

«Οὐκ ἴσμεν δέ τὸ ἀληθές ἄνευ τῆς αἰτίας»

(Δεν γνωρίζουμε την αλήθεια , αν δεν έχουμε γνώση της αιτίας)

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ τάξης Λυκείου και είναι γραμμένο σύμφωνα με τις τελευταίες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Με την καθοδήγηση των καθηγητών του ομίλου **ν έ ο** το βιβλίο αυτό αποτελεί μια ολοκληρωμένη πρόταση, που θα σας οδηγήσει με επιτυχία στην κατανόηση της διδακτέας ύλης, ώστε να είστε έτοιμοι για το μέγιστο δυνατό αποτέλεσμα, θέτοντας τα θεμέλια για την εισαγωγή σας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Περιέχει

*Θεωρία

*Λυμένες ασκήσεις που καλύπτουν τις ανάγκες όλων των μαθητών

*Προτεινόμενες ασκήσεις με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας

*Επαναληπτικές ασκήσεις

Επίσης ευχαριστούμε τους συνάδελφους μαθηματικούς Μήτρου Βασίλη, Νικολακόπουλο Μάριο, Τογιόπουλο Γιώργο για τη συμβολή τους στον εμπλουτισμό των ασκήσεων του βιβλίου.

Με εκτίμηση

Τσίμος Βασίλειος

Ζαφείρης Βασίλειος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : Συστήματα

1.1 Η Έννοια του γραμμικού συστήματος.....	07
Ασκήσεις για εξάσκηση	21
1.2 Μη γραμμικά συστήματα.....	35
Ασκήσεις για εξάσκηση.....	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : Συναρτήσεις

2.1 Μονοτονία ακρότατα συμμετρίες συνάρτησης	44
Ασκήσεις για εξάσκηση	51
2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπισης καμπύλης	58
Ασκήσεις για εξάσκηση	62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί.....	72
Ασκήσεις για εξάσκηση	77
3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.....	78
Ασκήσεις για εξάσκηση	83
3.3 Αναγωγή στο 1 ^ο τεταρτημόριο.....	85
Ασκήσεις για εξάσκηση	89
3.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.....	93
Ασκήσεις για εξάσκηση	100
3.5 Βασικές τριγωνομετρικές Εξισώσεις.....	107
Ασκήσεις για εξάσκηση	115
3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών.....	123
Ασκήσεις για εξάσκηση	131
3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 2α	135
Ασκήσεις για εξάσκηση	141

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο Πολυώνυμα

4.1. Πολυώνυμα	150
Ασκήσεις για εξάσκηση.....	156
4.2. Διαίρεση πολυωνύμων.....	159
Ασκήσεις για εξάσκηση	170
4.3. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις	174
Ασκήσεις για εξάσκηση	184
4.4. Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.....	194
Ασκήσεις για εξάσκηση	200

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

5.1. Εκθετική συνάρτηση.....	210
Ασκήσεις για εξάσκηση	217
5.2. Λογάριθμοι	224
Ασκήσεις για εξάσκηση	228
5.3. Λογαριθμική συνάρτηση.....	231
Ασκήσεις για εξάσκηση	236
 ΕΠΑΝΑΛΥΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.....	 248



Κεφάλαιο 1^ο

Συστήματα

1.1 Η Έννοια του γραμμικού συστήματος

➤ Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

- ✓ Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους x και y .
- ✓ **Λύση** μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ είναι κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

π.χ. η εξίσωση $3x + 2y = 7$ έχει λύση το ζεύγος $(1, 2)$ διότι την επαληθεύει.

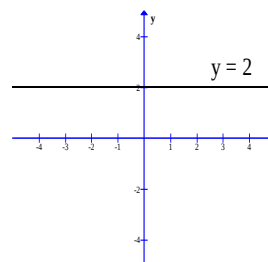
- ✓ Μια εξίσωση της μορφής $0x + 0y = 3$ είναι αδύνατη. (Δεν έχει λύση κανένα ζεύγος αριθμών)
- ✓ Μια εξίσωση της μορφής $0x + 0y = 0$ είναι αόριστη ή ταυτότητα (οι λύσεις τις είναι άπειρες και είναι κάθε ζεύγος (x, y) του επιπέδου)

➤ Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων

1. Η εξίσωση $y = \kappa$ όπου κ ένας πραγματικός αριθμός.

- ✓ Αν $\kappa \neq 0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x και διέρχεται από το σημείο $(0, \kappa)$ του άξονα y .
- ✓ Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x .

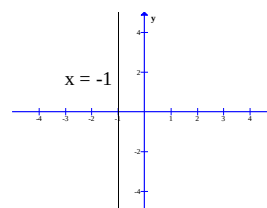
π.χ. Η εξίσωση $y = 2$ δίνεται από το διπλανό γράφημα:



2. Η εξίσωση $x = \kappa$ όπου κ ένας πραγματικός αριθμός.

- ✓ Αν $\kappa \neq 0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το σημείο $(\kappa, 0)$ του άξονα x .
- ✓ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y .

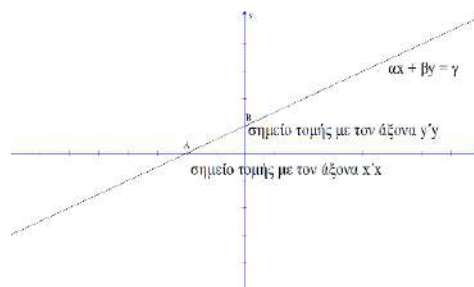
π.χ. Η εξίσωση $x = -1$ δίνεται από το διπλανό γράφημα:



Μια γραμμική εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$

- **Εύρεση των σημείων τομής της εξίσωσης $ax + by = \gamma$ με τους άξονες xx' και yy'**

- ✓ Για να βρούμε το σημείο τομής της εξίσωσης $ax + by = \gamma$ με τον άξονα xx' **βάζουμε όπου $x = 0$ και βρίσκουμε την τιμή του y .**



- ✓ Για να βρούμε το σημείο τομής της εξίσωσης $ax + by = \gamma$ με τον άξονα yy' **βάζουμε όπου $y = 0$ και βρίσκουμε την τιμή του x .**

- **Παρατηρήσεις**

- ✓ Για να είναι μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ παράλληλη με τον άξονα xx' θα πρέπει $a = 0$ και $b \neq 0$.
- ✓ Για να είναι μία εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ παράλληλη με τον άξονα yy' θα πρέπει $b = 0$ και $a \neq 0$.
- ✓ Για να είναι μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα πρέπει $\gamma = 0$ και $a, b \neq 0$.

- **Γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους x, y .**

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y λέμε δύο γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους x, y .

- **Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος**

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= \gamma_1 \\ a_2x + b_2y &= \gamma_2 \end{aligned}$$

- **Λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**

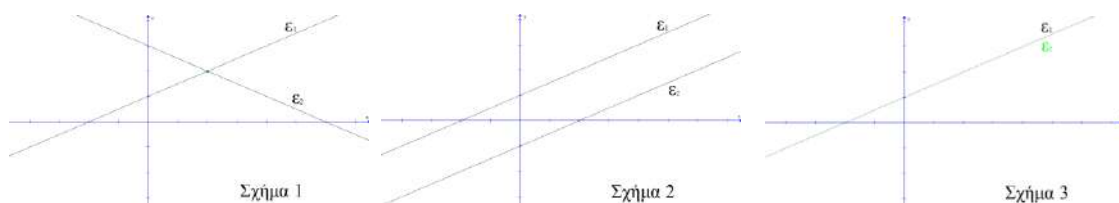
Λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που **επαληθεύει** και τις δύο εξισώσεις.

- **Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους.**

- Για την γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις και αν :

1. Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο τότε το σημείο αυτό είναι η λύση του συστήματος. (Σχήμα 1)
2. Οι ευθείες είναι παράλληλες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο τότε το σύστημα δεν έχει λύση είναι αδύνατο. (Σχήμα 2)
3. Οι ευθείες συμπίπτουν τότε έχουν άπειρα κοινά σημεία άρα το σύστημα είναι αόριστο (Σχήμα 3)



➤ **Αλγεβρική επίλυση συστήματος**

Για να λύσουμε αλγεβρικά μια εξίσωση με ένα άγνωστο προσπαθούμε να απαλείψουμε έναν από τους δύο αγνώστους ώστε να προκύψει εξίσωση πρώτου βαθμού την οποία γνωρίζουμε να επιλύουμε.

Έχουμε 3 μεθόδους λύσης οι οποίες είναι οι εξής:

A) Μέθοδος της αντικατάστασης.

Μέθοδος λύσης με την μέθοδο της αντικατάστασης

Βήμα 1 Λύνουμε την μία από τις δύο εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο

Βήμα 2 Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση τον άγνωστο με την ίση παράσταση που βρήκαμε στο βήμα 1 .

Βήμα 3 Λύνουμε την εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει και βρίσκουμε την τιμή του ενός αγνώστου.

Βήμα 3 Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στην παράσταση του πρώτου βήματος και βρίσκουμε την τιμή του δεύτερου αγνώστου.

Βήμα 4 Προσδιορίζουμε την λύση του συστήματος

π.χ. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 4(-2y) - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -9y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Β) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών.

Μέθοδος λύσης με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

Βήμα 1 Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους.

Βήμα 2 Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη οπότε προκύπτει εξίσωση πρώτου βαθμού την οποία και λύνουμε.

Βήμα 3 Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου σε μια από τις δυο αρχικές εξισώσεις οπότε βρίσκουμε την λύση του δεύτερου αγνώστου.

Βήμα 4 Προσδιορίζουμε την λύση του συστήματος

π.χ. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 6x + 14y = 3 \end{cases} \begin{matrix} \times (-2) \\ \times 1 \end{matrix} \begin{cases} -6x - 14y = -4 \\ 6x + 14y = 3 \end{cases} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \begin{cases} 0x + 0y = -1 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases} \begin{matrix} \text{ΑΔΥΝΑΤΟ} \end{matrix}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη!!!

➤ Ορισμός

Η παράσταση της μορφής $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ λέγεται ορίζουσα και ορίζεται ως:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Γ) Επίλυση συστήματος με την μέθοδο των οριζουσών

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

Ορίζουμε τις τιμές:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

Για το σύστημα ισχύει ότι:

- Αν $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (x, y) όπου

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ και } y = \frac{D_y}{D}$$

- Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο
- Αν $D = D_x = D_y = 0$ το σύστημα είναι αόριστο εκτός από την περίπτωση όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ και $\gamma_1 \neq 0$ ή $\gamma_2 \neq 0$.
 ✓ Το σύστημα που έχει σταθερούς όρους μηδέν λέγεται ομογενές και έχει πάντα λύση το ζεύγος $(0,0)$

➤ Γραμμικό σύστημα 3×3

Όταν έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 3×3 το οποίο έχει την μορφή

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

- ✓ Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3×3 εφαρμόζουμε την μέθοδο της αντικατάστασης ή την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών που μάθαμε στα γραμμικά συστήματα 2×2 .
- ✓ Ένα γραμμικό σύστημα 3×3 η θα έχει **μοναδική λύση** ή θα είναι **αδύνατο** ή θα είναι **αόριστο**.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα

- i. $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases}$
- ii. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

Λύση

- i. Φτιάχνουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις :

$$\varepsilon_1 : y = x + 5$$

x	0	1
y	5	6

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$$y = 0 + 5 \Leftrightarrow y = 5 \text{ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο } A(0, 5)$$

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$$y = 1 + 5 \Leftrightarrow y = 6 \text{ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο } B(1, 6)$$

$$\varepsilon_2 : y = x - 5$$

x	0	1
y	-5	-4

Για $x = 0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_2 και

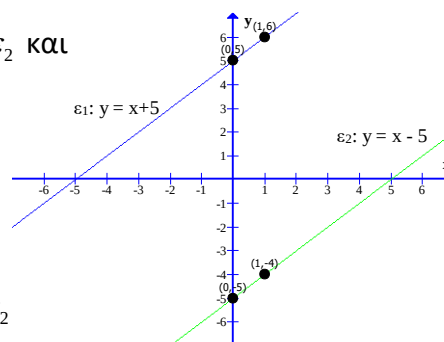
$$\text{προκύπτει ότι : } y = 0 - 5 \Leftrightarrow y = -5$$

Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0, -5)$

Για $x = 1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_2

$$\text{και προκύπτει ότι : } y = 1 - 5 \Leftrightarrow y = -4$$

Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Delta(1, -4)$



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες επομένως δεν έχουν κανένα κοινό σημείο άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**.

ii. Φτιάχνουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις :

$$\varepsilon_1 : x + y = 2$$

x	0	1
y	2	1

Για $x=0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$$0 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 \text{ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο } A(0, 2)$$

Για $x=1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και προκύπτει ότι :

$$1 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο } B(1, 1)$$

$$\varepsilon_2 : x + 3y = 6$$

x	0	3
y	2	1

Για $x=0$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1 και

$$\text{προκύπτει ότι : } 0 + 3y = 6 \Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 2$$

Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0, 2)$

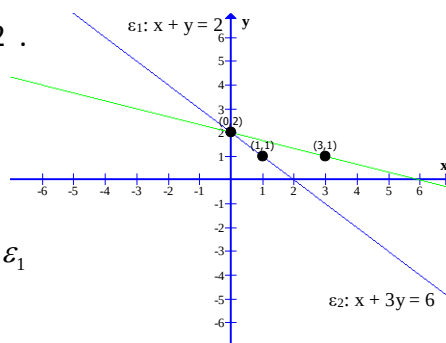
Για $x=1$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ε_1

και προκύπτει ότι :

$$3 + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 - 3 \Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow y = 1$$

Επομένως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Delta(3, 1)$

Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(0, 2)$ Άρα το σύστημα έχει μία λύση την $(x, y) = (0, 2)$



2. Να λύσετε τα συστήματα

- i.
$$\begin{cases} 4x + 15y = 17 \\ -x + 5y = -13 \end{cases}$$
- ii.
$$\begin{cases} 5(y + 2) - 2(4 - x) = 3 \\ -x - 3(y - 2) = 6 \end{cases}$$

Λύση

i.
$$\begin{cases} 4x + 15y = 17 \\ -x + 5y = -13 \end{cases} \begin{cases} \cdot 1 \\ \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 15y = 17 \\ -4x + 20y = -52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35y = -15 \\ -x + 5y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x - 5 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 8 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(8, -1)$

ii.
$$\begin{cases} 5(y + 2) - 2(4 - x) = 3 \\ -x - 3(y - 2) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y + 10 - 8 + 2x = 3 \\ -x - 3y + 6 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \begin{cases} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 1 \\ -x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -1)$

3. Να λύσετε τα συστήματα

- i.
$$\begin{cases} -x + 2|y| = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$$
- ii.
$$\begin{cases} (y - 2x)(x + y) = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Λύση

i.
$$\begin{cases} -x + 2|y| = 5 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + 2 + 2|y| = 5 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|y| = y + 3 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

Κάνουμε τον περιορισμό $y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -3$ και έχουμε τα εξής δυο συστήματα:

$$\begin{cases} 2y = y + 3 \\ x = y - 2 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} 2y = -y - 3 \\ x = y - 2 \end{cases} \text{ τα οποία λύνουμε ξεχωριστά}$$

$$\begin{cases} 2y = y + 3 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι (1,3)

$$\begin{cases} 2y = -y - 3 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -3 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι (-3, -1)

4. Να λύσετε τα συστήματα

i.
$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -1 \\ \frac{3y+2x}{xy} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} x^2 + y^3 = -7 \\ 3x^2 - y^3 = 11 \end{cases}$$

Λύση

i.
$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -1 \\ \frac{3y+2x}{xy} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -1 \\ \frac{3y}{xy} + \frac{2x}{xy} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4 \cdot 2}{y} = -1 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Θέτουμε $\frac{3}{x} = \kappa$ και $\frac{2}{y} = \lambda$ και το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \kappa - 4\lambda = -1 \\ \kappa + \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa - 4\lambda = -1 \\ 2\kappa + 2\lambda = 3 \end{cases} \begin{cases} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa - 4\lambda = -1 \\ 4\kappa + 4\lambda = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa = 5 \\ 2\kappa + 2\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ 2 \cdot 1 + 2\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ 2\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα έχουμε $\frac{3}{x} = \kappa \Leftrightarrow \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$ και $\frac{2}{y} = \lambda \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 4$

Επομένως η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (3,4)

ii.
$$\begin{cases} x^2 + y^3 = -7 \\ 3x^2 - y^3 = 11 \end{cases} \text{ θέτουμε } x^2 = \kappa \text{ και } y^3 = \lambda \text{ και το σύστημα γράφεται:}$$

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = -7 \\ 3\kappa - \lambda = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa = 4 \\ 3\kappa - \lambda = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ 3 - \lambda = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -8 \end{cases}$$

Άρα έχουμε $x^2 = \kappa \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ και

$$y^3 = \lambda \Leftrightarrow y^3 = -8 \Leftrightarrow y = -2$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (1, -2), (-1, -2)

5. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες

i. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$

Λύση

i. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 9 \cdot 0 = 8 - 0 = 8$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\begin{vmatrix} 3x & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

ii. $\begin{vmatrix} x & 3x-1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Λύση

i. $\begin{vmatrix} 3x & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 12x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$12x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

ii. $\begin{vmatrix} x & 3x-1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x+1) - 1 \cdot (3x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 + x - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

7. Να λυθούν τα συστήματα με την μέθοδο των οριζουσών

i. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$

Λύση

i. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

Βρίσκουμε τις τιμές:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$$

Άρα έχουμε $D = D_x = D_y = 0$ Δηλαδή το σύστημα είναι έχει άπειρες

λύσεις της μορφής $(x,y)=(k, \frac{3k-5}{2})$ με k πραγματικό αριθμό

ii.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τις τιμές:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

Επειδή $D = 0$ και $D_x \neq 0$ έχουμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.

iii.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τις τιμές:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -16 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 48 = 38$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} = -32 - 25 = -57$$

Επειδή $D \neq 0$ το σύστημα έχει **μοναδική λύση** με

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{38}{-19} = -2 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-57}{-19} = 3$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(-2,3)$

8. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x - \lambda(1 - y) = 0 \\ x + y + 1 = 2\lambda \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} x - \lambda(1 - y) = 0 \\ x + y + 1 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \lambda + \lambda y = 0 \\ x + y = 2\lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = \lambda \\ x + y = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τις τιμές:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2\lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda(2\lambda - 1) = \lambda - 2\lambda^2 + \lambda = -2\lambda^2 + 2\lambda \\ = -2\lambda(\lambda - 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 2\lambda - 1 - \lambda = \lambda - 1$$

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ Το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2\lambda(\lambda - 1)}{1 - \lambda} = 2\lambda \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda - 1}{1 - \lambda} = -1$$

- Αν $D = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε

$$D_x = -2 \cdot 1(1 - 1) = 0$$

$$D_y = 1 - 1 = 0$$

Άρα το σύστημα είναι **Αόριστο**.

9. Να λύσετε τα συστήματα

i.
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = -1 \\ z + x = 1 \end{cases}$$

Λύση

i.
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 & (1) \\ 2x - y + z = 0 & (2) \\ x - 3y + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

Απαλείφουμε το x μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2) .

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \text{ προσθέτουμε κατά}$$

μέλη και προκύπτει $-5y + 3z = 0$ (4)

Απαλείφουμε το x μεταξύ των εξισώσεων (1) και (3)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \begin{cases} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{cases} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ προσθέτουμε κατά μέλη}$$

και προκύπτει $5y - 3z = 0$ (5)

Άρα το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 & (1) \\ -5y + 3z = 0 & (4) \end{cases}$$

Από (4) έχουμε $-5y + 3z = 0 \Leftrightarrow 3z = 5y \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}z$ Αν θέσουμε $z = \kappa$

έχουμε $y = \frac{3}{5}\kappa, z = \kappa$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ και αντικαθιστώντας στην (1)

$$x + 2\frac{3}{5}\kappa - \kappa = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}\kappa - \kappa \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}\kappa - \frac{5}{5}\kappa = -\frac{1}{5}\kappa$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}\kappa, \frac{3}{5}\kappa, \kappa\right) \kappa \in \mathbb{R}$$

ii.
$$\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ y + z = -1 & (2) \text{ Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και έχουμε} \\ z + x = 1 & (3) \end{cases}$$

$$x + y + y + z + z + x = 4 - 1 + 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 4$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 2 \quad (4)$$

Από την (1) $x + y = 4$ αντικαθιστώντας στην (4)

$$x + y + z = 2 \Leftrightarrow 4 + z = 2 \Leftrightarrow z = -2$$

Από την (2) $y + z = -1$ αντικαθιστώντας στην (4)

$$x + y + z = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Από την (3) $z + x = 1$ αντικαθιστώντας στην (4)

$$x + y + z = 2 \Leftrightarrow 1 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y, z) = (3, 1, -2)$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα

i. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} y = 2x \\ x = y + 3 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$

v. $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ y - x = 2 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -1 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

i. $\begin{cases} 5x + y = 9 \\ 10x - 7y = -18 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 4x - 9y = -9 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 7x - y = -19 \\ -2x + 3y = -19 \end{cases}$

3. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα

i. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 7x + 2y = 24 \\ 4x + y = 15 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 4x - 9y = -9 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

v. $\begin{cases} 7x - y = 19 \\ -2x + 3y = -19 \end{cases}$

4. Να λύσετε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα

i. $\begin{cases} -x + y = -11 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x - 3y = -4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 4x + 2y = -14 \\ 10x - 7y = 25 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} -4x - 7y = -2 \\ -6x - 7y = -10 \end{cases}$

v. $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} 8x + y = -16 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$

$$\text{vii. } \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -3x + 5y = -6 \end{cases}$$

$$\text{viii. } \begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 4x - 7y = -3 \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} -8x + 5y = -5 \\ 4x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$\text{vi. } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x + y = -15 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} x + 7y = -14 \\ 4x - 14y = 28 \end{cases}$$

$$\text{vii. } \begin{cases} -3x + 2y = -5 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} -2x + y = 3 \\ 4x - 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{viii. } \begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} -4x - 7y = -2 \\ -6x - 7y = -10 \end{cases}$$

$$\text{ix. } \begin{cases} 2x + 9y = 25 \\ 4x + 9y = 23 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = -6 \end{cases}$$

$$\text{x. } \begin{cases} 8x + y = -16 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{vi. } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$\text{vii. } \begin{cases} 3y + x = 2 \\ 3x + 9y = 6 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$$

7. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} y + 2 - 3(x + 1) = 0 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} -6 - 2(y - 2x) = 3(x - 1) \\ 5 - 2(2x - 3y) = -(x + 4) \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} x + y = 24 \\ y - 2(3 - x) = 3(y - 2) \end{cases}$$

$$\text{vi. } \begin{cases} x - 2(x - y) = 3 - (2x - y) \\ y - x(1 - 2y) = 1 + 2y(x - 1) \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 5(y + 2) - 2(2y - x) = 0 \\ y - 2(x - 1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{vii. } \begin{cases} 6 - 2(y - x) = y \\ 2(x - y) = -(5 - x) \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} 2x - 3y = x + 2y + 1 \\ x - 3y = 7(4 - y) \end{cases}$$

$$\text{viii.} \quad \begin{cases} y+2-3(x+1)=0 \\ 5x-2y=-4 \end{cases}$$

$$\text{ix.} \quad \begin{cases} x+y=24 \\ y-2(3-x)=3(y-2) \end{cases}$$

$$\text{x.} \quad \begin{cases} x+3y-2(y+1)=21 \\ 5-(x-y)=0 \end{cases}$$

$$\text{xi.} \quad \begin{cases} 5(y+2)-2(4-x)=3 \\ -x-3(y-2)=6 \end{cases}$$

$$\text{xii.} \quad \begin{cases} 3(y-1)-2(2y-x)=0 \\ y-2(x-1)=-1 \end{cases}$$

$$\text{xiii.} \quad \begin{cases} y-3(y-x)=5 \\ x-2(y-x)=4 \end{cases}$$

$$\text{xiv.} \quad \begin{cases} 6-2(y-x)=y \\ 2(x-y)=-(5-x) \end{cases}$$

$$\text{xv.} \quad \begin{cases} 5(y-1)-3(y-x)=-1 \\ 4(y-3)=1-(x-y) \end{cases}$$

8. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i.} \quad \begin{cases} \frac{x+y-5}{2} - \frac{y-x}{3} = 0 \\ 3(x-y-7)-2(2-x-y)=0 \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{cases} 4(2x-y-6)-3(x-2y)=-15 \\ x - \frac{y-x-1}{2} = \frac{3y}{4} + 1 \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{cases} \frac{x+2y}{2} - \frac{3x+13y}{10} = \frac{7}{5} \\ 6y-3(x+4y)=38-7x \end{cases}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} \frac{1-x}{6} - \frac{y-x}{2} = \frac{y+2}{3} \\ 2[x+y-2(x-y)]=-3(3-y) \end{cases}$$

9. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i.} \quad \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1 \\ \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{2y-1} = 1 \\ \frac{1}{x-1} + \frac{2}{6y-3} = -1 \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4 \\ y - \frac{x}{6} = 5 \end{cases}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 8 - \frac{y-1}{3} \\ \frac{y+1}{2} = 9 - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

$$\text{v.} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 8 - \frac{y-1}{3} \\ \frac{y+1}{2} = 9 - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

10. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \begin{cases} (x+1)^2 - y^2 = x^2 - (y+2)^2 + 1 \\ x + 6y = 2 \end{cases} \\ \text{ii.} & \begin{cases} 3(x-y) - 2(x-2y) = 2 \\ 3y - (x-4)(x+4) = 3 - (x-1)^2 \end{cases} \\ \text{iii.} & \begin{cases} (x+3)^2 - (x+y)(x-y) = 16 - y(5-y) \\ x^2 - (x+y)(x+3) = -1 - y(x+1) \end{cases} \\ \text{iv.} & \begin{cases} y(1-x) = 5 - x(y-1) \\ (x+2)^2 - y(y-1) = x^2 + 6 - (y+1)^2 \end{cases} \end{array}$$

10. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ 4x\sqrt{3} - 5x\sqrt{2} = 8 \end{cases} & \text{iii.} & \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5 \\ \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5 \end{cases} \\ \text{ii.} & \begin{cases} y = 5x - 15 \\ y = 3x - 13 \end{cases} & \text{iv.} & \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 7 \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases} \end{array}$$

11. Να λύσετε τα συστήματα

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases} & \text{iv.} & \begin{cases} 2|x| - 3|y| = 13 \\ |x| - 2|y| = 5 \end{cases} \\ \text{ii.} & \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 0 \end{cases} & \text{v.} & \\ \text{iii.} & \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 5 \\ -\frac{15}{x} + \frac{10}{y} = -4 \end{cases} & \text{vi.} & \begin{cases} |2y - x| - |2x - y| = 0 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \\ & & \text{vii.} & \begin{cases} 2|x| - 3|y| = 1 \\ 3|x| - |y| = 5 \end{cases} \\ & & \text{viii.} & \begin{cases} |2x - 1| - |3y - 2| = 2 \\ |1 - 2x| - |6y - 4| = 1 \end{cases} \end{array}$$

12. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i.} \quad \begin{cases} 5x^2 - y^3 = 4 \\ 2x^2 + 3y^3 = 5 \end{cases}$$

- ii. $\begin{cases} (x-1)^3 - 2y^4 = -10 \\ 2(x-1)^3 + 15y^4 = -1 \end{cases}$
- iii. $\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 = x^2 - (y+2)^2 + 1 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$
- iv. $\begin{cases} (3y-x)(5y-2x+3) = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$
- v. $\begin{cases} (2x+y+6)(x+2y-3) = 0 \\ (x-y+6)(2x-y) = 0 \end{cases}$
- vi. $\begin{cases} 2x^3 + 3y^2 = -4 \\ -x^3 + 2y^2 = 16 \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα

- i. $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{y-3} = 5 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-12} = -1 \end{cases}$
- ii. $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}$
- iii. $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = -1 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{8y-4} = -4 \end{cases}$
- iv.

14. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε η εξίσωση

$$(\kappa - 3\lambda + 1)x + (3\kappa - \lambda - 5)y + \lambda - 3 = 0 \text{ να παριστάνει ευθεία.}$$

15. Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών

- i. $\varepsilon_1: x + y = 4$ και $\varepsilon_2: y = 2$
- ii. $\varepsilon_1: 3x - y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 5x + y - 7 = 0$

16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y - 3 = 0$

- i. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2
- ii. Να βρείτε την ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α.

17. Αν η εξίσωση $(\kappa - 2\lambda - 1)x = 2\kappa - \lambda - 5$ έχει άπειρες λύσεις να βρείτε τα κ και λ .

18. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} (\kappa - 3)x - (\lambda + 1)y = 1 \\ \lambda x + (2\kappa + 1)y = 7 \end{cases}$$

με λύση το ζεύγος $(x, y) = (2, -3)$, να βρείτε τα κ, λ .

19. Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ ώστε η εξίσωση

$$(2\kappa + 5\lambda)x = \kappa + 3\lambda + 1 \text{ να είναι αόριστη.}$$

20. Το άθροισμα των ηλικιών 2 αγοριών είναι 35 χρόνια ενώ η διαφορά τους είναι 5 χρόνια. Να βρείτε τις ηλικίες των δυο αγοριών.

21. Κάποιος κρατάει στα χέρια του 4200€ σε χαρτονομίσματα των 50€ και 100€. Αν τα χαρτονομίσματα των 100€ είναι τριπλάσια από αυτά των 50€ να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 100€ και πόσα των 50€ έχει;

22. Αν οι μαθητές ενός τμήματος θελήσουν να καθίσουν από ένας σε κάθε θρανίο στην αίθουσα θα μείνουν 9 όρθιοι, ενώ αν καθίσουν από δυο σε κάθε θρανίο θα μείνουν κενά 8 θρανία. Να βρείτε πόσοι ήταν οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

23. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες

i. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

ii. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} x & -5 \\ x-2 & x-8 \end{vmatrix} = 0$

iv. $\begin{vmatrix} x^2 & 2x+2 \\ 4-2x & x-2 \end{vmatrix} = 0$

v. $\begin{vmatrix} x^2-4 & x-2 \\ x+2 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

25. Όμοια

i. $\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

ii. $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

iii. $\begin{vmatrix} x & -5 \\ x-2 & x-8 \end{vmatrix} = 0$

iv. $\begin{vmatrix} x+7 & x+2 \\ x-2 & -x \end{vmatrix} = 0$

v. $\begin{vmatrix} x^2 & 2x+2 \\ 4-2x & x-2 \end{vmatrix} = 0$

vi. $\begin{vmatrix} x & x^2+3x+9 \\ x-3 & 2x^2 \end{vmatrix} = 0$

vii. $\begin{vmatrix} x^2-4 & x-2 \\ x+2 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

viii. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

vi. $\begin{vmatrix} 2x & x-4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ -x & x+2 \end{vmatrix}$

26. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $\left| \frac{x}{8} - \frac{2}{x} \right| < 0$

ii. $\left| \frac{2x-1}{x^2} - \frac{4}{2x+1} \right| \geq -4x$

iii. $\left| \frac{x-1}{x+2} - \frac{2x-4}{2x} \right| \geq 0$

27. Να λύσετε με την μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα

i. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$

v. $\begin{cases} -4x + 2y = 5 \\ 6x - 3y = -2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x - 7y = 3 \\ 2x - 10y = -4 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x - 6y = 32 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -1 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$

viii. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

28. Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών, τα παρακάτω συστήματα:

i. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -3x + y = 9 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x - 7y = 3 \\ 2x - 10y = -4 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$

viii. $\begin{cases} -x + y = -11 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$

29. Να λύσετε τα συστήματα

i. $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$

iii. $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + 2\sqrt{2}y = -2 \\ \sqrt{2}x + (\sqrt{2} + 1)y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = 1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = 2 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

30. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ τα συστήματα

$$\text{i.} \quad \begin{cases} \lambda^2 x + 2y = \lambda + 4 \\ \lambda x + y = \lambda + 1 \end{cases}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} y - 1 = -\lambda x \\ x = -\lambda(y - 1) \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{cases} \lambda x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda - 2)y = 2 \end{cases}$$

$$\text{v.} \quad \begin{cases} \lambda x = -4(y - 2) \\ x + \lambda y = 4 \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\text{vi.} \quad \begin{cases} \lambda(x - 4) = -4(2y + 1) \\ (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y = 3\lambda - 4 \end{cases}$$

31. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ τα συστήματα:

$$\text{i.} \quad \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{cases} \lambda^2 x - 2y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda - 1 \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{cases} \lambda^2 x + 2y = \lambda + 4 \\ \lambda x + y = \lambda + 1 \end{cases}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} \lambda x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda - 2)y = 2 \end{cases}$$

32. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ τα συστήματα:

$$\text{i.} \quad \begin{cases} \lambda^2 x - 3y = 6 - \lambda \\ \lambda x + y = -3 \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{cases} -\lambda x = y - 1 \\ -\lambda(y - 1) = x \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{cases} \lambda x + 2y = 1 \\ 6x + (\lambda + 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} 4\lambda = \lambda x + 4y \\ 2x + (\lambda + 2)y = 8 \end{cases}$$

33. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 3y = 4 \\ x - y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

να έχει άπειρες λύσεις

34. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = 2\lambda + 1 \\ 2x + (2\lambda - 1)y = 5 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το σύστημα

- i. Να έχει άπειρες λύσεις
- ii. Να είναι αδύνατο

35. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το σύστημα

- i. Να έχει άπειρες λύσεις
- ii. Να είναι αδύνατο

36. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ είναι αόριστο, να δείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - 4y = 3 \end{cases} \text{ είναι αδύνατο.}$$

37. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, να δείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 2x - 2\lambda y = \lambda \end{cases} \text{ είναι αόριστο.}$$

38. Η ευθεία $\varepsilon: (\beta - 3\alpha)x + (2\alpha - \beta)y + 1 = 0$ διέρχεται από τα σημεία $M(-2, -1)$ και $N(4, 3)$. Να βρείτε:

- i. τους αριθμούς α και β .
- ii. Το κοινό σημείο της ευθείας (ε) και της $\zeta: y = (\mu - 2\lambda - 5)x$.

39. Σε ένα σύστημα δυο αγνώστων είναι $D_x + D_y = D$ και $D_x - D_y = 3D$.

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρείτε τη λύση.

40. Σε ένα σύστημα δυο αγνώστων είναι $\lambda D = (\lambda + 3)D_x - (\lambda + 1)D_y$.

Να βρείτε τον αριθμό λ , αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (-2, -4)$

41. Να βρείτε το α ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + \alpha^2 y = 4$ και $\varepsilon_2: x + \alpha y = \alpha + 2$

- i. Να τέμνονται
- ii. Να είναι παράλληλες

42. Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x και y ισχύει

$$D_x + D_y = D \text{ και } D_x - D_y = 3D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση να βρεθεί η λύση αυτή.

43. Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση και ισχύει $\begin{cases} D_x + D_y = D \\ x - y = 5 \end{cases}$ να

βρείτε την μοναδική λύση του συστήματος.

44. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$D_x + D_y = D$ και $D_x - D_y = 3D$. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή

45. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y$ και $D \neq 0$. Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y .

46. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

i. Δείξτε ότι: $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$.

ii. Να βρεθούν τα x, y .

47. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{vi. } \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = -1 \\ z + x = 1 \end{cases}$$

48. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ 2z - 3y + 2z = 9 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y - 2z = -4 \\ 3x - 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

49. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} 4x - 2y - 7z = 4 \\ 3y + 5z = -1 \\ 2z = -4 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} -3x + 4y - 6z = -2 \\ 2y - 3z = 2 \\ -5z = 20 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = -5 \\ x + 4y + 9z = -18 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 3y - 2z = -18 \end{cases}$$

50. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} x + y = -2 \\ y + z = 1 \\ z + x = -7 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x + 4y + z = 7 \\ x + 4y - z = 13 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 3x - y = -7 \\ 3y - z = 10 \\ 3z - x = 7 \end{cases}$$

51. i. Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

ii. Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

52. Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

i. Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

ii. Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

53. Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

i. Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

54. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

i. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$.

ii. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

55. Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

56. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.
- Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

57. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\epsilon_1): 2x - y = -1$ και $(\epsilon_2): (\lambda - 1)x - y = 6$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) να είναι παράλληλες.
- Να παραστήσετε γραφικά τις (ϵ_1) και (ϵ_2) , για $\lambda = 3$.
- Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

58. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1): 2x + y = 5$, $(\epsilon_2): -2x + 3y = -9$, $(\epsilon_3): 3x + 2y = 7$

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\epsilon_1), (\epsilon_3)$
- Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ϵ_2) και (ϵ_3) είναι σημείο της (ϵ_1)

59. Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα

- Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.
- Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διαζώμα;

60. Δίνονται οι ευθείες: $(\epsilon_1): 2x + y = 6$, $(\epsilon_2): x - 2y = -3$

- Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M .
- Να βρείτε για ποια τιμή του α , η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το M .

61. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

- Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1, -4)$
- Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

62. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

- i. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$
- ii. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

63. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος ισχύουν

$$D = \lambda(\lambda - 1), D_x = \lambda - 1 \text{ και } D_y = \lambda(\lambda - 1)$$

- ii. Αν είναι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα.

64. Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας το πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

- i. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.
- ii. Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

65. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.
- ii. Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.
- iii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x + 2y = 3$

66. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$
- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:
 - i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.
 - ii. δεν έχει λύση. (Μονάδες 4)
- iii. Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha = 3$, $\alpha = 2$, $\alpha = -2$

67. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 4y = 1 - \lambda \\ x + 6y = \lambda + 2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ .
- ii. Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ .
- iii. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , για την οποία οι ευθείες: $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

68. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + y = 1$ και $\varepsilon_2: x + \lambda y = \lambda^2$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ .
- ii. Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες;
- iii. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$ είναι παράλληλες.

1.2 Μη γραμμικά συστήματα

➤ Επίλυση μη γραμμικών συστημάτων

Για να επιλύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο της **αντικατάστασης** ή την **γραφική επίλυση**.

- ✓ Την γραφική επίλυση την εφαρμόζουμε όταν γνωρίζουμε το είδος της καμπύλης που επαληθεύει την εξίσωση.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να λύσετε τα συστήματα

i.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \text{ με } x, y \neq 0$$

ii.
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x^2 - 4y^2 = 5 \end{cases}$$

Λύση

i.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{y^2} + y^2 = 5 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + y^4 = 5y^2 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases}$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ θέτουμε $y^2 = \omega$ και έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = 4$$

Άρα $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1$ ή

$y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ή } y = -2$

Για $y = 1$ έχουμε $x = -\frac{2}{1} = -2$ άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(-2, 1)$

Για $y = -1$ έχουμε $x = -\frac{2}{-1} = 2$ άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2, -1)$

Για $y = 2$ έχουμε $x = -\frac{2}{2} = -1$ άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(-1, 2)$

Για $y = -2$ έχουμε $x = -\frac{2}{-2} = 1$ άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(1, -2)$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x^2 - 4y^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ (-2y - 1)^2 - 4y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) - 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι $(-3, -1)$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} x - y = -2 \\ 4x - y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy = 60 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$$

v.

$$\text{iii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 3x + y = 8 \\ xy = 5 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} 2x^2 + y = 7 \\ y = 5x \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = -2 \end{cases}$$

$$\text{vi. } \begin{cases} x + y = 6(x - y) \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i. } \begin{cases} 4(x - y) - 3xy = -2 \\ xy - 2(x - y) = 4 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2xy - 3y - 3 = 0 \\ y^2 - 4xy + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} xy = -8 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$$

6. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 7 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

7. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = -1 \\ 2x^2 + 2y^2 + 3x - 3y = 1 \end{cases}$$

8. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 5cm και εμβαδόν 6cm^2 . Να βρείτε τις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

9. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 10cm και περίμετρο 24cm να βρείτε τις δύο κάθετες πλευρές του.

10. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

- i. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
- ii. Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x , y του ορθογωνίου.

11.

$$\text{i. } \text{Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

- ii. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α).

12. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

- i. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
- ii. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
- iii. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

13. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24 cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3 cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

- i. Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.
- ii. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

14.

- i. Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

- ii. Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) , λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- iii. Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_2) , λύσεις και του (Σ_1) ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Υπατία

Η Υπατία (370-415 μ.Χ) ήταν Ελληνίδα φιλόσοφος αστρονόμος και μαθηματικός. Έζησε και δίδαξε στην Αλεξάνδρεια όπου και δολοφονήθηκε από όχλο που αποτελούνταν από φανατικούς χριστιανούς. Σύμφωνα με πηγές κατείχε την προεδρεία της Νεοπλατωνική Σχολής της Αλεξάνδρειας και ήταν άτομο άξιο σεβασμού, που ασκούσε επιρροή στους σημαντικούς άρχοντες της Αλεξάνδρειας αλλά και της Μεσογείου. Επιμελήθηκε έργα Γεωμετρίας, Άλγεβρας και Αστρονομίας. Αν και το έργο της χάθηκε, η παράδοση στην οποία εργάστηκε και τα κείμενα που σχολίασε αποδείχτηκε ότι ήταν ακριβής βάση για το επόμενο βήμα στην ιστορία των μαθηματικών. Η φήμη της τραβούσε μαθητές από όλη τη Μεσόγειο ενώ τα δημόσια κηρύγματά της ασκούσαν επιρροή στους Αλεξανδρινούς υπαλλήλους. Ήταν αγαπητά από όλο τον κόσμο και οι διάφοροι επικεφαλής την συμβούλευαν συχνά. Πηγές αναφέρουν ότι είχε φυσική ομορφιά και φορούσε απλά ρούχα. Το σημαντικότερο έργο της Υπατίας ήταν η ΑΛΓΕΒΡΑ. Έγραψε σχόλια στην Αριθμητική του Διόφαντου σε 13 βιβλία. Ο Διόφαντος έζησε και εργάστηκε τον 3^ο αιώνα και έχει ονομασθεί «πατέρας» της άλγεβρας. Τα σχόλια της Υπατίας περιελάμβαναν εναλλακτικές λύσεις και πολλά νέα προβλήματα που προέκυπταν σαν συνέπεια στα χειρόγραφα του Διόφαντου.



Το ότι η Υπατία ανακατεύτηκε στα πολιτικά θέματα της Αλεξάνδρειας είναι αδιαμφισβήτητο. Ο μαθητής της Ησύχιος ο Εβραίος έγραφε: *Κρατώντας το μανδύα του φιλοσόφου και περπατώντας μέσα στην πόλη, εξηγούσε δημόσια τα γραπτά του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη και άλλων φιλοσόφων σε όλους όσους ήθελαν να ακούσουν... ή ήθελαν να συμβουλευθούν αυτήν πρώτα για τα θέματα διοίκησης της πόλης.*

Σαν παγανίστρια, που ασπάστηκε την ελληνική επιστημονική σκέψη και σαν πολιτικό πρόσωπο με επιρροή, η Υπατία βρέθηκε σε πολύ επικίνδυνη θέση σε μια όλο και πιο χριστιανική πόλη. Το 412 ο Κύριλλος, ένας φανατικός χριστιανός, έγινε Πατριάρχης της Αλεξάνδρειας και μεγάλη εχθρότητα αναπτύχθηκε μεταξύ του Κυρίλλου και του Ορέστη, του Ρωμαίου Κυβερνήτη της Αιγύπτου, ενός παλιού μαθητή και καλού φίλου της Υπατίας. Αμέσως μόλις πήρε την εξουσία, ο Κύριλλος άρχισε να διώκει τους εβραίους, διώχνοντας χιλιάδες από αυτούς από την πόλη. Έπειτα, παρά τη σφοδρή αντίθεση του Ορέστη, έστρεψε την προσοχή του στο να καθαρίσει την πόλη από του νεοπλατωνιστές. Αγνοώντας τις εκκλήσεις του Ορέστη, η Υπατία αρνήθηκε να απαρνηθεί τις ιδέες της και να ασπασθεί το Χριστιανισμό.

Ο Κύριλλος, ο οποίος αργότερα αναγορεύτηκε ο πατέρας του δόγματος της Χριστιανικής Τριάδας και αγιοποιήθηκε για το ζήλο του, έβλεπε στην Υπατία μια συνεχή απειλή για τη διάδοση της Χριστιανικής πίστης. Ο Κύριλλος, τουλάχιστον έμμεσα, ήταν η αιτία του τραγικού της θανάτου. Παρά κάθε επόμενη προσπάθεια να τον απαλλάξουν από το στίγμα του δολοφόνου, το αδιαμφισβήτητο γεγονός παραμένει ότι δεν έκανε καμία προσπάθεια να αποτρέψει το αποτρόπαιο και βίαιο

έγκλημα. Το μόνο ελαφρυντικό που μπορεί κανείς να προσφέρει σαν υπεράσπισή του είναι το ότι, τυφλωμένος από τη μανία του φανατισμού, ο Κύριλλος θεωρούσε την Υπατία ως μάγισσα εκπρόσωπο του Κακού.

