

«Οὐκ ἴσμεν δέ τὸ ἀληθές ἄνευ τῆς αἰτίας»

(Δεν γνωρίζουμε την αλήθεια , αν δεν έχουμε γνώση της αιτίας)

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ τάξης Λυκείου και είναι γραμμένο σύμφωνα με τις τελευταίες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Με την καθοδήγηση των καθηγητών του ομίλου **ν έ ο** το βιβλίο αυτό αποτελεί μια ολοκληρωμένη πρόταση, που θα σας οδηγήσει με επιτυχία στην κατανόηση της διδακτέας ύλης, ώστε να είστε έτοιμοι για το μέγιστο δυνατό αποτέλεσμα, θέτοντας τα θεμέλια για την εισαγωγή σας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Περιέχει

*Θεωρία

*Λυμένες ασκήσεις που καλύπτουν τις ανάγκες όλων των μαθητών

*Προτεινόμενες ασκήσεις με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας

*Επαναληπτικές ασκήσεις

Συγγραφείς:

Ζαφείρης Βασίλειος

Ιωσηφίδης Σταύρος

Κατάρα Όλγα

Νικολοπούλου Ιωάννα

Παπαδόπουλος Παναγιώτης

Παπαμιχαήλ Βέρα

Τσίμος Βασίλειος

Επιμέλεια – Συντονισμός

Ζαφείρης Βασίλειος

Τσίμος Βασίλειος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : Πιθανότητες

Το λεξιλόγιο της λογικής.....	07
Εισαγωγική Παράγραφος.....	10
Ασκήσεις προς επίλυση	18
1.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα.....	27
Ασκήσεις προς επίλυση	33
1.2 Η έννοια της πιθανότητας.....	44
Ασκήσεις προς επίλυση.....	52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : Οι πραγματικοί αριθμοί

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους	67
Ασκήσεις προς επίλυση	79
2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών	90
Ασκήσεις προς επίλυση	98
2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών	104
Ασκήσεις προς επίλυση	114
2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών	122
Ασκήσεις προς επίλυση	132

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1 ^{ου} βαθμού.....	141
Ασκήσεις προς επίλυση	149
3.2 Η εξίσωση $x^n = a$	161
Ασκήσεις προς επίλυση	165
3.3 Εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού.....	167
Ασκήσεις προς επίλυση	179

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο Ανισώσεις

4.1. Ανισώσεις 1 ^{ου} βαθμού.....	203
Ασκήσεις προς επίλυση.....	212
4.2. Ανισώσεις 2 ^{ου} βαθμού.....	222

Ασκήσεις προς επίλυση.....	231
----------------------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : Πρόοδοι

5.1. Ακολουθίες.....	249
Ασκήσεις προς επίλυση.....	253
5.2. Αριθμητική πρόοδος	255
Ασκήσεις προς επίλυση.....	263
5.3. Γεωμετρική πρόοδος.....	274
Ασκήσεις προς επίλυση.....	281

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο : Βασικές έννοιες των Συναρτήσεων

6.1. Η έννοια της συνάρτησης.....	289
Ασκήσεις προς επίλυση.....	295
6.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης.....	311
Ασκήσεις προς επίλυση.....	322
6.3. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$	333
Ασκήσεις προς επίλυση	339

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο : Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$	353
Ασκήσεις προς επίλυση.....	357
7.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$	361
Ασκήσεις προς επίλυση.....	363
7.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$	365
Ασκήσεις προς επίλυση.....	369

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	376
-------------------------	-----

Κεφάλαιο 1^ο Εισαγωγικό Κεφάλαιο

ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

➤ Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

- Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q , τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.
- Ο ισχυρισμός $P \Rightarrow Q$ λέγεται συνεπαγωγή και πολλές φορές διαβάζεται « αν P τότε Q ». Ο ισχυρισμός P λέγεται υπόθεση της συνεπαγωγής και ο ισχυρισμός Q λέγεται συμπέρασμα αυτής.

✓ Για παράδειγμα η πρόταση « $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ » είναι μια συνεπαγωγή.

➤ Προσοχή!!

- Από μια συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ προκύπτει η αντιθετοαντίστροφη

συνεπαγωγή που έχει τη μορφή : $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ και διαβάζεται

« αν δεν ισχύει ο Q , τότε δεν ισχύει ο P ».

✓ Για παράδειγμα, η πρόταση « $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ » με

αντιθετοαντίστροφη, γράφεται: « $\alpha^2 \neq \beta^2 \Rightarrow \alpha \neq \beta$ ».

- Από τα παραπάνω φαίνεται ότι για να ισχύει ο ισχυρισμός P , θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει ο ισχυρισμός Q .

• Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

- Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί , τέτοιοι ώστε , όταν αληθεύει ο ένας από τους δύο , να αληθεύει και ο άλλος , τότε λέμε ότι ο P είναι ισοδύναμος με τον Q και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.
- Ο ισχυρισμός $P \Leftrightarrow Q$ λέγεται ισοδυναμία και αρκετές φορές διαβάζεται $\ll P \text{ αν και μόνο αν } Q \gg$

✓ Για παράδειγμα η πρόταση $\ll \alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \gg$ είναι

ισοδυναμία αφού αν δύο αριθμοί είναι ίσοι τότε και τα μισά τους θα είναι ίσα , αλλά και αντιστρόφως αν τα μισά δύο αριθμών είναι ίσα , τότε και οι αριθμοί είναι ίσοι .

➤ Ο ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ $\ll H \gg$

- Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί , τότε ο ισχυρισμός P ή Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς είναι αληθής .
- Ο ισχυρισμός $\ll P \text{ ή } Q \gg$ λέγεται διάζευξη των P και Q και συμβολίζεται $P \vee Q$.

✓ Για παράδειγμα η πρόταση $\ll \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0) \gg$

είναι διάζευξη.

➤ **Ο ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ <<ΚΑΙ>>**

- Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν .
- Ο ισχυρισμός $\ll P \text{ και } Q \gg$ λέγεται σύζευξη των P και Q και συμβολίζεται $P \wedge Q$.

✓ Για παράδειγμα η πρόταση $\ll \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0) \gg$ είναι σύζευξη .

«Με τη δύναμη της βούλησης, ο άνθρωπος αλλάζει τον εαυτό του»
«Με την δύναμη της αγάπης, ο άνθρωπος αλλάζει τους άλλους»
«Με την δύναμη της σκέψης, ο άνθρωπος αλλάζει τον κόσμο»

Εισαγωγική Παράγραφος

➤ Ορισμός Συνόλου

- **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται από τη εμπειρία μας ή τη διανόηση μας , είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

➤ Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

- Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A »
- Για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A »

➤ Βασικά σύνολα αριθμών

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$
- Το σύνολο των ακέραιων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$
- Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$

➤ Παράσταση συνόλου

- Μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο **με αναγραφή των στοιχείων του** , γράφοντας όλα τα στοιχεία ανάμεσα σε δύο άγκιστρα, από μια φορά το καθένα , χωρίζοντάς τα με κόμμα. Όταν

το σύνολο έχει άπειρα στοιχεία τότε γράφουμε μερικά από αυτά αποσιωπώντας τα υπόλοιπα , αρκεί να είναι σαφές ποια είναι τα στοιχεία που παραλείπονται.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα σύνολα:

α) των ζυγών φυσικών αριθμών μέχρι το 10

β) των περιττών από το 1 έως το 1000

Λύση

α) Το σύνολο των φυσικών αριθμών μέχρι το 10 είναι $A =$

$\{0,2,4,6,8\}$

β) Το σύνολο των περιττών από το 1 έως το 1000 είναι $B =$

$\{1,3,\dots,999\}$

- Μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο **με περιγραφή των**

στοιχείων του , περιγράφοντας όλα τα στοιχεία του ,

περιγράφοντας μια ιδιότητα που έχουν όλα αυτά. Γράφουμε

$A = \{x \in \Omega / x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$ όπου Ω είναι ένα σύνολο και

τα στοιχεία x ανήκουν στο Ω και έχουν μια ιδιότητα I .

2. Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) των περιττών ακέραιων αριθμών

β) των ρητών από το 5 έως το 13

Λύση

$$\alpha) A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ είναι περιττός}\}$$

$$\beta) B = \{x \in \mathbb{Q} / 5 \leq x \leq 13\}$$

➤ **Ίσα σύνολα**

- Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα , όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Γράφουμε $A = B$.

➤ **Κενό σύνολο**

- Κενό σύνολο λέγεται το σύνολο το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

➤ **Υποσύνολο συνόλου**

- Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Συμβολίζουμε $A \subseteq B$.

Ισχύει ότι :

- ✓ $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A
- ✓ Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$
- ✓ Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A=B$

✓ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

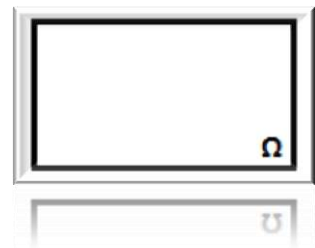
➤ Βασικό σύνολο

- Το βασικό σύνολο είναι το σύνολο από τα στοιχεία του οποίου δημιουργούμε άλλα σύνολα. Συμβολίζεται με Ω .

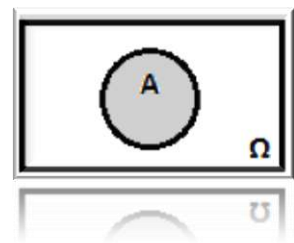
➤ Διάγραμμα Venn

- Τα διαγράμματα Venn είναι κλειστές γραμμές (ορθογώνια, κύκλοι) τις οποίες χρησιμοποιούμε για να παρουσιάσουμε με εποπτική εικόνα τα σύνολα.

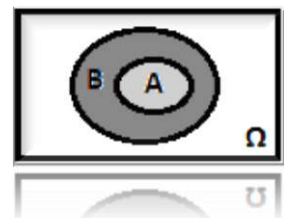
- Το βασικό σύνολο Ω το παρουσιάζουμε με ένα ορθογώνιο



- Ένα σύνολο A υποσύνολο του βασικού συνόλου Ω το παρουσιάζουμε με ένα κύκλο.



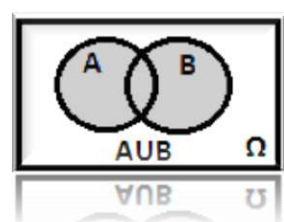
- Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B όταν το A περιέχεται στο B



➤ Πράξεις με σύνολα

1) Ένωση

- Έστω A και B δυο σύνολα. **Ένωση των συνόλων A και B** συμβολίζεται με **$A \cup B$** και είναι το



σύνολο που αποτελείται από στοιχεία Ω που **ανήκουν**
τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B.

Ισχύει ότι $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$

Ιδιότητες της ένωσης:

- ✓ $A \cup \emptyset = A$ και $A \cup A = A$
- ✓ $A \cup B = B \cup A$
- ✓ $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$
- ✓ Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$

2) Τομή

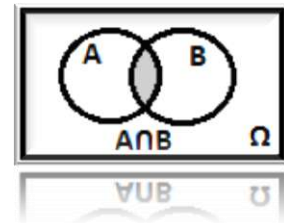
- Έστω A και B δυο σύνολα. **Τομή των συνόλων**

A και B συμβολίζεται με **$A \cap B$** και είναι το

σύνολο που περιέχει στοιχεία που ανήκουν

συγχρόνως και στα δυο σύνολα.

Ισχύει ότι $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$

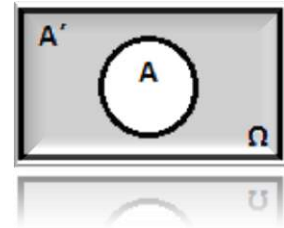


Ιδιότητες της τομής

- ✓ $A \cap \emptyset = \emptyset$ και $A \cap A = A$
- ✓ $A \cap B = B \cap A$
- ✓ $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
- ✓ Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$
- ✓ Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A , B λέγονται ξένα μεταξύ τους.

3) Συμπλήρωμα συνόλου

- Έστω Ω το βασικό σύνολο και A ένα υποσύνολό του. **Συμπλήρωμα του A** συμβολίζεται με A' και είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία



του Ω που δεν ανήκουν στο A . Ισχύει ότι $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

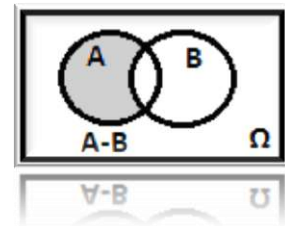
Ιδιότητες συμπληρώματος

- ✓ $\Omega' = \emptyset$ και $\emptyset' = \Omega$
- ✓ $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \Omega$
- ✓ $(A')' = A$

4) Διαφορά συνόλων

Έστω A και B δυο σύνολα. **Διαφορά του B**

από το A συμβολίζεται με $A - B$ και είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B .



Ισχύει ότι $A - B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Δίνονται οι αριθμοί $2, -3, \frac{2}{7}, \sqrt{3}, 1, \bar{3}, 2, 72$. Να βρείτε σε ποια από τα σύνολα ανήκει καθένας από τους αριθμούς.

Λύση

- $2 \in \mathbb{N}, 2 \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Q}, 2 \in \mathbb{R}$
- $-3 \in \mathbb{Z}, -3 \in \mathbb{Q}, -3 \in \mathbb{R}$
- $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}, \frac{2}{7} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$
- $1, \bar{3} \in \mathbb{Q}, 1, \bar{3} \in \mathbb{R}$
- $2, 72 \in \mathbb{Q}, 2, 72 \in \mathbb{R}$

2. Να εξετάσετε αν είναι ίσα τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 1\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = x\}$$

Λύση

Ισχύει ότι :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 1\} = \{-2, -1, 0, 1\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$\text{Αφού } x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Τα σύνολα A, B δεν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία άρα δεν είναι ίσα.

3. Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 3, 6\}$ και $B = \{0, 6, 8\}$ Να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cup B$

β. $A \cap B$

γ. $A' \cap B$

δ. $A' \cup B'$

ε. $(A \cup B)'$

στ. $(A' \cap B')'$

Λύση

α. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$

β. $A \cap B = \{6\}$

γ. $A' \cap B = \{0, 8\}$ αφού $A' = \{0, 4, 5, 7, 8\}$

δ. $A' \cup B' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ αφού $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

ε. $(A \cup B)' = \{4, 5\}$

στ. $(A' \cap B')' = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$ αφού $A' \cap B' = \{4, 5, 7\}$

«Εκπαίδευση δεν είναι η εκμάθηση γεγονότων αλλά η εξάσκηση του μυαλού να σκέφτεται»

Albert Einstein

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α. $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 8\}$

β. $B = \{x \in \mathbb{N} / 13 \leq x \leq 20\}$

γ. $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 1\}$

δ. $\Delta = \{x \in \mathbb{N} / -3 \leq x \leq 0\}$

2. Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ και $\Gamma = \{1, 4, 7\}$.

Να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cup B$

δ. $(A \cap B) \cup \Gamma$

β. $A \cap B$

ε. $(A \cup B) \cap \Gamma$

γ. $A \cup \Gamma$

στ. $(A \cap \Gamma) \cap B$

3. Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και τα υποσύνολα $A = \{1, 2, 3\}$

και $B = \{3, 4\}$. Να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cup B$

ε. $A' \cap B$

β. $A \cap B$

στ. $(A \cap B)'$

γ. A'

ζ. $(A \cup B)'$

δ. B'

4. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\}$ και

$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 18\}$

α. Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων

τους

β. Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$

5. Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ και τα υποσύνολα

$A = \{x \in \Omega / x \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$.

α. Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους

β. Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' , $(A \cup B)'$, $B - A$, $A' \cap B$

6. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή κάθε μια από τις παρακάτω

σχέσεις:

α. $A \subseteq A \cup B$

δ. $A \cap B \subseteq A \cup B$

β. $A \cap B \subseteq A$

ε. $A - B \subseteq A$

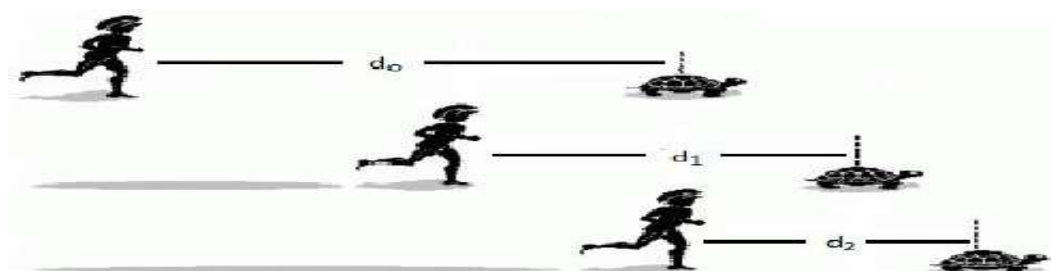
γ. $B \subseteq A \cap B$

στ. $A' \cap B \subseteq A$

Ιστορική ανασκόπηση της Θεωρίας Συνόλων

Από πολύ παλιά, οι Μαθηματικοί εξέταζαν τα σύνολα αντικειμένων κάποιου είδους και οι στοιχειώδεις έννοιες της σύγχρονης θεωρίας συνόλων υπονοούνται σε πολλά κλασσικά κείμενα. Ο πρώτος που εντόπισε τη δυσκολία να δοθεί ο ορισμός του συνόλου, χωρίς μάλιστα να το γνωρίζει, ήταν ο Έλληνας φιλόσοφος Επιμενίδης το 6^ο αιώνα π.Χ.. Αυτός είπε ότι «όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες», αλλά δεδομένου ότι και αυτός ήταν κρητικός, συμπεραίνουμε ότι αν έλεγε την αλήθεια ήταν ψεύτης και αντίστροφα. Το ίδιο πρόβλημα πραγματεύτηκε και ο φιλόσοφος Ευβουλίδης τον 4^ο αιώνα π.Χ. ίσως φανεί ότι τα προβλήματα αυτά δεν είναι πάρα πολύ σοβαρά, όμως όταν τον 19^ο αιώνα οι Μαθηματικοί προσπάθησαν να ορίσουν τα σύνολα προσέκρουσαν σ' αυτό ακριβώς το πρόβλημα.

Η έννοια του απείρου εμφανίζεται στην αρχαία Ελλάδα και αποτελούσε πηγή έμπνευσης για τα παράδοξα του Ζήνωνα (490 – 430 π.Χ.). Το πιο γνωστό από αυτά είναι του Αχιλλέα και της χελώνας. Σύμφωνα με αυτό «ο Αχιλλέας δεν μπορεί να φτάσει ποτέ μία χελώνα που προπορεύεται εμπρός του». Έστω ότι η αρχική απόσταση του Αχιλλέα από τη χελώνα είναι d_0 . Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε η χελώνα, η χελώνα θα έχει προχωρήσει λίγο και θα έχει διανύσει απόσταση d_1 . Διανύοντας ο Αχιλλέας την απόσταση d_1 , η χελώνα θα έχει διανύσει την απόσταση d_2 . Αυτό το σκεπτικό μπορεί να συνεχιστεί συνέχεια. Οπότε, ο Αχιλλέας δεν θα πιάσει τη χελώνα ποτέ.



Η απάντηση στο παράδοξο αυτό είναι ότι ο Αχιλλέας θα πιάσει τη χελώνα μετά από απόσταση d , όπου d είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τους αριθμούς $d_0, d_0 + d_1, d_0 + d_1 + d_2, \dots$

Ο G. Cantor (1845 - 1918) γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας από γονείς που είχαν μεταναστεύσει από τη Δανία. Σε ηλικία 11 ετών βρέθηκε μαζί με τους γονείς του στη Φρανκφούρτη και πάλι ως μετανάστης, όπου πέρασε και το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του. Από το 1874 με μια σειρά δημοσιεύσεων έθεσε τις βάσεις της θεωρίας συνόλων.

Ο G. Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων κι ότι το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην Ιστορία των Μαθηματικών ως η διαγώνιος του Cantor.

Ο G. Cantor παρατήρησε ότι όλα τα απειροσύνολα δεν είναι ίδια και τελικά βασιζόμενος στην παρατήρηση αυτή έκτισε μια ολόκληρη υπερπεπερασμένη αριθμητική. Η θεωρία συνόλων του Cantor αντιμετωπίστηκε αρχικά με δυσπιστία από την πλειονότητα των μαθηματικών της εποχής εκείνης για την ισχύ και το βάρος των αποτελεσμάτων της. Αξίζει να σημειωθεί η διαμάχη του Γερμανού Μαθηματικού Kronecker (1823 - 1891) με τον G. Cantor που απέτρεψε τον διορισμό του Cantor από το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Στη δεκαετία του 1890 – 1900 απέκτησε ένθερμους υποστηρικτές και η θεωρία του άρχισε να βρίσκει εφαρμογή στην Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Ο Hilbert υποστήριξε ότι «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που

δημιούργησε ο Cantor για εμάς». Δυστυχώς, όμως, στο τέλος της ζωής του Cantor δεν ήταν καλό αφού πέθανε το 1918 σ' ένα ψυχιατρείο στα Halle.

Ο R. Dedekind (1831 – 1916) ήταν φίλος του Cantor και μελέτησε και αυτός τα απειροσύνολα. Αναρωτήθηκε για τη διαφορά που έχει ένα συνεχές γεωμετρικό μέγεθος με το σύνολο των ρητών αριθμών και προσπάθησε να δώσει απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Ασχολήθηκε με τη θεμελίωση των φυσικών αριθμών και το 1888 επέλεξε πέντε αξιώματα για τη θεμελίωση αυτή. Τα αξιώματα αυτά, τα οποία αργότερα ο G. Peano (1858 - 1932) τα εξέφρασε σε συμβολική γλώσσα και έγιναν γνωστά ως «Αξιώματα του Peano». Τα αξιώματα αυτά είναι:

A_1 : Υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός, το μηδέν 0

A_2 : Κάθε φυσικός αριθμός n έχει ένα επόμενο φυσικό αριθμό, που συμβολίζεται με $n + 1$

A_3 : Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να έχει επόμενο το 0.

A_4 : Δεν υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί που να έχουν τον ίδιο επόμενο.

A_5 : Αν ένα σύνολο αριθμών S περιέχει το 0 καθώς και τον επόμενο κάθε αριθμού που ανήκει στο S , τότε το σύνολο S συμπίπτει με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το Αξίωμα A_5 είναι γνωστό ως το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής.

Ο R. Dedekind ασχολήθηκε επίσης με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Περίφημες είναι οι «τομές Dedekind» και όρισε το σύνολο των

πραγματικών αριθμών σαν το σύνολο των τομών ρητών αριθμών. Η θεμελίωση αυτή διαφέρει από αυτή του Cantor, ο οποίος για τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών χρησιμοποίησε τις ακολουθίες Cauchy των ρητών αριθμών αντί για τις τομές των ρητών αριθμών του Dedekind.

Ο Γερμανός Μαθηματικός F.L.G. Frege (1848 - 1925) ασχολήθηκε με τη θεμελίωση της θεωρίας συνόλων, έδωσε τον ορισμό του πληθικού αριθμού και στα βιβλία του με τίτλο «οι βάσεις της αριθμητικής» και «βασικοί νόμοι της αριθμητικής» προσπάθησε να παρουσιάσει τα βασικά σύνολα των αριθμών και τις πράξεις αυτών με τη βοήθεια του πληθικού αριθμού.

Το 1902 ο B. Russell (1872 - 1970) θεώρησε την ιδιότητα:

$P(x)$: «Το x είναι σύνολο που δεν είναι στοιχείο του x ».

Οπότε ένα σύνολο x είναι στοιχείο του $A=\{x: P(x)\}$ τότε και μόνο τότε όταν δεν είναι στοιχείο του x . Συνεπώς, αν $x=A$, τότε το A είναι στοιχείο του A τότε και μόνο τότε όταν ο A δεν είναι στοιχείο του A . Το παράδοξο αυτό είναι γνωστό ως το «παράδοξο του Russell». Το πρόβλημα αυτό όμως, όπως και διάφορα άλλα προβλήματα αντιφατικότητας αντιμετωπίστηκαν με την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Κατασκευάστηκαν δηλαδή, συστήματα και «θεμελιώδεις» ιδιότητες, οι οποίες καλούνται αξιώματα, την αλήθεια των οποίων δεχόμαστε και κατόπιν από τις ιδιότητες αυτές προκύπτει οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα. Ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων για να είναι παραδεκτό πρέπει να έχει τα εξής γνωρίσματα:

- (1) Να είναι πλήρες, δηλαδή να στηρίζει και να καλύπτει ολόκληρη τη θεωρία για την οποία έχουν δημιουργηθεί.

- (2) Να είναι ανεξάρτητο, δηλαδή κανένα αξίωμα να μην προκύπτει ως συνέπεια των άλλων αξιωμάτων.
- (3) Να είναι ελεύθερο αντιφάσεων, δηλαδή μια πρόταση και η άρνηση της πρότασης αυτής δεν μπορεί να προκύπτουν από το σύστημα αξιωμάτων που έχουμε θεσπίσει για την ανάπτυξη της θεωρίας.

