpha - 5) \cdot (\alpha - 4)$ |
| iii. $(\alpha + 4) \cdot (\alpha + 4)$ | vii. $(\alpha + 2) \cdot (\beta + 3)$ |
| iv. $(-\alpha - 3) \cdot (-\alpha + 3)$ | viii. $(\alpha - 4) \cdot (\beta - 3)$ |

13. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

.	-1	$-\frac{1}{2}$	+10	+3
-2				
$\frac{3}{4}$				
$-\frac{1}{3}$				
0				

7.6 Διαίρεση ρητών αριθμών

❖ Διαίρεση ρητών αριθμών

- Για να διαιρέσουμε δυο ομόσημους ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο τους βάζουμε ο πρόσημο +.
- Για να διαιρέσουμε δυο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο τους βάζουμε το πρόσημο –.

✓ Οι παραπάνω προτάσεις συνοψίζονται στους παρακάτω κανόνες προσήμων:

$$+:+ = +$$

$$-:- = +$$

$$+:- = -$$

$$-:+ = -$$

❖ Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως διαίρεση

- Ο λόγος του α προς το β, δηλαδή το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, είναι ίσος με την διαίρεση $\alpha:\beta$
- Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να γραφτεί και σαν $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$. Δηλαδή η διαίρεση δυο ρητών αριθμών είναι ο πολλαπλασιασμός του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
- ✓ Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $(+8):(-2)$

iv. $(-15):(+3)$

ii. $(+12):(+4)$

v. $0:(-2)$

iii. $(-9):(-3)$

vi. $(-4):0$

Λύση

i. $(+8):(-2) = -4$

ii. $(+12):(+4) = +3$

iii. $(-9):(-3) = +3$

iv. $(-15):(+3) = -5$

v. $0:(-2) = 0$

vi. $(-4):0$ διαίρεση με διαιρέτη το 0 δεν ορίζεται.

2. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $\frac{+8}{-4}$

ii. $\frac{-20}{-5}$

iii. $\frac{0}{-4}$

iv. $\frac{-8}{8}$

Λύση

i. $\frac{+8}{-4} = -2$

ii. $\frac{-20}{-5} = +4$

iii. $\frac{0}{-4} = 0$

iv. $\frac{-8}{8} = -1$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $(+3):(+9)$

ii. $(-40):(-4)$

iii. $(-15):(+5)$

iv. $(-30):(+15)$

v. $(+54):(-3)$

vi. $12:(-2)$

vii. $(-51):3$

viii. $(-36):(-9)$

ix. $(-64):8$

x. $(-150):(+30)$

2. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $(+6):(-6)$

ii. $(+16):(-1)$

iii. $0:(-4)$

iv. $(-8):(-8)$

v. $12:(-12)$

vi. $(-9):1$

vii. $(+3):(-3)$

viii. $0:(+9)$

ix. $(-9):(+9)$

x. $(-3):3$

3. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $-4,2:2$

ii. $-4,8:(-1,6)$

iii. $+18,6:(-6,2)$

iv. $-4,2:(-4,2)$

v. $-7,5:(-75)$

vi. $-\frac{1}{2}:(-\frac{3}{2})$

vii. $(-\frac{1}{3}):(-3)$

viii. $\frac{3}{4}:(-\frac{4}{3})$

ix. $\frac{3}{3}:(-\frac{1}{2})$

x. $(-\frac{4}{7}):(-\frac{3}{5})$

4. Να κάνετε τις διαιρέσεις

i. $(+\frac{3}{5}):(-2)$

ii. $\frac{3}{4}:(-4)$

iii. $(+\frac{1}{2}):(-\frac{5}{3})$

iv. $(-\frac{2}{3}):(-\frac{4}{7})$

v. $(-\frac{5}{4}):(-\frac{6}{7})$

vi. $(-\frac{12}{5}):(+\frac{1}{3})$

vii. $(-\frac{4}{9}):(+\frac{8}{3})$

viii. $(+\frac{1}{5}):(-\frac{3}{4})$

ix. $(-\frac{4}{11}):(+\frac{6}{5})$

x. $(-\frac{1}{3}):(+\frac{2}{6})$

5. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

i. $\frac{-8}{-4}$

ii. $\frac{-9}{+3}$

iii. $\frac{-8}{-1}$

iv. $\frac{-5}{+5}$

v. $\frac{-1}{-1}$

vi. $\frac{-15}{-3}$

vii. $\frac{+8}{-4}$

viii. $\frac{8}{-2}$

ix. $\frac{-18}{-9}$

x. $\frac{0}{-4}$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i. $(+3,1):(-3,1) \cdot (-1,2)$

ii. $(-5,5):(-5) \cdot (+12)$

iii. $(-7,2):(+2) \cdot (-2)$

iv. $-2 + 2: (-2)$

v. $(-12,5) \cdot (-5) - (-1,2)$

vi. $\left(-\frac{3}{4}\right): \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

vii. $\left(+\frac{1}{3}\right): (+2): \left(-\frac{5}{3}\right)$

viii. $\left(-\frac{3}{7}\right): \left(-\frac{1}{4}\right): \left(-\frac{1}{3}\right)$

ix. $\left(+\frac{4}{10}\right) \cdot \left(+\frac{1}{10}\right): \left(-\frac{4}{100}\right)$

x. $\left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right): \left(+\frac{6}{5}\right)$

7. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-[+5 \cdot (-3)]: 15 - (-8: 4)$

ii. $(-1) \cdot (+7): (-7) - 2: (-3 - 5 + 6)$

iii. $-(12 - 31): (-1) - (-3 \cdot 8 - 4): (-2)$

iv. $-(-5 \cdot 8): (-4) - (8 \cdot 5): 4$

v. $-[-4: (-1)] + (-2: (-1))$

vi. $[-1 - 3 + 8: (-2)] - (-8 - 4 \cdot 5): (-7)$

vii. $(+5 - 12: 3) - [+10: (-2) - 340]$

viii. $-[(-6): (-1): (-2) \cdot (-3)] - (-6)$

ix. $[+5, 6: (-2, 8)] - 18: (-5, 2 - 3, 8)$

x. $-2 \cdot (-5, 1: 1, 7) - 25 \cdot (-8, 3 + 3, 3)$

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $-\{ -(-20: 5 - 9) - [6 \cdot (-5): (-10)] + 8 - 3 + 6 \}$

ii. $-49: (-2 - 5) + [-4 + 6 - 33: (4 - 8 + 7)]$

iii. $+ \{ -[+(-1)] \}: (-1)$

iv. $- \{ -[+(-1)] \}: (+1)$

v. $15 - \{30 : [12 - 6 : (4 - 1)]\} - 8$

vi. $4 : \{56 : [26 - 2 \cdot (8 : 4 - 3)]\} - 2$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $||+32| : (-32)|$

ii. $|(-9) : (-3) - (+3) \div 3|$

iii. $(-48) : |-12|$

iv. $-|-32| : (-8)$

v. $+|-12| \cdot |-3|$

vi. $-|-76| \cdot (-|-19|)$

10. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα κάνοντας της διαίρεση του αριθμού της στήλης δια τον αριθμό της γραμμής όπως στο παράδειγμα.

:	-1	$-\frac{1}{2}$	+2	+4
-8	$(-8) : (-1) = 8$			
$\frac{3}{4}$				
$-\frac{1}{3}$				
0				

7.7 Δεκαδική μορφή δεκαδικών αριθμών

❖ Περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί

- Οι δεκαδικοί αριθμοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, ένα τμήμα των οποίων επαναλαμβάνεται συνέχεια λέγονται περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί. Το τμήμα των δεκαδικών ψηφίων που επαναλαμβάνεται λέγεται περίοδος.
- ✓ Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί σε μορφή κλάσματος με τους όρους του να είναι ακέραιοι.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να κάνετε την διαίρεση $10:3$ πως μπορούμε να γράψουμε το πηλίκο με την βοήθεια του περιοδικού δεκαδικού αριθμού;

Λύση

Αν κάνουμε την διαίρεση $10:3 = 3,33333 \dots$

Άρα μπορούμε να γράψουμε $10:3 = 3,\bar{3}$

2. Να μετατρέψετε σε κλασματική μορφή τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό $3,\bar{14}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι στον αριθμό $3,\bar{14}$ τα επαναλαμβανόμενα ψηφία (14) αρχίζουν αμέσως μετά την υποδιαστολή. Έστω $x = 3,\bar{14}$

Άρα έχουμε $x = 3,14141414 \dots$ ή $100 \cdot x = 314,141414 \dots$ ή

$$100 \cdot x = 314 + 0,141414 \text{ ή}$$

$$100x = 314 + \overbrace{x - 3} \text{ ή}$$

$$100x - x = 314 - 3 \text{ ή}$$

$$99x = 311 \text{ ή}$$

$$x = 311:99 \text{ ή}$$

$$x = \frac{311}{99}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε την δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών

i. $\frac{33}{10}$

ii. $\frac{-3}{10}$

iii. $\frac{25}{-10}$

iv. $\frac{-67}{100}$

v. $\frac{43}{-100}$

vi. $\frac{-83}{-100}$

vii. $\frac{2.533}{1.000}$

viii. $\frac{-6.413}{10.000}$

ix. $\frac{-4.671}{-1.000}$

x. $\frac{-33}{1.000}$

2. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω ρητούς αριθμούς.

i. $\frac{2}{5}$

ii. $\frac{-9}{2}$

iii. $\frac{-54}{25}$

iv. $\frac{-6}{20}$

v. $\frac{-23}{-50}$

vi. $\frac{-33}{300}$

vii. $\frac{-45}{500}$

viii. $\frac{-42}{-600}$

ix. $\frac{16}{3}$

x. $\frac{15}{11}$

3. Να μετατρέψετε σε κλάσματα τους παρακάτω περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

i. $1, \overline{2}$

ii. $5, \overline{3}$

iii. $0, \overline{2}$

iv. $1, \overline{12}$

v. $0, \overline{15}$

vi. $1, \overline{83}$

vii. $4, \overline{56}$

viii. $3, \overline{12}$

4. Να μετατρέψετε σε κλάσματα τους παρακάτω περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

i. $1, \overline{12}$

ii. $3, \overline{122}$

iii. $0, \overline{02}$

iv. $5, \overline{132}$

v. $0, \overline{122}$

vi. $1, \overline{554}$

vii. $4, \overline{123}$

viii. $6, \overline{152}$

7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

❖ Ορισμός δύναμης ρητού με εκθέτη φυσικό

- Το γινόμενο $\overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}^{n-\text{παράγοντες}}$ με α ρητό αριθμό διάφορο του μηδέν και n φυσικό μεγαλύτερο του 1 ($n > 1$) συμβολίζεται α^n και λέγεται δύναμη με βάση α και εκθέτη το φυσικό αριθμό n .

- ✓ Για $n = 1$ ισχύει $\alpha^1 = \alpha$
- ✓ Η δύναμη α^n διαβάζεται νιοστή δύναμη του α
- ✓ Η δύναμη α^2 διαβάζεται τετράγωνο του α ή α στο τετράγωνο
- ✓ Η δύναμη α^3 διαβάζεται κύβος του α ή α στο κύβο.

❖ Πρόσημο δύναμης

- Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha^n > 0$
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
Αν $\alpha < 0$ και n άρτιος τότε $\alpha^n > 0$
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
Αν $\alpha < 0$ και n περιττός τότε $\alpha^n < 0$

❖ Ιδιότητες δυνάμεων

- Δυνάμεις με ίδια βάση.
- Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών. Δηλαδή $\alpha^n \cdot \alpha^\mu = \alpha^{n+\mu}$
 - Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου. Δηλαδή $\alpha^n : \alpha^\mu = \alpha^{n-\mu}$ ή $\frac{\alpha^n}{\alpha^\mu} = \alpha^{n-\mu}$
- Δυνάμεις με ίδιο εκθέτη
- Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.
Δηλαδή $(\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n$
 - Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε όρο του πηλίκου στον εκθέτη αυτό. Δηλαδή $\alpha^n : \alpha^\mu = \alpha^{n-\mu}$ ή $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$

➤ Δύναμη σε δύναμη

- Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών. Δηλαδή $(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu}$

✓ Συνοψίζοντας όλες τις ιδιότητες έχουμε

$$a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu}$$

$$a^v : a^\mu = a^{v-\mu} \text{ ή } \frac{a^v}{a^\mu} = a^{v-\mu}$$

$$a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu}$$

$$a^v : a^\mu = a^{v-\mu} \text{ ή } \left(\frac{a}{\beta}\right)^v = \frac{a^v}{\beta^v}$$

$$(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu}$$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

i. $(-2)^2$

ii. -2^2

iii. $(-2)^3$

iv. -2^3

v. $(-5)^3$

vi. $(-1)^4$

vii. $-(-3)^3$

viii. $(3^2)^2$

Λύση

i. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

ii. $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$

iii. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

iv. $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

v. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

vi. $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

vii. $-(-3)^3 = -(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -(-27) = +27$

viii. $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$

2. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω δυνάμεις

i. $(-2)^3 \cdot (-2)^4$

ii. $5^6 \cdot 5^4$

iii. $7^{10} : 7^4$

iv. $\frac{6^8}{6^5}$

v. $5^3 \cdot 4^3$

vi. $12^6 : 4^6$

vii. $\frac{15^4}{3^4}$

viii. $(3^4)^6$

Λύση

- i. $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7$
- ii. $5^6 \cdot 5^4 = 5^{6+4} = 5^{10}$
- iii. $7^{10} : 7^4 = 7^{10-4} = 7^6$
- iv. $\frac{6^8}{6^5} = 6^{8-5} = 6^3$
- v. $5^3 \cdot 4^3 = (5 \cdot 4)^3 = 20^3$
- vi. $12^6 : 4^6 = (12 : 4)^6 = 3^6$
- vii. $\frac{15^4}{3^4} = \left(\frac{15}{3}\right)^4 = 5^4$
- viii. $(3^4)^6 = 3^{4 \cdot 6} = 3^{24}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης.

$$A = 3 \cdot (-3)^3 - [(-24)^5 : 12^5] : 8 + [(-5)^{12} : (-5)^{10} + 1^{2004}]$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot (-3)^3 - [(-24)^5 : 12^5] : 8 + [(-5)^{12} : (-5)^{10} + 1^{2004}] \\ &= 3 \cdot (-27) - [(-24) : 12]^5 : 8 + [(-5)^{12-10} + 1] \\ &= -81 - [(-2)^5] : 8 + [(-5)^2 + 1] = -81 - (-32) : 8 + (25 + 1) \\ &= -81 - (-4) + 26 \\ &= -81 + 4 + 26 \\ &= -81 + 30 \\ &= -51 \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|---------------|----------------|
| i. 2^5 | v. $(-5)^2$ |
| ii. 3^4 | vi. $(-10)^3$ |
| iii. $(-3)^2$ | vii. $(-10)^4$ |
| iv. $(-3)^3$ | viii. $(-2)^7$ |

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|---------------|-----------------|
| i. $(-2)^3$ | v. $(-1)^{100}$ |
| ii. -2^3 | vi. $(-1)^{99}$ |
| iii. $(-2)^4$ | vii. -10^3 |
| iv. -2^4 | viii. $(-10)^3$ |

3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|----------------|---------------|
| i. $-(-10)^2$ | iv. $-(-5)^3$ |
| ii. $-(-3)^3$ | v. $-(-2)^6$ |
| iii. $-(-6)^2$ | vi. $-(-2)^5$ |

4. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| i. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ | v. $\left(-\frac{3}{10}\right)^4$ |
| ii. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ | vi. $\left(\frac{1}{10}\right)^6$ |
| iii. $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ | vii. $- \left(-\frac{2}{5}\right)^4$ |
| iv. $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$ | viii. $- \left(-\frac{1}{3}\right)^3$ |

5. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| i. $2^3 \cdot 2^4$ | v. $6^3 \cdot 6^4$ |
| ii. $(-5)^3 \cdot (-5)^4$ | vi. $-2^3 \cdot (-2)^5$ |
| iii. $4^3 \cdot 4^6$ | vii. $(-3)^8 \cdot 3^4$ |
| iv. $(-2)^3 \cdot (-2)^5$ | viii. $(-1)^{10} \cdot 1^{30}$ |

6. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| i. $2^6 : 2^4$ | v. $6^8 : 6^4$ |
| ii. $(-5)^7 : (-5)^4$ | vi. $-2^6 : (-2)^5$ |
| iii. $4^{10} : 4^6$ | vii. $(-3)^8 : 3^4$ |
| iv. $(-2)^8 : (-2)^5$ | viii. $(-1)^{50} : 1^{30}$ |

7. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

i. $3^4 \cdot 2^4$

vi. $(-6)^{12} : 2^{12}$

ii. $5^2 \cdot 2^2$

vii. $(-8)^6 : (-4)^6$

iii. $(-3)^4 \cdot 5^4$

viii. $10^7 : 5^7$

iv. $6^3 \cdot (-3)^3$

ix. $((-5)^6)^3$

v. $(-5)^4 \cdot (-4)^4$

x. $((-2)^3)^3$

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)^1$

ii. $-1^5 + (-1)^3 + (-1)^2 - (-1)$

iii. $10^3 + 10^2 + 10^1$

iv. $(-3)^2 + (-3)^3$

v. $-2^4 + (-2)^3 - (-2)^2$

vi. $-(-3)^3 - 3^3 + 3^2 - (-3)^2$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $5^6 : 5^4$

v. $\frac{(-3)^7}{(-3)^5}$

ii. $(-3)^3 \cdot (-3)^2$

vi. $-\frac{(-2)^{10}}{(-2)^6}$

iii. $12^4 : (-4)^4$

vii. $\frac{66^2}{11^2}$

iv. $\frac{6^7}{6^5}$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $2,5^3 \cdot 4^3$

vii. $\left(\frac{2}{15}\right)^4 : \left(\frac{4}{3}\right)^4$

ii. $36^4 : 9^4$

viii. $\frac{2^6 \cdot 2^7}{2^{10}}$

iii. $54^3 : 9^3$

iv. $\frac{(-48)^4}{12^4}$

ix. $\frac{(-2)^{11} \cdot (-2)^6}{(-2)^{15}}$

v. $\left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{9}{6}\right)^5$

x. $\frac{(-4)^6 \cdot (-4)^7}{(-4)^9 \cdot (-4)^3}$

vi. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $\frac{3^3 \cdot 10^3}{6^3}$

iv. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 \cdot 5^5$

ii. $\frac{5^3 \cdot 4^3}{10^3}$

v. $\left(-\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^3 \cdot 3^3$

iii. $\frac{9^4 \cdot 8^4}{3^4 \cdot 4^4}$

vi. $\frac{(2^4)^6}{2^5 \cdot 2^{12}}$

$$\text{vii. } \frac{(5^3)^7 \cdot (5^2)^4}{(5^7)^4}$$

$$\text{viii. } (2^5)^4 : [(2^3)^4 \cdot 2^3]$$

$$\text{ix. } \frac{(-4)^5 \cdot 4^7}{(-4)^5 \cdot 4^3}$$

$$\text{x. } \frac{(-2^3)^4 \cdot (-2^2)^5}{(-2^5) \cdot 2^2}$$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

$$\text{i. } 5 \cdot (-2)^4 + (-2)^3 - (-1)^6$$

$$\text{ii. } 4 \cdot (-3)^3 - (-2)^6 + 3 \cdot 2^2$$

$$\text{iii. } -(-5)^2 + (-2)^3 - 3 \cdot 2^5$$

$$\text{iv. } (-3)^3 + (-2)^4 - (-2)^2 - (-3)^2$$

$$\text{v. } [(2 \cdot 7 - 2^3)^4 + 3^2] : 5 - (8 - 11)^2 + (-1)^7$$

$$\text{vi. } [(-4)^3 : (-2)^5 + 3^3 : (-3) + (-2)^3] : \frac{(5^3)^7}{(5^4)^5}$$

$$\text{vii. } \frac{4^{10}}{4^3 \cdot 4^4} : \left[-2^5 : \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{viii. } \left\{ 4^2 + 3 \cdot (-1)^{10} + \left[2^2 : \frac{1}{2} \right] \cdot 4^2 \right\} : (-1 - 2^2)$$

7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

❖ Δύναμη με εκθέτη το μηδέν

- Η δύναμη κάθε ρητού αριθμού διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με τη μονάδα. Δηλαδή $a^0 = 1$

✓ Η δύναμη 0^0 δεν ορίζεται.