Ο φόνος της Υπατίας περιγράφεται στα γραπτά του χριστιανού ιστορικού του 5ου αιώνα Σωκράτη του Σχολαστικού:

*"Όλοι οι άνθρωποι την σέβονταν και την θαύμαζαν για την απλή ταπεινοφροσύνη του μυαλού της. Ωστόσο, πολλοί με πείσμα την ζήλευαν και επειδή συχνά συναντούσε και είχε μεγάλη οικειότητα με τον Ορέστη, ο λαός την κατηγορήσε ότι αυτή ήταν η αιτία που ο Επίσκοπος και ο Ορέστης δεν γίνονταν φίλοι. Με λίγα λόγια, ορισμένοι πεισματάρηδες και απερίσκεπτοι κοκορόμυαλοι με υποκινητή και αρχηγό τους τον Πέτρο, έναν οπαδό αυτής της Εκκλησίας, παρακολουθούσαν αυτή τη γυναίκα να επιστρέφει σπίτι της γυρνώντας από κάπου. Την κατέβασαν με τη βία από την άμαξά της, την μετέφεραν στην Εκκλησία που ονομαζόταν *Caesarium*, την γύμνωσαν εντελώς, της έσκισαν το δέρμα και έκοψαν τις σάρκες του σώματός της με κοφτερά κοχύλια μέχρι που ξεψύχησε, διαμέλισαν το σώμα της, έφεραν τα μέλη της σε ένα μέρος που ονομαζόταν *Κίναρον* και τα έκαψαν."*

Οι δολοφόνοι της Υπατίας ήταν Παραβολικοί, φανατικοί μοναχοί της Εκκλησίας του Αγ. Κυρίλλου της Ιερουσαλήμ, πιθανώς υποβοηθούμενοι από Νιτριανούς μοναχούς. Το αν ο Κύριλλος διέταξε ο ίδιος το φόνο παραμένει ανοικτό ερώτημα. Πάντως, δημιούργησε το λιγότερο το πολιτικό κλίμα που επέτρεψε μια τέτοια θηριωδία. Ο Κύριλλος αργότερα ονομάστηκε άγιος.

Ο Ορέστης ανέφερε τη δολοφονία και ζήτησε από τη Ρώμη να ξεκινήσει έρευνες. Αργότερα παραιτήθηκε και έφυγε από την Αλεξάνδρεια. Η έρευνα αναβλήθηκε πολλές φορές λόγω 'έλλειψης μαρτύρων' και τελικά ο Κύριλλος ισχυρίστηκε ότι η Υπατία ήταν ζωντανή και ζούσε στην Αθήνα.

Έτσι **χάθηκε το 415** η μεγαλύτερη γυναίκα μύστης του αρχαίου κόσμου και μαζί της έπεσε και η Νεοπλατωνική Σχολή της Αλεξάνδρειας. Η μνήμη της Υπατίας πιθανώς τιμάται από την Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία στο πρόσωπο της Αγ. Αικατερίνης της Αλεξάνδρειας. Κατά άλλους αυτή είναι διαφορετικό πρόσωπο, μια άλλη χριστιανή Αλεξανδρινή διανοούμενη που δολοφονήθηκε ένα μήνα πριν την Υπατία.



Κεφάλαιο 2^ο

Συναρτήσεις

2.1 Μονοτονία ακρότατα συμμετρικές συνάρτησης

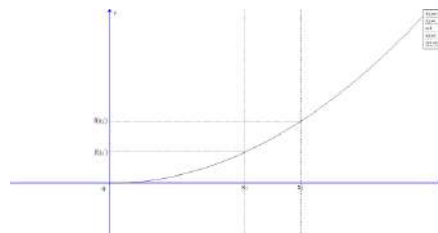
➤ Ορισμός

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- ✓ Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \nearrow \Delta$

- ✓ Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε η γραφική της παράσταση στο διάστημα Δ “ανεβαίνει” από αριστερά προς τα δεξιά.



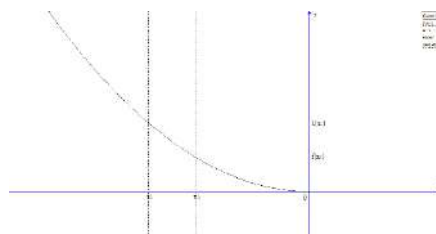
➤ Ορισμός

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2)$$

- ✓ Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \searrow \Delta$

- ✓ Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε η γραφική της παράσταση στο διάστημα Δ “κατεβαίνει” από αριστερά προς τα δεξιά.



- ✓ Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ .
- ✓ Όταν εξετάζουμε μια συνάρτηση ως προς την μονοτονία της εξετάζουμε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα.

➤ **Ορισμός**

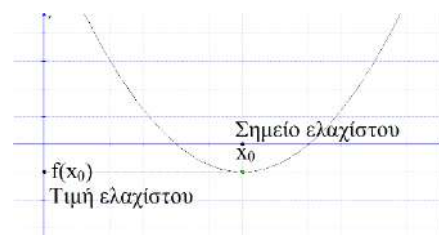
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) **μέγιστο** όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.



- ✓ Το x_0 λέγεται **θέση μεγίστου** ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.

➤ **Ορισμός**

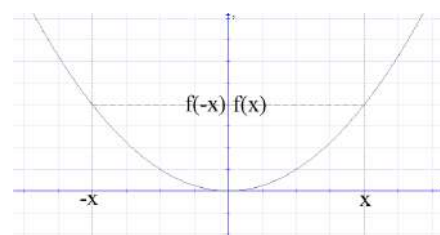
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) **ελάχιστο** όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.



- ✓ Το x_0 λέγεται **θέση ελαχίστου** ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$.
- Το **ολικό ελάχιστο** και **ολικό μέγιστο** αποτελούν τα **ακρότατα** της συνάρτησης.

➤ **Ορισμός**

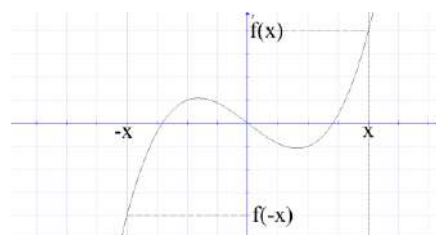
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και $f(x) = f(-x)$



- ✓ Όταν μια συνάρτηση είναι άρτια τότε έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα γγ'

➤ **Ορισμός**

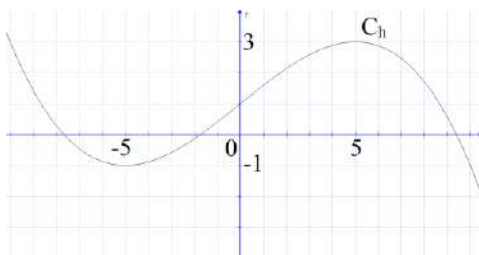
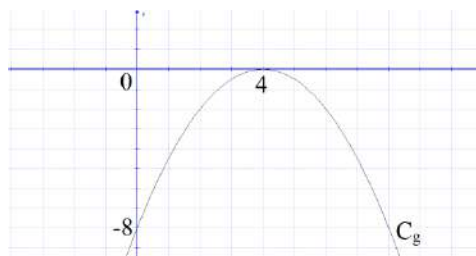
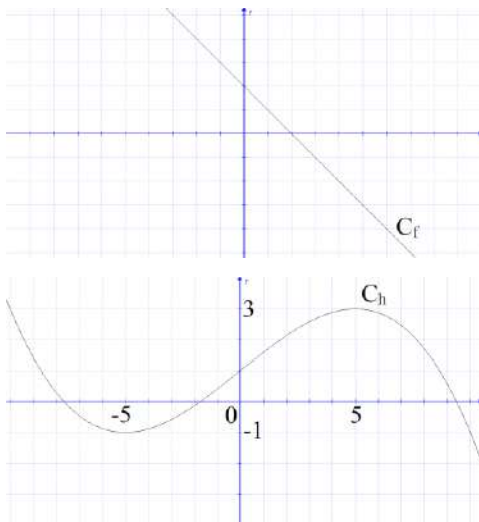
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$



- ✓ Όταν μια συνάρτηση είναι **περιττή** τότε έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.
- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση **δεν** είναι ούτε άρτια ούτε περιττή αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $-x \notin A$ ή ότι υπάρχει $x \in A$ με $-x \in A$ ώστε $f(x) \neq f(-x)$ και $-f(x) \neq f(-x)$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

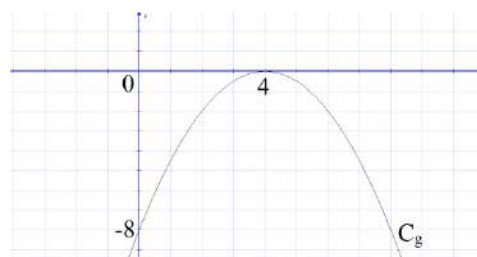
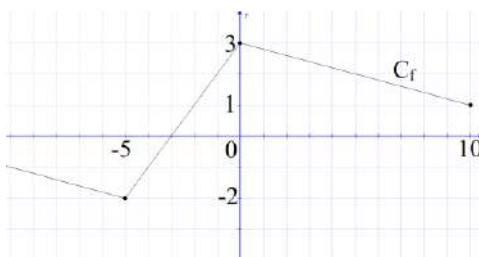
1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα



Λύση

- Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$
- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 4)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(4, +\infty)$
- Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -5)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-5, 5)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(5, +\infty)$

2. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.



Λύση

- Η f παρουσιάζει ολικό **μέγιστο** στο σημείο $x = 0$ με τιμή 3
Η f παρουσιάζει ολικό **ελάχιστο** στο σημείο $x = -5$ με τιμή -2
- Η g παρουσιάζει ολικό **μέγιστο** στο σημείο $x = 4$ με τιμή 0

Η g δεν παρουσιάζει ολικό **ελάχιστο**.

3. Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία

- i. $f(x) = 2x - 4$
- ii. $h(x) = \sqrt{x-2} + 3$
- iii. $h(x) = x^3 + x + 1$
- iii. $f(x) = x^2$
- iv. $f(x) = (x-3)^2$
- v. $f(x) = x^2 - 6x + 10$
- vi. $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$, στο $(-2, +\infty)$
- vii. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$

έστω $x_1, x_2 \in A$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 4 < 2x_2 - 4 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- ii. Το πεδίο ορισμού της h είναι $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ το $A = [2, +\infty)$

έστω $x_1, x_2 \in A$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 2} + 3 < \sqrt{x_2 - 2} + 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [2, +\infty)$

- iii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \text{ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει}$$

$$\underline{x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)} \text{ άρα h γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

iv. Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ οπότε και η } f \text{ γνησίως αύξουσα}$$

ενώ για $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ οπότε και η } f \text{ γνησίως φθίνουσα}$$

άρα συνοψίζοντας έχουμε ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

v. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ οπότε και η } f \text{ γνησίως φθίνουσα, ενώ για } x_1, x_2 \in [3, +\infty) \text{ έχουμε:}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ οπότε και η } f \text{ γνησίως αύξουσα. Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι:}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

$$\text{vi. Έχουμε ότι } f(x) = x^2 - 6x + 10 = \underline{x^2 - 6x + 9} + 1 = (x - 3)^2 + 1$$

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \Rightarrow$$

$$(x_1 - 3)^2 + 1 > (x_2 - 3)^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

οπότε και η f γνησίως φθίνουσα,

ενώ για $x_1, x_2 \in [3, +\infty)$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2 \Rightarrow$$

$$(x_1 - 3)^2 + 1 < (x_2 - 3)^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ οπότε και η } f \text{ γνησίως αύξουσα.}$$

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

vii.

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$$

Έστω $x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow \frac{1}{x_1 + 2} > \frac{1}{x_2 + 2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1 + 2} < -\frac{1}{x_2 + 2} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{x_1 + 2} < 1 - \frac{1}{x_2 + 2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-2, +\infty)$

viii. Έχουμε ότι $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_1 + 1)^3 < (x_2 + 1)^3 \Rightarrow$$

$$(x_1 + 1)^3 - 1 < (x_2 + 1)^3 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

4. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^3 + x^2 + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Λύση

Υπολογίζουμε το λόγο μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\text{Αν για κάθε } x_1, x_2 \in A_f \text{ ισχύει ότι } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \text{ τότε η } f1$$

$$\text{Αν για κάθε } x_1, x_2 \in A_f \text{ ισχύει ότι } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \text{ τότε η } f2$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε το λόγο μεταβολής:

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 + x_2^2 + x_2 - x_1^3 - x_1^2 - x_1}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{(\cancel{x_2 - x_1}) \cdot (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) + (\cancel{x_2 - x_1}) \cdot (x_2 + x_1) + (\cancel{x_2 - x_1})}{\cancel{x_2 - x_1}} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 + x_2 + x_1 + 1 =$$

$$= \underline{x_1^2 + x_1(x_2 + 1)} + \underline{x_2^2 + x_2 + 1} > 0 \text{ αφού:}$$

$$\Delta = (x_2 + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x_2^2 + x_2 + 1) = x_2^2 + 2x_2 + 1 - 4x_2^2 - 4x_2 - 4 = -3x_2^2 - 2x_2 - 3 < 0$$

αφού:

$$\Delta' = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3) = 4 - 36 = -32 < 0$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

5. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

i. $f(x) = |x - 3| + |3 + x|$

ii. $g(x) = \sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}$

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}$

Έστω $x \in A$ τότε και $-x \in A$ και επιπλέον

$$f(-x) = |-x - 3| + |3 - x| = |x - 3| + |3 + x| = f(x)$$

Άρα η f είναι άρτια.

- ii. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της g

$$\text{Θα πρέπει } \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ 4 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -4 \end{cases} \text{ άρα } x \in [-4, 4] \text{ άρα } A = [-4, 4]$$

Αν $x \in A$ τότε και $-x \in A$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sqrt{4 - (-x)} - \sqrt{4 - x} = \sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x} = \\ &= -(\sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}) = -f(x) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι περιττή.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{αν } x \leq -1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$ και $f(3)$
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι άρτια
- iv. Να βρεθούν οι συμμετρίες της γραφικής παράστασης της f .

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

ii. $f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$

$$f(3) = (3)^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

- iii. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- Αν $x \leq -1$ τότε $-x \geq 1$ άρα

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = f(x)$$

- Αν $x \geq 1$ τότε $-x \leq -1$ άρα

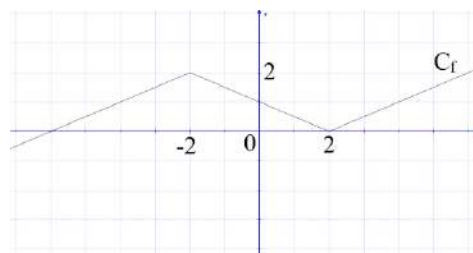
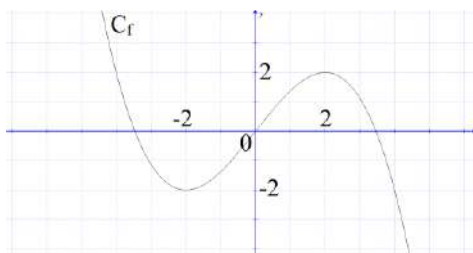
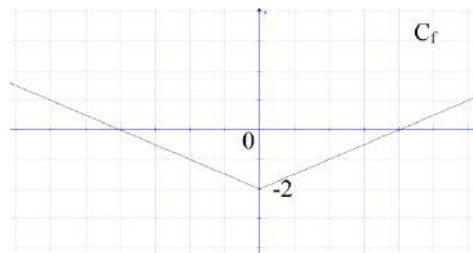
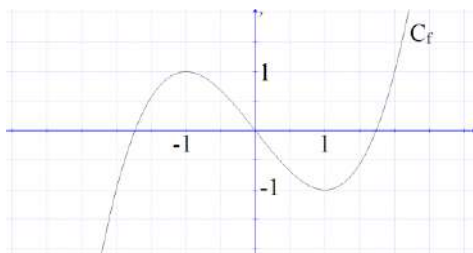
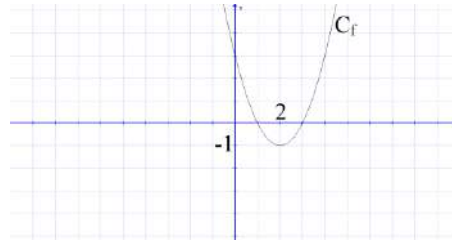
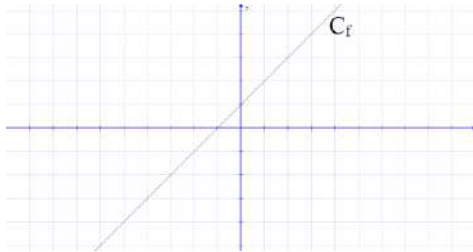
$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

Άρα για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = f(x)$ άρα η f είναι άρτια.

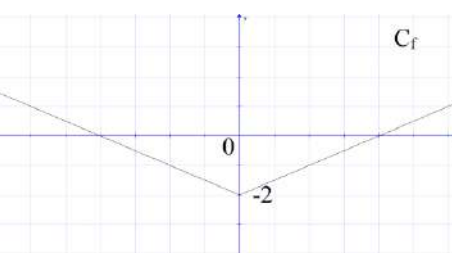
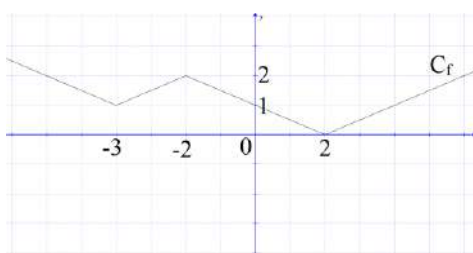
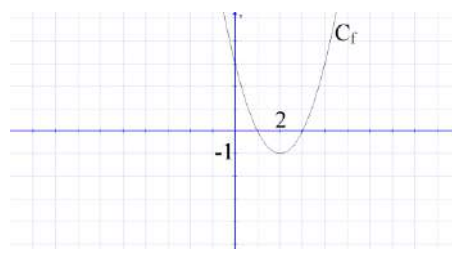
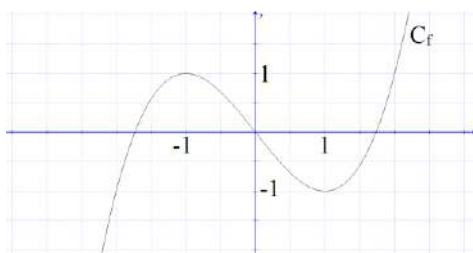
- iv. Επειδή η f είναι άρτια είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.



2. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.



3. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις

- i. $f(x) = 2x - 1$
- ii. $g(x) = -2x + 4$
- iii. $h(x) = 3 + 2x$
- iv. $k(x) = 1 - 2x$
- v. $f(x) = x^2 + 6x - 2$
- vi. $f(x) = x^2 - 4x - 3$

4. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις

- i. $f(x) = x^2 - 2$
- ii. $g(x) = -x^3 + 4$
- iii. $h(x) = \sqrt{x-1} + 2$
- iv. $k(x) = x^2 + 1$

5. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(1908) > f(2004)$

- i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 3) > f(x + 6)$

6. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(13) > f(4)$

- i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x - 1) > f(3x + 9)$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (|\lambda| - 3)x + 10$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι:

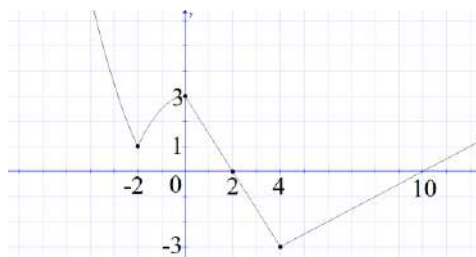
- i. γνησίως αύξουσα
- ii. γνησίως φθίνουσα
- iii. σταθερή

8. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

- i. $f(x) = x^2 + 1$
- ii. $f(x) = 3 - x^4$
- iii. $g(x) = 1 - (1 - x)^2$
- iv. $g(x) = |x - 2| + 1$

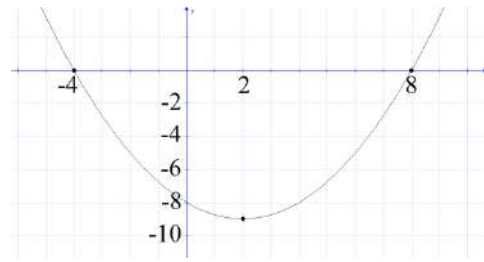
9. Για την συνάρτηση f του διπλανού σχήματος να βρείτε:

- i. Τα ακρότατα
- ii. Τα διαστήματα μονοτονίας
- iii. Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- iv. Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- v. Την τιμή $f(0)$

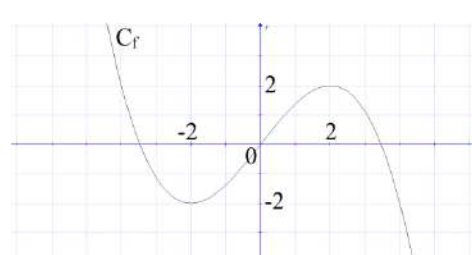
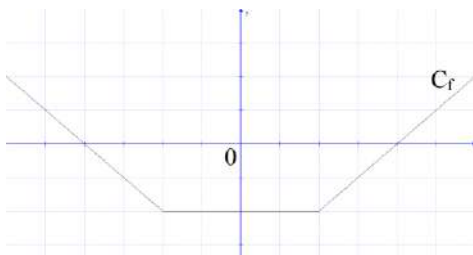
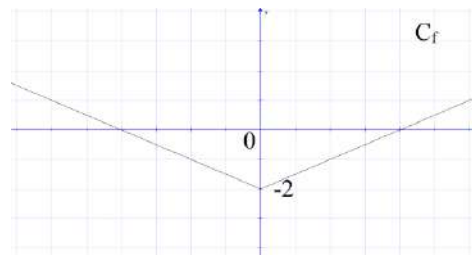
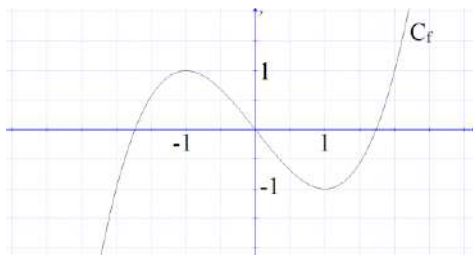


10. Για την συνάρτηση f του διπλανού σχήματος να βρείτε:

- i. Τα ακρότατα
- ii. Τα διαστήματα μονοτονίας
- iii. Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- iv. τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- v. Την τιμή $f(0)$



11. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;



12. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- i. $f(x) = 2|x| - 3$
- ii. $f(x) = |x + 3| - 4$
- iii. $f(x) = 1 - x^2$
- iv. $f(x) = -2x^4 + 6$

13. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

- i. $f(x) = x^2 - 4$
- ii. $g(x) = x^3 - 2x$
- iii. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
- iv. $h(x) = |x^3 - 2| - |x^3 + 2|$
- v. $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{|x|}$

$$\text{vi. } f(x) = \frac{-2x^2}{x-1}$$

$$\text{vii. } f(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x^2-16}$$

$$\text{viii. } f(x) = \frac{\frac{4}{x} - x}{\sqrt{4-|x|}}$$

$$\text{ix. } f(x) = (x^5 - x^3)^3 - (x^3 - x)^5$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή
- iii. Να βρείτε τις συμμετρίες της γραφικής παράστασης της f
- iv. Να βρείτε το ελάχιστο της f

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν } x \leq 1 \\ x-2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τις τιμές $f(0)$, $f(-1)$, $f(21)$, $f(13)$
- ii. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ με } x < 0 \text{ και } g(x) = x + \frac{1}{x} \text{ με } x > 0$$

- i. Να βρείτε το μέγιστο της f
- ii. Να βρείτε το ελάχιστο της g

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2|a|-1)x - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

18. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (|a|-1)x + a$ για τις διάφορες τιμές του α.

19. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (a^2-4)x^2 + (a-2)x + 3$ παριστάνει ευθεία και η είναι f γνησίως φθίνουσα να βρείτε το α.

20. Αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i. } f(x-4) < f(3x)$$

$$\text{ii. } f(|x|) < f(2)$$

21. Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i. } f(|x-2|) > f(4)$$

$$\text{ii. } f(|2x-3|) < f(5)$$

22. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,2)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $2 < f(|x-2|) < 5$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - 2x^2 - \sqrt{x}$.

i. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{3|x|+1} - \sqrt{|x|+5} > 2 \left[(|x|+5)^2 - (3|x|+1)^2 \right]$

24. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

25. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$, $h(x) = 3f(x) - 5g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

26. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(f(x)) - x^4 f(x) \text{ είναι περιττή.}$$

28. Μια περιττή συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$, $\alpha \geq$

0. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$

29. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^2(x) + f(x)f(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

30. Μια άρτια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$, $\alpha \geq 0$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$

31. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο, να αποδείξετε ότι παρουσιάζει στο $-x_0$ ελάχιστο.

32. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$.

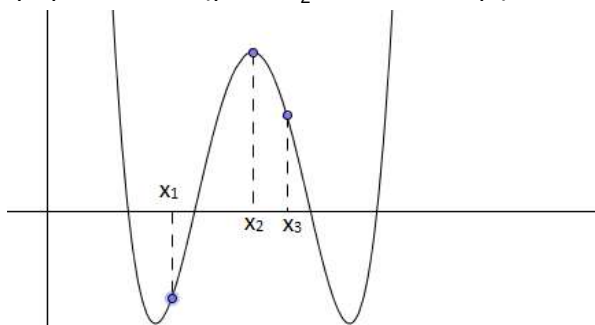
- i. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3x) < 2$

33. Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- i. Να δείξετε ότι $f(x) \leq 1$
- ii. Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

34. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

- i. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$
- ii. Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii. Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



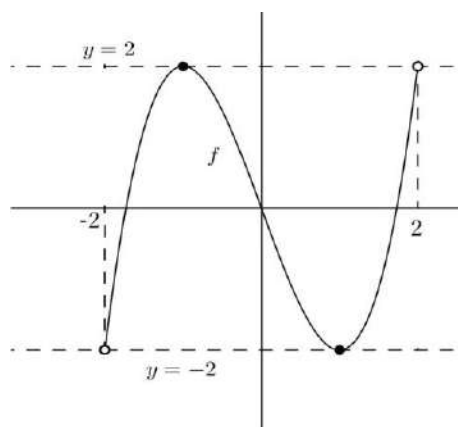
35. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράστασή της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$

- i. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f
- ii. Αν η γραφική παράστασή της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$

36. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράστασή της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in (-2, 2)$$

- i. Είναι η f άρτια ή περιττή; Να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας.
- ii. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράστασή της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
- iii. Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της f .



37. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40 m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

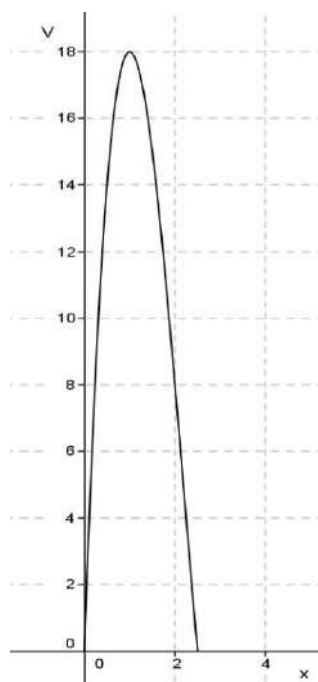
- i. Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40 m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.
- ii. Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40 m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x .
- iii. Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

38. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5 dm και 8 dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x , από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (Σχήμα 1).

- i. Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$
 - ii. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος.
 - iii. Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8 dm^3 .
39. Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ $x \in (0, 2,5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

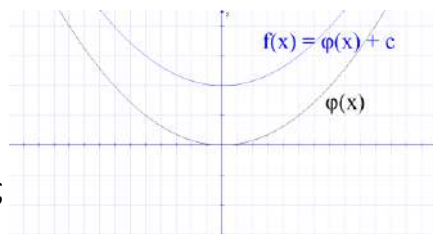
2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

➤ Κατακόρυφη μετατόπιση συνάρτησης προς τα πάνω

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f \text{ για την οποία ισχύει: } f(x) = \varphi(x) + c$$

όπου $c > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την **κατακόρυφη** μετατόπιση της φ κατά c μονάδες προς τα **πάνω**.

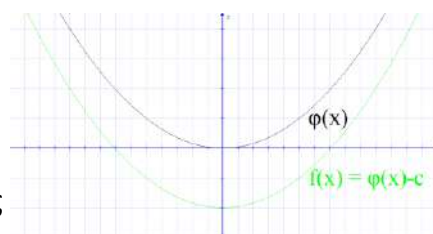


➤ Κατακόρυφη μετατόπιση συνάρτησης προς τα κάτω

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f \text{ για την οποία ισχύει: } f(x) = \varphi(x) - c$$

όπου $c > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την **κατακόρυφη** μετατόπιση της φ κατά c μονάδες προς τα **κάτω**.



➤ Οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f \text{ για την οποία ισχύει: } f(x) = \varphi(x - c)$$

όπου $c > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την **οριζόντια** μετατόπιση της φ κατά c μονάδες προς τα **δεξιά**.

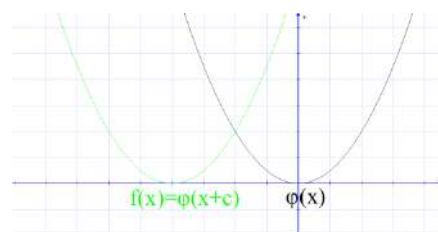


➤ Οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f \text{ για την οποία ισχύει: } f(x) = \varphi(x + c)$$

όπου $c > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την **οριζόντια** μετατόπιση της φ κατά c μονάδες προς τα **αριστερά**.



Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να φτιάξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

- i. $f(x) = |x|$
- ii. $g(x) = |x| + 1$
- iii. $h(x) = |x| - 2$

Λύση

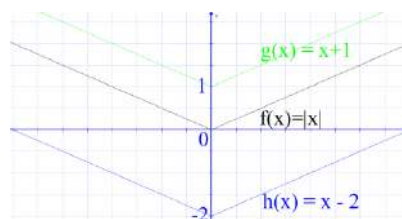
Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της

$f(x) = |x|$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Η γραφική παράσταση της $g(x) = |x| + 1$ προκύπτει από την **κατακόρυφη** μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα **πάνω**.
- Η γραφική παράσταση της $h(x) = |x| - 2$ προκύπτει από την **κατακόρυφη** μετατόπιση της f κατά δυο μονάδες προς τα **κάτω**.



Επομένως στο διπλανό σχήμα εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , h .

2. Να φτιάξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

- i. $f(x) = |x|$
- ii. $g(x) = |x - 2|$
- iii. $h(x) = |x + 3|$

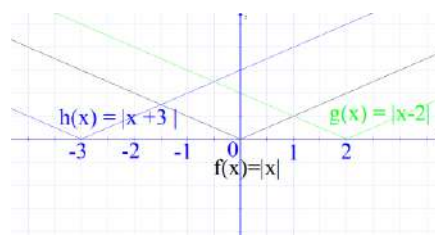
Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της $f(x) = |x|$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Η γραφική παράσταση της $g(x) = |x - 2|$ προκύπτει από την **οριζόντια** μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα **δεξιά**.



- Η γραφική παράσταση της $h(x) = |x + 3|$ προκύπτει από την **οριζόντια** μετατόπιση της f κατά δυο μονάδες προς τα **αριστερά**.

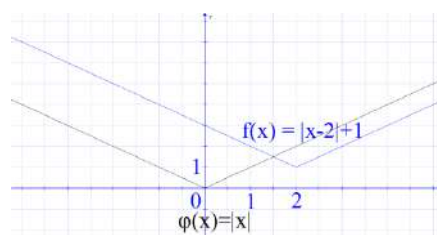
Επομένως στο διπλανό σχήμα εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h .

3. Να φτιάξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = |x - 2| + 1$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 2| + 1$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ με **οριζόντια** μετατόπιση κατά δυο μονάδες προς τα **δεξιά** και **κατακόρυφη** μετατόπιση κατά μια μετατόπιση προς τα **πάνω**.



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g που προκύπτει από διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

- Κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδα προς τα πάνω
- Κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω
- Κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 13 μονάδες προς τα κάτω

Λύση

- i. Ο τύπος της συνάρτησης g που προκύπτει από την μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω, θα προκύψει αν τοποθετήσουμε στον τύπο της f στη θέση του x το $x-2$ και προσθέσουμε το 2. Επομένως ο τύπος θα γίνει:

$$g(x) = 3(x - 2)^2 + 1 + 2 \Leftrightarrow g(x) = 3(x - 2)^2 + 3$$

- ii. Ο τύπος της συνάρτησης g που προκύπτει από την μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω, θα προκύψει αν τοποθετήσουμε στον τύπο της f στη θέση του x το $x+2$ και αφαιρέσουμε το 1. Επομένως ο τύπος θα γίνει:

$$g(x) = 3(x + 2)^2 + 1 - 1 \Leftrightarrow g(x) = 3(x + 2)^2$$

- iii. Ο τύπος της συνάρτησης g που προκύπτει από την μετατόπιση κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 13 μονάδες προς τα κάτω, θα προκύψει αν τοποθετήσουμε στον τύπο της f στη θέση του x το $x-4$ και αφαιρέσουμε το 13. Επομένως ο τύπος θα γίνει:

$$g(x) = 3(x - 4)^2 + 1 - 13 \Leftrightarrow g(x) = 3(x - 4)^2 - 12$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
 - i. $f(x) = |x|$
 - ii. $g(x) = |x| + 1$
 - iii. $h(x) = |x| - 2$
2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
 - i. $f(x) = |x|$
 - ii. $g(x) = |x - 2|$
 - iii. $h(x) = |x + 3|$
3. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
 - i. $f(x) = |x|$
 - ii. $g(x) = |x + 1| + 2$
 - iii. $h(x) = |x - 1| - 1$
4. Να βρείτε ποιες μεταφορές έχουν γίνει στη συνάρτηση f ώστε να προκύψει η συνάρτηση g στις περιπτώσεις:
 - i. $g(x) = f(x) - 13$
 - ii. $g(x) = f(x) + 23$
 - iii. $g(x) = f(x - 2) + 1$
 - iv. $g(x) = f(x + 3) - 3$
 - v. $g(x) = f(x - 2) - 13$
 - vi. $g(x) = f(x + 4) - 5$
5. Να βρείτε την συνάρτηση g που προκύπτει από μεταφορά της συνάρτησης f κατά 3 μονάδες δεξιά στις περιπτώσεις
 - i. $f(x) = x + 1$
 - ii. $f(x) = x^2 + 2x + 13$
 - iii. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
 - iv. $f(x) = \frac{x-1}{x+3} + 1$
 - v. $f(x) = -2x + 5$
 - vi. $f(x) = 4x - 13$
6. Να βρείτε την συνάρτηση g που προκύπτει από μεταφορά της συνάρτησης f κατά 5 μονάδες αριστερά στις περιπτώσεις
 - i. $f(x) = x - 13$

- ii. $f(x) = x^2 - 2$
- iii. $f(x) = \frac{x-2}{x-5} + 1$
- iv. $f(x) = \sqrt{x+1} + 3$
- v. $f(x) = 2x - 1$
- vi. $f(x) = 3x - 1$

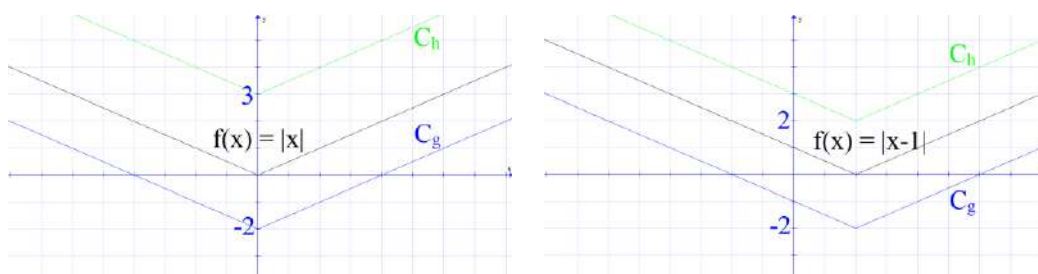
7. Να βρείτε την συνάρτηση g που προκύπτει από μεταφορά της συνάρτησης f κατά 5 μονάδες προς τα πάνω στις περιπτώσεις

- i. $f(x) = x + 13$
- ii. $f(x) = x^2 - 5x + 13$
- iii. $f(x) = \sqrt{x} + 4$
- iv. $f(x) = \frac{x-4}{x-1} - 3$
- v. $f(x) = 3x + 1$
- vi. $f(x) = -2x - 7$

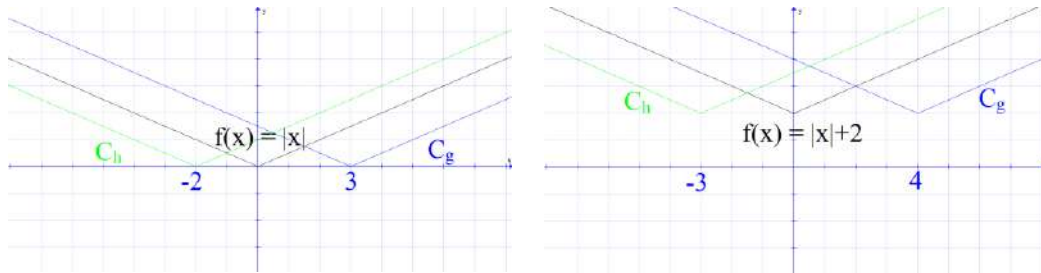
8. Να βρείτε την συνάρτηση g που προκύπτει από μεταφορά της συνάρτησης f κατά 13 μονάδες προς τα κάτω στις περιπτώσεις

- i. $f(x) = x - 13$
- ii. $f(x) = x^2 - 4x - 12$
- iii. $f(x) = \sqrt{x} - 5$
- iv. $f(x) = 3x - 6$
- v. $f(x) = -2x + 1$
- vi. $f(x) = \frac{x-2}{x-4} + 5$

9. Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων g και h

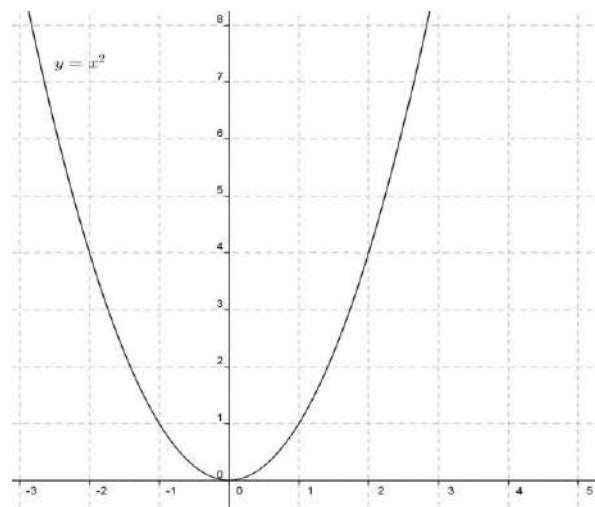


10. Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων g και h



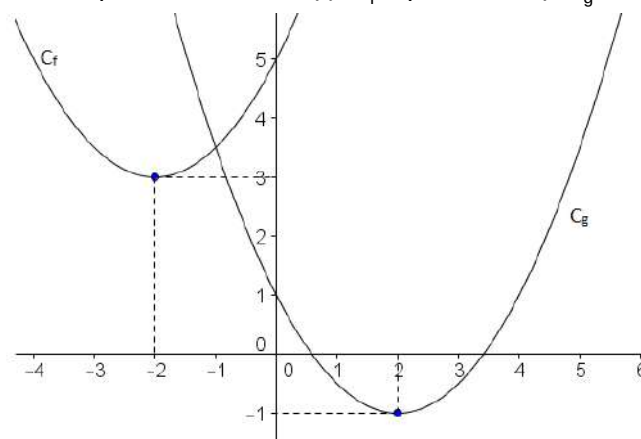
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$
- Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$



12. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.
- Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

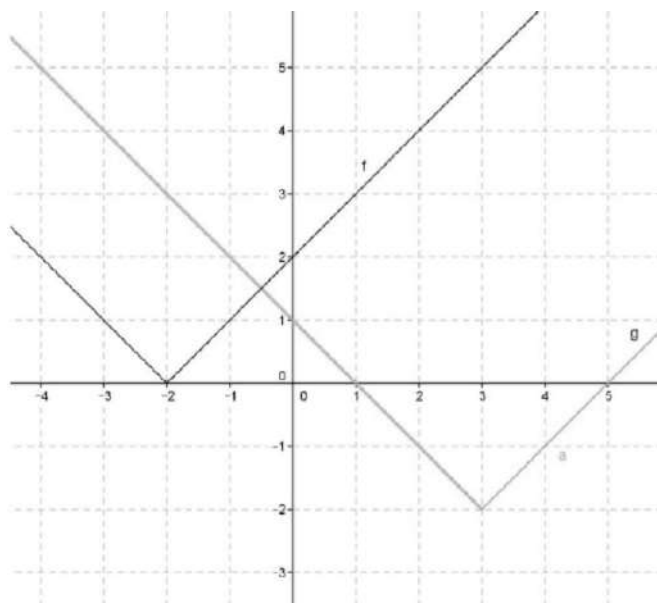


13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$.
- Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Με ποια μετατόπιση της $g(x) = x^2$ προκύπτει η C_f ;

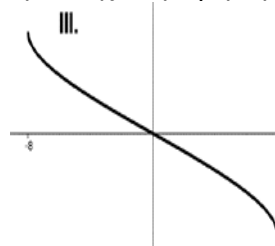
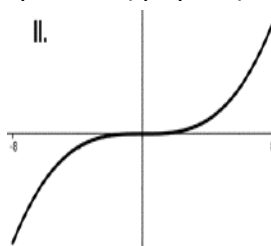
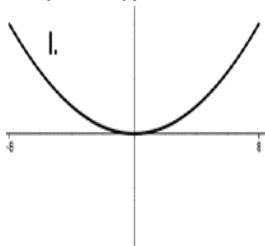
14. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

- Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f , τη θέση και την τιμή του.
- Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g . Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g , αν $f(x) = |x + 2|$.



15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

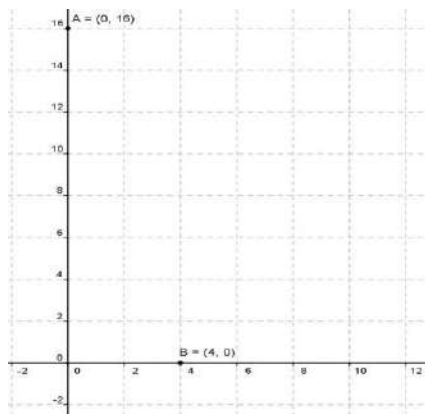


- iv. Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και $h(x) = f(x + 3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

16. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2 - d$, $x \in \mathbb{R}$ με c, d θετικές σταθερές, η

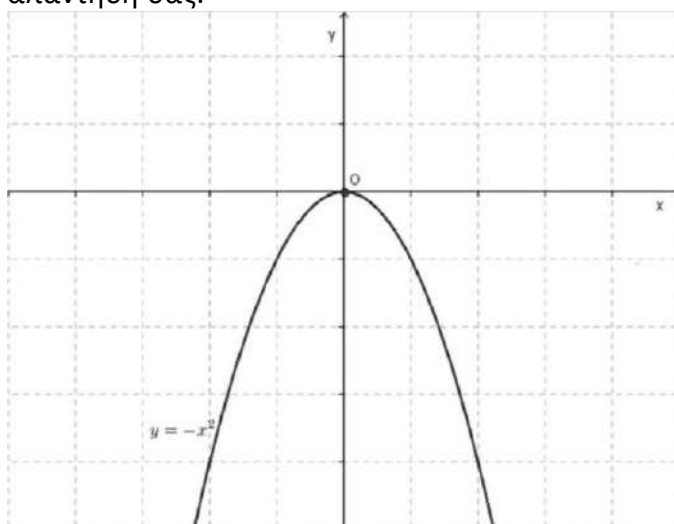
γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$.

- Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.
- Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$
 - να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
 - να μεταφέρετε στην κόλα σας το διπλανό σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$
 - με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

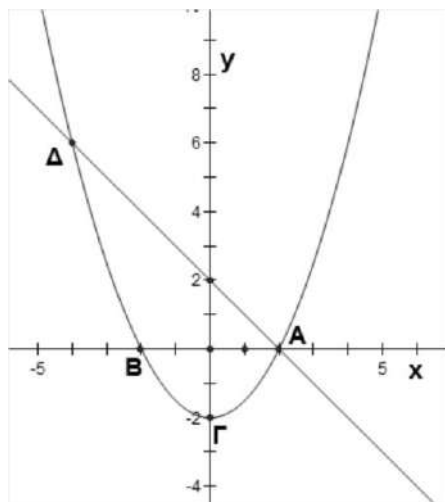


17. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:
 - Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
 - Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, $k < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



18. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



- i. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τα α , β , γ .
- ii. Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής.
- iii. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- i. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(5,8), να δείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$
- ii. Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g .
- iii. Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x - 1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ ($\kappa > 0$).

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (Βερολίνο, 13 Σεπτεμβρίου 1873 – Μόναχο, 2 Φεβρουαρίου 1950) ήταν κορυφαίος σύγχρονος Έλληνας μαθηματικός που διακρίθηκε σε παγκόσμιο επίπεδο. Ο Καραθεοδωρή ήταν γνωστός εκτός Ελλάδας ως Constantin Carathéodory και συχνά αναφέρεται (λανθασμένα) ως Καραθεοδωρής. Το επιστημονικό έργο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή επεκτείνεται σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Αρχαιολογίας.



Είχε σημαντικότερη συνεισφορά ιδιαίτερα στους τομείς της πραγματικής ανάλυσης, συναρτησιακής ανάλυσης και θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης.

