

Οδηγός Επιτυχίας
ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

νέο φροντιστήριο

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

➤ Ανάλυση διανύσματος:

✓ $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

✓ $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$

➤ Διανυσματική ακτίνα μέσου M ευθύγραμμου τμήματος AB:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

➤ Τριγωνική ανισότητα:

Για τα μέτρα (μήκη) των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ ισχύουν ότι:

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

✓ Η ισότητα $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ισχύει μόνο όταν $\vec{a} \uparrow \vec{b}$

✓ Η ισότητα $||\vec{a}| - |\vec{b}|| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ισχύει μόνο όταν $\vec{a} \uparrow \vec{b}$

Στην περίπτωση που $\vec{a}, \vec{b}$ δεν είναι συγγραμμικά ισχύει ότι:

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

➤ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα :

i. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

ii. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

iii. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$

iv. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$

v. $(-\lambda)\vec{a} = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda\vec{a})$

vi. Αν $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{b}$

vii. Αν $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$

➤ Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων :

Αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι δυο διανύσματα με $\vec{b} \neq \vec{0}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

➤ Συνευθειακά σημεία:

Τα A, B, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} : \vec{AB} = \lambda \cdot \vec{B\Gamma}$

➤ Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων :

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ αντίστοιχα τότε :

i. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ii. $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

iii. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$

iv. $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ και } y_1 = 0$

➤ Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα:

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου τότε :

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

➤ Μέτρο διανύσματος:

Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

➤ Απόσταση δύο σημείων του επιπέδου :

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου τότε η απόσταση των δύο σημείων είναι ίση με :

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

➤ Συντεταγμένες μέσου τμήματος :

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου και

M το μέσο του AB τότε : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

➤ Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων :

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{pmatrix} = 0$$

➤ Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος:

Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος

$\vec{\alpha} = (x, y)$ με $x \neq 0$ ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ και

συμβολίζεται με λ δηλαδή : $\lambda = \frac{y}{x}$

✓ Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε: 1) $\vec{\alpha} // \vec{x} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = 0$

2) $\vec{\alpha} // \vec{y} \Leftrightarrow$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.

✓ Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_{\vec{\beta}}$ τότε:

1) $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

2) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1, \lambda_{\vec{\alpha}}, \lambda_{\vec{\beta}} \neq 0$

➤ Εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$:

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον αριθμό: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

✓ Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

➤ Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

iii. $(\lambda \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta})$

iv. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}^2$

v. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

vi. $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

vii. $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

viii. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

1) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ 2) $\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

ix. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

x. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$

xi. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΥΘΕΙΑ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

- Συντελεστή διεύθυνσης λ ή κλίση της ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα xx' ($\lambda = \varepsilon\varphi\hat{\omega}$).
- ✓ Αν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα xx' ο συντελεστής διεύθυνσης της ε δεν ορίζεται.
- ✓ Αν $0 \leq \hat{\omega} < \frac{\pi}{2}$ τότε $\lambda \geq 0$.
- ✓ Αν $\frac{\pi}{2} < \hat{\omega} < \pi$ τότε $\lambda < 0$.
- ✓ Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα έχουν το ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.
- ✓ Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- ✓ Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα τότε έχουμε:

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

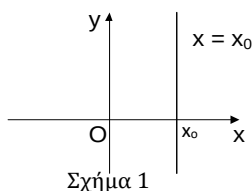
$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

- Εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από σταθερό σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ : $\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
- Εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από δυο σταθερά σημεία $A(x_1, y_1)$ και

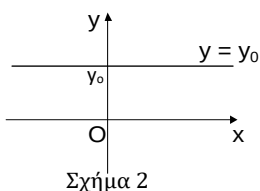
$$B(x_2, y_2) \text{ με } x_1 \neq x_2: \quad \varepsilon: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- Παρατηρήσεις:

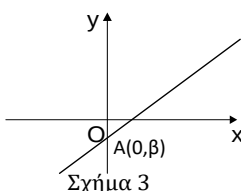
- i. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $x = x_0$. (σχήμα 1°)
- ii. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $y = y_0$. (σχήμα 2°)
- iii. Η εξίσωση της ευθείας ε που τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y = \lambda x + \beta$. (σχήμα 3°)
- iv. Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τη αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι η $y = \lambda x$. (σχήμα 4°)