❖ Δύναμη με εκθέτη αρνητικό αριθμό

- Η δύναμη κάθε αριθμού διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό αριθμό είναι ίση με το κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή η δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη. Δηλαδή $a^{-ν} = \frac{1}{a^ν}$

✓ Ισχύει επίσης $\left(\frac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\frac{β}{α}\right)^ν$

✓ Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο ισχύουν όπως οι ιδιότητες που μάθαμε με εκθέτη φυσικό.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

i. $(-4)^0$

iv. 10^{-2}

ii. 0^0

v. $(-10)^{-3}$

iii. $(-2)^{-4}$

vi. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

Λύση

i. $(-4)^0 = 1$

ii. 0^0 Δεν ορίζεται

iii. $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

iv. $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

v. $(-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = \frac{1}{-1000} = -0,001$

vi. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

i. $\frac{5^4 \cdot 5^{-6}}{5}$

ii. $\frac{(2^{-6})^3 \cdot (2^2)^3}{(2^{-4})^2 \cdot 2}$

Λύση

i. $\frac{5^4 \cdot 5^{-6}}{5} = \frac{5^{4-6}}{5} = \frac{5^{-2}}{5} = 5^{-2-1} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

ii. $\frac{(2^{-6})^3 \cdot (2^2)^3}{(2^{-4})^2 \cdot 2} = \frac{2^{-6 \cdot 3} \cdot 2^{2 \cdot 3}}{2^{-4 \cdot 2} \cdot 2} = \frac{2^{-18} \cdot 2^6}{2^{-8} \cdot 2} = \frac{2^{-18+6}}{2^{-8+1}} = \frac{2^{-12}}{2^{-7}} = 2^{-12-(-7)} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|------------------|-------------------|
| i. 2^{-5} | v. $(-5)^{-2}$ |
| ii. 3^{-4} | vi. $(-10)^{-3}$ |
| iii. $(-3)^{-2}$ | vii. $(-10)^{-4}$ |
| iv. $(-3)^{-3}$ | viii. $(-2)^{-7}$ |

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|------------------|--------------------|
| i. $(-2)^{-3}$ | v. $(-1)^0$ |
| ii. -2^{-3} | vi. $(-1)^{-9}$ |
| iii. $(-2)^{-4}$ | vii. -10^{-3} |
| iv. -2^{-4} | viii. $(-10)^{-3}$ |

3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|------------------|------------------|
| i. $-(-10)^{-2}$ | iv. $-(-5)^{-3}$ |
| ii. $-(-3)^0$ | v. $-(-2)^0$ |
| iii. $-(-6)^0$ | vi. $-(-2)^{-5}$ |

4. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

- | | |
|---------------------------------------|--|
| i. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ | v. $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-4}$ |
| ii. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ | vi. $\left(\frac{1}{10}\right)^{-6}$ |
| iii. $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ | vii. $- \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$ |
| iv. $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}$ | viii. $- \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ |

5. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| i. $2^{-3} \cdot 2^4$ | v. $6^3 \cdot 6^{-4}$ |
| ii. $(-5)^{-3} : (-5)^{-4}$ | vi. $-2^{-3} \cdot (-2)^5$ |
| iii. $4^3 \cdot 4^{-6}$ | vii. $(-3)^8 \cdot 3^4$ |
| iv. $(-2)^{-3} \cdot (-2)^5$ | viii. $(-1)^{-10} \cdot 1^{30}$ |

6. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| i. $2^{-6} : 2^4$ | iv. $(-2)^5 : (-2)^{-5}$ |
| ii. $(-5)^{-7} : (-5)^7$ | v. $6^{-8} : 6^{-4}$ |
| iii. $4^{-10} : 4^6$ | vi. $-2^6 : (-2)^{-5}$ |

vii. $(-3)^{-8} : 3^4$

viii. $(-1)^{50} : 1^{-30}$

7. Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

i. $3^{-4} \cdot 2^{-4}$

vi. $(-6)^{-12} : 2^{-12}$

ii. $5^{-2} \cdot 2^{-2}$

vii. $(-8)^{-6} : (-4)^{-6}$

iii. $(-3)^{-4} \cdot 5^{-4}$

viii. $10^{-7} : 5^{-7}$

iv. $6^{-3} \cdot (-3)^{-3}$

ix. $((-5)^{-6})^3$

v. $(-5)^{-4} \cdot (-4)^4$

x. $((-2)^3)^{-3}$

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $(-1)^{-3} + (-1)^2 + (-1)^0$

ii. $-1^5 + (-1)^{-3} + (-1)^{-2} - (-1)$

iii. $10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2}$

iv. $(-3)^{-2} + (-3)^{-3}$

v. $-2^{-4} + (-2)^{-3} - (-2)^{-2}$

vi. $-(-3)^{-3} - 3^{-3} + 3^{-2} - (-3)^{-2}$

9. Να γράψετε ως δυνάμεις του 10 τους παρακάτω αριθμούς

i. 0,01

iv. 1

ii. 1.000.000

v. $\frac{1}{100.000}$

iii. 0,000001

vi. $\frac{1}{1.000.000.000}$

10. Να γράψετε ως δυνάμεις του 10 τα αποτελέσματα των παρακάτω παραστάσεων

i. $10^{-4} \cdot 10^2$

vi. $10^5 \cdot 0,00001$

ii. $10^{-3} \cdot 10^{-6}$

vii. $10^{-3} \cdot 1.000.000$

iii. $10^{-4} \cdot 10^4$

viii. $10^4 : 0,001$

iv. $(10^{-3})^{-5}$

ix. $(0,001)^3$

v. $10^3 \cdot 0,0001$

x. $(0,00001)^{-2}$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^{-3} \cdot 3^{-3}$

iv. $(2^5)^4 : [(2^3)^4 \cdot 2^{10}]$

ii. $\frac{(2^4)^6}{2^{15} \cdot 2^{12}}$

v. $\frac{(-4)^{5 \cdot 4^7}}{(-4)^{7 \cdot 4^9}}$

iii. $\frac{(5^3)^7 \cdot (5^6)^4}{(5^7)^4}$

vi. $\frac{(-2^3)^{-4} \cdot (-2^2)^5}{2^5 \cdot 2^{-2}}$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $5^{-6} : 5^{-4}$

ii. $(-3)^3 \cdot (-3)^{-2}$

$$\text{iii. } 12^{-4} : (-4)^{-4}$$

$$\text{iv. } \frac{6^{-7}}{6^{-5}}$$

$$\text{v. } \frac{(-3)^{-7}}{(-3)^{-5}}$$

$$\text{vi. } -\frac{(-2)^{-10}}{(-2)^6}$$

$$\text{vii. } \frac{66^{-2}}{11^{-2}}$$

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

$$\text{i. } [(2^{-3}) + (2^{-2})^2 + (2^{-1})^2] : \left(\frac{4^2}{2 \cdot 7}\right)^{-1}$$

$$\text{ii. } \left[\frac{(-3^3)^{-4}}{(3^{-7})^2} + \frac{(6^3)^{-2}}{(12^{-1})^6}\right] : (6^8 \cdot 6^{-6} - 5^9 : 5^7)$$

$$\text{iii. } 5^2 + \frac{1}{2^3} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^{2004}$$

$$\text{iv. } [8 \cdot 2^4 \cdot (-2)^{-1}] : (2^4 \cdot 2^2 \cdot 12^0)$$

$$\text{v. } 5^2 \cdot 2(-3)^{-3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot (-3)^4\right]^2$$

$$\text{vi. } \left[\frac{1}{3} \cdot (-3)^2\right]^{-2} : \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)\right]^2$$

7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

- ❖ Τυποποιημένη μορφή πολύ μεγάλων αριθμών.
 - Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός αριθμού α με μια δύναμη του 10. Δηλαδή στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$. Ο αριθμός α είναι ένα δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10. Η μορφή αυτή λέγεται τυποποιημένη μορφή αριθμού.
- ❖ Τυποποιημένη μορφή πολύ μικρών αριθμών.
 - Ένας πολύ μικρός αριθμός μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός αριθμού α με μια δύναμη του 10. Δηλαδή στη μορφή $\alpha \cdot 10^{-\nu}$. Ο αριθμός α είναι ένα δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10. Η μορφή αυτή λέγεται τυποποιημένη μορφή αριθμού.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς

- i. 540.000
- ii. $1.254 \cdot 10^6$
- iii. 0,0000013
- iv. $0,0043 \cdot 10^{-4}$

Λύση

- i. $540.000 = 5,4 \cdot 10^5$
- ii. $1.254 \cdot 10^6 = 1.254.000.000 = 1,254 \cdot 10^9$
- iii. $0,0000013 = 1,3 \cdot 10^{-6}$
- iv. $0,0043 \cdot 10^{-4} = 0,00000043 = 4,3 \cdot 10^{-7}$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς

- | | |
|----------------|-------------------|
| i. 20.000 | v. 63.210.000 |
| ii. 720.000 | vi. 1.343.420.000 |
| iii. 9.810.000 | vii. 644.320.000 |
| iv. 2.2340.000 | viii. 230.000 |

2. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς

- | | |
|---------------|-----------------|
| i. 0,0003 | v. 0,00000023 |
| ii. 0,000218 | vi. 0,0000343 |
| iii. 0,000003 | vii. 0,00000986 |
| iv. 0,0302 | viii. 0,20000 |

3. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| i. $2 \cdot 10^3$ | v. $6,43 \cdot 10^8$ |
| ii. $5,4 \cdot 10^{-3}$ | vi. $234.543 \cdot 10^{-5}$ |
| iii. $2,1 \cdot 10^2$ | vii. $123 \cdot 10^{-6}$ |
| iv. $0,32 \cdot 10^5$ | viii. $25.650 \cdot 10^{-5}$ |

4. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| i. $4 \cdot 10^3$ | v. $0,0012 \cdot 10^5$ |
| ii. $3,76 \cdot 10^3$ | vi. $0,4423 \cdot 10^8$ |
| iii. $6,4 \cdot 10^3$ | vii. $2,542 \cdot 10^4$ |
| iv. $3,21 \cdot 10^6$ | viii. $1,423 \cdot 10^6$ |

5. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| i. $34.400 \cdot 10^{-6}$ | v. $784.000 \cdot 10^{-6}$ |
| ii. $2.543.000 \cdot 10^{-9}$ | vi. $443 \cdot 10^{-5}$ |
| iii. $1.457.000 \cdot 10^{-5}$ | vii. $4,64 \cdot 10^{-7}$ |
| iv. $457.800 \cdot 10^{-3}$ | viii. $445.750 \cdot 10^{-6}$ |

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Β' ΜΕΡΟΣ

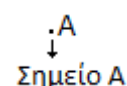
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο – Βασικές Γεωμετρικές έννοιες

Β 1.1 Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία - Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

❖ Το σημείο

- Η άκρη ενός μολυβιού, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια ενός σημείου.

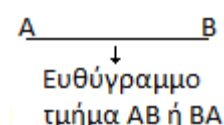
- ✓ Τα σημεία τα παριστάνουμε με μια τελεία και τα ονομάζουμε χρησιμοποιώντας ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου.



❖ Ευθύγραμμο τμήμα

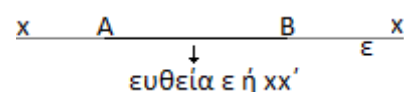
- Μια τεντωμένη κλωστή με άκρα A και B μας δίνει την εικόνα της έννοιας του ευθύγραμμου τμήματος AB.

- ✓ Τα σημεία A και B είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος
- ✓ Λέμε ότι τα σημεία A και B ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα.
- ✓ Για να ονομάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα χρησιμοποιούμε τα γράμματα των άκρων χωρίς να έχει σημασία η σειρά που τα διαβάζουμε AB ή BA.
- ✓ Για να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα παίρνουμε δυο σημεία A και B και τα ενώνουμε με χάρακα (κανόνα).



❖ Ευθεία

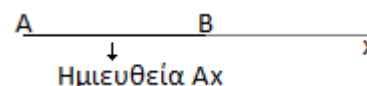
- Εάν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB απεριόριστα και προς τα δυο άκρα του τότε το νέο σχήμα που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος λέγεται ευθεία.



- ✓ Την ευθεία την συμβολίζουμε με ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτου. π.χ. (ε ή ζ) ή με δύο μικρά γράμματα της αλφαβήτου. π.χ. (xx' ή yy')
- ✓ Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
- ✓ Από δυο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.

❖ Ημιευθεία

- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μόνο προς το ένα άκρο του



π.χ. το Β τότε το νέο σχήμα που έχει αρχή το Α αλλά δεν έχει τέλος λέγεται ημιευθεία.

- ✓ Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό γράμμα που δηλώνει το τέλος.
- ✓ Εάν Ο είναι σημείο της ευθείας $x\chi'$ τότε με αρχή το Ο ορίζονται δυο ημιευθείες $O\chi$ και $O\chi'$ οι οποίες λέγονται αντικείμενες.

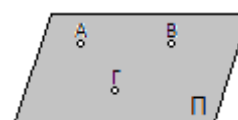
❖ Επίπεδο

- Επίπεδο είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

- ✓ Ένα επίπεδο εκτείνεται απεριόριστα
- ✓ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα η δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.
- ✓ Κάθε ευθεία χωρίζει το χώρο σε δυο μέρη, ώστε αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα στο μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.
- ✓ Η ονομασία του επιπέδου δίνεται με ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου. π.χ. Π, Ρ, Σ κ.λ.π.

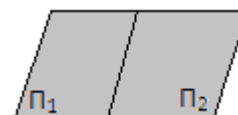


Επίπεδο Π



❖ Ημιεπίπεδο

- Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα.



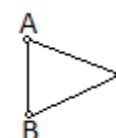
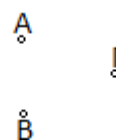
Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ του διπλανού σχήματος. Να φτιάξετε και να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν. Πόσες ευθείες διέρχονται από το σημείο Α; Πόσες ευθείες διέρχονται από τα σημεία Α και Β;

Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται είναι τα ΑΒ ή ΒΑ, ΒΓ ή ΓΒ και ΑΓ ή ΓΑ.

Από το σημείο Α διέρχονται άπειρες ευθείες. Από τα σημεία Α και Β διέρχεται μόνο μια ευθεία.

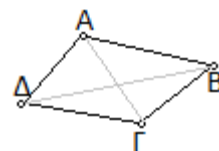


2. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και στη συνέχεια να ονομάσετε

- i. Τις κορυφές του
- ii. Τις πλευρές του
- iii. Τις διαγωνίους του

Λύση

- i. Οι κορυφές του είναι η κορυφή Α , η κορυφή Β , η κορυφή Γ και η κορυφή Δ.
- ii. Οι πλευρές του είναι οι ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ και ΔΑ
- iii. Οι διαγώνιοι του είναι οι ΑΓ , ΒΔ .



Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να σχεδιάσετε 3 σημεία A , B , Γ μη συνευθειακά. Να ονομάσετε και να σχεδιάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται
2. Να σχεδιάσετε ένα πεντάπλευρο ABΓΔ και στην συνέχεια να ονομάσετε
 - i. Τις κορυφές του
 - ii. Τις πλευρές του
 - iii. Τις διαγωνίους του.

3. Να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στο σχήμα.

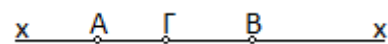


4. Να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στο σχήμα



5. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος

- i. Να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται



- ii. Να ονομάσετε όλες τις ημιευθείες που ορίζονται

6. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος

- i. Να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται



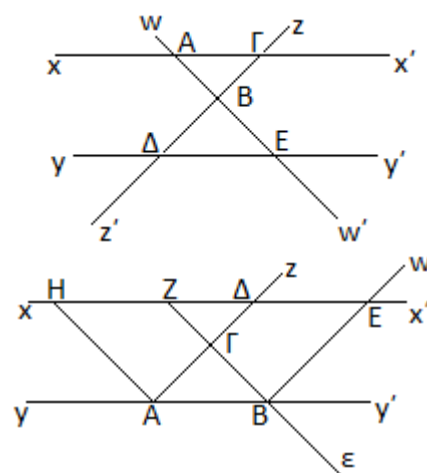
- ii. Να ονομάσετε όλες τις ημιευθείες που ορίζονται

- iii. Ποιες ημιευθείες είναι αντικείμενες;

- iv. Ποιες ημιευθείες είναι αντικείμενες;

7. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα , όλες τις ημιευθείες και όλες τις ευθείες που ορίζονται στο διπλανό σχήμα.

Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα , όλες τις ημιευθείες και όλες τις ευθείες που ορίζονται στο διπλανό σχήμα.

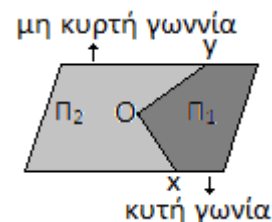


Β 1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα –

Ίσα σχήματα

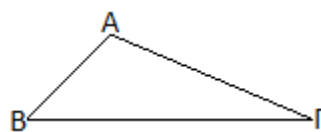
❖ Ορισμός γωνίας

- Σε ένα επίπεδο αν σχεδιάσουμε δυο ημιευθείες με κοινή αρχή τότε σχηματίζονται δυο περιοχές Π_1 και Π_2 . Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται γωνία.
- Η μικρότερη περιοχή Π_1 λέγεται κυρτή γωνία ενώ η μεγαλύτερη περιοχή Π_2 λέγεται μη κυρτή γωνία.
- Το σημείο Ο λέγεται κορυφή της γωνίας και οι ημιευθείες Οx και Οy λέγονται πλευρές της γωνίας.
- Τις γωνίες που σχηματίζονται τις συμβολίζουμε με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ ή $\hat{O}$ ή με ένα μικρό γράμμα π.χ. $\hat{\omega}$.



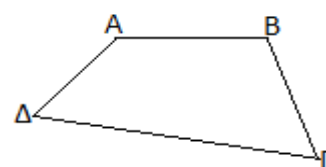
❖ Γωνίες τριγώνου

- Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις γωνίες, τις $\hat{A}$, $\hat{B}$ και τη $\hat{\Gamma}$.
 - ✓ Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ έχει πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ.
 - ✓ Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ λέμε ότι περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
 - ✓ Η πλευρά ΒΓ είναι απέναντι από την γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ ενώ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ λέμε ότι είναι προσκείμενες της πλευράς ΒΓ.



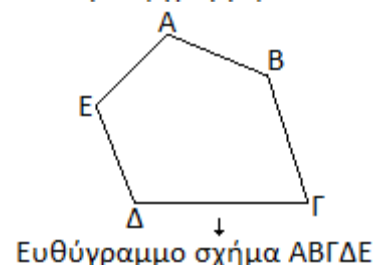
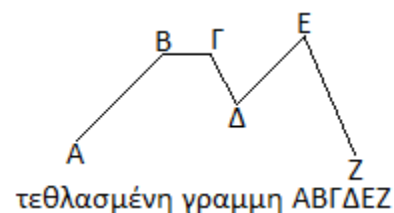
❖ Γωνίες τετραπλεύρου

- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τέσσερις γωνίες, που κάθε μια τους περιέχει το τετράπλευρο. Οι γωνίες αυτές είναι οι $\Delta\hat{A}B$, $A\hat{B}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}\Delta$, $\Gamma\hat{\Delta}A$ ή ποιο απλά $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$.

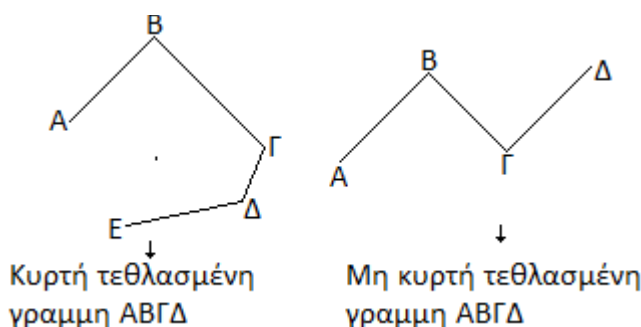


❖ Ευθύγραμμα σχήματα

- Τεθλασμένη γραμμή είναι μια πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια γραμμή.



- Ευθύγραμμο σχήμα λέγεται κάθε τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
- Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται κυρτή όταν η προέκταση της κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται μη κυρτή.



❖ Ίσα σχήματα

- Δυο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα αν συμπίπτουν όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.
 - ✓ Στα ίσα σχήματα τα στοιχεία που συμπίπτουν δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες λέγονται αντίστοιχα στοιχεία των σχημάτων αυτών.
 - ✓ Οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες ίσων σχημάτων είναι ίσες.

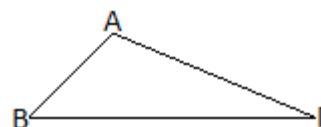
Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ

- Να ονομάσετε τις γωνίες του με τρία γράμματα
- Ποια γωνία περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΑΓ και ΒΓ;
- Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ;
- Ποιές γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ;

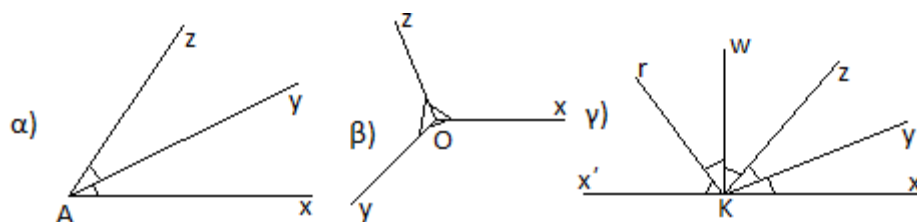
Λύση

- Οι γωνίες του τριγώνου είναι $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$
- Η γωνία που περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΑΓ και ΒΓ είναι η $\hat{C}$
- Η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ είναι η $\hat{C}$
- Οι γωνίες που είναι προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ είναι οι $\hat{A}$, $\hat{C}$

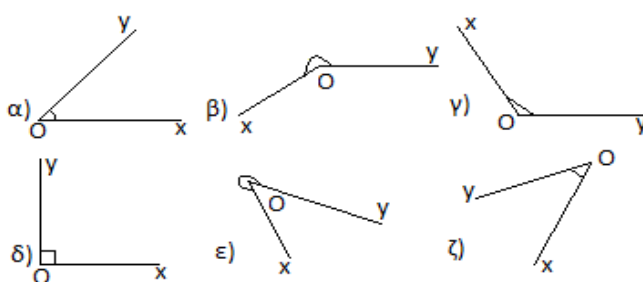


Ασκήσεις προς επίλυση

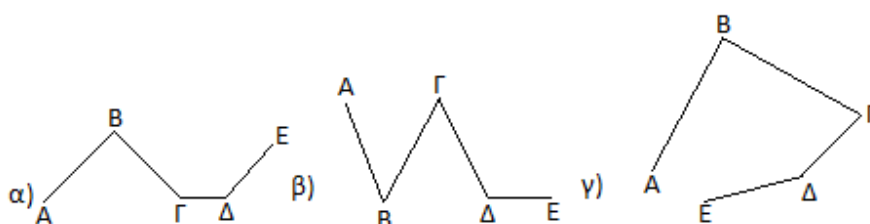
1. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ
 - i. Να ονομάσετε τις γωνίες του με τρία γράμματα
 - ii. Ποια γωνία περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΚΛ και ΛΜ;
 - iii. Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΚΜ;
 - iv. Ποιές γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΚΛ;
2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΖΗΘ
 - i. Να ονομάσετε τις γωνίες του με τρία γράμματα
 - ii. Ποια γωνία περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΖΗ και ΗΘ;
 - iii. Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΖΗ;
 - iv. Ποιές γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΖΘ;
3. Να φτιάξετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να ονομάσετε με τρία γράμματα όλες τις γωνίες του.
4. Να φτιάξετε ένα εξάγωνο και να ονομάσετε με τρία γράμματα όλες τις γωνίες του.
5. Να ονομάσετε με τρία γράμματα όλες τις γωνίες των παρακάτω σχημάτων.



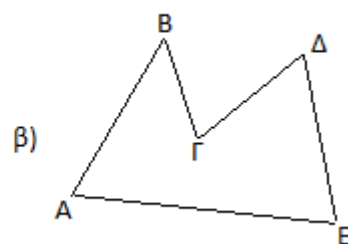
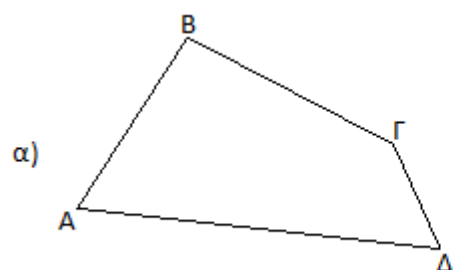
6. Ποιες από τις παρακάτω γωνίες είναι κυρτές και ποιες μη κυρτές;



7. Ποιες από τις παρακάτω τεθλασμένες γραμμές είναι κυρτές και ποιες μη κυρτές;



8. Ποια από τα παρακάτω ευθύγραμμα σχήματα είναι κυρτά και ποια μη κυρτά;



Β 1.3 Μέτρηση , σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων –

Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος .

❖ Μονάδες μέτρησης μήκους

- Η βασική μονάδα μέτρησης μήκους είναι το **μέτρο** που συμβολίζεται με 1m.
- Για να μετρήσουμε λοιπόν ένα ευθύγραμμο τμήμα χρησιμοποιούμε ένα αντίγραφο του μέτρου και κάνουμε την σύγκριση με αυτό όπως γνωρίζουμε.
- Εάν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του μέτρου επιλέγουμε για την μέτρηση του πολλαπλάσιο ή μια υποδιαίρεση του μέτρου.
- Υποδιαίρεσεις του μέτρου είναι:
 - 1 δεκατόμετρο ή παλάμη 1 dm
 - 1 εκατοστό ή πόντος 1cm
 - 1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό 1mm
 - ✓ Ισχύει ότι:

$$1dm = \frac{1}{10}m = 0,1m$$

$$1cm = 0,1dm = 0,01m$$

$$1mm = 0,1cm = 0,01dm = 0,001m$$

- Πολλαπλάσια του μέτρου είναι
 - 1 χιλιόμετρο 1km

$$1km = 1000m$$

❖ Απόσταση δυο σημείων Α και Β

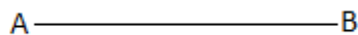
- Απόσταση δύο σημείων Α και Β λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που τα ενώνει.
 - ✓ Για να συμβολίσουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ συμβολίζουμε (ΑΒ). Πολλές φορές όμως δεν χρησιμοποιούμε την παρένθεση οπότε ο συμβολισμός ΑΒ σημαίνει δυο πράγματα , το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

❖ Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

- **Μέσο ευθύγραμμου τμήματος** λέγεται το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα μέρη.

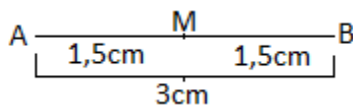
Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Δίνεται το παρακάτω ευθύγραμμο τμήμα AB. Να βρείτε το μέσο του M.



Λύση

Μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με χάρακα και βλέπουμε ότι έχει μήκος $AB = 3\text{cm}$. Για να βρούμε το μέσο του M κάνουμε την διαίρεση $3 : 2 = 1,5$ άρα το μέσο M βρίσκεται σε απόσταση 1,5cm από το A.



Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω μήκη σε m

- | | |
|------------|------------|
| i. 12dm | iv. 350dm |
| ii. 3,4km | v. 430cm |
| iii. 120cm | vi. 6700mm |

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω μήκη σε dm

- | | |
|----------|-----------|
| i. 37m | iv. 320cm |
| ii. 60cm | v. 5200mm |
| iii. 6km | vi. 3,7m |

3. Να μετατρέψετε τα παρακάτω μήκη σε cm

- | | |
|------------|-----------|
| i. 7m | iv. 0,5m |
| ii. 39dm | v. 21-mm |
| iii. 4,3km | vi. 890dm |

4. Να μετατρέψετε τα παρακάτω μήκη σε mm

- | | |
|-----------|-------------|
| i. 45m | iv. 0,078km |
| ii. 3,2dm | v. 3,232m |
| iii. 67cm | vi. 43,4dm |

5. Να μετατρέψετε τα παρακάτω μήκη σε km

- | | |
|----------------|----------------|
| i. 3200m | iv. 670.000mm |
| ii. 47.000dm | v. 69.000m |
| iii. 530.000cm | vi. 130.000 dm |

6. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα είναι τα μήκη των πλευρών ενός πενταγώνου και εμφανίζονται με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να υπολογίσετε την περίμετρο του πενταγώνου σε cm και m .

	AB	BΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΑΕ
m				3	
cm	430				
dm			42		
mm					46.200

7. Να φτιάξετε ένα σημείο K και να βρείτε 4 σημεία που απέχουν από το A 3,4cm
8. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να βρείτε τα μέσα των πλευρών του.
9. Να σχεδιάσετε μια ευθεία $x\chi'$ και πάνω σε αυτή να πάρετε ένα σημείο Α. Πάνω στην ευθεία να πάρετε δυο σημεία Β και Γ που να απέχουν 4 cm από το Α. Στη συνέχεια να βρείτε το μέσο Μ του ΑΒ και το μέσο Ν του ΜΒ.
10. Πάνω σε μια ευθεία ε να πάρετε τρία διαδοχικά σημεία Α , Β , Γ ώστε $AB= 3,3cm$, $B\Gamma = 1,5cm$. Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΓ.
11. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ = 4,8cm και να πάρετε ένα σημείο Α που να απέχει από το Κ 3cm και δεν βρίσκεται πάνω στο τμήμα ΚΛ. Στη συνέχεια να βρείτε το μέσο Μ του ΚΛ και να φτιάξετε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Μ.
12. Κάποιος θέλει να κάνει μια εγκατάσταση κεραίας σε 3 δωμάτια και αγόρασε 3 καλώδια με μήκη 12,5 m , 4.500 cm και 0,012km. Πόσα μέτρα καλώδιο αγόρασε τελικά;
13. Κάποιος αγρότης θέλει να περιφράξει το χωράφι του σχήματος ορθογωνίου με συρματόπλεγμα. Το μήκος του ορθογωνίου είναι 153m και το πλάτος του 12.300 cm. Αν αγόρασε 565m συρματόπλεγμα θα του φτάσει για να το περιφράξει όλο; Αν του φτάσει πόσα dm συρματόπλεγμα θα του περισσέψει ή αν δεν του φτάσει πόσα dm συρματόπλεγμα πρέπει να αγοράσει ακόμα;

Β 1.4 Πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων

❖ Πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων

- Για να προσθέσουμε δυο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία. Το τμήμα που ορίζεται από την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους.

❖ Αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων

- Για να αφαιρέσουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα τα τοποθετούμε με κοινή αρχή πάνω σε μια ημιευθεία. Το τμήμα που ορίζεται από το τέλος του μικρότερου και το τέλος του μεγαλύτερου είναι η διαφορά τους.

❖ Μήκος τεθλασμένης γραμμής

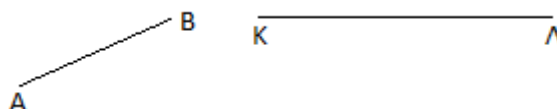
- Μια τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος ίσο με το άθροισμα των μηκών των ευθύγραμμων τμημάτων από τα οποία αποτελείται.
 - ✓ Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι μικρότερο από το μήκος οποιασδήποτε τεθλασμένης γραμμής που έχει τα ίδια άκρα με το ευθύγραμμο τμήμα.

❖ Περίμετρος ευθύγραμμου σχήματος

- Περίμετρος ενός ευθύγραμμου σχήματος είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του σχήματος.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΚΛ να βρείτε το άθροισμα των AB και ΚΛ και Την διαφορά των AB και ΚΛ.

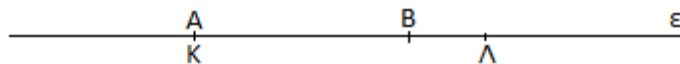


Λύση

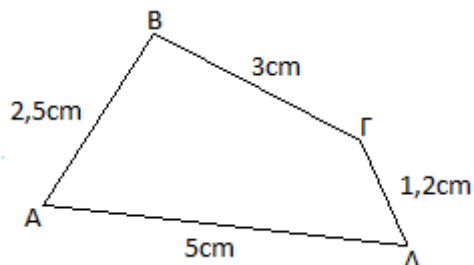
Πάνω σε μια ευθεία ϵ βάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΚΛ διαδοχικά οπότε το άθροισμα $ΚΛ + ΑΒ$ είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα KB.