Γενικότερα, τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων είναι δύο διαφορετικών ειδών:

- (1) Τα λογικά παράδοξα, τα οποία προκύπτουν από τη λανθασμένη χρήση της λογικής και
- (2) Τα σημασιολογικά παράδοξα, τα οποία προκύπτουν από την λανθασμένη χρήση της γλώσσας.

Το απλούστερο λογικό παράδοξο είναι το παράδοξο του Russell, που περιγράψαμε παραπάνω, που δημιουργήθηκε το 1902 και βρέθηκε επίσης ανεξάρτητα από τον Zermelo.

Το χαρακτηριστικότερο των σημασιολογικών παραδόξων είναι το παράδοξο του Berry. Σύμφωνα με τον Berry, έστω ότι όλες οι λέξεις της ελληνικής γλώσσας παρατίθενται σε κάποιο λεξικό. Έστω T : το σύνολο των φυσικών αριθμών που μπορούν να περιγραφούν σε λιγότερες από είκοσι λέξεις. Δεδομένου ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ελληνικών λέξεων που μπορούν να περιγράψουν αυτούς τους φυσικούς αριθμούς, προφανώς το σύνολο T είναι πεπερασμένο.

Επομένως, «υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός που δεν μπορεί να περιγραφεί σε λιγότερες από είκοσι λέξεις». Εξ' ορισμού, αυτός ο αριθμός δεν

ανήκει στο σύνολο T . Όμως, ήδη εμείς τον περιγράψαμε με δεκαπέντε λέξεις. Συνεπώς, πρέπει να καταλήγει στο σύνολο T , οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση.

Όμως, η θεωρία συνόλων δεν καταργήθηκε λόγω των αντινομιών αλλά επιδιώχθηκαν τρόποι που θα στήριζαν τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρίας συνόλων αποβάλλοντας τα παράδοξα.

Το 1908, ο E. Zermelo (1871 – 1953) παρουσίασε σαν μία πρώτη προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας συνόλων σε ένα σύστημα αξιωμάτων. Αργότερα, ο A. Fraenkel (1891 - 1965) πρόσθεσε ένα ακόμη αξίωμα στο σύστημα αξιωμάτων που είχε προτείνει ο E. Zermelo και το 1925 προστέθηκε ένα ακόμη αξίωμα, η πατρότητα του οποίου δεν είναι γνωστή.

Ο K. Gödel (1906 - 1978) το 1931 έδωσε ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα ότι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων δεν θα μας οδηγήσουν σε αντιφάσεις. Το 1940 απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής είναι απαραίτητο για την Ανάλυση και είναι συμβιβαστό με τα άλλα αξιώματα της θεωρίας συνόλων.

Το 1963, ο Paul Cohen απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής είναι ανεξάρτητο των άλλων αξιωμάτων.

Ο J. von Neumann (1903 - 1957) γεννήθηκε στην Βουδαπέστη και στα 23 του χρόνια παρουσίασε ένα σύστημα αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων, εναλλακτικό του συστήματος αξιωμάτων των Zermelo και Fraenkel. Από το 1927 έως το 1930 δίδασκε στα πανεπιστήμια του Αμβούργου και Βερολίνου και το 1930 πήγε στο Princeton του New Jersey. Θεωρείται από τους πιο δημιουργικούς και πολύπλευρους

Μαθηματικούς του αιώνα μας. Το εναλλακτικό σύστημα αξιωμάτων που παρουσίασε ο J. Vonnewline Neumann είναι γνωστό ως σύστημα αξιωμάτων των Bernays, Newline Gddotodel and von Neumann. Αποδείχθηκε ότι στις θεωρίες Zermelo Newline – Fraenkel και Bernays – Gddotodel – von Neumann ισχύουν οίιδες ακριβώς προτάσεις για τα σύνολα. Η διαφορά που υπάρχει είναι ότι στη θεωρία των Bernays – Gddotodel – von Neumann δίνεται η έννοια της κλάσης. Τα πάντα στη θεωρία αυτή είναι κλάσεις, ενώ τα σύνολα είναι κλάσεις που είναι στοιχεία άλλων κλάσεων.

Κεφάλαιο 1^ο Πιθανότητες

1.1 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

➤ Πείραμα τύχης

- **Πείραμα τύχης** ονομάζουμε ένα πείραμα του οποίου δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα παρότι επαναλαμβάνεται πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
- **Αιτιοκρατικό** είναι το πείραμα εκείνο του οποίου μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, αν γνωρίζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται κάθε φορά.

➤ Δειγματικός χώρος

- **Δειγματικός χώρος Ω** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.
 - ✓ Για τον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου σε ένα πείραμα τύχης εφαρμόζουμε την μέθοδο του **δεντροδιαγράμματος** ή τον πίνακα **διπλής εισόδου**.

➤ Ενδεχόμενο

- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .

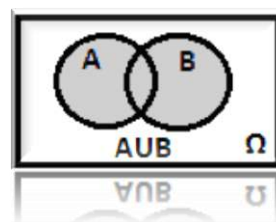
- ✓ Όταν κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του ενδεχομένου λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Για αυτό και τα στοιχεία του ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές** περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του.

- **Απλό** λέγεται το ενδεχόμενο που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.
- **Σύνθετο** λέγεται το ενδεχόμενο που αποτελείται από τουλάχιστον δύο στοιχεία.
- **Βέβαιο** ενδεχόμενο είναι εκείνο που πραγματοποιείται πάντοτε. Ο δειγματικός χώρος Ω θεωρείται βέβαιο ενδεχόμενο αφού όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης αυτό θα ανήκει στο Ω .
- **Αδύνατο** ενδεχόμενο είναι εκείνο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης. Είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.
- Με $N(A)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A .

➤ Πράξεις με ενδεχόμενα

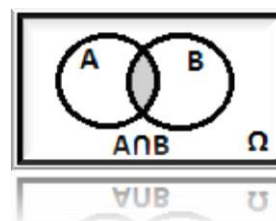
1) Ένωση

- Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B



2) Τομή

- Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .



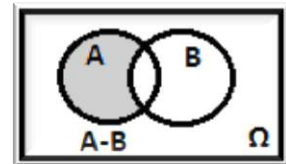
3) Συμπλήρωμα συνόλου Α'

- Το ενδεχόμενο Α' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.



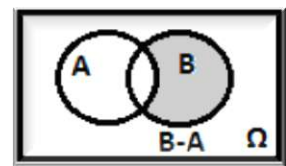
4) Διαφορά του Β από το Α

- Το ενδεχόμενο Α – Β πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β.



5) Διαφορά του Α από το Β

Το ενδεχόμενο Β – Α πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Β αλλά όχι το Α.



➤ Πίνακας αντιστοίχισης φυσικής γλώσσας σε γλώσσα συνόλων

- Έστω Α και Β δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ω το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης τότε:

Φυσική γλώσσα	Γλώσσα συνόλων
Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$
Ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α , Β πραγματοποιείται	$\omega \in (A \cup B)$
Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα	$\omega \in (A \cap B)$

A και B	
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A	$\omega \in (A - B)$
Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A η μόνο το ενδεχόμενο B	$\omega \in [(A - B) \cup (B - A)]$
Η πραγματοποίηση του ενδεχομένου A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου B	$A \subseteq B$



Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες μια άσπρη μια μαύρη και μια κόκκινη.

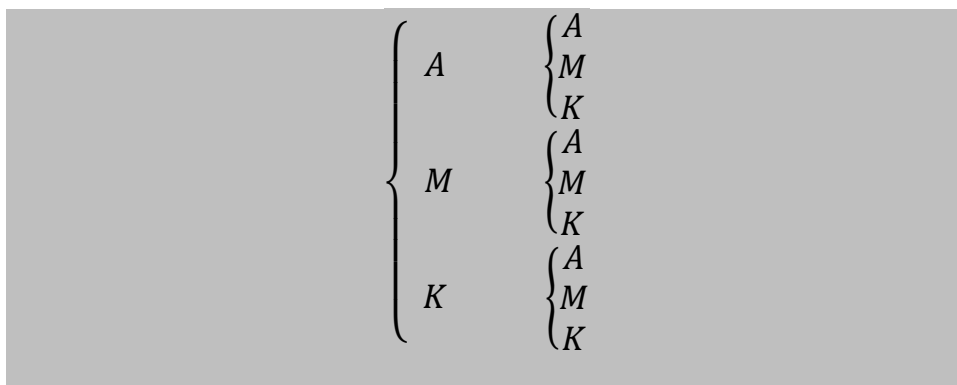
Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της και την βάζουμε πίσω στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της. (Λέμε παίρνουμε δυο μπάλες με επανατοποθέτηση)

- i. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος
- ii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο A “Η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”
- iii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο B “Να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”.

Λύση

- i. Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο θα χρησιμοποιήσουμε δεντροδιάγραμμα

1^η εξαγωγή 2^η εξαγωγή



Άρα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$$

- ii. Αν A το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη έχουμε

$$A = \{KA, KM, KK\}$$

- iii. Αν B το ενδεχόμενο να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο

$$\text{χρώμα έχουμε } B = \{AA, MM, KK\}$$

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως να

επανατοποθετήσουμε τις πρώτες μπάλες πριν την εξαγωγή της

δεύτερης. (χωρίς επανατοποθέτηση)

Λύση

- i. Για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης

θα χρησιμοποιήσουμε το δεντροδιάγραμμα. Είναι:

1^η Εξαγωγή 2^η εξαγωγή

$$\begin{cases} A & \begin{cases} M \\ K \end{cases} \\ M & \begin{cases} A \\ K \end{cases} \\ K & \begin{cases} A \\ M \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \Omega = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$$

- ii. $A = \{KA, KM\}$

- iii. $B = \emptyset$

«Το μυαλό δεν είναι ένα δοχείο που πρέπει να γεμίσει αλλά μια φωτιά που πρέπει ν' ανάψει»

Πλούταρχος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρείτε:
 - α. Τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
 - β. Το ενδεχόμενο A: «στη ρίψη του ζαριού φέρνουμε άρτιο αριθμό»
 - γ. Το ενδεχόμενο B: «στη ρίψη του ζαριού φέρνουμε αριθμό μικρότερο του 4»
2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
3. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να βρείτε:
 - i) Τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
 - ii) Το ενδεχόμενο A: « να έρθει δύο φορές κορώνα»
 - iii) Το ενδεχόμενο B: «να έρθει τουλάχιστον μία φορά γράμματα»
4. Ρίχνουμε πρώτα ένα ζάρι και μετά ένα νόμισμα και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.
5. Σε ένα κουτί υπάρχουν 3 σφαίρες , μια κόκκινη , μια λευκή και μια μπλε. Επιλέγουμε στη τύχη μια σφαίρα , καταγράφουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε στη τύχη μια άλλη σφαίρα και καταγράφουμε το χρώμα της. Να βρείτε:
 - i. Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
 - ii. Το ενδεχόμενο A να επιλέξουμε σφαίρες του ίδιου χρώματος.

- iii. Το ενδεχόμενο Β να επιλέξουμε τουλάχιστον μια κόκκινη σφαίρα.
 - iv. Το ενδεχόμενο Γ να μην επιλέξουμε λευκή σφαίρα.
 - v. Το ενδεχόμενο Δ να επιλέξουμε ακριβώς μια μπλε σφαίρα.
6. Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστούν συνολικά 2 ίδιες ενδείξεις(κεφαλή ή γράμματα)
- i. Να βρείτε το δειγματικό χώρο
 - ii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα
 - A: εμφανίστηκε 2 φορές η ένδειξη κεφαλή
 - B: ρίξαμε το νόμισμα 3 φορές
 - iii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $B - A$, και B' .
7. Η Ζωή θα πάει το Σάββατο σινεμά με τους φίλους της. Στέκεται λοιπόν μπροστά στην ντουλάπα και σκέφτεται πως θα συνδυάσει τα ρούχα και τα παπούτσια της. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;

Τζιν παντελόνι	Άσπρη μπλούζα	Μπλε σταράκια
Μαύρη φούστα	Ροζ πουκάμισο	Μαύρες μπαλαρίνες
	Κόκκινη ζακέτα	αθλητικά

Να βρείτε :

- i) Όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.
- ii) Το ενδεχόμενο A: «Η Ζωή θα βάλει φούστα»

iii) Το ενδεχόμενο B: «Η Ζωή θα βάλει τζιν παντελόνι»

iv) Το ενδεχόμενο Γ: «Η Ζωή θα βάλει μαύρες μπαλαρίνες»

v) Το ενδεχόμενο $B \cap \Gamma$.

8. Σε ένα κουτί έχουμε δυο σφαίρες αριθμημένες με το ψηφίο 1 και 2 και εκτελούμε το εξής πείραμα. Επιλέγουμε μια σφαίρα, σημειώνουμε το ψηφίο της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία άλλες δυο φορές και σχηματίζουμε έτσι ένα τριψήφιο αριθμό.

α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

β. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού να είναι 1

B: Ο αριθμός να είναι περιττός

Να γράψετε τα ενδεχόμενα A και B με αναγραφή των στοιχείων

τους και στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα:

i. Να πραγματοποιείτε τουλάχιστον ένα από τα A,B

ii. Να πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A,B

iii. Να μην πραγματοποιείται το A

iv. Να πραγματοποιείται το B και να μην πραγματοποιηθεί το A

v. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A,B.

9. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 5 \leq \omega \leq 12\}$ και τα ενδεχόμενα

$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ και $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$.

Να βρείτε:

- i) Τα ενδεχόμενα A και B.
- ii) Τα ενδεχόμενα A' και B'.
- iii) Τα ενδεχόμενα $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$ και $(A - B) \cup (B - A)$.

10. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα;

- i) A το ενδεχόμενο η πινακίδα ενός αυτοκινήτου να τελειώνει σε 5 και B το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο κυκλοφορεί στον δακτύλιο στις 14 Μαρτίου.
- ii) A το ενδεχόμενο να επιλέξουμε ένα φυσικό αριθμό μικρότερο του 18 και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να διαιρείται από το 5.
- iii) Δύο καλοί φίλοι, ο Θάνος κι ο Πάνος παίζουν έναν αγώνα τένις. A είναι το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Θάνος και B το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Πάνος.
- iv) Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από ένα λύκειο της χώρας. A είναι το ενδεχόμενο να έχει μέσο όρο βαθμολογίας 15,2 και B το ενδεχόμενο να πάρει αριστείο.
- v) Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια. A είναι το ενδεχόμενο η οικογένεια να έχει τρία παιδιά και B το ενδεχόμενο η οικογένεια να μην έχει κορίτσι.
- vi) Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές. A είναι το ενδεχόμενο να έρθει τουλάχιστον μία φορά γράμματα και B το ενδεχόμενο να έρθει τουλάχιστον μία φορά κορώνα.

11. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να γράψετε

στην γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα :

- i) Να πραγματοποιηθούν και τα δυο ενδεχόμενα A και B .
- ii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B .
- iii) Να μην πραγματοποιηθεί το A .
- iv) Να πραγματοποιηθεί το A όχι όμως και το B .
- v) Να πραγματοποιηθεί μόνο το B .
- vi) Να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα A, B .
- vii) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A, B .

12. Μια δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα compact disk (CD) που παράγει.

Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD. Να βρείτε:

- i. Το δειγματικό χώρο Ω .
- ii. Τα ενδεχόμενα :

$A : \{ \text{ακριβώς 2 ελαττωματικά CD} \}$

$B : \{ \text{τουλάχιστον 2 ελαττωματικά CD} \}$

$\Gamma : \{ \text{το πολύ 2 ελαττωματικά CD} \}$

13. Ένα κουτί περιέχει 5 αριθμημένες σφαίρες από το 1 έως το 5. Εξάγουμε

διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση μια σφαίρα κάθε φορά. Το πείραμα σταματά αν εξαχθεί σφαίρα με άρτιο αριθμό.

- i) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.
- ii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα :

$A : \{ \text{έχουν εξαχθεί 3 σφαίρες συνολικά} \}$

$B : \{ \text{η πρώτη σφαίρα έχει τον αριθμό 5} \}$

$\Gamma : \{ \text{η τελευταία σφαίρα έχει το αριθμό 2} \}$

14. Από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας παίρνουμε ένα στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A : \{ \text{το φύλλο είναι άσσος} \}$

$B : \{ \text{το φύλλο είναι κούπα} \}$

Να βρείτε :

- i) Τα ενδεχόμενα $A \cap B, A \cap B', A' \cup B', A - B$.
- ii) Το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων του ερωτήματος i.

15. Στο τμήμα τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου υπάρχουν 20 μαθητές εκ των οποίων οι 12 ασχολούνται με το ποδόσφαιρο και οι 10 με το βόλεϊ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

i. Να βρείτε τα ενδεχόμενα :

$A : \{ \text{το ενδεχόμενο να ασχολείται με το ποδόσφαιρο} \}$

$B : \{ \text{το ενδεχόμενο να ασχολείται με το βόλεϊ} \}$

ii. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

16. Ανακατεύουμε τρεις λυχνίες (E) που δε λειτουργούν με μία λυχνία (K) που λειτουργεί και δοκιμάζουμε αυτές μέχρις ότου βρούμε τη λυχνία που λειτουργεί. Να βρείτε ένα δειγματικό χώρο του πειράματος και το ενδεχόμενο A το πειράματα να τελειώσει μέχρι τη δεύτερη δοκιμή.

17. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα:

A: εμφανίζεται ακριβώς μια φορά γράμματα.

B: εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές γράμματα.

Γ: εμφανίζεται το πολύ δύο φορές γράμματα.

Δ: εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές γράμματα.

18. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και σημειώνουμε το αποτέλεσμα K (κεφαλή) ή Γ (γράμματα). Το πείραμα τελειώνει όταν συμπληρώσουμε δύο K ή πέντε ρίψεις. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος και το ενδεχόμενο να γίνουν λιγότερες από πέντε ρίψεις.

19. Ρίχνουμε διαδοχικά ένα ζάρι και δύο νομίσματα. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

20. Ελέγχονται τρεις κινητήρες α, β και γ ενός αεροσκάφους και σημειώνεται για τον καθένα η ένδειξη (K), όταν ο κινητήρας δεν έχει βλάβη και η ένδειξη (E), όταν ο κινητήρας έχει βλάβη. Να βρείτε :

i. Τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

ii. Τα ενδεχόμενα :

A : { δύο ακριβώς κινητήρες δεν έχουν βλάβη }

B : { δύο τουλάχιστον κινητήρες έχουν βλάβη }

Γ : { δύο το πολύ κινητήρες έχουν βλάβη }

Δ : { το πολύ ένας κινητήρας έχει βλάβη }

E : { το πολύ ένας κινητήρας δεν έχει βλάβη }

- iii. Τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $B \cup \Delta$ και $B \cap \Delta$.

21. Ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ένα ζάρι.

- i. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

- ii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα όταν οι ενδείξεις είναι :

$$A : \{ \text{Κ και άρτιος αριθμός} \}$$

$$B : \{ \text{Γ και αριθμός το πολύ 3} \}$$

- iii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα : A' , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $(B - A)'$.

22. Ρίχνουμε δυο ζάρια . Να βρεθούν οι πιθανότητες .

$$A : \{ \text{οι αριθμοί που δείχνουν τα ζάρια να είναι ίσοι} \}$$

$$B : \{ \text{Το άθροισμα των ενδείξεων να διαιρείται με το 5} \}$$

$$\Gamma : \{ \text{Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός} \}$$

$$\Delta : \{ \text{οι αριθμοί να διαφέρουν κατά 1} \}$$

23. Έχουμε δυο ζάρια A , B για τα οποία ισχύουν ότι : το ζάρι A έχει

στις έδρες τους αριθμούς 1 , 2 , 3 ενώ το ζάρι B έχει τους αριθμούς 4 , 5 , 6 . Ρίχνουμε ταυτόχρονα και τα δυο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα τους .

- i. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος .

- ii. Να προσδιοριστεί το ενδεχόμενο $A : \{ \text{η ένδειξη του ζαριού B να είναι διπλάσια του A} \}$.

- iii. Να προσδιοριστεί το ενδεχόμενο $B : \{ \text{το άθροισμα των ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός} \}$.

iv. Να προσδιοριστεί το ενδεχόμενο Γ : {το γινόμενο των ενδείξεων να είναι μεγαλύτερο του 10}.

v. Να προσδιοριστούν τα ενδεχόμενα :

$$A \cap B, B \cap \Gamma, A \cap \Gamma, A \cup \Gamma, A \cap B \cap \Gamma.$$

24. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 3, 10\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ και $\Gamma = \{1, 3, 5, 7\}$ να βρείτε τα ενδεχόμενα :

- i. $A' \cap B$
- ii. $A \cap B'$
- iii. $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$
- iv. $(A \cup B \cup \Gamma)'$
- v. $(A \cap B \cap \Gamma)'$

Μη μου τους κύκλους τάραττε.

Αρχιμήδης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα. Η πιθανότητα να φέρουμε γράμματα είναι 50%.
2. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ και το ενδεχόμενο $A = \{10, 12, 14, 16\}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι $P(A) = \frac{1}{2}$.
3. Ισχύει $P(\Omega) = 0$.
4. Ισχύει $P(\emptyset) = 0$.
5. Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) \geq 0$.
6. Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) \leq 1$.
7. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
8. Ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.
9. Ισχύει $P(A) \leq P(A \cup B)$ όπου A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
10. Ισχύει $P(A - B) \leq P(A)$ όπου A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
11. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \cap B = \emptyset$ οι πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών μπορεί να είναι $P(A) = 0,562$ και $P(B) = 0,439$.

12. Αν ισχύει $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{5}{8}$ τότε είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι $P(A) = 5$ και

$$P(A') = 8.$$

13. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ και το

ενδεχόμενο $A = \{-5, -3, -1\}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι

$$P(A) = -\frac{3}{6}$$

14. Αν $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$ τότε θα είναι

$$P(A \cup B) = 0,7.$$



1.2 Η έννοια της πιθανότητας

➤ Σχετική συχνότητα

- **Σχετική συχνότητα** ενός ενδεχομένου A είναι ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ο οποίος σημαίνει ότι σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος, το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές.

➤ Στατιστική ομαλότητα

- **Στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**: αν ο αριθμός των δοκιμών ενός πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα, οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντα τους ίδιους).

➤ Ισοπίθανα ενδεχόμενα

- **Ισοπίθανα ενδεχόμενα**: είναι τα ενδεχόμενα τα οποία σε ένα πείραμα τύχης έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν. Π.χ. στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού όλες οι έδρες έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν.

➤ Κλασικός ορισμός πιθανότητας

- Σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα, η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$. Γι' αυτό είναι

εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad & P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \\ \checkmark \quad & P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = \frac{0}{N(\Omega)} = 0 \\ \checkmark \quad & 0 \leq P(A) \leq 1 \end{aligned}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

➤ Απλός προσθετικός νόμος

- Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

➤ Προσθετικός νόμος

- Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

➤ Πιθανότητα συμπληρωματικού ενδεχομένου

- Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει ότι:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

➤ **Πιθανότητα διαφοράς ενδεχομένων**

- Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

➤ **Πιθανότητα υποσυνόλου**

- Αν A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει:

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } P(A) \leq P(B)$$

- Από τη σχέση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- ✓ $A \subseteq A \cup B$ οπότε $P(A) \leq P(A \cup B)$
- ✓ $B \subseteq A \cup B$ οπότε $P(B) \leq P(A \cup B)$
- ✓ $A \cap B \subseteq A$ οπότε $P(A \cap B) \leq P(A)$
- ✓ $A \cap B \subseteq B$ οπότε $P(A \cap B) \leq P(B)$
- ✓ $A - B \subseteq A$ οπότε $P(A - B) \leq P(A)$
- ✓ $B - A \subseteq B$ οπότε $P(B - A) \leq P(B)$

➤ **Τύποι de Morgan**

- Έστω A και B δυο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω . Ισχύουν οι ισότητες:

- ✓ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ✓ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δυο φορές και καταγράφουμε κάθε φορά την ένδειξη της άνω έδρας.

α. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο

β. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

i. A: οι ενδείξεις των δυο ρίψεων είναι ίδιες

ii. B: το άθροισμα των δυο ενδείξεων είναι ίσο με 9

iii. Γ: το άθροισμα των δυο ενδείξεων είναι μικρότερο του 5

iv. Δ: μια τουλάχιστον ένδειξη είναι ίση με 2

Λύση

α. Για την εύρεση του δειγματικού χώρου φτιάχνουμε τον πίνακα

διπλής εισόδου:

2 ^η ρίψη 1 ^η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Επομένως $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$

β. Τα ενδεχόμενα και οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

i. $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ii. $B = \{(4,5), (5,4), (6,3), (3,6)\}$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

iii. $\Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

iv.

$$\Delta = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

2. Δίνονται τα ενδεχόμενα A , B και Γ ενός δειγματικού χώρου Ω. Τα A και

B είναι ασυμβίβαστα με $P(A) = \frac{2}{15}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ και $P(\Gamma) = \frac{5}{12}$.

α. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$

β. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B , Γ είναι ασυμβίβαστα

Λύση

α. Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα επομένως από απλό

προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{15} + P(B) \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{4}{5} - \frac{2}{15} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

β. Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β , Γ είναι ασυμβίβαστα , άρα από απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$P(B \cup \Gamma) = \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$P(B \cup \Gamma) = \frac{13}{12} > 1 \text{ Άτοπο}$$

$$\text{αφού } 0 \leq P(B \cap \Gamma) \leq 1$$

Άρα τα ενδεχόμενα Β , Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

3. Για τα ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν ότι:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{5}{6} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

Να βρείτε την $P(B)$

Λύση

$$\text{Είναι } P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)' \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5}$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

4. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

$$\text{ισχύει } P(A - B) = \frac{1}{10}, P(A \cap B) = \frac{3}{10} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{3}{5}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες:

α. $P(A)$

δ. $P(A' \cup B')$

β. $P(B)$

ε. $P(A' \cap B')$

γ. $P(A' - B')$

Λύση

α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{10} = P(A) - \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{5}$

β. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{3}{10} \Leftrightarrow$

$$P(B) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

γ. $P(A' - B') = P(A' \cap (B')') \Leftrightarrow P(A' - B') = P(A' \cap B) \Leftrightarrow$

$$P(A' - B') = P(B - A) \Leftrightarrow P(A' - B') = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A' - B') = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

δ. $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A' \cup B') = 1 - \frac{3}{10} \Leftrightarrow$

$$P(A' \cup B') = \frac{7}{10}$$

ε. $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' \Leftrightarrow P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$

$$P(A' \cap B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

5. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση και το

40% δεν έχουν DVD και το 10% δεν έχει ούτε τηλεόραση ούτε DVD.

Επιλέγουμε τυχαία ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και DVD.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο το νοικοκυριό να έχει τηλεόραση

B το ενδεχόμενο το νοικοκυριό να έχει DVD

$$\text{Άρα } P(A') = \frac{15}{100} \text{ και } P(A \cup B)' = \frac{10}{100} \text{ και } P(B') = \frac{40}{100}$$

$$\text{Είναι: } P(A) = 1 - P(A') \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{15}{100} = \frac{75}{100}$$

$$P(B) = 1 - P(B') \Leftrightarrow P(B) = 1 - \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)' \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$$

$$\text{Άρα } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{85}{100} + \frac{60}{100} - \frac{90}{100} = \frac{55}{100}$$

Δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου να έχει ένα νοικοκυριό

τηλεόραση και DVD είναι $P(A \cap B) = \frac{55}{100} = 55\%$

- 6. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,4$. Να αποδείξετε ότι $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$**

Λύση

- Ισχύει ότι $A \cap B \subseteq B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,4$
- Ισχύει ότι $P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$0,8 + 0,4 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 0,8 + 0,4 - 1 \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$0,2 \leq P(A \cap B)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

ισχύει $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{16}$. Να βρείτε τις

πιθανότητες:

α. $P(A')$

β. $P(B')$

γ. $P(A \cup B)$

δ. $P(A - B)$

ε. $P(A \cup B')$

2. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

ισχύει $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{7}{12}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρείτε τις

πιθανότητες:

α. $P(B)$

β. $P(A \cup B)$

γ. $P(A - B)$

δ. $P(B - A)$

3. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$. Να βρείτε τις

πιθανότητες:

α. $P(A \cap B)$

β. $P(A - B)$

γ. $P((B - A)')$

δ. $P(A' \cup B)$

4. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$ και $P(A \cup B) = 0,9$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α. $P(A \cap B)$

β. $P(A - B)$

γ. $P(A \cup B')$

5. Δίνονται τα ενδεχόμενα A,B,Γ ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε το A να είναι ασυμβίβαστο με καθένα από τα B και Γ. Επίσης ισχύουν

$$P(A') = \frac{7}{10}, P(A \cup B) = \frac{9}{10} \text{ και } P(A \cup \Gamma) = \frac{8}{10}.$$

α. Να βρείτε τις $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$

β. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

6. Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

$$\text{ισχύει } P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $A \cap B = \emptyset$

β. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

7. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

$$\text{ισχύει } P(A \cup B) = 0,8, P(B - A) = 0,2 \text{ και } P(A' \cup B') = 0,9. \text{ Να}$$

βρείτε τις πιθανότητες:

α. $P(A)$

β. $P(B)$

γ. $P(A \cap B)$

δ. $P(B' - A')$

8. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

ισχύει $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A - B) = \frac{5}{8}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$.

α. Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$

β. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα του συνόλου το ενδεχόμενο «A ή B»

γ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του προηγούμενου ενδεχομένου.

9. Αν $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{2}{5}$ όπου το A ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω να βρείτε το $P(A)$

10. Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

ισχύει $A \subseteq B \subseteq \Gamma$ με $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{7}{12}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α. $P(A \cap B)$

β. $P(A' \cap B)$

γ. $P(\Gamma - A)$

δ. $P(\Gamma \cap B')$

11. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

$$\text{ισχύει } P(A' \cap B') = \frac{1}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ και } P(B - A) = \frac{1}{2} \text{ Να βρείτε τις}$$

πιθανότητες:

α. $P(A)$ και $P(B)$

β. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A, B

γ. Να μην πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B .

12. Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων το 30% δεν έχει αερόσακο

, το 20% δεν έχει καινούρια λάστιχα και το 5% δεν έχει ούτε αερόσακο

ούτε καινούρια λάστιχα. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο της

έκθεσης. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει αερόσακο και καινούρια

λάστιχα.

13. Έστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) =$

$$0,7 \text{ και } P(B) = 0,6. \text{ Να αποδειχθεί ότι:}$$

α. Τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα

β. $P(A \cap B) \leq 0,6$

γ. $P(A \cap B) \geq 0,5$

14. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{3}{10}$

$$\text{και } P(B) = 4P(B')$$

α. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$

β. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα

γ. Να αποδείξετε ότι:

i. $P(A \cap B) \geq \frac{1}{10}$

ii. $P(A \cap B) \leq \frac{3}{10}$

δ. Αν επιπλέον ισχύει $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ να βρείτε τις πιθανότητες

i. $P(A \cup B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P(A \cup B')$

15. Έστω A και B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,4$,

$P(B) = 0,7$ Να δείξετε ότι:

α. $A \cap B = \emptyset$

β. $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$

16. Παίρνουμε στην τύχη ένα φύλλο από μία τράπουλα. Να υπολογιστεί

κάθε μία από τις πιθανότητες:

α) Το φύλλο να είναι κόκκινο.

β) Το φύλλο να είναι φιγούρα.

γ) Το φύλλο να είναι κόκκινη φιγούρα.

δ) Το φύλλο να είναι φιγούρα ή κόκκινο.

ε) Το φύλλο να είναι μαύρος αριθμός.

στ) Το φύλλο να μην είναι μαύρος αριθμός

17. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά και καταγράφουμε την

ένδειξη της άνω έδρας του.

α. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος

β. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. A: Η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός
- ii. B: Η ένδειξη να είναι περιττός αριθμός και μεγαλύτερος του 3
- iii. Γ: Η ένδειξη να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή μικρότερη του 4.

18. Σε ένα κουτί υπάρχουν 2 άσπρες , 4 μπλε , 6 πράσινες και 8 κόκκινες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί. Να βρείτε τις πιθανότητες η σφαίρα αυτή

- α. Να είναι μπλε
- β. Να είναι άσπρη ή πράσινη
- γ. Να μην είναι άσπρη

19. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων.

Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άνδρες ο Δημήτρης (Δ) , ο Κώστας (Κ) ο Μιχάλης (Μ) και δυο γυναίκες η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άνδρας και μια γυναίκα και καταγράφονται τα ονόματά τους.

- α. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος
- β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
 - A: Να διαγωνίστηκε ο Κώστας η ο Μιχάλης
 - B: Να διαγωνίστηκε η Ζωή
 - Γ: Να μην διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

20. Ένα λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της

Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή η πιθανότητα να είναι

μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20% . Να βρείτε:

α. Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης

β. Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης

γ. Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι μαθητής της Β΄ τάξης.

21. Ένα κουτί περιέχει άσπρες , μαύρες , κόκκινες , πράσινες μπάλες. Οι

άσπρες είναι 5 οι μαύρες είναι 9 , ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί

είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω

ενδεχόμενα

A: η μπάλα που επιλέγουμε είναι Άσπρη

B: η μπάλα που επιλέγουμε είναι Κόκκινη

Γ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι Πράσινη

α. Χρησιμοποιώντας τα A , K και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i. Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη

ii. Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη

β. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δυο ενδεχόμενα του ερωτήματος α)

22. Από τους 150 μαθητές ενός λυκείου , οι 30 μαθητές συμμετέχουν στην

ομάδα στίβου , οι 20 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα θεάτρου και οι

40 μαθητές συμμετέχουν σε μια τουλάχιστον από τις παραπάνω ομάδες. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή από το παραπάνω λύκειο , να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός

- α. Να συμμετέχει σε ομάδα στίβου
- β. Να μην συμμετέχει στην ομάδα θεάτρου
- γ. Να συμμετέχει σε ακριβώς μια από τις παραπάνω ομάδες
- δ. Να μην συμμετέχει σε καμία από τις παραπάνω ομάδες
- ε. Να συμμετέχει το πολύ σε μια από τις παραπάνω ομάδες

23. Στον σύλλογο των καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες , το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή να εκπροσωπήσει τον σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- α. Γυναίκα ή φιλόλογος
- β. Γυναίκα και όχι φιλόλογος
- γ. Άνδρας και φιλόλογος
- δ. Άνδρας ή φιλόλογος

24. Η Β΄ τάξη ενός λυκείου έχει 70 μαθητές. Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή του λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της Β΄ τάξης είναι 40% , ενώ η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 28%. Να βρείτε

- α. Πόσους μαθητές έχει το λύκειο

β. Πόσοι μαθητές υπάρχουν σε κάθε τάξη.

25. Εξετάσαμε τους φοιτητές ενός τμήματος σχετικά με το αν πέρασαν τα μαθήματά της Στατιστικής και τις Πιθανότητες. Προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

- Το 65% των φοιτητών πέρασαν στατιστική
- Το 15% των φοιτητών πέρασαν τις Πιθανότητες
- Το 60% των φοιτητών δεν πέρασαν τουλάχιστον ένα από τα δυο μαθήματα.

Επιλέγουμε τυχαία έναν φοιτητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο φοιτητής αυτός

- α. Να έχει περάσει και τα δυο μαθήματα
- β. Να έχει περάσει το μάθημα των Πιθανοτήτων
- γ. Να μην έχει περάσει κανένα από τα δυο μαθήματα
- δ. Να έχει περάσει μόνο ένα από τα δυο μαθήματα.

26. α) Αν A , B , Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

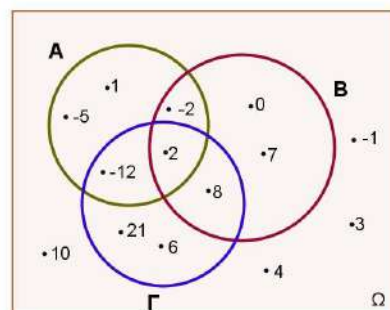
- i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ iv) A'

β) Στο διπλανό σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα

Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία

ενδεχόμενα A , B και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα

πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος.



27. Μια μέρα στο τμήμα Α1 ενός λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν είχε

διαβάσει ούτε άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει

διαβάσει και τα δυο αυτά μαθήματα. Ο καθηγητής επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής να έχει διαβάσει άλγεβρα

B: ο μαθητής να έχει διαβάσει γεωμετρία

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με την χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής

i. Να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δυο μαθήματα

ii. Να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα

γ. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν

διαβάσει γεωμετρία να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

i. Να έχει διαβάσει γεωμετρία

ii. Να έχει διαβάσει άλγεβρα

28. Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40%

μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο

αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

B: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

29. Σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

α. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

ii. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;

β. Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

30. Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των μαθηματικών περιλάμβανε δυο

θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να

βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δυο θέματα

, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δυο θέματα. Στον διαγωνισμό εξετάστηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές ενώ και στα δυο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή

- α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με τη χρήση της γλώσσας των συνόλων τα παραπάνω δεδομένα.
- β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:
 - i. Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα
 - ii. Να βαθμολογηθεί με άριστα
 - iii. Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα
 - iv. Να πέρασε την εξέταση

«Η εκπαίδευση είναι δύναμη που γιατρεύει την ψυχή».

Πλάτωνας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα. Η πιθανότητα να φέρουμε γράμματα είναι 50%.
2. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ και το ενδεχόμενο $A = \{10, 12, 14, 16\}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι $P(A) = \frac{1}{2}$.
3. Ισχύει $P(\Omega) = 0$.
4. Ισχύει $P(\emptyset) = 0$.
5. Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) \geq 0$.
6. Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) \leq 1$.
7. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
8. Ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.
9. Ισχύει $P(A) \leq P(A \cup B)$ όπου A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
10. Ισχύει $P(A - B) \leq P(A)$ όπου A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
11. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \cap B = \emptyset$ οι πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών μπορεί να είναι $P(A) = 0,562$ και $P(B) = 0,439$.

12. Αν ισχύει $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{5}{8}$ τότε είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι $P(A) = 5$ και

$$P(A') = 8.$$

13. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ και το

ενδεχόμενο $A = \{-5, -3, -1\}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι

$$P(A) = -\frac{3}{6}$$

14. Αν $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$ τότε θα είναι

$$P(A \cup B) = 0,7.$$

Κεφάλαιο 2^ο Οι Πραγματικοί αριθμοί

2.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

➤ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών **συμβολίζεται με $\mathbb{R}$** . Τους πραγματικούς αριθμούς τους τοποθετούμε σε έναν άξονα ο οποίος λέγεται **άξονας των πραγματικών αριθμών**.

➤ Οι Πράξεις πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητες τους

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛ/ΜΟΣ
ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	
ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$

- Ο αριθμός μηδέν λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης και το 1 ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

- **Αντίθετοι** λέγονται οι αριθμοί οι οποίοι έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικό πρόσημο. Χαρακτηριστική ιδιότητα των αντιθέτων είναι ότι έχουν άθροισμα μηδέν [$\alpha + (-\alpha) = 0$].
- **Αντίστροφοι** λέγονται οι αριθμοί οι οποίοι έχουν γινόμενο ίσο με 1 [$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ με $\alpha \neq 0$].
 ✓ Όλοι οι αριθμοί αντιστρέφονται εκτός από το 0.
- Η αφαίρεση και η διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζονται ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad \beta \neq 0$$

➤ **Ιδιότητες ισοτήτων**

1. Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\begin{cases} \alpha + \gamma = \beta + \delta \\ \alpha\gamma = \beta\delta \end{cases}$
2. Αν $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$
3. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma = \beta \pm \gamma$
4. Αν $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Από την ιδιότητα αυτή βγαίνει το συμπέρασμα ότι:

$$\checkmark \quad \alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

- κανόνας απαλοιφής παρενθέσεων

$$-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta \quad \text{και} \quad (\alpha - \beta) = \alpha - \beta$$

➤ **Προτεραιότητα των πράξεων**

- Η σειρά των πράξεων σε μια παράσταση είναι η εξής:

1) Υπολογισμός δυνάμεων

2) Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων

3) Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

*Αν υπάρχουν πράξεις μέσα στη παρένθεση τις εκτελούμε πρώτα με την παραπάνω σειρά.

➤ Κλάσματα

▪ Πράξεις με κλάσματα:

$$1. \frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma} \quad \mu\epsilon \gamma \neq 0$$

$$2. \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \quad \mu\epsilon \beta, \delta \neq 0$$

$$3. \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \quad \mu\epsilon \beta, \gamma, \delta \neq 0$$

▪ Σύνθετο κλάσμα

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

➤ Ιδιότητες αναλογιών

$$1. \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \text{ (πολλαπλασιάζω «χιαστί»)}.$$

$$2. \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ (αλλάζω τις θέσεις των όρων «χιαστί»)}$$

$$3. \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta} \text{ (προσθέτω στους αριθμητές τους παρονομαστές)}$$

$$4. \text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \quad \beta, \delta, (\beta + \delta) \neq 0$$

➤ **Ιδιότητες των δυνάμεων**

$$1) \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$$

$$3) \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$$

$$2) \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$

$$4) \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$$

$$5) (\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$$

➤ **Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο**

- Η δύναμη κάθε αριθμού διάφορου του μηδενός με **εκθέτη το μηδέν** είναι ίση με την μονάδα. $\alpha^0 = 1$
- Η δύναμη κάθε αριθμού διάφορου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με το κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού με αντίθετο εκθέτη. $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ με $\alpha, \beta \neq 0$

➤ **Αξιοσημείωτες Ταυτότητες**

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

$$(\alpha - \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \cdot \beta + \dots + \alpha \cdot \beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

➤ Παραγοντοποίηση

- **Παραγοντοποίηση** είναι η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια παράσταση με άθροισμα ισοδύναμη με γινόμενο.
- Οι βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης είναι οι εξής:
 - ✓ **Κοινός παράγοντας.**
 - ✓ **Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (ομαδοποίηση) .**
 - ✓ **Διαφορά τετραγώνων.** Είναι η ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
 - ✓ **Άθροισμα και διαφορά κύβων**
 - ✓ **Ανάπτυγμα τετραγώνου.** Είναι οι ταυτότητες:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

- ✓ **Τριώνυμο.** Το τριώνυμο πρέπει να είναι της μορφής

$$x^2 + (a + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

➤ Μέθοδοι απόδειξης

- **Η ευθεία απόδειξη**

Στη μέθοδο αυτή , που είναι η πιο συνηθισμένη , ξεκινάμε από τα δεδομένα και με διαδοχικούς λογικούς συλλογισμούς καταλήγουμε στη ζητούμενη πρόταση.

- **Η μέθοδος απαγωγής σε άτοπο**

Στη μέθοδο αυτή υποθέτουμε ότι η ζητούμενη πρόταση δεν ισχύει.

Τότε με την παραδοχή αυτή και όλα τα υπόλοιπα δεδομένα , προσπαθούμε με μια σειρά από λογικούς συλλογισμούς να καταλήξουμε σε μια αντίφαση δηλαδή κάτι το οποίο δεν ισχύει.

(Άτοπο)



Μεθοδολογίες - λυμένα παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α. 2^4

ε. $(-2)^3$

β. $(-2)^2$

στ. $(-3)^2$

γ. 0^5

ζ. -2^4

δ. 7^0

η. -2^3

Λύση

α. $2^4 = 16$

β. $(-2)^2 = 4$

γ. $0^5 = 0$

δ. $7^0 = 1$

ε. $(-2)^3 = -8$

στ. $(-3)^2 = 9$

ζ. $-2^4 = -16$

η. $-2^3 = -8$

Προσοχή!!! Δύναμη με
ζυγό εκθέτη είναι
θετικός αριθμός!

Προσοχή!!! πότε το πρόσημο
ανήκει στη βάση της
δύναμης και πότε σε όλη την
δύναμη!

2. Να βρεις το πρόσημο των παρακάτω αριθμών

α. 2^{36}

δ. $(-13)^{20}$

β. -23^{50}

ε. -18^0

γ. $(-3)^{13}$

στ. -24^{35}

Λύση

ζ. $2^{36} > 0$

η. $-23^{50} < 0$

θ. $(-3)^{13} < 0$

ι. $(-13)^{20} > 0$

ια. $-18^0 = -1 < 0$

ιβ. $-24^{35} < 0$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 1^{1981} + (-1)^{2015} + (-1)^0 - (-1)^{1908} + 2016^0$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 1^{1981} + (-1)^{2015} + (-1)^0 - (-1)^{1908} + 2016^0 \\ &= 1 + (-1) + 1 - (+1) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 4 - 2 \cdot 3^2 - (-1)^4 [(4^2 : 2 + 2^5 : 4) \cdot 2 - 2^3]$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 4 - 2 \cdot 3^2 - (-1)^4 [(4^2 : 2 + 2^5 : 4) \cdot 2 - 2^3] \\ &= 4 - 2 \cdot 9 - 1 [(16 : 2 + 32 : 4) \cdot 2 - 8] \\ &= 4 - 18 - 1 [(8 + 8) \cdot 2 - 8] \\ &= 4 - 18 - 1 [16 \cdot 2 - 8] \\ &= 4 - 18 - 1(32 - 8) \\ &= 3 - 18 - 1 \cdot 24 \\ &= 3 - 18 - 24 \\ &= -39 \end{aligned}$$

5. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των

δυνάμεων

α. $3^{-3} \cdot 3^7$

β. $2^{20} : 2^{16}$

γ. $(-5)^{13} : (-5)^{10}$

δ. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

ε. $8^{20} : 4^{28}$

Λύση

στ. $3^{-3} \cdot 3^7 = 3^{-3+7} = 3^4 = 81$

ζ. $2^{20} : 2^{16} = 2^{20-16} = 2^4 = 16$

η. $(-5)^{13} : (-5)^{10} = (-5)^{13-10} = (-5)^3 = -125$

θ. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{1}\right)^4 = 81$

ι. $8^{20} : 4^{28} = (2^3)^{20} : (2^2)^{28} = 2^{60} : 2^{56} = 2^{60-56} = 2^4 = 16$

6. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = \frac{1}{8}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha^{-3}\beta^{-2})^4 : (\alpha^7\beta^5)^{-2}}{(\alpha^{-2}\beta^{-1})^2}$$

Λύση

$$A = \frac{(\alpha^{-3}\beta^{-2})^4 : (\alpha^7\beta^5)^{-2}}{(\alpha^{-2}\beta^{-1})^2}$$

$$= \frac{(\alpha^{-3}\beta^{-2})^4 \cdot \frac{1}{(\alpha^7\beta^5)^{-2}}}{(\alpha^{-2}\beta^{-1})^2}$$

$$= \frac{(\alpha^{-3}\beta^{-2})^4 \cdot (\alpha^7\beta^5)^2}{(\alpha^{-2}\beta^{-1})^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha^{-12}\beta^{-8}\alpha^{14}\beta^{10}}{\alpha^{-4}\beta^{-2}} \\
 &= \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^{-4}\beta^{-2}} \\
 &= \alpha^{2-(-4)}\beta^{2-(-2)} \\
 &= \alpha^{2+4}\beta^{2+2} \\
 &= \alpha^6\beta^4 \\
 &= 4^6\left(\frac{1}{8}\right)^4 \\
 &= (2^2)^6\left(\frac{1}{2^3}\right)^4 \\
 &= \frac{2^{12}}{2^{12}} \\
 &= 2^{12-12} \\
 &= 2^0 = 1
 \end{aligned}$$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α. $(3x + 2y)^2$

β. $(x^2 + y)^2$

γ. $(-a - \beta)^3$

δ. $(-\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$

Λύση

α. $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

β. $(x^2 + y)^2 = (x^2)^2 + 2x^2y + y^2 = x^4 + 2x^2y + y^2$

γ. $(-a - \beta)^3 = [-(a + \beta)]^3 = -(\alpha + \beta)^3$

$$= -(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) = -\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\delta. (-\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = -(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -(\alpha^2 - \beta^2) = -\alpha^2 + \beta^2$$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις

α. $x^3 + 27$

β. $x^6 - y^6$

γ. $x^2 - 16$

δ. $4x^2 + 12x + 9$

ε. $a^7 + a^5 - a^3 - a$

στ. $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Λύση

α. $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

β. $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) =$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

γ. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$

δ. $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$

ε. $a^7 + a^5 - a^3 - a = a^5(a^2 + 1) - a(a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a^5 - a)$

$$= a(a^4 - 1)(a^2 + 1) = a(a^2 + 1)(a^2 - 1)(a^2 + 1)$$

$$= a(a^2 + 1)^2(a + 1)(a - 1)$$

στ. $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

9. Να λυθεί η εξίσωση

$$(3 - 5x)^3 + (3x - 8)^3 + (2x + 5)^3 = 0$$

Λύση

$$(3 - 5x)^3 + (3x - 8)^3 + (2x + 5)^3 = 0$$

Αν $\alpha = 3 - 5x$ και $\beta = 3x - 8$ και $\gamma = 2x + 5$ παρατηρούμε ότι

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 - 5x + 3x - 8 + 2x + 5 = 0$$

Άρα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ Επομένως

$$(3 - 5x)^3 + (3x - 8)^3 + (2x + 5)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3 - 5x)(3x - 8)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \quad \text{ή} \quad 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

Τα καθαρά Μαθηματικά είναι, κατά κάποιο τρόπο, η ποίηση των λογικών ιδεών.