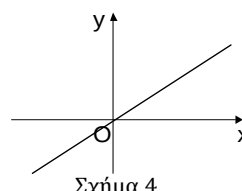
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

- Η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι : $y=x$
- Η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $x'\hat{O}y$ είναι : $y=-x$
- Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση : $y=0$
- Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση : $x=0$
- Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας : $Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$
 - ✓ Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
 - ✓ Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.
 - ✓ Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ μόνο αν $B \neq 0$ και ισούται με $\lambda = \frac{-A}{B}$.
 - ✓ Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν $A=0$.
 - ✓ Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ αν και μόνο αν $B=0$.
 - ✓ Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $\Gamma=0$.
 - ✓ Η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ **δεν** παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν $A=0$ και $B=0$.

- Απόσταση σημείου από ευθεία:

Έστω (ε) μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ και $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής. Τότε:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

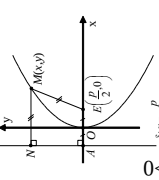
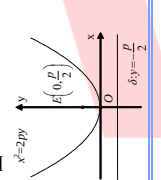
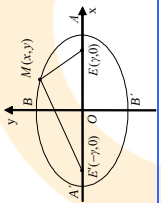
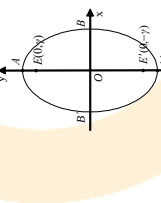
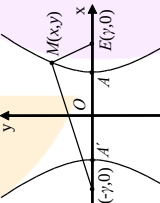
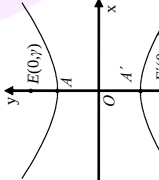
- Εμβαδόν τριγώνου:

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Τότε: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

- Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο.
- Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ : $C : x^2 + y^2 = \rho^2$
- Εφαπτομένη ε κύκλου C με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ στο σημείο επαφής $M(x_1, y_1)$: $\varepsilon : xx_1 + yy_1 = \rho^2$
- Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ :
 $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$
- Εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$:
 - ✓ Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$
 - ✓ Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
 - ✓ Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη δηλαδή παριστάνει το κενό σύνολο.
- Σχετικές Θέσεις ευθείας (ε) και κύκλου C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .
 - ✓ Η ευθεία (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο C αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) > \rho$
 - Η ευθεία (ε) λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου C .
 - ✓ Η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο C αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) < \rho$
 - Η ευθεία (ε) λέγεται **τέμνουσα** ευθεία του κύκλου C .
 - ✓ Η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο C αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) = \rho$
 - Η ευθεία (ε) λέγεται **εφαπτομένη** ευθεία του κύκλου C .