Για την διαφορά τοποθετούμε τα τμήματα ΚΛ και ΑΒ με κοινή αρχή οπότε η διαφορά $ΚΛ - ΑΒ$ είναι ίση με το τμήμα ΒΛ



2. Να βρείτε την περίμετρο του παρακάτω σχήματος



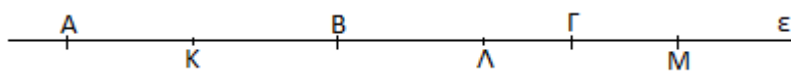
Λύση

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \text{περίμετρος} &= ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = \\ &= 2,5\text{cm} + 3\text{cm} + 1,2\text{cm} + 5\text{cm} = 11,7\text{cm} \end{aligned}$$

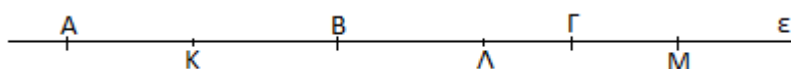
Ασκήσεις προς επίλυση

1. Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά



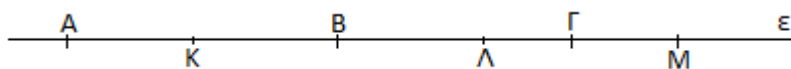
- | | |
|--|--|
| i. $AB + B\Lambda = \dots \dots$ | v. $AK + KB + B\Gamma = \dots \dots$ |
| ii. $AK + KB = \dots \dots$ | vi. $B\Lambda + \Lambda\Gamma = \dots \dots$ |
| iii. $KB + BM = \dots \dots$ | vii. $KB + B\Lambda + \Lambda\Gamma = \dots \dots$ |
| iv. $\Lambda\Lambda + \Lambda\Gamma + \Gamma\mathcal{M} = \dots \dots$ | viii. $AB + B\Gamma + \Gamma\mathcal{M} = \dots \dots$ |

2. Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά



- | | |
|---|---|
| i. $AB - AK = \dots \dots$ | iv. $K\Gamma - KB = \dots \dots$ |
| ii. $\Lambda\Lambda - AB = \dots \dots$ | v. $\Lambda\mathcal{M} - \Lambda\Gamma = \dots \dots$ |
| iii. $BM - B\Lambda = \dots \dots$ | vi. $AM - A\Gamma = \dots \dots$ |

3. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $AB = 2cm$, $KB = 2,3cm$, $B\Lambda = 2,4cm$, $\Lambda\Gamma = 0,8cm$ και $\Gamma\mathcal{M} = 1cm$. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων



- | | |
|---------------------|---------------|
| i. $\Lambda\Lambda$ | v. BM |
| ii. AM | vi. $A\Gamma$ |
| iii. $B\Gamma$ | vii. KM |
| iv. $K\Gamma$ | |

4. Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρές $AB = 3,5cm$, $B\Gamma = 2dm$, $\Gamma\Delta = 0,5m$ και $\Delta A = 230mm$ να βρείτε την περίμετρο του σε cm και dm.
5. Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρές $AB = 3,5cm$, $B\Gamma = 2dm$, $\Gamma\Delta = 0,5m$ και $\Delta A = 230mm$ να βρείτε την περίμετρο του σε cm και dm.
6. Η περίμετρος ενός τριγώνου ισούται με $12,5m$. Αν $AB = 27dm$ και $B\Gamma = 670cm$ να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ σε m και σε cm.
7. Να βρεις το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = 12dm$, $B\Gamma = 3,5m$, $\Gamma\Delta = 450cm$.
8. Πάνω σε μια ευθεία ϵ να φτιάξετε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ώστε $AB = 2,5cm$, $B\Gamma = 2 \cdot AB$, $\Gamma\Delta = B\Gamma : 5$ και $\Delta E = AB + B\Gamma - \Gamma\Delta$

9. Πάνω σε μια ευθεία ε να φτιάξετε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ώστε $AB = 2,4cm$, $B\Gamma = 5 \cdot AB$, $\Gamma\Delta = B\Gamma:6$ και $\Delta E = AB + B\Gamma - \Gamma\Delta$

10. Να πάρετε πάνω σε μια ευθεία ε διαδοχικά τμήματα ώστε $AB = 8cm$,

$$B\Gamma = \frac{AB}{4}, \Gamma\Delta = \frac{AB}{2}, \Delta E = \frac{AB+B\Gamma}{\Gamma\Delta}$$

11. Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα $AB = 3,5cm$,

$$B\Gamma = 1,7cm, \Gamma\Delta = 5,4cm. \text{ Να βρείτε τα τμήματα}$$

- i. $A\Delta$
- ii. $B\Delta$
- iii. $AB + \Gamma\Delta$
- iv. $\Gamma\Delta - AB$

Β 1.5 Μέτρηση , σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας.

❖ Μέτρηση γωνιών

- Τις γωνίες τις μετράμε με το μοιρογνώνιο.
 - Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η 1 μοίρα που συμβολίζεται με 1° .
 - ✓ Η 1° χωρίζεται σε 60 πρώτα λεπτά $60'$ και το ένα πρώτο λεπτό $1'$ χωρίζεται σε 60 δεύτερα λεπτά.
- Άρα έχουμε:

$$1^\circ = 60' = 360''$$

$$1' = 60''$$

- Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο που εξαρτάται από το άνοιγμα των πλευρών της.
- Αν δυο γωνίες έχουν ίδιο μέτρο τότε είναι ίσες.
 - ✓ Οι προσκείμενες γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

❖ Διχοτόμος γωνίας

- **Διχοτόμος γωνίας** ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$

- i. Τι είδος τρίγωνο είναι το ΑΒΓ
- ii. Αν $\hat{B} = 50^\circ$ να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{I}$

Λύση

- i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές αφού έχει δυο ίσες πλευρές.
- ii. Οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Η βάση του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ. Άρα $\hat{B} = \hat{I} = 50^\circ$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Με μοιρογνωμόνιο να σχεδιάσετε γωνίες

- | | |
|-----------------|-------------------|
| i. 67° | v. 107° |
| ii. 30° | vi. 145° |
| iii. 45° | vii. 90° |
| iv. 120° | viii. 178° |

2. Με μοιρογνωμόνιο να σχεδιάσετε τις γωνίες

- | | |
|------------------|-----------------|
| i. 182° | iv. 257° |
| ii. 200° | v. 301° |
| iii. 340° | vi. 313° |

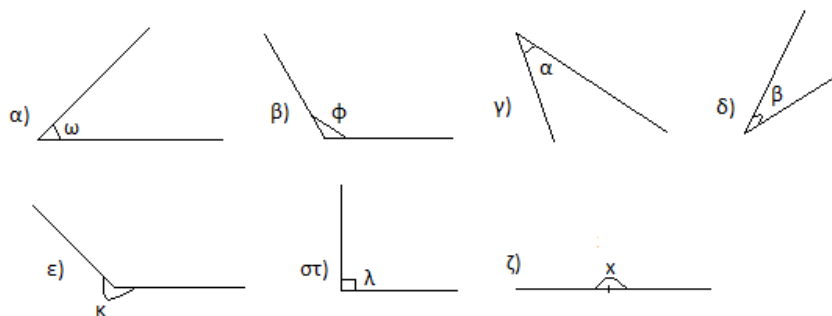
3. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\hat{xOy} = 80^\circ$ στη συνέχεια να φτιάξετε την διχοτόμο της Οδ.

4. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\hat{xOy} = 40^\circ$ στη συνέχεια να φτιάξετε μια γωνία $\hat{xOz}$ ώστε η Ογ να είναι διχοτόμος της $\hat{xOz}$.

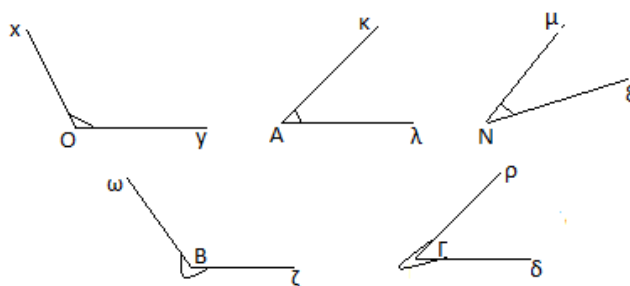
5. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, $BG = 4cm$ και $\hat{B} = 80^\circ$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}$.

6. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, $BG = 6cm$ και $\hat{B} = 40^\circ$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}$.

7. Να βρείτε τα μέτρα των παρακάτω γωνιών



8. Να συγκρίνετε τις παρακάτω γωνίες

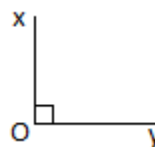


Β 1.6 Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

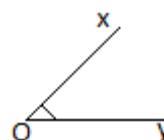
❖ Είδη γωνιών:

- Ορθή ονομάζεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 90°

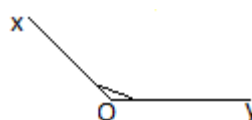
✓ Οι πλευρές της ορθής είναι κάθετες ημιευθείες.



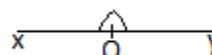
- Οξεία ονομάζεται η γωνία που είναι μικρότερη από την ορθή



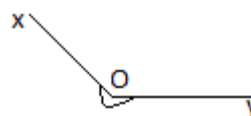
- Αμβλεία γωνία ονομάζεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη από την ορθή και μικρότερη από 180° .



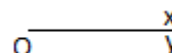
- Ευθεία ονομάζεται γωνία που το μέτρο της είναι ίσο με 180° .



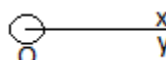
- Μη κυρτή γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360° .



- Μηδενική λέγεται η γωνία με μέτρο 0° .



- Πλήρης γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο 360° .



❖ Κάθετες ευθείες

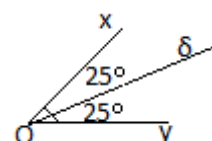
- **Δυο ευθείες είναι κάθετες** όταν οι γωνίες που σχηματίζουν είναι ορθές.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xOy} = 50^\circ$ και στην συνέχεια να φτιάξετε την διχοτόμο της Οδ.

Λύση

Φτιάχνουμε με μοιρογνωμόνιο μια γωνία $\widehat{xOy} = 50^\circ$. Η διχοτόμος χωρίζει την γωνία σε δυο ίσα μέρη. Κάνουμε την διαίρεση $50^\circ : 2 = 25^\circ$.



Άρα με αρχική πλευρά Οχ φτιάχνουμε μια γωνία $\widehat{χΟδ} = 25^\circ$. Η Οδ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{χΟγ}$.

2. Να βρείτε ο είδος των παρακάτω γωνιών.

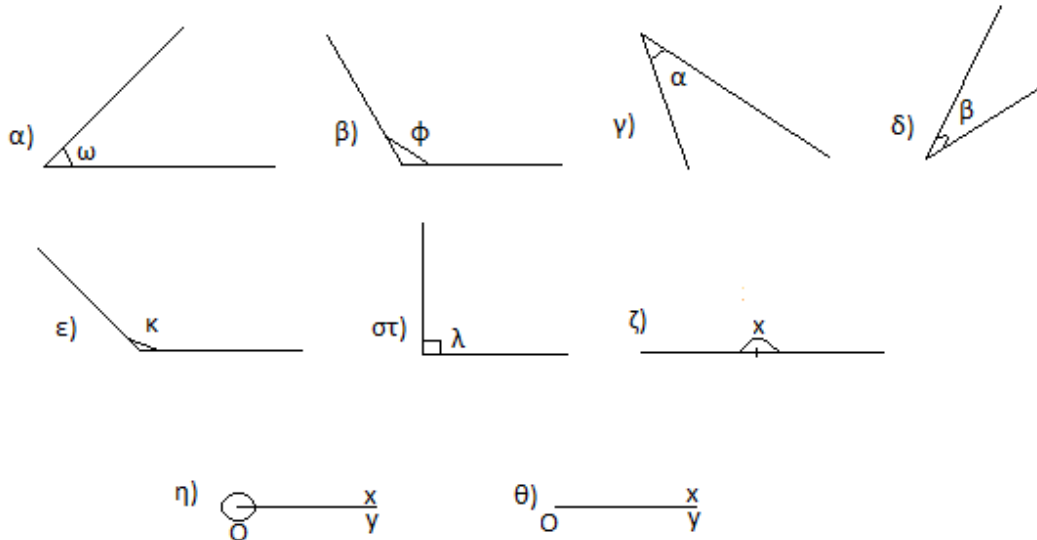
- | | |
|------------------|-----------------|
| i. 160° | v. 90° |
| ii. 350° | vi. 360° |
| iii. 180° | vii. 0° |
| iv. 48° | |

Λύση

- i. Η γωνία 160° είναι αμβλεία διότι $90^\circ < 160^\circ < 180^\circ$
- ii. Η γωνία 350° είναι μη κυρτή γωνία διότι $180^\circ < 350^\circ < 360^\circ$
- iii. Η γωνία 180° είναι ευθεία γωνία
- iv. Η γωνία 48° είναι οξεία διότι $0^\circ < 48^\circ < 90^\circ$
- v. Η γωνία 90° είναι ορθή.
- vi. Η γωνία 360° είναι πλήρης
- vii. Η γωνία 0° είναι μηδενική

Ασκήσεις προς επίλυση

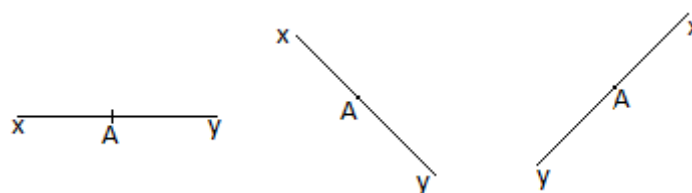
1. Να βρείτε το είδος των παρακάτω γωνιών.



2. Να βρείτε το είδος των παρακάτω γωνιών.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| i. 55° | vi. 180° |
| ii. 134° | vii. 179° |
| iii. 91° | viii. 360° |
| iv. 256° | ix. 90° |
| v. 0° | x. 11° |

3. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να φέρετε κάθετη στο σημείο A.



4. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xOy} = 130^\circ$ και στην συνέχεια να φέρετε κάθετη στην Ox στο σημείο O.

5. Να φτιάξετε μια ορθή γωνία $\widehat{xOy} = 90^\circ$.

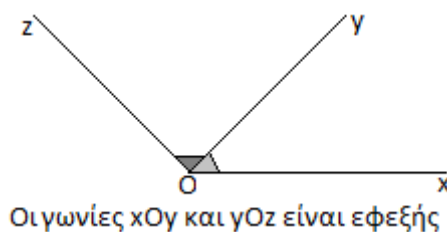
- Να πάρετε πάνω στην Ox σημεία A ώστε $OA = 6 \text{ cm}$ και πάνω στην Oy σημείο B ώστε $OB = 8 \text{ cm}$.
- Να μετρήσετε το ευθύγραμμο τμήμα AB.

6. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xOy} = 120^\circ$ και στην συνέχεια να φτιάξετε την διχοτόμο της Οδ.
7. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και στην συνέχεια να φτιάξετε την διχοτόμο της Οδ.

B 1.7 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

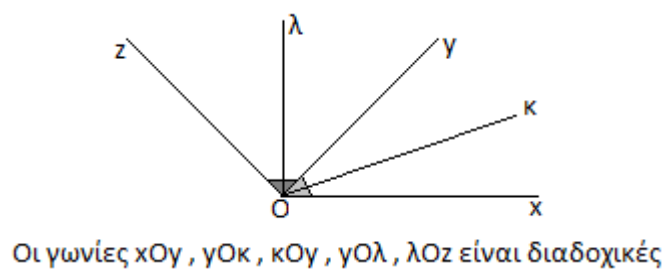
❖ Εφεξής γωνίες

- **Εφεξής γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή μία κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο.



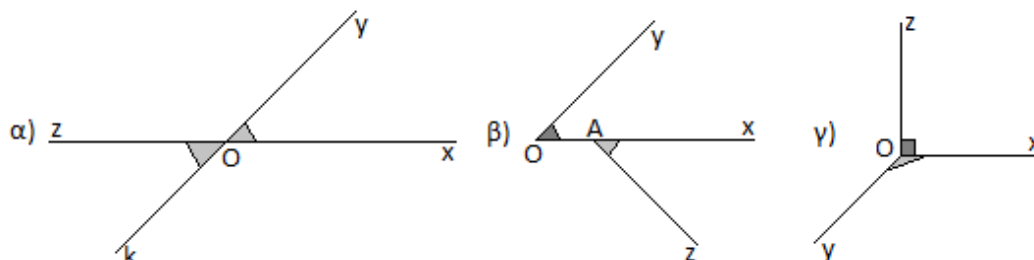
❖ Διαδοχικές γωνίες

- **Διαδοχικές γωνίες** λέγονται περισσότερες από δύο γωνίες που η καθεμιά από αυτές είναι εφεξής με την προηγούμενη και την επόμενη της.



Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι σημειωμένες γωνίες είναι εφεξής και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

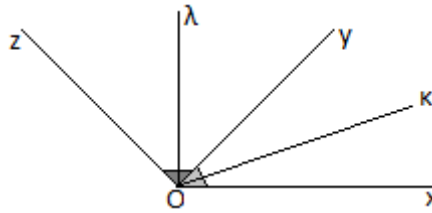
α) Οι γωνίες $\angle xOy$ και $\angle yOz$ δεν είναι εφεξής γιατί έχουν κοινή κορυφή O αλλά δεν έχουν καμία κοινή πλευρά.

β) Οι γωνίες $\angle xOy$ και $\angle yAz$ δεν είναι εφεξής γιατί δεν έχουν κοινή κορυφή.

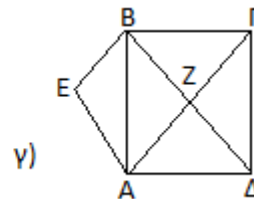
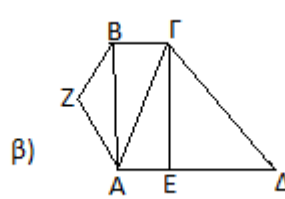
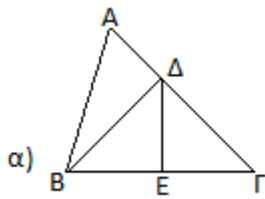
γ) Οι γωνίες $\angle xOy$ και $\angle yOz$ είναι εφεξής γιατί έχουν κοινή κορυφή O μια κοινή πλευρά την Ox και κανένα άλλο κοινό σημείο.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να γράψετε όλα τα ζεύγη των εφεξής γωνιών του παρακάτω σχήματος



2. Να γράψετε τις εφεξής και διαδοχικές γωνίες των παρακάτω σχημάτων.