Από το 1891 έως το 1895, σπούδασε πολιτικός μηχανικός στη Στρατιωτική Σχολή του Βελγίου στις Βρυξέλλες. Με την αποφοίτησή του, το 1895, αποδέχτηκε την πρόσκληση του θείου του, Αλέξανδρου Στεφάνου Καραθεοδωρή, ο οποίος ήταν γενικός διοικητής της Κρήτης, και τον επισκέφθηκε στα Χανιά. Εκεί γνωρίστηκε με τον Ελευθέριο Βενιζέλο. Στη συνέχεια πήγε στη Λέσβο, όπου μετείχε στην κατασκευή έργων οδοποιίας, ενώ το 1898 πήγε στην Αίγυπτο, για να εργαστεί ως μηχανικός στην βρετανική εταιρεία που κατασκεύαζε το φράγμα στο Ασουάν. Στην Αίγυπτο συνέχισε να μελετά μαθηματικά συγγράμματα, ενώ έκανε και μετρήσεις στην κεντρική είσοδο της πυραμίδας του Χέοπα, τις οποίες και δημοσίευσε.

Στην Αίγυπτο, ο Καραθεοδωρή κατάλαβε πόσο μεγάλη γοητεία και επιρροή ασκούσαν επάνω του τα Μαθηματικά και συνειδητοποίησε πως η δουλειά του μηχανικού δεν ήταν εκείνη που αναζητούσε το ανήσυχο πνεύμα του. Έτσι το 1900, ο 27χρονος πια Καραθεοδωρή, προς μεγάλη έκπληξη των δικών του, αποφάσισε να εγκαταλείψει το επάγγελμα του μηχανικού και να πάει στη Γερμανία για να σπουδάσει Μαθηματικά. Από το 1909 έως το 1920 δίδαξε Μαθηματικά σε διάφορα γερμανικά ακαδημαϊκά ιδρύματα: Αννόβερο, Μπρέσλαου (Βρότσλαβ στη σημερινή Πολωνία), Γκέτινγκεν και Βερολίνο. Η φήμη του ως μαθηματικού τον έφερε σε φιλική και επαγγελματική επαφή με άλλους μεγάλους ομολόγους της εποχής του όπως ο Μαξ Πλανκ, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν, ο Σβαρτς, ο Φρομπένιους, ο Σμιτ, ο Ντάβιντ Χίλμπερτ, ο Κλάιν, κ.ά.

Ιδιαίτερη ήταν η σχέση που συνέδεε τον Καραθεοδωρή με τον Άλμπερτ Αϊνστάιν. Οι δύο άνδρες γνωρίστηκαν το 1915 διατήρησαν μια επιστημονική σχέση, στηριγμένη στην αλληλοεκτίμηση και το σεβασμό. Τότε άρχισε και το ενδιαφέρον του Καραθεοδωρή για την Θεωρία της Σχετικότητας.

Το 1911, μετά από πρόσκληση του Ελευθέριου Βενιζέλου, ο Καραθεοδωρή συμμετείχε στην επιτροπή επιλογής καθηγητών για το Πανεπιστήμιο Αθηνών. Το 1913 έγινε καθηγητής της Α' έδρας της μαθηματικής επιστήμης του Πανεπιστημίου

του Γκέτινγκεν, θέση στην οποία παρέμεινε μέχρι το 1918. Το 1920, πάλι με πρόσκληση του Βενιζέλου, ανέλαβε να οργανώσει το Ιώνιο Πανεπιστήμιο στη Σμύρνη. Η απόφαση του Καραθεοδωρή να επιστρέψει στην πατρίδα του προκειμένου να της φανεί χρήσιμος, παρόλο που μεσουρανούσε στη Γερμανία, είναι μάλλον ενδεικτική της αγάπης του για την Ελλάδα.

Στη Σμύρνη ο Καραθεοδωρή έμεινε μέχρι την κατάρρευση του μικρασιατικού μετώπου τον Αύγουστο του 1922. Όταν οι Τούρκοι εισέβαλαν στην πόλη, ο 49χρονος Καραθεοδωρή κατόρθωσε να διασώσει τη βιβλιοθήκη και πολλά από τα εργαστηριακά όργανα του Ιονίου Πανεπιστημίου και να τα μεταφέρει στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Η δωρεά Καραθεοδωρή βρίσκεται μέχρι τις μέρες μας στο Μουσείο Φυσικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Το 1922 διορίστηκε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και το 1923 διορίστηκε καθηγητής στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Μάλλον απογοητευμένος από τη μίζερη κατάσταση των ελληνικών πανεπιστημίων, εγκατέλειψε την Ελλάδα το 1924, για να αναλάβει καθηγητική θέση στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, που εκείνο τον καιρό ήταν το δεύτερο μεγαλύτερο πανεπιστήμιο της Γερμανίας και δίδασκαν σ' αυτό κορυφαία ονόματα. Το Νοέμβριο του 1926, έγινε μέλος στη νεοϊδρυθείσα Ακαδημία Αθηνών για την τάξη των Θετικών Επιστημών. Το 1928, ανταποκρινόμενος σε πρόσκληση από το Πανεπιστήμιο Χάρβαρντ και την Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία, επισκέφθηκε τις ΗΠΑ μαζί με την γυναίκα του για έναν σχεδόν χρόνο, για να δώσει διαλέξεις σε διάφορα αμερικανικά πανεπιστήμια, ανάμεσά στα οποία το Πανεπιστήμιο Πρίνστον, το Πανεπιστήμιο της Πενσυλβάνια, το Πανεπιστήμιο του Τέξας στο Ώστιν και άλλα.

Το 1930, πάλι μετά από πρόσκληση του Ελευθέριου Βενιζέλου, ανέλαβε καθήκοντα κυβερνητικού επιτρόπου στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και το Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης για να βοηθήσει στην αναδιοργάνωση του πρώτου και στην οργάνωση του (νεοσύστατου) δεύτερου. Δύο χρόνια παρακολούθησε μαθήματα Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Το 1932, επέστρεψε στην έδρα του στο Μόναχο και παρέμεινε στην πόλη αυτή, ακόμα και μέσα στα δύσκολα χρόνια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Το 1945, διάφορα αμερικανικά πανεπιστήμια τον προσκάλεσαν για να εγκατασταθεί και να διδάξει στις ΗΠΑ, αλλά προτίμησε να μείνει στη Γερμανία, αφού ήταν ηλικιωμένος και είχε ήδη χάσει τη σύντροφό του.

Τον Δεκέμβριο του 1949 έδωσε την τελευταία του διάλεξη στο Μόναχο. Πέθανε δύο μήνες αργότερα. Η σορός του ενταφιάστηκε στο Κοιμητήριο Waldfriedhof του Μονάχου.

Ο Καραθεοδωρή άρχισε να συγγράφει επιστημονικές μελέτες ήδη από τον καιρό που εργαζόταν ως μηχανικός στην Αίγυπτο. Οι έρευνες του, τις οποίες δημοσίευσε κυρίως στα γερμανικά, συνθέτουν ένα τεράστιο και πολύπλευρο έργο, το οποίο τον κατατάσσει μεταξύ των μεγαλύτερων μαθηματικών.

Αρχικά ασχολήθηκε με το Λογισμό των Μεταβολών και η διδακτορική διατριβή του (Γκέτινγκεν, 1904) φέρει τον τίτλο «Περί των ασυνεχών λύσεων στον Λογισμό των Μεταβολών». Στη συνέχεια, καταπιάστηκε με όλους σχεδόν του κλάδους των Μαθηματικών: θεωρία πραγματικών συναρτήσεων, θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, διαφορικές εξισώσεις, θεωρία συνόλων και διαφορική γεωμετρία, σύμμορφες απεικονίσεις κ.ά.

Οι μαθηματικές του αποδείξεις χαρακτηρίζονται από «κομψότητα και απλότητα», αλλά και αυστηρότητα που δίνει απόλυτη ασφάλεια στα συμπεράσματα που προκύπτουν. Με τη συμβολή του στο Λογισμό των Μεταβολών βοήθησε στην ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας προκαλώντας το θαυμασμό του ίδιου του Αϊνστάιν:

«Αν θέλετε να μπείτε στον κόπο να μου εξηγήσετε ακόμα και τους κανονικούς μετασχηματισμούς θα βρείτε έναν ευγνώμονα και ευσυνείδητο ακροατή. Αν όμως λύσετε και το πρόβλημα των κλειστών γραμμών του χρόνου, θα σταθώ μπροστά σας με σταυρωμένα χέρια. Πίσω από αυτό υπάρχει κρυμμένο κάτι που είναι αντάξιο του ιδρώτα των καλυτέρων.» — Επιστολή του Αϊνστάιν προς τον Καραθεοδωρή, 1916

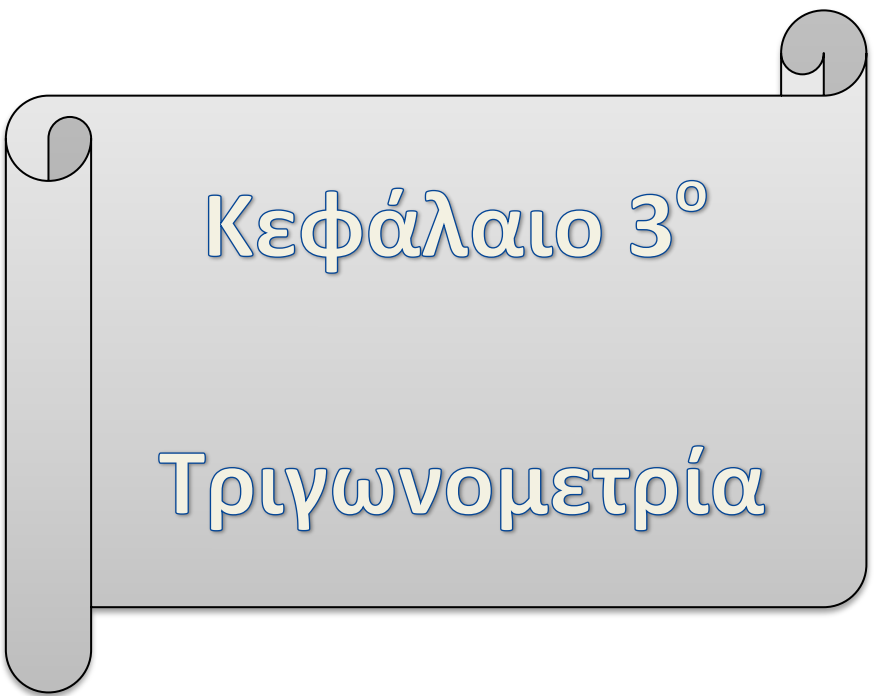
Η συμβολή του στην Θεωρητική Φυσική ήταν ουσιαστική στη μαθηματική θεμελίωση τομέων της Φυσικής όπως η Θερμοδυναμική, η Γεωμετρική Οπτική, η μηχανική και η Σχετικότητα.

Το 1909 δημοσίευσε μία εργασία με τίτλο «Έρευνα επί των βάσεων της Θερμοδυναμικής» στο περιοδικό *Mathematische Annalen*. Η εργασία αυτή έγινε ευρέως γνωστή στους κύκλους των φυσικών μόνο το 1921 από ένα σχετικό άρθρο του Μαξ Μπορν (Max Born) στο περιοδικό *Physikalische Zeitschrift*. Στην εργασία του 1909 περιέχεται και η περίφημη Αρχή Καραθεοδωρή που λέει ότι:

«σε κάθε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ενός συστήματος υπάρχουν μερικές απείρως γειτονικές καταστάσεις ισορροπίας στις οποίες δεν μπορούμε να φτάσουμε με αδιαβατικές μεταβολές».

Με απλά αξιώματα και υποθέσεις, ο Καραθεοδωρή κατόρθωσε να φτάσει στον ορισμό θεμελιωδών θερμοδυναμικών μεγεθών όπως της εντροπίας, χωρίς καμία αναφορά σε θερμοδυναμικούς κύκλους κ.λπ.

Υπήρξε μέλος των ακαδημιών Βερολίνου (1919), Γκέτινγκεν (1920), Μονάχου (1925), Κολωνίας (1926, Αθηνών (1927) και Ρώμης (1929).



Κεφάλαιο 3^ο

Τριγωνομετρία

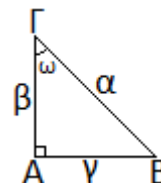
3.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί

➤ **Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ω**

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με

$A = 90^\circ$ ορίζονται ως:

$$\begin{aligned}\eta\mu\omega &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} \\ \sigma\phi\omega &= \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}\end{aligned}$$



➤ **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω**

Αν $M(x, y)$ σημείο της τελικής πλευράς οποιασδήποτε γωνίας ω ορίζουμε:

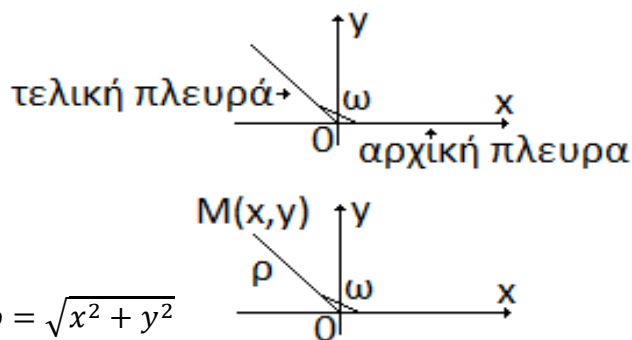
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \text{ με } x \neq 0$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \text{ με } y \neq 0$$

$$\text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



- ✓ Επειδή οι γωνίες ω και $\nu \cdot 360^\circ + \omega$ με $\nu \in \mathbb{N}$ έχουν την ίδια τελική πλευρά θα έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Οπότε για $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

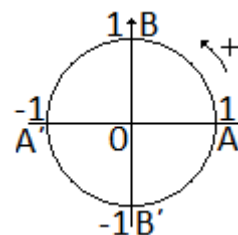
$$\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

- ✓ Αν ο ημιάξονας Ox κινούμενος κατά την αρνητική φορά (Δείκτες ρολογιού) διαγράφει n ($n \in \mathbb{N}$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια γωνία ω τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία $-n \cdot 360^\circ - \omega$.

➤ Τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικό κύκλο ορίζουμε τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Όλες οι γωνίες θεωρούμε ότι έχουν αρχική πλευρά την OA .



- Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$ τότε ισχύει:

$$\sigmaυν\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x$$

$$\etaμ\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y$$

Άρα $\sigmaυν\omega = x$ (τετμημένη του σημείου M)

$\etaμ\omega = y$ (τεταγμένη του σημείου M)

- ✓ Ο άξονας $x'x$ θα λέγεται άξονας συνημιτόνων
- ✓ Ο άξονας $y'y$ θα λέγεται άξονας ημιτόνων
- ✓ Οι τιμές του $\etaμ\omega$ και $\sigmaυν\omega$ δεν μπορούν να υπερβούν κατά απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου που είναι ίση με 1. Δηλαδή ισχύει

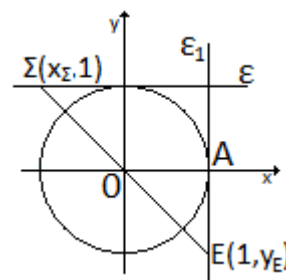
$$-1 \leq \etaμ\omega \leq 1 \text{ και } -1 \leq \sigmaυν\omega \leq 1$$

- Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες του τριγωνομετρικού κύκλου στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει την ε_1 στο σημείο E και την ε_2 στο σημείο Σ είναι:

$\varepsilonφ\omega = y_E$ (τεταγμένη του σημείου E)

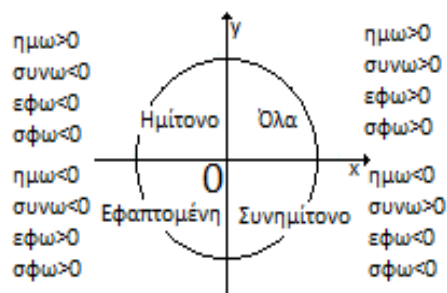
$\sigmaφ\omega = x_2$ (τετμημένη του σημείου Σ)



- ✓ Η ευθεία ε_1 λέγεται ευθεία (άξονας) των εφαπτομένων και η ευθεία ε_2 λέγεται ευθεία (άξονας) των συνεφαπτομένων.

➤ **Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών**

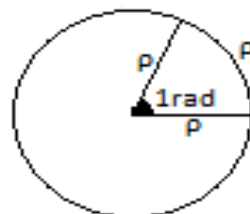
Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ω ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας:



	1°	2°	3°	4°
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

➤ **Το ακτίνο ως μονάδα μέτρησης**

Το ακτίνο (η rad) είναι ίσο με το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε τόξο που είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.



✓ Η σχέση που συνδέει την γωνία μ^0 με το ακτίνο α rad είναι:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

➤ **Τριγωνομετρικός πίνακας χρήσιμων γωνιών**

Παρακάτω δίνεται ο τριγωνομετρικός πίνακας βασικών γωνιών:

ω	0° 0 rad	30° $\frac{\pi}{6}$ rad	45° $\frac{\pi}{4}$ rad	60° $\frac{\pi}{3}$ rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad	180° π rad	270° $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° 2π rad
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---	0	---	0
σφω	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	---	0	---

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x , y και την γωνία Γ .

Λύση

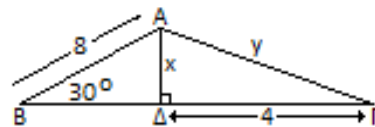
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ ($\Delta = 90^\circ$) έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{x}{8} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = 4$$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ ($\Delta = 90^\circ$) εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 16 + 16 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 32 \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt{32} \Leftrightarrow$$

$$y = 4\sqrt{2}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ έχουμε ότι:

$$\eta\mu \Gamma = \frac{x}{y} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Γωνία σε μοίρες	0°		135°	
Γωνία σε ακτίνια		$\frac{\pi}{10}$		$\frac{3\pi}{2}$

Λύση

- Για $\mu = 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{0}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

- Για $\alpha = \frac{\pi}{10}$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{\pi}{10\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 10\mu = 180$$

$$\Leftrightarrow \mu = 18^0$$

- Για $\mu = 135^0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{135}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 135\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

- Για $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{\frac{3\pi}{2}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 2\mu = 540$$

$$\Leftrightarrow \mu = 270^0$$

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 1125.

Λύση

- $\eta\mu 1125 = \eta\mu(3 \cdot 360 + 45) = \eta\mu 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 1125 = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360 + 45) = \sigma\upsilon\nu 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\varepsilon\varphi 1125 = \varepsilon\varphi(3 \cdot 360 + 45) = \varepsilon\varphi 45 = 1$
- $\sigma\varphi 1125 = \sigma\varphi(3 \cdot 360 + 45) = \sigma\varphi 45 = 1$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$, ισχύουν $B\Gamma = 20$ και $\eta\mu B = \frac{4}{5}$. Να

βρείτε:

- i. Τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ.
- ii. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

2. Να εκφράσετε σε rad τις γωνίες $0^\circ, 120^\circ, 320^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 390^\circ, 1200^\circ, 1035^\circ$

3. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}, \quad \frac{7\pi}{6} \text{ rad}, \quad \frac{\pi}{16} \text{ rad}, \quad \frac{7\pi}{3} \text{ rad}, \quad \frac{25\pi}{4} \text{ rad}, \quad \frac{23\pi}{6} \text{ rad}$$

4. Να δείξετε τις ισότητες:

- i. $\eta\mu 60^\circ = 2 \cdot \eta\mu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ$
- ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{6}$
- iii. $\epsilon\phi 60^\circ = \frac{2\epsilon\phi 30^\circ}{1 - \epsilon\phi^2 30^\circ}$
- iv. $\eta\mu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 50^\circ + \sigma\upsilon\nu 770^\circ - \eta\mu 380^\circ = 0$

5. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- i. $A = \eta\mu 30 + 2\sigma\upsilon\nu 30 - 3\epsilon\phi 30$
- ii. $B = \eta\mu 60 \cdot \sigma\phi 30 - \sigma\upsilon\nu 60 + \epsilon\phi 45$
- iii. $\Gamma = \sqrt{2}\eta\mu 45 - \sqrt{3}\epsilon\phi 30 + \eta\mu 0$
- iv. $\Delta = \sigma\upsilon\nu 30 \cdot \sigma\phi 60 + \sigma\upsilon\nu 60 - \eta\mu 90$

6. Να βρείτε την μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμή των παραστάσεων:

- i. $y = 13 + 2\eta\mu x$
- iii. $y = \frac{1}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$
- ii. $y = 5 - 2\sigma\upsilon\nu x$
- iv. $y = 2 + \eta\mu^2 x$

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6} + \epsilon\phi^{13} \frac{\pi}{4} = \sigma\phi^{2012} \frac{\pi}{2} = \eta\mu^2 \frac{\pi}{4}$$

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

- i. 765°
- ii. $\frac{49\pi}{6} \text{ rad}$

3.2. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

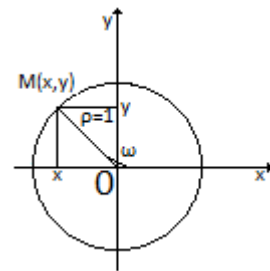
➤ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\blacksquare \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Απόδειξη

Αν $M(x, y)$ είναι σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο τότε $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = \eta\mu\omega$

$$\text{Επομένως } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 = \rho^2 = 1^2 = 1$$



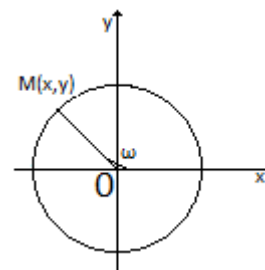
$$\blacksquare \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Απόδειξη

Αν $M(x, y)$ είναι σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο τότε

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } y = \eta\mu\omega \neq 0$$

$$\text{Επομένως } \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$



$$\blacksquare \quad \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

Απόδειξη

$$\text{Ισχύει ότι: } \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

$$\blacksquare \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Απόδειξη

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ αν $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon\varphi^2\omega + 1}{1} = \frac{1}{\sigma\nu^2\omega} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\nu^2\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1}$$

$$\blacksquare \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\nu^2\omega \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega + 1 - 1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1}$$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Αν ισχύει $\sin \omega = -\frac{5}{13}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega &= 1 \Leftrightarrow \\ \eta\mu^2\omega &= 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow \\ \eta\mu^2\omega &= 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \eta\mu^2\omega &= 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \\ \eta\mu^2\omega &= \frac{169 - 25}{169} \Leftrightarrow \\ \eta\mu^2\omega &= \frac{144}{169} \Leftrightarrow \\ \eta\mu\omega &= \pm \sqrt{\frac{144}{169}} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Αφού $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ έχουμε ότι $\eta\mu\omega < 0$ άρα

$$\eta\mu\omega = -\frac{12}{13}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}\epsilon\phi\omega &= \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5} \text{ και} \\ \sigma\phi\omega &= \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

2. Αν $\sigma\phi\omega = -\frac{5}{12}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Λύση

Είναι $\sigma\phi\omega = -\frac{5}{12}$. όμως $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1 \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\omega = -\frac{12}{5}$$

Άρα

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\frac{144}{25} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\frac{169}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{25}{169} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \pm \sqrt{\frac{25}{169}}$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ άρα $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ επομένως

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$$

Έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\left(-\frac{12}{5}\right)^2}{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\frac{144}{25}}{\frac{144}{25} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\frac{144}{25}}{\frac{169}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{144}{169} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} \Leftrightarrow$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ άρα $\eta\mu\omega > 0$ επομένως

$$\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$$

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του θ για τις οποίες $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{4} = 1$$

Άτοπο. Άρα δεν υπάρχει γωνία θ .

4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha}$

Απόδειξη

Είναι:

$$\frac{1-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(1-\eta\mu\alpha)(1+\eta\mu\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow$$

$$1-\eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Αν $\sin \omega = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
2. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{5}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
3. Αν $\epsilon\phi\omega = 5$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
4. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2\eta\mu\omega - 5\sigma\upsilon\nu\omega}{\epsilon\phi\omega + \sigma\phi\omega}$$

5. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας $x \text{ rad}$ όταν:
 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $8\eta\mu x = 5(1 - \eta\mu x)$.

6. Για τη γωνία θ , με $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ισχύει $5\sigma\upsilon\nu^2\theta + 7\eta\mu\theta + 1 = 0$.

7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{10\eta\mu\theta + 10\sigma\upsilon\nu\theta}{8\epsilon\phi\theta - 3\sigma\phi\theta}$.

8. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$.

9. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\epsilon\phi\alpha}{1+\epsilon\phi^2\alpha} = \sigma\phi\alpha$.

10. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του θ για τις οποίες ισχύει

$$\eta\mu\theta = \alpha + 1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\theta = \alpha + 1 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

11. Να αποδείξετε ότι

$$\text{i. } \sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = 1$$

$$\text{ii. } \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

$$\text{iii. } \eta\mu^2 x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\phi x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$$

12. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^4\alpha}{1 - \sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^4\alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha$$

14. Δείξτε ότι: $\frac{4\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2$

15. Δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$

16. Δείξτε ότι: i) $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta(\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta)$
 ii) $\sigma\varphi^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

17. Αν $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = 3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $\varepsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi^2 x$ ii) $|\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x|$ iii) $\varepsilon\varphi^3 x + \sigma\varphi^3 x$

18. Αν $0 < x < \pi$ να δείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}} + \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

19. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$

ii. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

20.

i. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

ii. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

3.3. Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

➤ Γωνίες αντίθετες

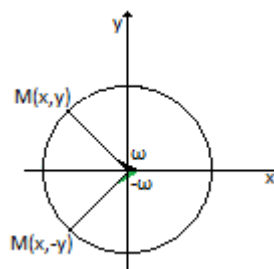
Για τις αντίθετες γωνίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$



- ✓ Δηλαδή οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

➤ Γωνίες με άθροισμα 180^ο (Παραπληρωματικές γωνίες)

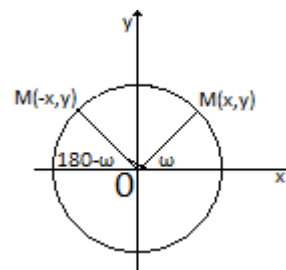
Για τις παραπληρωματικές γωνίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu(180 - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180 - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180 - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180 - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$



- ✓ Δηλαδή οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

➤ Γωνίες που διαφέρουν κατά 180^ο

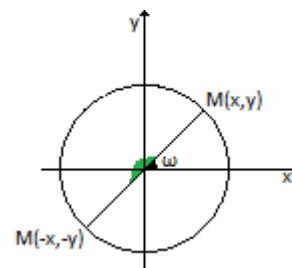
Για τις γωνίες που διαφέρουν κατά 180^ο ισχύουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu(180 + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180 + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180 + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180 + \omega) = \sigma\varphi\omega$$



- ✓ Δηλαδή οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180^ο έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και την ίδια συνεφαπτομένη.

➤ Γωνίες με άθροισμα 90° (Συμπληρωματικές γωνίες)

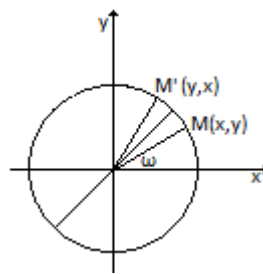
Για τις συμπληρωματικές γωνίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu(90 - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(90 - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(90 - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90 - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$



- ✓ Δηλαδή σε συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο της κάθε μίας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της κάθε μίας με την συνεφαπτομένη της άλλης.

Προσοχή!!

Ειδικές περιπτώσεις αναγωγής που δεν συμπεριλαμβάνονται στον πίνακα.

$$\alpha) \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\beta) \quad \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\gamma) \quad \eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Ειδικές περιπτώσεις αναγωγής με γωνίες μεγαλύτερες του 2π

$$\alpha) \quad \eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(\frac{12\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(\cancel{3 \cdot 2\pi} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

β)

$$\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(\frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(\cancel{3 \cdot 2\pi} - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των 120^0 .

Λύση

Είναι

$$\eta\mu 120 = \eta\mu(180 - 60) = \eta\mu 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120 = \sigma\upsilon\nu(180 - 60) = -\sigma\upsilon\nu 60 = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 120 = \varepsilon\varphi(180 - 60) = -\varepsilon\varphi 60 = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi 120 = \sigma\varphi(180 - 60) = -\sigma\varphi 60 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των $\frac{5\pi}{4} rad$.

Λύση

$$\eta\mu \frac{5\pi}{4} = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{5\pi}{4} = \varepsilon\varphi \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sigma\varphi \frac{5\pi}{4} = \sigma\varphi \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1$$

3. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας -1200^0

Λύση

Είναι:

$$\eta\mu(-1200) = -\eta\mu 1200$$

$$= -\eta\mu(3 \cdot 360^0 + 120^0)$$

$$= -\eta\mu 120^0$$

$$= -\eta\mu(180^0 - 60^0)$$

$$= -\eta\mu 60^0$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(-1200) = \sigma\upsilon\nu 1200$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360^0 + 120^0) \\
 &= \sigma\upsilon\nu 120^0 \\
 &= \sigma\upsilon\nu(180^0 - 60^0) \\
 &= -\sigma\upsilon\nu 60^0 \\
 &= -\frac{1}{2} \\
 \varepsilon\varphi(-1200) &= -\varepsilon\varphi 1200 \\
 &= -\varepsilon\varphi(3 \cdot 360^0 + 120^0) \\
 &= -\varepsilon\varphi 120^0 \\
 &= -\varepsilon\varphi(180^0 - 60^0) \\
 &= -(-\varepsilon\varphi 60^0) \\
 &= \varepsilon\varphi 60^0 \\
 &= \sqrt{3} \\
 \sigma\varphi(-1200) &= -\sigma\varphi 1200 \\
 &= -\sigma\varphi(3 \cdot 360^0 + 120^0) \\
 &= -\sigma\varphi 120^0 \\
 &= -\sigma\varphi(180^0 - 60^0) = \\
 &= -(-\sigma\varphi 60^0) = \sigma\varphi 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

4. Αν ΑΒΓ τρίγωνο τότε να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\Gamma + \sigma\upsilon\nu(A+B) = 0$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 A+B+\Gamma &= 180^\circ \Rightarrow \Gamma = 180^\circ - (A+B) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu[180^\circ - (A+B)] \Rightarrow \\
 \sigma\upsilon\nu\Gamma &= -\sigma\upsilon\nu(A+B) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma + \sigma\upsilon\nu(A+B) = 0
 \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\frac{2\pi}{3}$

iv. $\frac{61\pi}{6}$

ii. $\frac{3\pi}{4}$

v. $\frac{49\pi}{4}$

iii. $\frac{5\pi}{6}$

vi. $\frac{301\pi}{3}$

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\frac{19\pi}{6}$

iv. $\frac{23\pi}{6}$

ii. $\frac{21\pi}{4}$

v. $\frac{31\pi}{4}$

iii. $\frac{22\pi}{3}$

vi. $\frac{29\pi}{3}$

vii.

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i. $A = \frac{\eta\mu(7\pi+x) \cdot \sigma\upsilon\nu(21\pi-x)}{\eta\mu(13\pi-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(38\pi-x)}$

ii. $B = \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(5\pi - x) - \varepsilon\phi(6\pi - x) \cdot \sigma\phi(7\pi + x)$

iii. $\Gamma = \eta\mu(3\pi + x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$

iv. $\Delta = \frac{\eta\mu(x-\pi) \cdot \varepsilon\phi\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-2\pi)}{\sigma\upsilon\nu(x-3\pi) \cdot \sigma\phi(x-\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

v. $E = \frac{\eta\mu(90^\circ-\alpha) \cdot \eta\mu(180^\circ+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ+\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ-\alpha)}$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $A = \frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \varepsilon\phi \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{2\pi}{3} \cdot \varepsilon\phi \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\phi \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

ii. $B = \frac{\eta\mu \frac{19\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{27\pi}{4} \cdot \varepsilon\phi \frac{17\pi}{3}}{\sigma\phi \frac{20\pi}{3} \cdot \eta\mu \frac{37\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{46\pi}{3}}$

$$\Gamma = \frac{2\eta\mu\frac{31\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{35\pi}{4} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{23\pi}{3}}{\sigma\phi\frac{39\pi}{4} + \sqrt{3}\varepsilon\phi\frac{53\pi}{6} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{34\pi}{3}}$$

5. Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες τριγώνου να αποδείξετε ότι:

- i. $\eta\mu(A + 2B + \Gamma) + \eta\mu B = 0$
- ii. $\sigma\upsilon\nu(2A + B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$
- iii. $\eta\mu(2A + 2B + \Gamma) + \eta\mu\Gamma = 0$

6. Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ την παράσταση

$$A = \eta\mu(-x) + \sigma\upsilon\nu(-x) + \eta\mu(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

7. Να δείξετε ότι: $0 < \frac{\varepsilon\phi(\pi-x)}{\sigma\phi(\pi-x)-\varepsilon\phi x} < 1$.

8. Αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$ να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$

9. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i.
$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} - \omega\right)}{\varepsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} - \omega\right) \cdot \varepsilon\phi(3\pi + \omega)} =$$

i.

$$\frac{\eta\mu(3\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi + \theta) \cdot \varepsilon\phi(7\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(9\pi - \theta)}{\eta\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - \theta) \cdot \varepsilon\phi(6\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(8\pi + \theta)} =$$

ii.

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)} =$$

10. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i. } A = \frac{\eta\mu\left(\frac{41}{2}\pi - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\phi(21\pi - \theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(33\pi + \theta)}$$

$$\text{ii. } B = \frac{\eta\mu\left(\frac{49\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right) \cdot \eta\mu(16\pi - \theta)}{\eta\mu\left(\frac{39\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{65\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\phi(-28\pi - \theta)}$$

$$\text{iii. } \Gamma = \frac{\sigma\phi\left(\frac{15\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega - 10\pi) \cdot \eta\mu(11\pi + \omega)}{\sigma\phi\left(\frac{29\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega - 23\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{41\pi}{2} + \omega\right)}$$

$$\text{iv. } \Delta = \frac{\varepsilon\phi(17\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta - 11\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\phi\left(\theta - \frac{9\pi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta - 6\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right)}$$

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = \frac{\eta\mu(11\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(21\pi - \omega) \cdot \varepsilon\phi(31\pi + \omega) \cdot \sigma\phi(41\pi - \omega)}{\eta\mu(13\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(23\pi + \omega) \cdot \varepsilon\phi(33\pi - \omega) \cdot \sigma\phi(43\pi + \omega)}$$

$$B = \frac{\eta\mu\left(\frac{90\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{191\pi}{2} + \omega\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{210\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{391\pi}{2} + \omega\right)}{\eta\mu\left(\frac{73\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{163\pi}{2} - \omega\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{219\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{273\pi}{2} - \omega\right)}$$

12. Αν ισχύει $\varepsilon\phi(45 - x) + \varepsilon\phi(45 + x) = 10$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \varepsilon\phi^2(45 - x) + \varepsilon\phi^2(45 + x)$.

13. Να αποδειχθεί ότι

$$i. \quad 2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu(11\pi + \alpha) \leq 1$$

Υπόδειξη ($2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu 2\alpha$)

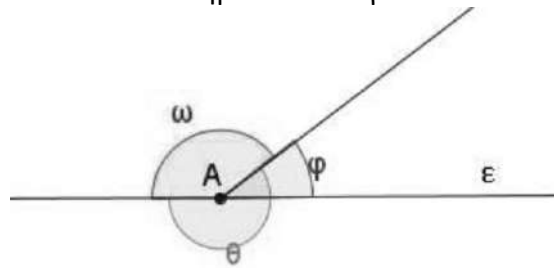
$$ii. \quad \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 2\eta\mu(\pi + \alpha) - 2, \alpha \in (2\pi, 3\pi)$$

14. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο

A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.

i. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

ii. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.



3.4. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

➤ Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ονομάζεται **περιοδική** όταν υπάρχει

$T \in \mathbb{R}^+$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- i. $(x + T) \in A$ και $(x - T) \in A$
- ii. $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

- ✓ Αν ο αριθμός T είναι περίοδος της συνάρτησης f τότε και ο αριθμός λT με $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ είναι επίσης περίοδος της f .
- ✓ Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι διάστημα ανοιχτό ή κλειστό με πραγματικά άκρα, τότε η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι περιοδική.

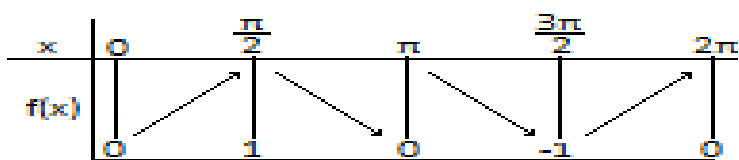
➤ Συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

Η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ αφού

$$f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x = f(x) \text{ και}$$

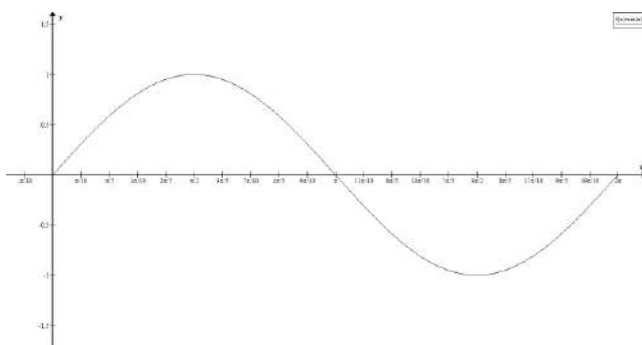
$$f(x - 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$$

Μελετώντας την μονοτονία της στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα:



➤ Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Η γραφική της παράσταση είναι



- ✓ Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή ίση με 1 και ελάχιστη ίση με -1
- ✓ Είναι περιττή αφού $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$ δηλαδή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- ✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = κπ$ με $κ \in \mathbb{Z}$

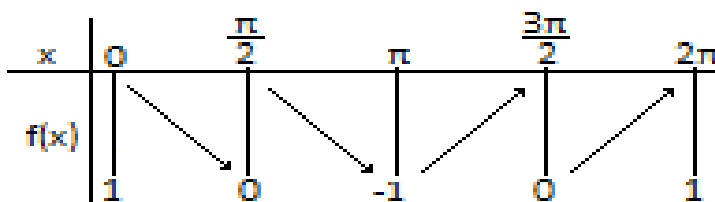
➤ **Συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$**

Η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ αφού

$$f(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu x = f(x) \text{ και}$$

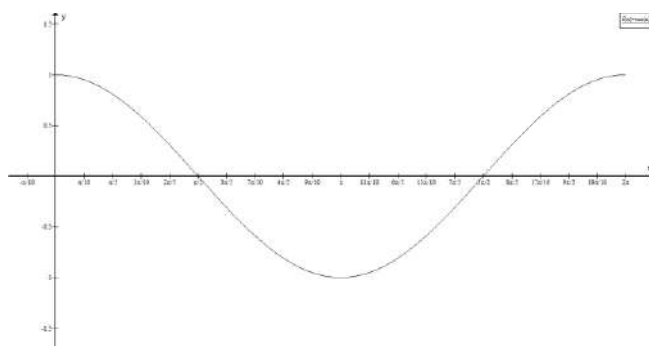
$$f(x - 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x - 2\pi) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$$

Μελετώντας την μονοτονία της στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα:



➤ **Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$**

Η γραφική της παράσταση είναι



- ✓ Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή ίση με 1 και ελάχιστη ίση με -1 .
- ✓ Είναι άρτια αφού $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$ άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
- ✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

➤ **Συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$**

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$ αφού $f(x + \pi) =$

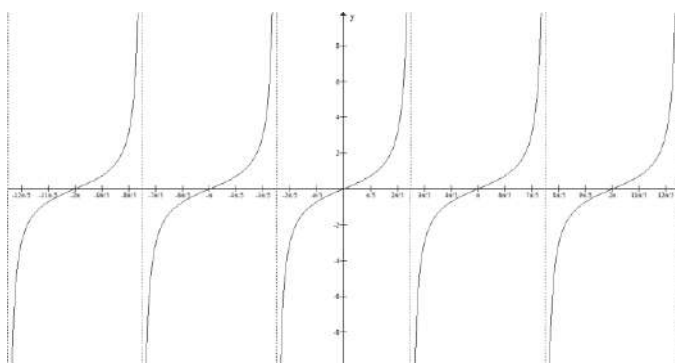
$$\varepsilon\varphi(x + \pi) = \varepsilon\varphi x = f(x) \text{ και}$$

$$f(x - \pi) = \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi x = f(x).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

➤ **Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\varphi x$**

Η γραφική της παράσταση είναι



➤ **Οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ και $g(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ όπου $\rho, \omega > 0$**

Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ έχουμε

$-1 \leq \eta\mu\omega x \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega x \leq 1$ και επειδή $\rho > 0$ έχουμε:

$$-\rho \leq \rho\eta\mu(\omega x) \leq \rho \Leftrightarrow \text{και } -\rho \leq \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x) \leq \rho \Leftrightarrow$$

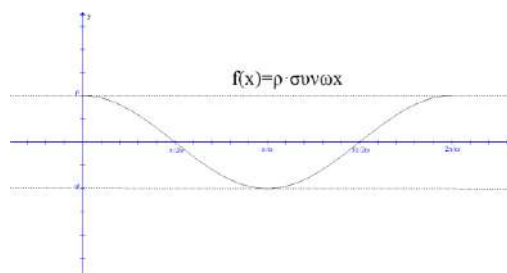
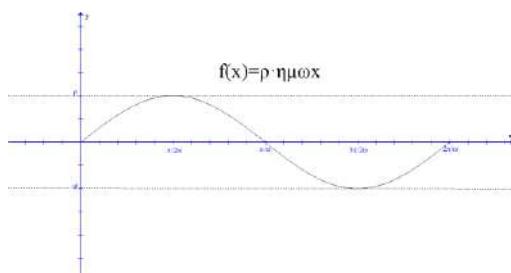
$$-\rho \leq f(x) \leq \rho \qquad -\rho \leq g(x) \leq \rho$$

✓ Άρα η μέγιστη τιμή της f και της g είναι το ρ και η ελάχιστη τιμή τους

είναι το $-\rho$

✓ Το ω καθορίζει την περίοδο T και είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\omega}$

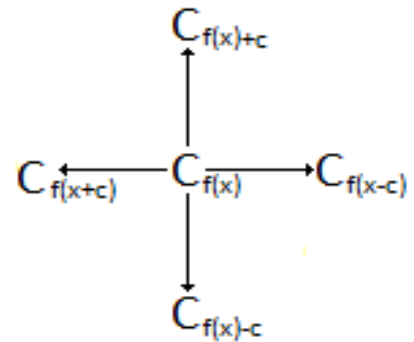
✓ Η γραφική της παράσταση των συναρτήσεων δίνεται στα σχέδια:



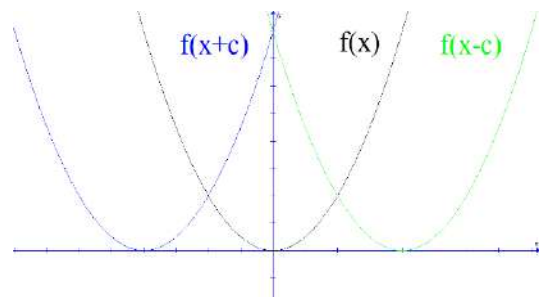
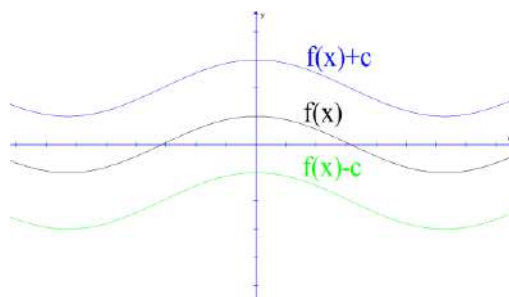
- ✓ Αν $h(x) = -\rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ και $\kappa(x) = -\rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ τότε για να φτιάξουμε τις γραφικές παραστάσεις των h και κ πρώτα φτιάχνουμε την γραφική παράσταση της f ή της g αντίστοιχα και στην συνέχεια χαράζουμε την συμμετρική τους ως προς τον άξονα $x'x$.
- ✓ Η h και η κ έχουμε μέγιστη τιμή το ρ και ελάχιστη τιμή το $-\rho$.

➤ Παρατηρήσεις για χάραξη γραφικών παραστάσεων

Το διπλανό σχήμα μας δίνει την μετατόπιση που δέχεται κάθε γραφική παράσταση σε σχέση με την αρχική $f(x)$.