Αϊνστάιν

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

α. 2^3

δ. -10^3

β. $(-2)^3$

ε. $(-2)^4$

γ. 10^2

στ. 0^{13}

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

α. $-(-2)^4$

δ. -2^0

β. $-(-2)^3$

ε. $[-(-1)]^{1999}$

γ. $(-2)^0$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

α. $A = (-2)^3 + (-2)^4 + 4^0$

β. $B = (-1)^{1990} + (-1)^{2015} - (-1)^{2000} - 1^4$

γ. $\Gamma = -1^{-3} - 1^{-2} - 1^0$

δ. $\Delta = 2016^0 - (-2)^3 - 3^2$

ε. $E = (-2)^{10} - (-5)^3 - (-11)^2 + (12^3 - 14^5)^0$

4. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^2 - 2\alpha\beta - 3\alpha^2\beta$$

i. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = -2$

ii. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = -\frac{1}{2}$

5. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\left[\left(\frac{1}{7} \right)^{-1} \cdot (-1)^{18} \right] : (-3) - 2}{\frac{\frac{2}{3} + (-1)^{-1}}{\left(-\frac{3}{2} \right)^{-2} + \left(-\frac{3}{4} \right)^0}}$$

6. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(xy^{-2})^3 \cdot (x^2y)^{-1}}{(y^{-1})^7 : (-y)}$$

$$\text{Για } x = 2015 \text{ και } y = -\frac{1}{2015}$$

7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left[\left(\frac{1}{x} y \right)^{-3} \cdot (x^5 y^4)^2 \right] : \left(\frac{x}{y^3} \right)^2$$

$$\text{Για } x = 2016 \text{ και } y = \frac{1}{2016}$$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α. $(x + 2)^2$

στ. $(-x + 2y)^2$

β. $(2x + 3)^2$

ζ. $\left(x^2 - \frac{1}{2}x \right)^2$

γ. $(2x - 3y)^2$

η. $(-x^2 - x)^2$

δ. $\left(\frac{1}{2} - x \right)^2$

θ. $(-2xy + y)^2$

ε. $(x^2 - 2)^2$

ι. $\left(x - \frac{1}{x} \right)^2$

9. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α) $(5x + 1)^2$

β) $\left(3x^2 - \frac{1}{x} \right)^2$

γ) $(3x^2 - 2y) \cdot (3x^2 + 2y)$

δ) $(x^2 - 2)^3$

ε) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

στ) $(3x + 2y + 1)^2$

ζ) $(-x - 2y)^2$ η) $(1 - 3x)^3$

10. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α. $(x - 3)^3$

ε. $(-x - 1)^3$

β. $(2x + 1)^3$

στ. $(x^2 + 1)^3$

γ. $(x^2 - x)^3$

ζ. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

δ. $(-x - 3)^3$

11. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α. $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

δ. $(2x - 3y)(2x + 3y)$

β. $(x - y^2)(x + y^2)$

ε. $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$

γ. $(2x + 3y - \omega)(2x + 3y + \omega)$

στ. $(3xy - 2)(3xy + 2)$

12. Να κάνετε τις πράξεις

α. $(3x - 2)^2 - (3x + 2)^2$

δ. $(x + 2)^3 - 6(x + 1)^2$

β. $(2x + 1)^3 - (2x - 1)^3$

ε. $(2x - 5)^2 - 4(x - 2)(x + 2)$

γ. $(2x - y)^3 + (2x + y)^3$

στ. $4(x - 3)^2 - 2(x + 3)^2$

13. α. Να κάνετε τις πράξεις

$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1)$

β. Να δείξετε ότι $13,1265^2 - 14,1265 \cdot 12,1265 = 1$

14. α. Να δείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 4$

β. Να δείξετε ότι $\left(\frac{1999}{2016} + \frac{2016}{1999}\right)^2 - \left(\frac{1999}{2016} - \frac{2016}{1999}\right)^2 = 4$

15. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) x^2 - (2x - 1)^2 - (3x - 1) \cdot (1 + 3x)$$

$$\beta) x^3 - (-x + 1)^3 + 2x(-x - 2) \cdot (x - 2)$$

$$\gamma) x^4 - (x - 3) \cdot (x - 2) - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 3)$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\alpha - \beta)^2 - 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 = 4\beta^2$$

$$\beta) (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

$$\gamma) (\alpha + 1) \cdot (\alpha^2 - \alpha + 1) + 3\alpha(\alpha + 1) = (\alpha + 1)^3$$

17. Αν $\alpha + \beta = -2$ και $\alpha\beta = -3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \alpha^2 + \beta^2 \quad \beta) \alpha^3 + \beta^3 \quad \gamma) \alpha^4 + \beta^4 \quad \delta) \alpha^5 + \beta^5$$

18. (Euler) Να αποδείξετε ότι:

$$8x^3 + (5x - 2)^3 - (7x - 2)^3 = -6x(5x - 2)(7x - 2)$$

19. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

$$\alpha. (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$$

$$\beta. (x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$$

$$\gamma. (2x - 3)^2 - 4(x + 1)^2 = 5 - 20x$$

20. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

$$\alpha. (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\beta. (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha(2\beta + \alpha) + \beta(2\alpha - \beta)$$

21. α. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$\beta. \text{ Αν ισχύει } x - \frac{1}{x} = 2 \text{ να βρείτε την τιμή της παράστασης}$$

$$A = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

22. Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = -4$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α. $\alpha^2 + \beta^2$

β. $\alpha^3 + \beta^3$

23. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις

α. $3x + 6y$

η. $x^8 - y^4$

β. $6x^2 + 2x$

θ. $x^3 + 8$

γ. $3\alpha x - 9\alpha^2 x^3$

ι. $x^3 y^3 - 1$

δ. $\alpha^3 \beta + \alpha^2 \beta^2$

ια. $x^3 + 8y^3$

ε. $6x^3 y^2 \omega - 2xy^3 \omega^3$

ιβ. $8x^3 + 27$

στ. $x^2 - 16$

ιγ. $a\beta^4 + \alpha^4 \beta$

ζ. $16\alpha^2 - \beta^2 \gamma^2$

24. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $x^2 + 2x + 1$

β. $x^2 - 6x + 9$

γ. $9x^2 + 12x + 4$

δ. $-y^2 + 8y - 16$

ε. $(x^2 + 4) - 16x^2$

25. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $x^2 - 2xy + y^2 - \alpha^2$

β. $x^3 y^3 + x^3 - y^3 - 1$

γ. $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha - 4\beta - 3$

$$\delta. (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^4 - (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)^3$$

26. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4\alpha^2\beta^4\gamma - 6\alpha^5\beta^3$

στ) $18x^3 - 8x$

β) $(3x - 2)^2 - 3x + 2$

ζ) $27x^3 - 1$

γ) $6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

η) $9x^2 + 6x + 1$

δ) $2x^2 + 5xy + 3y^2$

θ) $x^2 - 4x + 3$

ε) $(3x - 2)^2 - 49$

ι) $x^2 - y^2 + 2y - 1$

27. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x}$$

β) Να κάνετε τις πράξεις

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{2x - x^2}$$

γ) Να κάνετε τις πράξεις

$$\frac{1 - (x^{-1})^2}{1 - x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^2 + x}$$

28. Αν ισχύει $\alpha^2\beta - \beta = \alpha - \alpha\beta^2$, ($\alpha, \beta \neq 0$), να δείξετε ότι οι αριθμοί

α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

29. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $\frac{3x^2 + 3xy}{4xy + 4y}$

ε. $\frac{x^2y - xy^3}{x^3 - y^3}$

β. $\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 36}$

στ. $\frac{x^2 - 2x + 1 - y^2}{x^2 - xy - x}$

γ. $\frac{x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - x}$

ζ. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

δ. $\frac{x^3 - x^2 + x}{x^3 + 1}$

η. $\frac{2x^2y^2 - 8}{4x^2y + 8x}$

30. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\alpha. \frac{2x^2-4x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^4+2x^3}{x^2-2x}$$

$$\beta. \frac{3-\alpha}{3+\alpha} \cdot \frac{\alpha^2+6\alpha+9}{\alpha^2-9}$$

$$\gamma. \frac{5\alpha-10\alpha^2}{12\alpha^2+6\alpha} \cdot \frac{2\alpha+\alpha^2}{2\alpha-1}$$

31. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\alpha. \frac{\alpha^4+4\alpha+4}{\alpha x-\alpha y} : \frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha^2 x-\alpha^2 y}$$

$$\beta. \frac{x-2}{8x^3-27} : \frac{\alpha x-2\alpha+\beta x-2\beta}{3-2x}$$

32. Να δείξετε ότι

$$(2x-7)^3 + (x+4)^3 + (3x-3)^3 = 3(2x-7)(x+4)(3x-3)$$

$$\text{Να λυθεί η εξίσωση } (2x-7)^3 + (x+4)^3 + (3x-3)^3 = 0$$

33. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

34. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α. Να αποδείξετε ότι $y = 2x$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

35. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$$

36. Αν οι αριθμοί $\alpha - 1, \beta - 1$ είναι αντίστροφοι, να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \beta = \alpha\beta$

β) Οι αριθμοί $x = 4\alpha - 2(\alpha + 1)\beta$ και $y = 2\alpha - 4(\alpha - \beta)$ είναι αντίθετοι.

37. Αν ο αριθμός α είναι άρτιος και ο β είναι περιττός, να δείξετε ότι ο αριθμός $\gamma = 3\alpha + 5\beta + 4$ είναι περιττός.

38. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq \delta$, για τους οποίους ισχύουν $\frac{\alpha - \beta}{2} = 2$ και $\frac{\gamma}{\gamma - \delta} = -\frac{1}{3}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 4\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

39. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{3\alpha-\beta}{\beta} \quad \beta) \frac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-\beta}$$

40. Να βρείτε τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y, z , για τους οποίους ισχύουν:

$$x + y + z = 18 \quad \text{και} \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{4}{z}.$$

41. Αν οι αριθμοί α, β, γ , είναι ανάλογοι των αριθμών 2, 3, 5 και ισχύει

$$3\alpha - 2\beta + \gamma = -10$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

42. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) A = (x^{-2}y)^3 \cdot (x^2y^{-1})^2 \cdot 2x^3$$

$$\beta) B = \frac{x(x^4y^5)^4}{x^{-9}y^{-1}(x^{-2}y^{-3})^5}$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{x^{-2} \cdot (-2y^4)}{(y^{-1}x)^{-3} \cdot (y^{-2})^4}$$

43. Αν n φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.

44. Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος και ο α^2 περιττός, να δείξετε ότι ο α είναι περιττός.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Ο αριθμός 0 δεν έχει αντίθετο.
2. Ο αντίστροφος του 2 είναι το -2.
3. Αν $\gamma\delta=0$ τότε $\gamma=0$ και $\delta=0$.
4. Αν $\alpha = \beta$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}=1$.
5. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι τότε η παράσταση $-\alpha - \beta$ είναι ίση με 0.
6. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
7. Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta=0$ τότε $\beta=0$.
8. Έστω $\alpha \neq 0$. Τότε ο αντίθετος του αντιστρόφου του α ισούται με τον αντίστροφο του αντιθέτου του α .
9. Αν $\alpha\beta = \beta\gamma$ τότε $\alpha = \gamma$.
10. Αν $(\alpha - \beta)\gamma = 0$ τότε $\alpha = \beta$.
11. Αν $(x - 2)(x + 1) \neq 0$ τότε $x \neq 0$ και $x \neq 2$.
12. Οι αριθμοί $x + 2$ και $x - 2$ είναι αντίθετοι.
13. Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος τότε ο 2α είναι άρτιος.
14. Αν οι αριθμοί κ και λ είναι αντίθετοι τότε το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ ισούται με -1 .
15. Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίστροφοι τότε η διαφορά $x - \frac{1}{y}$ ισούται με 0.
16. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{7}$ τότε η παράσταση $\frac{7\alpha+4\beta}{14\beta}$ ισούται με $\frac{1}{2}$.

17. Ισχύει ότι $(\alpha + \beta)^2 = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2$

18. Ισχύει ότι $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$

19. Αν $(x - 2)(x^2 - 9) = 0$ τότε $x = 2$ ή $x = 3$ ή $x = -3$

20. Είναι $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x} = 1 - \frac{3}{x}$

21. Ισχύει ότι $(\alpha - \beta)(\beta - \alpha) = \alpha^2 - \beta^2$

22. Ισχύει ότι $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

23. Ισχύει πάντα $(x + 4)^0 = 1$

24. Ισχύει η ισότητα $4553^2 - 4552^2 = 9105$

25. Ο αριθμός $6\mu+4\lambda+3$ είναι άρτιος

26. Αν $x + \frac{1}{x} = 3$ τότε $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

27. Αν $(x - y)^2 + (x - z)^2 = 0$ τότε $x = y = z$

28. Αν $\kappa + \lambda = 1$ και $\kappa\lambda = -12$ τότε $\kappa^2 + \lambda^2 = 25$

29. Ισχύει $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$

30. Ισχύει $\left(2009 + \frac{1}{2009}\right)^2 - \left(2009 - \frac{1}{2009}\right)^2 = 2$

31. Ισχύει $(2^2)^2 = 2^{(2^2)}$

32. Ισχύει $(3^3)^3 = 3^{(3^3)}$

33. Αν $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ τότε $x = 2$ ή $y = -3$

$$M_{\alpha}[\partial\eta]^{\mu}\sqrt{\alpha}\tau\int\vec{\kappa}\vec{\alpha}$$

2.2. Διάταξη πραγματικών αριθμών

➤ Σύγκριση αριθμών

- Αν θέλουμε να **συγκρίνουμε** δύο αριθμούς α και β , **βρίσκουμε τη διαφορά τους** $\alpha - \beta$ κι αν $\alpha - \beta > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha > \beta$ ενώ αν $\alpha - \beta < 0$ τότε λέμε $\alpha < \beta$.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$ τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$.

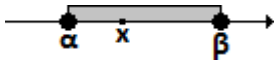
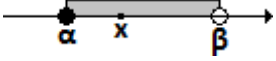
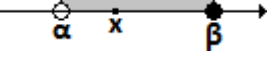
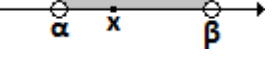
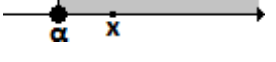
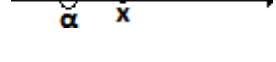
➤ Ιδιότητες διάταξης

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
- Αν α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\alpha}{\gamma}$

- Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\alpha}{\gamma}$
- Αν $\alpha, \beta > 0$ και n φυσικός αριθμός τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$ και $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$.
- Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$ (μεταβατική)
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$
- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$
- αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.
- Αν $\alpha < 0$ τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

✓ **Μπορούμε να προσθέσουμε** ανισότητες κατά μέλη ή και να τις **πολλαπλασιάσουμε** με την προϋπόθεση ότι αποτελείται από θετικούς αριθμούς αλλά **δεν αφαιρούμε ποτέ και δεν διαιρούμε ποτέ** ανισότητες κατά μέλη!

➤ Διαστήματα

	Ανισότητα	Συμβολισμός	Διαστήματα
1	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x \in [\alpha, \beta]$	
2	$\alpha \leq x < \beta$	$x \in [\alpha, \beta)$	
3	$\alpha < x \leq \beta$	$x \in (\alpha, \beta]$	
4	$\alpha < x < \beta$	$x \in (\alpha, \beta)$	
5	$x \geq \alpha$	$x \in [\alpha, +\infty)$	
6	$x > \alpha$	$x \in (\alpha, +\infty)$	
7	$x \leq \alpha$	$x \in (-\infty, \alpha]$	
8	$x < \alpha$	$x \in (-\infty, \alpha)$	

Μεθοδολογίες - λυμένα παραδείγματα

1. Αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι να αποδείξετε ότι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

Λύση

Οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι άρα ισχύει $\alpha \cdot \beta > 0$ Επομένως:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \text{ Δηλαδή } \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

2. Αν $\alpha > 1$ να δείξετε ότι $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$

Λύση

$$\text{Είναι } \alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(\alpha - 1) + \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - 1)(\alpha + 1) > 0 \text{ που ισχύει διότι:}$$

$$\alpha^2 \geq 0 \text{ άρα } \alpha^2 + 1 > 0$$

$$\text{και } \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$$

3. Να αποδείξετε ότι $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$

Λύση

$$\frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \xLeftrightarrow{x^2+1>0}$$

$$(x^2+1) \frac{2x}{x^2+1} \leq x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$2x \leq x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

4. Αν ισχύει $1 < \beta < \alpha$ να αποδείξετε ότι $\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2$

Λύση

$$\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta + \beta - \alpha - \beta^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\beta - 1) - \beta(\beta - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta - 1)(\alpha - \beta) > 0 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{Διότι } \beta < \alpha \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0 \text{ και } 1 < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$$

5. Να δείξετε ότι $\alpha^2 - 6\alpha + 11 > 0$

Λύση

$$\alpha^2 - 6\alpha + 11 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 3)^2 + 2 > 0 \text{ που ισχύει}$$

6. Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

Λύση

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \stackrel{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{Διότι } \alpha^2 \geq 0 \text{ και } (\alpha + \beta)^2 \geq 0 \text{ και } \beta^2 \geq 0$$

7. Αν ισχύει $1 \leq \alpha \leq 2$ και $-3 \leq \beta \leq -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών

αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων

α. $3\alpha + 2\beta$

β. $\alpha - \beta$

γ. $\alpha^2 + \beta^2$

δ. $3\alpha - \beta + 2$

$$\epsilon. -\frac{\alpha}{\beta}$$

Λύση

$$\alpha. 1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 3\alpha \leq 6 \quad (1)$$

$$-3 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -6 \leq 2\beta \leq -2 \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις ανισότητες (1) και (2) κατά μέλη και

προκύπτει:

$$3 + (-6) \leq 3\alpha + 2\beta \leq 6 + (-2) \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq 3\alpha + 2\beta \leq 4$$

$$\beta. 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (3)$$

$$-3 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -3(-1) \geq -\beta \geq -1(-1) \Leftrightarrow 3 \geq -\beta \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq -\beta \leq 3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε τις ανισότητες (3) και (4) κατά μέλη και

προκύπτει:

$$1 + 1 \leq \alpha - \beta \leq 2 + 3 \Leftrightarrow 2 \leq \alpha - \beta \leq 5$$

$$\gamma. 1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq \alpha^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha^2 \leq 4 \quad (5)$$

$$-3 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -3(-1) \geq -\beta \geq -1(-1) \Leftrightarrow 3 \geq -\beta \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$1^2 \leq (-\beta)^2 \leq 3^2 \Leftrightarrow 1 \leq \beta^2 \leq 9 \quad (6)$$

Προσθέτουμε τις ανισότητες (5) και (6) κατά μέλη και

προκύπτει:

$$1 + 1 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 4 + 9 \Leftrightarrow 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 13$$

$$\delta. 1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 3\alpha \leq 6 \quad (7)$$

$$-3 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -3(-1) \geq -\beta \geq -1(-1) \Leftrightarrow 3 \geq -\beta \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq -\beta \leq 3 \Leftrightarrow 1 + 2 \leq -\beta + 2 \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 3 \leq -\beta + 2 \leq 5$$

(8)

Προσθέτουμε τις ανισότητες (7) και (8) κατά μέλη και

προκύπτει:

$$3 + 3 \leq 3\alpha - \beta + 2 \leq 1 + 5 \Leftrightarrow 6 \leq 3\alpha - \beta + 2 \leq 11$$

$$\epsilon. \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (9)$$

$$-3 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{-3} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{-1} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{\beta} \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$-1(-1) \geq -1\frac{1}{\beta} \geq -\frac{1}{3}(-1) \Leftrightarrow 1 \geq -\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{\beta} \leq 1 \quad (10)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες (9) και (10) κατά μέλη και

προκύπτει:

$$1 \cdot \frac{1}{3} \leq \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\beta}\right) \leq 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq -\frac{\alpha}{\beta} \leq 2$$

8. Να γράψετε με μορφή διαστήματος το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει:

α. $2 \leq x \leq 4$

ε. $x \geq -3$

β. $2 < x < 8$

στ. $x \leq 5$

γ. $-1 \leq x < 10$

ζ. $x > -2$

δ. $-6 < x \leq 13$

Λύση

α. Είναι $2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [2,4]$

β. Είναι $2 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (2,8)$

γ. Είναι $-1 \leq x < 10 \Leftrightarrow x \in [-1,10)$

δ. Είναι $-6 < x \leq 13 \Leftrightarrow x \in (-6,13]$

ε. Είναι $x \geq -3 \Leftrightarrow x \in [-3, +\infty)$

στ. Είναι $x \leq 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5]$

ζ. Είναι $x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, +\infty)$

Ο μεγάλος Αρχιτέκτονας του Σύμπαντος αρχίζει να μοιάζει τώρα σαν ένας γνήσιος μαθηματικός.

James Jeans

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Αν $\alpha < 3 < \beta$ να δείξετε ότι

$$(\alpha - 3)(\beta - 3)(\alpha - \beta) > 0$$

2. Αν $\alpha > \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha - \beta > 0$

3. Αν $\alpha > 2$ να δείξετε ότι $3\alpha + 5 > \alpha + 9$

4. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$

β. $\alpha(\alpha + 6) \geq 2(\alpha - 2)$

γ. $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$

δ. $4\beta(\alpha - 2\beta) \leq (\alpha - \beta)^2$

ε. $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{(\alpha + \beta)^2}{5}$

στ. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$

ii. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο

τους αριθμούς $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$

5. Να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$

6. Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta}$

7. Αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι με $\beta \geq \alpha$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} \leq \beta - \frac{1}{\beta}$$

8. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να

αποδείξετε ότι

i. $\alpha < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < \beta$

ii. $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

9. Αν ισχύει $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < \beta$

10. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να δείξετε ότι

i. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

ii. $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$

11. α) Αν $\alpha < 1 \leq \beta$, να δείξετε ότι:

i) $(\alpha - 1) \cdot (\beta - 1) \leq 0$ ii) $1 + \alpha\beta \leq \alpha + \beta$

β) Αν $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $x^2 - 3x + 2 < 0$

12. Αν $\alpha < \beta < 1$, να δείξετε ότι $\alpha\beta + \beta > \alpha + \beta^2$

13. Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$.

14. Να δείξετε ότι:

α) $(\alpha^2 + \beta^2) \cdot (x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$

β) $101 \cdot (x^2 + y^2) \geq (10x + y)^2$

15. Να δείξετε ότι:

α) $x^2 - 6x + 10 > 0$

β) $2x^2 - 2x + 1 > 0$

16. α) Να δείξετε ότι $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 \geq 0$. Πότε ισχύει το ίσον και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10$;

β) Αν ισχύει $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y .

17. Αν ισχύει η σχέση $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ να υπολογίσετε τους x και y .

18. Αν ισχύει η σχέση $x^2 + y^2 - 2(x - y) + 2 = 0$ να υπολογίσετε τους x και y .

19. Αν ισχύει η σχέση $x^2 + y^2 = 4y - 4$ να υπολογίσετε τους x και y .

20. Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει

$$x^2 + y^2 - 8y \leq 4(-5 - x)$$

21. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha - 2\beta) - 5$. Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

22. Για τους πραγματικούς α, β ισχύουν $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της κάθε παράστασης

α. $\alpha - 2\beta$

β. $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

23. Αν ισχύει $2 < \alpha < 4$ και $3 < \beta < 5$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

α. $2\alpha + 4\beta$

γ. $-\alpha + \beta$

β. $\alpha - \beta$

δ. $-\alpha - 3\beta$

ε. $2 - \alpha\beta$

στ. $\frac{\alpha}{\beta} + 2$

24. Αν $1 < x \leq 2$ και $3 \leq y < 4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $2x - 3y$ β) xy γ) $\frac{x}{y}$ δ) $\frac{x-1}{y}$ ε) $x^2 - y^3$

25. Αν ισχύει ότι $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$, να δείξετε ότι $\alpha > 1$.

26. Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $0 < \beta < 3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

α. $\alpha + \beta$

γ. $\alpha^2 + \beta^2$

β. $\alpha - 2\beta$

δ. $\beta - 4\alpha$

27.

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

28. Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $L = 2\alpha\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $K \geq L$ για κάθε τιμή των α, β

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει ότι $K = L$;

29. Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $L = 2\alpha(3 - \beta)$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι

$$K - L = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β. Να αποδείξετε ότι $K \geq 1$ για κάθε τιμή των α, β

γ. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει ότι $K = 1$;

30. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει ότι $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α. Να βρείτε τα όρια των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλόγραμμου.

31. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν την σχέση: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 \leq 0$

32. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

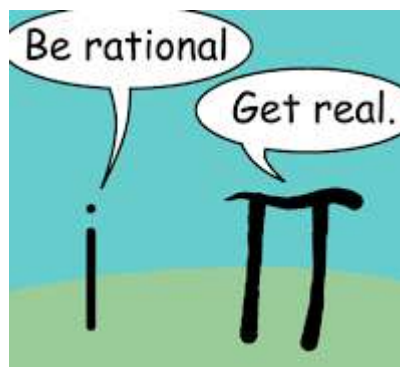
$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση γίνεται ελάχιστη;

Τα μαθηματικά είναι η μόνη αξιόλογη μεταφυσική.