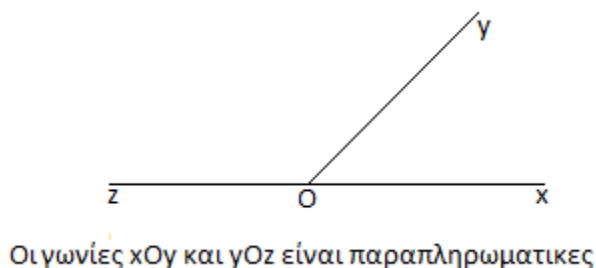


3. Να σχεδιάσετε τις εφεξής γωνίες $\widehat{xOy} = 120^\circ$ και $\widehat{yOz} = 30^\circ$
4. Να σχεδιάσετε τις εφεξής γωνίες $\widehat{xOy} = 45^\circ$ και $\widehat{yOz} = 40^\circ$
5. Να σχεδιάσετε τις εφεξής γωνίες $\widehat{xOy} = 70^\circ$ και $\widehat{yOz} = 110^\circ$
6. Να σχεδιάσετε τις διαδοχικές γωνίες
 $\widehat{xOy} = 20^\circ$, $\widehat{yOz} = 30^\circ$, $\widehat{zOk} = 45^\circ$ και $\widehat{kOl} = 70^\circ$
7. Να σχεδιάσετε τις διαδοχικές γωνίες
 $\widehat{xOy} = 50^\circ$, $\widehat{yOz} = 80^\circ$, $\widehat{zOk} = 130^\circ$ και $\widehat{kOl} = 100^\circ$
8. Να σχεδιάσετε τις διαδοχικές γωνίες
 $\widehat{xOy} = 15^\circ$, $\widehat{yOz} = 15^\circ$, $\widehat{zOk} = 80^\circ$ και $\widehat{kOl} = 70^\circ$

Β 1.8 Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

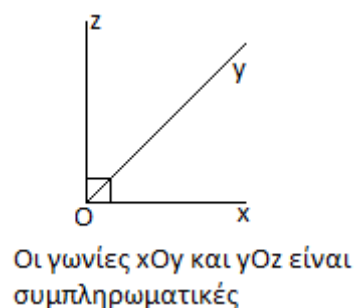
❖ Παραπληρωματικές γωνίες

- Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .



❖ Συμπληρωματικές γωνίες

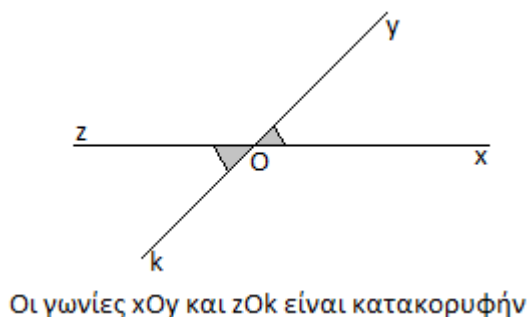
- Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° .



❖ Κατακορυφήν γωνίες

- Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και η πλευρές της μίας είναι αντικείμενες ημιευθείες της άλλης.

- ✓ Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να βρεις τις παραπληρωματικές των γωνιών

- 80°
- 140°

Λύση

- Αν $\hat{x}$ η ζητούμενη γωνία τότε ισχύει ότι $\hat{x} + 80^\circ = 180^\circ$
Άρα $\hat{x} = 180^\circ - 80^\circ$ ή $\hat{x} = 100^\circ$
- Αν $\hat{y}$ η ζητούμενη γωνία τότε ισχύει ότι $\hat{y} + 140^\circ = 180^\circ$

$$\text{Άρα } \hat{y} = 180^\circ - 140^\circ \text{ ή } \hat{y} = 40^\circ$$

2. Να βρεις τις συμπληρωματικές των γωνιών γωνιών

i. 80°

ii. 39°

Λύση

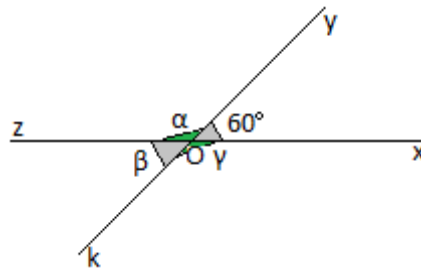
i. Αν $\hat{x}$ η ζητούμενη γωνία τότε ισχύει ότι $\hat{x} + 80^\circ = 90^\circ$

$$\text{Άρα } \hat{x} = 90^\circ - 80^\circ \text{ ή } \hat{x} = 10^\circ$$

ii. Αν $\hat{y}$ η ζητούμενη γωνία τότε ισχύει ότι $\hat{y} + 39^\circ = 90^\circ$

$$\text{Άρα } \hat{y} = 90^\circ - 39^\circ \text{ ή } \hat{y} = 51^\circ$$

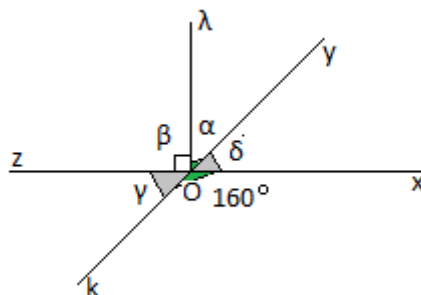
3. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



Λύση

- Ισχύει ότι $\hat{\beta} = 60^\circ$ γιατί είναι κατακορυφήν.
- Η γωνία $\hat{\alpha}$ με την γωνία 60° είναι παραπληρωματικές άρα $\hat{\alpha} + 60^\circ = 180^\circ$ ή $\hat{\alpha} = 180^\circ - 60^\circ$ ή $\hat{\alpha} = 120^\circ$
- $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 120^\circ$ ως κατακορυφήν

4. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



Λύση

- Ισχύει ότι $\hat{\beta} = 90^\circ$ από τον συμβολισμό της καθετότητας.
- Η γωνία $\hat{\gamma}$ με την γωνία 160° είναι παραπληρωματικές άρα $\hat{\gamma} + 160^\circ = 180^\circ$ ή $\hat{\gamma} = 180^\circ - 160^\circ$ ή $\hat{\gamma} = 20^\circ$

- $\hat{\gamma} = \hat{\delta} = 20^\circ$ ως κατακορυφήν
- Η γωνία $\hat{\alpha}$ με την γωνία $\hat{\delta} = 20^\circ$ είναι συμπληρωματικές άρα
 $\hat{\alpha} + 20^\circ = 90^\circ$ ή $\hat{\alpha} = 90^\circ - 20^\circ$ ή $\hat{\alpha} = 70^\circ$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τις παραπληρωματικές των γωνιών

- | | |
|-----------------|-------------------|
| i. 110° | vi. 0° |
| ii. 145° | vii. 45° |
| iii. 10° | viii. 117° |
| iv. 90° | ix. 33° |
| v. 180° | x. 190° |

2. Να βρείτε τις συμπληρωματικές των γωνιών

- | | |
|-----------------|------------------|
| i. 10° | vi. 90° |
| ii. 30° | vii. 17° |
| iii. 90° | viii. 25° |
| iv. 55° | ix. 0° |
| v. 88° | x. 67° |

3. Να βρείτε τις παραπληρωματικές και τις συμπληρωματικές των γωνιών

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| i. $45^\circ 57'$ | iv. $33^\circ 25' 42''$ |
| ii. $85^\circ 37'$ | v. $19^\circ 29' 15''$ |
| iii. $15^\circ 22'$ | vi. $67^\circ 33' 55''$ |

4. Να σχεδιάσετε μια γωνία 70° και στη συνέχεια την εφεξής και παραπληρωματική της.

5. Να σχεδιάσετε μια γωνία 130° και στη συνέχεια την εφεξής και παραπληρωματική της.

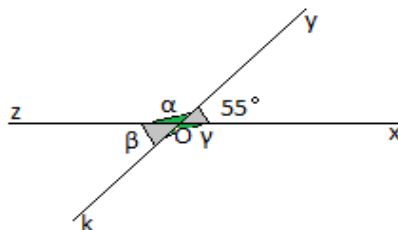
6. Να σχεδιάσετε μια γωνία 40° και στη συνέχεια την εφεξής και συμπληρωματική της.

7. Να σχεδιάσετε μια γωνία 70° και στη συνέχεια την εφεξής και συμπληρωματική της.

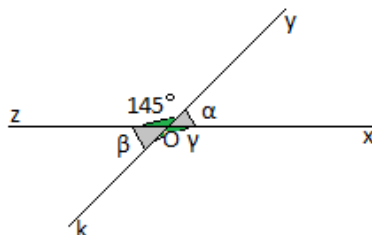
8. Να σχεδιάσετε μια γωνία 30° και στη συνέχεια την κατακορυφήν της.

9. Να σχεδιάσετε μια γωνία 150° και στη συνέχεια την κατακορυφήν της.

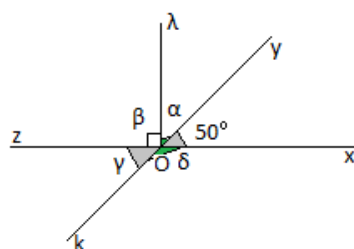
10. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



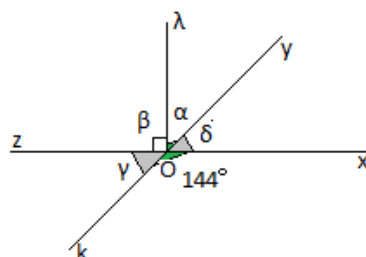
11. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



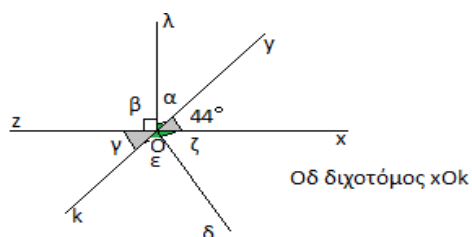
12. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



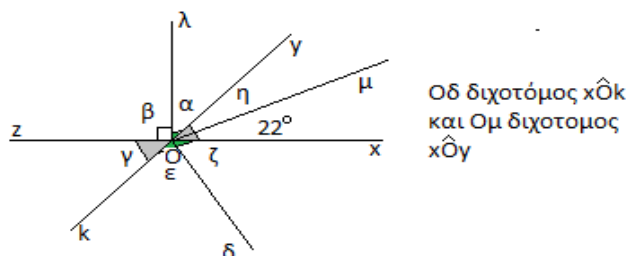
13. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



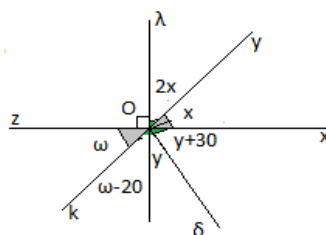
14. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



15. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.



16. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}$, $\hat{y}$ και $\hat{\omega}$.



17. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 60^\circ$ να βρείτε την γωνία $\hat{yOz}$.
18. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 135^\circ$ να βρείτε την γωνία $\hat{yOz}$.
19. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και συμπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 47^\circ$ να βρείτε την γωνία $\hat{yOz}$.
20. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 80^\circ$ να βρείτε την γωνία $\hat{yOz}$.
21. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 60^\circ$ και Oδ διχοτόμος της γωνίας $\hat{yOz}$ να βρείτε την γωνία $\hat{xO\delta}$.
22. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 140^\circ$ και Oδ διχοτόμος της γωνίας $\hat{yOz}$ να βρείτε την γωνία $\hat{xO\delta}$.
23. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και συμπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 55^\circ$ και Oδ διχοτόμος της γωνίας $\hat{yOz}$ να βρείτε την γωνία $\hat{xO\delta}$.
24. Δυο γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ είναι εφεξής και συμπληρωματικές. Αν ισχύει ότι $\hat{xOy} = 70^\circ$ και Oδ διχοτόμος της γωνίας $\hat{yOz}$ να βρείτε την γωνία $\hat{xO\delta}$.

B 1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

❖ Παράλληλες ευθείες

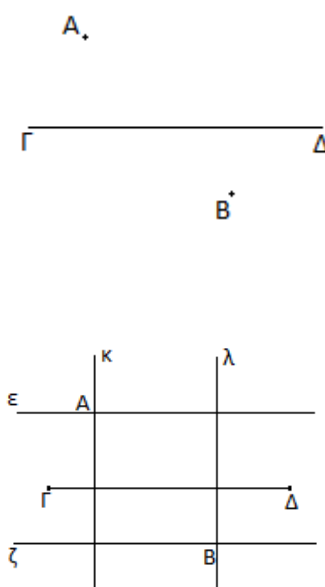
- **Παράλληλες** ονομάζονται οι ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και δεν τέμνονται.
 - ✓ Για να συμβολίσουμε ότι δυο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$
 - ✓ Δυο ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε δυο παράλληλες ευθείες θα λέγονται παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα.
- Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους κάθετες.
 - ✓ Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
 - ✓ Από δύο σημεία διέρχεται μια ευθεία.

❖ Τεμνόμενες ευθείες

- Δυο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται τεμνόμενες και το κοινό σημείο λέγεται σημείο τομής των ευθειών.
 - ✓ Δυο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι τεμνόμενες ή θα είναι παράλληλες.

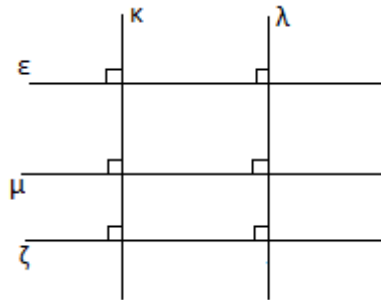
Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να σχεδιάσετε δυο ευθείες ε και ζ που να διέρχονται από τα A και B και να είναι παράλληλες στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ του διπλανού σχήματος. Στη συνέχεια να φτιάξετε και τις ευθείες κ και λ που διέρχονται από τα A και B και είναι κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ
- Λύση
- Σχεδιάζουμε τις ευθείες όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

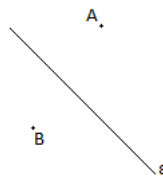


Ασκήσεις προς επίλυση

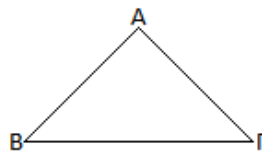
1. Στο παρακάτω σχήμα να γράψετε τα ζεύγη ων παράλληλων και κάθετων ευθειών.



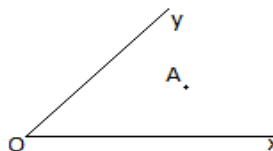
2. Να σχεδιάσετε τις ευθείες που διέρχονται από τα σημεία A και B και είναι παράλληλες στην ευθεία ε.



3. Στο παρακάτω τρίγωνο να φέρετε τις ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές του και είναι παράλληλες προς την απέναντι πλευρά.



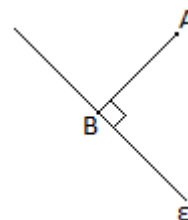
4. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και στη συνέχεια δυο ευθείες κάθετες στα άκρα A και B. Ποια η θέση των δυο ευθειών στο επίπεδο;
5. Να σχεδιάσετε δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που να είναι παράλληλες στις Ox και Oy αντίστοιχα και διέρχονται από το σημείο A.



Β 1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία

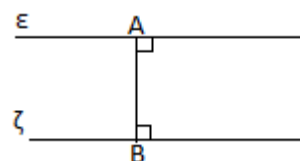
❖ Απόσταση σημείου A από ευθεία ϵ

- Απόσταση ενός σημείου A από την ευθεία ϵ ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AA' από το σημείο A προς την ευθεία ϵ .



❖ Απόσταση παράλληλων ευθειών

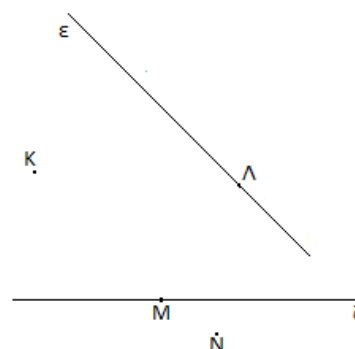
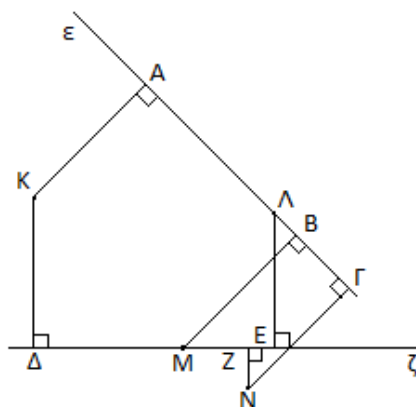
- Απόσταση δυο παράλληλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δυο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα τους σε αυτές. π.χ. AB



Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να σχεδιάσετε τις αποστάσεις των σημείων K , Λ , M και N από τις ευθείες ϵ και ζ του διπλανού σχήματος.

Λύση.



Η απόσταση του σημείου K από την ευθεία ϵ είναι το ευθύγραμμο τμήμα KA

Η απόσταση του σημείου K από την ευθεία ζ είναι το ευθύγραμμο τμήμα KD

Η απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ είναι το ευθύγραμμο τμήμα MB

Η απόσταση του σημείου N από την ευθεία ζ είναι το ευθύγραμμο τμήμα NZ

Η απόσταση του σημείου N από την ευθεία ϵ είναι το ευθύγραμμο τμήμα NG

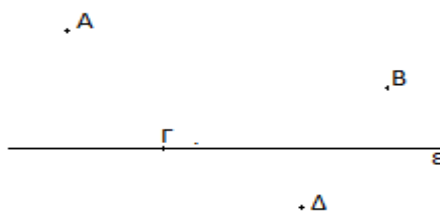
Η απόσταση του σημείου Λ από την ευθεία ζ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΛZ

Το σημείο Λ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ϵ άρα η απόστασή του από αυτή είναι μηδενική.

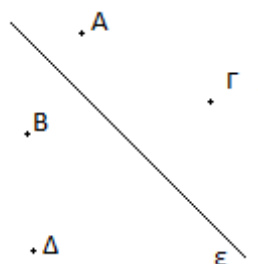
Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην ευθεία ζ άρα η απόστασή του από την ευθεία αυτή είναι μηδενική.

Ασκήσεις προς επίλυση

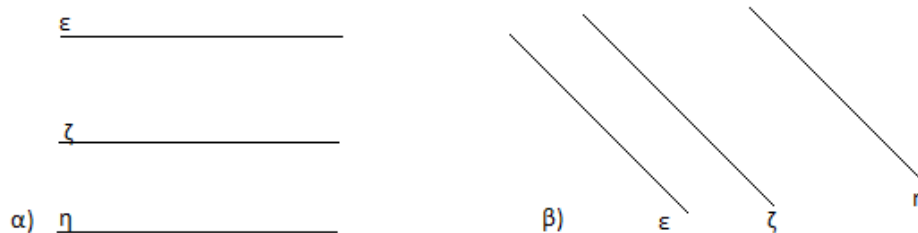
1. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A , B , Γ και Δ από την ευθεία ε.



2. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A , B , Γ και Δ από την ευθεία ε.



3. Στα παρακάτω σχήματα να σχεδιάσετε τις αποστάσεις των παράλληλων ευθειών.