Δηλαδή:



Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ και $(x - 2\pi) \in \mathbb{R}$

δηλαδή για $x \in A$ και $(x + T) \in A$ και $(x - T) \in A$ όπου $T = 2\pi$

είναι $f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) + \sigma\upsilon\nu 2(x + 2\pi) =$

$$\eta\mu(2\pi + x) + \sigma\upsilon\nu[2(x + \pi)] =$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x = f(x)$$

και $f(x - 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) + \sigma\upsilon\nu 2(x - 2\pi) =$

$$\eta\mu[-(2\pi - x)] + \sigma\upsilon\nu(2x - 4\pi) =$$

$$-[-\eta\mu x] + \sigma\upsilon\nu(4\pi - 2x) =$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x = f(x)$$

Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i. $f(x) = 2\eta\mu x$

ii. $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu 2x$

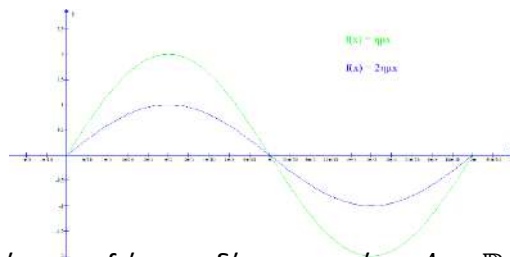
iii. $f(x) = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$

Λύση

- i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ επομένως θα σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση στο $[0, 2\pi]$

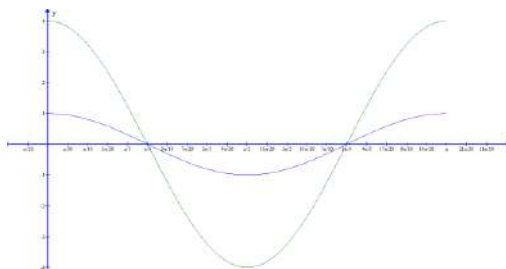
Έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$2\eta\mu x$	0	2	0	-2	0



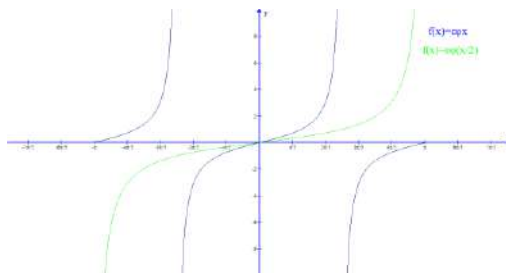
- ii. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$ επομένως θα σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση στο $[0, \pi]$ Έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$4\sin 2x$	4	0	-4	0	4



- iii. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\frac{x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Επομένως θα κάνουμε την γραφική της παράσταση στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{x}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\varepsilon\varphi \frac{x}{2}$	Δεν ορίζεται	-1	0	1	Δεν ορίζεται



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(3x - \pi)$

- i. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της
- ii. Να βρεθεί η περίοδος της συνάρτησης
- iii. Να γίνει η γραφική της παράσταση

Λύση

- i. Είναι $|f(x)| = |2\sigma\upsilon\nu(3x - \pi)| = 2|\sigma\upsilon\nu(3x - \pi)| \leq 2$

Άρα $-2 \leq f(x) \leq 2$

Επομένως η μέγιστη τιμή είναι το 2 για $3x - \pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ και η

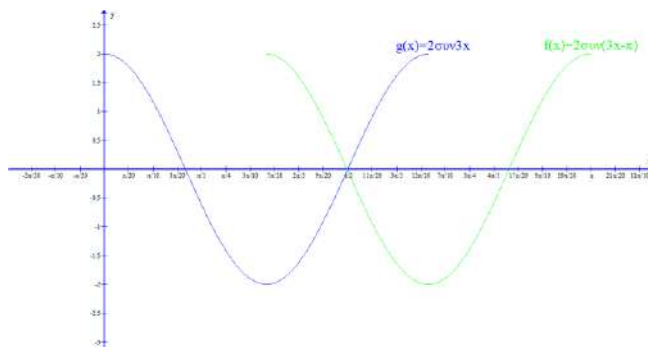
ελάχιστη τιμή της είναι το -2 για $3x - \pi = \pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

- ii. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{3}$

Η γραφική της παράσταση της $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(3x - \pi)$ θα προκύψει από την μετατόπιση της $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$ προς τα δεξιά με άκρα του

διαστήματος της περιόδου $\left(T = \frac{2\pi}{3}\right)$ τα οποία είναι $3x - \pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

και $3x - \pi = \pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$



Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

i. $f(x) = \eta\mu 3x$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

iii. $f(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu 4x + 3$

iv. $f(x) = 3\varepsilon\varphi x$

v. $f(x) = \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή όπως και την περίοδο των συναρτήσεων

i. $f(x) = 2\eta\mu x$

vi. $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$

vii. $f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

iii. $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu\frac{x}{2}$

iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}$

v. $f(x) = \varepsilon\varphi 3x$

3. Αν ισχύει $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{2\pi}{3}$, να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$\sigma\upsilon\nu x_1, \sigma\upsilon\nu x_2, \sigma\upsilon\nu 3x_1, \sigma\upsilon\nu 3x_2$.

4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = 2\eta\mu 3x$

iv. $f(x) = 1 + \eta\mu x$

ii. $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

v. $f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$

iii. $f(x) = 3\eta\mu\frac{x}{2}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - 3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$.

i. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη μ της συνάρτησης.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4\pi \leq x \leq 4\pi$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 2x - 3$.

i. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη μ της συνάρτησης.

- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq x \leq 2\pi$

7. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Το ύψος h (σε cm) σώματος σε χρόνο t (σε sec) δίνεται από την συνάρτηση

$$h(t) = 30 + 15\eta\mu\frac{t\pi}{3}$$

- i. Να εξηγήσετε ότι η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο $T = 6\text{sec}$
- ii. Να βρείτε το ύψος του σώματος σε χρόνο $t = 4\text{sec}$
- iii. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος του σώματος
- iv. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $0 \leq t \leq 6$

8. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

- | | |
|--|---|
| i. $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1$ | vii. $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}$ |
| ii. $f(x) = \eta\mu 21x + x$ | viii. $f(x) = \frac{2x^2}{\eta\mu x}$ |
| iii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu 2x$ | ix. $f(x) = \eta\mu x + 1$ |
| iv. $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x$ | x. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ |
| v. $f(x) = \eta\mu 13x + \eta\mu 2018x$ | |
| vi. $f(x) = \frac{2 + \eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}$ | |
| xi. $f(x) = 13\sigma\varphi\frac{x}{2}$ | |

9. Να βρείτε το μέγιστο, ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης:

$f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + 5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - 6$ και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \kappa + 3 + 2\eta\mu\frac{(2\lambda+1)x}{3}$ και

$g(x) = 6\lambda + 10 - 3\sigma\upsilon\nu\frac{(\kappa-2)x}{4}$. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ αν είναι γνωστό ότι έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια της περιόδου της g .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi + 2x)$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A , την περίοδο και τα ακρότατα της $f(x)$
- Να κάνετε την γραφική παράσταση της $f(x)$

12. Η ετήσια αυξομείωση θερμοκρασίας T σε βαθμούς κελσίου στη Βερενίκη Ιωαννίνων δίνεται προσεγγιστικά από την συνάρτηση:

$$T(x) = 14\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right) + 22$$

όπου x ο χρόνος σε μήνες

Για $x = 0$ η θερμοκρασία $T(0)$ αντιστοιχεί στην 1^η Ιανουαρίου

- Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $T(x)$ για $0 \leq x \leq 12$
- Να βρείτε τη μέγιστη θερμοκρασία καθώς και την ημερομηνία που εμφανίζεται αυτή.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

- Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. i. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}, \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

ii. Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f

- ii. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3\sin 2x$					

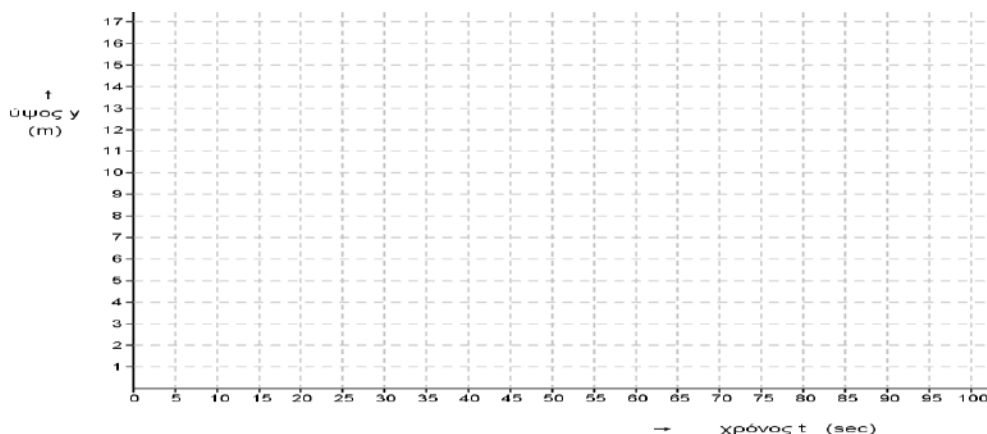
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$

- Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

17. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$ και $0 \leq t \leq 180$

- Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.
- Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.
- Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;
- Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:
 - να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$
 - να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

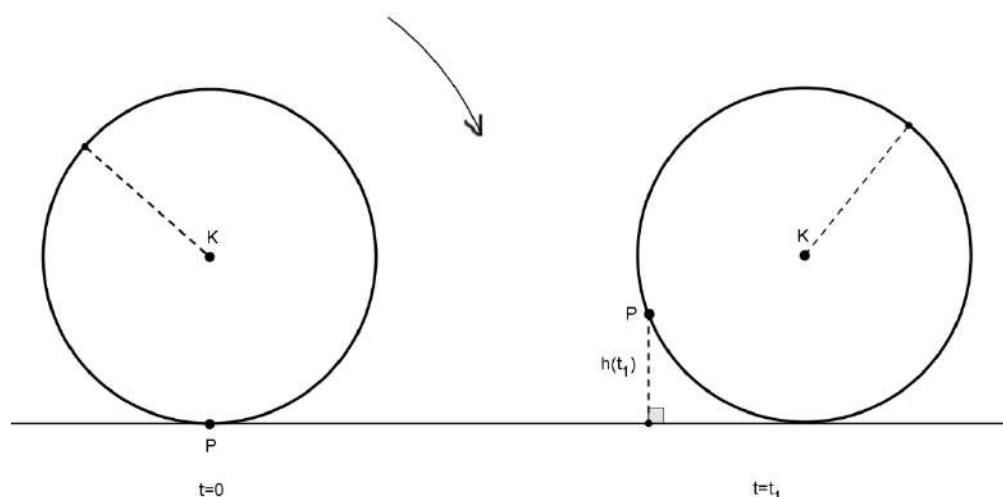


18. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:
 $h(t) = \alpha \cdot \sin(\omega t) + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$. Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20 cm και το μέγιστο 100 cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

- Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$.
- Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14 sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.
- Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$

19. Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Σημειώνουμε ένα σημείο P της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μια επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h (σε m) του σημείου P από την επιφάνεια, t sec μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση: $h(t) = -0,2 \sin(\omega t) + 0,2$, με ω θετική πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4 sec.

- Να αποδείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{2}$.
- Να προσδιορίσετε την απόσταση του P από την επιφάνεια τις στιγμές:
 $t_1 = 1 \text{ sec}$, $t_2 = 2 \text{ sec}$ και $t_3 = 7 \text{ sec}$.
- Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h .
- Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας.



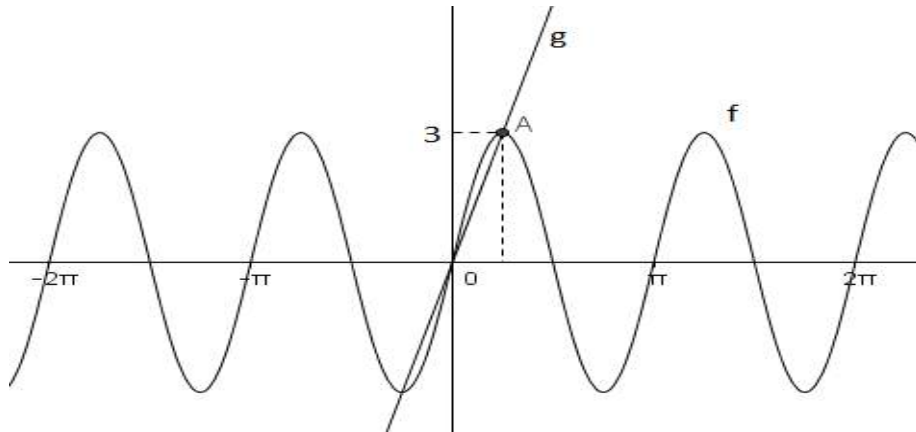
20. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης $f(x) = \rho \sin(\omega x)$, όπου $\omega > 0$ και $\rho > 0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Επίσης η f έχει μέγιστο 3.

- Να αποδείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$

ii. Να βρείτε τα α, β .

iii. Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12x}{\pi} = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$.



21. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = -2\eta\mu\frac{\pi t}{2} + 2, t \in [0, 4]$

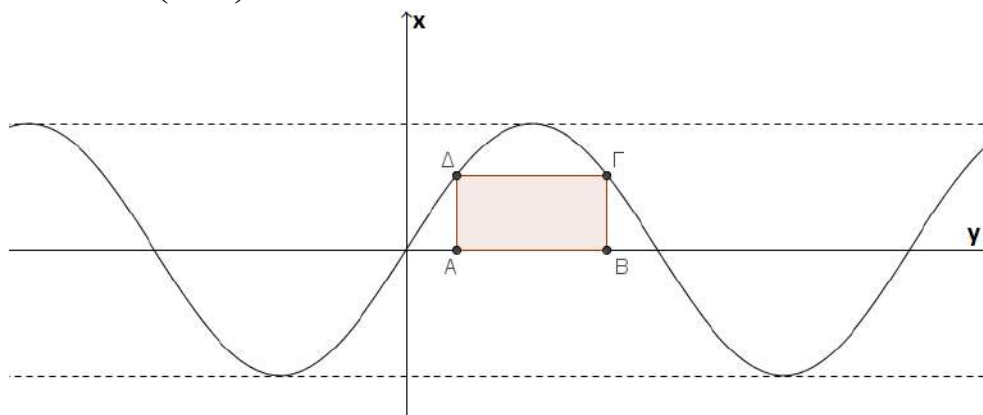
i. Να βρείτε την περίοδο της f .

ii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές.

iii. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f .

22. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$



i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Να βρείτε:

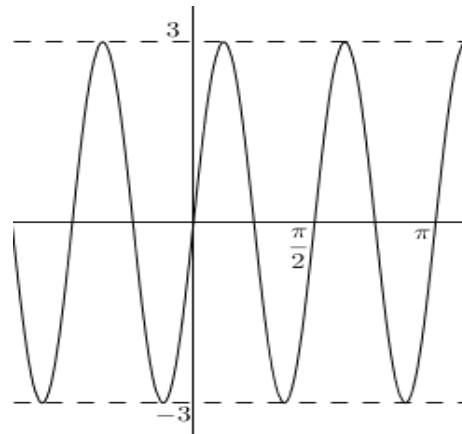
α. τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

β. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

23. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a\eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους $a, \omega > 0$.

Να βρείτε:

- i. την περίοδο της συνάρτησης f
- ii. τους αριθμούς a και ω
- iii. τους αριθμούς $k \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή.



3.5. Βασικές Τριγωνομετρικές εξισώσεις

➤ **Ορισμός τριγωνομετρικής εξίσωσης**

Τριγωνομετρική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τριγωνομετρικό αριθμό άγνωστης γωνίας.

➤ **Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$**

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο παρατηρούμε ότι αν

θ είναι η γωνία μια λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$

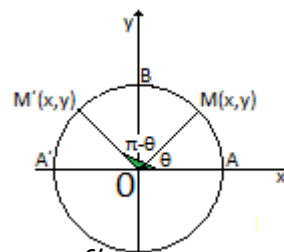
τότε και η $\pi - \theta$ είναι λύση

της εξίσωσης αφού $\eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta = \alpha$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης

δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

✓ **Προσοχή!!!** Η εξίσωση έχει λύση **μόνο** αν $\alpha \in [-1, 1]$



➤ **Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$**

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο παρατηρούμε ότι αν

θ είναι η γωνία μια λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$

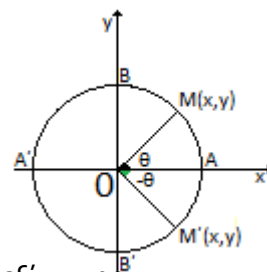
τότε και η $-\theta$ είναι λύση της

εξίσωσης αφού $\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης

δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \theta \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

✓ **Προσοχή!!!** Η εξίσωση έχει λύση **μόνο** αν $\alpha \in [-1, 1]$



➤ **Η εξίσωση $\epsilon\varphi x = \alpha$**

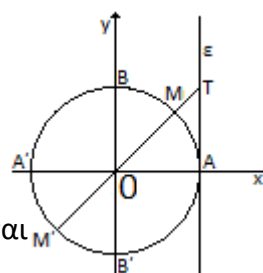
Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία ϵ των

εφαπτομένων. Έστω ότι θ είναι η γωνία με $\epsilon\varphi\theta = \alpha$.

Παρατηρούμε ότι και η γωνία $\pi + \theta$ είναι λύση της εξίσωσης

αφού $\epsilon\varphi(\pi + \theta) = \epsilon\varphi\theta = \alpha$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x = \kappa\pi + \theta \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$



➤ **Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \alpha$**

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία ε των συνεφαπτομένων.

Έστω ότι θ είναι η γωνία με $\sigma\varphi\theta = \alpha$. Παρατηρούμε ότι και η γωνία $\pi + \theta$ είναι λύση της εξίσωσης αφού $\sigma\varphi(\pi + \theta) = \sigma\varphi\theta = \alpha$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x = \kappa\pi + \theta \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$

iii. $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$

iv. $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

vi. $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

Λύση

i.

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii.

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii.

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

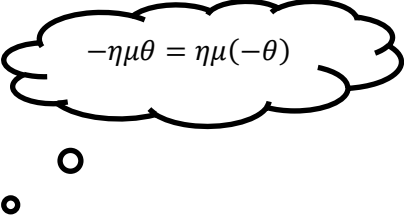
$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iv.

$$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$



$$-\eta\mu\theta = \eta\mu(-\theta)$$

$$\begin{cases} x = 2κπ - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2κπ + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad κ \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = 2κπ - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2κπ + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad κ \in \mathbb{Z}$$

$$\text{συν}(\pi - \theta) = -\text{συν}\theta$$

v.

$$\text{συν}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}x = -\text{συν}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}x = \text{συν}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}x = \text{συν}\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 2κπ \pm \frac{2\pi}{3}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

$$-\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(-\theta)$$

vi.

$$\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = κπ - \frac{\pi}{3}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\eta\mu x = \text{συν}\frac{\pi}{5}$

ii. $\text{συν}2x = \eta\mu x$

iii. $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{5}$

Λύση

i. Είναι

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{συν}\theta$$

$$\eta\mu x = \text{συν}\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu\frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{10} \\ \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{10} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{10} \\ \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{10} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Είναι

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

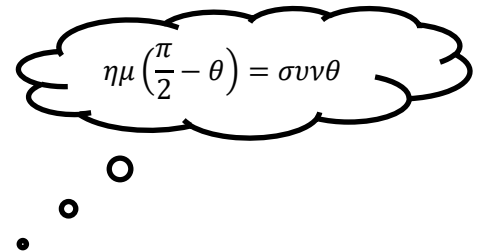
iii. Είναι

$$\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{10} \quad \mu\epsilon \kappa \in \mathbb{Z}$$



3. Να λύσετε την εξίσωση $(\epsilon\phi\alpha - 1)(\eta\mu\alpha - 1) = 0$

Λύση

Για την $\epsilon\phi\alpha$ ισχύει ότι $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, με $k \in \mathbb{Z}$ (ή πιο απλά, $\sin x \neq 0$)

$$(\epsilon\phi\alpha - 1)(\eta\mu\alpha - 1) = 0$$

$$\epsilon\phi\alpha - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\alpha - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\epsilon\phi\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\eta\mu\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ που}$$

απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

(*) Ένας πιο εύκολος τρόπος να παρατηρήσουμε ότι η λύση αυτή απορρίπτεται είναι ότι
αν $\eta\mu\alpha = 1$ τότε κατ' ανάγκη $\sin\alpha = 0$ που είναι άτοπο λόγω των περιορισμών.

4. Να λυθεί η εξίσωση $2\sin^2\theta + 5\eta\mu\theta - 3 = 0$

Λύση

Θέτουμε $\sin\theta = \omega$ άρα η εξίσωση γίνεται

$$2\omega^2 + 5\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = -3 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{2}$$

Επομένως για $\omega = -3$ έχουμε $\sin\theta = -3$ Αδύνατη

$$\text{για } \omega = \frac{1}{2} \text{ άρα } \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

5. Να λυθεί η εξίσωση $1 + \eta\mu x - \sin x = \eta\mu x \cdot \sin x$

Λύση

Είναι

$$\begin{aligned}
 1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x &= \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \\
 1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x &= 0 \Leftrightarrow \\
 1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x) &= 0 \Leftrightarrow \\
 (1 + \eta\mu x)(1 - \sigma\upsilon\nu x) &= 0 \Leftrightarrow \\
 1 + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad 1 - \sigma\upsilon\nu x &= 0 \Leftrightarrow \\
 \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \\
 x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi \\
 x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\
 \kappa \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Λύση

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\varphi x &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\
 \varepsilon\varphi x &= -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\
 \varepsilon\varphi x &= \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\
 x &= \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Όμως $x \in [0, 2\pi]$ άρα $0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{6} &\leq \kappa\pi \leq 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\
 \frac{\pi}{6} &\leq \kappa\pi \leq \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{6} &\leq \kappa \leq \frac{13}{6}
 \end{aligned}$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$

Για $\kappa = 1$ έχουμε $x = 1 \cdot \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

Για $\kappa = 2$ έχουμε $x = 2 \cdot \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6}$

7.Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

ii. $\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Λύση

i.

$$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \end{cases} \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = \kappa\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii.

$$\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

iv. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

v. $\epsilon\phi x = 1$

vi. $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

vii. $\eta\mu^2 x = \frac{1}{2}$

viii. $\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$

ix. $\sigma\upsilon\nu 3x = 1$

x. $\sigma\phi 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(2\eta\mu x - 1)(2\eta\mu x + \sqrt{3}) = 0$

ii. $(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2})(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

iii. $4\eta\mu^2 x - 3 = 0$

iv. $\epsilon\phi^2 x - 3 = 0$

v. $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

vi. $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

vii. $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

viii. $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$

ix. $\sigma\phi\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$

ii. $4\eta\mu x + 2 = 0$

iii. $\frac{\epsilon\phi x + 3}{2} = 1$

iv. $\frac{\sqrt{3}\sigma\phi x + 7}{3} = 2$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- ii. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$
- iii. $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- iv. $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$
- v. $\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- vi. $\varepsilon\varphi 2x = \sigma\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $(4\eta\mu^2 x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$
- ii. $(1 - \varepsilon\varphi^2 x)(\sigma\varphi^2 x - 3) = 0$
- iii. $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$
- iv. $2\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$
- v. $2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$
- vi. $2\eta\mu^2 x - (\sqrt{2} + 2)\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$
- vii. $\sigma\varphi^2 x - 2\sqrt{3}\sigma\varphi x + 3 = 0$
- viii. $(2\eta\mu x - 1)^2 + 2(2\eta\mu x - 1) = 0$
- ix. $3\eta\mu^2 2x + 7\sigma\upsilon\nu 2x - 3 = 0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$
- ii. $2\eta\mu^2 \theta = 3(1 - \sigma\upsilon\nu \theta)$
- iii. $\sigma\varphi^2 x - 1 = 0$
- iv. $\varepsilon\varphi^4 x - 4\varepsilon\varphi^2 x + 3 = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

- i. $\varepsilon\varphi x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$
- ii. $1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- iii. $3\eta\mu x + \eta\mu^2 x = 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x$
- iv. $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} - 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x = 0$

$$v. \quad 3\sigma\upsilon\nu^2x - 4\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2x - 2 = 0$$

8. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2x + 3\eta\mu x + 1 = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο διάστημα που δίνεται:

$$i. \quad \varepsilon\phi x = 1 \text{ στο διάστημα } [\pi, 3\pi]$$

$$ii. \quad 2\sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{2} \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi]$$

$$iii. \quad 4\eta\mu^2x - 3 = 0 \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi]$$

$$iv. \quad \varepsilon\phi^2x - 3 = 0 \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi]$$

$$v. \quad \varepsilon\phi 2x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \text{ στο διάστημα } [0, \pi]$$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$i. \quad \varepsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$$

$$ii. \quad \eta\mu 2x + \eta\mu x = 0$$

$$iii. \quad \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 3x = 0$$

$$iv. \quad (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + \eta\mu 4x$$

$$v. \quad (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2\eta\mu^2x$$

$$vi. \quad \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$vii. \quad \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2$$

11. Να λύσετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$i. \quad 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x$$

$$ii. \quad \sqrt{3}\eta\mu x \cdot \varepsilon\phi x - 1 = \eta\mu x - \sqrt{3}\varepsilon\phi x$$

$$iii. \quad \sigma\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$$

$$iv. \quad 2\sqrt{3}\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6\sigma\upsilon\nu x = 3 - \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i. \quad 3\eta\mu x + 2\sqrt{3}\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi]$$

$$ii. \quad \sqrt{2}\eta\mu x = \varepsilon\phi x$$

$$iii. \quad \sigma\phi x - 2 = -\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$iv. \quad \varepsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$v. \quad \sigma\upsilon\nu x - 1 = \sqrt{3}\eta\mu x$$

vi. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

vii. $\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2$

viii. $\varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi 3x = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\sigma\upsilon\nu\theta + 1)x + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 0$

- Να δείξετε ότι για κάθε θ έχει πραγματικές ρίζες
- Για ποιες τιμές του θ έχει ρίζες ίσες;
- Να βρείτε τις τιμές του θ ώστε οι ρίζες να είναι αντίθετες.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- Να βρείτε τα x για τα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο
- Να αποδείξετε ότι $f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4$
- Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \sqrt{2}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \sqrt{2}\eta\mu x\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε

- Το μέγιστο της συνάρτησης καθώς και τα $x \in \mathbb{R}$ στα οποία παρουσιάζεται αυτό
- Το ελάχιστο της συνάρτησης καθώς και τα $x \in \mathbb{R}$ στα οποία παρουσιάζεται αυτό
- Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες

16.

i. Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x + 3 = 0$; Να αιτιολογήσετε

την απάντησή σας.

ii. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y = -1$

17. Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

- i. Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$
- ii. Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

- i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f
- ii. Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

19.i. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

20. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- i. Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$

21. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$

- i. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$
- ii. Να βρείτε την γωνία x

22.

- i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\alpha + 1| \cdot \eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

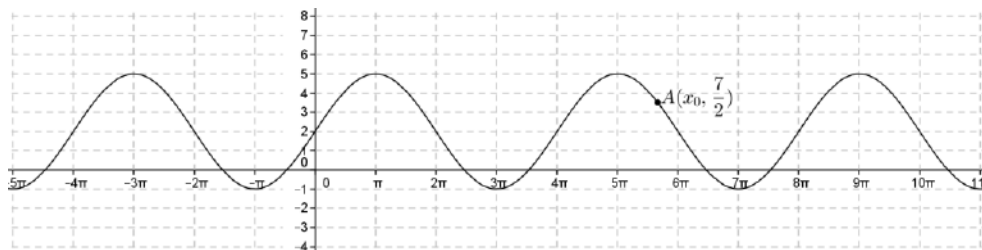
- i. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$.
- ii. Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$
 - i. να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3$
 - ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$

24. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

- ii. Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sin\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$
- iii. Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sin\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$

25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



- α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:
- τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f
 - την περίοδο T της συνάρτησης f
- β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ , ω και k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$ να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \sin 2x$

- i. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

- ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sin 2x = \sin x$ (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$
- iii. Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

27. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση: $f(t) = 12\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13$

όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.
- Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$
- Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

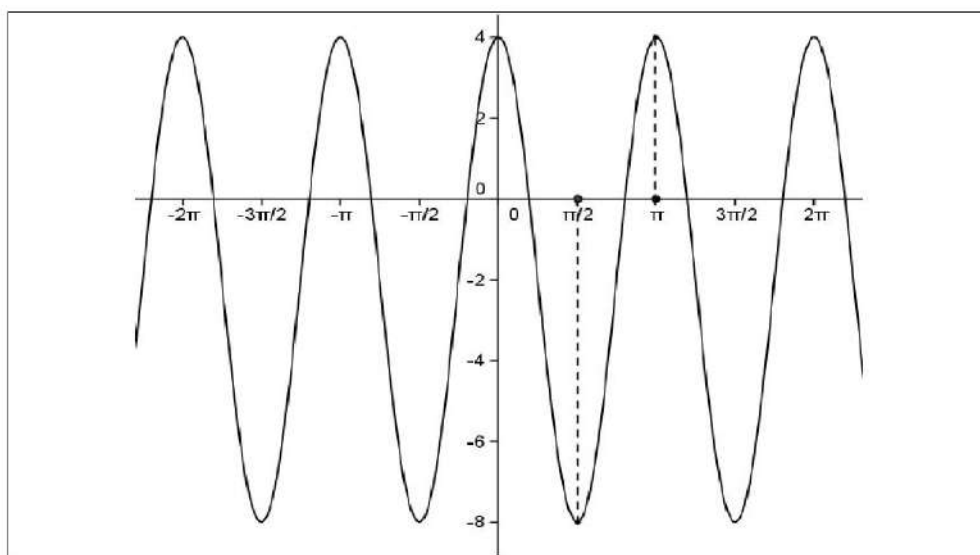
28. Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4, \text{ με } 0 \leq t \leq 24 \text{ (} t \text{ ο χρόνος σε ώρες)}$$

- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.
- Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0°C .
- Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$.
- Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0°C .

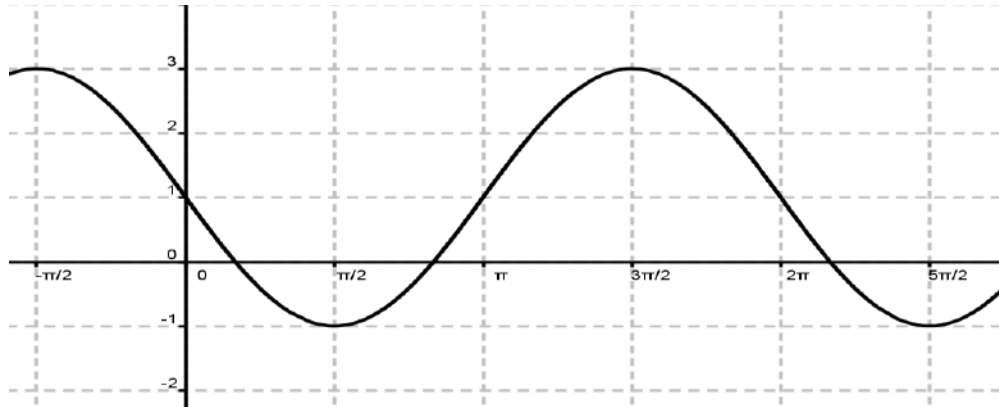
29. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , που είναι της μορφής $f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

- Με βάση τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
- Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: $\alpha = -2$ και $\beta = 6$.
- Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(3x) + 1, x \in \mathbb{R}$

- i. Να βρείτε την περίοδο T και τη μέγιστη τιμή της f .
- ii. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha \eta\mu(\beta x) + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$



- α. Να προσδιορίσετε τα α , β , γ .
- β. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$.

31. Δίνεται η εξίσωση $1 - \eta\mu x = \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x$ (A)

- i. Να αποδείξετε ότι, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (A), τότε $\sigma\upsilon\nu x_0 \geq 0$.
- ii. Θεωρούμε την εξίσωση $(1 - \eta\mu x)^2 = 3 \sigma\upsilon\nu^2 x$ (B) η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (A). Να λύσετε την εξίσωση (B).
- iii. Να λύσετε την εξίσωση (A).

3.6. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

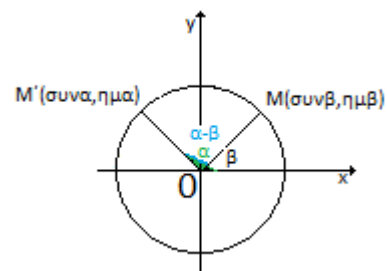
➤ Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Θεωρούμε δυο γωνίες α και β όπως φαίνεται στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο. Για την γωνία $\alpha - \beta$ αποδεικνύεται ότι

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

Αν θέσουμε όπου β το $-\beta$ τότε έχουμε:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$



➤ Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Για το άθροισμα του ημιτόνου δυο γωνιών ισχύει ότι:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$$

Αν θέσουμε όπου β το $-\beta$ τότε έχουμε:

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$$

➤ Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Όταν $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$ και $\cos\beta \neq 0$ έχουμε ότι:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Αν θέσουμε όπου β το $-\beta$ τότε έχουμε:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

➤ Συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Όταν $\eta\mu(\alpha + \beta) \neq 0$, $\eta\mu\alpha \neq 0$ και $\sigma\eta\mu \neq 0$ έχουμε ότι:

$$\sec(\alpha + \beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta - 1}{\sec\alpha + \sec\beta}$$

Αν θέσουμε όπου β το $-\beta$ τότε έχουμε:

$$\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta + 1}{\sec\beta - \sec\alpha}$$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 15° .

Λύση

Επειδή $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu 15^\circ &= \eta\mu(45^\circ - 30^\circ) = \\ \eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \eta\mu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ &= \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 15^\circ &= \sigma\upsilon\nu(45^\circ - 30^\circ) = \\ \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu 30^\circ \cdot \eta\mu 45^\circ &= \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\eta\phi 15^\circ = \eta\phi(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$\frac{\eta\phi 45^\circ - \eta\phi 30^\circ}{1 + \eta\phi 45^\circ \cdot \eta\phi 30^\circ} =$$

$$\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \sigma\varphi 15^0 &= \sigma\varphi(45^0 - 30^0) = \\ &= \frac{\sigma\varphi 45^0 \cdot \sigma\varphi 30^0 + 1}{\sigma\varphi 30^0 - \sigma\varphi 45^0} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{5\pi}{12}$

Λύση

Επειδή $\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \eta\mu \frac{5\pi}{12} &= \eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + \eta\mu \frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \blacksquare \quad \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{12} &= \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - \eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{12} &= \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6}}{1 - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6}} = \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$\frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} =$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$2 + \sqrt{3}$$

$$\blacksquare \quad \sigma\varphi \frac{5\pi}{12} = \sigma\varphi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$\frac{\sigma\varphi \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \frac{\pi}{6} - 1}{\sigma\varphi \frac{\pi}{4} + \sigma\varphi \frac{\pi}{6}} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$2 - \sqrt{3}$$

3. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} = \varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$$

Απόδειξη

Είναι

$$\frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} =$$

$$\frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta - 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} =$$

$$\frac{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} =$$

$$\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)} = \varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$$

4. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

ΑπόδειξηΈχουμε: $\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) =$

$$\begin{aligned}
& (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha) \\
&= (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta)^2 - (\eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 \\
&= \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\
&= \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) - \eta\mu^2\beta(1 - \eta\mu^2\alpha) \\
&= \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta \\
&= \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta
\end{aligned}$$

5. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ να βρεθεί το $\eta\mu(\alpha + \beta)$

ΛύσηΕίναι $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow$$

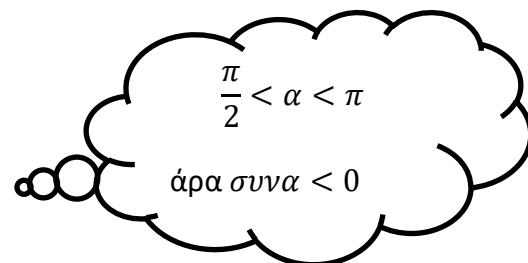
$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$$



$$\text{και } \eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow$$

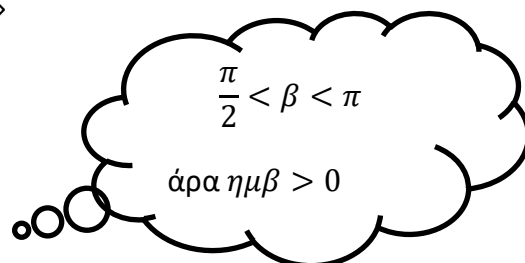
$$\eta\mu^2\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\beta = 1 - \frac{144}{169} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\beta = \frac{25}{169} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\beta = \pm \frac{5}{13} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\beta = \frac{5}{13}$$

Επομένως $\eta\mu(\alpha + \beta) =$

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} =$$

$$\frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

6. Αν $\eta\mu(\alpha + \beta) = 0$ να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \eta\mu(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = -\eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{άρα } \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\beta) = \sigma\upsilon\nu((\alpha + \beta) + \beta) =$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu\beta =$$

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta) \sigma\upsilon\nu\beta =$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta) \eta\mu\beta =$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

7. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ να αποδείξετε ότι $(1 + \varepsilon\varphi\alpha) \cdot (1 + \varepsilon\varphi\beta) = 2$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \text{ άρα } \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} = 1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = 1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε } (1 + \varepsilon\varphi\alpha) \cdot (1 + \varepsilon\varphi\beta) = 1 + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta =$$

$$1 + 1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta = 2$$

8. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$\text{Είναι } \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\eta\mu x + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2κπ + \frac{\pi}{2} - x \\ x = 2κπ + \pi - \frac{\pi}{2} + x \text{ Αδύνατη} \end{cases} \quad κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = κπ + \frac{\pi}{4} \quad κ \in \mathbb{Z}$$

9. Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sigma\varphi x$

Λύση

$$\text{Πρέπει } \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{4} \neq 2κπ \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$x \neq 2κπ + \frac{\pi}{4} \text{ και } x \neq 2κπ - \frac{3\pi}{4} \quad \mu\epsilon \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{\pi}{4} \neq 2κπ \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$x \neq 2κπ + \frac{\pi}{4} \text{ και } x \neq 2κπ - \frac{3\pi}{4} \quad \mu\epsilon \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{και } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2κπ \text{ και } x \neq 2κπ + \pi \quad \mu\epsilon \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sigma\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1 - \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}} + \frac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1 + \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}} = 2\sigma\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon\varphi x + 1}{1 - \varepsilon\varphi x} + \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{1 + \varepsilon\varphi x} = 2\sigma\varphi x \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon\varphi x + 1)^2 - (\varepsilon\varphi x - 1)^2 = 2\sigma\varphi x(1 + \varepsilon\varphi x)(1 - \varepsilon\varphi x) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2 x + 2\varepsilon\varphi x + 1 - \varepsilon\varphi^2 x + 2\varepsilon\varphi x - 1 = 2\sigma\varphi x(1 - \varepsilon\varphi^2 x) \Leftrightarrow$$

$$4\varepsilon\varphi x = \frac{2}{\varepsilon\varphi x}(1 - \varepsilon\varphi^2 x) \Leftrightarrow$$

$$4\varepsilon\varphi^2 x = 2 - 2\varepsilon\varphi^2 x \Leftrightarrow$$

$$6\varepsilon\varphi^2 x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Άρα αν } \varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ενώ αν } \varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

i. $A = \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 3x \cdot \eta\mu 2x$

ii. $B = \sigma\upsilon\nu(x - y) \cdot \sigma\upsilon\nu(x + y) - \eta\mu(x - y)\eta\mu(x + y)$

iii. $\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi 3x - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi 3x \cdot \varepsilon\varphi x}$

iv. $\Delta = \eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \cdot \eta\mu \frac{3x}{2}$

v. $E = \sigma\upsilon\nu 130^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 10^0 + \eta\mu 130^0 \cdot \eta\mu 10^0$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

i. $\eta\mu \frac{\pi}{12} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4}$

ii. $\eta\mu 10^0 \sigma\upsilon\nu 50^0 - \sigma\upsilon\nu 10^0 \cdot \eta\mu 50^0$

iii. $\sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{18} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{9} + \eta\mu \frac{17\pi}{18} \cdot \eta\mu \frac{4\pi}{9}$

iv. $\frac{\varepsilon\varphi 65^0 - \varepsilon\varphi 20^0}{1 + \varepsilon\varphi 60^0 \cdot \varepsilon\varphi 20^0}$

v. $\frac{\sigma\varphi 25^0 \cdot \sigma\varphi 5^0 - 1}{\sigma\varphi 5^0 + \sigma\varphi 25^0}$

vi. $\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{1 - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$

vii. $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu x$

viii. $\sigma\upsilon\nu 110^0 \sigma\upsilon\nu 70^0 - \eta\mu 110^0 \cdot \eta\mu 70^0$

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

i. 105^0

iii. $\frac{7\pi}{12}$

ii. 165^0

iv. 525^0

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) =$

ii. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) =$

iii. $\eta\mu(x - y)\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu(x - y) =$

iv. $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\eta\mu x =$

v. $\frac{2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)} =$

$$\text{vi. } \frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} =$$

$$\text{vii. } \frac{1 + \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}{1 - \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} =$$

$$\text{viii. } \frac{2\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)} + \frac{2\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)} =$$

$$\text{ix. } \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta} =$$

$$\text{x. } \frac{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\eta\mu\alpha} =$$

$$\text{xi. } \frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} =$$

5. Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{13}$ με $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ να υπολογίσετε τα $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ και $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$.

6. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{15}{17}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{12}{13}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ να υπολογίσετε τα $\eta\mu(\alpha - \beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)$ και $\sigma\varphi(\alpha - \beta)$.

7. Αν $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{4}$, $\varepsilon\varphi\beta = -\frac{5}{12}$ με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ να υπολογίσετε τα $\eta\mu(\alpha + \beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$ και $\sigma\varphi(\alpha - \beta)$.

8. Αν $\varepsilon\varphi\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ να βρείτε την $\varepsilon\varphi\alpha$.

9. Αν $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ να αποδείξετε ότι $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 3$

10. Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 \leq 4$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i. } \sqrt{3}\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{ii. } \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ όταν } x \in [0, 2\pi]$$

$$\text{iii. } \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ όταν } x \in [0, \pi]$$

$$\text{iv. } 2\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ όταν } x \in [0, \pi]$$

$$\text{v. } \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\varphi x = 1$$

$$\text{vi. } \sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x \cdot \eta\mu x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{vii. } \eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$$

$$\text{viii. } \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ όταν } x \in (0, 2\pi]$$

$$\text{ix. } \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$$

$$x. \quad \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\varphi x = 1$$

12. Να δείξετε ότι η παράσταση:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha + x) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + x) \text{ είναι ανεξάρτητη του } x.$$

13. Να δείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu(45^\circ - x)\sigma\upsilon\nu(45^\circ - y) - \eta\mu(45^\circ - x)\eta\mu(45^\circ - y) = \eta\mu(x + y)$$

14. Να δείξετε ότι η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ είναι ανεξάρτητη του x .

15. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi B$ να

αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

16. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$ τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

17. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$i. \quad \varepsilon\varphi 2A + \varepsilon\varphi 2B + \varepsilon\varphi 2\Gamma = \varepsilon\varphi 2A \cdot \varepsilon\varphi 2B \cdot \varepsilon\varphi 2\Gamma$$

$$ii. \quad \eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B}{2} + \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu \frac{A}{2} \cdot \eta\mu \frac{B}{2} \cdot \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$$

$$iii. \quad \sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}$$

18. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $(1 - \sigma\varphi\Gamma) \left[1 + \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \right] = 2$ να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

19. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i. \quad \sigma\upsilon\nu 3x + \eta\mu 2x \cdot \eta\mu x = 0$$

$$ii. \quad \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi x$$

$$iii. \quad 1 + \eta\mu x \cdot \eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x, x \in [0, 2\pi]$$

20. Αν $\varepsilon\varphi\alpha = 2\kappa + 1$ και $\varepsilon\varphi\beta = 2\kappa - 1$ να αποδείξετε ότι

$$\sigma\varphi(\alpha - \beta) = 2\kappa^2$$

$$21. \text{Να λύσετε το σύστημα } \begin{cases} 3\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \sqrt{3} \\ 3\varepsilon\varphi\alpha - 3\varepsilon\varphi\beta = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

22. Δίνονται οι γωνίες ω, θ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ για τις οποίες ισχύει:
 $\omega + \theta = 135^\circ$

Να αποδείξετε ότι:

i. $\varepsilon\varphi(\omega + \theta) = -1$

ii. $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$

23. i. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x$.

ii. Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε στο διάστημα $(0, \pi)$ την εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x = 0.$$

24. i. Να δείξετε ότι $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να βρείτε με τη βοήθεια του ερωτήματος

iii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbb{R}$$

3.7. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 2α ➤ **$\eta\mu 2\alpha$**

Ισχύει ότι $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ αν θέσουμε $\beta = \alpha$

έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \alpha) &= \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \\ \eta\mu 2\alpha &= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\end{aligned}$$

➤ **$\sigma\upsilon\nu 2\alpha$**

Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$

Απόδειξη

Στο τύπο $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ θέτουμε $\beta = \alpha$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha + \alpha) &= \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= 2(1 - \eta\mu^2\alpha) - 1 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha\end{aligned}$$

➤ **$\epsilon\phi 2\alpha$**

Ισχύει ότι $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1-\epsilon\phi^2\alpha}$

Απόδειξη:

Στον τύπο $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$ θέτουμε $\beta = \alpha$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\epsilon\phi(\alpha + \alpha) &= \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\alpha} \Leftrightarrow \\ \epsilon\phi 2\alpha &= \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}\end{aligned}$$

➤ **$\sigma\phi 2\alpha$** Ισχύει ότι $\sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$

➤ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας α ως συνάρτηση του $\sin 2\alpha$

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$$

- ✓ Οι παραπάνω τύποι είναι οι τύποι απο-τετραγωνοποίησης τριγωνομετρικών αριθμών.
- ✓ Αν στους παραπάνω τύπους θέσουμε για $\alpha = \frac{\alpha}{2}$ έχουμε τις σχέσεις:

$$\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sin\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sin\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

$$\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i. $2\eta\mu 15^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 15^0$

ii. $1 - \eta\mu^2 75^0$

iii. $\frac{2\varepsilon\varphi 67,5^0}{1 - \varepsilon\varphi^2 67,5^0}$

Λύση

i. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ άρα

$$2\eta\mu 15^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 15^0 = \eta\mu 2 \cdot 15^0 = \eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$$

ii. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha$ άρα

$$1 - \eta\mu^2 75^0 = \sigma\upsilon\nu 2 \cdot 75^0 = \sigma\upsilon\nu 150^0 = -\sigma\upsilon\nu 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

iii. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$ άρα

$$\frac{2\varepsilon\varphi 67,5^0}{1 - \varepsilon\varphi^2 67,5^0} = \varepsilon\varphi 2 \cdot 67,5^0 = \varepsilon\varphi 135^0 = -\varepsilon\varphi 45^0 = -1$$

2. Να αποδείξετε ότι:

i. $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$

ii. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

Απόδειξη

i. Είναι $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \eta\mu\alpha =$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + (1 - 2\eta\mu^2\alpha) \cdot \eta\mu\alpha =$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha =$$

$$2\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha =$$

$$2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha =$$

$$3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$$

ii. Είναι $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 2\alpha \cdot \eta\mu\alpha =$

$$(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\alpha =$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha =$$

$$4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$$

3. Να αποδείξετε ότι

i. $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 1 + \eta\mu 2\alpha$

ii. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{2}{\varepsilon\varphi\alpha}$

iii. $\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} = 1 + \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

Απόδειξη

i. Είναι

$$\begin{aligned}(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 &= \eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ &= 1 + \eta\mu 2\alpha\end{aligned}$$

ii. Είναι

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{2}{\varepsilon\varphi\alpha}$$

iii. Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha, \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \text{ και}$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Αν όπου α βάλουμε $\frac{\alpha}{2}$ οι παραπάνω τύποι γίνονται:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}, \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2} \text{ και } \eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} &= \frac{2\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 2\eta\mu\frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} - \eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} + \eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} - \eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} + \eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = \\ &= 1 + \frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} =\end{aligned}$$

$$1 + \varepsilon \varphi \frac{\alpha}{2}$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\eta\mu 2x = 2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu 2x \cdot \eta\mu^2 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$

Λύση

i. Είναι

$$\eta\mu 2x = 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x - 1 = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = 0$$

Άρα

$$\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Είναι $\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu 2x \cdot \eta\mu^2 2x = \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu 2x \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \sigma\upsilon\nu 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x(\sigma\upsilon\nu 2x - 1) + \eta\mu 2x(\sigma\upsilon\nu 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu 2x - 1)(\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x - 1 = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x$$

άρα

$$\sigma\upsilon\nu 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$2x = 2\kappa\pi \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \eta\mu 2x &= -\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \\
 \eta\mu 2x &= \sigma\upsilon\nu(\pi - 2x) \Leftrightarrow \\
 \eta\mu 2x &= \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \pi + 2x\right) \Leftrightarrow \\
 \eta\mu 2x &= \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\
 2x &= 2\kappa\pi + \pi - 2x + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad 2x = 2\kappa\pi + 2x - \frac{\pi}{2} \\
 4x &= 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad 0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\
 x &= \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ}
 \end{aligned}$$

5. Α) Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu 2\theta = \frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}$ αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Β) Αν $\eta\mu 2\theta = \frac{4}{5}$ να βρεθεί η $\varepsilon\varphi\theta$.

Λύση

Α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta} &= \frac{2 \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{1 + \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} = \frac{2 \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} = \\
 \frac{2 \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} &= \frac{2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu 2\theta
 \end{aligned}$$

Β) Είναι

$$\begin{aligned}
 \eta\mu 2\theta &= \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\
 \frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta} &= \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\
 10\varepsilon\varphi\theta &= 4 + 4\varepsilon\varphi^2\theta \Leftrightarrow \\
 2\varepsilon\varphi^2\theta - 5\varepsilon\varphi\theta + 2 &= 0
 \end{aligned}$$

Θέτοντας $\varepsilon\varphi\theta = x$ και λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$

έχουμε ότι $\varepsilon\varphi\theta = 2$ ή $\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

i. $4\eta\mu\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$

ii. $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8} - 1$

iii. $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12} - \eta\mu^2\frac{\pi}{12}$

2. Να αποδείξετε ότι

i. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

ii. $\varepsilon\varphi(45 - \alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$

iii. $\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} - \frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \frac{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu^2(\alpha-\beta)}$

iv. $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu 2\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha = 2$

v. $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 3\sigma\varphi 2\alpha$

vi. $2\eta\mu^3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha \cdot \eta\mu\alpha = \eta\mu 2\alpha$

vii. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi^2\alpha$

viii. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 =$

ii. $\left(\frac{2}{1+\varepsilon\varphi\alpha} + \varepsilon\varphi 2\alpha\right) \cdot \left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \eta\mu^2\alpha =$

iii. $\frac{1-4\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2} + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha =$

iv. $\frac{1+\eta\mu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} =$

v. $\frac{3+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2+\varepsilon\varphi^2\alpha} + \frac{3-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2+\sigma\varphi^2\alpha} =$

vi. $\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} =$

vii. $\frac{1-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{5+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha-7\sigma\upsilon\nu\alpha} =$

viii. $\eta\mu^2(\alpha + \beta) - \eta\mu^2(\alpha - \beta) =$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\sigma\upsilon\nu 2x = 1 + \eta\mu x$

ii. $\eta\mu 2x + \eta\mu x = 1 + 2\sigma\upsilon\nu x$

iii. $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} = 0$

iv. $2\eta\mu^2\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu x = 0$

v. $4\eta\mu^2\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2$

vi. $\sigma\upsilon\nu 2x + 3\eta\mu x = 2$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\sigma\upsilon\nu 4x + 2\eta\mu^2 x = 0$

ii. $\sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$

iii. $\epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi 2x = 1$

iv. $\sigma\upsilon\nu^2 2x - \eta\mu^2 2x = 1$

v. $\eta\mu 2x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

vi. $\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu\frac{x}{2} = 0$

vii. $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 2 = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu 2x$

6. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)x + \eta\mu 2\alpha = 0$ να αποδείξετε ότι έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και να τις βρείτε.

7. Να αποδείξετε ότι

i. $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = 2\epsilon\varphi\alpha$

ii. $\frac{(2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha) \cdot (1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{(1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha) \cdot (2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha)} = \epsilon\varphi\alpha$

iii. $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}$

iv. $\frac{1}{4\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \frac{(1 - \epsilon\varphi^2\alpha)^2}{4\epsilon\varphi^2\alpha} = 1$

v. $\frac{1 + \eta\mu 2\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{1 - \epsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1 - \epsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} = \eta\mu\alpha$

vi. $\frac{1 - \eta\mu\alpha}{1 - \epsilon\varphi\alpha} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \sigma\varphi\alpha} = 1$

8. Για την γωνία α ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$

ii. Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, και $\epsilon\varphi 2\alpha$.

9. Να αποδείξετε ότι

i. $\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^3 x = (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \left(1 - \frac{1}{2}\eta\mu 2x\right)$

ii. $1 - \frac{1}{2}\eta\mu 2x \neq 0$

- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu 2x$
10. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 8\sigma\upsilon\nu^4 \alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + 1$
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x$ όπου x πραγματικός αριθμός.
- Να μετατρέψετε την συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(2x + \varphi) + \kappa$ όπου ρ, φ, κ πραγματικοί αριθμοί και $\rho > 0$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή της και ποια είναι αυτή;
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ στο διάστημα $[0, \pi]$.
12. Α) Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι
- $$\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 2x + \eta\mu 4x) = (\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1)\eta\mu x$$
- Β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει
- $$\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3}\eta\mu 4x + 8\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{3}\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 4x + 1$
 - Να αποδείξετε ότι $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
14. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι: $-\sigma\upsilon\nu 2\omega + 5\eta\mu \omega - 2 = 0$
- Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2\eta\mu^2 \omega + 5\eta\mu \omega - 3 = 0$.
 - Να αποδείξετε ότι $\eta\mu \omega = \frac{1}{2}$.
15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2, x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
16. Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu \omega + 21 = 0$
- Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{4}{5}$
 - Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

α. να δείξετε ότι $\sin 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

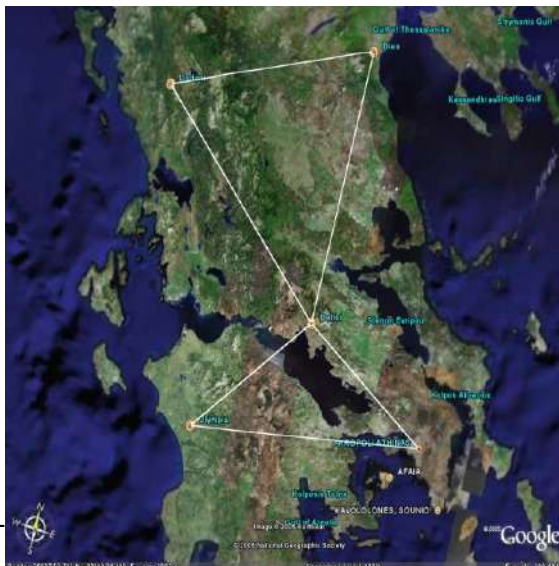
$$\Pi = \frac{13 \cdot [\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\phi 2\omega \cdot \sigma\phi 2\omega + 25 \cdot [\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ (Σ) – ΛΑΘΟΥΣ (Λ)

- 1.Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega=0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=0$.
- 2.Αν $\eta\mu\omega=0$ τότε υποχρεωτικά θα είναι $\sigma\upsilon\nu\omega=1$.
- 3.Υπάρχει γωνία ω , ώστε $\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega=2$.
- 4.Για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{1+\eta\mu^2\omega}$.
- 5.Αν $|\eta\mu\omega|=1$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega=0$
6. Αν $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 7.Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο 2π .
- 8.Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in [0,2\pi]$ παρουσιάζει μέγιστο, μόνο για $x=0$ το 1 .
- 9.Η εξίσωση $\eta\mu x=\alpha$, με $\alpha>1$ είναι αδύνατη .
10. $\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow x=2k\pi+\theta$ ή $x=2k\pi-\theta$, $k\in \mathbb{Z}$.

Γεωμετρικές Σχέσεις

Κάποιοι από εσάς, ίσως έχετε ακούσει, ότι τα μέρη που προσλάμβαναν ιδιαίτερη σημασία για τους αρχαίους Έλληνες, όπως οι ναοί, τα μαντεία, οι πόλεις και τα μνημεία, συνδέονται μεταξύ τους με γεωμετρικές σχέσεις. Σχηματίζουν δηλαδή διάφορα νοερά γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα, πολύγωνα και ομόκεντρους κύκλους, ενώ και οι αποστάσεις που έχουν μεταξύ τους είναι προϋπολογισμένες και συγκεκριμένες.



Όμως δεν μπορεί να μη μείνει έκπληκτος κάποιος συνειδητοποιώντας πόσο μεγάλη έκταση είχε πάρει το φαινόμενο αυτό, το οποίο ονομάζεται γεωμετρικός γεωδαιτικός τριγωνισμός. Στην πραγματικότητα μιλάμε για την ύπαρξη ενός γεωμετρικού γεωδαιτικού δικτύου! Ίσως κάποιος υποθέσει ότι πρόκειται για απλές συμπτώσεις και ότι είναι φυσικό να υπάρχουν τέτοιοι συσχετισμοί, εφόσον στην αρχαιότητα υπήρχαν πάρα πολλοί ιεροί τόποι και άλλα μέρη ιδιαίτερης σημασίας στον ελληνικό χώρο. Πιθανόν μάλιστα να θεωρηθεί υπερβολικό το ότι οι ερευνητές έχουν διαπιστώσει την αναλογική συσχέτιση τόσο πολλών κωδικών σημείων μεταξύ τους! Όμως αυτόματα έρχεται η απάντηση από τον Έρωνα τον Αλεξανδρέα: *"Η γεωδαισία ποιείται τας διαιρέσεις ου μόνον εις ισότητας αλλά και κατά λόγους και αναλογίας."*

Άλλωστε αποτελεί ένα φαινόμενο απίστευτα συχνό για να δεχτούμε ότι πρόκειται για απλές συμπτώσεις, ενώ η συγκεκριμένη εκδοχή αποκλείεται παντελώς, καθώς πολλοί αρχαίοι συγγραφείς είχαν αναφερθεί σε αυτό με σαφήνεια.

Όπως γνωρίζουμε από τη μυθολογία, συχνά κάποιοι θεοί ή θεϊκοί οιωνοί υποδείκνυαν στους Έλληνες τους γεωγραφικούς τόπους όπου έπρεπε να χτιστούν οι πόλεις και τα διάφορα οικοδομήματα. Ωστόσο ο Αριστοτέλης στα "Πολιτικά" του έγραφε: *"Οι καθιερωμένοι οίκοι για τη λατρεία των θεών πρέπει να βρίσκονται όχι μόνο στην κατάλληλη θέση αλλά και στην ίδια, εκτός από εκείνους τη θέση των οποίων ορίζει ξεχωριστά ο Νόμος ή κάποιο μαντείο υπό την αιγίδα του μαντείου των Δελφών"*. Ακόμα: *"Τα ιερά των αγροτικών περιοχών πρέπει να βρίσκονται συμμετρικά κατανεμημένα, άλλα αφιερωμένα σε θεούς και άλλα σε ήρωες."* ("Πολιτικά", VII 1331α).

Ο Στράβων, πάλι, έγραψε ότι: *"Όσοι ασχολούνται με τις θέσεις των διάφορων τόπων λαμβάνουν υπόψη τα δεδομένα των αστρονόμων και των γεωμετρών σχετικά με τα σχήματα, τα μεγέθη και τις αποστάσεις"*, ενώ ο Πausanias παρέδωσε ότι: *"Ο δήμος του Μαραθώνα απέχει ίση απόσταση από την Αθήνα με την απόσταση της Καρύστου, που βρίσκεται στην Εύβοια, από την Αθήνα"* ("Αττικά" 32, 3), αναφορά

που δεν αφήνει την παραμικρή αμφιβολία για το ότι όλοι αυτοί οι γεωμετρικοί συσχετισμοί ήταν επιμελώς προσχεδιασμένοι.

Στις αποστάσεις ανάμεσα στα ιερά μέρη χρησιμοποιούνται το στάδιο ως μονάδα μέτρησης, ο κωδικός αριθμός π, ο αριθμός φ της χρυσής τομής και διάφοροι λόγοι (στάδιο = 184,454 μέτρα, $\pi = 3,14$, $\phi = 1,618$).

Το ίδιο φαινόμενο συναντάμε και σε άλλες χώρες του κόσμου. Στην Αγγλία υπάρχουν οι γραμμές ley, πάνω στις οποίες βρίσκονται κτισμένα πάρα πολλά μνημεία διάφορων εποχών. Κάποιοι τις θεωρούν γεωμαγνητικές γραμμές. Στη Γερμανία, από την άλλη μεριά, αρκετές πόλεις βρέθηκαν να ισαπέχουν ή να είναι παράδοξα ευθυγραμμισμένες μεταξύ τους, όπως συμβαίνει με τις πόλεις Νυρεμβέργη, Βισμπάντεν, Μάιντς, Βορμς, Σπάγιερ.

Στη συνέχεια πρόκειται να αναφερθούν μόνο ορισμένα παραδείγματα. Οι συσχετισμοί που έχουν διαπιστωθεί είναι σχεδόν αναρίθμητοι!

Αρχίζουμε με μια αρκετά γνωστή περίπτωση. Πρόκειται για το ισοσκελές τρίγωνο που σχηματίζει η Ακρόπολη της Αθήνας με το ναό του Ποσειδώνα στο Σούνιο και το ναό της Αφαίας Αθηνάς στην Αίγινα, με απόσταση 242 στάδια. Η περιοχή της Αττικοβοιωτίας θεωρείται ιδιαίτερα συμμετρική. Μεταξύ άλλων, ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί και ένα μεγάλο "διαμάντι" που σχηματίζεται ανάμεσα στη Χαλκίδα, τη Θήβα, τον Κρομμύωνα, την Αφαία Αθηνά, τη Στειρίδα και το Αμφιάρειον.

Η Αθήνα ισαπέχει από τη Σπάρτη και τη Δήλο (800 στάδια) καθώς και από την Κνωσό και την Πέλλα (1.765 στάδια). Αναλύοντας μάλιστα τους αριθμούς σε γράμματα, έχουμε ΑΘΗΝΑΙ + ΚΝΩΣΟΣ + ΠΕΛΛΑ = 1.765!

Η απόσταση Αθήνας-Σμύρνης είναι ίση με την απόσταση Θεσσαλονίκης-Σμύρνης (1.620 στάδια = 1.000 φ), ενώ η απόσταση Αθήνας-Σπάρτης είναι 800 στάδια, ίση με την απόσταση Αθήνας-Δήλου.

Από το ιερό νησί της Δήλου ισαπέχουν: Αθήνα-Καρδάμυλα Χίου (800 στάδια), Κόρινθος-Μυτιλήνη (1.188 στάδια), Σμύρνη-Θήβα (1.080 στάδια), Σπάρτη-Πέργαμος (1.360 στάδια), Αργος-Μυκήνες (1.210 στάδια), Ιδαίον Αντρον-Τροφώνιο Μαντείο (1.296 στάδια), Ρέθυμνο-Δύκτινα-Κνωσός (1.256 στάδια), Ασκληπιείο Κω-Ασκληπιείο Επιδαύρου (1.020 στάδια) και ακόμη αρκετές περιοχές!

Η Ελευσίνα ισαπέχει από Αθήνα-Μέγαρα (100 στάδια), Αμφιάρειο-Μαραθώνα (220 στάδια), Κόρινθο Σούνιο (330 στάδια), Πέλλα-Σμύρνη (1.700 στάδια), Ιδαίον Αντρον-Έφεσο (1.782 στάδια), Πέργαμο Μίλητο-Κνωσό (1.815 στάδια). Η απόσταση Ιωλκού-Ελευσίνας είναι 850 στάδια, όσο δηλαδή είναι και το άθροισμα των γραμμάτων της λέξης "Ε λ ε σ ί ς": $E+Λ+E+Υ+Σ+Ι+Σ = 850$!

Η Σπάρτη απέχει εξίσου από την Κνωσό και τη Δωδώνη (1.700 στάδια), από την Ιωλκό και τη Δήλο (1.375 στάδια) και από το Σούνιο και τους Δελφούς (850 στάδια)

Η Χαλκίδα υπήρξε σημαντικότερο σημείο αναφοράς κατά την αρχαιότητα. Όπως διαπιστώνουμε, ισαπέχει από τη Θήβα και το Αμφιάρειο 162 στάδια (100 φ), ενώ από την Αθήνα και τα Μέγαρα 314 στάδια (100 π).

Πολλές χαρακτηριστικές νοητές ευθείες προεκτεινόμενες συναντούν σπουδαία ιερά ή λατρευτικά κέντρα της Ελλάδας. Έτσι, μια ευθεία ενώνει τη Χαλκίδα με τη Θήβα και την Ολυμπία, μια άλλη με το Αμφιάρειο και τη Δήλο, ενώ η ευθεία Χαλκίδας-Σουνίου προεκτεινόμενη συναντά την Κνωσό

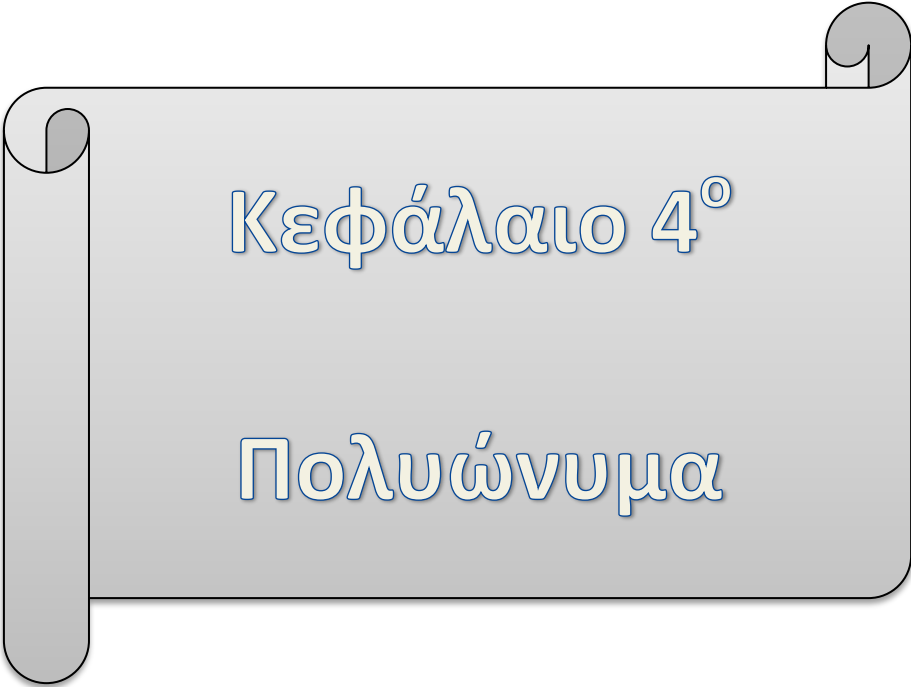
Όμως και η Ακρόπολη της Αθήνας έχει κατασκευαστεί με τρόπο ώστε όλα τα μνημεία μεταξύ τους να σχετίζονται με ομόκεντρους ή ίσους κύκλους, ισοσκελή τρίγωνα και ίσες αποστάσεις.

Ο Παρθενώνας, σύμβολο της αρχαιοελληνικής ομορφιάς και της δημοκρατίας, περιέχει από κατασκευής έναν μαθηματικό κώδικα, η αποκρυπτογράφηση του οποίου φανερώνει τις αξίες του αρχαιοελληνικού πνεύματος.

Όμως και ο ίδιος ο Μέγας Αλέξανδρος φαίνεται ότι υπήρξε συνεχιστής της εφαρμογής του αρχαίου γεωδαιτικού νόμου. Οι πόλεις που ίδρυσε και στις οποίες έδωσε το όνομά του κτίστηκαν σε συγκεκριμένες γεωγραφικές θέσεις. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και η Αλεξανδρέττα της Ισού, πόλεις που ισαπέχουν από την Πέλλα 6.600 στάδια!

Ακόμη πιο εντυπωσιακό φαίνεται το ενδεχόμενο ο Αλέξανδρος να επέλεγε τα σημεία των μαχών βάσει γεωδαιτικών μεθόδων. Είναι πιθανό, για παράδειγμα, να προκλήθηκε σκόπιμα η μάχη στην Ισσό, καθώς ο μεγάλος στρατηλάτης εγκαταστάθηκε με το στρατό του στο συγκεκριμένο σημείο αναμένοντας την επίθεση του Δαρείου!





Κεφάλαιο 4^ο

Πολυώνυμα

4.1. Πολυώνυμα

➤ Ορισμός μονωνύμου

Καλούμε μονώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής ax^n , όπου a πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος.

- ✓ Μονώνυμο του x καλούμε επίσης κάθε πραγματικό αριθμό. Το μονώνυμο αυτό το ονομάζουμε σταθερό μονώνυμο.

➤ Ορισμός πολυωνύμου

Καλούμε πολυώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Όπου n είναι φυσικός αριθμός και $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

- ✓ Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται όροι του πολυωνύμου.
- ✓ Οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n$ λέγονται συντελεστές
- ✓ Ο a_0 λέγεται σταθερός όρος του πολυωνύμου
- ✓ Κάθε πραγματικός αριθμός a_0 λέγεται σταθερό πολυώνυμο. Ειδικά το 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.
- ✓ Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε με $P(x), Q(x), F(x), f(x), a(x), \dots$

➤ Βαθμός πολυωνύμου

Βαθμό ενός πολυωνύμου του x λέμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο με την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός.

- ✓ Τα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.
- ✓ Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

➤ Ισότητα πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα του x θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

- Έχουν τον ίδιο βαθμό
- Οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι μεταξύ τους

- Οι σταθεροί όροι είναι ίσοι μεταξύ τους.

Δηλαδή τα πολυώνυμα

$$\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και}$$

$$\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \text{ με } \mu \geq \nu \text{ θα είναι ίσα όταν:}$$

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$$

➤ Αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$

Αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ είναι ο αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το x με μια τιμή ρ και κάνουμε τις πράξεις.

- ✓ Αν για $x = \rho$ προκύψει $P(\rho) = 0$ τότε το ρ ονομάζεται **ρίζα** του πολυωνύμου. Δηλαδή η ρίζα του πολυωνύμου είναι ο αριθμός ρ που αν τον αντικαταστήσουμε στην θέση του x η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου είναι μηδέν.

Πράξεις με πολυώνυμα

➤ Πρόσθεση – Αφαίρεση – Πολλαπλασιασμός – Ύψωση σε δύναμη

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού στηρίζονται στις πράξεις των πραγματικών αριθμών.

π.χ. Αν $A(x) = 2x^3 + 4x - 1$ και $B(x) = x^3 - 2$ τότε οι πράξεις μεταξύ των πολυωνύμων είναι οι εξής:

- **Πρόσθεση**

$$A(x) + B(x) = 2x^3 + 4x - 1 + x^3 - 2$$

$$= 3x^3 + 4x - 3$$

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά το πρόσημο - και την απαλείφουμε αλλάζουμε τα πρόσημα

- **Αφαίρεση**

$$A(x) - B(x) = (2x^3 + 4x - 1) - (x^3 - 2) =$$

$$2x^3 + 4x - 1 - x^3 + 2 = x^3 + 4x - 1$$

- **Πολλαπλασιασμός**

$$A(x) \cdot B(x) = (2x^3 + 4x - 1)(x^3 - 2) =$$

$$2x^6 - 4x^3 + 4x^4 - 8x - x^3 + 2 =$$

$$2x^6 + 4x^4 - 5x^3 - 8x + 2$$

▪ **Ύψωση σε δύναμη**

$$[B(x)]^2 = (x^3 - 2)^2 = x^6 - 4x^3 + 4$$

- ✓ Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι δυο μη μηδενικά πολυώνυμα με βαθμούς μ και ν αντίστοιχα τότε ο βαθμός του αθροίσματος $P(x) + Q(x)$ είναι μικρότερος ή ίσος του μεγαλύτερου από τους μ και ν .
- ✓ Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι δυο μη μηδενικά πολυώνυμα με βαθμούς μ και ν αντίστοιχα τότε ο βαθμός του γινομένου $P(x) \cdot Q(x)$ είναι ίσος με $\mu + \nu$.

➤ **Μορφές πολυωνύμου**

Ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού είναι της μορφής $P(x) = ax + \beta$

Ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού είναι της μορφής $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού είναι της μορφής

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

κ.ο.κ.

με $a \neq 0$ και $\beta, \gamma, \delta \dots \in \mathbb{R}$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^2 + 6x + 13$. Να βρείτε:

- i. Το βαθμό του πολυωνύμου
- ii. Τους συντελεστές του πολυωνύμου
- iii. Το σταθερό όρο

Λύση

- i. Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ο μέγιστος εκθέτης ενός μη μηδενικού του όρου. Επομένως το πολυώνυμο είναι 4^{ου} βαθμού.
- ii. Οι συντελεστές του πολυωνύμου
 $P(x) = 1x^4 - 3x^2 + 6x + 13$ είναι το 1, το -3 και το 6
- iii. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου
 $P(x) = x^4 - 3x^2 + 6x + 13$ είναι το 13.

2. Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 14x + 13$

Λύση

Για να βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου λύνουμε την εξίσωση
 $x^2 - 14x + 13 = 0$ Επομένως έχουμε $x = 13$ ή $x = 1$.

3. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε το πολυώνυμο

$P(x) = (a - 2)x^2 - (a - \beta)x + a + 2\beta - \gamma$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση

Για να είναι το $P(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο θα πρέπει όλοι οι συντελεστές των όρων του και ο σταθερός όρος να είναι ίσοι με το 0.

Επομένως πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \alpha - 2 = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \alpha \\ \gamma = \alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 + 2 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 6 \end{cases}$$

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ και $Q(x) = x^3 + 8$. Να βρείτε

τα:

- i. $P(x) + Q(x)$
- ii. $-P(x) + 3Q(x)$

iii. $P(x) \cdot Q(x)$

iv. $P(Q(x))$

Λύση

i. $P(x) + Q(x) = 3x^2 - 2x + 5 + x^3 + 8 = x^3 + 3x^2 - 2x + 13$

ii. $-P(x) + 3Q(x) = -(3x^2 - 2x + 5) + 3(x^3 + 8) =$
 $-3x^2 + 2x - 5 + 3x^3 + 24 = 3x^3 - 3x^2 + 2x + 19$

iii. $P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 - 2x + 5) \cdot (x^3 + 8) =$
 $3x^5 + 24x^2 - 2x^4 - 16x + 5x^3 + 40 =$
 $3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 24x^2 - 16x + 40$

iv. $P(Q(x)) = 3(x^3 + 8)^2 - 2(x^3 + 8) + 5 =$
 $3(x^6 + 16x^3 + 64) - 2x^3 - 16 + 5 =$
 $3x^6 + 48x^3 + 192 - 2x^3 - 16 + 5 =$
 $3x^6 + 46x^3 + 181$

5. Έστω $P(x) = \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + \kappa + 3$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε για $x = 1$ να παίρνει την τιμή 7 και για $x = -1$ να παίρνει την τιμή 11.

Λύση

Αφού για $x = 1$ το πολυώνυμο παίρνει τιμή 7 έχουμε $P(1) = 7$. Όμως

$$P(1) = \kappa \cdot 1^2 + (\lambda - 1) \cdot 1 + \kappa + 3 = \kappa + \lambda - 1 + \kappa + 3 =$$

$$2\kappa + \lambda + 2$$

Δηλαδή $2\kappa + \lambda + 2 = 7 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda = 5$ ①

Αφού για $x = -1$ το πολυώνυμο παίρνει τιμή 11 έχουμε $P(-1) = 11$. Όμως

$$P(-1) = \kappa \cdot (-1)^2 + (\lambda - 1) \cdot (-1) + \kappa + 3 =$$

$$\kappa - \lambda + 1 + \kappa + 3 =$$

$$2\kappa - \lambda + 4$$

Δηλαδή $2\kappa - \lambda + 4 = 11 \Leftrightarrow 2\kappa - \lambda = 7$ ②

Λύνουμε το σύστημα των ① και ②

$$\begin{cases} 2\kappa + \lambda = 5 \\ 2\kappa - \lambda = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa = 12 \\ 2\kappa + \lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 3 \\ 2 \cdot 3 + \lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

6. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε: $P(4x + 1) = 2P(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $P(0) = 0$. Να βρείτε το $P(21)$.

Λύση

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε: } P(2 \cdot 0 + 1) = 2P(0) + 2 \Leftrightarrow P(1) = 2 \cdot 0 + 2 \Leftrightarrow P(1) = 2$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε: } P(4 \cdot 1 + 1) = 2P(1) + 2 \Leftrightarrow P(5) = 2 \cdot 2 + 2 \Leftrightarrow P(5) = 6$$

$$\text{Για } x = 5 \text{ έχουμε: } P(4 \cdot 5 + 1) = 2P(5) + 2 \Leftrightarrow P(21) = 2 \cdot 6 + 2 \Leftrightarrow$$

$$P(21) = 14$$

7. Να προσδιορίσετε πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού που έχει ρίζα το 0 και για κάθε x ικανοποιεί την ισότητα $P(x) - P(x - 1) = x^2$

Λύση

Αφού το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού θα είναι της μορφής

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

Επειδή έχει ρίζα το μηδέν ισχύει $P(0) = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$ άρα

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

$$P(x - 1) = \alpha(x - 1)^3 + \beta(x - 1)^2 + \gamma(x - 1)$$

Επομένως η σχέση $P(x) - P(x - 1) = x^2$ γράφεται:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - [\alpha(x - 1)^3 + \beta(x - 1)^2 + \gamma(x - 1)] = x^2 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)x + (\alpha - \beta + \gamma) = x^2$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} 3\alpha = 1 \\ -3\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } P(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x^4 - 13x^2 + \sqrt{13}$$

$$B = -x^8 - 5x^3$$

$$\Gamma = \frac{1}{3}x^5 - 2 + \frac{3}{x}$$

$$\Delta = 2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} - 1$$

$$E = 8\sqrt{x}$$

$$Z = 3x^4 - 2$$

$$H = \frac{x^{-3} + x}{3}$$

$$\Theta = \frac{x^4 + x^3 + x}{6}$$

- i. Ποιες από της παραπάνω παραστάσεις εκφράζουν πολυώνυμα;
- ii. Ποιος ο βαθμός του πολωνύμου;

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$. Να βρείτε:

- iv. Το βαθμό του πολωνύμου
- v. Τους συντελεστές του πολωνύμου
- vi. Το σταθερό όρο
- vii. Τις ρίζες του πολωνύμου

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

- i. Ποιος ο σταθερός όρος του πολωνύμου;
- ii. Ποιοι οι συντελεστές του πολωνύμου;
- iii. Ποιος ο βαθμός του πολωνύμου;
- iv. Να εξετάσετε αν το $x = 2$ είναι ρίζα του πολωνύμου;
- v. Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολωνύμου.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα

$$P(x) = (\lambda^2 + \lambda)x^3 + \lambda x^2 + 1$$

$$Q(x) = -2x^2 + 2x^3 + \lambda + 3$$

είναι ίσα.

5. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ και $Q(x) = 2x^3 + 4$. Να βρείτε τα:

- | | |
|-----------------------|----------------|
| i. $P(x) + Q(x)$ | iv. $[P(x)]^2$ |
| ii. $P(x) \cdot Q(x)$ | v. $P(Q(x))$ |
| iii. $-P(x) + 3Q(x)$ | |

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 3)x^3 + \lambda x + \mu + 2$ $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, μ για τις οποίες το $P(x)$ είναι:

- | | |
|-----------------------------|-------------|
| i. 3 ^{ου} Βαθμού | iv. Σταθερό |
| ii. 2 ^{ου} Βαθμού | v. μηδενικό |
| iii. 1 ^{ου} Βαθμού | |

7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = -3\lambda x^2 + 3x + \mu$ έχει ρίζα το 2 και ισχύει $P(1) = -1$

8. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\lambda^2 + 1)x^3 + (\lambda + 3)x + \lambda - 1$ και $Q(x) = (4\lambda - 8)x^3 + 2 - (9 - 5\lambda)x$. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα είναι ίσα.

9. Να προσδιοριστεί ο βαθμός του πολυωνύμου

$P(x) = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9)x + (\lambda - 3)x + \lambda^2 + 2\lambda - 15$ για τις διάφορες τιμές του λ .

10. Να βρείτε το βαθμό των παρακάτω πολυωνύμων για τις διάφορες τιμές του λ .

- | |
|---|
| i. $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 + (\lambda + 1)x^3 - (\lambda - 1)x^2 + 2x - 3$ |
| ii. $P(x) = (\lambda^2 - 9)x^5 - (\lambda - 3)x^2 + (\lambda + 3)x + x - 5$ |

11. Για ποιες τιμές του λ το πολυώνυμο

$$P(x) =$$

$$(\lambda^2 - 1)x^4 + (\lambda^2 + \lambda - 2)x^3 - (\lambda^4 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda^5 - 3\lambda + 4)x + \lambda^2 - 4$$

είναι μηδενικό.

12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x + (\lambda + 2)x^3 + (\lambda + 1)x^2 - \lambda x + 3$$

Αν το $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού

- | |
|---|
| i. Να βρεθεί η τιμή του λ |
| ii. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ |

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$ του οποίου οι δυο ρίζες είναι οι αριθμοί 1 και -2.

- i. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β
 - ii. Να βρεθούν οι ρίζες του $P(x)$
 - iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$
14. Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν κοινή ρίζα το 0, να αποδείξετε ότι και το πολυώνυμο $R(x) = P(Q(x))$ έχει ρίζα το 0.
15. Α) Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ ώστε
- $$(2x + 3)P(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$$
- Β) Να λυθεί η εξίσωση $2x^3 + x^2 - x + 3 = 0$
16. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε:
- $$P[(x + 1)^3] = [P(7x - 6)]^2 - 2x \text{ και } P(1) = 0. \text{ Να βρεθεί το } P(27)$$
17. Έστω ότι το $P(x)$ είναι πολυώνυμο $1^{\text{ου}}$ βαθμού
- i. Να γράψετε την μορφή του.
 - ii. Να βρείτε το $P(P(x))$
 - iii. Αν $P(P(x)) = 2x + 4$ να υπολογίσετε την θετική τιμή του $P(1)$.
18. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού, έχει ρίζα τον αριθμό 0 και ικανοποιεί την ισότητα $P(x) - P(x - 1) = x^2$
- i. Να αποδείξετε ότι $P(-1) = 0$, $P(1) = 1$ και $P(2) = 5$
 - ii. Να προσδιορίσετε το $P(x)$.
19. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + 4 - 3x$ και $Q(x)$ τέτοια ώστε
- $$P(Q(x)) = Q(P(x)), x \in \mathbb{R} \text{ να υπολογίσετε το } Q(2).$$
20. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ ώστε
- $$[P(x)]^2 - P(x) = (x - 1)(x - 2)$$
21. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 2 να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο
- $$Q(x) = 5P(x - 1) - 2(x - 3)P(x + 1) \text{ έχει ρίζα το } 3.$$
22. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$ και
- $$Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.2. Διαίρεση πολυωνύμων

➤ Θεώρημα

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

- ✓ Το $\nu(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$
- ✓ Το $\Delta(x)$ καλείται διαιρετέος, το $\delta(x)$ καλείται διαιρέτης, το $\pi(x)$ καλείται πηλίκο και το $\nu(x)$ καλείται υπόλοιπο.

➤ Μέθοδος διαίρεσης πολυωνύμων

Βήμα 1: Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά της φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής x . Στο πολυώνυμο του διαιρέτη αν λείπει κάποια δύναμη του x την συμπληρώνουμε με συντελεστή το 0.

Βήμα 2: Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη. Το αποτέλεσμα το τοποθετώ στο πηλίκο.

Βήμα 3: Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα του πηλίκου με όλους τους όρους του διαιρέτη αλλάζουμε το πρόσημο του κάθε όρου που προκύπτει και το τοποθετούμε κάτω από την αντίστοιχη δύναμη του διαιρετέου και προσθέτουμε. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το μερικό υπόλοιπο.

Βήμα 4: Αν ο βαθμός του υπολοίπου είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη η διαδικασία σταματάει αν ο βαθμός του υπολοίπου είναι μεγαλύτερος του βαθμού του διαιρετέου επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 μέχρι ο βαθμός του υπολοίπου να είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη.

- ✓ Αν το υπόλοιπο $\nu(x)$ είναι μηδέν η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.
- ✓ Στην περίπτωση που η διαίρεση είναι τέλεια ($\nu(x) = 0$) η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$
ο διαιρέτης $\delta(x)$ λέμε ότι **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή ότι ο $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$ ή ακόμα ότι το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** του $\Delta(x)$.

- ✓ Με την τέλεια διαίρεση μπορούμε να **παραγοντοποιήσουμε** το πολυώνυμο του διαιρετέου.

π.χ. Να κάνετε την διαίρεση: $(8x^4 + 8x^3 + 17x - 5) : (2x^2 + 3x - 1)$

Λύση:

$8x^4 + 8x^3 + 0x^2 + 17x - 5$	$2x^2 + 3x - 1$
$-8x^4 - 12x^3 + 4x^2$	$4x^2 - 2x + 5$
$-4x^3 + 4x^2 + 17x - 5$	
$+4x^3 + 6x^2 - 2x$	
$10x^2 + 15x - 5$	
$-10x^2 - 15x + 5$	
0	

Διαίρεση πολυωνύμων με $x - \rho$

➤ **Θεώρημα 1^ο**

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $v = P(\rho)$.

Απόδειξη

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ γράφεται:

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + v(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο v . Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + v$$

Και αν θέσουμε $x = \rho$, παίρνουμε:

$$P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) + v = 0 + v = v$$

Επομένως

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + P(\rho)$$

- ✓ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x + \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = -\rho$. Είναι δηλαδή $v = P(-\rho)$.

➤ **Θεώρημα 2^ο**

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε $P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) = 0$

Που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει ότι $P(\rho) = 0$

Τότε από τη σχέση $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + P(\rho)$

Παίρνουμε $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$

Που σημαίνει ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$

- ✓ Όταν το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ γράφουμε $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$
- ✓ Το $x + \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν το $-\rho$ είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή αν και μόνο αν $P(-\rho) = 0$.

➤ **Σχήμα Horner**

Με το σχήμα **Horner** μπορούμε να βρούμε το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο** της διαίρεσης: $P(x) \div (x - \rho)$ ή την αριθμητική τιμή $P(\rho)$ του $P(x)$.

Μέθοδος σχήματος Horner:

- Γράφουμε το πολυώνυμο $P(x)$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και αν λείπει κάποια δύναμη την συμπληρώνουμε με συντελεστή το 0.
- Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του $P(x)$ και στο τέλος της πρώτης γραμμής βάζουμε το ρ .

- Τοποθετούμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης γραμμής στη πρώτη θέση της τρίτης γραμμής.
- Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ .
- Κάθε στοιχείο της τρίτης γραμμής (εκτός από το πρώτο) προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων της πρώτης και της δεύτερης γραμμής.
- Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \rho$. Το υπόλοιπο στοιχεία είναι οι συντελεστές του πηλίκου. Το πηλίκο είναι κατά ένα βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $P(x)$.

π.χ. Έστω ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το $P(x) = x^3 - 3x + 5$ με το $x - 2$

Γράφουμε το $P(x) = x^3 + 0x^2 - 3x + 5$ και φτιάχνουμε το πίνακα:

		2 ^η Θέση		4 ^η Θέση	
	1 ^η Θέση		3 ^η Θέση		
1 ^η γραμμή	1	0	-3	5	2
2 ^η γραμμή					
3 ^η γραμμή					Υπόλοιπο

Συμπληρώνουμε τον πίνακα σύμφωνα με την μεθοδολογία και έχουμε:

- Κατεβάζουμε το 1 από την πρώτη θέση της πρώτης γραμμής στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής.
- Μετά πολλαπλασιάζουμε το 1 με το 2 και το αποτέλεσμα το γράφουμε στη 2^η θέση της δεύτερης γραμμής.
- Το άθροισμα της 2^{ης} θέσης της πρώτης γραμμής με την 2^η θέση της δεύτερης γραμμής δηλαδή $(0 + 2) = 2$ το τοποθετούμε στην 2^η θέση της τρίτης γραμμής.

- Πολλαπλασιάζουμε το 2 με το 2 και το αποτέλεσμα το γράφουμε στη 2^η θέση της δεύτερης γραμμής
- Το άθροισμα της 3^{ης} θέσης της πρώτης γραμμής με την 3^η θέση της δεύτερης γραμμής δηλαδή $(-3 + 4) = 1$ το τοποθετούμε στην 3^η θέση της τρίτης γραμμής.
- Μετά πολλαπλασιάζουμε το 1 με το 2 και το αποτέλεσμα το γράφουμε στη 4^η θέση της δεύτερης γραμμής.
- Το άθροισμα της 4^{ης} θέσης της πρώτης γραμμής με την 4^η θέση της δεύτερης γραμμής δηλαδή $(5 + 2) = 7$ το τοποθετούμε στην 4^η θέση της τρίτης γραμμής.

Δηλαδή ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

		2 ^η Θέση		4 ^η Θέση	
	1 ^η Θέση		3 ^η Θέση		
1 ^η γραμμή	1	0	-3	5	2
2 ^η γραμμή		2	4	2	
3 ^η γραμμή	1	2	1	7	Υπόλοιπο

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

i. $(x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x - 2)$

ii. $(\alpha^2\beta + 4\alpha\beta + 3\beta) : (\alpha + 3)$

Λύση

i.

$x^3 - x^2 + 2x + 4$	$x - 2$
$-x^3 + 2x^2$	$x^2 + x + 4$
$x^2 + 2x + 4$	
$-x^2 + 2x$	
$4x + 4$	
$-4x + 8$	
12	

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x^2 + x + 4)(x - 2) + 12$$

ii.