Lord Kelvin

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Αν $\alpha < 1$ τότε $\alpha^2 < 1$
2. Αν $2x < y$ τότε $x - \frac{y}{2} < 0$
3. Αν $3 < x < y$ τότε $xy > 0$
4. Ισχύει $(x - y)^2 \geq 0$
5. Ισχύει $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 0$
6. Αν ο αριθμός x είναι το πολύ 7 τότε $x \leq 7$
7. Αν $x < y < 0$ τότε $x^2 < y^2$
8. Αν $-4x > -8$ τότε $x > 2$
9. Ισχύει $2xy + 2xz \geq 2x^2 + y^2 + z^2$
10. Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$
11. Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ τότε $\beta > \gamma$
12. Αν $\alpha < \beta$ και $x < y$ τότε $(\alpha - x)(\beta - y) > 0$
13. Αν $(\alpha - 2)(\beta - 3) < 0$ τότε $\alpha < 2$ και $\beta < 3$



2.3. Απόλυτη τιμή

➤ Ορισμός απόλυτης τιμής

- Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο :

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

- ✓ **Απόλυτη τιμή** του αριθμού α ονομάζεται η απόσταση του σημείου Α από την αρχή 0 των αξόνων. Συμβολίζεται με $|\alpha|$.
- ✓ Η απόλυτη τιμή κάθε θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός
- ✓ Η απόλυτη τιμή κάθε αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
- ✓ $|0| = 0$

➤ Ιδιότητες απόλυτης τιμής

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$ και $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $|\alpha| \geq 0, |\alpha| \geq -\alpha, -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$
- $|\alpha^2| = |\alpha|^2 = \alpha^2$
- $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Αν $\theta > 0$ τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$

➤ Απόσταση αριθμών

- Αν οι αριθμοί α, β παριστάνονται σε έναν άξονα αριθμών με τα σημεία A, B τότε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α, β που συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Δηλαδή

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

- ✓ Το διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχει **μήκος** $\beta - \alpha$ και **κέντρο** (Μέσο) το σημείο

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

- Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ τότε:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow$$

$$x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$



Μεθοδολογίες - λυμένα παραδείγματα

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = |-6| + |2016| - |-2015| + 1$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= |-6| + |2016| - |-2015| + 1 \\ &= 6 + 2016 - 2015 + 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $A = |x^2 + 4x + 4|$

β. $B = |-x^2 + 6x - 9|$

γ. $\Gamma = |-x^2 - 1|$

Λύση

α. Είναι $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $A = |x^2 + 4x + 4| = |(x + 2)^2| = (x + 2)^2$

β. Είναι $-x^2 + 6x + 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2 \leq 0$

Άρα $B = |-x^2 + 6x - 9| = |-(x - 3)^2| = (x - 3)^2$

γ. Είναι $-x^2 - 1 = -(x^2 + 1) < 0$

Άρα $\Gamma = |-x^2 - 1| = |-(x^2 + 1)| = x^2 + 1$

3. Αν $\alpha < 3 < \beta$, να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = |3 - \alpha| - |\alpha - \beta| - |\beta - 3|$$

Λύση

- $\alpha < 3 \Leftrightarrow \alpha - 3 < 0$ Άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$ Άρα $|\alpha - \beta| = -(\alpha - \beta)$
- $3 < \beta \Leftrightarrow \beta - 3 > 0$ Άρα $|\beta - 3| = \beta - 3$

Επομένως

$$\begin{aligned} A &= |3 - \alpha| - |\alpha - \beta| - |\beta - 3| \\ &= (3 - \alpha) + (\alpha - \beta) - (\beta - 3) \\ &= 3 - \alpha + \alpha - \beta - \beta + 3 \\ &= -2\beta + 6 \end{aligned}$$

4. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = 3 - |x - 4|$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ τότε $|x - 4| = x - 4$

άρα η παράσταση γίνεται:

$$A = 3 - |x - 4| = 3 - (x - 4) = 3 - x + 4 = 7 - x$$

- Αν $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ τότε $|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$A = 3 - |x - 4| = 3 - (4 - x) = 3 - 4 + x = x - 1$$

5. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |2\alpha - 2\beta| + |\beta - \alpha| - |3\beta - 3\alpha|$$

Λύση

- $|2\alpha - 2\beta| = |2(\alpha - \beta)| = 2|\alpha - \beta|$
- $|\beta - \alpha| = |\alpha - \beta|$
- $|3\beta - 3\alpha| = |3\alpha - 3\beta| = |3(\alpha - \beta)| = 3|\alpha - \beta|$

Επομένως η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= |2\alpha - 2\beta| + |\beta - \alpha| - |3\beta - 3\alpha| \\ &= 2|\alpha - \beta| + |\alpha - \beta| - 3|\alpha - \beta| \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Να βρεθούν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει ότι:

- α.** $|x| < 2$
- β.** $|x - 2| < 3$
- γ.** $|x + 3| > 5$
- δ.** $|2 - x| > 3$

Λύση

- α. Έχουμε $|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$
- β. $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (2 - 3, 2 + 3) \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$
- γ. $|x + 3| > 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3 - 5) \cup (-3 + 5, +\infty) \Leftrightarrow$
 $x \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty)$
- δ. $|2 - x| > 3 \Leftrightarrow |x - 2| > 3 \Leftrightarrow$
 $x \in (-\infty, 2 - 3) \cup (2 + 3, +\infty) \Leftrightarrow$
 $x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

7. Να βρεθεί η τιμή του x , ώστε να ισχύει $|2x - 4| + |-3x + 6| = -10$

Λύση

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών έχουμε:

- $|2x - 4| = |2(x - 2)| = |2| \cdot |x - 2| = 2 \cdot |x - 2|$
- $|-3x + 6| = |-3(x - 2)| = |-3| \cdot |x - 2| = 3 \cdot |x - 2|$

Επομένως,

$$|2x - 4| + |-3x + 6| = -10 \Leftrightarrow 2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x - 2| = -10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \cdot |x - 2| = -10 \Leftrightarrow |x - 2| = 10 \Leftrightarrow x - 2 = 10 \text{ ή } x - 2 = -10 \Leftrightarrow$$

$$x = 10 + 2 \text{ ή } x = -10 + 2 \Leftrightarrow (x = 12 \text{ ή } x = -8)$$

8. Να βρεθεί η τιμή του x , ώστε να ισχύει $|x - 1| + |2x + 4| = 4$

Λύση

Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο των απόλυτων τιμών έχουμε:

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $2x + 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$

Έτσι, δημιουργείται ο παρακάτω πίνακας προσήμων για τις δύο απόλυτες τιμές:

x	-2		1	
$x - 1$	$-$		$-$	$+$
$2 \cdot x + 4$	$-$	0	$+$	$+$

- για $x < -2$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -(x-1) - (2x+4) &= 4 \Leftrightarrow -x+1-2x-4=4 \Leftrightarrow -x-2x \\ &= 4-1+4 \Leftrightarrow -3x=7 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{7}{3}\right), \text{ όπου η λύση είναι δεκτή}$$

- για $-2 \leq x < 1$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -(x-1) + (2x+4) &= 4 \Leftrightarrow -x+1+2x+4=4 \Leftrightarrow \\ -x+2x &= 4-1-4 \Leftrightarrow \\ (x &= -1), \text{ όπου η λύση είναι δεκτή} \end{aligned}$$

- για $x \geq 1$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} +(x-1) + (2x+4) &= 4 \Leftrightarrow x-1+2x+4=4 \Leftrightarrow \\ x+2x &= 4+1-4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= 1 \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3}\right), \text{ όπου η λύση απορρίπτεται} \end{aligned}$$

9. Να βρεθούν οι τιμές του x για να ισχύουν οι σχέσεις:

i. $|3x-9| + |-x+3| = 0$ και

ii. $|2x+5| - |x-4| = 0$

Λύση

- i. Επειδή ισχύει βάσει ορισμού ότι $|3x-9| \geq 0$ και $|-x+3| \geq 0$ τότε για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε:

$$\begin{aligned} |3x-9| = 0 \text{ και } |-x+3| = 0 &\Leftrightarrow 3x-9=0 \text{ και } -x+3=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= 9 \text{ και } -x = -3 \Leftrightarrow (x=3 \text{ και } x=3). \end{aligned}$$

Άρα, η ισότητα ισχύει για την τιμή $x=3$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } |2x + 5| - |x - 4| &= 0 \Leftrightarrow |2x + 5| = |x - 4| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x + 5 = x - 4 \text{ ή } 2x + 5 = -(x - 4) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x + 5 = x - 4 \text{ ή } 2x + 5 = -x + 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x - x = -4 - 5 \text{ ή } 2x + x = 4 - 5 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -9 \text{ ή } 3x = -1 \Leftrightarrow \left(x = -9 \text{ ή } x = -\frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

10. Να βρεθεί η τιμή του x για να ισχύει η σχέση $|8x + 2| + |-4x - 1| \leq 0$

Λύση

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών έχουμε:

- $|8x + 2| = |2(4x + 1)| = |2| \cdot |4x + 1| = 2 \cdot |4x + 1|$
- $|-4x - 1| = |-(4x + 1)| = |-1| \cdot |4x + 1| = |4x + 1|$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 |8x + 2| + |-4x - 1| &\leq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot |4x + 1| + |4x + 1| \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3 \cdot |4x + 1| \leq 0 \Leftrightarrow |4x + 1| \leq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 4x + 1 = 0 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow \left(x = -\frac{1}{4} \right)
 \end{aligned}$$

11. Να βρεθεί η τιμή του x για να ισχύει η σχέση $|3x - 6| + |4x - 12| \leq 0$

Λύση

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών έχουμε:

- $|3x - 6| = |3(x - 2)| = |3| \cdot |x - 2| = 3 \cdot |x - 2|$

- $|4x + 12| = |4(x + 3)| = |4| \cdot |x + 3| = 4 \cdot |x + 3|$

Επειδή οι απόλυτες τιμές παράγονται από διαφορετικό παράγοντα και εξ' ορισμού

$$|3x - 6| \geq 0 \text{ και } |4x - 12| \geq 0$$

παίρνουμε υποχρεωτικά ότι:

$$(3x - 6) = 0 \text{ και } (4x - 12) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (x - 2) = 0 \text{ και } 4 \cdot (x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ και } x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ και } x = -3) \text{ , το οποίο όμως είναι}$$

άτοπο.

12. Να βρεθεί η τιμή του x για να ισχύει η σχέση $|2x + 8| + |3x - 6| = 0$

Λύση

Επειδή βάσει ορισμού ισχύει ότι:

$$|2x + 8| \geq 0 \text{ και } |3x - 6| \geq 0$$

τότε για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε:

$$(2x + 8) = 0 \text{ και } (3x - 6) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 4) = 0 \text{ και } 3(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = 0 \text{ και } x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x = -4 \text{ και } x = 2) \text{ , το οποίο όμως}$$

είναι **άτοπο.**

13. Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος και ο α^2 περιττός , να δείξετε ότι ο α είναι περιττός.

Λύση

[Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο «απαγωγή σε άτοπο»]

Έστω ότι ο α δεν είναι περιττός. Τότε θα είναι άρτιος, δηλαδή της μορφής :

$$\alpha = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Οπότε } \alpha^2 = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2 = 2(2\kappa^2) = 2\lambda, \quad [\text{όπου } \lambda = 2\kappa^2]$$

Δηλαδή ο α^2 είναι άρτιος. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι περιττός, δηλαδή οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Επομένως, η παραδοχή ότι ο α δεν είναι περιττός ήταν λανθασμένη.

Άρα ο α είναι περιττός.

14. Να γράψετε την παράσταση $A = |x + 2| - 2|x - 1|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Λύση

- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \leq -2$, τότε $x < 1$ οπότε $x + 2 \leq 0$ και $x - 1 < 0$
Επομένως $|x + 2| = -x - 2$ και $|x - 1| = -x + 1$
Οπότε $A = -x - 2 - 2(-x + 1) = -x - 2 + 2x - 2 = x - 4$
- Αν $-2 < x \leq 1$, τότε $x + 2 > 0$ και $x - 1 \leq 0$
Επομένως $|x + 2| = x + 2$ και $|x - 1| = -x + 1$
Οπότε $A = x + 2 - 2(-x + 1) = x + 2 + 2x - 2 = 3x$
- Αν $x > 1$, τότε $x > -2$ οπότε $x - 1 > 0$ και $x + 2 > 0$
Επομένως $|x + 2| = x + 2$ και $|x - 1| = x - 1$
Οπότε $A = x + 2 - 2(x - 1) = x + 2 - 2x + 2 = -x + 4$

$$A = \begin{cases} x - 4, & \text{αν } x \leq -2 \\ 3x, & \text{αν } -2 < x \leq 1 \\ -x + 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Εγώ δεν συμφωνώ με τα μαθηματικά. Το άθροισμα πολλών μηδενικών είναι ένας επικίνδυνος αριθμός.

Stanislaw Jerzy

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές

α. $A = |\pi - 2| - |1 - \pi|$

β. $B = |4 - \pi| + |2 - \pi|$

γ. $\Gamma = |\sqrt{3} - 1| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

2. Αν $\alpha < 1 < \beta$ να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

3. Αν $x < 2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x - 2|$

β. $B = 3 - |2 - x|$

γ. $\Gamma = 1 - |2x - 4|$

δ. $\Delta = |3x - 6| - |4 - 2x|$

4. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + |x - 3|$. Να γράψετε την

παράσταση Α χωρίς απόλυτες τιμές στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $2 < x < 3$

β. $x < 2$

γ. $x > 3$

5. Αν $\alpha < 3 < \beta$ να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α. $A = |3 - \alpha| - |\alpha - \beta| + |3 - \beta|$

β. $B = |\alpha - 3| + |\beta| + |\alpha - \beta|$

γ. $\Gamma = |\alpha - 5| - |\beta - 2|$

6. Αν ισχύει $-2 < x < 3$ να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις

α. $A = |5 - |x - 3||$

β. $B = ||x + 2| - 5 - |2x - 6||$

7. Έστω $0 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι:

i. $\beta = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$

ii. $\alpha = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$

iii. Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους

αριθμούς $1, \frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Απόλυτη τιμή	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x < 3$	
$ x \leq 2$	
$ x \geq 3$	
$ x > 2$	
	$x \in [-5, 5]$
	$x \in (-4, 4)$
	$x \in (-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x - 2 < 1$		
$ x + 1 < 3$		
$ x + 3 > 5$		
	$d(x, -4) \leq 2$	
	$d(x, 3) \geq 1$	
	$d(x, 7) > 1$	
		$(-\infty, -10]$ $\cup [-2, +\infty)$
		$[-7, 3]$
		$(1, 17)$

10. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 3| - |x + 1| + |y - 1| - |y + 2|$ όπου

$$-1 \leq x \leq 3 \text{ και } -2 \leq y \leq 1$$

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση

β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης A

11. Αν $-2 < \alpha < 2$ να αποδείξετε ότι $|4 - |\alpha - 2|| = \alpha + 2$

12. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A = x - y + 2$

β. $0 < A < 4$

13. Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2$ όπου x πραγματικός αριθμός

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii. Για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

14. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$, να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$$

15. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$ όπου x

πραγματικός αριθμός.

α. Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$

β. Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$. Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |\pi - 3| + |1 - \sqrt{2}|$ β) $B = |x^2 + 5| - |-x^2 + 6x - 9|$

γ) $\Gamma = ||x| + 1| - |x - |x|| + |x^2 - 6x + 10|$

17. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{|\alpha-1|}{|1-\alpha|} - \frac{|-\beta-1|}{|\beta+1|} + \frac{|\alpha-\beta+\gamma|}{|\beta-\alpha-\gamma|}$

18. Αν $-1 < x < 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |2x - 7|$$

19. Να γράψετε την παράσταση $A = |x + 2| - 3x + 1$, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

20. Να γράψετε την παράσταση $A = 2|x - 1| - |x - 2|$, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

21. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

α) $3|x| - 2 = 0$ β) $2|x - 1| - 3 = 0$

γ) $|4x - 3| - |3x - 4| = 0$

δ) $|x - 2| = x - 2$

22. Να βρείτε τις τιμές των x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$|x - 1| + |x - 2y + 5| = 0$$

23. Να βρεθεί η τιμή του α , ώστε να ισχύει:

i. $|\alpha + 5| + |3\alpha + 15| = 12$

ii. $|3\alpha - 3| + |\alpha + 2| = -4$

iii. $|2\alpha - 6| + |2\alpha + 6| = -3$

iv. $|\alpha - 4| + |2\alpha - 8| = 9$

24. Να βρεθούν οι τιμές του x για να ισχύουν οι σχέσεις:

i. $|5x - 20| + |2x - 8| = 0$

ii. $|3x + 9| + |x + 3| = 0$

iii. $|2x + 10| + |x - 5| = 0$

iv. $|x + 4| + |3x - 9| = 0$

25. Να βρεθεί η τιμή του x σε κάθε περίπτωση για να ισχύουν οι σχέσεις:

i. $|2x + 2| + |-3x - 3| \leq 0$

ii. $|3x + 6| + |x + 2| \leq 0$

iii. $|x - 4| + |2x - 6| \leq 0$

iv. $|x + 2| + |-4x + 8| \leq 0$

26. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α) $2|x| - 3 < 0$ β) $1 - 3|x| \leq 0$ γ) $|2x - 1| - 3 < 0$

δ) $d(x, -2) \geq 1$ ε) $|x + 2| < |x - 4|$

27.

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει

$$|y - 3| < 1$$

β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου

παραλληλογράμμου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να

βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του

εμβαδού E του ορθογωνίου.

28. Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των

πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα με

$$-2 < x < 7$$

α. Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των
παραστάσεων

i. $|x + 2|$

ii. $|x - 7|$

β. Με την βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική
ερμηνεία του αθροίσματος $|x + 2| + |x - 7|$

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$
γεωμετρικά.

δ. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο
συμπέρασμα.

29. Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός , να δείξετε ότι ο α είναι άρτιος αριθμός.

Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν
στη βαθύτερη γνώση του κόσμου.

Οδυσσέας Ελύτης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha| > 0$
2. Ισχύει $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$
3. Ισχύει $|\alpha|^3 = \alpha^3$
4. Ισχύει $|\alpha|^2 - \alpha^2 = 0$
5. Ισχύει $|-3 + 2| = |-3| + |2|$
6. Αν $|x + 2| + |x - 3| = 0$ τότε $x = -2$ ή $x = 3$
7. Αν $|\alpha| = |\beta|$ τότε $\alpha = \pm\beta$
8. Αν $|x| + |y| + |z| = 0$ τότε $x = y = z = 0$
9. $|x| + |x - 1| > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
10. Αν $2\alpha - 5 \geq 3\beta$ και $2\alpha + 5 \leq 3\beta$ τότε $|2 - 3\beta| \geq 5$
11. Αν $-3 < x < 1$ τότε $|x + 1| < 2$
12. Αν $|x + 1| + |y + 2| = 0$ τότε $x = -1$ ή $y = -2$
13. Αν $|x - 2| = |2x - 1|$ τότε $x = -1$
14. Αν $x < -4$ ή $x > 2$ τότε $|x + 1| > 3$
15. Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:
16. $d(x, -2) < 1$
17. $|x + 2| < 1$
18. $-3 \leq x \leq -1$
19. Αν $|3 - |x|| = |x| - 3$ τότε $-3 \leq x \leq 3$
20. Αν $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ τότε $\alpha\beta < 0$.

2.4. Ρίζες πραγματικών αριθμών

➤ Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού α

- Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό α .

Συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$

- ✓ Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$x^2 = \alpha$$

➤ Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας

- $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ με $\alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
- Προσοχή δεν ισχύει $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$

➤ Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α

- Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στη ν-οστή δύναμη δίνει τον α .

- ✓ Αν $\alpha \geq 0$ τότε η $\sqrt[n]{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$x^n = \alpha.$$

- ✓ Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το n είναι 2. Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε $\sqrt[n]{\alpha}$ κι εννοούμε την τετραγωνική ρίζα.
- ✓ Το n λέγεται τάξη της ρίζας.
- ✓ Το α λέγεται υπόριζη ποσότητα και δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

➤ **Ιδιότητες ριζών**

- Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$
- Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$
- $\sqrt[n]{\alpha} \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta \geq 0$
- $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$ με $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$
- $\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}$ ($\alpha, \beta \geq 0$)
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n \cdot m]{\alpha}$ ($\alpha \geq 0$)
- $\sqrt[n]{\alpha^{k \cdot p}} = \sqrt[n]{\alpha^k}^p$ ($\alpha \geq 0$)
- Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$

➤ **Δύναμη με ρητό εκθέτη**

- Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

- Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και μ άρτιος και n θετικός ακέραιος τότε ορίζουμε

$$|\alpha|^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}$$



Μεθοδολογίες - λυμένα παραδείγματα

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $\sqrt{13^2}$

δ. $\sqrt{2}\sqrt{18}$

β. $\sqrt{10^2}$

ε. $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$

γ. $\sqrt{(-8)^2}$

στ. $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

Λύση

α. $\sqrt{13^2} = 13$

β. $\sqrt{10^2} = 10$

γ. $\sqrt{(-8)^2} = 8$

δ. $\sqrt{2}\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

ε. $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = \frac{6}{2} = 3$

στ. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$

2. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

α. $A = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

β. $B = \sqrt{50} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

γ. $\Gamma = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(5 - \sqrt{12})^2}$

Λύση

α. $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

▪ $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

- $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

Άρα η παράσταση γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} \\ &= 3\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + |2 - \sqrt{3}| \\ &= 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= -6\sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

β. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

Άρα η παράσταση γράφετε:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{50} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{8} \\ &= 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= -7\sqrt{2} \end{aligned}$$

γ. $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$

$$\sqrt{(5 - \sqrt{12})^2} = |5 - \sqrt{12}| = 5 - \sqrt{12} = 5 - 2\sqrt{3}$$

Άρα η παράσταση γράφεται:

$$\Gamma = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(5 - \sqrt{12})^2}$$

$$= -1 + \sqrt{3} - (5 - 2\sqrt{3})$$

$$= -1 + \sqrt{3} - 5 + 2\sqrt{3}$$

$$= -6 + 3\sqrt{3}$$

3. α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(1 - 3\sqrt{2})^2$ και $(1 + 3\sqrt{2})^2$

β. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. (1 - 3\sqrt{2})^2 &= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 9 \cdot 2 \\ &= 19 - 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 3\sqrt{2})^2 &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 1 + 6\sqrt{2} + 9 \cdot 2 \\ &= 19 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. A &= \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 + 6\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(1 - 3\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 + 3\sqrt{2})^2} \\ &= |1 - 3\sqrt{2}| - |1 + 3\sqrt{2}| \\ &= -(1 - 3\sqrt{2}) - (1 + 3\sqrt{2}) \\ &= -1 + 3\sqrt{2} - 1 - 3\sqrt{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

4. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

$$\alpha. \sqrt[12]{3^5} \sqrt[12]{3^7}$$

$$\beta. \sqrt[8]{\alpha^3} \cdot \sqrt[8]{\alpha^5} \text{ με } \alpha \geq 0$$

$$\gamma. \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2^{10}}}}$$

$$\delta. \sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{4}}}$$

$$\epsilon. \sqrt{3^3} \sqrt[3]{2^8} \sqrt[8]{81^{12}} \sqrt[12]{256}$$

$$\zeta. \sqrt[3]{2^2} \sqrt[6]{2^2}$$

$$\sigma\tau. \sqrt[6]{32}^{11} \sqrt[11]{2 \sqrt[3]{4}}$$

Λύση

$$\alpha. \sqrt[12]{3^5} \sqrt[12]{3^7} = \sqrt[12]{3^5 \cdot 3^7} = \sqrt[12]{3^{12}} = 3$$

2^{ος} τρόπος

$$\sqrt[12]{3^5} \sqrt[12]{3^7} = 3^{\frac{5}{12}} \cdot 3^{\frac{7}{12}} = 3^{\frac{5}{12} + \frac{7}{12}} = 3^{\frac{12}{12}} = 3$$

$$\beta. \sqrt[8]{\alpha^3} \cdot \sqrt[8]{\alpha^5} = \sqrt[8]{\alpha^3 \cdot \alpha^5} = \sqrt[8]{\alpha^8} = |\alpha| = \alpha$$

$$\gamma. \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2^{10}}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{10}} = \sqrt[30]{2^{10}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\delta. \sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{4}}} = \sqrt[6 \cdot 2 \cdot 5]{4} = \sqrt[60]{2^2} = \sqrt[30]{2}$$

$$\epsilon. \text{Ε.Κ.Π.}(2,3,8,12)=24$$

$$\blacksquare \sqrt{3} = \sqrt[2 \cdot 12]{3^{12}} = \sqrt[24]{3^{12}}$$

$$\blacksquare \sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 8]{2^8} = \sqrt[24]{2^8}$$

$$\blacksquare \sqrt[8]{81} = \sqrt[8 \cdot 3]{81^3} = \sqrt[24]{(3^4)^3} = \sqrt[24]{3^{12}}$$

$$\blacksquare \sqrt[12]{256} = \sqrt[12 \cdot 2]{(2^8)^2} = \sqrt[24]{2^{16}}$$

Επομένως η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} \sqrt{3^3} \sqrt[3]{2^8} \sqrt[8]{81^{12}} \sqrt[12]{256} &= \sqrt[24]{3^{12}} \sqrt[24]{2^8} \sqrt[24]{3^{12}} \sqrt[24]{2^{16}} = \sqrt[24]{3^{24} \cdot 2^{24}} \\ &= \sqrt[24]{(3 \cdot 2)^{24}} = \sqrt[24]{6^{24}} = 6 \end{aligned}$$

στ. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \blacksquare \sqrt[6]{32} &= \sqrt[6]{2^5} \\ \blacksquare \sqrt[11]{2\sqrt{2^3}\sqrt{4}} &= \sqrt[11]{\sqrt{2^2} \cdot 2^3\sqrt{4}} = \sqrt[11]{\sqrt[8]{(2^3)^3 \cdot 2^2}} = \\ &= \sqrt[11 \cdot 2 \cdot 3]{2^{11}} = \sqrt[66]{2^{11}} = \sqrt[6]{2} \end{aligned}$$

Επομένως η παράσταση γίνεται:

$$\sqrt[6]{32} \sqrt[11]{2\sqrt{2^3}\sqrt{4}} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$\zeta. \sqrt[3]{2^2}\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{(2^2)^2}\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

5. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή

$$\alpha. \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

$$\beta. \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \\ &= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} &= \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{1-2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{-1} = \\ &= -3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

6. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

Λύση

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \\ & \frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} + \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})} \\ & = \frac{(\sqrt{\alpha})^2 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2}{(\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2} \\ & = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

7. Να συγκρίνεται τους αριθμούς

α. $1 - \sqrt{3}$ και $\sqrt{6} - 2$

β. $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Λύση

α. $1 - \sqrt{2} < 0$ και $\sqrt{6} - 2 > 0$ άρα $1 - \sqrt{3} > \sqrt{6} - 2$

β. Έστω $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{5}^2 < (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$

$$5 < \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow 5 < 2 + 2\sqrt{6} + 3 \Leftrightarrow$$

$$5 < 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{6} \text{ που ισχύει}$$

8. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{6} + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{3}$

Λύση

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 > (2 + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{6}^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 > 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow$$

$$6 + 2\sqrt{12} + 2 > 4 + 4\sqrt{3} + 3 \Leftrightarrow$$

$$8 + \sqrt{2^2 \cdot 12} > 7 + \sqrt{4^2 \cdot 3} \Leftrightarrow$$

$$8 + \sqrt{48} > 7 + \sqrt{48} \Leftrightarrow$$

$$8 > 7 \text{ που ισχύει}$$

Οι εξισώσεις είναι περισσότερες ενδιαφέρουσες για μένα. Η πολιτική είναι για το παρόν, ενώ οι εξισώσεις είναι για την αιωνιότητα.