4. Να σχεδιάσετε δυο παράλληλες ευθείες που να έχουν απόσταση 55mm
5. Να σχεδιάσετε δυο παράλληλες ευθείες που να έχουν απόσταση 0,5dm
6. Να σχεδιάσετε δυο παράλληλες ευθείες που να έχουν απόσταση 4cm
7. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και στην συνέχεια δυο ευθείες που να απέχουν από την ε 3cm.
8. Να σχεδιάσετε δυο παράλληλες ευθείες ε και ζ που να απέχουν απόσταση 6cm. Στη συνέχεια να πάρετε δυο τυχαία σημεία A και B πάνω στις ευθείες ε και ζ και να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB. Να φτιάξετε την ευθεία xx' που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη στην ε. Ποια η απόσταση της ευθείας xx' από τις ε και ζ;
9. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και να πάρετε ένα σημείο A της Ox με $OA = 2\text{cm}$. Στη συνέχεια να φέρετε την απόσταση του σημείου A από την Oy.
10. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xOy} = 120^\circ$ και να πάρετε ένα σημείο A της Oy με $OA = 3\text{cm}$. Στη συνέχεια να φέρετε την απόσταση του σημείου A από την Ox.

Β 1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

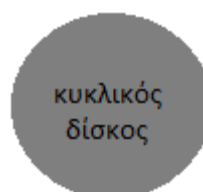
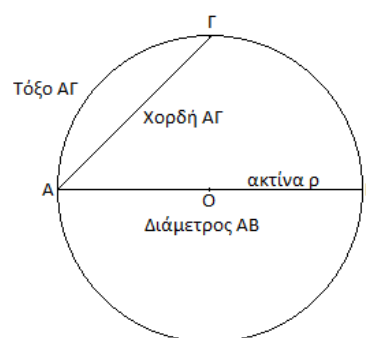
❖ Ορισμός κύκλου

- **Κύκλος** με κέντρο O και ακτίνα ρ είναι το σχήμα που όλα τα σημεία του απέχουν από το κέντρο απόσταση ίση με ρ .

✓ Η απόσταση του κέντρου από το κύκλο ονομάζεται ακτίνα.

❖ Στοιχεία του κύκλου:

- Ακτίνα (ρ) : Η απόσταση του κέντρου από τον κύκλο
- Χορδή : Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου.
- Διάμετρος: Η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου. Η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας. Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη (ημικύκλια)
- Τόξο: Είναι ένα τμήμα του κύκλου.
- Κυκλικός δίσκος είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.



✓ Ο συμβολισμός (K, ρ) σημαίνει κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ .

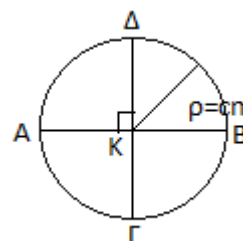
Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο K και ακτίνα $\rho = 2\text{cm}$. $(K, 2\text{cm})$. Να φέρετε 2 κάθετες διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$. Σε πόσα μέρη χωρίζεται ο κύκλος

Λύση

Με την βοήθεια χάρακα ανοίγουμε τον διαβήτη με άνοιγμα 2cm . Φτιάχνουμε το σημείο K που είναι το κέντρο του κύκλου και χαράζουμε το κύκλο με κέντρο K και ακτίνα $\rho = 2\text{cm}$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

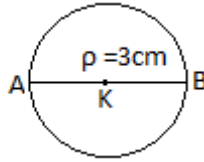
Οι κάθετες διαμέτροι AB και $\Gamma\Delta$ χωρίζουν τον κύκλο σε 4 ίσα μέρη.



2. Να σχεδιάσετε κύκλο με διάμετρο $AB = 6\text{cm}$

Λύση

Φτιάχνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6\text{cm}$ και βρίσκουμε το μέσο του M . Με κέντρο το μέσο M και ακτίνα $\rho = 6:2 = 3\text{cm}$ φτιάχνουμε τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία A και B και είναι ο ζητούμενος κύκλος.



Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να σχεδιάσετε τους κύκλους με ακτίνες

i. 2cm	iv. 0,12dm
ii. 4cm	v. 33mm
iii. 35mm	vi. 0,5dm
2. Να σχεδιάσετε τους κύκλους

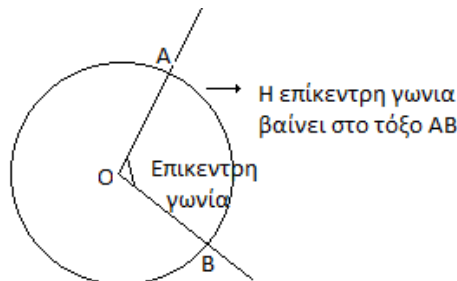
i. (A, 2cm)	iii. (K, 45mm)
ii. (B, 12mm)	iv. (Λ, 015dm)
3. Να σχεδιάσετε τους κύκλους με διάμετρο

i. 6cm	iii. 90mm
ii. 10cm	iv. 0,2dm
4. Να σχεδιάσετε 3 ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες 2cm , 55mm , 0,4dm
5. Να σχεδιάσετε τους κύκλους (K, 1cm) , (K , 18mm) και (K, 0,4mm)
6. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 5cm και τον κύκλο (A , AB)
7. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 8cm και τον κύκλο (B , AB)
8. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 6cm και το μέσο του M. Στη συνέχεια τον κύκλο (M , MA)
9. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 8cm και τον κύκλο με διάμετρο AB
10. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 10cm και τον κύκλο με διάμετρο AB
11. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 5cm. Να βρεις τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το A 3cm και από το B 4cm. Ποια σημεία απέχουν ταυτόχρονα από το A 3cm και από το B 4cm;
12. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ = 8cm. Να βρεις τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Κ 6cm και από το Λ 3cm. Ποια σημεία απέχουν ταυτόχρονα από το Κ 6cm και από το Λ 3cm;
13. Να φτιάξετε ευθύγραμμο τμήμα AB = 6cm. Να βρεις τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Α λιγότερο από 5cm και από το Β λιγότερο από 3cm.

Β 1.12 Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου της – Μέτρηση τόξου.

❖ Επίκεντρη γωνία

- **Επίκεντρη γωνία** ονομάζεται η γωνία που έχει κορυφή της το κέντρο του κύκλου.



- ✓ Η επίκεντρη γωνία έχει άνοιγμα πλευρών το οποίο αντιστοιχεί σε ένα τόξο του κύκλου. Λέμε ότι η επίκεντρη γωνία βαίνει στο τόξο αυτό.
 - ✓ Η επίκεντρη γωνία είναι ίση με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει.
 - ✓ Το μέτρο του τόξου ορίζεται ως το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο τόξο αυτό.
- Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους δυο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.
- Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους δυο ίσα τόξα έχουν ίσες τις επίκεντρες γωνίες τους.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

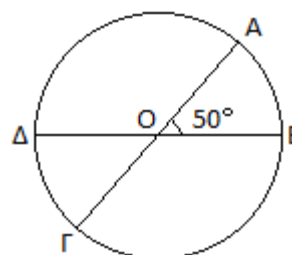
1. Πόσες μοίρες έχει
 1. Ένας κύκλος
 2. Ένα ημικόκλιο
 3. Κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δυο κάθετες διαμέτρους;

Λύση

- i. Ένας κύκλος έχει 360°
- ii. Ένα ημικόκλιο είναι ο μισός κύκλος άρα έχει $360^\circ : 2 = 180^\circ$
- iii. Κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δυο κάθετες διαμέτρους είναι το $\frac{1}{4}$ του κύκλου άρα έχει $360^\circ : 4 = 90^\circ$;

2. Στο διπλανό σχήμα τα βρείτε τα μέτρα των τόξων

$\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GA}$ και $\widehat{DA}$



Λύση

Η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$. Άρα ισχύει ότι $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 50^\circ$

Οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{DO\Gamma}$ είναι κατακορυφήν. Άρα $\widehat{AOB} = \widehat{DO\Gamma} = 50^\circ$

Η γωνία $\widehat{DO\Gamma}$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\widehat{D\Gamma}$. Άρα ισχύει ότι $\widehat{D\Gamma} = \widehat{DO\Gamma} = 50^\circ$

Οι γωνίες $\widehat{AOD}$ και $\widehat{AOB}$ είναι παραπληρωματικές άρα $\widehat{AOD} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ ή

$$50^\circ + \widehat{AOD} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{AOD} = 180^\circ - 50^\circ \text{ ή } \widehat{AOD} = 130^\circ$$

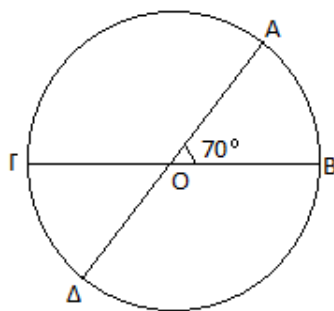
Η γωνία $\widehat{AOD}$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\widehat{DA}$. Άρα ισχύει ότι $\widehat{DA} = \widehat{AOD} = 130^\circ$

Οι γωνίες $\widehat{AOD}$ και $\widehat{BO\Gamma}$ είναι κατακορυφήν. Άρα $\widehat{AOD} = \widehat{BO\Gamma} = 130^\circ$

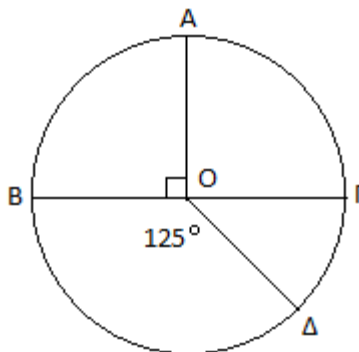
Η γωνία $\widehat{BO\Gamma}$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$. Άρα ισχύει ότι $\widehat{B\Gamma} = \widehat{BO\Gamma} = 130^\circ$

Ασκήσεις προς επίλυση

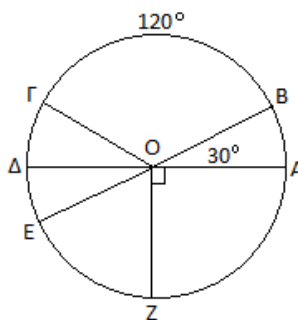
1. Δυο διάμετροι ενός κύκλου σχηματίζουν γωνία 50° . Να βρεις πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα του κύκλου στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από τις διαμέτρους αυτές.
2. Τέσσερις διάμετροι χωρίζουν το κύκλο σε 8 ίσα τόξα. Να βρεις πόσες μοίρες είναι κάθε μια από τα επίκεντρες γωνίες που σχηματίζονται από τα τόξα αυτά.
3. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με διάμετρο 6cm και πάνω σε αυτόν να σημειώσετε τα τόξα $\widehat{AB} = 50^\circ$ και $\widehat{BT} = 120^\circ$.
4. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και πάνω σε αυτόν να σημειώσετε τα τόξα $\widehat{AB} = 50^\circ$ και $\widehat{BT} = 120^\circ$. Πόσες μοίρες είναι το τόξο $\widehat{TA}$;
5. Στο παρακάτω σχήμα τα βρείτε τα μέτρα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{BT}$, $\widehat{TA}$ και $\widehat{BA}$, $\widehat{AT}$



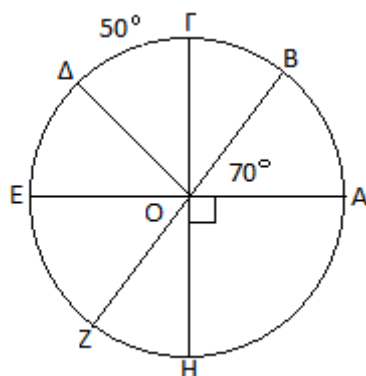
6. Στο παρακάτω σχήμα τα βρείτε τα μέτρα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{BT}$, $\widehat{BA}$ και $\widehat{AT}$



7. Στο παρακάτω σχήμα τα βρείτε τα μέτρα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{AZ}$ και $\widehat{DE}$, $\widehat{ΓΔ}$, $\widehat{EZ}$



8. Στο παρακάτω σχήμα τα βρείτε τα μέτρα των τόξων $\widehat{AB}, \widehat{BG}, \widehat{DE}, \widehat{EZ}, \widehat{ZH}, \widehat{HA}, \widehat{AD}, \widehat{AZ}, \widehat{AZ}$

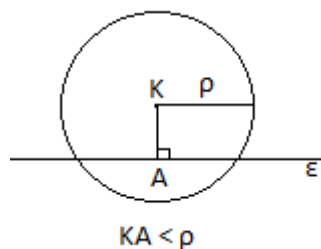


B 1.13 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

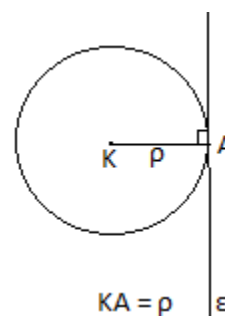
❖ Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

➤ Μια ευθεία και ένας κύκλος μπορεί να έχουν

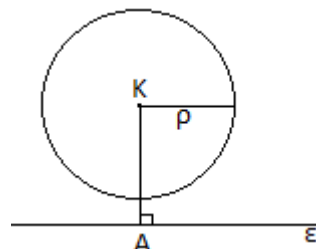
- Δυο κοινά σημεία. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία λέγεται τέμνουσα του κύκλου και η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μικρότερη από την ακτίνα του .



- Ένα κοινό σημείο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία λέγεται εφαπτομένη του κύκλου και το κοινό σημείο λέγεται σημείο επαφής. Η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου
✓ Η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου.



- Κανένα κοινό σημείο. Η ευθεία λέγεται εξωτερική ευθεία κύκλου και η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου.

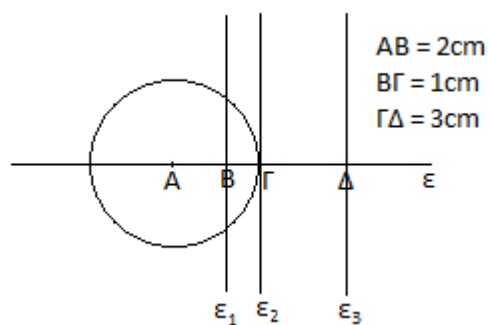


Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ϵ και ά πάρτε τέσσερα σημεία διαδοχικά σημεία A, B, Γ και ώστε $AB = 2\text{cm}$, $B\Gamma = 1\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$. Να φτιάξετε τις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 που διέρχονται από τα σημεία B, Γ, Δ και είναι κάθετες στην ϵ . Στη συνέχεια να φτιάξετε τον κύκλο $(A, 3\text{cm})$. ποιες οι σχετικές θέσεις των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 ως προς τον κύκλο αυτό;

Λύση

Με βάση τα δεδομένα φτιάχνουμε το παρακάτω σχήμα.



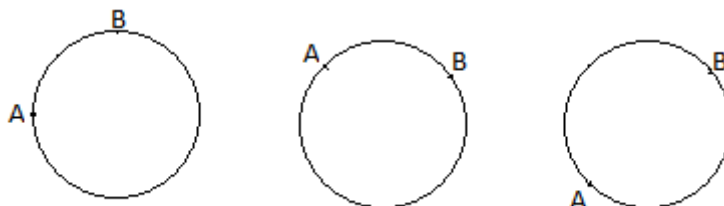
Η ευθεία ε_1 είναι τέμνουσα του κύκλου διότι η απόστασή της από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα.

Η ευθεία ε_2 είναι εφαπτόμενη του κύκλου διότι η απόστασή της από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

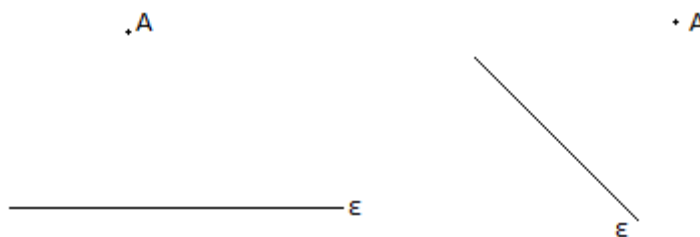
Η ευθεία ε_3 είναι εξωτερική ευθεία του κύκλου διότι η απόστασή της από το κέντρο του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να σχεδιάσετε τις εφαπτόμενες στα σημεία A και B των παρακάτω κύκλων.



2. Να σχεδιάσετε τον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία ε.



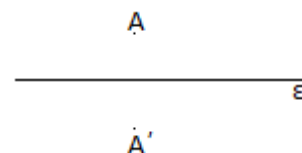
3. Να σχεδιάσετε κύκλο με διάμετρο $AB = 4 \text{ cm}$ και τις εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία A και B
4. Να φτιάξετε δυο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 και να ονομάσετε A το σημείο τομής τους. Πάνω στην ευθεία ε_1 να πάρετε σημείο B ώστε $AB = 3 \text{ cm}$. Να φτιάξετε τον κύκλο $(B, 2 \text{ cm})$. Ποια η θέση της ευθείας ε_2 ως προς τον κύκλο αυτό;
5. Να φτιάξετε δυο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 και να ονομάσετε K το σημείο τομής τους. Πάνω στην ευθεία ε_2 να πάρετε σημείο B ώστε $KB = 4 \text{ cm}$. Να φτιάξετε τον κύκλο $(B, 5 \text{ cm})$. Ποια η θέση της ευθείας ε_1 ως προς τον κύκλο αυτό;
6. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με κέντρο K και διάμετρο ΓΔ. Στη συνέχεια να βρείτε
- Το σημείο A του κύκλου ώστε $\widehat{AT} = 90^\circ$
 - Να φτιάξετε την εφαπτομένη στο σημείο A
 - Ποια η θέση της εφαπτομένης σε σχέση με την διάμετρο ΓΔ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο – Συμμετρία

Β 2.1 Συμμετρία ως προς άξονα

❖ Συμμετρικό σημείου ως προς ευθεία

- Συμμετρικό σημείου A ως προς ευθεία ϵ είναι το σημείο A' με το οποίο συμπίπτει το A , αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ϵ .



- ✓ Κάθε σημείο μιας ευθείας ϵ είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ευθεία ϵ .