$\alpha^2\beta + 4\alpha\beta + 3\beta$	$\alpha + 3$
$-\alpha^2\beta - 3\alpha\beta$	$\alpha\beta + \beta$
$\alpha\beta + 3\beta$	
$-\alpha\beta - 3\beta$	
0	

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$\alpha^2\beta + 4\alpha\beta + 3\beta = (\alpha\beta + \beta)(\alpha + 3)$$

2. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i. $(6x^3 - 2x^2 + 5x - 3) : (x + 1)$

ii. $(x^4 - 8) : (x - 2)$

iii. $(x^{1908} - x^{1982} + x^{2004} + x^{2012} + 13) : (x - 1)$

Λύση

- i. Αν θέσουμε $P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ για να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(6x^3 - 2x^2 + 5x - 3) : (x + 1)$ αρκεί να βρούμε την τιμή $P(-1)$
- $$\begin{aligned} \text{Άρα έχουμε } P(-1) &= 6(-1)^3 - 2(-1)^2 + 5(-1) - 3 = \\ &= -6 - 2 - 5 - 3 = -16 \end{aligned}$$
- ii. Αν θέσουμε $P(x) = x^4 - 8$ για να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^4 - 8) : (x - 2)$ αρκεί να βρούμε την τιμή $P(2)$
- $$\text{Άρα έχουμε } P(2) = 2^4 - 8 = 16 - 8 = 8$$
- iii. Αν θέσουμε $P(x) = x^{1908} - x^{1982} + x^{2004} + x^{2012} + 13$ για να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^{1908} - x^{1982} + x^{2004} + x^{2012} + 13) : (x - 1)$ αρκεί να βρούμε την τιμή $P(1)$
- $$\begin{aligned} \text{Άρα έχουμε } P(1) &= 1^{1908} - 1^{1982} + 1^{2004} + 1^{2012} + 13 = \\ &= 1 - 1 + 1 + 1 + 13 = 15 \end{aligned}$$

3. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + (a - 1)x^2 - 7x + 6a \text{ να έχει παράγοντα το } x - 1$$

Λύση

Για να έχει το $P(x)$ παράγοντα το $x - 1$ θα πρέπει η διαίρεσή τους να είναι τέλεια άρα το υπόλοιπο της διαίρεσής τους να είναι το μηδέν. Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} P(1) = 0 &\Leftrightarrow 1^3 + (a - 1)1^2 - 7 \cdot 1 + 6a = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + a - 1 - 7 + 6a = 0 \Leftrightarrow \\ &7a = 7 \Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

4. Με την βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκια και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

- i. $(x^2 - 3x^3 + 2x - 4) : (x - 2)$
- ii. $(x^3 - 4) : (x - 2)$
- iii. $(vx^v - x^{v-1} - x^{v-2} - \dots - x - 1) : (x - 1)$

Λύση

i. Έχουμε:

-3	1	2	-4	2
	-6	-10	-16	
-3	-5	-8	-20	

Άρα το πηλίκο είναι $\pi(x) = -3x^2 - 5x - 8$ και το υπόλοιπο $v = -20$

ii. Έχουμε:

1	0	0	-4	2
	2	4	8	
1	2	4	4	

Άρα το πηλίκο είναι $\pi(x) = x^2 + 2x + 4$ και το υπόλοιπο $v = 4$

iii. Έχουμε

v	-1	-1	...	-1	-1	1
	v	v - 1	...	$v - (v - 2)$	$v - (v - 1)$	
v	v - 1	v - 2		$v - (v - 1)$	0	

Άρα το πηλίκο είναι $\pi(x) = vx^{v-1} + (v - 1)x^{v-2} + \dots + 2x + 1$ και το υπόλοιπο $v = 0$

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

- Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για $x = 3$**
- Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$**
- Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$**

Λύση

- i. Έχουμε $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 27 - 27 + 6 - 6 = 0$
 ii. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner και έχουμε:

1	-3	2	-6	3
	3	0	6	
1	0	2	0	

Άρα το πηλίκο είναι $\pi(x) = x^2 + 2$

- iii. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x^2 + 2)(x - 3)$$

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - \lambda$ για το οποίο ισχύει $P(1) = 0$

- i. **Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$**
 ii. **Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$**

Λύση

- i. Έχουμε $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - \lambda = 1 + 2 - 1 - \lambda = 2 - \lambda$
 Άρα $2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

- ii. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Το υπόλοιπο θα είναι ίσο με το $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 12$

7. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = x^3 - (1 - 2\lambda)x - 2$ να έχει παράγοντα το $x - \lambda$

Λύση

Για να έχει παράγοντα το $P(x)$ το $x - \lambda$ θα πρέπει

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - (1 - 2\lambda)\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &(\lambda^2 - 1)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -2$$

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^5 - 9x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 8x - 1$. Δείξτε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Λύση

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την διαίρεση $P(x): (x - 1)$

2	-9	18	-18	8	-1	1
	2	-7	11	-7	1	
2	-7	11	-7	1	0	

Επομένως $\pi_1(x) = 2x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 1$

Εφαρμόζοντας δεύτερη φορά σχήμα Horner για την διαίρεση

$(2x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 1): (x - 1)$ έχουμε:

2	-7	11	-7	1	1
	2	-5	6	-1	
2	-5	6	-1	0	

Επομένως $\pi_2(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

Δηλαδή $2x^5 - 9x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 8x - 1 =$

$$(2x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 1)(x - 1) =$$

$$(2x^3 - 5x^2 + 6x - 1)(x - 1)(x - 1) =$$

$$(2x^3 - 5x^2 + 6x - 1)(x - 1)^2$$

Άρα το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

9. Δείξτε ότι το $P(x) = x^6 + 3x^2 + 5$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$.

Λύση

Έστω ότι έχει παράγοντα το $x - \rho$ τότε ισχύει $P(\rho) = 0$ δηλαδή

$\rho^6 + 3\rho^2 + 5 = 0$ αδύνατη (διότι $\rho^6 + 3\rho^2 + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό ρ).

10. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται από το $(x - \alpha)$ και το $(x - \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι διαιρείται και από το $(x - \alpha)(x - \beta)$.

Λύση

Ισχύει $P(\alpha) = 0$ και $P(\beta) = 0$

Επιπλέον $P(x) = (x - \alpha)\pi(x)$ ①

όπου $\pi(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$: $(x - \alpha)$

$P(\beta) = (\beta - \alpha)\pi(\beta) \Leftrightarrow 0 = (\beta - \alpha)\pi(\beta) \Leftrightarrow \pi(\beta) = 0$ διότι $\beta \neq \alpha$

άρα το $x - \beta$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ δηλαδή υπάρχει $\pi_1(x)$ ώστε

$\pi(x) = (x - \beta)\pi_1(x)$ ②

Από ① και ② έχουμε $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\pi_1(x)$

Επομένως το $P(x)$ διαιρείται και από το $(x - \alpha)(x - \beta)$.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση

- i. $(15x^3 - 14x^2 + 7x + 6) : (3x^2 - 4x + 3)$
- ii. $(x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 7) : (x^2 + 1)$
- iii. $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6) : (x^2 - 2x + 3)$
- iv. $(2x^2 + 13x - 27) : (x + 6)$
- v. $(x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x - 2)$
- vi. $(x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 3x - 1)$
- vii. $(3x^5 + 12x^3 - 20x^2 + 50) : (x - 2)$
- viii. $(2x^3 - x^2 + 7x + 5) : (x + 1)$
- ix. $(x^5 + 4) : (x + 1)$
- x. $(3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 9) : (x - 1)^2$
- xi. $(2x^6 - 5x^2 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1) : (2x^3 - x + 1)$
- xii. $x^5 : (x - 1)^3$
- xiii. $(5x^2 - 3ax - 2a^2) : (x - a)$

2. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

- i. $(x^{13} - 5x^{12} - 17x^3 + 2x + 3) : (x + 1)$
- ii. $(10x^{20} - 3x^9 - x + 8) : (x - 1)$
- iii. $(x^{31} - 5x^{20} + 8) : x$

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{2012} - x^{1981} + x^{1908} + x - 2$

- i. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$
- ii. Να εξετάσετε αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$

4. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = \lambda x^3 - 5\lambda^2 x^2 + 4\lambda x - 6 \text{ να έχει παράγοντα το } x - 1$$

5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = (x - 4)^{2v} + (x - 4)^v - 1 \text{ με το } x - 3.$$

6. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

- i. $(x^4 - 3x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$
- ii. $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1) : (x + 1)$

- iii. $(4x^3 + 2x^2 + 6x + 1) : (x - 1)$
 - iv. $(-2x^3 + 5x^2 - x + 1) : (x - 2)$
 - v. $(-x^4 + 2x^3 - 3x + 5) : (x + 3)$
 - vi. $(x^3 - 8) : (x + 1)$
 - vii. $x^3 : (x - 3)$
 - viii. $(2x^3 - x^2 + 3) : (x + 1)$
 - ix. $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7) : (x - 3)$
 - x. $(2x^2 + x^5 - x + 3) : (x + 1)$
 - xi. $(x^3 - 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - 5\alpha^3) : (x - \alpha)$
7. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 - \lambda x^2 + 5x + 2\lambda - 5$ με το $x + 1$ είναι -8 . Να βρείτε:
- i. το λ
 - ii. το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x - 3)$
8. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 11x + 6$ διαιρείται με το $x^2 - 5x + 6$ και να βρείτε το πηλίκο του με την βοήθεια του σχήματος Horner.
9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\lambda + 1)x^3 + 2\lambda x^2 - x + \lambda + 8$ το οποίο έχει παράγοντα το $x + 2$
- i. Να βρείτε την τιμή του λ και να κάνετε το $P(x)$ γινόμενο
 - ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$
10. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 9x + \beta$ να διαιρείται με το $x^2 - 1$.
11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 + \alpha x - 3$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$
- i. Να βρείτε την τιμή του α
 - ii. Να κάνετε γινόμενο το $P(x)$
 - iii. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε $P(x) < 0$
12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\lambda + 1)x^3 + 2\lambda x^2 - x + \lambda + 8$ το οποίο έχει παράγοντα το $x + 2$
- i. Να βρείτε την τιμή του λ και να κάνετε το γινόμενο $P(x)$
 - ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ εκτελώντας την διαίρεση και εφαρμόζοντας το σχήμα Horner.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 11x + 7$. Ναδειχθεί ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
14. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + 2\beta - 6)x + 3\alpha + 2\beta - 1$ έχει παράγοντα το $(x - 1)$ ενώ διαιρούμενο με το $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο 8.
- Να βρεθούν τα α, β .
 - Να μετατραπεί σε γινόμενο το $P(x)$
 - Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
15. Να βρείτε τα α, β αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + \alpha x + \beta$ διαιρούμενο με το $Q(x) = x^2 + x + 1$ αφήνει υπόλοιπο ίδιο με το πηλίκο.
16. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^{2012} + x^{2011} + \dots + x + 1$ με το $x + 1$.
17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $(x - 1)^2$
- Να βρείτε τα α, β
 - Να κάνετε γινόμενο $P(x)$
18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + (\lambda - 2)x + \kappa + 5$
- A) Να βρείτε τα κ, λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$
- B) Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε στο ερώτημα A και αν $Q(x) = 5x - 3$
- Να αποδείξετε ότι το $P(x) + Q(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$
 - Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει
- $$P(x) + Q(x) = P(x - 1) + Q(x - 1)$$
19. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (x^5 - x^3 + 3x + 2)^2 - x^{10}$ και $Q(x) = x^3 - 3x - 2$ Να αποδείξετε:
- $P(x) = Q^2(x) - 2x^5 \cdot Q(x)$
 - Η διαίρεση του $P(x)$ με το $Q(x)$ είναι τέλεια και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης αυτής.
 - Το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) + \lambda Q(x)$ όπου λ πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός.
- 20.i. Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 6x^2 + 11x - 2) : (x - 3)$

21. Αν $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ να έχει υπόλοιπο 0.

21 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 + P(1)$ και διαιρούμενο με $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 - P(-1)$, τότε:

- i. να αποδείξετε ότι $P(1) = 0$ και $P(-1) = 16$
- ii. να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -3$
- iii. να αποδείξετε ότι $P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0$

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

➤ Ορισμός

Αν $P(x)$ ένα πολυώνυμο, τότε κάθε εξίσωση της μορφής $P(x) = 0$ λέγεται πολυωνυμική εξίσωση.

✓ Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \alpha_n \neq 0$$

με $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n .

➤ Ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης

Αν $P(x) = 0$ είναι μια πολυωνυμική εξίσωση, ονομάζουμε ρίζα της εξίσωσης την κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

➤ Μέθοδος επίλυσης πολυωνυμικής εξίσωσης

Αν $P(x) = 0$ είναι μια πολυωνυμική εξίσωση για να την επιλύσουμε παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ και αναγόμενους στην επίλυση εξισώσεων μικρότερου βαθμού. Δηλαδή έχουμε

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) \cdot P_2(x) \dots P_k(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0$$

Δηλαδή για να λύσουμε την εξίσωση $P(x) = 0$ παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ και μετά επιλύουμε εξισώσεις μικρότερου βαθμού.

- ✓ Συνήθως παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια πολυώνυμα.
- ✓ Αν μια πολυωνυμική εξίσωση είναι n -οστού βαθμού τότε μπορεί να έχει το πολύ n ρίζες.
- ✓ Η παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $P(x)$ μπορεί να γίνει με τους γνωστούς τρόπους από τις προηγούμενες τάξεις (Κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση, ταυτότητες) ή με το σχήμα Horner.

➤ **Θεώρημα ακέραιων ριζών**

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση , με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_n \rho^n - \alpha_{n-1} \rho^{n-1} - \dots - \alpha_1 \rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho \cdot (-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1)$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο

$$-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1 \text{ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα}$$

συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0

➤ **Πρόσημο γινομένου**

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε το πρόσημο ενός γινομένου

$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι πολυώνυμα 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού τότε βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά και στην συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$ φτιάχνοντας πίνακα προσήμων και εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμων γινομένου.

- ✓ Αν κάποιος από τους παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ δεν είναι 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού τότε τον παραγοντοποιούμε ώστε να μετατραπεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων παραγόντων.

➤ **Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (≥ 0), (< 0), (≤ 0)**

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση της παραπάνω μορφής αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε το πρόσημο του γινομένου $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ να επαληθεύει την ανίσωση.

- ✓ Για να επιλύσουμε την ανίσωση $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ θα φτιάξουμε τον πίνακα προσήμων του γινομένου $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ και στην συνέχεια θα δούμε τα διαστήματα η τις τιμές για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

ii. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

Λύση

- i. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1 . Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $x = 1$ έχουμε:

3	-1	-1	-1	1
	3	2	1	
3	2	1	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$3x^3 - x^2 - x - 1 = (3x^2 + 2x + 1)(x - 1)$$

$$\text{Άρα } 3x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 2x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ή } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Αδύνατη} \quad x = 1$$

- ii. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $x = 1$ έχουμε:

1	-1	-4	4	1
	1	0	-4	
1	0	-4	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x^2 - 4)(x - 1)$$

$$\text{Άρα } x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \text{ή } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2 \quad x = 1$$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις

i. $(x^2 - 3x + 2)(x - 3)(x^2 - 2x + 4) > 0$

ii. $(-x^2 + 4x - 3)(x - 2)(-x^2 + x - 4) \leq 0$

Λύση

i. Βρίσκουμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα

Θέτουμε $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 3)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ ή $x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ ή $x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = 3$ ή Αδύνατη

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του γινομένου

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+	+
$x^2 - 2x + 4$	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	+	-	+	+

Άρα $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα

Θέτουμε $P(x) = (-x^2 + 4x - 3)(x - 2)(-x^2 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ ή $x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ ή $-x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = 3$ ή $x = 2$ ή Αδύνατη

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του γινομένου

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$	-	+	+	-	-
$x - 2$	-	-	+	+	+
$-x^2 + x - 4$	-	-	-	-	-
$P(x)$	-	+	-	+	+

Άρα $x \in (-\infty, 1] \cup [2, 3]$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις

i. $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 \geq 0$

ii. $x^3 + 3x \leq 5x^2 - 9$

Λύση

- i. Μετατρέπουμε το πολυώνυμο $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων και στην συνέχεια φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του x .

$$\text{Θέτουμε } P(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 3$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για $\rho = -3$

1	6	10	3	-3
	-3	-9	-3	
1	3	1	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = (x^2 + 3x + 1)(x + 3)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες του $P(x)$.

$$\text{Θέτουμε } P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ ή } x + 3 = 0$$

$$\text{Αδύνατη} \quad x = -3$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του $P(x)$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x^2 + 3x + 1$	+	+	+
$x + 3$	-	+	+
$P(x)$	-	+	+

$$\text{Άρα } x \in [-3, +\infty)$$

- ii. $x^3 + 3x \leq 5x^2 - 9 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \leq 0$

$$\text{Θέτουμε } P(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 9$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για $\rho = 3$ έχουμε:

1	-5	3	9	3
	3	-6	-9	
1	-2	-3	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x^2 - 2x - 3)(x - 3)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες του $P(x)$

$$\text{Θέτουμε } P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 2x - 3)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του $P(x)$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	-	+
$x - 3$		-	-	+
$P(x)$		-	+	+

$$\text{Άρα } x \in [-1, +\infty)$$

4. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x' και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Λύση

Για να βρούμε τα σημεία τομής του άξονα x' με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1 . Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $\rho = 1$ έχουμε:

1	-1	1	-1	1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)$$

$$\text{Άρα } x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ή } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Αδύνατη} \quad x = 1$$

5. Δίνεται το πολυώνυμο $\Pi(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$

- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Pi(x)$ με το $x - 2$
- Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\Pi(x)$ με το $x - 1$
- Να λύσετε την εξίσωση $\Pi(x) = 0$

Λύση

- Για να βρούμε το υπόλοιπο αρκεί να βρούμε την τιμή $\Pi(2)$
 Άρα έχουμε $\Pi(2) = 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 3 = 8 - 4 + 6 - 3 = 5$
- Θα εφαρμόσουμε σχήμα Horner για $\rho = 1$

1	-1	3	-3	1
	1	0	3	
1	0	3	0	

$$\text{Άρα το πηλίκο είναι το } \pi(x) = x^2 + 3$$

$$\text{iii. } \Pi(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0$$

$$\text{Αδύνατη} \quad x = 1$$

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

- i. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = -1$
- ii. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - 1$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Λύση

- i. $P(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 11(-1) - 6 = -1 - 6 - 11 - 6 = -24$
- ii. Το υπόλοιπο θα είναι ίσο με

$$v = P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$
- iii. Βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
 Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $\rho = 1$ έχουμε:

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 5x + 6)(x - 1)$$

$$(x^2 - 5x + 6)(x - 1) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του $P(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	+	-	+	
$x - 1$	-	+	+	+	
$P(x)$	-	+	-	+	

Άρα $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 2)x^3 + (\beta + 6)x + \alpha + 2\beta - 2$

Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό 1 και η διαίρεσή του με το $x + 1$ δίνει υπόλοιπο -2 να αποδείξετε ότι $\alpha = -7$ και $\beta = 4$.

Λύση

Αφού έχει ρίζα τον αριθμό 1 τότε ισχύει $P(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - 2) \cdot 1^3 + (\beta + 6) \cdot 1 + \alpha + 2\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 2 + \beta + 6 + \alpha + 2\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + 3\beta = -2 \quad (1)$$

Επειδή η διαίρεση με το $x + 1$ δίνει υπόλοιπο -2 ισχύει $P(-1) = -2 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - 2) \cdot (-1)^3 + (\beta + 6) \cdot (-1) + \alpha + 2\beta - 2 = -2 \Leftrightarrow$$

$$-\alpha + 2 - \beta - 6 + \alpha + 2\beta - 2 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 4 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -2 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 \cdot 4 = -2 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -14 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -7 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \kappa x^3 + 17x^2 + 2x + \lambda$

- i. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x + 1$ και $x - 2$ να βρείτε τα κ και λ .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Λύση

- i. Επειδή το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ ισχύει $P(-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(-1)^4 - \kappa(-1)^3 + 17(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \kappa + 17 - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa + \lambda = -16 \quad (1)$$

Επειδή το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ ισχύει $P(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$2^4 - \kappa 2^3 + 17 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 - 8\kappa + 68 + 4 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$-8\kappa + \lambda = -88 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = -16 \\ -8\kappa + \lambda = -88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\kappa + 8\lambda = -128 \\ -8\kappa + \lambda = -88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\lambda = -216 \\ \kappa + \lambda = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -24 \\ \kappa = 8 \end{cases}$$

Άρα $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$.

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $x = -1$ έχουμε:

1	-8	17	2	-24	-1
	-1	9	-26	24	
1	-9	26	-24	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x^3 - 8x^2 + 26x - 24)(x + 1)$$

Στο πολυώνυμο $x^3 - 8x^2 + 26x - 24$ εφαρμόζουμε σχήμα Horner για

$x = 2$ έχουμε:

1	-8	26	-24	2
	2	-14	24	
1	-6	12	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 - 8x^2 + 26x - 24 = (x^2 - 6x + 12)(x - 2)$$

Άρα $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x^2 - 6x + 12)(x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 12 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

iii. Για να λύσουμε την ανίσωση φτιάχνουμε το πίνακα προσήμων του $P(x)$

x	$-\infty$	-1	2	3	4	$+\infty$
$x^2 - 6x + 12$	+	+	+	-	+	
$x - 2$	-	-	+	+	+	
$x + 1$	-	+	+	+	+	
$P(x)$	+	-	+	-	+	

Άρα $x \in (-1, 2) \cup (3, 4)$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(x^2 - 6x)(2x + 4)(x^2 + 5) = 0$

ii. $x^3 + 2x^2 + x = 0$

iii. $x^4 - 8x = 0$

iv. $81x^4 = 16$

v. $x^9 = x$

vi. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

vii. $x^5 - x^3 - 27x^2 + 27 = 0$

viii. $x^3 - x^2 = 4x - 4$

ix. $(x^2 - 2x + 1)^2 - (x - 1)^2(x^2 - 6x + 9) = 0$

x. $(x^2 - 4)^2 - (3x - 2)(x + 2)^2 = 0$

2. Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

ii. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

iii. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

iv. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$

v. $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$

vi. $x^3 + 4x + 16 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

i. $x^4 + 5x - 2 = 0$

ii. $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0$

iii. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 6 = 0$

iv. $48x^3 + 2x^2 - 5x - 1 = 0$

v. $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $x^3 + 5x^2 - 10x + 28 = 0$

ii. $3x^3 - 8x^2 - 16x + 16 = 0$

iii. $x^3 + 4x - 2x^2 - 8 = 0$

iv. $2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6 = 0$

v. $5x^3 - 7x^2 + 9x - 7 = 0$

vi. $3x^4 - 14x^3 - 8x^2 + 14x + 5 = 0$

vii. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

viii. $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

ix. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

x. $x^3 - 9x + 8 = 0$

xi. $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

xii. $4x^5 + 12x^4 - x - 3 = 0$

5. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ ως προς της γραφικής παράστασης καθεμιάς από τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = 5x^3 - 4x - 1$

ii. $g(x) = x^4 + x^3 - 2x$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$

ii. $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 \geq 0$

iii. $x^3 - 5x^2 \geq -3x - 9$

iv. $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$

v. $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 > 0$

vi. $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$

vii. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6 > 0$

viii. $x^3 + 2x^2 - x + 6 \leq 0$

ix. $2x^3 - 3x^2 + 1 < 0$

x. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 \leq 0$

xi. $(x + 2)^3 \leq 8x^2 + 16x$

xii. $3x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 17x - 6 \leq 0$

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

ii. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x - 1)$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

9. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
10. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$
- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x - 2$
 - Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x - 1$
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
11. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων $P(x) = x^4 + 5x$ και $Q(x) = 5x^3 + 1$
12. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων $f(x) = x^2 + 2x$ και $g(x) = 2x^3 + 1$
13. Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες των εξισώσεων
- $x^{1981} + x^{1908} + x + 1 = 0$
 - $x^{2012} + x^{2007} + 2 = 0$
14. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 8 = 9x^2 - 36 - (x^2 + x - 2)$ και την ανίσωση $(x + 2)(x^2 - 10x + 21) > 0$
15. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^3 + 2) + x^2(x + 1) = 4x + 16 + 2x^2(x - 1)$ και την ανίσωση $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 > 0$
16. Δίνεται η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 30 = 0$ με ρίζες $x = 2$ και $x = 3$. Να βρείτε:
- Τις τιμές α και β
 - Την άλλη ρίζα της εξίσωσης
17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$
- Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + 2\lambda^3 x^2 - \lambda^2 x - 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 12)$
- Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.
19. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 2\alpha x^3 - x^2 + 3\beta x + 4$

- i. Να βρείτε τις τιμές α και β ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντες τους $x - 1$ και $x - 2$.
 - ii. Για τις τιμές των α και β να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$ όπου α και β πραγματικοί αριθμοί.
- i. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι ίσο με 2 τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$
21. Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + 17x^2 + 2x + \beta$ το οποίο διαιρείται με το $x + 1$ και το $x - 2$
- i. Να βρείτε τις τιμές α και β
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$
22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + 2\lambda^3 x^2 - x - 2$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ να βρείτε:
- i. Την τιμή του λ .
 - ii. Τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$
 - iii. Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 4x^3 + \alpha x^2 + 16\beta x - 12$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -24
- i. Να βρεθούν οι τιμές των α , β .
 - ii. Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$
 - iii. Να γίνει το $P(x)$ γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων
 - iv. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$
 - v. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$
 - vi. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

24. Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x) = x^4 - (\alpha + 1)x^3 - (2\beta + 3\alpha)x^2 + (\alpha + 7)x + 10 + \beta$ το οποίο
διαίρεται με το $x + 1$ και το $x - 2$

- i. Να βρείτε τα α και β
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$
- iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$

25. Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x) = x^4 + \alpha x^3 - (6 - \alpha)x^2 + \beta x + 2\beta - 3\alpha + 1$ το οποίο έχει παράγοντα
το $x^2 - 1$

- iv. Να βρείτε τα α και β
- v. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$
- vi. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$

26. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 5^{2\lambda-1}x^3 - 2 \cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}}x^2 + 25^\lambda x - 1$

- i. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ να βρείτε το λ
- ii. Για $\lambda = \frac{1}{2}$ να αποδείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$ και
να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα
 $x'x$.

27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^3 - (\kappa + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$

- i. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$ να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$
- ii. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ με το $Q(x) = 2x + 1$ και να γράψετε
την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 7$

28. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + 2x^2 - \beta x + 3$

- i. Αν το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ να βρείτε τις τιμές των α και β
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$
- iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$

29. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 8$

- i. Αν το $(x - 2)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ να βρείτε τις τιμές των α και β
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$
- iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$

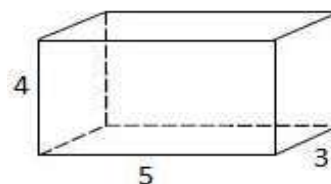
30. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2$. Αν το $x = -1$ είναι ρίζα με πολλαπλάσιο του 3
- Να βρείτε τα α, β, γ .
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
31. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ με την ιδιότητα $P(P(x)) = 9x - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι 1^{ου} βαθμού
 - Να βρείτε το $P(x)$
32. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $P(2x + 1) = 2P(x) + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $P(0) = 0$. Να υπολογιστεί το $P(15)$
33. Α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\alpha x + \beta, \alpha \neq 0$ είναι $v = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$
- Β) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = 8\mu x^3 + (\mu - 1)x + 3$ με το $2x + 1$ να είναι 5.
34. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$ να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(5x - 7)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.
35. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \sigma\eta\nu 2\theta \cdot x^2 + 6\eta\mu\theta \cdot x + \alpha$ με $\theta \in \mathbb{R}$
- Αν το x διαιρεί το $P(x)$ και αφήνει υπόλοιπο 4 δείξτε ότι $\alpha = 4$
 - Αν το $x + 1$ διαιρεί το $P(x)$ και αφήνει υπόλοιπο 6 να βρεθεί το θ .
 - Αν $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
36. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ιδιότητα $(x + 1)P(x) + (x - 1)P(x + 3) = 4x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $(x - 1)(x - 2)$
37. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$
- Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
38. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.
- Να υπολογίσετε την τιμή του α .
 - Για $\alpha = -4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
39. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.
- Να υπολογίσετε την τιμή του α .

- ii. Για $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$.
40. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.
- i. Να δείξετε ότι $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.
41. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- i. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$.
- ii. Αν $\lambda = 3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.
42. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$,
- i. να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$
- ii. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
43. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.
- i. Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$.
44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.
- i. Να βρείτε τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f , βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
45. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- i. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
46. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:
- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$
47. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\kappa - 6)x^2 - 7x + \kappa$.
- i. Να βρείτε για ποιιά τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.
- ii. Αν $\kappa = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

48. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$.

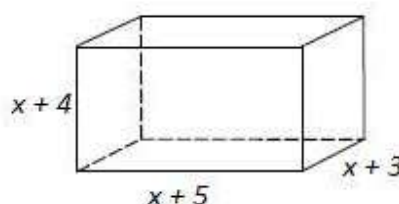
- Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και $P(2) = 10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$.

49. Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3 cm, 4 cm και 5 cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που



κατασκευάζει. Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x .

- Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.



(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$)

- Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

50. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

- Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.
- Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

51. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

- Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$.
- Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

52. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - 2(\lambda - 1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού.

- Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.
- Να βρείτε το $P(x)$.
- Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$.

53. Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x - 2)$ δίνει πηλίκο $(x^2 - 3x + 2)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό u .

- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.
- Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το u .
- Αν $u = 10$, να βρείτε το $P(x)$.

54. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30 \text{ cm}^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

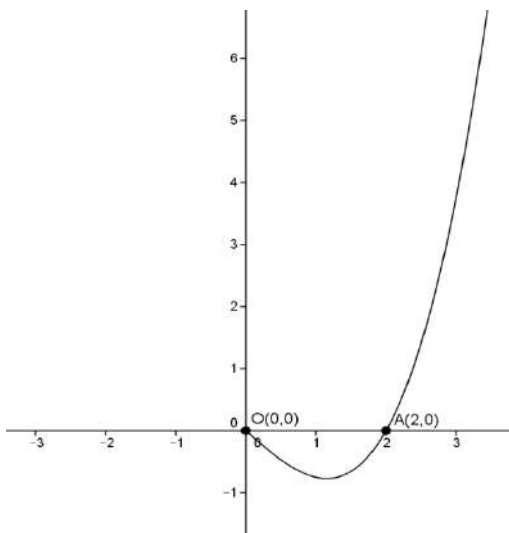
- i. Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y = \frac{60}{x}$ και $(x+1)^2 = x^2 + y^2$
- ii. Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$
- iii. Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
- iv. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

55. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \gamma x + \delta, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

γ, δ πραγματικές σταθερές.

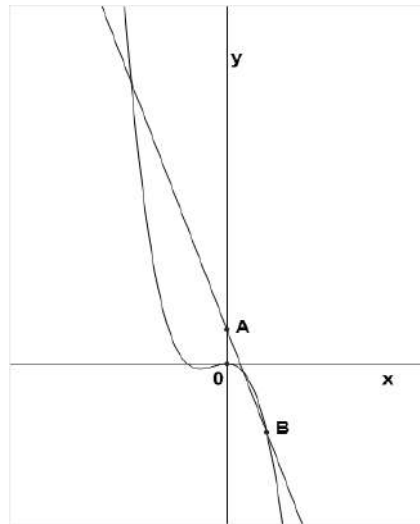
- i. Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$
- ii. Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$:
 - a. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - b. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$
 - c. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -\frac{3}{4}$ και $f(x) = \frac{3}{4}$



56. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.

- i. Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 8$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 2$.

57. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,-2)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.
 - Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f .
 - Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$



4.3. Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

➤ **Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές**

Υπάρχουν είδη εξισώσεων (κλασματικές, με ρίζες, τριγωνομετρικές...) που με κατάλληλους μετασχηματισμούς (ή μετασχηματισμό) η λύση τους ανάγεται στην λύση πολυωνυμικών εξισώσεων.

➤ **Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (≥ 0), (< 0), (≤ 0)**

Επειδή οι κανόνες προσήμων του γινομένου και του πηλίκου είναι ίδιοι μετατρέπουμε το πηλίκο σε γινόμενο και αναγόμεστε στην επίλυση γινομένου ανισώσεων. Δεν πρέπει να ξεχάσουμε τον περιορισμό ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδέν.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\frac{x}{x-2} + \frac{1-x}{x+2} - \frac{2}{4-x^2} = 0$

ii. $\sqrt{x+2} - 4 = 0$

iii. $\sqrt{x^2 - x + 6} = \sqrt{2x^2 + 3x + 4}$

iv. $\eta\mu^3 x = \sigma\upsilon\nu^2 x + 1$

Λύση

i.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2} + \frac{1-x}{x+2} - \frac{2}{4-x^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x}{x-2} + \frac{1-x}{x+2} - \frac{2}{(2-x)(2+x)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x}{x-2} + \frac{1-x}{x+2} + \frac{2}{(x-2)(2+x)} &= 0\end{aligned}$$

Περιορισμοί: Θα πρέπει $x \neq 2$ και $x \neq -2$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι: $(x-2)(x+2)$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με Ε.Κ.Π και έχουμε:

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2)\frac{x}{x-2} + (x-2)(x+2)\frac{1-x}{x+2} + (x-2)(x+2)\frac{2}{(x-2)(2+x)} &= 0 \\ (x+2)x + (x-2)(1-x) + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + 2x + x - x^2 - 2 + 2x + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ 5x &= 0 \Leftrightarrow \\ x &= 0\end{aligned}$$

Η λύση είναι δεκτή

ii. $\sqrt{x+2} - 4 = 0$

Για να ορίζεται θα πρέπει

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$x+2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x = 14$$



Η λύση είναι δεκτή

iii. $\sqrt{x^2 - x + 6} = \sqrt{2x^2 + 3x + 4}$

Θα πρέπει $x^2 - x + 6 \geq 0$ και $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$

Λύνοντας τις ανισώσεις έχουμε τις λύσεις

$x \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα. Επομένως $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 6}\right)^2 = \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + 6 = 2x^2 + 3x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -2 + 2\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = -2 - 2\sqrt{2}$$

iv. $\eta\mu^3 x = \sigma\upsilon\nu^2 x + 1$

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$

Άρα η εξίσωση γράφεται

$$\eta\mu^3 x = 1 - \eta\mu^2 x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $\eta\mu x = \omega$ και έχουμε

$$\omega^3 + \omega^2 - 2 = 0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm 1, \pm 2$

Με σχήμα Horner για $\rho = 1$ έχουμε

1	1	0	-2	1
	1	2	2	
1	2	2	0	

Άρα σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε

$$\omega^3 + \omega^2 - 2 = (\omega^2 + 2\omega + 2)(\omega - 1)$$

Επομένως

$$\omega^3 + \omega^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega^2 + 2\omega + 2)(\omega - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 + 2\omega + 2 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega - 1 = 0$$

$$\text{Αδύνατη} \quad \text{ή} \quad \omega = 1$$

$$\text{Άρα } \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x^2-1}$

ii. $\sqrt{2x+7} < \sqrt{1-4x}$

Λύση

i.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} &> \frac{3}{x^2-1} \Leftrightarrow \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} &> \frac{3}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x-1)(x+1)} &> 0 \end{aligned}$$

Περιορισμοί: Θα πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq -1$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι: $(x-1)(x+1)$

Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{1(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x-1)(x+1)} &> 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2(x+1) - 1(x-1) - 3}{(x-1)(x+1)} &> 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2x+2-x+1-3}{(x-1)(x+1)} &> 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} &> 0 \end{aligned}$$

Μετατρέπουμε το πηλίκο σε γινόμενο και έχουμε:

$$(x+1)(x-1)(x+1) > 0$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	-	+	
$x-1$	-	+	+	
$(x+1)(x-1)(x+1)$	-	-	+	

Άρα $x \in (1, +\infty)$

ii.

$$\sqrt{2x+7} < \sqrt{1-4x}$$

Περιορισμοί: Θα πρέπει $2x+7 \geq 0$ και $1-4x \geq 0$

$$x \geq -\frac{7}{2} \text{ και } x \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Επομένως } x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right]$$

Υψώνοντας και τα δυο μέλη στο τετράγωνο έχουμε:

$$(\sqrt{2x+7})^2 < (\sqrt{1-4x})^2 \Leftrightarrow$$

$$2x+7 < 1-4x \Leftrightarrow$$

$$6x < -6 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς έχουμε ότι

$$x \in \left[-\frac{7}{2}, -1\right)$$

3. Για τις διάφορες τιμές του λ να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x+4} = \lambda - 2$

Λύση

Περιορισμοί: Θα πρέπει $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

- Αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$ Η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ έχουμε:

$$\sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x+4 = 0 \Leftrightarrow$$

- Αν $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -2$ έχουμε:

$$\sqrt{x+4} = \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x+4})^2 = (\lambda - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 4 = (\lambda - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x = \lambda^2 - 4\lambda + 8$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i. } \frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{9-6x+x^2} = \frac{3}{2x^2+6x}$$

$$\text{ii. } \frac{x^2}{2x-4} = \frac{16}{x^2-4} + \frac{4}{x+2}$$

$$\text{iii. } \frac{6}{2x-1} - \frac{5}{2x+1} = \frac{1-8x}{1-4x^2}$$

$$\text{iv. } \frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$$

$$\text{v. } \frac{1}{x^2-1} - \frac{3}{x^3+x^2} + \frac{3}{x^3-x^2} = \frac{x^4+6}{x^4-x^2}$$

$$\text{vi. } \frac{x}{x^2-9} + \frac{3}{6x+2x^2} = \frac{1}{x^2+3x}$$

$$\text{vii. } \frac{x^2-4x+4}{x-1} + \frac{4-2x^2}{x^2-4x+3} = \frac{x^2}{x-3}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i. } (x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 4 = 0$$

$$\text{ii. } (x^2 - 5x + 2)^4 - 8(x^2 - 5x + 2)^2 + 16 = 0$$

$$\text{iii. } (x^2 + x - 1)^2 - 4(x^2 + x - 1) + 7 = 0$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i. } 2\eta\mu^3x + 5\eta\mu^2x + 5\eta\mu x + 2 = 0$$

$$\text{ii. } 2\sigma\upsilon\nu^4x - 3\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$$

$$\text{iii. } \sigma\upsilon\nu^6x - 4\sigma\upsilon\nu^3x + 3 = 0$$

$$\text{iv. } 2\eta\mu^4x - 3\eta\mu^3x - 3\eta\mu^2x - 3\eta\mu x + 4 = 0 \text{ με } x \in [0, \pi]$$

$$\text{v. } \eta\mu^3x + 4\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu x + 2 = 0$$

$$\text{vi. } 2\sigma\upsilon\nu^8x - 9\sigma\upsilon\nu^6x + 14\sigma\upsilon\nu^4x - 9\eta\mu^2x - 7 = 0$$

$$\text{vii. } 3\varepsilon\varphi^2x = \frac{16\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x} - 3$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i. } \sqrt{x-3} = 7$$

$$\text{ii. } \sqrt{6-x} = -3$$

$$\text{iii. } \sqrt{x-2} = 5$$

$$\text{iv. } \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+5}$$

$$\text{v. } \sqrt{2x+3} = x$$

$$\text{vi. } 2\sqrt{x+1} = x+1$$

vii. $\sqrt{2x-3} = x$

viii. $\sqrt{x-5} = 11-x$

ix. $\sqrt{x} = x$

x. $\sqrt{2x^2-3x+2} = x-4$

xi. $\sqrt{10+2x}-x = 1$

xii. $x + \sqrt{2-x} = 2$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$

ii. $x - \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x}$

iii. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$

iv. $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$

v. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

vi. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-5}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\sqrt{3x-1} = \sqrt{4x-3}$

ii. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-19} = 0$

iii. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+6} = 1$

iv. $\sqrt{x+9} = 6 - \sqrt{x-3}$

v. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

vi. $\sqrt{\sqrt{6x^2+1}+2x} = x+1$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $\frac{1}{x^2+3x} + \frac{x}{x^2-9} \geq \frac{3}{2x^2+6x}$

ii. $x^2 + \frac{2-x^2}{x-x^2} > \frac{x+1}{x-1} + \frac{3x^2}{1-x}$

iii. $x + \frac{2-x^2}{x-x^2} > \frac{x+1}{x-1} + \frac{3x^2}{1-x}$

iv. $5 + \frac{2x+4}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$

v. $\frac{x-3}{1-x} - \frac{2}{3-x} \leq \frac{4}{x^2-4x+3}$

vi. $\frac{3x^2-4}{2x-4} - \frac{8}{x^2-2x} \geq \frac{6x+4}{2x}$

8. Να λυθούν οι ανισώσεις

- i. $\sqrt{2x+3} \geq \sqrt{x-2}$
- ii. $\sqrt{x-2} < x$
- iii. $\sqrt{x+3} > 4-x$
- iv. $\sqrt{x+5} \leq x-1$
- v. $\sqrt{x^2-3x+2} < x-3$
- vi. $\sqrt{x-2} > x-4$

9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{3x^2 - x - 1}{x-1} + \frac{x^2 - 2}{x^2 - x}}$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$
- iv. Να αποδείξετε ότι τα διαγράμματα της f και της ευθείας $y = 7 - x$ τέμνονται στον άξονα $x'x$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

- i. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-9}$
- ii. $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+x} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+5}} = \frac{6}{5}$
- iii. $\sqrt{x-6} + \sqrt{x+15} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+6}$
- iv. $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} = 3 + \sqrt[3]{(x+7)(2-x)}$
- v. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{x-2} = 1$

12. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$

13. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

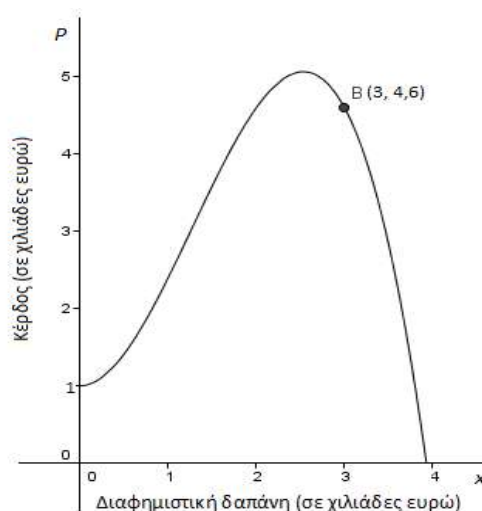
14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$,

$\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με -4 .
- ii. Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$

- a. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$
 - b. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$
 - c. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1$
15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- a) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι ίσο με -6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - b) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$
16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- i. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x + 2$.
 - ii. Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
 - iii. Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$
17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.
- i. Να βρείτε τις τιμές των α και β
 - ii. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε
 - a. την ανίσωση $P(x) \geq 0$
 - b. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$
18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
- i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
 - ii. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x - \alpha)$ διαιρεί το $P(x)$.
 - iii. Αν $\alpha = -1$, τότε:
 - a. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.
 - b. Να λύσετε την ανίσωση $(x + 1) P(x) \leq 0$.
19. Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $P(x) = -0,5x^3 + 1,9x^2 + 1$, $0 \leq x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.
- a) i. Να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.
 - ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

- β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ (Σ) – ΛΑΘΟΥΣ (Λ)

1. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Pi(x) = 2x^4 + 3x^2 + 5$ με το $x + 2$ είναι αρνητικός αριθμός.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Pi(x)$ με το x είναι το $\Pi(0)$.
3. Αν το $x - \rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$, τότε το $x + \rho$ είναι παράγοντας του $P(-x)$.
4. Αν το πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρείται με το $x - \rho$, τότε θα διαιρείται και με το $(x - \rho)^2$.
5. Ένα πολυώνυμο που διαιρείται με το x δίνει υπόλοιπο ίσο με τον σταθερό του όρο.
6. Αν ένα πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού διαιρείται με ένα 3^{ου} βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι 2^{ου} βαθμού.
7. Αν το 2 είναι ρίζα του $P(x)$, το $x + 2$ θα είναι παράγοντας του $Q(x) = P(-x) - x - 2$.
8. Στην τέλεια διαίρεση το υπόλοιπο είναι μηδενικού βαθμού.
9. Αν το α είναι παράγοντας του μ , τότε και το $x^\mu - \alpha^\mu$ είναι παράγοντας του $x^\mu - \alpha^\mu$ για κάθε $\mu, \alpha \in \mathbb{N}^*$.
10. Αν ο πραγματικός α είναι ρίζα του πολυωνύμου $R(x) = (P(x))^2 + (Q(x))^2$ τότε το $x - \alpha$ είναι παράγοντας των $P(x)$ και $Q(x)$.

Evariste Galois

Έχουν περάσει ακριβώς 160 χρόνια από τότε που σε ηλικία 20 ετών βρήκε τραγικό θάνατο ένα από τα μεγαλύτερα ονόματα στον κόσμο των μαθηματικών. Είχε μια ζωή τόσο σύντομη και τόσο βασανισμένη αυτή η εξαιρετική μεγαλοφυΐα που οι σπουδαίες του ανακαλύψεις του εξασφάλισαν μια θέση ανάμεσα στα μεγαλύτερα πνεύματα της ανθρωπότητας.

Ο Evariste Galois γεννήθηκε στις 25 Οκτωβρίου 1811 στο Bourg – la – Reine κοντά στο Παρίσι. Ο πατέρας του άνθρωπος ευχάριστος και πνευματώδης διατηρούσε ένα οικοτροφείο νέων.



Η μητέρα του κόρη ενός ειρηνοδίκη λάτρευε τον αρχαίο πολιτισμό.