Αϊνστάιν

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να υπολογίσετε τις επόμενες ρίζες

α. $\sqrt{9}$

στ. $\sqrt[6]{0}$

β. $\sqrt{25}$

ζ. $\sqrt[12]{1}$

γ. $\sqrt{121}$

η. $\sqrt[3]{27}$

δ. $\sqrt[3]{8}$

θ. $\sqrt[4]{10000}$

ε. $\sqrt[4]{16}$

ι. $\sqrt[5]{0,00001}$

2. Να υπολογίσετε τις ρίζες

α. $\sqrt{13^2}$

δ. $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

β. $\sqrt{(\pi-2)^2}$

ε. $(\sqrt[3]{12})^3$

γ. $\sqrt{(-13)^2}$

στ. $\sqrt{\frac{x^2}{16}}$

3. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

α. $\sqrt{2}\sqrt{8}$

γ. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{27}}$

β. $\sqrt{3}\sqrt{27}$

δ. $\frac{\sqrt{8}\sqrt{40}}{\sqrt{5}}$

4. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ β) $B = \frac{x+1}{\sqrt{1-2x}}$

γ) $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ δ) $\Delta = \sqrt{|x|-x}$

5. Αν ο x είναι ρητός, να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

$$\alpha) \frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \quad \beta) \frac{1+3\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}} \quad \gamma) \frac{x-3}{\sqrt{x^2+7}-4}$$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} + \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt{\sqrt[3]{64}} \quad \beta) B = \sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{128} - 2\sqrt[3]{250}$$

7. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας ρίζας

$$\alpha) \sqrt{3\sqrt{2}} \quad \beta) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \quad \gamma) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{3}$$

8. Να κάνετε τις πράξεις

$$\begin{array}{ll} \alpha. \sqrt[6]{2^4} \sqrt[6]{2^2} & \gamma. \sqrt[3]{2^7} \sqrt[3]{2^{-4}} \\ \beta. \sqrt[4]{3} \sqrt[4]{3^3} & \delta. \sqrt[6]{8^5} \sqrt[6]{8} \end{array}$$

9. Να γράψετε με τη βοήθεια μιας ρίζας τις παρακάτω παραστάσεις

$$\begin{array}{l} \alpha. \sqrt{\sqrt[4]{5}} \\ \beta. \sqrt[3]{3\sqrt{2}} \\ \gamma. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \\ \delta. \sqrt[4]{2^3} \sqrt[3]{2^2} \end{array}$$

10. Να κάνετε τις πράξεις

$$\begin{array}{ll} \alpha. \sqrt[11]{3^4} \sqrt[11]{3^5} \sqrt[11]{3^2} & \gamma. \frac{\sqrt[4]{5^8} \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt[5]{5^6}} \\ \beta. \sqrt[9]{2^3} \cdot \sqrt[9]{2^2} \cdot \sqrt[9]{2^4} & \delta. \frac{\sqrt[5]{6^9} \sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^6} \sqrt[5]{6}} \end{array}$$

11. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha. \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[8]{32} = 2$$

$$\beta. \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2^5 \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2^5 \sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$$

12. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha. A = \sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{81} + \sqrt[5]{32}$$

$$\beta. B = \sqrt{2} + \sqrt[4]{324} - 4\sqrt[6]{8}$$

13. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$\alpha. A = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt[6]{40}$$

$$\beta. B = \sqrt[6]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{20}$$

$$\gamma. \Gamma = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[12]{\alpha} \quad \text{με } \alpha \geq 0$$

$$\delta. \Delta = \sqrt{\alpha^3 \sqrt[4]{\alpha^3 \sqrt[3]{\alpha^2}}} \cdot \sqrt[24]{\alpha} \quad \text{με } \alpha \geq 0$$

$$\epsilon. E = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha^5}} \cdot \sqrt[6]{\alpha} \quad \text{με } \alpha \geq 0$$

$$\sigma\tau. Z = \sqrt[6]{\sqrt[3]{\alpha^8 \cdot \beta^4}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{\alpha \cdot \beta^5}} \quad \text{με } \alpha, \beta \geq 0$$

14. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha. A = \sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3}$$

$$\beta. 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50} = 10\sqrt{2}$$

15. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha. A = 3\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{125}$$

$$\beta. B = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8}$$

$$\gamma. \Gamma = \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{75}$$

δ. $\Delta = \sqrt{12} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + \sqrt{48}$

ε. $\Gamma \cdot \Delta$

στ. $\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Delta}$

16. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$$

17. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$ και $B = 2 + \sqrt{3}$ τότε

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$

18. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α,Β

19. Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$ να αποδείξετε ότι

$$A - B = 4$$

20. α. Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\sqrt{7} - 3)^2$

β. Να βρείτε την ρίζα $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$

21. α. Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\sqrt{5} - 3)^2$

β. Να βρείτε την ρίζα $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

22. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό

παρονομαστή

α. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

β. $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

$$\gamma. \frac{4}{2-3\sqrt{2}}$$

$$\epsilon. \frac{7}{2-3\sqrt{2}}$$

$$\delta. \frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

23. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

$$\alpha. \frac{1}{3+\sqrt{3}}$$

$$\gamma. \frac{x^2-y}{x-\sqrt{y}}$$

$$\beta. \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$

$$\delta. \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}$$

24. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha. \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = 1$$

$$\beta. \frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 10$$

$$\gamma. \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 4$$

$$\delta. \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = 14$$

$$\epsilon. \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{6} - 1$$

25. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$

26. Να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 4$$

27. Αν $\alpha, \beta > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha - \sqrt{\alpha\beta}} + \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha\beta}} \right) \cdot \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} = 2$$

28. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

α. $1 - \sqrt{2}$ και $\sqrt{5} - 2$

β. $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

γ. $2\sqrt{2}$ και 3

δ. $\sqrt{2} - 1$ και $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

29. Να δείξετε ότι:

α. $\sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}$

β. $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

γ. $\sqrt{\alpha + \beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$

δ. $\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta \geq 0$

30. Να δείξετε ότι:

α) $2 > \sqrt[5]{31}$

β) $\sqrt{5} - \sqrt[4]{26} < 0$

γ) $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$

δ) $3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

ε) $\sqrt[3]{8 + 4\sqrt{2}} < 1 + \sqrt{2}$

31. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}$$

α. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B

β. Να μετατρέψετε το κλάσμα $K = \frac{1}{A^3 - B}$ σε ισοδύναμο με

ρητό παρονομαστή

32. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

β. Αν $x = 4$ να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$

33. Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x - 5)^2}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B

β. Για $x = 4$ να αποδείξετε ότι $B^2 + 6B = B^4$

34. Δίνετε η παράσταση $A = (\sqrt{x - 4} + \sqrt{x - 1})(\sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 1})$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

35. Δίνεται η παράσταση

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

α. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει ο x ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού

β. Αν $-2 < x < 3$ να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

36. α. Αν $\alpha > \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι

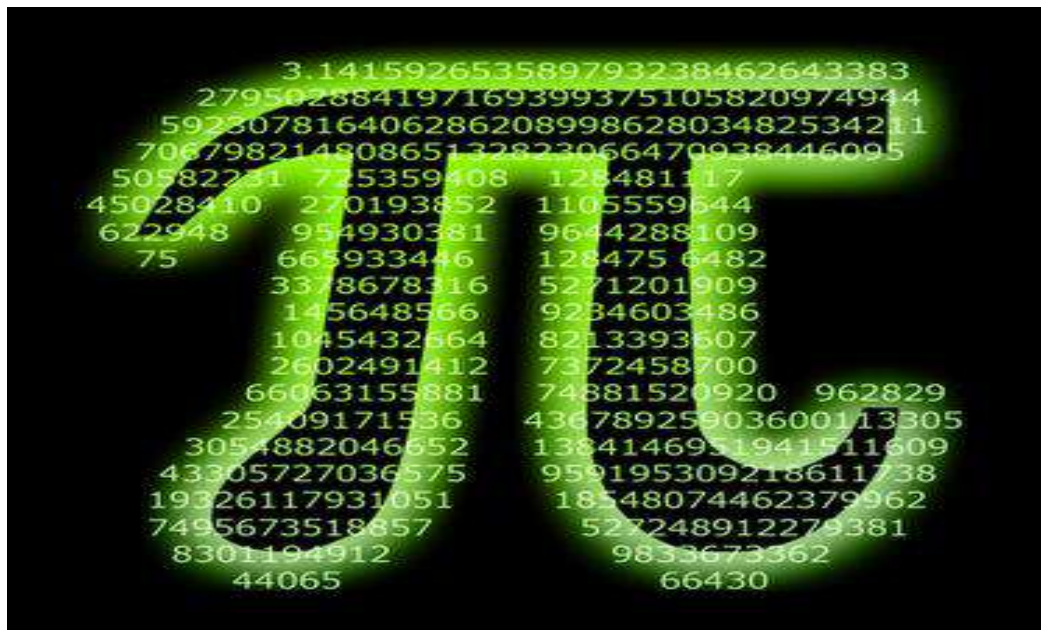
$$\frac{\sqrt{\alpha - \beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha - \beta}}$$

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2016} - \sqrt{2013}} - \frac{\sqrt{2016} - \sqrt{2013}}{\sqrt{3}}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt{x}$
2. Ισχύει $\sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2}$
3. Ισχύει $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = 0$
4. Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη
5. Ισχύει $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
6. Ισχύει $\sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt{6} + 1$
7. $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} = 1$
8. Ισχύει $\sqrt{3x^2} + \sqrt{5x^2} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})|x|$
9. $\sqrt[3]{x^6} = x^2$
10. Αν $4 < x < 5$ τότε $\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2} = 1$
11. Είναι $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 3$
12. Ισχύει $\sqrt{3}\sqrt[3]{\sqrt{7}+2}\sqrt[3]{\sqrt{7}-2} = \sqrt[6]{3^5}$
13. Ισχύει $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 4$.



Κεφάλαιο 3^ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1. Εξισώσεις α' βαθμού

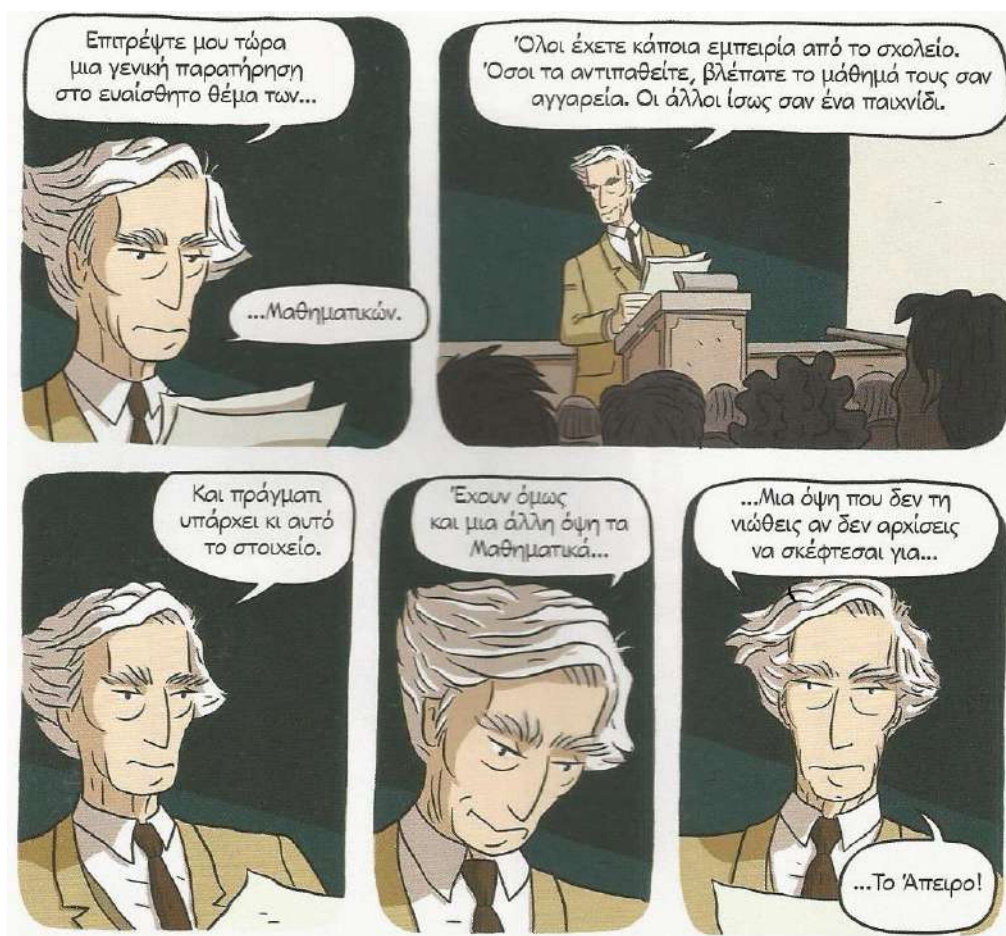
➤ Η εξίσωση $ax + b = 0$

▪ Η εξίσωση $ax + b = 0$

Έχει μοναδική λύση όταν $a \neq 0$ την $x = -\frac{b}{a}$

Είναι αδύνατη αν $a = 0$ και $b \neq 0$ (δηλαδή $0x = -b$)

Είναι αόριστη ή ταυτότητα αν $a = 0$ και $b = 0$ (δηλαδή $0x = 0$)



Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση

$$1 - \frac{2x - 1}{6} = 2x - \frac{x - 1}{3}$$

Λύση

$$1 - \frac{2x - 1}{6} = 2x - \frac{x - 1}{3} \xleftrightarrow{E.K.\Pi(3,6)=6}$$

$$6 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{2x - 1}{6} = 6 \cdot 2x - 6 \cdot \frac{x - 1}{3} \Leftrightarrow$$

$$6 - 1(2x - 1) = 12x - 2(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$6 - 2x + 1 = 12x - 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$-2x - 12x + 2x = -6 - 1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$-12x = -5 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{12}$$

2. Να λύσετε την εξίσωση

$$6 - 5x + 4(x - 1) = 3(3x - 2) + 2(4 - 5x)$$

Λύση

$$6 - 5x + 4(x - 1) = 3(3x - 2) + 2(4 - 5x) \Leftrightarrow$$

$$6 - 5x + 4x - 4 = 9x - 6 + 8 - 10x \Leftrightarrow$$

$$-5x + 4x - 9x + 10x = -6 + 4 - 6 + 8 \Leftrightarrow$$

$$0x = 0$$

Η εξίσωση είναι ταυτότητα δηλαδή έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

3. Να λυθεί η εξίσωση

$$\lambda^2 x - 2\lambda - 2\lambda x = 4$$

Λύση

$$\lambda^2 x - 2\lambda - 2\lambda x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x - 2\lambda x = 4 + 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)x = 2(2 + \lambda) \Leftrightarrow$$

$$\lambda(\lambda - 2)x = 2(2 + \lambda)$$

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε μια παραμετρική εξίσωση εργαζόμαστε ως εξής:

- Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = -\beta$
- Παραγοντοποιούμε τους συντελεστές α και β .
- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\alpha=0$ και $\alpha \neq 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ισχύει $\lambda(\lambda - 2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$$

Τότε η εξίσωση έχει μια μοναδική λύση

$$\frac{\lambda(\lambda - 2)x}{\lambda(\lambda - 2)} = \frac{2(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2}{\lambda}$$

- Αν ισχύει $\lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2$$

Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση γράφεται $0(0 - 2)x = 2(0 - 2) \Leftrightarrow$

$$0x = -4$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $\lambda = 2$ η εξίσωση γράφεται $2(2 - 2)x = 2(2 - 2) \Leftrightarrow$

$$0x = 0$$

Άρα η εξίσωση είναι αόριστη

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x(x + 2)^2 - x^2(x + 4) = 3x + 4$

β. $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + x - 4 = 0$

Λύση

α. $x(x + 2)^2 - x^2(x + 4) = 3x + 4 \Leftrightarrow$

$$x(x^2 + 4x + 4) - x^3 - 4x^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x - x^3 - 4x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 4$$

β. $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 4)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

5. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x}{x^2 - 9} - \frac{2}{x^2 + 3x} = \frac{2}{x^2 - 3x} = 0$$

Μεθοδολογία

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών
- Κάνουμε περιορισμούς
- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με Ε.Κ.Π. των παρονομαστών , κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και λύνουμε την εξίσωση
- Δεχόμαστε ή απορρίπτουμε τις λύσεις

Λύση

$$\frac{x}{x^2 - 9} - \frac{2}{x^2 + 3x} = \frac{2}{x^2 - 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{x(x+3)} = \frac{2}{x(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$Ε.Κ.Π((x-3)(x+3), x(x+3), x(x-3)) = x(x-3)(x+3)$$

Περιορισμοί Πρέπει

$$x(x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x-3 \neq 0 \text{ και } x+3 \neq 0$$

$$x \neq 3 \quad x \neq -3$$

$$x(x-3)(x+3) \frac{x}{(x-3)(x+3)} - x(x-3)(x+3) \frac{2}{x(x+3)} = x(x-3)(x+3) \frac{2}{x(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(x-3) = 2(x+3) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 6 = 2x + 6 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 6 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 4$$

Απορρίπτεται Δεκτή

6. Να λυθεί ο τύπος $F = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$ ως προς

α. p_1

β. t_1

Λύση

$$\alpha. F = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow F(t_2 - t_1) = p_2 - p_1 \Leftrightarrow p_1 = p_2 - F(t_2 - t_1)$$

$$\beta. F = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow F(t_2 - t_1) = p_2 - p_1 \Leftrightarrow Ft_2 - Ft_1 = p_2 - p_1 \Leftrightarrow$$

$$-Ft_1 = p_2 - p_1 - Ft_2 \Leftrightarrow t_1 = \frac{p_2 - p_1 - Ft_2}{-F}$$

7. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

α. $|2x - 3| = 5$

β. $3|x - 2| - 1 = 8$

γ. $|x - 8| = -1$

δ. $|6 - 2x| - 6 = \frac{-3 + |3x - 9|}{2} - \frac{4 - 5|x - 3|}{12}$

Μεθοδολογία

$$|x| = \theta$$

- Αν $\theta > 0$ τότε $x = \theta$ ή $x = -\theta$
- Αν $\theta < 0$ τότε η εξίσωση είναι Αδύνατη

Λύση

α. $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow$

$$2x - 3 = 5 \text{ ή } 2x - 3 = -5 \Leftrightarrow$$

$$2x = 5 + 3 \quad 2x = 3 - 5 \Leftrightarrow$$

$$2x = 8 \quad 2x = -2 \Leftrightarrow$$

$$x = 4 \quad x = -$$

β. $3|x - 2| - 1 = 8 \Leftrightarrow$

$$3|x - 2| = 1 + 8 \Leftrightarrow$$

$$3|x - 2| = 9 \Leftrightarrow$$

$$|x - 2| = 3$$

$$x - 2 = 3 \text{ ή } x - 2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 + 3 \quad x = 2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$x = 5 \quad x = -1 \Leftrightarrow$$

γ. $|x - 8| = -1$

Αδύνατη

$$\epsilon. |6 - 2x| - 6 = \frac{-3 + |3x - 9|}{2} - \frac{4 - 5|x - 3|}{12} \Leftrightarrow$$

$$|2(3 - x)| - 6 = \frac{-3 + |3(x - 2)|}{2} - \frac{4 - 5|x - 3|}{12} \Leftrightarrow$$

$$2|3 - x| - 6 = \frac{-3 + 3|x - 3|}{2} - \frac{4 - 5|x - 3|}{12} \Leftrightarrow$$

$$2|x - 3| - 6 = \frac{-3 + 3|x - 3|}{2} - \frac{4 - 5|x - 3|}{12}$$

Θέτουμε $|x - 3| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται:

$$2\omega - 6 = \frac{-3 + 3\omega}{2} - \frac{4 - 5\omega}{12} \xLeftrightarrow{E.K.\Pi(2,12)=12}$$

$$12 \cdot 2\omega - 12 \cdot 6 = 12 \cdot \frac{-3 + 3\omega}{2} - 12 \cdot \frac{4 - 5\omega}{12} \Leftrightarrow$$

$$24\omega - 72 = 6(-3 + 3\omega) - 1(4 - 5\omega) \Leftrightarrow$$

$$24\omega - 72 = -18 + 18\omega - 4 + 5\omega \Leftrightarrow$$

$$24\omega - 18\omega - 5\omega = 72 - 18 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 50 \Leftrightarrow$$

$$|x - 3| = 50 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 50 \text{ ή } x - 3 = -50 \Leftrightarrow$$

$$x = 53 \text{ ή } x = -47$$

8. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 4| = 10 - 4x$

Λύση

Θα πρέπει:

$$10 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -10 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{4} \Leftrightarrow$$

$$x \leq \frac{5}{2}$$

Μεθοδολογία

$$|A(x)| = B(x)$$

- Κάνουμε τον περιορισμό $B(x) \geq 0$
- Ισχύει η ισοδυναμία
 $|A(x)| = B(x)$
 $\Leftrightarrow A(x) = B(x)$
 ή $A(x) = -B(x)$
- Δεχόμαστε ή Απορρίπτουμε τις λύσεις

$$|x - 4| = 10 - 4x \Leftrightarrow$$

$$x - 4 = 10 - 4x \text{ ή } x - 4 = -10 + 4x$$

$$x + 4x = 10 + 4 \quad x - 4x = -10 + 4 \Leftrightarrow$$

$$5x = 14 \quad -3x = -6 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{14}{5} \quad x = 2$$

Απορρίπτεται Δεκτή

9. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5|$

Λύση

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - 1)^2} = |3x - 5| \Leftrightarrow$$

$$|x - 1| = |3x - 5| \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 3x - 5 \text{ ή } x - 1 = -3x + 5 \Leftrightarrow$$

$$x - 3x = 1 - 5 \quad x + 3x = 1 + 5 \Leftrightarrow$$

$$-2x = -4 \quad 4x = 6 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \quad x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

«Η αληθινή εκπαίδευση συνίσταται λιγότερο σε διδαχές και περισσότερο σε ασκήσεις».