❖ Συμμετρικά σχήματα ως προς μια ευθεία

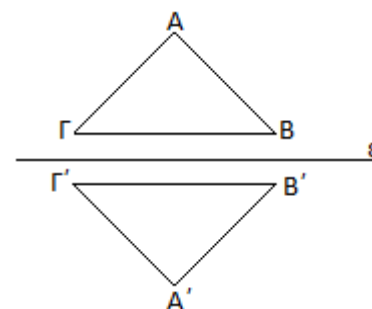
- Δυο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία ϵ , όταν το καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά του άλλου ως προς την ευθεία ϵ .

- ✓ Τα συμμετρικά ως προς μια ευθεία σχήματα είναι ίσα.

❖ Συμμετρικό ευθύγραμμου σχήματος ως προς ευθεία

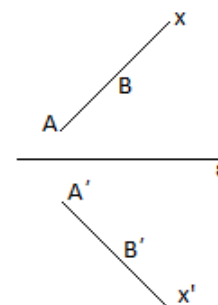
- Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου σχήματος ως προς μια ευθεία ϵ φτιάχνουμε τα συμμετρικά των κορυφών του και στην συνέχεια τα ενώνουμε αντίστοιχα.

- ✓ Το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ϵ είναι το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



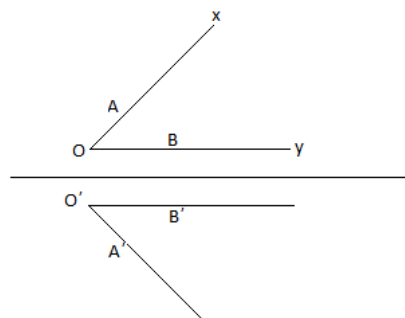
❖ Συμμετρική ημιευθεία ως προς ευθεία.

- Για να κατασκευάσουμε τη συμμετρική της ημιευθείας Ax ως προς την ευθεία ϵ φτιάχνουμε το συμμετρικό A' του σημείου A ως προς την ευθεία ϵ , στη συνέχεια παίρνουμε ένα σημείο B της ημιευθείας Ax και φτιάχνουμε το συμμετρικό του B' ως προς την ευθεία ϵ . Η ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο A' και διέρχεται από το B' είναι η συμμετρική της Ax ως προς την ευθεία ϵ .



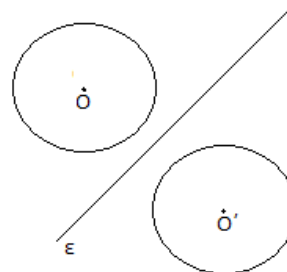
❖ Συμμετρική γωνίας ως προς ευθεία

- Για να κατασκευάσουμε την συμμετρική της γωνίας $x\hat{O}y$ ως προς την ευθεία ϵ παίρνουμε δυο σημεία A και B πάνω στις πλευρές Ox και Oy , στη συνέχεια φτιάχνουμε τα συμμετρικά A' , O' , B' , των σημείων A , O , B αντίστοιχα ως προς την ευθεία ϵ . Η γωνία $A'\hat{O}'B'$ είναι η συμμετρική της $x\hat{O}y$ ως προς την ευθεία ϵ .



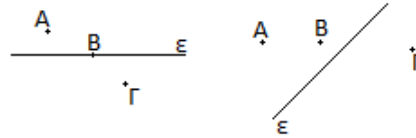
❖ Συμμετρικό κύκλου ως προς ευθεία ϵ .

- Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός κύκλου (O, ρ) ως προς μια ευθεία ϵ φτιάχνουμε το συμμετρικό O' του κέντρου O ως προς την ευθεία ϵ και διαγράφουμε τον κύκλο (O', ρ) που είναι ο συμμετρικός του (O, ρ) ως προς την ευθεία ϵ .

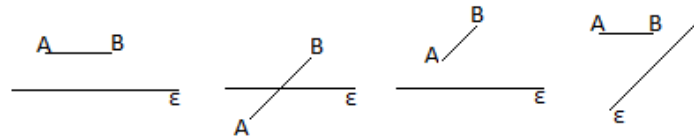


Ασκήσεις προς επίλυση

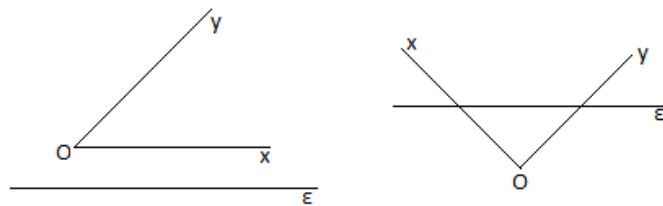
1. Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων A , B , Γ ως προς την ευθεία ϵ στις παρακάτω περιπτώσεις.



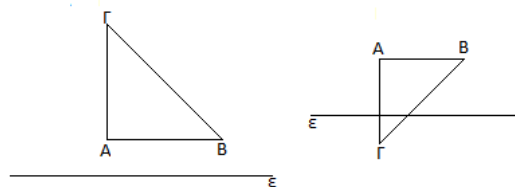
2. Να βρείτε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος AB ως προς την ευθεία ϵ στις παρακάτω περιπτώσεις.



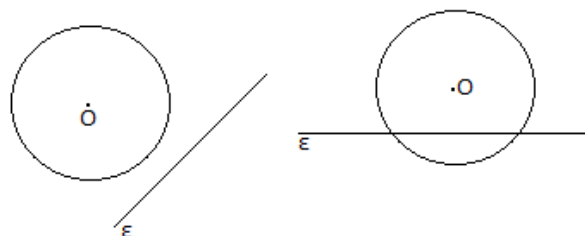
3. Να βρείτε την συμμετρική της γωνίας $\chi\hat{O}\gamma$ ως προς την ευθεία ϵ στις παρακάτω περιπτώσεις.



4. Να βρείτε το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ϵ στις παρακάτω περιπτώσεις



5. Να βρείτε το συμμετρικό του κύκλου (O, ρ) ως προς την ευθεία ϵ στις παρακάτω περιπτώσεις.



6. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6 \text{ cm}$. Να σχεδιάσετε

- i. Τον κύκλο με διάμετρο AB
- ii. Τις εφαπτόμενες ϵ_1 και ϵ_2 του κύκλου στα σημεία A και B
- iii. Τους συμμετρικούς του κύκλου ως προς τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2

B 2.2 Άξονας συμμετρίας

❖ Άξονας συμμετρίας

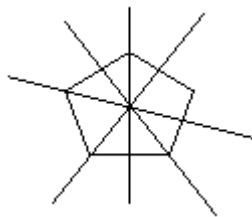
- Άξονας συμμετρίας ενός σχήματος ονομάζεται μια ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δυο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν το σχήμα διπλωθεί κατά μήκος της ευθείας αυτής.
- ✓ Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο σχήμα.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας ενός κανονικού πενταγώνου. (Κανονικό λέγεται το πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες)

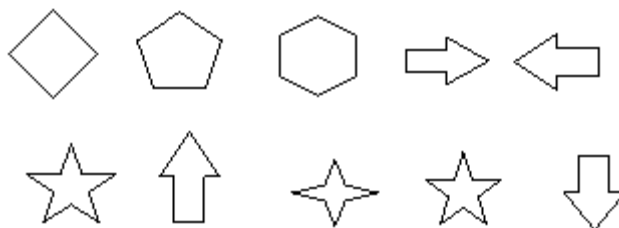
Λύση

Οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού πενταγώνου είναι οι ευθείες που διέρχονται από την κορυφή και το μέσο της απέναντι πλευράς.

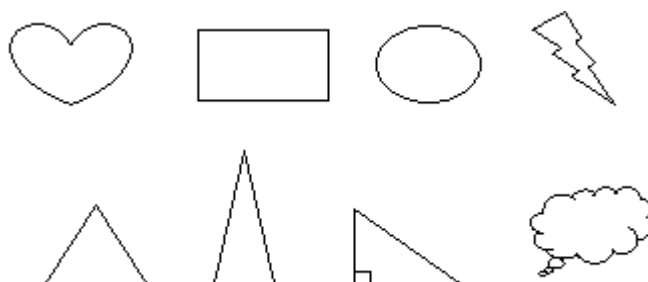


Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω σχημάτων



2. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω σχημάτων αν υπάρχουν.



3. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.
4. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο $(O, 4cm)$ και δυο κάθετες διαμέτρους του, στη συνέχεια να φτιάξετε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που προκύπτει.

Β 2.3 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

❖ Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

- Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα και διέρχεται από το μέσο του.
 - ✓ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
 - ✓ Κάθε σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετό του.
 - ✓ Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του.

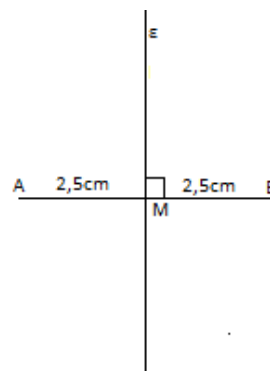
Παραδείγματα – εφαρμογές

1. Να κατασκευάσετε την μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος $AB = 5\text{cm}$

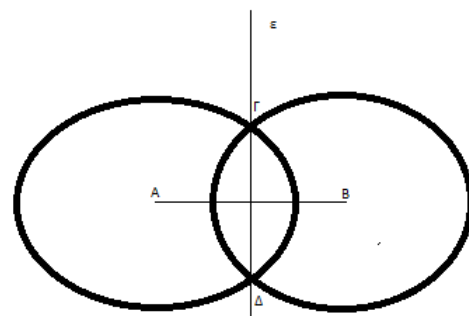
- i. Με χάρακα
- ii. Με κανόνα και διαβήτη.

Λύση

- i. Για να φτιάξουμε την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB με χάρακα, βρίσκουμε το μέσο M του τμήματος AB
 $5:2 = 2,5\text{cm}$. Στη συνέχεια με τον γνώμονα φέρνουμε την κάθετη ευθεία ϵ στο τμήμα AB που διέρχεται από ο M . Η ευθεία ϵ είναι η μεσοκάθετος του AB .

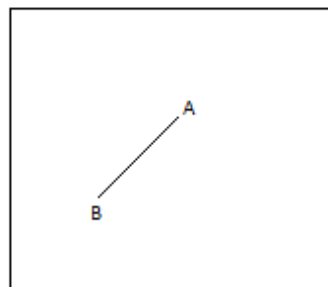
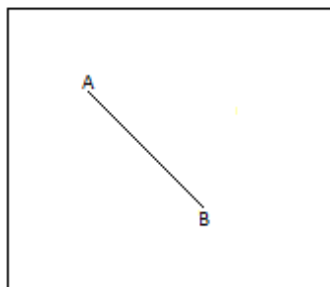
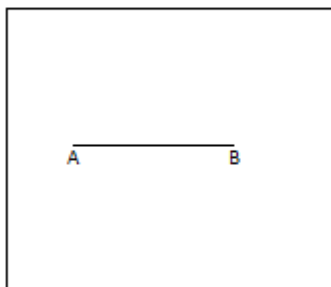


- ii. Ανοίγουμε τον διαβήτη ώστε η ακτίνα να είναι μεγαλύτερη από το μισό του τμήματος AB και να μην το ξεπερνά. Με κέντρο στο σημείο A και ακτίνα ρ φτιάχνουμε τον κύκλο. Στη συνέχεια φτιάχνουμε τον κύκλο με κέντρο B και ακτίνα ρ . Οι δυο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Γ και Δ . Φτιάχνουμε την ευθεία που διέρχεται από τα Γ και Δ και είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

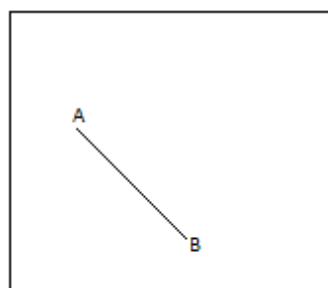
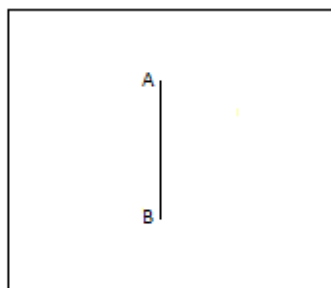
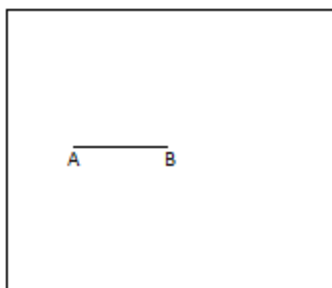


Ασκήσεις προς επίλυση

1. Με κανόνα και διαβήτη να σχεδιάσετε τις μεσοκαθέτους των ευθύγραμμων τμημάτων AB



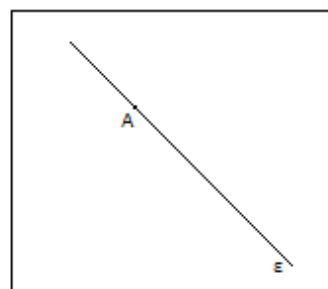
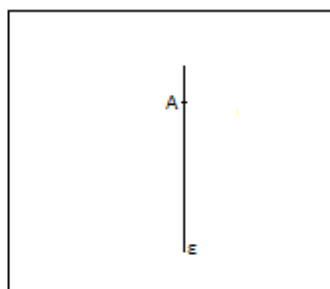
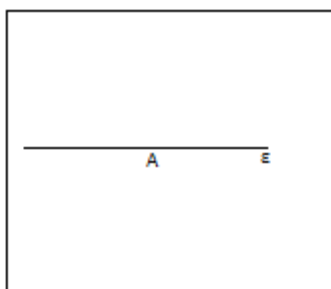
2. Με κανόνα και διαβήτη να βρείτε τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AB.



3. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και με κανόνα και διαβήτη να βρείτε

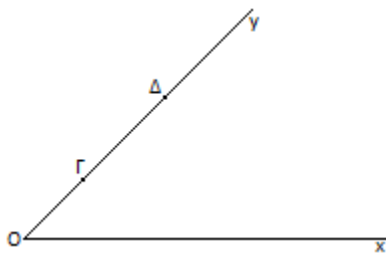
- i. Το μέσο M του ΓΔ
- ii. Το μέσο N του ΜΔ

4. Με την βοήθεια κανόνα και διαβήτη να φτιάξετε μια ευθεία κάθετη στην ευθεία ε στο σημείο A

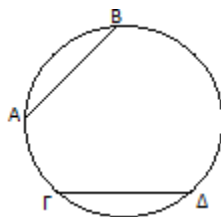


5. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 3 \text{ cm}$ και με την βοήθεια κανόνα και διαβήτη να φτιάξετε μια κάθετη στο AB στο σημείο A.
6. Να φτιάξετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6 \text{ cm}$ και να σχεδιάσετε την μεσοκάθετό του.
7. Να φτιάξετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 8 \text{ cm}$ και να βρείτε το μέσο του M. Στη συνέχεια να φτιάξετε τις μεσοκαθέτους των ευθύγραμμων τμημάτων AM και MB.

8. Στο διπλανό σχήμα με την βοήθεια κανόνα και διαβήτη να βρείτε σημείο της πλευράς Ox που να ισαπέχει από τα σημεία Γ και Δ .



9. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε με την βοήθεια κανόνα και διαβήτη το κέντρο K του κύκλου.



B 2.4 Συμμετρία ως προς σημείο

❖ Συμμετρικό σημείου ως προς σημείο

- Το συμμετρικό του σημείου K ως προς ένα σημείο O είναι το σημείο K' , με το οποίο συμπίπτει το K αν περιστραφεί περί το O κατά 180°

✓ Δυο σημεία K και K' είναι συμμετρικά ως προς  σημείο O όταν το O είναι έσο του ευθύγραμμου τμήματος KK' .

✓ Το συμμετρικό του O ως προς το σημείο O είναι το ίδιο το σημείο O .

❖ Συμμετρικά σχήματα ως προς σημείο

- Δυο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο O , όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το O

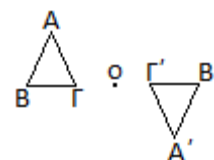
✓ Δυο σχήματα συμμετρικά ως προς σημείο O είναι ίσα.

✓ Δυο ευθύγραμμα τμήματα που είναι συμμετρικά ως προς σημείο είναι ίσα και παράλληλα.

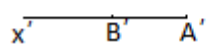
❖ Συμμετρικό ευθύγραμμου σχήματος ως προς σημείο

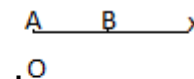
- Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου σχήματος ως προς ένα σημείο O φτιάχνουμε τα συμμετρικά των κορυφών του ως προς το σημείο O και στην συνέχεια τα ενώνουμε αντίστοιχα.

✓ Το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς το σημείο O είναι το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



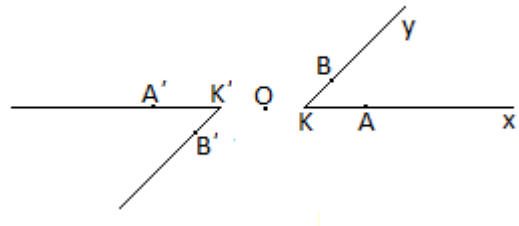
❖ Συμμετρική ημιευθεία ως προς σημείο.

- Για να κατασκευάσουμε τη συμμετρική της ημιευθείας Ax ως προς το σημείο O φτιάχνουμε το συμμετρικό A' του σημείου A ως προς το σημείο O , στη συνέχεια παίρνουμε ένα σημείο B της ημιευθείας Ax και φτιάχνουμε το συμμετρικό του B' ως προς το σημείο O . Η ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο A και διέρχεται από το B' είναι η συμμετρική της Ax ως προς το σημείο O .



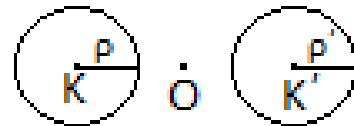
❖ Συμμετρική γωνίας ως προς σημείο

- Για να κατασκευάσουμε την συμμετρική της γωνίας $x\hat{K}y$ ως προς το σημείο O παίρνουμε δυο σημεία A και B πάνω στις πλευρές Ax και Ay , στη συνέχεια φτιάχνουμε τα συμμετρικά A' , K' , B' , των σημείων A , K , B αντίστοιχα ως προς το σημείο O . Η γωνία $A'\hat{K}'B'$ είναι η συμμετρική της $x\hat{K}y$ ως προς το σημείο O .