Το 1823 ο δωδεκάχρονος Evariste εγκατέλειψε το πατρικό σπίτι για να μπει τέταρτος στο Κολλέγιο του Λουδοβίκου του Μεγάλου. Μεταξύ των μαθητών του Κολλεγίου αυτού επικρατούσε ένα πνεύμα έντονα δημοκρατικό από το οποίο ο Galois απορροφήθηκε ολοκληρωτικά. Εν τούτοις δύο χρόνια αργότερα όταν ήταν στη δεύτερα τάξη παρουσίασε μια κόπωση από τη σχολική εργασία και έμεινε στην ίδια τάξη. Τελικά έγινε ένας ιδιόρρυθμος μαθητής που αφιερωνόταν ολοκληρωτικά σε ένα μάθημα και αγνοούσε ένα άλλο που δεν τον ευχαριστούσε. Μένοντας στην ίδια τάξη ο Galois ακολούθησε την τάξη των Προπαρασκευαστικών Μαθηματικών. Εκεί τα Μαθηματικά του ήρθαν σαν αποκάλυψη. Τα σχολικά βιβλία δεν του έφθαναν πια και μελετούσε τις εργασίες του Lagrange. Πέτυχε ένα βραβείο. Η ανωτερότητα που ένοιωθε τον έκανε πολύ αλαζόνα και ο εύθυμος χαρακτήρας του άλλαξε. Έγινε ήρεμος και κλείστηκε στον εαυτό του.

Τον επόμενο χρόνο άρχισε Ρητορική αλλά και το δεύτερο χρόνο στα Μαθηματικά. Η επίδοσή του στα Μαθηματικά έφερνε σε αμηχανία τους δασκάλους του. Προπαρασκευάστηκε μόνος του για την Ecole Polytechnique χωρίς να πετύχει ούτε στο Τμήμα Στοιχειωδών Μαθηματικών, ούτε στο Τμήμα Ειδικών Μαθηματικών. Η αποτυχία του συνεπώς ήταν πλήρης και η διάψευση των ελπίδων του και η απογοήτευσή του υπήρξαν μεγάλες.

Μετά τη Ρητορική πήδησε στην τάξη των Στοιχειωδών Μαθηματικών και στο Τμήμα των Ειδικών Μαθηματικών βρήκε ένα δάσκαλο τον Louis-Paul- Emile Richard που αναγνώρισε τη μεγαλοφυΐα του και ο οποίος μάλιστα εισηγήθηκε να γίνει δεκτός ο Galois στην Ecole Polytechnique χωρίς εξετάσεις. Αν και η εισήγηση αυτή δεν έγινε δεκτή εν τούτοις υπήρξε μια μεγάλη ενθάρρυνση για τον Galois. Μάλιστα το 1829 όταν ο Galois ήταν ακόμα μαθητής δημοσίευσε την πρώτη εργασία του με τίτλο «Απόδειξη ενός Θεωρήματος στα συνεχή κλάσματα» στο περιοδικό Annales de mathématique pures et appliquées. Η εργασία αυτή βέβαια ήταν μικρή συμβολή συγκρινόμενη με τις μετέπειτα ανακαλύψεις του.

Τον ίδιο χρόνο έκανε σπουδαίες ανακαλύψεις στη Θεωρία των Εξισώσεων. Ο Cauchy επιφορτίστηκε να παρουσιάσει την εργασία αυτή στην Ακαδημία των Επιστημών αλλά το παραμέλησε και το χειρόγραφο χάθηκε. Νέες απογοητεύσεις και ατυχίες ακολούθησαν. Στο τέλος του 1829 ο Galois απέτυχε για δεύτερη φορά να εισαχθεί στην Ecole Polytechnique. Στο μεταξύ ο πατέρας του προσβλήθηκε από μανία καταδιώξεως και αυτοκτόνησε. Τούτο ήταν μεγάλο πλήγμα για τον νεαρό Evariste γιατί αγαπούσε ιδιαίτερα τον πατέρα του.

Απογοητευμένος και σε άσχημη ψυχολογική κατάσταση εγκατέλειψε τις προσπάθειές του να εισαχθεί στην Ecole Polytechnique και συγκατατέθηκε να εισαχθεί τον Οκτώβριο του 1829 στην

Ecole Preparatoire που αντικατέστησε την Ecole Normale . Η Ecole Normale που ιδρύθηκε από τον Ναπολέοντα είχε καταργηθεί το 1822. Η Ecole Preparatoire κατώτερη από την Ecole Polytechnique προπαρασκεύαζε νέους για επαγγελματικούς σκοπούς. Ο Galois δεν ταίριαζε σ αυτή τη Σχολή. Συνηθισμένος να εργάζεται εγκεφαλικά δεν μπορούσε να κρύψει την περιφρόνησή του για τους δασκάλους του, από τους οποίους ήταν πολύ ανώτερος.

Το 1830 γράφει τρεις εργασίες στη Θεωρία Εξισώσεων και παρουσιάζει το σύνολο των εργασιών για το Μεγάλο Βραβείο Μαθηματικών της Ακαδημίας Επιστημών . Ο μόνιμος γραμματέας Fourier πήρε την εργασία μαζί του για να την μελετήσει αλλά πέθανε πριν την διαβάσει. Το χειρόγραφο αυτό δεν ξαναβρέθηκε. Αυτό προκάλεσε ένα ξεχείλισμα της πικρίας σε αυτόν τον νεαρό άνδρα που η κοινωνία φάνηκε να τον καταδικάζει σε μια διαρκή άρνηση κρίσεως της μεγαλοφυΐας του.

Την ίδια εποχή στενοχωρήθηκε γιατί ήταν κλεισμένος στο κολλέγιο κατά την διάρκεια των τριών ημερών της Επαναστάσεως του Ιουλίου όπου οι μαθητές της Ecole Polytechnique έδιναν μάχη στα οδοφράγματα. Στο τέλος του 1830, εξ αιτίας ενός γράμματος που δημοσιεύθηκε στην εφημερίδα του Κολλεγίου και στο οποίο έκανε επίθεση εναντίον του διευθυντή της Ecole Preparatoire , αποβλήθηκε από αυτό το ίδρυμα. Αμέσως επωφελείται από την ελευθερία του και αρχίζει ένα δημόσιο μάθημα Ανωτέρας Άλγεβρας σε μια βιβλιοθήκη χωρίς όμως επιτυχία. Κατόπιν ρίχνεται στην πολιτική και παίρνει μέρος σε πολλές εκδηλώσεις. Η ελπίδα του για μια επανόρθωση από την Ακαδημία Επιστημών διαψεύδεται. Ο Poisson που ενδιαφέρθηκε για τον Galois τον συμβούλεψε να ξαναγράψει το χειρόγραφο, που χάθηκε από τον Fourier , και υποσχέθηκε να το παρουσιάσει στην Ακαδημία. Αλλά μετά τέσσερεις μήνες υπέβαλε την αναφορά του δηλώνοντας ότι το χειρόγραφο είναι ακατάληπτο.

Η απελπισία του δεν είχε όρια. Τότε περίπου σε μια εορταστική εκδήλωση σήκωσε στο ίδιο χέρι το ποτήρι του και ένα γυμνό μαχαίρι και αναφώνησε : «για τον Λουδοβίκο-Φίλιππο» (το βασιλιά). Ήταν η πρώτη φορά που η σκέψη ενός πολίτη εκφράστηκε δημόσια εναντίον του βασιλιά. Ο μύθος λέει ότι ο Αλέξανδρος Δουμάς , που ήταν παρών , πήδησε από το παράθυρο για να μη θεωρηθεί συνένοχος. Ο Galois συνελήφθηκε και παραπέμφθηκε σε δίκη. Εκεί στην απολογία του είπε ότι η πλήρης αναφώνηση ήταν στον «Λουδοβίκο – Φίλιππο αν καταπατήσει τον όρκο του» αλλά λόγω της φασαρίας δεν ακούστηκαν τα τελευταία λόγια. Αν και η υπεράσπισή του ήταν μάλλον ασθενής , το δικαστήριο τον απάλλαξε αλλά την ίδια μέρα τον κατάταξε στους επικίνδυνους. Ένα μήνα αργότερα , ο Galois συνελήφθηκε προληπτικά αλλά γρήγορα αποφυλακίσθηκε. Επί τρεις μήνες τον είχαν υπό επιτήρηση και κατόπιν τον συνέλαβαν για ασήμαντη αφορμή και τον καταδίκασαν σε 6 μήνες φυλακή. Στη φυλακή περνούσε τις ώρες του εργαζόμενος εγκεφαλικά και βηματίζοντας στην αυλή, συχνά προκαλώντας τους σαρκασμούς των

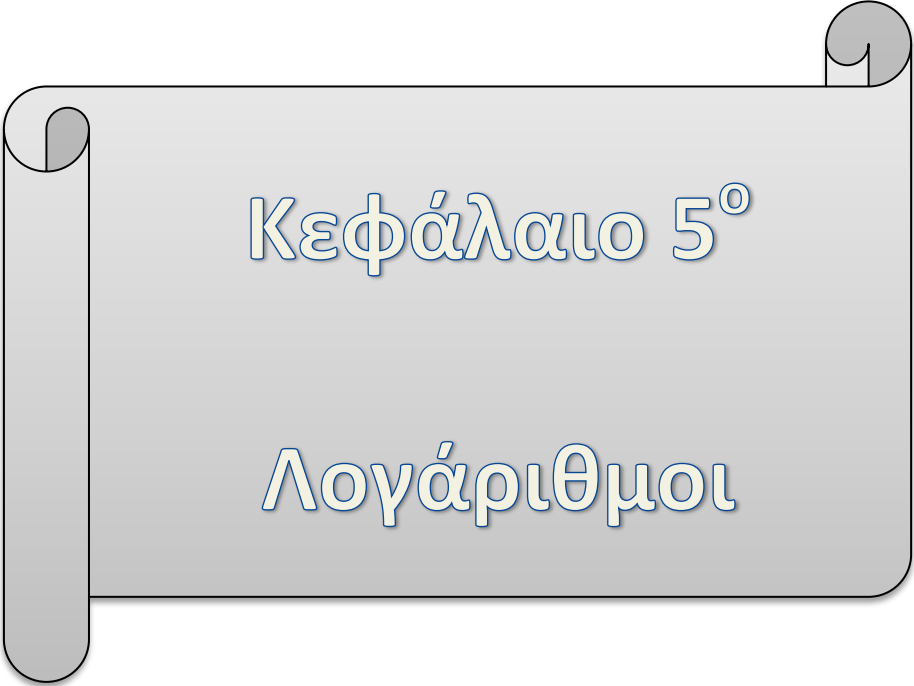
υπολοίπων φυλακισμένων. Λόγω κακής υγείας αποφυλακίσθηκε ένα μήνα πριν από την έκτιση της ποινής του, το Μάρτιο του 1832, και εστάλη σε σανατόριο υπό επιτήρηση, για το υπόλοιπο της ποινής του.

Αυτό το μέτρο επιείκειας έφερε την καταστροφή του. Αυτός, που κατά τη διάρκεια του περιορισμού του δήλωνε ότι δεν θα παντρευόταν παρά μόνο μια σπουδαία γυναίκα, έπεσε στα χέρια μιας κοινής γυναίκας της κατώτερης υποστάθμης. Εκτός από την άθλια ζωή, που έζησε για λίγο, όπως φαίνεται από μια επιστολή που έγραψε στο φίλο του Auguste Chevalier ο δεσμός αυτός είχε ως αποτέλεσμα και μια πρόκληση σε μονομαχία. Η μονομαχία επρόκειτο να γίνει το πρωί της 30 Μαΐου. Στις 29 Μαΐου ο Galois εξαθλιωμένος και μύωπας χωρίς να τρέφει αυταπάτες ως προς τη μοιραία έκβαση, έγραψε βιαστικά μια περίληψη των κυρίων ερευνών του. Αυτή η κατά κάποιο τρόπο επιστημονική του διαθήκη απευθύνεται προς το φίλο του Auguste Chevalier. Σ' αυτή βρίσκει κανείς τη πρώτη από τις τρεις εργασίες «Επί των συνθηκών επιλύσεως των εξισώσεων με ριζικά» που αναφέραμε παραπάνω. Ο Galois φαίνεται ότι ξαναδιάβασε αυτή την εργασία για να τη διορθώσει πριν πάει στο μέρος της μονομαχίας γιατί στο περιθώριο γράφει βιαστικά ότι πρέπει να συμπληρωθούν ορισμένα πράγματα αλλά δεν έχει το χρόνο που χρειάζεται στη διάθεσή του. Το γράμμα του προς τον Chevalier τελείωνε με τις λέξεις: «Ρώτησε τον Jacobi ή τον Gauss να πούν δημόσια τη γνώμη τους, όχι για την ορθότητα, αλλά τη σπουδαιότητα αυτών των θεωρημάτων. Αργότερα θα βρεθούν, ελπίζω, μερικοί που θα το θεωρήσουν σκόπιμο να διαβάσουν και να τακτοποιήσουν όλα αυτά...»

Μετά την επιστημονική διαθήκη ο Galois έγραψε δύο γράμματα αποχαιρετιστήρια, στο ένα από τα δύο δείχνει τα συναισθήματά του για την επικείμενη μονομαχία. Εκεί φαίνεται ότι κατά τη γνώμη του πεθαίνει για ένα πολύ ασήμαντο λόγο. Την επομένη το πρωί βλήθηκε στην κοιλιά. Μεταφέρθηκε στο Νοσοκομείο, όπου όπως λέγεται, δέχθηκε, την επίσκεψη του μικρού του αδελφού.

«Μη κλαις, του είπε, έχω ανάγκη όλου μου του θάρρους για να πεθάνω στα είκοσί μου χρόνια»

Το βράδυ της ίδιας μέρας παρουσιάσθηκε μια περιτονίτιδα και στις 2 η ώρα το πρωί της 31 Μαΐου 1832 ο Galois πέθανε πριν συμπληρώσει τα 21 χρόνια. Έτσι τερματίσθηκε μια ζωή τόσο σύντομη και τόσο ταραχώδης ενός ανθρώπου που οι ανακαλύψεις του σημείωσαν ένα τεράστιο άλμα στην πρόοδο των Μαθηματικών.



Κεφάλαιο 5^ο

Λογάριθμοι

5.1. Εκθετική συνάρτηση

➤ Ορισμοί δυνάμεων

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

Αν $\alpha > 0$, με $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

➤ Ιδιότητες δυνάμεων

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε:

- i. $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$
- ii. $\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \alpha^{x_1-x_2}$
- iii. $a^x \cdot \beta^x = (a \cdot \beta)^x$
- iv. $a^x : \beta^x = \frac{a^x}{\beta^x} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^x$
- v. $(a^x)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- vi. $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-x} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^x$

➤ Εκθετική συνάρτηση

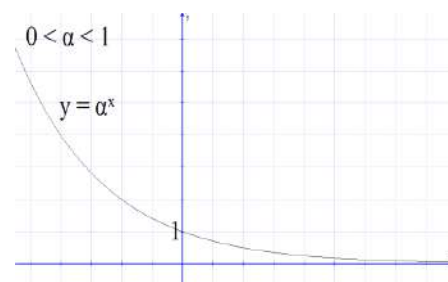
Εκθετική συνάρτηση με βάση α ($0 < \alpha < 1$) λέγεται η συνάρτηση f στην οποία κάθε x αντιστοιχεί στο θετικό αριθμό α^x δηλαδή $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ με $f(x) = \alpha^x$

✓ Αν $\alpha = 1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 1$ (σταθερή συνάρτηση)

➤ Μελέτη της $f(x) = \alpha^x$

Αν $0 < \alpha < 1$ έχει:

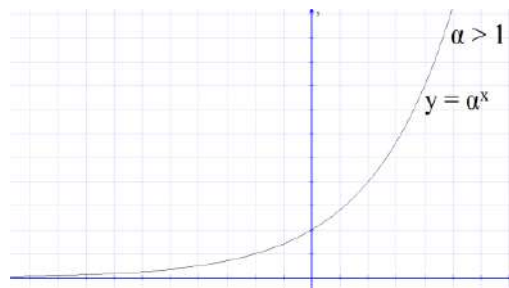
- Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$
- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $(0,1)$
- Η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα του Ox



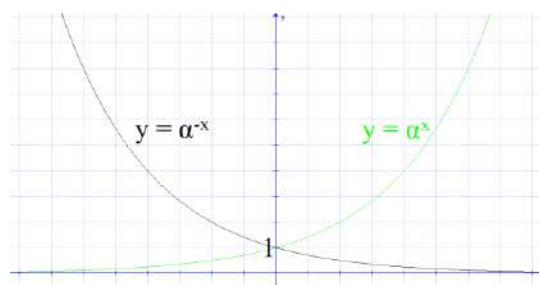
- Είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ δηλαδή $a^{x_1} > a^{x_2}$

Αν $a > 1$ έχει:

- Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$
- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$
- Η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα του Ox'
- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ δηλαδή $a^{x_1} < a^{x_2}$



- ✓ Οι συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = a^{-x}$ έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ αφού $g(x) = f(-x)$



➤ Εκθετική εξίσωση

Εκθετική εξίσωση λέγεται η εξίσωση στην οποία ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη.

- ✓ Ισχύει η ισοδυναμία $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

➤ Ο αριθμός e

Ο e είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει $e = 2,71828$

➤ Η συνάρτηση $Q(t) = Q_0 \cdot e^{c \cdot t}$

Η συνάρτηση $Q(t) = Q_0 \cdot e^{c \cdot t}$ ονομάζεται **Νόμος της εκθετικής μεταβολής**

Το Q_0 είναι η αρχική τιμή του Q (για $t = 0$) και είναι πάντα θετικό, δηλαδή

$Q_0 > 0$ ενώ το c είναι μια σταθερά

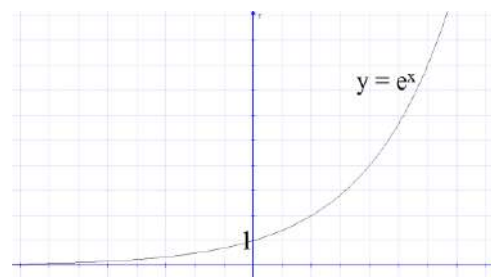
- ✓ Αν $c > 0$ η συνάρτηση $Q(t)$ είναι γνησίως αύξουσα (εκθετική)
- ✓ Αν $c < 0$ η συνάρτηση $Q(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα (εκθετική απόσβεση)

➤ **Ημιζωή ή χρόνος υποδιπλασιασμού ουσίας**

Ο χρόνος που χρειάζεται να διασπαστεί η εξαφανιστεί η μισή ποσότητα μίας ραδιενεργούς ουσίας λέγεται **ημιζωή ή χρόνος υποδιπλασιασμού** της ουσίας.

➤ **Εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$**

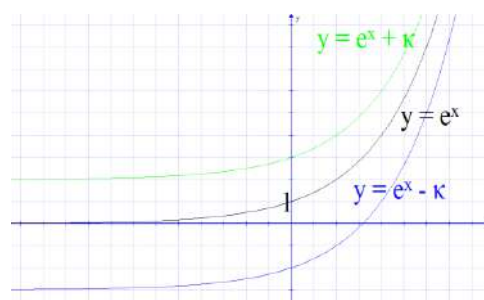
Για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ η οποία έχει βάση $e > 1$ ισχύουν όλες οι ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$ με $a > 1$.



➤ **Εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x + \kappa$ με $a > 1$**

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $(x) = a^x + \kappa$ με $a > 1$ προκύπτει από **κατακόρυφη** μετατόπιση της a^x κατά κ μονάδες

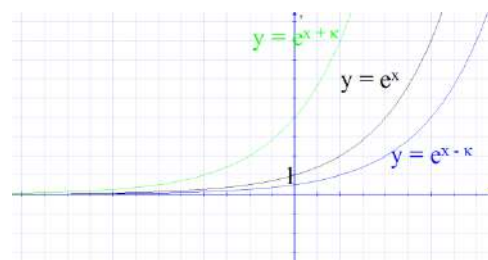
- i. προς τα πάνω αν $\kappa > 0$
- ii. προς τα κάτω αν $\kappa < 0$



➤ **Εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^{x+\kappa}$ με $a > 1$**

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^{x+\kappa}$ με $a > 1$ προκύπτει από **οριζόντια** μετατόπιση της a^x κατά κ μονάδες

- i. προς τα αριστερά αν $\kappa > 0$
- ii. προς τα δεξιά αν $\kappa < 0$



Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $3^x = 81$

ii. $e^{3x-1} = 1$

iii. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \frac{8}{27}$

iv. $2^{x^2-1} = 4^{x+1}$

Λύση

i. $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

ii. $e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = e^0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

iii. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow 2x + 1 = -3 \Leftrightarrow$
 $x = -2$

iv. $2^{x^2-1} = 4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x^2-1} = (2^2)^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x^2-1} = 2^{2x+2} \Leftrightarrow$
 $x^2 - 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ ή } x_2 = -1$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

ii. $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$

Λύση

i. Θέτουμε $5^x = \omega$ άρα η εξίσωση γράφεται:

$$\omega^2 - 6\omega + 5 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 5 \text{ ή } \omega_2 = 1$$

$$\text{Άρα } 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } 5^x = 1 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$$

ii. Η εξίσωση γράφεται $3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$

Θέτουμε $3^x = \omega$ άρα η εξίσωση γράφεται:

$$3\omega^2 - 28\omega + 9 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 9 \text{ ή } \omega_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

3. Να λυθεί η εξίσωση $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$

Λύση

$$\begin{aligned}
 21 \cdot 3^x + 5^{x+3} &= 3^{x+4} + 5^{x+2} \Leftrightarrow \\
 21 \cdot 3^x - 3^{x+4} &= 5^{x+2} - 5^{x+3} \Leftrightarrow \\
 21 \cdot 3^x - 3^4 \cdot 3^x &= 5^2 \cdot 5^x - 5^3 \cdot 5^x \Leftrightarrow \\
 21 \cdot 3^x - 81 \cdot 3^x &= 25 \cdot 5^x - 125 \cdot 5^x \Leftrightarrow \\
 3^x \cdot (21 - 81) &= 5^x \cdot (25 - 125) \Leftrightarrow \\
 -60 \cdot 3^x &= -100 \cdot 5^x \Leftrightarrow \\
 \frac{3^x}{5^x} &= \frac{-100}{-60} \Leftrightarrow \\
 \left(\frac{3}{5}\right)^x &= \frac{5}{3} \Leftrightarrow \\
 \left(\frac{3}{5}\right)^x &= \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow \\
 x &= -1
 \end{aligned}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{\alpha-3}\right)^x$. Να βρεθούν οι τιμές του α με $\alpha \neq 3$ για

τις οποίες η f είναι:

- i. Γνησίως αύξουσα
- ii. Γνησίως φθίνουσα

Λύση

- i. Η f είναι γνησίως αύξουσα όταν ισχύει $\frac{2-\alpha}{\alpha-3} > 1$

$$\text{Έχουμε } \frac{2-\alpha}{\alpha-3} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2-\alpha}{\alpha-3} - 1 &> 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{2-\alpha}{\alpha-3} - \frac{\alpha-3}{\alpha-3} &> 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{2-\alpha-\alpha+3}{\alpha-3} &> 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{5-2\alpha}{\alpha-3} &> 0 \Leftrightarrow \\
 (5-2\alpha)(\alpha-3) &> 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{5}{2} &< \alpha < 3
 \end{aligned}$$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν ισχύει $0 < \frac{2-\alpha}{\alpha-3} < 1$

$$\text{Έχουμε } \frac{2-\alpha}{\alpha-3} > 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(\alpha-3) > 0 \Leftrightarrow 2 < \alpha < 3$$

$$\frac{2-\alpha}{\alpha-3} < 1$$

$$\frac{2-\alpha}{\alpha-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-\alpha}{\alpha-3} - \frac{\alpha-3}{\alpha-3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-\alpha-\alpha+3}{\alpha-3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5-2\alpha}{\alpha-3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$(5-2\alpha)(\alpha-3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha < \frac{5}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha > 3$$

Από συναλήθευση των ανισώσεων $2 < \alpha < 3$ και $\alpha < \frac{5}{2}$ ή $\alpha > 3$

έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν $\alpha \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις

i. $2^{|x|} > 1024$

ii. $e^{3x+1} > e^{-4x+8}$

iii. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} > \frac{1}{9}$

Λύση

i. $2^{|x|} > 1024 \Leftrightarrow 2^{|x|} > 2^{10} \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow x > 10 \quad \text{ή} \quad x < -10$

ii. $e^{3x+1} > e^{-4x+8} \Leftrightarrow 3x+1 > -4x+8 \Leftrightarrow 7x > 7 \Leftrightarrow x > 1$

iii. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2x-5 < 2 \Leftrightarrow 2x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$

6. Η αξία μιας τηλεόρασης στην αρχή της πώλησης της είναι 3125€ και

ελαττώνεται κατά 20% το χρόνο στα 5 πρώτα χρόνια από την πώλησή της

i. Να βρείτε την συνάρτηση που δίνει την τιμή της τηλεόρασης μέσα στα 5 χρόνια

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της τηλεόρασης στο τέλος του 5^{ου} χρόνου.

- iii. Να βρείτε πόσα χρόνια το πολύ η αξία της τηλεόρασης είναι τουλάχιστον τα $\frac{16}{25}$ της αρχικής της αξίας.

Λύση

- i. Η αξία της τηλεόρασης στο τέλος

$$\text{Του } 1^{\text{ου}} \text{ χρόνου είναι } Q(1) = 3125 - 3125 \cdot \frac{20}{100} = 3125 \cdot \frac{4}{5}$$

$$\text{Του } 2^{\text{ου}} \text{ χρόνου είναι } Q(2) = Q(1) \cdot \frac{4}{5} = 3125 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

.....

$$\text{Του } t \text{ χρόνου είναι } Q(t) = 3125 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

$$\text{Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι } Q(t) = 3125 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \text{ με } 0 \leq t \leq 5$$

- ii. Η αξία της τηλεόρασης στο τέλος του $5^{\text{ου}}$ χρόνου θα είναι

$$Q(5) = 3125 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1024\text{€}$$

- iii. Είναι $Q(t) > \frac{16}{25} \cdot 3125 \Leftrightarrow 3125 \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 3125 \frac{16}{25} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$
 $t \leq 2$

$$\text{Άρα } t = 2$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
 - i. $f(x) = 5^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
 - ii. $f(x) = 3^x$ και $g(x) = 3^x + 1$
 - iii. $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{x-2} + 1$
2. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$
3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (\alpha^2 - \alpha)^x$. Για ποια από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι:
 - i. Γνησίως αύξουσα
 - ii. Γνησίως φθίνουσα
4. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = (5 - \lambda^2)^x$ με $5 - \lambda^2 \neq 1$
 - i. Για ποιες τιμές του λ ορίζεται η συνάρτηση
 - ii. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - iii. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A\left(1, \frac{1}{5}\right)$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^x$
 - i. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.
 - ii. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - iii. Αν $\alpha = 11$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1-5\alpha}{\alpha+1}\right)^x$
 - i. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.
 - ii. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - iii. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

7. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha-2}\right)^x$

- i. Ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- iii. Είναι φθίνουσα αύξουσα στο $\mathbb{R}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{4-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i. Τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f
- ii. Για ποιες από τις παραπάνω τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα
- iii. Την τιμή του α για την οποία η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'g$ της γραφικής παράστασης $g(x) = 2^x$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

- i. $3^x = 27$
- ii. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$
- iii. $3^{2x} = \frac{1}{81}$
- iv. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \frac{1}{9}$
- v. $2^{-x} = 32$
- vi. $\frac{1}{2^x} = 16$
- vii. $2^{3x} = 512$
- viii. $2^{-x} = \frac{1}{64}$
- ix. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$
- x. $2^{x^2-5x+6} = 1$
- xi. $3^{x^2-5x+11} = 243$
- xii. $64^{\frac{x}{3}} = 128$
- xiii. $7^{\eta\mu 2x} = 49^{\sigma\upsilon\nu x}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

- i. $2^{x^2-2x} = 8^{x-2}$
- ii. $3^x = 81^{2-|x|}$
- iii. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-5}$
- iv. $6^{x^2-5x+9} = 216$
- v. $\left(\frac{4}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^{x-1} = \frac{32}{81}$
- vi. $(\sqrt{3})^{2x^2+4} = 9^{x^2-x-3}$
- vii. $25^{3x-7} = 125^{1+4x}$
- viii. $2^{x^2-2x-3} = 1$
- ix. $5^{2x} - 5^x = 0$
- x. $4^{3x} - 4^x = 0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $(3^{x^2-9})^{x-2} = 1$
- ii. $2^{x^2-6} \cdot 3^{x^2-6} = \frac{1}{6^5} (6^{x-1})^4$
- iii. $2^{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{2}$
- iv. $3^{\eta\mu 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- v. $3^{\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x} = 9^{1-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$
- vi. $9^{\sigma\upsilon\nu^2 x+1} = 27 \cdot 3^{\eta\mu x}$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x - 6 = 0$

ii. $3^x - 4 \cdot \sqrt{3^x} + 3 = 0$

iii. $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$

iv. $9^x - 3^{x+1} - 3^x + 3 = 0$

v. $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

vi. $2^{2x+2} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

vii. $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$

viii. $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$

ix. $e^{2x} + 3 = 4e^{-2x}$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

ii. $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

iii. $5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6$

iv. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

v. $5^{x-1} - 2 = \frac{3}{5^{x-2}}$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $5 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 25^x = 8 \cdot 15^x$

ii. $6 \cdot 9^x + 7 \cdot 4^x = 13 \cdot 6^x$

iii. $2 \cdot 49^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 7 \cdot 4^{x^2} = 0$

iv. $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 128$

v. $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$

vi. $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

vii. $x \cdot e^{x+1} - x^3 \cdot e^x = 0$

viii. $3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\frac{2}{9^{x-1}} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3^{x-1}}$

ii. $6^x - 9 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x - 18$

iii. $\frac{4}{4^{x+2} - 2} + \frac{2^{x+3}}{2^{x+2}} = \frac{2^{x+2}}{2^{x+1} - 2}$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $2^x < 8$

ii. $3^{x^2} - 27 > 0$

iii. $e^{2x} + 1 > 0$

iv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \leq 8$

v. $\left(\frac{2}{\pi}\right)^x \geq \frac{\pi^3}{8}$

vi. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-|x|} > 2$

vii. $3^{x+1} + 9 > 30 \cdot 3^x$

viii. $\left(\frac{4}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{x-1} \leq \frac{2}{5}$

ix. $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x^2+5x-12} \leq 1$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $\left(\frac{e^x-1}{e^{x+2}}\right) > 0$

iii. $\frac{2^x-4}{2^x-8} \leq 0$

ii. $(e^x + 3)(e^x - 1) > 0$

iv. $e^x - e^{-x} < 0$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $27^{\frac{x+1}{x-2}} < 3^{2x-4}$

v. $e^{2x} - (1+e)e^x + e > 0$

ii. $e^{-x} + e^x - e \geq \frac{1}{e}$

vi. $e^{2x} + e^x - 2 > 0$

iii. $\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2 \cdot 4^x} > 1$

iv. $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$

19. Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $27^x + 12^x - 2 \cdot 8^x > 0$

ii. $3 \cdot 8^x - 3 \cdot 12^x + 2 \cdot 18^x > 2 \cdot 27^x$

20. Να λυθούν τα συστήματα

i. $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

v. $\begin{cases} 9^{2x+1} = 81 \cdot 3^{4y-1} \\ 2 \cdot 2^{x-y} = 2^{2y+1} \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-2} \cdot 9^{\frac{y}{2}-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$

vi. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 4^x - 9^y = -17 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 9^{x-1} = 3^{y+3} \\ 4^{x-y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$

vii. $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 9 \\ 2^x - 3^y = 7 \end{cases}$

21. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3-\lambda}{1+\lambda}\right)^x$

i. Για ποιες τιμές του λ ορίζεται η συνάρτηση

ii. Για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

iii. Για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

iv. Αν $\lambda = 2$ να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + x - 1) > \frac{3-\lambda}{1+\lambda}$

22. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = (3 + \alpha)^x$

i. Για ποιες τιμές του α ορίζεται η συνάρτηση

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f

iii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$

iv. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

- v. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.
- vi. Αν $\alpha \in (-3, -2)$ να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + x) \geq f(3 - x)$

23. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4^x + \lambda$ διέρχεται από το σημείο

$$A\left(3\eta\mu\frac{29\pi}{6}, 11\right).$$

i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \eta\mu^2 x + f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 56(1 - \sigma\upsilon\nu x).$$

24. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων ψεκάζεται με αποτέλεσμα μετά από μια ώρα να έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ του αρχικού πληθυσμού των βακτηριδίων ενώ μετά από δυο ώρες να έχουν απομείνει 2 εκατομμύρια βακτηρίδια

- i. Πόσα βακτηρίδια υπήρχαν πριν από το ψεκασμό αν γνωρίζουμε ότι η θνησιμότητα των βακτηριδίων ακολουθεί κανονική κατανομή;
- ii. Ποια συνάρτηση δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων την κάθε χρονική στιγμή t όπου t ο χρόνος σε ώρες.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

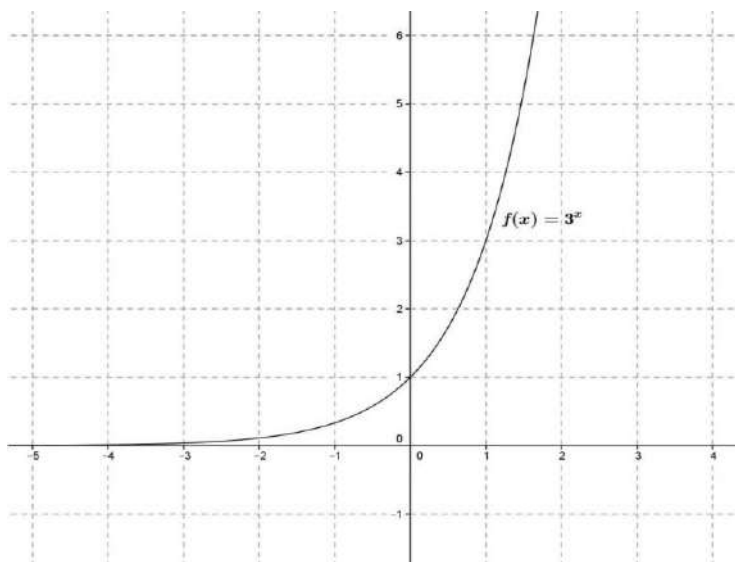
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- ii. Αν $g(x) = 2[f(x)]^2 + f(x) - 1$ να αποδείξετε ότι $g(x) = f(2x) + f(x)$
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x + 1) + f(x) = 0$ είναι αδύνατη

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(x+1)e^x - 1}{e^x}$ και $g(x) = x$

- i. Να εξετάσετε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .
- ii. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας.

27. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3x + 1$ και $h(x) = 3x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h ;



28. Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.

29. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί α , q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

- α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.
- β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$
 - Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές συναρτήσεως της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

- γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της $4^{\text{ης}}$ ημέρας είναι 25 mg.
- Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$

30. Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$). Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι: $Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2} \ln 2}$
- β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$.
- β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$.

32. Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$).

- α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής

ποσότητας, να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

- β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε.
- γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

5.2. Λογάριθμοι

➤ Ορισμός λογαρίθμου

Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ ως προς βάση α με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ συμβολίζεται με $\log_{\alpha} \theta$ και ορίζεται ως ο πραγματικός αριθμός x στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α ώστε να βρούμε το θ . Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

$$\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$$

➤ Συνέπειες του ορισμού

Ισχύει ότι:

$$\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$$

$$\log_{\alpha} 1 = 0$$

$$\log_{\alpha} \alpha = 1$$

$$\log_{\alpha} \alpha^x = x$$

➤ Ιδιότητες λογαρίθμου

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
2. $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
3. $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} \theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έστω ότι είναι:

$$\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_1 + x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$$

2. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο
3. Έστω ότι είναι:

$$\log_{\alpha} \theta = x \quad (2)$$

τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε:

$$\alpha^{kx} = \theta^k$$

Από τον ορισμό όμως του λογαρίθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_{\alpha} \theta^k = k \cdot x$$

από την οποία, λόγω της (2) προκύπτει ότι:

$$\log_{\alpha} \theta^k = k \cdot \log_{\alpha} \theta$$

➤ Δεκαδικοί λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό $\alpha = 10$ λέγονται **δεκαδικοί λογάριθμοι** και συμβολίζονται με ***log*θ**.

Δηλαδή $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$.

➤ Φυσικοί ή Νεπέριοι λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό $\alpha = e$ λέγονται **φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι** και συμβολίζονται με ***ln*θ**. Δηλαδή $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να υπολογίσεις τους λογάριθμους

i. $\log_3 81$

ii. $\log_8 \sqrt{2}$

Λύση

i. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$

$$\begin{aligned} \text{iii. Έστω } \log_8 \sqrt{2} = x &\Leftrightarrow 8^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow (2^3)^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. Να αποδείξετε ότι

i. $\log 4 + \log 20 - 3\log 2 = 1$

ii. $3\log_2 6 - 2\log_2 12 - 3\log_2 16 - \log_2 3 = -13$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i. } \log 4 + \log 20 - 3\log 2 &= \\ \log(4 \cdot 20) - \log 2^3 &= \\ \log 80 - \log 8 &= \\ \log \frac{80}{8} &= \\ \log 10 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } 3\log_2 6 - 2\log_2 12 - 3\log_2 16 - \log_2 3 &= \\ 3\log_2(2 \cdot 3) - 2\log_2(3 \cdot 2^2) - 3\log_2 2^4 - \log_2 3 &= \\ 3\log_2 2 + 3\log_2 3 - 2\log_2 3 - 2\log 2^2 - 12\log_2 2 - \log_2 3 &= \\ 3\log_2 2 + 3\log_2 3 - 2\log_2 3 - 4\log_2 2 - 12\log_2 2 - \log_2 3 &= \\ 3 - 4 - 12 &= -13 \end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

i. $4^{2-\frac{3}{2}\log_2 3}$

ii. $49^{\frac{1}{2}\log_7 20-1}$

Λύση

i. $4^{2-\frac{3}{2}\log_2 3} =$

$$(2^2)^{2-\frac{3}{2}\log_2 3} =$$

$$2^{4-3\log_2 3} =$$

$$2^{4\log_2 2-3\log_2 3} =$$

$$2^{\log_2 2^4-\log_2 3^3} =$$

$$2^{\log_2 16-\log_2 27} =$$

$$2^{\log_2 \frac{16}{27}} =$$

$$\frac{16}{27}$$

ii. $49^{\frac{1}{2}\log_7 20-1} =$

$$(7^2)^{\frac{1}{2}\log_7 20-1} =$$

$$7^{\log_7 20-2} =$$

$$7^{\log_7 20-2\log_7 7} =$$

$$7^{\log_7 20-\log_7 49} =$$

$$7^{\log_7 \frac{20}{49}} =$$

$$\frac{20}{49}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Για ποιες τιμές του x ισχύει:

i. $\log_3 x = 2$

iv. $\ln x = 3$

ii. $\log x = 2$

v. $\ln x = -\frac{2}{3}$

iii. $\log x = -2$

2. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους

i. $\log_5 25$

x. $\log_{10} 0,01$

ii. $\log_{\frac{1}{2}} 128$

xi. $\log \sqrt{10\sqrt{10}}$

iii. $\log_{\sqrt{3}} 81$

xii. $\log_{\eta\mu} \frac{\pi}{2}$

iv. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

xiii. $\ln e^e$

v. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$

xiv. $\log_4 \sin \frac{\pi}{3}$

vi. $\log_{\frac{1}{2}} 64$

xv. $\log_{\sqrt{3}} \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6}$

vii. $\log_2 \frac{1}{\sqrt{32}}$

xvi. $\log_{\sqrt{3}} (9\sqrt{3})$

viii. $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

xvii. $\log_{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{27}{125}}$

ix. $\log_{\frac{1}{3}} 27$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $2\log 5 + 3\log 2 - \log 60 + \log 3 =$

ii. $3\log_3 2 + 2\log_3 6 - \log_3 4 - \log_3 8 =$

iii. $\frac{1}{2}\log 81 + \frac{1}{3}\log 125 - \frac{1}{5}\log 243 =$

iv. $4\log 2 + 3\log 3 - 2\log 6 =$

v. $4\log_3 4 - 3\log_3 12 + 4\log_3 3 - \log_3 4 =$

vi. $\log 5 + 3\log 2 - \log 4 =$

4. Να υπολογίσετε τους επόμενους λογάριθμους:

i. $3\log 2 + \log 125$

ii. $2\log 5 + \log 20 + \log 2$

iii. $2\log 40 - 4\log 2$

iv. $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

- i. $\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) =$
- ii. $\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) \cdot \log\left(\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \cdot \log\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) =$
- iii. $2\log_2(2 - \sqrt{2}) + \log_2(6 + 4\sqrt{2}) =$
- iv. $2\log 4 + \log 3 - \log 12 =$
- v. $7\log\frac{16}{15} + 5\log\frac{25}{24} + 3\log\frac{81}{80} =$
- vi. $\frac{2 + \log_5 8 - 2\log_5 10}{\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{2}} =$
- vii. $\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{3}\ln 64 + \ln 4 =$

6. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

- i. $\log_7 5 + \log_7 \frac{3}{25} - \log_7 9$
- ii. $e^{\ln 2 - 2\ln 3}$
- iii. $3^{\log_3 5 + \log_3 2}$
- iv. $2^{5 - \log_2 6}$
- v. $49^{\log_7 14 - \frac{1}{2}\log_7 4}$
- vi. $81^{\frac{3}{4}\log_3 18 - 2}$

7. Να κάνετε τις πράξεις

- i. $10^{2\log 2 + \log 5 - 1}$
- ii. $2^{3 + \log_2 3}$
- iii. $e^{2 - \ln 5}$
- iv. $\frac{8^{1 + \log_2 5}}{3^{\log_3 8 - \log_3 2} \cdot 100^{\frac{1}{2}\log \sqrt{2}}}$

8. Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $\log \frac{1}{x+1}$, $\log \sqrt{5x}$, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

9. Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $\log 2^{x-2}$, $\log \sqrt{5^x + 2^{x-3}}$, $\log 63$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

10. Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$

- i. Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με την διαφορά ω
- ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$

- iii. Έστω (β_n) γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$ όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να βρείτε το άθροισμα

$$B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$$

11. Να αποδείξετε ότι

$$\ln \sqrt[5]{e} - \ln \frac{1}{e} - \ln(\log 10) + \ln \sqrt{e} + \ln(\ln e) + \ln 10^{\log e} - \ln(\log(\log 10^{10})) = \frac{27}{10}$$

12. Να αποδείξετε ότι δυο αντίστροφοι θετικοί αριθμοί έχουν αντίθετους λογαρίθμους.

13. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$ να αποδειχθεί ότι

$$\log \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta)$$

14. Αν $x^2 + 4y^2 = 12xy$ να αποδειχθεί ότι $\ln(x + 2y) - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y)$
 $x, y > 0$.

15. Να αποδειχθεί $\log_a e \varphi 1^0 + \log_a e \varphi 2^0 + \dots + \log_a e \varphi 89^0 = 0$

5.3. Λογαριθμική συνάρτηση

➤ Λογαριθμικές συναρτήσεις

Έστω α θετικός αριθμός, διάφορος του 1. Αν στον θετικό αριθμό x αντιστοιχίσουμε τον $\log_{\alpha} x$ τότε ορίζεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_{\alpha} x$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α**

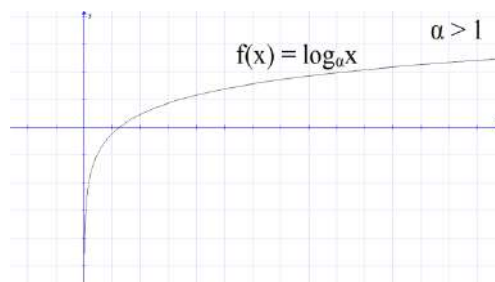
Ομοίως ορίζονται οι συναρτήσεις:

- $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log x$ που είναι η **λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10**.
- $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ που είναι η **λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e** .

➤ Μελέτη της $f(x) = \log_{\alpha} x$

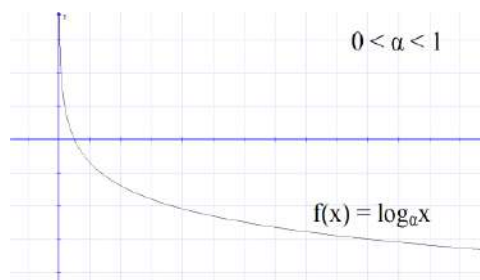
Αν $\alpha > 1$ τότε για την λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$ έχουμε:

- Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
- Είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ δηλαδή $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2$
- Η γραφική παράστασή της τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ ενώ έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Oy .



Αν $0 < \alpha < 1$ τότε για την λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$ έχουμε:

- Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
- Είναι γνησίως φθίνουσα δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ δηλαδή $\log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$
- Η γραφική παράστασή της τέμνει τον άξονα $x'x$



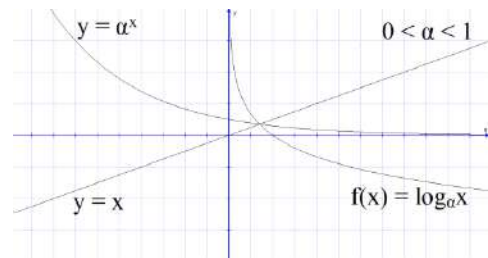
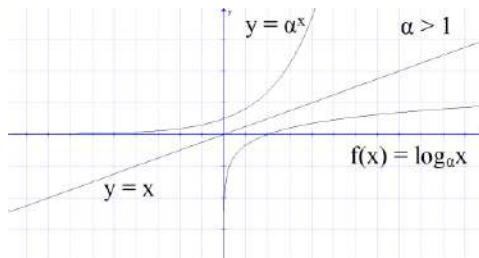
στο σημείο $A(1,0)$ ενώ έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα Ox .