	ΟΡΙΣΜΟΣ	ΕΙΣΙΣΩΣΗ	ΣΧΗΜΑ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ	ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ	ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΟ (x_1, y_1)
ΠΑΡΑΒΟΛΗ	Γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ισαπέχουν από μια ευθεία δ (διευθετούσα) και ένα σημείο Ε (εστία) που δεν ανήκει στη δ. $d(M, \delta) = (ME)$	Εστία στον $x'x$ $y^2 = 2px$		Εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$ Κορυφή $O(0, 0)$	διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$		$\varepsilon: y_1 y = p(x + x_1)$ $\lambda_e = \frac{p}{y_1}$
		Εστία στον $y'y$ $x^2 = 2py$		Εστία $E(0, \frac{p}{2})$ Κορυφή $O(0, 0)$	διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$		$\varepsilon: x_1 x = p(y + y_1)$ $\lambda_e = \frac{x_1}{p}$
ΕΛΛΕΙΨΗ	Γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε', Ε (εστίες). $(ME') + (ME) = 2a$ $(E'E) = 2\gamma, \alpha > \gamma$	Εστίες στον $x'x$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $b^2 = a^2 - \gamma^2$		Εστίες $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$ Κορυφές $A'(-a, 0), A(a, 0)$ $B'(-b, 0), B(b, 0)$ Κέντρο $O(0, 0)$		$\varepsilon = \frac{\gamma}{a}$ $0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ $\lambda_e = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$
		Εστίες στον $y'y$ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ $b^2 = a^2 - \gamma^2$		Εστίες $E'(0, -\gamma), E(0, \gamma)$ Κορυφές $A'(0, -a), A(0, a)$ $B'(-b, 0), B(b, 0)$ Κέντρο $O(0, 0)$			$\varepsilon: \frac{y_1 y}{a^2} + \frac{x_1 x}{b^2} = 1$ $\lambda_e = \frac{x_1 a^2}{y_1 b^2}$
ΥΠΕΡΒΟΛΗ	Γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που έχουν κατ' απόλυτη τιμή σταθερή διαφορά αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε', Ε (εστίες). $ (ME') - (ME) = 2a$ $(E'E) = 2\gamma, \gamma > a$	Εστίες στον $x'x$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $b^2 = \gamma^2 - a^2$		Εστίες $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$ Κορυφές $A'(-a, 0), A(a, 0)$ Κέντρο $O(0, 0)$	Ασύμπτωτες $\varepsilon_1: y = \frac{b}{a}x$ $\varepsilon_2: y = -\frac{b}{a}x$	$\varepsilon = \frac{\gamma}{a}$ $\varepsilon > 1$	$\varepsilon: \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ $\lambda_e = \frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$
		Εστίες στον $y'y$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ $b^2 = \gamma^2 - a^2$		Εστίες $E'(0, -\gamma), E(0, \gamma)$ Κορυφές $A'(0, -a), A(0, a)$ Κέντρο $O(0, 0)$	Ασύμπτωτες $\varepsilon_1: y = \frac{a}{b}x$ $\varepsilon_2: y = -\frac{a}{b}x$		$\varepsilon: \frac{y_1 y}{a^2} - \frac{x_1 x}{b^2} = 1$ $\lambda_e = \frac{x_1 a^2}{y_1 b^2}$

ΘΕΜΑ 2

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, -1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

2. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 06)

3. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

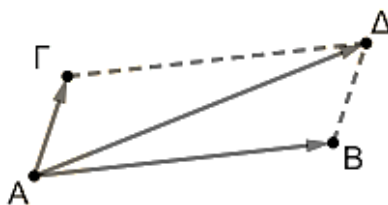
(Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ .

(Μονάδες 05)



4. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AG .

(Μονάδες 07)

5. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

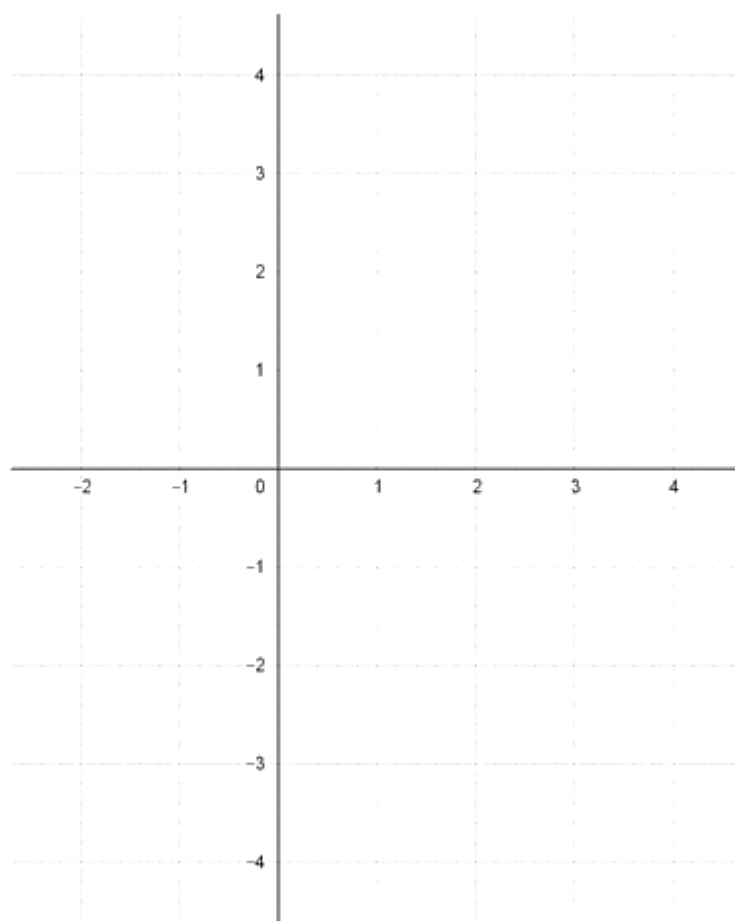
6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3,0)$ και $\vec{w} = (-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{AG}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