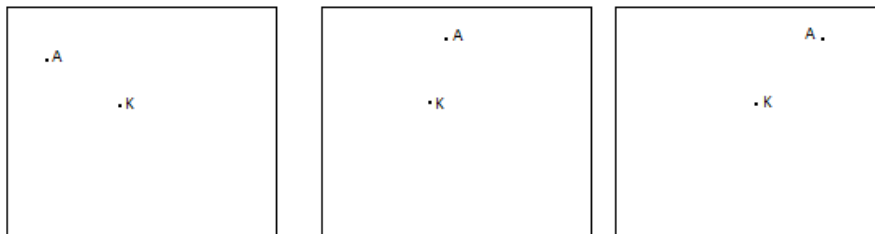
❖ Συμμετρικό κύκλου ως προς σημείο

- Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός κύκλου (K, ρ) ως προς το σημείο O φτιάχνουμε το συμμετρικό K' του κέντρου K ως προς το σημείο O και διαγράφουμε τον κύκλο (K', ρ) που είναι ο συμμετρικός του (K, ρ) ως προς το σημείο O .

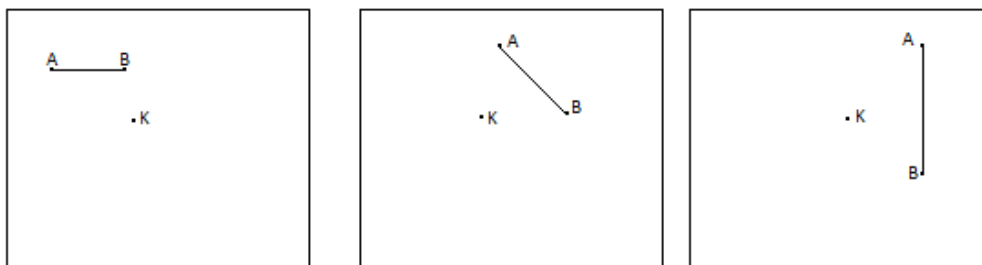


Ασκήσεις προς επίλυση

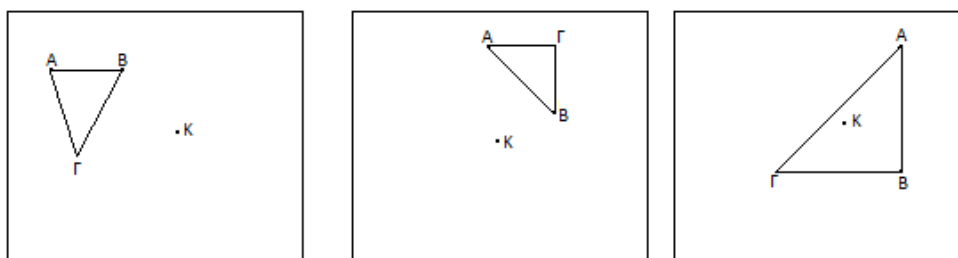
1. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο K στις παρακάτω περιπτώσεις



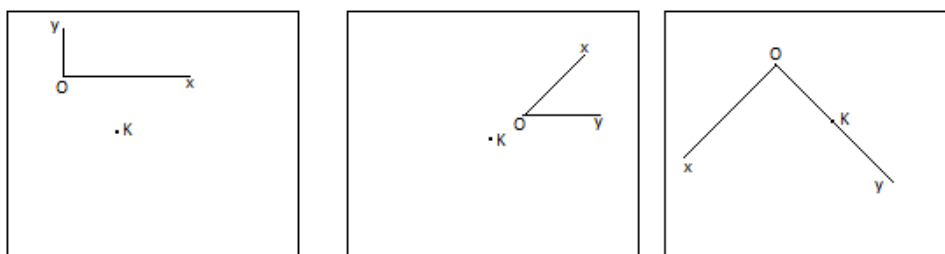
2. Να φτιάξετε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος AB ως προς το σημείο K στις παρακάτω περιπτώσεις



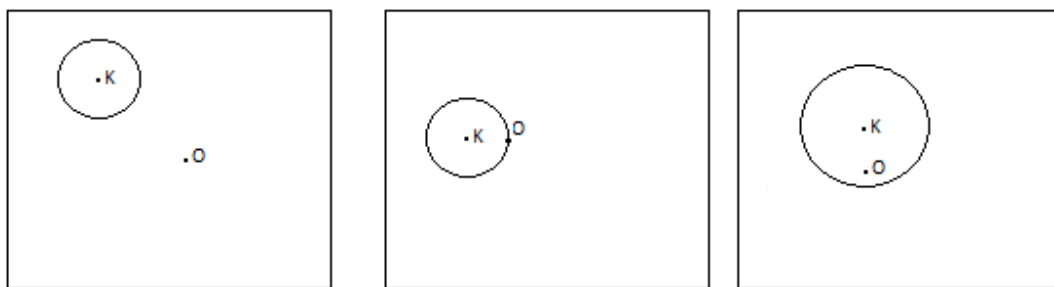
3. Να φτιάξετε το συμμετρικό του τριγώνου ABΓ ως προς το σημείο K στις παρακάτω περιπτώσεις



4. Να φτιάξετε τη συμμετρική της γωνίας $x\hat{O}y$ ως προς το σημείο K στις παρακάτω περιπτώσεις



5. Να φτιάξετε το συμμετρικό του κύκλου (K, ρ) ως προς το σημείο O στις παρακάτω περιπτώσεις.



6. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 4\text{cm}$ και να πάρετε σημείο Γ ώστε $A\Gamma = 3\text{ cm}$. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το συμμετρικό το $A\Gamma$ ως προς το σημείο B .
7. Να φτιάξετε ένα τρίγωνο $K\Lambda\text{M}$ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ως προς
 - i. Την κορυφή K
 - ii. Την κορυφή Λ
 - iii. Ένα εξωτερικό σημείο του O .

B 2.5 Κέντρο συμμετρίας

❖ *Κέντρο συμμετρίας*

- Το κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος ονομάζεται το σημείο O , γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180° τότε συμπίπτει με το αρχικό.
 - ✓ Αν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας τότε το συμμετρικό του σχήματος ως προς το κέντρο συμμετρίας είναι το ίδιο το σχήμα.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να βρείτε τα κέντρα συμμετρίας αν υπάρχουν των παρακάτω σχημάτων

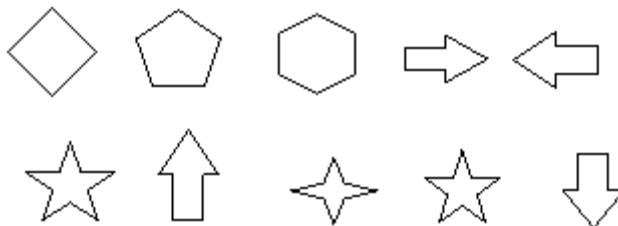
- i. Κύκλος
- ii. Τετράγωνο
- iii. Ρόμβος
- iv. Παραλληλόγραμμο

Λύση

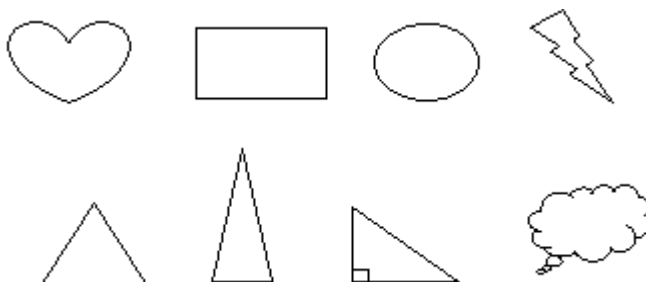
- i. Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του.
- ii. Το τετράγωνο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.
- iii. Ο ρόμβος έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.
- iv. Το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Ασκήσεις προς επίλυση

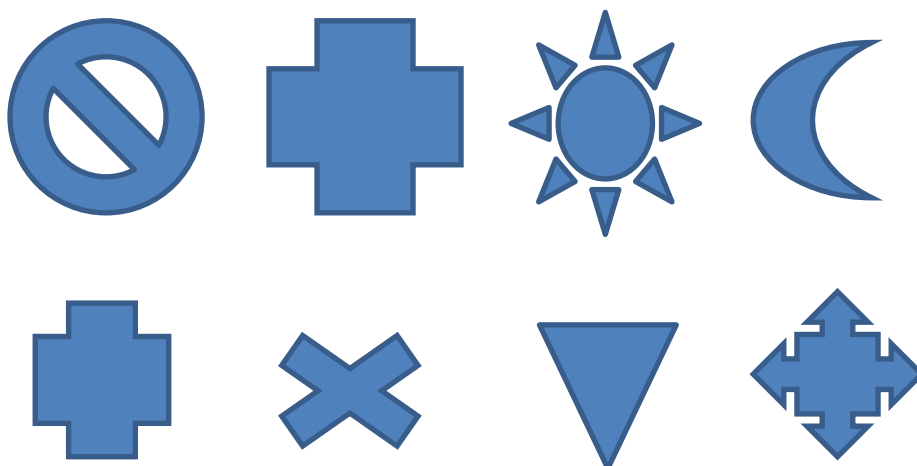
1. Να βρείτε στα επόμενα σχήματα το κέντρο συμμετρίας αν υπάρχει



2. Να βρείτε στα επόμενα σχήματα το κέντρο συμμετρίας αν υπάρχει



3. Να βρείτε στα επόμενα σχήματα το κέντρο συμμετρίας αν υπάρχει

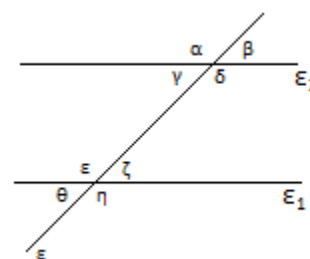


Β 2.5 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

❖ Ονομασίες γωνιών

➤ Αν ε_1 και ε_2 δυο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε , για τις γωνίες που σχηματίζονται έχουμε:

- Οι γωνίες που βρίσκονται μέσα στις παράλληλες ευθείες λέγονται εντός. Οι γωνίες $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\zeta}$ είναι εντός.
- Οι γωνίες που βρίσκονται έξω από τις παράλληλες ευθείες λέγονται εκτός. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\theta}$ είναι εκτός.
- Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε λέγονται επί τα αυτά. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\theta}$ ή $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{\eta}$ είναι επί τα αυτά.
- Οι γωνίες που βρίσκονται σε διαφορετική μεριά της ευθείας ε λέγονται εναλλάξ. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\zeta}$ ή $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$ κ.τ.λ. είναι εναλλάξ.
- ✓ Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι θα έχουμε τις παρακάτω έξι ονομασίες για τα 16 διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών



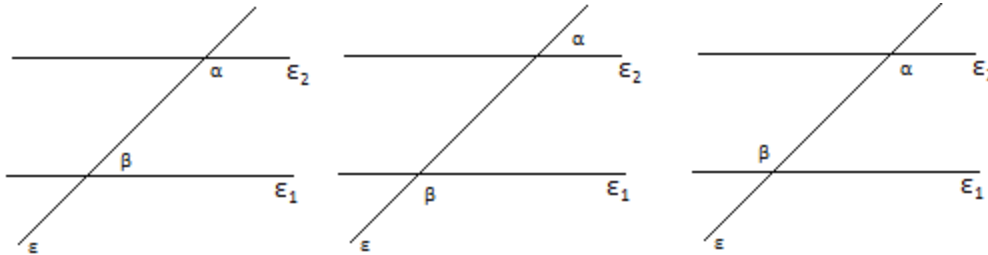
- α. Εντός εναλλάξ
- β. Εκτός εναλλάξ
- γ. Εντός εκτός επί τα αυτά
- δ. Εκτός και επί τα αυτά
- ε. Εντός εκτός και εναλλάξ
- στ. Εντός εκτός και επί τα αυτά.

❖ Σχέσεις μεταξύ των γωνιών

- Αν δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε τότε ισχύει ότι:
- Οι εντός και εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.
 - Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.
 - Οι εκτός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες
 - Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες που σχηματίζονται είναι παραπληρωματικές.
 - Οι εντός εκτός και εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι παραπληρωματικές.
 - Οι εκτός και επί τα αυτά γωνίες που σχηματίζονται είναι παραπληρωματικές.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Στα παρακάτω σχήματα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να χαρακτηρίσετε τις γωνίες α και β σε κάθε περίπτωση.



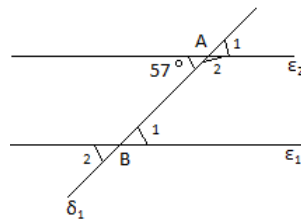
Λύση

Στο 1^ο σχήμα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εντός και επί τα αυτά

Στο 2^ο σχήμα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός και επί τα αυτά

Στο 3^ο σχήμα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εντός εναλλάξ.

2. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες.



Λύση

$\hat{A}_1 = 57^\circ$ ως κατακορυφήν

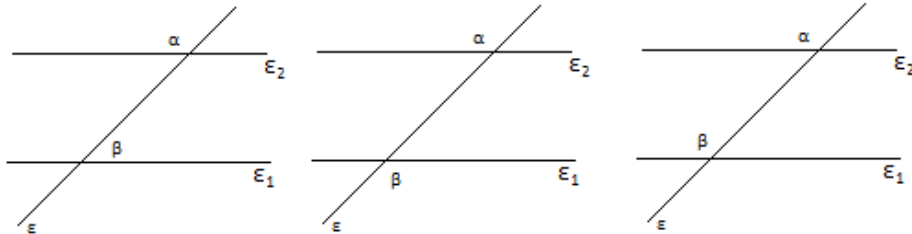
$\hat{A}_2 + 57^\circ = 180^\circ$ επειδή είναι παραπληρωματικές. Άρα $\hat{A}_2 = 123^\circ$

$\hat{B}_2 = 57^\circ$ ως ενός εναλλάξ των $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ που τέμνονται από την δ_1 .

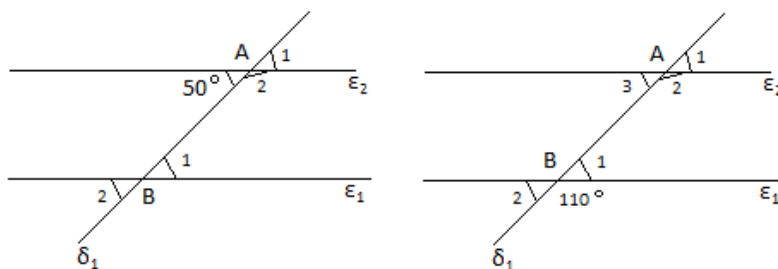
$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 57^\circ$ ως κατακορυφήν.

Ασκήσεις προς επίλυση

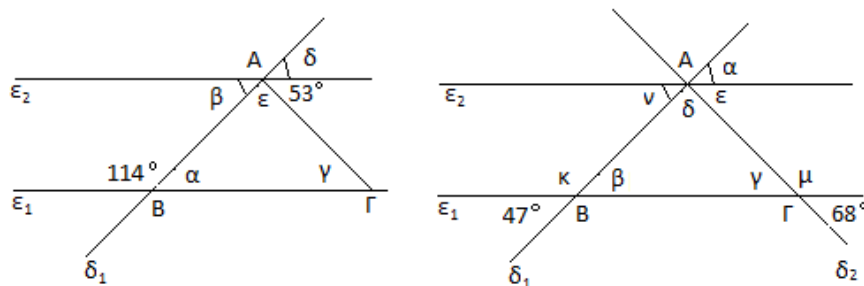
1. Στα παρακάτω σχήματα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να χαρακτηρίσετε τις γωνίες α και β σε κάθε περίπτωση.



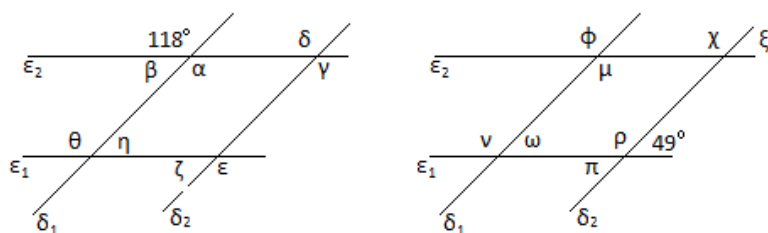
2. Στα παρακάτω σχήματα ισχύει ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες.



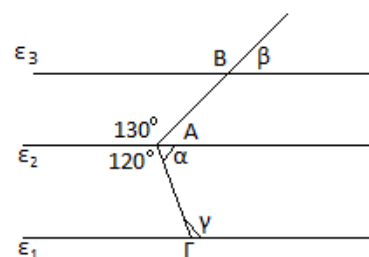
3. Στα παρακάτω σχήματα ισχύει ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες.



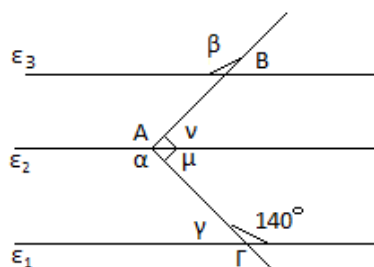
4. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\delta_1 // \delta_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες των παρακάτω σχημάτων.



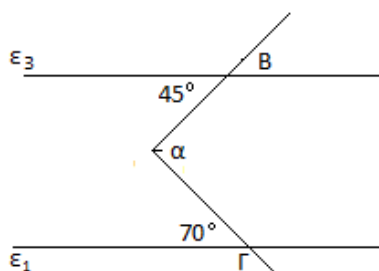
5. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες του παρακάτω σχήματος.



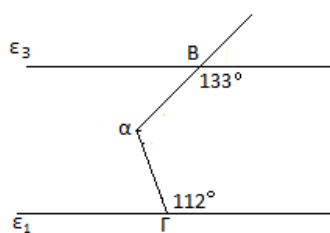
6. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες του παρακάτω σχήματος.



7. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες του παρακάτω σχήματος.



8. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες του παρακάτω σχήματος.



9. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\delta_1 // \delta_2$ να βρείτε τις σημειωμένες γωνίες του παρακάτω σχήματος.