✓ Ισχύει η ισοδυναμία $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

➤ Σχέση μεταξύ της $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = a^x$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = a^x$ είναι

συμμετρικές ως προς την διχοτόμο των γωνιών xOy και $x'Oy'$



Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

Λύση

- i. Πρέπει να ισχύει $\frac{5-x}{5+x} > 0 \Leftrightarrow (5-x)(5+x) > 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

άρα το πεδίο ορισμού είναι $A = (-5, 5)$

- ii. Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και έχουμε:

$$f(-x) = \ln \frac{5 - (-x)}{5 + (-x)} = \ln \frac{5+x}{5-x} = \ln \left(\frac{5-x}{5+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{5-x}{5+x} = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $2\log(x-2) = \frac{1}{2}\log x^3 - \log \sqrt{x}$
- ii. $2\ln(2x-1) - \frac{1}{2}\ln 9 = \ln(x-1) + \ln(x+1)$

Λύση

- i. Πρέπει $x-2 > 0$ και $x > 0$ άρα $x > 2$

$$\text{Είναι } 2\log(x-2) = \frac{1}{2}\log x^3 - \log \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\log(x-2)^2 = \frac{3}{2}\log x - \log x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log(x-2)^2 = \frac{3}{2}\log x - \frac{1}{2}\log x \Leftrightarrow$$

$$\log(x-2)^2 = \log x \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 = x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

Απορρίπτεται

- ii. Πρέπει $2x-1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ και $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Άρα $x > 1$.

$$\text{Είναι } 2\ln(2x-1) - \frac{1}{2}\ln 9 = \ln(x-1) + \ln(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x-1)^2 - \ln 9^{\frac{1}{2}} = \ln(x-1) + \ln(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x-1)^2 - \ln\sqrt{9} = \ln(x^2-1) \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{4x^2-4x+1}{3} = \ln(x^2-1) \Leftrightarrow$$

$$4x^2-4x+1 = 3x^2-3 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \quad \text{Δεκτή}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση $5^x = 2^{1-x}$

Λύση

$$\text{Είναι } 5^x = 2^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$\log 5^x = \log 2^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$x \log 5 = (1-x) \log 2 \Leftrightarrow$$

$$x \log 5 = \log 2 - x \log 2 \Leftrightarrow$$

$$x \log 5 + x \log 2 = \log 2 \Leftrightarrow$$

$$x(\log 5 + \log 2) = \log 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 10}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x+10) - 2$. Να βρείτε:

- i. Το πεδίο ορισμού της
- ii. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Λύση

i. Πρέπει $x+10 > 0 \Leftrightarrow x > -10$ άρα $A = (-10, +\infty)$

ii. Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = -2$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y στο σημείο $A(0, -2)$

$$\text{Για } y = 0 \text{ έχουμε } 0 = \log(x+10) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\log(x+10) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log(x+10) = 2 \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\log(x+10) = \log 100 \Leftrightarrow$$

$$x+10 = 100 \Leftrightarrow$$

$$x = 90$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $B(90,0)$

5. Να συγκριθούν οι παρακάτω αριθμοί

i. $\log_3 5, \log_3 10$

ii. $\log_{\frac{1}{2}} 1908, \log_{\frac{1}{2}} 1924$

Λύση

i. Η λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_3 x$ είναι γνησίως αύξουσα άρα αφού $5 < 10$ έχουμε $\log_3 5 < \log_3 10$

ii. Η λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα αφού $1908 < 1924$ έχουμε $\log_{\frac{1}{2}} 1908 > \log_{\frac{1}{2}} 1924$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

- i. $f(x) = \log(2x^2 + x + 1)$
- ii. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$
- iii. $f(x) = \ln x^2$
- iv. $f(x) = \frac{\log x}{\log^2 x}$
- v. $f(x) = \ln(9^x - 4 \cdot 3^x + 3)$
- vi. $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 1)$
- vii. $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$
- viii. $f(x) = \sqrt{\log(3x - 2x^2)}$
- ix. $f(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right)^x$
- x. $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$
- xi. $f(x) = \ln(\ln x)$

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $\log_2(2x + 3) = \log_2 3 - \log_2(x - 1)$
- ii. $2\log_5(1 - x) - \log_5 4 = \log_5 9$
- iii. $\ln(x^2 - x) - 2 = \ln(x - 1)$
- iv. $\ln(x - 1) + \ln(2x + 4) = 2\ln(x + 2)$
- v. $\log x + \log(x - 1) = 2\log 12$
- vi. $\log x + \log(2x + 1) = 1$
- vii. $\log x^2 = 2$
- viii. $2\log(2x - 1) - \log(3x - 2x^2) = \log(4x - 3) - \log x$
- ix. $\log(1 + x) = 1 + \log(1 - x)$
- x. $\log(x - 9) + 2\log\sqrt{2x - 1} = 2$
- xi. $\frac{1}{2}\log(x + 2) + \log\sqrt{x - 3} = 1 + \log\sqrt{3}$
- xii. $\log(2^x + 1) = 1 + \log 2 - x\log 2$
- xiii. $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$
- xiv. $\log_3(x^2 + 6x + 8) = 3 + \log_3(x + 2)$
- xv. $\log_5(x - 2) + 2\log_5(x^3 - 2) + \log_5 \frac{1}{x-2} = 4$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$

ii. $\log(4^{x-2} + 9) - 1 = \log(2^{x-2} + 1) - \log 2$

iii. $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 178$

iv. $\frac{\log x + 2}{\log x + 4} - \frac{1}{\log x} = \frac{1}{2}$

v. $\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

i. $\log(x-6) + \log(x+1) = 3 \log 2$

iv. $\ln 6 + x \cdot \ln 2 = \ln 2 + \ln(1 - 2^x)$

ii. $1 + \log(x-2) = \log 30$

v. $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(8-x)$

iii. $\log(x^2 - 16) = \log 900 - 2$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\ln(x-2) - \ln x = \ln(x-4) - \ln(x-3)$

ii. $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

iii. $\log(2x+4) + \log(x-2) = \log x + \log(x+2)$

iv. $2 \ln(x+2) - 1 = \ln(x+6) - \ln 5$

v. $1 + \log(1-x) = \log(x+1)$

6. Να λύσετε τα συστήματα

i. $\begin{cases} y = 3x \\ 3 \log y = \log 3 + \log x \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \ln(xy) = 3 \ln 3 \\ \ln x \cdot \ln y = 2 \ln^2 3 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2^y = 1 - 5^x \\ x \ln 5 - \ln 20 = y \ln 2 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 4 \log x + \log y = 6 \log 3 \\ \log x + \log y = \log 27 \end{cases}$

7. Να συγκριθούν οι παρακάτω αριθμοί

i. $\log_5 7$ και $\log_5 6$

ii. $\log_{\frac{3}{10}} 6$ και $\log_{\frac{3}{10}} 8$

iii. $\ln(2x^2 - 1)$ και $\ln x^4$

iv. $\log(x+y)$ και $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ με $x, y > 0$ και $x \neq y$

8. Να λυθούν οι ανισώσεις

- | | |
|--|--|
| i. $\log(2x - 1) > \log(3 - x)$ | iv. $\ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0$ |
| ii. $\ln x^2 > \ln(x + 2)$ | v. $\ln^2 x \geq 1$ |
| iii. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > \frac{1}{2}$ | vi. $\frac{2\ln x + 1}{\ln x + 1} > 1$ |

9. Αν $2 < \beta < \alpha$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\log(a + \beta - 3) + \log(\alpha - \beta)}{2} < \log \frac{2\alpha - 3}{2}$$

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4\log \alpha \cdot x + 3\log \alpha + 1 = 0$

- Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες;
- Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει 2 διαφορετικές θετικές ρίζες;
- Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει αντίστροφες ρίζες;

11. Να δείξετε ότι $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$ και να λύσετε την εξίσωση $4^{\ln x} - 9x^{\ln 2} + 8 = 0$

12. Να λύσετε την εξίσωση

$$8 \cdot 16^{\sigma \nu \nu^2 x - 1} + 5(4^{\eta \mu^2 x} - 2^{\sigma \nu \nu 2x}) - 16^{\eta \mu^2 x} = 2$$

13. Αν οι αριθμοί $\ln 7, \ln \sqrt{3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x}, x \ln 10$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε το x .

14.

- Να υπολογίσετε τον αριθμό $8^{\log_2 \sqrt[3]{3}}$
- Να λύσετε την εξίσωση $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} = 0$
- Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \log 100x$ με $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$

- Αν $f(10) = 25$ να βρεθεί η τιμή του α
- Για $\alpha = 1$
 - Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και

$$g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

- i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$

17.α) Για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί

$\log(3 \cdot 2^x - 1)$, $\log(4 \cdot 2^x - 1)$ και $\log(8 \cdot 2^x - 2)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Εάν ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι $a_4 = -\log 2$ να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x - 1|$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}}$

- iv. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- v. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$
- vi. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + 2\ln 2 \leq 0$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 1$
- iii. Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- iii. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $f(0)$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)$
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 0$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(\log(x+13))$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{12(3^x-3)}{9^x-4 \cdot 3^x+3}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) = \ln 3 - \ln 2$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 3) + x$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- ii. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $f(\ln 4)$ και $f(\ln 8)$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - \ln 2 > \ln(e^x - 2)$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{4^x-2^x}{2^{x+1}+4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2\ln 2$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$
- iv. Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x-1)\ln 2 + \ln \frac{2^x-1}{2^x+2}$

28.ι. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x^2 - 8) = \ln 7x$

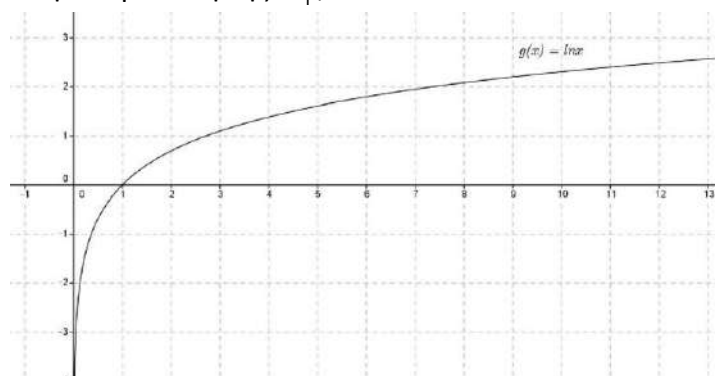
ιι. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x^2 - 8) \geq \ln 7x$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 3)$, $x > 3$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$

ii. Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f ;



30. i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x + 6)$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x + 6) = \frac{1}{2} \ln(49)$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3 - \sqrt{x+1})$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες xx' και yy' .

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

35. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- i. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x + 1$ και η αριθμητική τιμή του για $x = 2$ να είναι ίση με 12.
- ii. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$
 - α. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$.
 - β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq -x + 14$.
 - γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x) \leq -\ln x + 14$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln x^2$.

- i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- ii. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.
- iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1})$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x - 2)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{6}}$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log \sqrt{6}} - 4 = 0$

38. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

- i. Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας.
- ii. Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .
- iii. Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log 5 \cong 0,7$ και $\log 85 \cong 1,93$)

39. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t) = 200 \cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι: $\log(1,64) \cong 0,5$ και $\log 10 \cong 2,3$)

- i. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.
- ii. Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$
- iii. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

40. Το φορτίο ενός πυκνωτή που εκφορτίζεται μειώνεται εκθετικά. Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}$, όπου Q_0 το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (σε μCb).

- Αν τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ ms}$ το φορτίο είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής, να δείξετε ότι $\lambda = \ln 2$.
- Αν τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ ms}$ το φορτίο του είναι $60 \mu\text{Cb}$, να αποδείξετε ότι $Q_0 = 120 \mu\text{Cb}$.
- Πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από $15 \mu\text{Cb}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$

43. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 5x^3 - 8x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Για $\alpha = -8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(\ln^2 x + 1)^3}{(\ln^2 x + 1)^2 + 1} = \frac{8}{5}$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e \cdot x + 1)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < f(x)$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(3x - 11)}{\ln(x - 5)}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
- Αν $x > 6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^x - 2) = 3 \ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) + f(e^x - 2) \leq 3 \ln 2$

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(\log(x + a))$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- Να αποδείξετε ότι $a = 10$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να λύσετε την ανίσωση $100^{f(x)} \geq 4$.

48. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \log(2 - \log(|2x - 13| - 3))$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

49. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και

$$g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1).$$

- Να βρείτε τα πεδία ορισμού της f και της g .
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.
- Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x)$ για την οποία ισχύει $f(10) = 25$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι $a = 1$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.

51. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln \frac{9^x - 1}{3^x + 5}$. Να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού της f .
- Το σημείο της που έχει τεταγμένη $2 \ln 2$.
- Το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

52. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + a\right)$ διέρχεται από

το σημείο $M(-6, 1 + \log 6)$.

- i. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $2^{\log y} + y^{f(-3)} = 2$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x + \alpha)}{\ln(x + \beta)}$ της οποίας η γραφική παράσταση

τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 και τον άξονα στο $y'y$ στο $\frac{1}{2}$.

- i. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x + \alpha \ln x - 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η

γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{e}, -4\right)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τον πραγματικό αριθμό α .
- ii. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τεταγμένη 5.
- iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \ln^3 x - \ln(e^5 x^3)$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\log(x + 2)|$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- iii. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
- v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 1$.
- vi. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log \frac{1}{-2x - 3}$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\alpha x^2 + \beta) - \ln x$ της οποίας η γραφική

παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M\left(2, \ln \frac{17}{2}\right)$ και $N\left(3, \ln \frac{37}{3}\right)$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 1$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \ln 5$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $\ln 4$.
- Να βρείτε τις γωνίες ω και θ για τις οποίες ισχύει:
 $f(\eta\mu\omega) + f(\sigma\upsilon\nu\theta) = 4 \ln 2$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \log(10 - 2x)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.
- Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $8^{x^2 + \frac{5|x|}{3}} = f\left(\frac{99}{20}\right)$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{6-x}{6+x}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi^2 x + \frac{3f\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7}\right)}{f\left(\sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{7}\right)} = \frac{f(2) + f(4)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής, εάν υπάρχουν, της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3 - \sqrt{x+1})$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

62. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln x^2$.

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού της f και της g .

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.

iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e} - 1)$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^x - 2) = 3\ln 2$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) + f(e^x - 2) \leq 3\ln 2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ**ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4^x - 7 \cdot 2^x}{2^x - 4}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 5.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 2$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^{2x+1} - (a+1)^{x+1}}{9^x - 4^x}$ με $a > 0$ της οποίας η γραφική

παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \frac{11}{5}\right)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι $a=3$.
- iii. Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 1.
- iv. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 7$ για κάθε $x \neq 0$.
- v. Να λύσετε την εξίσωση

$$5 \cdot 4^x - 10^x \cdot f\left(\eta\mu \frac{\pi}{5}\right) = 10^x \cdot f\left(\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{10}\right) - 2 \cdot 5^{2x}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(a + e^x\right) - \frac{x}{1 + e^{-x}}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 2, \ln \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$.

- i. Να αποδείξετε ότι $a=1$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
- iii. Αν λ είναι η τετμημένη του σημείου τομής της C_f με τον άξονα $y'y$,

να λύσετε την εξίσωση: $4^{\ln x} - 9x^\lambda + 8 = 0$.

- iv. Να λύσετε την εξίσωση $x^{\log x} + f(1 - \sqrt{3}) = 100x + f\left(\frac{2}{\sqrt{3} + 1}\right)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^2 - 4x + a)$ με $a > 0$, για την οποία ισχύει ότι

$f(6) = 2f(4)$. Να βρείτε:

- Τον αριθμό a .
- Το πεδίο ορισμού της f .
- Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $\varepsilon: y = 2\log 6$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{6 \ln x + a}{\ln^3 x - \ln \sqrt[4]{x}}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $M\left(e^2, \frac{14}{15}\right)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι $a = -5$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6 - f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{a-x}{x+a}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται

από το σημείο $M\left(\frac{27}{11}, -1\right)$.

- Να βρείτε τον αριθμό a .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν $0 < \theta < \phi < \pi$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\sin \theta)$ και $f(\sin \phi)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4^x - 32}{2^x + 5}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη -4 .
- Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f γίνεται $f(x) = 2^x - 5 - \frac{7}{2^{x+5}}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς την μονotonία.
- Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(4^{x^3+x} - 32\right) \left(2^{4x^2-6} + 5\right) < \left(4^{4x^2-6} - 32\right) \left(2^{x^3+x} + 5\right).$$

8. Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x + (\lambda - 2)y = 1 \\ -3x + (\lambda - 4)y = -1 \end{cases}$.

i. Αν το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο, να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \lambda y + 3\omega = -3 \\ \lambda x - 3y - 7\omega = -1 \\ 3x + y + \omega = \lambda \end{cases}$$

ii. Αν το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) :

1) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\frac{x_0}{y_0}$ είναι ανεξάρτητο του λ ,

2) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύει ότι $x_0^2 \geq y_0$.

9. Το σύστημα $\begin{cases} \mu x + y = 2\mu \\ x + \mu y = \mu + 1 \end{cases}$ είναι αόριστο.

i. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + 8y = 4\lambda - 4 \\ (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y = 3\lambda - 4 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει ότι $x_0 + y_0 \geq \mu$, όπου μ η τιμή που βρήκατε στο ερώτημα (i).

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha + \beta \eta \mu 2x$ με $\beta > 0$. Η f έχει μέγιστη τιμή το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{31\pi}{2}, 2\right)$.

- Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε την περίοδο και την ελάχιστη τιμή της f .
- Να βρείτε για ποια x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma \upsilon \nu(11\pi + x) + \frac{\eta \mu\left(\frac{25\pi}{2} + x\right)}{\eta \mu \frac{43\pi}{6}}$.

- Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f , καθώς και για ποια x παίρνει η f την τιμή αυτή.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(2x) = 0$.

v. Να λύσετε την εξίσωση: $3 - f(x) = \frac{2}{9} \left[f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^2$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^6 - 6x^4 + \alpha x^2 + \beta$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι 6, ενώ το $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

13. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $x^2 - 2x - 3$.

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 x + \frac{5}{1+\varepsilon\phi^2 x} - 4\eta\mu x - 2 = 0$.

14. Η διαίρεση του πολυωνύμου $Q(x)$ με το $x-3$ αφήνει υπόλοιπο 5, ενώ η διαίρεση του $Q(x)$ με το $x+1$ αφήνει υπόλοιπο 1.

i. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x^2 - 2x - 3$

ii. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + \lambda x - 8$ έχει παράγοντα το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x^2 - 2x - 3)$.

1) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt[3]{16 - 2^x} + \sqrt{2 \cdot 3^x - 18}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot 8^x - 11 \cdot 4^x + 13 \cdot 2^x = (f(3))^{\frac{2}{3}}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^x - 10 \cdot 2^x + 20$

Να λύσετε:

i. την ανίσωση $f(x) \leq 4$,

ii. το σύστημα
$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = (f(1))^{\frac{3}{2}} \\ 2^x + 2^y = 3(f(3))^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

17. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (|2a - 3| - 5)^x$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η $f(x)$ είναι:

α. γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $\alpha = \frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{2}}}$, να λύσετε την εξίσωση $3f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - f(x) = 32$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x-2} + 4}}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

19. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$64^{\frac{1}{x}} - 3 \cdot 2^{\frac{x+3}{2}} + 8 = 0 \text{ και } 2^{x^2-7} - 3^{x^2-6} = 3^{x^2-7} - 2^{x^2-4}.$$

i. Να λύσετε τις εξισώσεις.

ii. Αν α η κοινή λύση των εξισώσεων, να λύσετε την ανίσωση

$$3^{x^2} - 18 \cdot 3^{x-1} \geq \alpha^{x+1}.$$

20. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \log(10 + \sqrt{50}) + \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$\beta = \log(7 + 4\sqrt{3}) - \log(2 + \sqrt{3}) + \log(200 - \sqrt{30.000}).$$

Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\varphi x + \frac{\eta\mu x}{\alpha + \sigma\upsilon\nu x} = \beta$

21. Δίνεται ο αριθμός: $\alpha = \log\left(\ln \underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots \sqrt[10]{e}}}}_{8 \text{ ριζικά}}\right)$

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{\sqrt[3]{e^{2 \ln |a|}} \cdot x^3 + 2x^2 + ax - 6}{x-1} \leq \log 1.000^{x^2+x}.$

22. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 81^{\eta\mu^2 x} + 9^{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1} - 36^\lambda$ τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ στο σημείο με τεταγμένη 4.

Να βρείτε:

i. την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$,

ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $\chi\chi'$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (4^{\eta\mu x})^{\eta\mu \frac{29\pi}{6}} \cdot 2^{2\sigma\upsilon\nu^2 x-5} - \frac{1}{8}$

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $\chi\chi'$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{e^4} + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{|x|} \geq 0.$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a+2}{2a-1}\right)^x$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, η f είναι:

α. γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ii. Για $a = 8$, να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(x) + f(x+1) < \frac{15}{4}$

β. $\frac{2f(2x)+3}{5f(x)} > 1$

25.i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $5 - 2\sqrt{6}$, $5 + 2\sqrt{6}$ είναι αντίστροφοι.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $(5 - 2\sqrt{6})^{\frac{1-x}{x^2+1}} \leq \sqrt[5]{5 + 2\sqrt{6}}$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $3(5 - 2\sqrt{6})^x - 2(5 + 2\sqrt{6})^x = 1$.

26. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} e^{a+3} \cdot e^{\beta-8} = 1 \\ e^{a-1} \cdot e^{\beta+2} = \frac{1}{e^4} \end{cases}$$

i. Να βρείτε τις τιμές των a και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $a^x + 8\beta^x = 6^x + 8$.

27. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2+2x+2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση: $g(x) = x^2 + 2x + 2$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

iv. Έστω $h(x)$ η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπισης της C_f κατά μια μονάδα προς τα δεξιά. Να εξετάσετε αν η h είναι άρτια ή περιττή.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + a$, η οποία είναι περιττή.

i. Να βρείτε τον αριθμό a .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $(|x-3|-4)^3 + 2|x-3| < 11$.

iv. Έστω g η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_f : μία οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μια κατακόρυφη κατά 11 μονάδες προς τα κάτω.

α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

β. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και $h(x) = 11x$.

29. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (2^{a-3} - 1)^x$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι:

α. γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ β. γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii. Να βρείτε το a , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(2,9)$.

iii. Για την τιμή του a που βρήκατε, να λύσετε την

$$\text{εξίσωση } f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \text{ και την ανίσωση } f(-2x) - 4f(-x) + 3 \leq 0$$

30. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2^\lambda \cdot x^3 + 3x^2 - 18x + 2 \cdot 4^\lambda - 2^{\lambda+1}$. Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο 23.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = -7x + 10$ (1).

iii. Αν α είναι η μικρότερη ρίζα και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης (1), να λύσετε

$$\text{το σύστημα: } \begin{cases} (\beta - \alpha) \cdot 3^x - (4\beta)^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{x-y} = 25 \\ 3^x \cdot 5^y - a \cdot 5^x = 24 \cdot 5^y \end{cases}$$

31. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$\begin{cases} 3^{\frac{2\beta+5\alpha}{2}} - 3^{\frac{2\beta+5\alpha}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{4\beta+9\alpha}{3}} - 2^{\frac{4\beta+9\alpha}{6}} = 2 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii. Θεωρούμε το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 - 7x^2 + \lambda x + \mu$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 + \beta x + a$

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 14$ και $\mu = -8$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $8^x - 28 \cdot 4^{x-1} + 7 \cdot 2^{x+1} - 8 \leq 0$.

32. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 5^a - 4^{\beta-1} = 9 \\ 5^{a-1} + 4^\beta = 69 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $a^{|x|-1} - \beta^{|x|} = \beta^{|x|-1} - a^{|x|+2}$

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $4^{x+1} + \beta \cdot a^x \leq 25 - \beta \cdot a^{1-x}$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2\sin x}{\eta \mu^2 x}$ για κάθε $x \in A$.

- iii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{4}{3}$.
- v. Να εξετάσετε αν τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = \frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$.

34. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln \frac{e^x + e}{e^x + 1}$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδειχθεί ότι $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = 1$.

35. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 4}$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \ln 5 - \ln 3$.
- iii. Να λυθεί η ανίσωση: $f(x) > 0$.

36. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \log \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x + a \right]$ διέρχεται από το σημείο $M(-6, 1 + \log 6)$.

- i. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 1$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{\log y} + y^{f(-3)} = 2$.

37. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln(x + a)$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln 2 = 0.$$

- i. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- iii. Να βρείτε γωνία $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει: $\ln(\sigma\upsilon\nu \omega) + f\left(\frac{\pi}{12}\right) = f\left(-\frac{\pi}{24}\right)$.
- iv. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu(e^{f(x)}) + \sigma\upsilon\nu(e^{f(x)}) = 0$.

38. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + \lambda x + 4 - \lambda$ έχει παράγοντα το $x + \sqrt{e}^{\ln 9}$.

- i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + \sqrt{e}^{\ln 9}$.
- iii. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta > 1$ για τους οποίους ισχύει: $\ln(\ln \beta) - \ln(\ln \alpha) = \ln 2$.
Να αποδείξετε ότι: $\beta = \alpha^2$.
- iv. Αν ισχύει $\pi(\ln \alpha) \leq 1$, να αποδείξετε ότι: $e^2 \leq \beta \leq e^6$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 2)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \log\left(4^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} \cdot 2^{x+1} + \frac{6}{5}\right)$.
- Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = f\left(\frac{5}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{3}{2}\right)$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln(x - 3)|$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς την απόλυτη τιμή και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση παρουσιάζει κάποια συμμετρία.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2(1 + \ln a)x + 5 - \ln^2 a$, $a > 0$.

- Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η C_f να βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx' για κάθε x πραγματικό.
- Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x = 2$.
- Για $a = e$, να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y = x - 2$.
- Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η f να έχει ελάχιστη τιμή το 4.

42. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = |\log(x + 2)|$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 1$.
- Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = \log \frac{1}{-3-2x}.$$

43. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(ax^2 + \beta) - \ln x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία: $M\left(2, \ln\left(\frac{17}{2}\right)\right)$ και $N\left(3, \ln\left(\frac{37}{3}\right)\right)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq \ln 5$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $\ln 4$.
- Να βρείτε τις γωνίες ω και θ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f(\eta\mu\omega) + f(\sigma\upsilon\nu\theta) = 4\ln 2.$$

44. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x + \theta}{e^x + 1}$, όπου $\theta > 0$ τέτοιος, ώστε η εξίσωση $x^2 - 4(1 + \ln \theta)x + \ln^2 \theta^2 + 12 = 0$ να έχει διπλή ρίζα.

- i. Να βρείτε τον αριθμό θ και το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) - f(-x) = x$.
- iii. Αν $\alpha, \beta > 0$, με $\alpha\beta = 10$, να αποδείξετε ότι: $f(\log \alpha) + f(\log \beta) = 1$.

45. Έστω $K(\lambda, \mu)$ η κορυφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$g(x) = (\ln \sqrt{10}) \cdot x^2 + (\ln 100) \cdot x + \ln(100e^4)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση:

$$f(x) = x - \ln \frac{e^x + \mu}{e^x + \lambda}.$$

- i. Να βρείτε την κορυφή K .
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.
- iv. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx' .

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΕΣ ή ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ

Εκθετική συνάρτηση

1. Αν $\alpha > 0$ $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $\nu > 0$ τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
2. Αν $\alpha > 0$ τότε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α
3. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ λέγεται εκθετική
4. Αν $\alpha > 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως φθίνουσα
5. Αν $0 < \alpha < 1$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
6. Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα Ox
8. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \alpha^{-x}$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'x$
9. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Λογάριθμοι

1. Ισχύει ότι $\ln \theta = x \Leftrightarrow \theta = e^x$, $\theta > 0$
2. Ισχύει ότι $\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$
3. Αν $\ln \theta \neq x$, τότε $\theta \neq e^x$, $\theta \neq 0$
4. $\ln e = e$
5. $\log 10^\alpha = \alpha$
6. $e^{\ln \theta} = \theta$, $\theta > 0$
7. $\ln 1 = 1$
8. Για $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ ισχύει ότι $\ln(\theta_1 + \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$
9. Για $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ ισχύει ότι $\frac{\ln \theta_1}{\ln \theta_2} = \ln(\theta_1 - \theta_2)$
10. Για $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ ισχύει ότι $\ln \theta^k = k \cdot \ln \theta$, $k \in \mathbb{R}$
11. $\log \theta = \frac{\ln \theta}{\ln 10}$

Λογαριθμική συνάρτηση

1. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$
2. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ $g(x) = \ln x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log x$ έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy'
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x στο διάστημα $x \in (0, 1)$
5. Αν $x_1, x_2 > 0$ και $\ln x_1 = \ln x_2$ τότε $x_1 = x_2$
6. Αν $x_1, x_2 > 0$ τότε $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
7. Αν $0 < x < 1$ τότε $\ln x < 0$
8. Αν $x > 10$ τότε $\log x > \ln e$
9. Αν $0 < x < e$ τότε $\ln x > \log 10$
10. Αν $x > 1$ τότε $\ln x < 0$
11. Αν $x > e$ τότε $\ln x < 1$
12. Αν $x > 1$ τότε $\ln x > 0$
13. Αν $0 < x \neq 1$ τότε οι αριθμοί $x-1$ και $\ln x$ είναι ομόσημοι
14. Για κάθε $x > 1$ είναι $x-1 + \ln x > 0$
15. Για κάθε $0 < x \neq 1$ είναι $\frac{\ln x}{x-1} > 0$

Johann Carl Friedrich Gauss

Ο Γιόχαν Καρλ Φρίντριχ Γκάους (Johann Carl Friedrich Gauss, στη γερμανική συνήθως γράφεται ως Gauß) (30 Απριλίου 1777 – 23 Φεβρουαρίου 1855) ήταν Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σε πολλά ερευνητικά πεδία της επιστήμης του, όπως η θεωρία αριθμών, η στατιστική, η μαθηματική ανάλυση, η διαφορική γεωμετρία, αλλά και συναφών επιστημών, όπως η γεωδαισία, η αστρονομία και η φυσική (ηλεκτροστατική, οπτική, γεωμαγνητισμός). Αποκλήθηκε «ο πρίγκιψ των μαθηματικών» και ο «μεγαλύτερος μαθηματικός μετά τον Αρχιμήδη και τον Ευκλείδη». Ο Γκάους



υπήρξε ίσως ο σημαντικότερος Γερμανός μαθηματικός όλων των εποχών και ένας από τους δύο ή τρεις σπουδαιότερους των νεότερων χρόνων (μετά την αρχαιότητα).

Ο Γκάους ήταν αυτό που αποκαλείται «παιδί-θαύμα» και υπάρχουν αρκετές ιστορίες για τις εκπληκτικές του ικανότητες ως νηπίου, ενώ οι πρώτες μεγάλες μαθηματικές ανακαλύψεις του χρονολογούνται από την εφηβεία του. Σε ηλικία 21 ετών είχε ολοκληρώσει το κύριο έργο του στα καθαρά μαθηματικά, το *Disquisitiones Arithmeticae*, (= «Αριθμητικές Έρευνες», 1798, εκδόθηκε το 1801). Αυτό το έργο διαδραμάτισε θεμελιώδη ρόλο στην εδραίωση της θεωρίας αριθμών ως αυτοδύναμου κλάδου των μαθηματικών και τη σημάδεψε μέχρι τις μέρες μας.

Ο Γκάους γεννήθηκε στο Μπράουνσβαϊγκ (Braunschweig), στο τότε δουκάτο Brunswick-Lüneburg και σήμερα μέρος της Κάτω Σαξονίας, στη Γερμανία. Οι γονείς του ήταν φτωχοί εργάτες και δεν είχαν άλλα παιδιά. Οι ιστορίες για την πρώιμη ιδιοφυΐα του ως μικρό παιδί είναι όλες αναπόδεικτες. Σύμφωνα με μία, το ταλέντο του πρωτοεμφανίσθηκε σε ηλικία τριών ετών, όταν διόρθωσε χωρίς χαρτί και μολύβι ένα λάθος που είχε κάνει ο πατέρας του στο χαρτί ενώ έκανε υπολογισμούς για τα οικονομικά της οικογένειας.

Η γνωστότερη ίσως ιστορία αφορά την απόπειρα του δασκάλου του στο δημοτικό, του J.G. Büttner, να απασχολήσει τους μαθητές του σε μια κενή ώρα βάζοντάς τους να προσθέσουν όλους τους ακεραίους από το 1 ως το 100. Ο μικρός Γκάους βρήκε το σωστό άθροισμα σε λιγότερο από 1 λεπτό, εκπλήσσοντας τόσο τον δάσκαλο όσο και τον βοηθό του Martin Bartels. Ο Γκάους αντιλήφθηκε ότι η πρόσθεση κατά ζεύγη από τις δύο άκρες αυτής της σειράς των αριθμών έδινε πάντα το ίδιο άθροισμα: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, κ.ο.κ., οπότε για ένα ολικό άθροισμα $50 \times 101 = 5050$ (βλ. αριθμητική σειρά). Ο J. Rotman πάντως γράφει στο βιβλίο του *A first course in Abstract Algebra* ότι πιστεύει πως αυτό το περιστατικό δεν συνέβη ποτέ.

Ο πατέρας του Γκάους τον προέτρεπε να ακολουθήσει το επάγγελμά του και να γίνει χτίστης ξύλινων σπιτιών. Δεν συμφωνούσε να μάθει ο Καρλ μαθηματικά και επιστήμες. Σε αυτή την προσπάθεια, ο Γκάους είχε κυρίως την υποστήριξη της μητέρας του και μετά του Δούκα του Brunswick-Lüneburg, που του έδωσε μια υποτροφία για να σπουδάσει στο Collegium Carolinum (το σημερινό Πολυτεχνείο του Μπράουνσβαϊγκ), όπως και έγινε, από το 1792 ως το 1795. Στη συνέχεια, σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν από το 1795 ως το 1798. Κατά τη διάρκεια των σπουδών του, ο Γκάους πέτυχε να ανακαλύψει εκ νέου και από μόνος του πολλά ήδη γνωστά σημαντικά θεωρήματα. Η πρώτη του νέα ανακάλυψη ήταν το 1796, όταν απέδειξε ότι οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο του οποίου ο αριθμός πλευρών είναι πρώτος αριθμός Φερμά (και, συνεπώς, και όλα τα πολύγωνα με αριθμό πλευρών γινόμενο ξεχωριστών πρώτων αριθμών Φερμά και μιας δυνάμεως του 2) μπορεί να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη. Αυτή ήταν μια σημαντική ανακάλυψη σε ένα βασικό πεδίο των μαθηματικών. Τα προβλήματα «κατασκευής» απασχολούσαν τους μαθηματικούς από την Αρχαία Ελλάδα και η ανακάλυψη αυτή τελικώς οδήγησε τον Γκάους να επιλέξει μια σταδιοδρομία στα μαθηματικά αντί για τη φιλολογία. Ευχαριστήθηκε τόσο από αυτή την ανακάλυψη, ώστε ζήτησε να χαραχθεί πάνω στον τάφο του ένα κανονικό δεκαεπτάγωνο. Ο τεχνίτης αρνήθηκε, δηλώνοντας ότι η δύσκολη αυτή κατασκευή θα φαινόταν σχεδόν σαν ένας κύκλος.

Την ίδια χρονιά (1796) ο Γκάους έκανε πολλές συνεισφορές στη θεωρία αριθμών, όπως το θεώρημα των πρώτων αριθμών, που έθεσε ως εικασία στις 31 Μαΐου και προσφέρει μια καλή κατανόηση του πώς κατανέμονται οι πρώτοι αριθμοί ανάμεσα στους άκεραίους. Ο Γκάους ανακάλυψε επίσης ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα ενός, δύο ή τριών τριγωνικών αριθμών (στις 10 Ιουλίου) και τότε έγραψε στο ημερολόγιό του την περίφημη από τον Αρχιμήδη λέξη «εύρηκα!» και « $num = \dots$ ». Την 1η Οκτωβρίου δημοσίευσε ένα αποτέλεσμα για τον αριθμό των λύσεων πολυωνύμων με συντελεστές σε πεπερασμένα πεδία (αυτό οδήγησε τελικώς στις Εικασίες του Weil 150 χρόνια μετά)

Το 1801 ο Ιταλός αστρονόμος Τζιουζέπε Πιάτσι ανακάλυψε τον πρώτο αστεροειδή, τη Δήμητρα, αλλά μπόρεσε να την παρατηρήσει επί λίγες μόνο νύχτες. Ο Γκάους προέβλεψε σωστά τη θέση στην οποία θα βρισκόταν στο μέλλον, όπου και ξαναπαρατηρήθηκε από τον Φραντς φον Ζαχ στις 3 Δεκεμβρίου 1801 και από τον Χάινριχ Όλμπερς μία μέρα αργότερα. Ο Ζαχ σημείωσε ότι «χωρίς την ευφυή εργασία και τους υπολογισμούς του δόκτορα Γκάους ίσως να μην είχαμε ξαναβρεί τη Δήμητρα». Ο Γκάους, που μέχρι τότε στηριζόταν οικονομικά από τον δούκα, αμφέβαλλε για τη σταθερότητα αυτής της υποστήριξης, καθώς δεν πίστευε ότι τα καθαρά μαθηματικά ήταν αρκετά σημαντικά ώστε να αξίζουν υποστήριξη, οπότε μετά την αστρονομική του επιτυχία επεδίωξε μία θέση στην αστρονομία: Το 1807 διορίστηκε καθηγητής της αστρονομίας και διευθυντής του αστεροσκοπίου στο Γκέτινγκεν, μία θέση που διατήρησε για το υπόλοιπο της ζωής του.

Η ανακάλυψη της Δήμητρας οδήγησε τον Γκάους να επεξεργασθεί μία θεωρία για τις κινήσεις μικρών σωμάτων που διαταράσσονται από μεγάλους πλανήτες, η οποία τελικώς εκδόθηκε το 1809 με τον τίτλο *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum* («Θεωρία της κινήσεως των ουρανίων σωμάτων που κινούνται σε κωνικές τομές περί τον Ήλιο»). Αυτή η θεωρία, για την οποία εργάστηκε έντονα επί τρεις μήνες σε ηλικία 23 ετών, οδήγησε στην ορθή πρόβλεψη της θέσεως της Δήμητρας με ακρίβεια μισής μοίρας. Η εργασία αυτή,

που επανεκδόθηκε λίγα χρόνια μετά ως «Θεωρία της ουρανίου κινήσεως», παραμένει ένας θεμέλιος λίθος των αστρονομικών υπολογισμών. Περιείχε μια πραγμάτευση της Μεθόδου των ελάχιστων τετραγώνων, μια μέθοδο που χρησιμοποιείται σε όλες τις επιστήμες μέχρι σήμερα για να ελαχιστοποιήσει την επίδραση των σφαλμάτων στις μετρήσεις. Ο Γκάους μπόρεσε να αποδείξει τη μέθοδο το 1809 υπό την παραδοχή σφαλμάτων που ακολουθούν την κανονική κατανομή (βλ. Θεώρημα Gauss-Markov, γκαουσιανή). Η μέθοδος είχε περιγραφεί το 1805 από τον Αντριάν-Μαρί Λεζάντρ, αλλά ο Γκάους ισχυρίστηκε ότι ο ίδιος τη χρησιμοποιούσε από το 1795.

Ο Γκάους ήταν ένας θαυμαστός ανθρώπινος υπολογιστής. Αναφέρεται ότι, όταν ρωτήθηκε πώς μπόρεσε να προβλέψει την τροχιά της Δήμητρας με τέτοια ακρίβεια, απάντησε «με λογαρίθμους». Ο ερωτών τότε ζήτησε να μάθει πώς μπόρεσε να κοιτάξει τόσους πολλούς αριθμούς από τους λογαριθμικούς πίνακες τόσο γρήγορα. «Να τους κοιτάξω;» αποκρίθηκε ο Γκάους. «Ποιος χρειάζεται να τους δει; Απλώς τους υπολόγισα από μνήμης!»

Η προσωπική ζωή του Γκάους επισκιάστηκε από τον πρόωρο θάνατο της πρώτης του συζύγου, της Γιοχάνα Όστχοφ (1780-1809), τον οποίο ακολούθησε σύντομα ο θάνατος ενός παιδιού, του Λουί. Ο Γκάους βυθίστηκε σε κατάθλιψη, από την οποία δεν συνήλθε ποτέ τελείως, παρότι ξαναπαντρεύτηκε με μια φίλη της Γιοχάνα, τη Φριντερίκα Βιλελμίνε Βάλντεκ (Μίνα), η οποία δυστυχώς ήταν χρόνια άρρωστη. Μόλις και η δεύτερη σύζυγός του πέθανε, το 1831, μία από τις κόρες του Γκάους, η Τερέζα, ανέλαβε το σπιτικό και φρόντιζε τον μαθηματικό μέχρι τον θάνατό του. Η μητέρα του ζούσε στο ίδιο σπίτι από το 1817 ως τον θάνατό της το 1839.

Ο Γκάους και η Γιοχάνα είχαν τρία παιδιά, τον Γιόζεφ (1806-1873), τη Βιλελμίνη (1808-1846) και τον Λουί (1809-1810). Με τη Μίνα, ο Γκάους απέκτησε άλλα τρία: τον Εουγκένη (1811-1896), τον Βίλχελμ (1813-1879) και την Τερέζα (1816-1864). Από όλα τα παιδιά η Βιλελμίνη λεγόταν ότι πλησίαζε περισσότερο στο ταλέντο του, αλλά πέθανε νέα. Ο Εουγκένη μετανάστευσε στις ΗΠΑ περί το 1832 αφού μάλωσε με τον πατέρα του και εγκαταστάθηκε τελικά στο Σαιντ Τσαρλς του Μισούρι. Εκεί εγκαταστάθηκε αργότερα και ο Βίλχελμ, που πρόκοψε ως βιοτέχνης-υποδηματοποιός. Ας σημειωθεί ότι ο ίδιος ο Γκάους δεν επιθυμούσε τα παιδιά του να ασχοληθούν με τα μαθηματικά ή τις επιστήμες φοβούμενος «μη λερώσουν την καλή φήμη που δημιουργήσε ο ίδιος για το οικογενειακό όνομα στους τομείς αυτούς», όπως αναφέρεται σε γράμμα από τον εγγονό του Robert Gauss προς τον Φέλιξ Κλάιν στις 3 Σεπτεμβρίου 1912.

Το 1831 ο Γκάους άρχισε μια προσοδοφόρα συνεργασία με τον καθηγητή της φυσικής Βίλχελμ Βέμπερ, που οδήγησε σε νέες γνώσεις στο πεδίο του μαγνητισμού (όπως η εξεύρεση μιας σχέσεως για τη μονάδα της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου με τη μάζα, το μήκος και τον χρόνο) και την ανακάλυψη των λεγόμενων «νόμων του Κίρχοφ» στον ηλεκτρισμό. Οι Γκάους και Βέμπερ κατασκεύασαν τον πρώτο ηλεκτρικό τηλέγραφο το 1833, η γραμμή του οποίου συνέδεε το αστεροσκοπείο με το Ινστιτούτο Φυσικής στο Γκέτινγκεν. Ο Γκάους παρήγγειλε ένα γεωμαγνητικό παρατηρητήριο να κτισθεί στον κήπο του αστεροσκοπείου και ίδρυσε με τον Βέμπερ τη «Μαγνητική Λέσχη» (magnetischer Verein), για την υποστήριξη μετρήσεων του μαγνητικού πεδίου της Γης σε πολλές περιοχές του κόσμου. Ο Γκάους ανέπτυξε μέθοδο για τη μέτρηση της οριζόντιας συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής του γεωμαγνητικού πεδίου, που χρησιμοποιήθηκε μέχρι και το 1970

περίπου, ενώ επεξεργάσθηκε τη μαθηματική θεωρία για τον διαχωρισμό του εσωτερικού πυρήνα της Γης, του φλοιού και των εξωτερικών μαγνητοσφαιρικών πηγών του μαγνητικού πεδίου της Γης.

Ο Γκάους απεβίωσε στο Γκέτινγκεν σε ηλικία 78 ετών και η σορός του αναπαύεται στο κοιμητήριο Albanifriedhof εκεί. Μόνο δύο άνθρωποι εκφώνησαν επικήδειο λόγο στην κηδεία του, ο γαμπρός του Heinrich Ewald και ο καλός του φίλος και βιογράφος Wolfgang Sartorius von Waltershausen. Ο εγκέφαλος του Γκάους συντηρήθηκε ξεχωριστά και μελετήθηκε από τον Ρούντολφ Βάγκνερ, που βρήκε τη μάζα του ίση με 1.492 γραμμάρια και την επιφάνειά του 219.588 mm² με εκτεταμένες και πολύπλοκες έλικες (Dunnington, 1927).