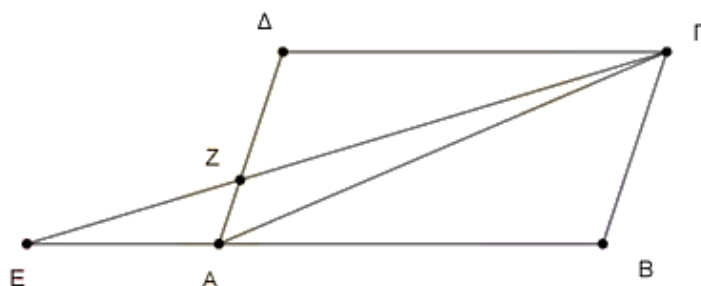
(Μονάδες 7)

9. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\vec{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$ και $\vec{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AD}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



10. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

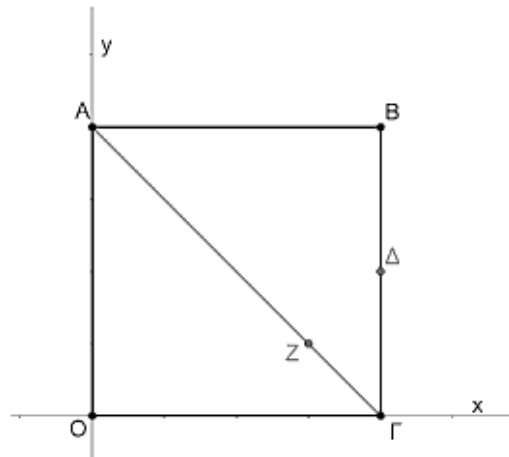
11. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.
- α) Να βρεθεί το σημείο B. (Μονάδες 09)
- β) Αν $B(5,0)$:
- i. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 08)
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
12. Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\epsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$.
- α) Να αποδείξετε ότι: $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$. (Μονάδες 12)
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 13)
13. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5,1)$ και $B(-3,5)$.
- α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε:
- i. την εξίσωση της ευθείας ϵ' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ϵ . (Μονάδες 5)
- ii. το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ' . (Μονάδες 5)
- iii. το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ϵ . (Μονάδες 5)
14. Δίνονται το σημείο $A(4,-2)$ και η ευθεία (ϵ_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:
- α) την ευθεία (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1). (Μονάδες 8)
- β) το σημείο τομής B, των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2): $y = -x + 2$. (Μονάδες 8)
- γ) το συμμετρικό Γ του σημείου A, ως προς την ευθεία (ϵ_1). (Μονάδες 9)
15. Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$
- α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB. (Μονάδες 4)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB. (Μονάδες 5)
- γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ϵ): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ϵ). (Μονάδες 9)
- δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ϵ) είναι $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. (Μονάδες 7)

17. Δίνεται το τετράγωνο ABΓO με κορυφές τα σημεία A(0,4), B(4,4), Γ(4,0), O(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Z, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.

α) Να βρείτε:

- Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 07)
- Τις συντεταγμένες του σημείου Z. (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Z το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (Μονάδες 09)



16. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο K(1,2) και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 5)

18. Τα σημεία A(-8, 1), B(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 10)

20. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C .

(Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

19. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

21. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

22. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

24. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο K της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

(Μονάδες 7)

23. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

(Μονάδες 10)

25. Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

(Μονάδες 10)

26. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$

τέτοια ώστε $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE} = \vec{\Gamma B}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

27. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) : 8\chi + \psi - 28 = 0$, $(\epsilon_2) : \chi - \psi + 1 = 0$, $(\epsilon_3) : 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ϵ_1) και (ϵ_2) .

(Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο τομής είναι το M(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

ii. Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ϵ_3) . (Μονάδες 08)

29. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(2,5), B(3,6) και Γ(-1,-2).

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας BΓ.

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα x'x.

(Μονάδες 09)

30. Δίνεται το σημείο A(1,2) και η ευθεία $(\epsilon) : y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ϵ) .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ϵ) .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ϵ) .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

31. Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4$.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

32. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)

γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

33. Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία A , B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 6)

35. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον xx' .

(Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον yy' .

(Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το $(0,0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

(Μονάδες 8)

34. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4$

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

36. Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση (ε): $15x - 8y - 30 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 7)

- 37.** Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2,1), B(4,3)$, βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

- 38.** Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δεύτερου $B(3t-1, -4t-1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+7=0$ ισούται με 6.

(Μονάδες 5)

40. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.
- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 04)
- β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:
- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E . (Μονάδες 10)
- ii. Να αποδείξετε ότι $\overline{A\Delta} = 2\overline{\Delta B}$ και $\overline{AE} = 2\overline{E\Gamma}$. (Μονάδες 06)
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία DE είναι παράλληλη της $B\Gamma$. (Μονάδες 05)
39. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$. (Μονάδες 5)
- β) Αν $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ γωνία $\hat{\varphi} = 45^\circ$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 4)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 .
41. Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 15)
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)
42. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $\Lambda(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α)
- i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)
- ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)
- β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
- i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)
- ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

44. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(-2, 1), B(1, 5) και Γ(5, -1).
- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:
- $$(MAB) = \frac{1}{2} (AB\Gamma).$$
- (Μονάδες 7)
43. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda-2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)
45. Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)

47. Δίνονται οι εξισώσεις

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \quad (2).$$

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ).

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

(Μονάδες 9)

46. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0$ (1) με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

δ) Για $k = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

(Μονάδες 8)

48. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα Κ, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $\hat{xOy}$ του συστήματος συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα Β, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

(Μονάδες 10)

49. Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(χ,ψ) ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ (1)

(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$:

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): $\lambda x + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1).

(Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45° ;

(Μονάδες 07)

50. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \text{ και } C_2 : (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18.$$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

(Μονάδες 8)

51. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y + 1)^2 = 5$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C .

(Μονάδες 6)

52. Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

53. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-2)$, $B(0,-4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .

(Μονάδες 08)

γ) Αν $M(1,-2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

54. Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$.

(Μονάδες 6)

55. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=1$.

α) Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° .

(Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ϵ τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία A' και B .

(Μονάδες 06)

57. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

$$\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

α)

- i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την ε . (Μονάδες 07)
- ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 05)

β)

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ζ της παραβολής με ζ παράλληλη στην ε . (Μονάδες 08)
- ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε ; (Μονάδες 05)

56. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E .

(Μονάδες 7)

59. Δίνεται η παραβολή $C: x^2=4y$ και η ευθεία $\epsilon: y=x-2$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ϵ . (Μονάδες 8)

γ) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ϵ είναι $d(M,\epsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

58. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(y,0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-y,0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

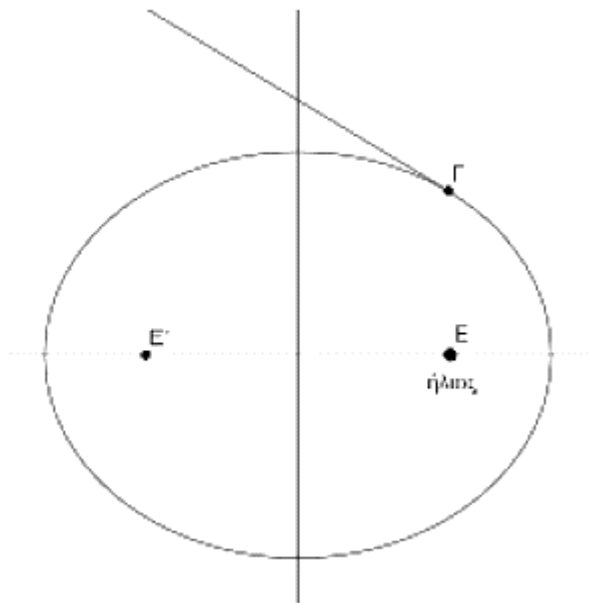
α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0,5)$. (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)



60. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

- i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- ii. Των εστιών E και E' της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο A(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)