Ζαν Ζακ Ρουσσώ

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $3x - 6 = 9$

στ. $2 - (x - 1) = 3 - x$

β. $-3x + 4 = 5$

ζ. $2(x - 1) + 2 - 2x = 0$

γ. $8 - 4x = 0$

η. $x(2x - 1) + x + 3 =$

δ. $-2x - 7 = 9$

$2x^2$

ε. $9 - 7x = -2x + 34$

θ. $2(x - 1) = 5x - 2$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $5 - 2(3 - x) = 4(2 - x)$

β. $9 - (x - 4) - 11 = 2(x - 5)$

γ. $5x - 6 = -9 - 2(3 - x)$

δ. $24 - 7(x + 2) = -4x - 5$

ε. $5\omega - 2(3 - \omega) = -6 + 3(\omega + 1)$

στ. $2(y + 2) - 8(y - 3) = 5(5 - y) - 2(3 - y)$

ζ. $3(2 - 3x) - 2x + 11 = 2x - 2(2x + 5)$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $4x^2 - (2x - 1)(2x + 1) - 1 = 3x$

β. $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3) = 0$

γ. $(x - 2)^3 - x(x - 3)^2 = 1$

δ. $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

ε. $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$

στ. $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + x - 4 = 0$

ii. $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

iii. $(x - 2)^2 - (2 - x) \cdot (x + 4) = 0$

iv. $(x^2 - 4) \cdot (x - 1) = (x^2 - 1) \cdot (x - 2)$

v. $x^3 - 2x^2 - (2x - 1) \cdot (x - 2) = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $|x^2 + 3x - 1| = 3$

ii. $2(|x - 2| - 3) + |4 - 2x| = 10$

iii. $|x + 3| + |2 - x| = 4 - x$

iv. $\frac{2|x+3|-1}{3} - \frac{3-|2x+6|}{4} = \frac{5-|x+3|}{6} - \frac{|6+2x|-13}{12}$

v. $\frac{|2x-6|-1}{3} - \frac{8-|9-3x|}{2} = \frac{|15-5x|-10}{4}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ

α. $(\lambda - 3)x = \lambda^2 - 9$

β. $\lambda^2(x - 1) = 5(5x - \lambda)$

γ. $(\lambda + 1)(\lambda - 4)x = \lambda^2 - 16$

δ. $\lambda(\lambda - 2)x = 2\lambda - 4$

ε. $\lambda^3(x - 1) = 4\lambda x - 8$

7. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\lambda^2(x - 1) = 2(\lambda x - 2)$

ii. $\lambda(\lambda x - 1) = 4x + \lambda - 3$

iii. $\lambda^2(x + 1) = 2(\lambda + 2x)$

iv. $(\lambda - 1)x = 2 + \lambda$

v. $\lambda^2 x + \lambda = x + 1$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ .

α. $\lambda x - 3\lambda = \lambda^2 - 3x$

β. $\lambda^2(x + 1) = \lambda x + 1$

γ. $2(\lambda^2 + 2x) - \lambda(4 + \lambda x) = 0$

δ. $\lambda^2(x - 1) = 4(x - \lambda + 1)$

ε. $3(x + 3) - \lambda^2(1 - x) = -3x(\lambda - 1)$

στ. $\lambda^3(x - 1) - 3\lambda(x - 3\lambda) = 6\lambda(x + \lambda)$

9. Να λύσετε την εξίσωση $1 - \left(x - \frac{x-1}{2}\right) - \frac{5}{2} \cdot \frac{x-2}{3} = -x$.

10. Να λύσετε τον τύπο $\alpha = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1}$ ως προς t_2 .

11. Να λυθεί ο τύπος $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ως προς α .

12. Να λυθεί ο τύπος $\delta = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ ως προς a .

13. Να λυθεί ο τύπος $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ως προς R ($R_1 + R_2 \neq 0$)

14. Αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x = \lambda^2 - 2\lambda$ είναι ταυτότητα να βρείτε το λ .

15. Αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda)x = \lambda^2 - 9$ είναι αδύνατη δείξτε ότι η εξίσωση

$(\lambda + 1)x = \lambda + 5$ έχει μοναδική λύση.

16. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^3(x - 1) - 3\lambda(3x - 2\lambda) = 9\lambda$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει

α. Λύση το -3

β. Μοναδική λύση το -3

17. Αν η εξίσωση $\lambda^2(x - 1) = 2(2x + 1)$ είναι ταυτότητα να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^2(x - 1) + \lambda(5x - 1) = -2(1 + 3x)$ είναι ταυτότητα.

18. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = 6 + 2(2x - \kappa)$. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ και του λ η παραπάνω εξίσωση :

α. Έχει ακριβώς μια λύση

β. Είναι αδύνατη

γ. Είναι ταυτότητα

19. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x - 2) = -1 - \lambda(\lambda - x)$. Αν η εξίσωση είναι ταυτότητα να βρείτε τον αριθμό λ .

20. Αν οι εξισώσεις $\frac{3x-4}{2} = \frac{4x-5}{3}$ και $x + \frac{a+\frac{x}{2}}{3-\frac{1}{2}} = a$ έχουν κοινή ρίζα, να βρείτε την τιμή του a .

21. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda(\lambda - x) - \lambda x(\lambda - 1) = 2(\lambda - 2x)$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

22. Να βρείτε το λ , αν η εξίσωση $\lambda(\lambda x - 1) = x(3\lambda - 2) - \lambda^2$

α) είναι ταυτότητα

β) είναι αδύνατη

γ) έχει λύση

23. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση

$$\lambda(x - \lambda) = 2(x - 2) :$$

α) έχει λύση το 2.

β) έχει μοναδική λύση το 2.

24. Να βρείτε τις τιμές των λ, μ , για τις οποίες η εξίσωση

$$\lambda(x - 2) - 1 = x - \mu \text{ είναι:}$$

α) ταυτότητα

β) αδύνατη

25. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ η εξίσωση $\frac{x+\alpha}{\beta} = \frac{x+\beta}{\alpha}$ έχει λύση.

26. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και $\lambda = -2$

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση

27. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει μοναδική λύση.

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

28. Δίνετε η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Να λύσετε την εξίσωση όταν:

i. $\alpha = 1$

ii. $\alpha = -3$

β. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

29. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την οποία να βρείτε.

γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

30. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $\frac{1}{x^2-x} = \frac{x}{x-1}$

β. $\frac{1}{x^2-x} = \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+1}{x}$

γ. $\frac{1}{x} - \frac{2}{3-x} = \frac{3(x-1)}{x^2-3x}$

δ. $\frac{4}{x^2-4} = \frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x-2}$

ε. $\frac{9x-1}{9x^2-1} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2}{1+3x}$

στ. $1 - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-10}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x}$

ζ. $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{2(x+1)}$

η. $\frac{1}{x+5} - \frac{2x}{x^2+5x} = \frac{1}{25-x^2}$

31. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 2x^2 = 9x - 18$.

32. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} - \frac{2x}{x^2-x} - 1 = 0$.

33. Να λύσετε την εξίσωση $2 - \frac{x^2+7x}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3}{1-x}$.

34. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $|x| = 2$

δ. $|x| + 4 = 0$

β. $|x| = -3$

ε. $\frac{|x|+6}{2} = 3$

γ. $|x| - 1 = 0$

στ. $\frac{|x|-1}{3} = 4$

35. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $|x - 1| = 5$

δ. $|x - 6| - 1 = 0$

β. $|4 - 2x| = 6$

ε. $2|x - 4| - 8 = 0$

γ. $|2x + 3| = 5$

στ. $|7x - 13| + 21 = 0$

36. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $|x| - 3 = 0$ β) $1 - 2|x| = 0$

γ) $3|x| + 1 = 0$ δ) $d(2x, 3) - 1 = 0$

37. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $2|3x - 6| - 24 = 0$

δ. $\frac{3|x-2|-1}{2} = 4$

β. $\frac{9-|2x-3|}{4} = 1$

ε. $\frac{|x+1|+6}{2} = 3$

γ. $\frac{2+|x-1|}{2} = 4$

στ. $\frac{2-4|3x-6|}{2} = -9$

38. Να λύσετε την εξίσωση

α. $\frac{|x+3|}{2} = 5 - \frac{|x+3|}{3}$

β. $|x| - \frac{2|x|-3}{10} = 1 - \frac{|x|-10}{5}$

γ. $\frac{|x-1|-2}{3} = 1 - \frac{2|x-1|+5}{6}$

δ. $\frac{|4-x|-2}{2} = 5 - \frac{|4-x|+10}{9}$

ε. $2 + \frac{|3x-4|-1}{3} = 3 - \frac{|3x-4|}{3}$

$$\sigma\tau. \frac{|x-2|}{2} = \frac{11}{20} - \frac{|6-3x|}{5}$$

39. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha. \frac{|x-3|}{2} + \frac{|3-x|}{6} = 8 - \frac{|6-2x|}{3}$$

$$\beta. 50 - |5 - 5x| = |4x - 4| + |6 - 6x|$$

$$\gamma. |5x - 20| = |12 - 3x| + 14$$

$$\delta. \frac{|x-5|+1}{3} - \frac{16-|4x-20|}{6} = \frac{|15-3x|+8}{12}$$

40. Να λύσετε την εξίσωση $|3x - 2| + \frac{|2-3x|}{3} = 10 - |6x - 4|$.

41. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) |3x - 1| = |x - 5|$$

$$\beta) |2x - 3| - 2|x| = 0$$

42. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 1| = 3x - 7$.

43. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) |x - 2| - x = -2$$

$$\beta) d(x, 3) = 3 - x$$

44. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| - |1 - x| + x - 2 = 0$.

45. Να λύσετε την εξίσωση $|x^2 - x| + |x^2 - 1| = 0$

46. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 1|$.

47. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) ||x - 1| + 1| = 3$$

$$\beta) ||x - 2| - 1| = 1$$

48. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \frac{|x+1|}{|1-x|} = 3$$

$$\beta) |x^2 - 5x + 6| - |x - 2| = 0$$

49. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $|3x + 1| = |x - 5|$

β. $|x + 3| = |7 - x|$

γ. $|3x - 2| - |x + 6| = 0$

δ. $|5x - 1| = |4x - 1|$

ε. $|2x - 3| = |3x - 2|$

στ. $\frac{|x+1|}{4} = \frac{|3x-2|}{6}$

50. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $||x| + 3| = 4$

δ. $||x + 3| - 2| = 4$

β. $||x - 2| + 3| = 5$

ε. $|1 - |3 - 2x|| = 6$

γ. $||x| - 3| = 1$

στ. $||5 - x| - 6| = 4$

51. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $|x - 3| = 2x - 7$

δ. $|x + 5| = 3x - 1$

β. $|3x - 1| = 1 - 3x$

ε. $\frac{|x-1|}{2} = x$

γ. $|x + 2| = x + 6$

στ. $5 - |x - 5| = x$

52. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$

β. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 0$

53. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x - 5$

β. $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 1 - 2x$

54. Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

α. Να αποδείξετε ότι $A = 4$

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x + A| = 1$

55. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2+3|x|}{x^2-9} - \frac{|x|-3}{x^2-6|x|+9}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση του A

γ. Να λύσετε την εξίσωση $A = 3$

Η μουσική είναι μαθηματικά με ήχο, τα μαθηματικά είναι βουβή μουσική.

Édouard Herriot,

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

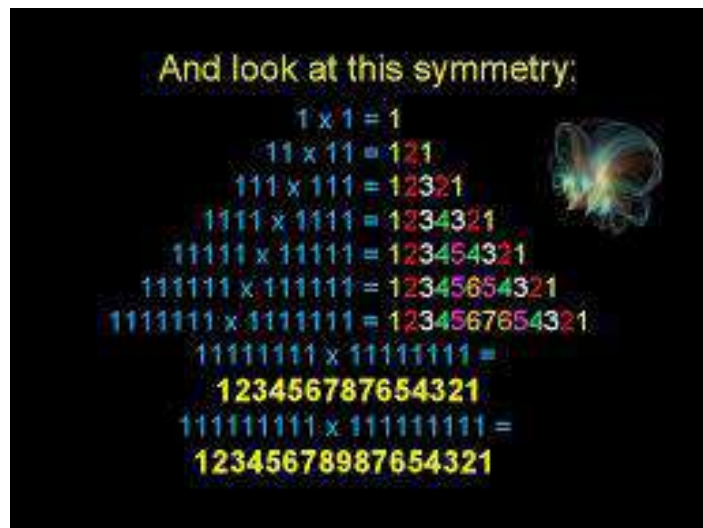
1. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη όταν $\beta \neq 0$.
2. Η εξίσωση $\frac{x+4}{3} = x + 2$ έχει μοναδική λύση.
3. Η εξίσωση $(\lambda + 2)x = \lambda^2 + 2\lambda$ είναι ταυτότητα όταν $\lambda = -2$.
4. Αν η εξίσωση $x - \lambda = \lambda x - 2$ έχει μοναδική λύση τότε $\lambda = 1$.
5. Η εξίσωση $\frac{x-2}{2} - \frac{x+1}{3} = x - \frac{14-x}{4}$ έχει μοναδική λύση.
6. Η εξίσωση $(x^2 - 1)(4 - x^2) = 0$ έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες.
7. Η ισότητα $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .
8. Οι εξισώσεις $(\lambda - 1)x = \lambda + 1$ και $\lambda^2 x - 2\lambda = x + 3$ είναι συγχρόνως αδύνατες όταν $\lambda = 1$.
9. Αν η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda = 4x - 2$ είναι ταυτότητα τότε η εξίσωση $\lambda(x - 1) = 2(x + 1)$ είναι αδύνατη.
10. Μια εξίσωση πρώτου βαθμού μπορεί να έχει περισσότερες από μια λύσεις.
11. Αν η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι ταυτότητα τότε και η $\beta x + \alpha = 0$ είναι ταυτότητα.
12. Η εξίσωση $\alpha x = 0$ είναι αδύνατη.
13. Αν για $x = -2$ η τιμή της παράστασης $A = 3x^2 + \kappa x - 2$ είναι ίση με 2 τότε $\kappa = 4$.

14. Η εξίσωση $\alpha(x - \beta + 1) = 2x + \beta - 1$ είναι ταυτότητα όταν $\alpha = 2$ και $\beta = 1$.

15. Οι λύσεις της εξίσωσης $(|x| - 1)(|x| + 5) = 0$ είναι οι αριθμοί $-5, -1, 1, 5$

16. Η εξίσωση $|x - 3| + 4 = 0$ είναι αδύνατη.

17. Το 7 είναι η λύση της εξίσωσης $|x - 3| = 4$.



3.2. Η εξίσωση $x^n = \alpha$

➤ Η εξίσωση $x^n = \alpha$

- Περίπτωση 1^η : Αν n άρτιος και α θετικός τότε η εξίσωση έχει δυο λύσεις τις $x = \pm \sqrt[n]{\alpha}$
- Περίπτωση 2^η : Αν n άρτιος και α αρνητικός τότε η εξίσωση είναι **Αδύνατη**
- Περίπτωση 3^η : Αν n περιττός και α θετικός τότε η εξίσωση έχει μια λύση την $x = \sqrt[n]{\alpha}$
- Περίπτωση 4^η : Αν n περιττός και α αρνητικός τότε η εξίσωση έχει μια λύση την $x = -\sqrt[n]{-\alpha}$



Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α. $x^3 - 125 = 0$

β. $x^3 + 125 = 0$

γ. $x^4 - 81 = 0$

δ. $x^4 + 1 = 0$

Λύση

α. $x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = 5$

β. $x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -125 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = -5$

γ. $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3$

δ. $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$ Η εξίσωση είναι Αδύνατη.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^5 - 8x^2 = 0$

β. $x^4 + x = 0$

γ. $25x^5 = 16x^3$

Λύση

α. $x^5 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 0 \text{ ή } x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad x^3 = 8 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$$

$$x = 2$$

$$\beta. x^4 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$x = -\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

$$\delta. 25x^5 = 16x^3 \Leftrightarrow$$

$$25x^5 - 16x^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3(25x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 0 \text{ ή } 25x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad 25x^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{4}{5} \text{ ή } x = -\frac{4}{5}$$

$$3. \text{ Να λύσετε την εξίσωση } (3x - 1)^4 - 24x + 8 = 0$$

Λύση

$$(3x - 1)^4 - 24x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3x - 1)^4 - 8(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3x - 1)[(3x - 1)^3 - 8] = 0$$

Θέτουμε $\omega = 3x - 1$ άρα η εξίσωση θα γίνει

$$\omega(\omega^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 0 \text{ ή } \omega^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^3 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\omega = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$$

$$\omega = 2$$

Επομένως αν

- $\omega = 0 \Leftrightarrow$

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{3}$$

- $\omega = 2 \Leftrightarrow$

$$3x - 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$3x = 1 + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

«Εκπαίδευση δεν είναι η εκμάθηση γεγονότων αλλά ή εξάσκηση του μυαλού να σκέφτεται»

Albert Einstein

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $x^3 = 8$

δ. $x^2 = -1$

β. $x^2 = 144$

ε. $x^3 = -8$

γ. $x^3 = \frac{1}{27}$

στ. $x^4 = \frac{81}{16}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $27 - 8x^3 = 0$

δ. $x^5 - 27x^2 = 0$

β. $x^6 - 64 = 0$

ε. $8x^4 + x^2 = 0$

γ. $3x^4 + 24x = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $x^4 - 8x = 0$

δ. $2x^3 = 8x$

β. $x^6 - 16x^2 = 0$

ε. $x^6 = 82x^2$

γ. $27x^4 + x = 0$

στ. $x^9 = 8^3$

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $(x - 2)^3 = 8$

ε. $(x + 1)^5 - 16x = 48$

β. $(3 - x)^5 - 32 = 0$

στ. $27 - 54x =$

γ. $(|x - 2| - 3)^3 = 8$

$(2x - 1)^4$

δ. $(x + 1)^4 - 8x = 8$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 - 20 = 0$

β) $x^6 - 64 = 0$

γ) $x^4 + 1 = 0$

δ) $27x^3 + 125 = 0$

ε) $(3x - 1)^5 + 32 = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη
2. Η εξίσωση $(x + 1)^4 + 256 = 0$ έχει μια λύση.
3. Η εξίσωση $x^5 - 8x^2 = 0$ έχει σίγουρα λύση το $x=0$.
4. Η εξίσωση $x^5 = 16x$ έχει τρεις λύσεις.
5. Η εξίσωση $x^3 + x = 0$ δεν μπορεί να έχει λύση το -1 .
6. Η εξίσωση $x^n = \alpha$, με $\alpha < 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[n]{|\alpha|}$.
7. Η εξίσωση $x^n = \alpha$, με $\alpha > 0$ και n άρτιο φυσικό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[n]{\alpha}$ και $-\sqrt[n]{\alpha}$.
8. Η εξίσωση $x^n = \alpha$, με n περιττό και $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει πάντοτε λύση.



3.3. Εξισώσεις β' βαθμού

➤ Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

Για να λύσουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού της μορφής

$ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ βρίσκουμε το αποτέλεσμα της

παράστασης της **διακρίνουσας** που έχει τύπο $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ και

έχουμε τις περιπτώσεις:

α. Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει **δυο πραγματικές και άνισες λύσεις (ρίζες)** τις:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

β. Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει **μια διπλή πραγματική λύση (ρίζα)** την

$$x = \frac{-b}{2a}$$

γ. Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση **δεν έχει πραγματικές λύσεις (ρίζα)**. Είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

➤ **Άθροισμα και γινόμενο ριζών της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού, τύποι του Vieta.**

Έστω ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει ρίζες τους

πραγματικούς αριθμούς x_1 και x_2 . **Το άθροισμα** των ριζών το

συμβολίζουμε με S (δηλαδή $S = x_1 + x_2$) , ενώ το **γινόμενο** των ριζών το συμβολίζουμε με P (δηλαδή $P = x_1 x_2$) . Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι τύποι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

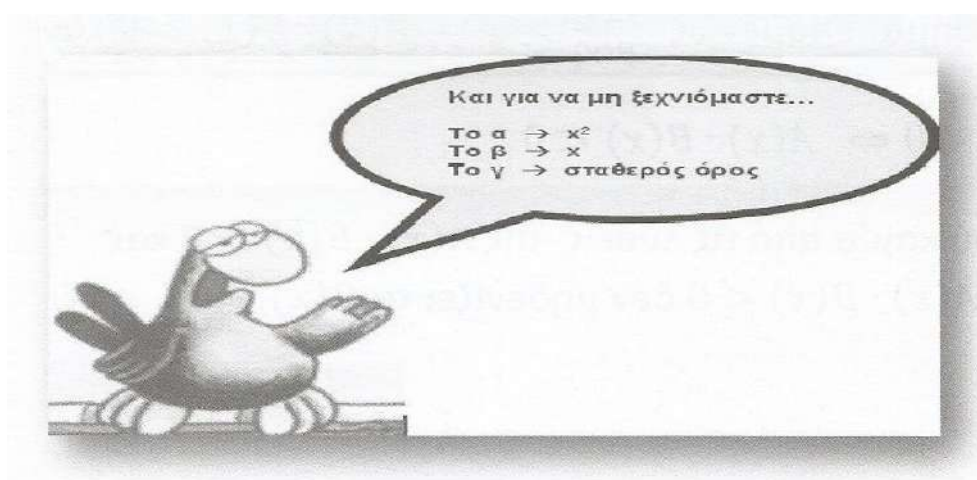
Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του **Vieta**.

- **Κατασκευή εξίσωσης δευτέρου βαθμού , όταν γνωρίζουμε τις ρίζες της.**

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού όταν γνωρίζουμε το άθροισμα (S) και το γινόμενο (P) των ριζών της. Αν η εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει ρίζες τις x_1 και x_2 ,

$S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$ τότε γράφεται στη μορφή:

$$x^2 - Sx + P = 0$$



Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $6x^2 - x - 1 = 0$

β. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

γ. $x^2 = x - 1$

Λύση

α. $6x^2 - x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \alpha &= 6 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= -1 & &= (-1)^2 - 4 \cdot 6(-1) \\ \gamma &= -1 & &= 1 + 24 \\ & & &= 25 > 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

β. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} \alpha &= 4 & \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ \beta &= -4 & &= (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 \\ \gamma &= 1 & &= 16 - 16 \\ & & &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

γ. $x^2 = x - 1 \Leftrightarrow$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\alpha = 1 \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\beta = -1 \qquad = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\gamma = 1 \qquad = 1 - 4$$

$$\qquad \qquad = -3 < 0$$

Η εξίσωση είναι Αδύνατη

2. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

Λύση

Η Διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 1 \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\beta = -(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \qquad = \left(-(\sqrt{3} - \sqrt{2})\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{6})$$

$$\gamma = -\sqrt{6} \qquad = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6}$$

$$\qquad \qquad = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6}$$

$$\qquad \qquad = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2$$

$$\qquad \qquad = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x - \lambda^2 = 0$ (1) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

Λύση

Η Διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\beta = -(\lambda + 2) \quad = (-(\lambda + 2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\lambda^2)$$

$$\gamma = -\lambda^2 \quad = (\lambda + 2)^2 + 4\lambda^2 > 0$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Άρα η εξίσωση έχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ πραγματικές και άνισες ρίζες.

4. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης

$$2x^2 - 5x - 8 = 0$$

Λύση

Η εξίσωση $2x^2 - 5x - 8 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25 + 64 = 89 > 0$

Άρα έχει δυο άνισες ρίζες τις x_1 και x_2 .

Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών είναι :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-8}{2} = -4$$

5. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x + 1 = 0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

α. $x_1 + x_2$

δ. $x_1^3 + x_2^3$

β. $x_1 \cdot x_2$

ε. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

γ. $x_1^2 + x_2^2$

στ. $|x_1 - x_2|$

Λύση

α. $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-3}{1} = -3$

β. $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$

γ. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-3)^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7$

δ. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (-3)(7 - 1) = -18$

ε. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1x_2} + \frac{x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{7}{1} = 7$

στ. $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} =$
 $= \sqrt{7 - 2 \cdot 1} = \sqrt{5}$

6. Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $-1, \frac{2}{3}$

Λύση

Έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -1 + \frac{2}{3} = \frac{-3 + 2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Άρα η εξίσωση είναι :

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

7. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 5 = 0$ είναι x_1 και x_2 . Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τα ζεύγη

α. $x_1 - 2, x_2 - 2$

β. $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}$

Λύση

α. Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{1} = -5$$

Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της ζητούμενης εξίσωσης τότε:

$$S = \rho_1 + \rho_2 = x_1 - 2 + x_2 - 2 = -1 - 4 = -5$$

$$\begin{aligned} P &= \rho_1 \cdot \rho_2 = (x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 \\ &= x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = -5 - 2(-1) + 4 = 1 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$$

β. Είναι

$$\begin{aligned} S &= \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} \\ &= \frac{(-1)^2 - 2(-5)}{(-5)^2} = \frac{11}{25} \end{aligned}$$

$$P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{(x_1 x_2)^2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$$

Άρα η εξίσωση είναι:

$$x^2 - 5x + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{25}x + \frac{1}{25} = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 11x + 1 = 0$$

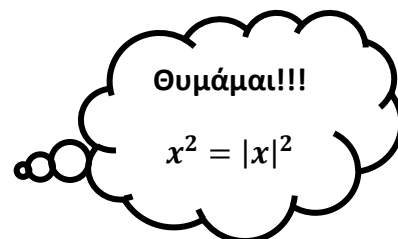
8. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

β. $(x - 2)^2 - 4(\sqrt{x^2 - 4x + 4}) + 3 = 0$

Λύση

α. $x^2 - 7|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| + 12 = 0$



Θέτουμε $|x| = \omega > 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$\omega_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \omega_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Άρα $|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$

$|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$

β. $(x - 2)^2 - 4(\sqrt{x^2 - 4x + 4}) + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 2)^2 - 4\sqrt{(x - 2)^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 - 4|x - 2| + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|x - 2|^2 - 4|x - 2| + 3 = 0$$

Θέτουμε $|x - 2| = \omega$ άρα η εξίσωση γίνεται

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$\omega_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \omega_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } |x - 2| = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 3 \text{ ή } x - 2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$x = 5 \quad x = -1$$

$$|x - 2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \text{ ή } x - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \quad x = 1$$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

β. $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$

Διτετράγωνες εξισώσεις:

Είναι της μορφής

$$ax^4 + bx^2 + \gamma = 0, a \neq 0$$

Λύση

α. Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ άρα η εξίσωση γίνεται:

$$4\omega^2 + 11\omega - 3 = 0$$

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 121 + 48 = 169$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \omega_2 = \frac{-24}{8} = -3 \text{ Απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

β. Είναι $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$$((2x - 1)^2)^2 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$$

Θέτω $(2x - 1)^2 = \omega > 0$ άρα η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - \omega - 12 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \omega_2 = \frac{-6}{2} = -3 \text{ Απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (2x - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$2x - 1 = 2 \text{ ή } 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow$$

$$2x = 3 \quad 2x = -1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} \quad x = -\frac{1}{2}$$

10. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + (4\lambda + 1)x + 3\lambda^2 + \lambda = 0$

Λύση

Η Διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\beta = (4\lambda + 1)$$

$$= (4\lambda + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3\lambda^2 + \lambda)$$

$$\gamma = 3\lambda^2 + \lambda$$

$$= 16\lambda^2 + 8\lambda + 1 - 12\lambda^2 - 4\lambda$$

$$= 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

$$= (2\lambda + 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **Αν $2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$** τότε η εξίσωση έχει μια

$$\text{διπλή ρίζα (δυο ρίζες ίσες) τη } x = -\frac{4\lambda+1}{2} = \frac{1}{2}$$

- **Αν $2\lambda + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{1}{2}$** τότε η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες

τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(4\lambda + 1) \pm \sqrt{(2\lambda + 1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4\lambda - 1 \pm (2\lambda + 1)}{2}$$

$$\text{Άρα } x_1 = \frac{-4\lambda - 1 + 2\lambda + 1}{2} = -\lambda$$

$$x_2 = \frac{-4\lambda - 1 - 2\lambda - 1}{2} = \frac{-6\lambda - 2}{2} = -3\lambda - 1$$

11. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - 1 = 0$

- α. Να έχει δυο ρίζες άνισες**
- β. Να έχει μια διπλή ρίζα**
- γ. Να έχει ρίζες πραγματικές**
- δ. Να μην έχει καμία ρίζα πραγματική**

Λύση

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - 1) = 1 - 4\lambda + 4 = -4\lambda + 5$$

α. Η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες όταν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 5 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -5 \Leftrightarrow \lambda < \frac{5}{4}$$

β. Η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα όταν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

γ. Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές όταν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{5}{4}$$

δ. Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{4}$$

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + |\lambda - 1| = 0$ (1)

- ι. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να έχει ρίζες πραγματικές**

- ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 2x_2$ να βρείτε τις x_1, x_2 και το λ .

Λύση

- i. Η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές όταν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot |\lambda - 1| \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda - 1| \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \leq \lambda - 1 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{9}{4} + 1 \leq \lambda \leq \frac{9}{4} + 1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{4} \leq \lambda \leq \frac{13}{4}$$

- ii. Είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{|\lambda - 1|}{1} = |\lambda - 1|$$

$$x_1 + x_2 = 2x_2 + x_2 = 3x_2$$

$$\text{και } x_1 \cdot x_2 = 2x_2 \cdot x_2 = 2x_2^2$$

$$\text{Δηλαδή } 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1 \text{ και } x_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Επομένως } P = |\lambda - 1| \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = |\lambda - 1| \Leftrightarrow$$

$$|\lambda - 1| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = 2 \text{ ή } \lambda - 1 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3 \quad \lambda = -1$$

«Φαίνεται πάντα αδύνατο μέχρι να γίνει»

Nelson Mandela

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^2 + 2x - 3 = 0$

δ. $-3x^2 + 5x - 11 = 0$

β. $x^2 - 5x + 6 = 0$

ε. $-2x^2 + 6x - 11 = 0$

γ. $-x^2 - 2x + 3 = 0$

στ. $6x^2 + 3x - 2 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^2 - 4x + 4 = 0$

δ. $x^2 - 3x + 5 = 0$

β. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

ε. $x^2 + 5x + 7 = 0$

γ. $-2 - x(x - 1) = 0$

στ. $-x^2 - 3x - 1 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

β. $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

γ. $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{5})x - \sqrt{10} = 0$

δ. $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

ε. $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

στ. $x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x + 2 - 3\sqrt{2} = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $(x - 3)(x^2 + 5x + 4) = 0$

β. $(x^2 + 3x)(x^2 - 7x + 6) = 0$

γ. $(9x^2 - 6x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

δ. $(x - 1)^2 = 4x - 5(2x + 1)$

$$\epsilon. (2x - 1)^2 - (3 - x)^2 = (x + 1)(2x - 1)$$

$$\sigma\tau. (x - 1)^3 - x(x - 2)(x + 2) = 1$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha. \frac{x}{x+2} - \frac{x-10}{x^2-4} = \frac{2}{x-2}$$

$$\beta. 1 - \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2+2x}$$

$$\gamma. \frac{x+2}{x-3} - \frac{3-x}{x} = \frac{x^2+6}{x^2-3x}$$

$$\delta. \frac{4x}{x^2-x} = \frac{4}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$$

$$\epsilon. \frac{x}{x+2} - \frac{5x-20}{x^2-4x} = \frac{-14}{x^2+2x}$$

$$\sigma\tau. \frac{x+1}{x-3} - \frac{x}{3x-9} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x-3} \right)$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 6x^2 - x - 1 = 0 \quad \beta) -4x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \gamma) x(x - 1) = -1$$

7. Για τις τιμές του x που επαληθεύουν την εξίσωση:

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{9x^2 + 18x + 24} + \sqrt{81x^2 + 3x + 2} = 10$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha. x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\beta. \alpha x^2 - (1 - 2\alpha\beta)x - 2\beta = 0 \quad \mu\epsilon \alpha \neq 0$$

$$\gamma. x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\delta. -2x^2 + (\alpha - 3)x + \alpha - 1 = 0$$

$$\epsilon. 2x^2 - (3a - 2)x + a^2 - 2a = 0$$

$$\sigma\tau. -x^2 + (2\alpha + \beta)x - \alpha(\alpha + \beta) = 0$$

9. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές

$$\alpha. x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 5)x - (\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\beta. 13x^2 - 7x - (3|\lambda| + 2) = 0$$

10. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές λύσεις:

$$\text{i. } x^2 + 2x + \lambda = 0$$

$$\text{ii. } x^2 - 4x + 2\lambda = 0$$

$$\text{iii. } 2x^2 + \lambda x + 2 = 0$$

$$\text{iv. } 3x^2 + \lambda x + 3 = 0$$

11. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες τις οποίες και να βρείτε

$$\alpha. \alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0, \alpha \neq 0$$

$$\beta. x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta - 1 = 0$$

$$\gamma. x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0, \alpha \neq 0$$

12. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών

$$\alpha. x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\beta. 2x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$\gamma. x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\delta. \sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x - \sqrt{8} = 0$$

$$\varepsilon. \sqrt{3}x^2 - \sqrt{27}x + \sqrt{2} = 0$$

$$\sigma\tau. (\sqrt{7} + 1)x^2 + 2x - 3 = 0$$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha. 2x^2 - |x| - 6 = 0$$

$$\beta. x^2 + 2|x| - 3 = 0$$

$$\gamma. -3x^2 + 10x - 8 = 0$$

$$\delta. x^2 - 3|x| - 4 = 0$$

$$\varepsilon. x^2 + 2|x| - 8 = 0$$

$$\sigma\tau. 3x^2 + |x| - 2 = -3|x| - 3$$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha. x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\beta. 3x^4 + x^2 - 4 = 0$$

$$\gamma. x^4 + 3x^2 - 10 = 0$$

$$\delta. 2x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$$

$$\varepsilon. x^6 + 7x^3 - 8 = 0$$

$$\sigma\tau. -16x^8 - 15x^4 + 1 = 0$$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha. (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) - 3 = 0$$

$$\beta. \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0$$

$$\gamma. (2x - 1)^2 + 3(2x - 1) - 4 = 0$$

$$\delta. (2x - 1)^2 - \left|\frac{1}{2} - x\right| - \frac{1}{2} = 0$$

$$\varepsilon. x^2 - 2x + |x - 1| = 0$$

$$\sigma\tau. \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - \frac{3x+9}{2} - 18 = 0$$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $5 - (2x - 1)^2 = 4|1 - 2x|$

β. $(x - 5)^2 = 3|5 - x| + 1$

γ. $-(x - 3)^2 + 5|3 - x| - 6 = 0$

17. Να λυθεί η εξίσωση $(x^3 - 1)^2 - \sqrt{x^6 - 2x^3 + 1} - 2 = 0$

18. Να λύσετε την εξίσωση $2 - (2x - 1)^2 = 7x - 2x(1 - x)$.

19. Η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει ρίζα το -3 . Να βρείτε:

α. Τον αριθμό λ

β. Την άλλη ρίζα της εξίσωσης

20. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 + 2\lambda = 0$ να έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε.

21. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda^2 - 4)x - 4\lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους και να τις βρείτε.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον πραγματικό άξονα να είναι 4

22. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

23. Αν η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$ έχει διπλή ρίζα, να βρείτε το λ και στη συνέχεια τη διπλή ρίζα της.

24. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

- α. Να έχει δύο ρίζες άνισες
- β. Να έχει ρίζες πραγματικές
- γ. Να έχει μια διπλή ρίζα
- δ. Να μην έχει καμία πραγματική ρίζα

25. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0$, $\lambda \neq 0$. Να βρείτε για

ποιες τιμές του λ η εξίσωση

- α. Έχει δυο ρίζες άνισες
- β. Έχει μια διπλή ρίζα
- γ. Δεν έχει πραγματικές ρίζες

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 1 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση:

- i. να έχει πραγματικές ρίζες
- ii. να είναι αδύνατη
- iii. να έχει μία διπλή ρίζα, η οποία να βρεθεί.

27. Η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 x - \lambda = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες από τις οποίες

η μια είναι η $x_1 = 1$

- α. Να βρείτε το λ
- β. Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης

28. Η εξίσωση $x^2 + \alpha\sqrt{2}x - \beta(\beta - \alpha) - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) = 0$ (1) έχει μια διπλή

ρίζα

α. Να βρείτε τους αριθμούς α και β

β. Αν κ είναι η διπλή ρίζα της (1) τότε να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 + (\kappa - 1)x - \kappa = 0$$

29. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να βρείτε τις

τιμές των παρακάτω παραστάσεων

α. $x_1 + x_2$

δ. $x_1^3 + x_2^3$

β. $x_1 \cdot x_2$

ε. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

γ. $x_1^2 + x_2^2$

στ. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

30. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 1 = 0$, να βρείτε τις

τιμές των παρακάτω παραστάσεων

α. $x_1 + x_2$

δ. $(x_1 - x_2)^2$

β. $x_1 \cdot x_2$

ε. $|x_1 - x_2|$

γ. $x_1^2 + x_2^2$

στ. $|x_1^3 - x_2^3|$

31. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$. Να βρείτε την

εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

α. $2x_1$ και $2x_2$

γ. $\frac{1}{x_1^2}$ και $\frac{1}{x_2^2}$

β. x_1^2 και x_2^2

δ. $\frac{x_1}{3}$ και $\frac{x_2}{3}$

32. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - (\lambda^2 + 1) = 0$

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε να ισχύει

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

33. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$ (1).

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ

β. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της (1) να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = (x_1 - 2)(x_2 - 2) \text{ είναι ανεξάρτητη του } \lambda$$

γ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει

$$x_1^2 x_2 + x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 = 64$$

34. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζα το 1, να βρείτε το λ

β. Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1)

35. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$

36. α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$

β. Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος α να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$

37. α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$ έχει

νόημα πραγματικού αριθμού.

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε από το ερώτημα α να λύσετε

$$\text{την εξίσωση } \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$$

38. Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$A + B = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad A \cdot B = \frac{1}{20}$$

β. Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς

A και B .

39. α. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$

β. Να σχηματίσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α) .

40. Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$

β. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

41. Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -15$

β. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

42. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta = -1 \text{ και } \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -12$

β. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β και να ρους βρείτε.

43. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272$$

α. Με την βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -64$

β. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

44. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \neq -2$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$

45. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α. η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2

46. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης
- β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει ότι $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

47. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες
- β. Στη περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες τις x_1, x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει ότι

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

48. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης
- β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει ότι $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$

49. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

- α. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 .
- β. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων

$$x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

γ. Να προσδιορίσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους

$$\text{αριθμούς } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

50. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - κx - 2$, $κ \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $κ \in \mathbb{R}$

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1)

i. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο

$$P = x_1 \cdot x_2 \text{ των ριζών της (1)}$$

ii. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες

$$\rho_1, \rho_2 \text{ όπου } \rho_1 = 2x_1, \rho_2 = 2x_2$$

51. α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

β. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει

$$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$$

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης

$$(1)$$

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

52. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Υποθέτουμε τώρα ότι η μια από τις ρίζες της εξίσωσης (1)

είναι ο αριθμός ρ . Να αποδείξετε ότι:

- i. Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

- ii. $\rho \neq 0$ και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$$

53. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες

ρίζες

- β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

- γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο

άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$

54. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$ με παράμετρο $a \neq 0$

- α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = (a^2 + 1)^2$$

- β. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = a$ και

$$\rho_2 = -\frac{1}{a}$$

- γ. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$

55. Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$ όπου α, β δυο θετικοί αριθμοί.

- α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

- β. Να βρείτε την σχέση μεταξύ των αριθμών α , β ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε ως συνάρτηση των α , β .

56. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$ με $\lambda \in (0, 2)$.

α. Να βρείτε:

- i. Την περίμετρο Π του ορθογωνίου
- ii. Το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

β. Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$ για κάθε $\lambda \in (0, 2)$

γ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

57. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες

της εξίσωσης $x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$ με $\lambda \in (0, 4)$.

α. Να βρείτε:

- i. Την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ
- ii. Το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$ για κάθε $\lambda \in (0, 4)$

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

58. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δυο ρίζες άνισες.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να βρείτε:

i. Το $S = x_1 + x_2$

ii. Το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ. Αν η μια ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$

ii. Να βρείτε το λ .

59. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ με παράμετρο $\lambda < 1$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$

γ. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 , ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε

i. Να αποδείξετε $x_1 - x_2 = 4$

ii. Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .

60. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + 5) = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες

πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε για

ποια τιμή του λ ισχύει ότι $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4$

61. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες

πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

i. να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει ότι

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$$

ii. Για $\lambda = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$$

62. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε

ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες

γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης

(1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$

63. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με

παράμετρο $\lambda \neq -2$

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι

$$\Delta = 12\lambda + 25$$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του το άθροισμα των ριζών

$$S = x_1 + x_2 \text{ και το γινόμενο των ριζών } P = x_1 \cdot x_2$$

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , ώστε για τις ρίζες x_1, x_2

της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 x_2 + 3)^2 = 0$$

64. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε

ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το

άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και

να βρείτε την τιμή του γινομένου των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$

γ. Αν $\lambda < 0$

i. Το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2$ όπου x_1, x_2 οι

ρίζες του παραπάνω τριωνύμου

65. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε

ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$
- γ. Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Για κάθε $\lambda > 0$ αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου αποδείξτε ότι: $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$.

66. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$
- β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$
- γ. Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1

67. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$ με παράμετρο $\alpha \neq 0$

- α. Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.
- β. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης αν $\alpha = 2$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

68. α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να αποδείξετε η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος

θεωρούμε την διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1)

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν :

$\beta < 0, \gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$ τότε η εξίσωση (1) έχει

τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

69. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\alpha + \gamma - \beta)x^2 + 2\gamma x + \beta + \gamma - \alpha = 0$$

με $\beta \neq \alpha + \gamma$. Αν οι αριθμοί α, β και γ είναι ρητοί, να αποδείξετε ότι:

- i. η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες
- ii. οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί

«Τα μαθηματικά είναι η τέχνη να δίνεις το ίδιο όνομα σε διαφορετικά πράγματα»

Πουανκαρέ Ζυλ Ανρί

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$ αν $c=0$.
2. Η διακρίνουσα της εξίσωσης x^2+a είναι a^2 .
3. Αν $a+b+c=0$ τότε το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$.
4. Μια εξίσωση β' βαθμού έχει αρνητικές λύσεις όταν $\Delta < 0$.
5. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $-x^2 + ax = 0$ είναι $a^2 + 4$.
6. Η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ έχει σίγουρα λύση αν $ac < 0$.
7. Αν $\Delta=0$ τότε το 0 είναι μια λύση της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$.
8. Η εξίσωση $ax^2-c=0$ έχει πάντα αρνητική διακρίνουσα.
9. Οι αριθμοί 3 και 2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.
10. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2-3x-2=0$ είναι $\Delta=-3^2-4 \cdot 1 \cdot (-2)$.
11. Η εξίσωση $x^2-14x+49=0$ έχει δύο ρίζες άνισες.
12. Αν η εξίσωση $x^2-2x-2k=0$ έχει δύο ρίζες άνισες τότε $k > -\frac{1}{2}$.
13. Η εξίσωση $(x-5)^2=0$ έχει $\Delta=0$.
14. Αν μια εξίσωση β' βαθμού έχει $\Delta=0$ τότε είναι ταυτότητα.
15. Αν μια εξίσωση της μορφής $ax^2+bx+c=0$ έχει $a=0$, τότε έχουμε ελλειπή μορφή τριωνύμου.
16. Η εξίσωση $(\lambda-2)x^2+\lambda x-7=0$ είναι β' βαθμού ακόμα και όταν $\lambda=2$.
17. Μια εξίσωση β' βαθμού έχει πάντα 2 ρίζες.
18. Αν μια εξίσωση β' βαθμού έχει λύση τότε $\Delta \geq 0$.
19. Η εξίσωση $(x-5)(x+4)=0$ έχει μια λύση.

20. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 - \lambda x + 3 = 0$ είναι το 1, τότε $\lambda = 2$.
21. Αν $\Delta > 0$ τότε οι λύσεις της εξίσωσης $\beta x^2 + \alpha x + \gamma = 0$ είναι: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
22. Οι αριθμοί x και y που έχουν άθροισμα 18 και γινόμενο 65, είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 - 18\omega + 65 = 0$.
23. Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda + 2 = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες αν $\lambda < -2$.
24. Αν $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2$ και $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2\alpha\gamma x - \beta^2 + \gamma^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
25. Αν η εξίσωση $x^2 - 3x + \kappa^2 - 7\kappa = 0$ έχει ρίζα το -2, τότε $\kappa = 5$ ή 2.
26. Η εξίσωση $(5x - 2)(x + 3) = 7(x - 1)$ έχει δύο λύσεις εκ των οποίων η μία είναι το 16.
27. Η εξίσωση $y^2 + 9y + 20 = 0$ έχει ρίζες το 4 και το 5.
28. Αν η x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 7x + 5 = 0$ τότε $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{5}$.
29. Αν η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 2)x + 7 = 0$ έχει ρίζες θετικές τότε ο $\lambda > 2$.
30. Αν η εξίσωση $x^2 - 3x + 10 = 0$ έχει ρίζες x_1 και x_2 τότε η εξίσωση $x^2 - 9x + 8 = 0$ έχει ρίζες $x_1 + 3$ και $x_2 + 3$.
31. Αν για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $x^2 - \kappa x + 19 = 0$ ισχύει ότι $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 57$, τότε $\kappa = 3$.
32. Αν σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση είναι $\Delta > 0$, $P < 0$ και $S > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες και η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή είναι η θετική.
33. Αν σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση είναι $\Delta > 0$, $P = 0$ και $S < 0$, τότε η μία ρίζα της εξίσωσης είναι το μηδέν κι η άλλη είναι αρνητική.

34. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+7x+7=0$ τότε η τιμή της παράστασης $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ είναι ίση με 49.
35. Η εξίσωση $(2-\lambda)x^2 + (\lambda+1)x + (\lambda+1) = 0$ έχει αντίστροφες ρίζες αν $\lambda = \frac{1}{2}$.
36. Αν για οι συντελεστές της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$ ξέρουμε ότι συνδέονται με τη σχέση $\alpha + \beta = \gamma$ τότε ισχύει $(x_1-1)^2(x_2-1)^2=4x_1^2x_2^2$.
37. Η εξίσωση $x^2-10x+\lambda+8=0$ έχει δύο ρίζες εκ των οποίων η μία είναι τα $\frac{3}{2}$ της άλλης. Τότε $\lambda=16$.
38. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ έχει $\alpha = \gamma$ τότε έχει ρίζες αντίστροφες.
39. Η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2+Sx+P=0$ έχει $x_1+x_2=S$ και $x_1x_2=P$.
40. Το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$ είναι $P=\frac{c}{a}$.
41. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$ είναι -5 και το γινόμενο 6.
42. Η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ είναι η $x^2 - (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})x + \sqrt{\alpha\beta} = 0$.
43. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $4x^2-12x+8=0$ τότε $x_1x_2=8$.
44. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), τότε οι αριθμοί $\frac{x_1}{x_2}$ και $\frac{x_2}{x_1}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2-(b^2-2ac)x+ac=0$.
45. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2+\lambda x+8=0$ ισούται με το τετράγωνο της άλλης τότε $\lambda=6$.

46. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+px+q=0$ τότε:

Όταν $q<0$ οι x_1 και x_2 είναι ετερόσημες.

Όταν $q>0$ και $p<0$ οι x_1 και x_2 είναι θετικές.

Όταν $q>0$ και $p>0$ οι x_1 και x_2 είναι αρνητικές.

47. Η εξίσωση $2x^2-3x+1=0$ έχει ρίζες 3 και 1.

48. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$ είναι οι αριθμοί 2 και 3.

49. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+px+q=0$, τότε $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

50. Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+px+q=0$ τότε οι $2x_1$ και $2x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+2px+4q=0$.

51. Αν η διακρίνουσα μιας εξίσωσης $2^{\text{ου}}$ βαθμού είναι $\Delta > 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

52. Έστω Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

53. Αν $\Delta > 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x + x_1) \cdot (x + x_2)$.

54. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει διπλή ρίζα τότε $\Delta=0$.

55. Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ τότε η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

56. Αν ισχύει ότι $\Delta < 0$, η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές λύσεις.

57. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι πάντα θετικό, όταν η διακρίνουσα του Δ είναι μικρότερη του μηδενός.

58. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές

ρίζες x_1, x_2 τότε ισχύει: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x + x_1) \cdot (x + x_2)$.

59. Αν η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει πραγματικές ρίζες, τότε το

άθροισμά τους είναι ίσο με τον αριθμό S και το γινόμενο τους ίσο με τον αριθμό P .

60. Αν η διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι μηδέν, τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.

61. Αν για την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$,

ισχύει $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

62. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ έχει δύο ίσες ρίζες:

$$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

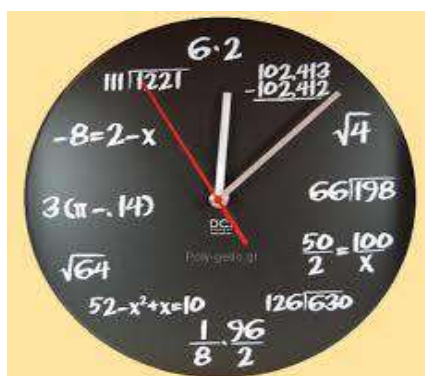
63. Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

τότε ισχύει:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

64. Η εξίσωση με ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι η: $x^2 - Sx + P = 0$, όπου

$S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.



Κεφάλαιο 4^ο Ανισώσεις

4.1. Ανισώσεις α' βαθμού

- Οι ανισώσεις $ax + \beta > 0$ και $ax + \beta < 0$
- Για να λύσουμε την ανίσωση $ax + \beta > 0$ την φέρνουμε πρώτα στη μορφή $ax > -\beta$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α. Αν $\alpha > 0$ τότε $ax > -\beta \Leftrightarrow \frac{ax}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$

β. Αν $\alpha < 0$ τότε $ax > -\beta \Leftrightarrow \frac{ax}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$

γ. Αν $\alpha = 0$ τότε η ανίσωση γίνεται $0x > -\beta$ η οποία

- i. Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν ισχύει $\beta > 0$
- ii. Είναι αδύνατη, αν ισχύει $\beta \leq 0$



Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις

α. $4 - 2(x - 1) < 5 - 3x$

β. $1 - \frac{3(2x-1)}{4} \geq x - \frac{2-3x}{2}$

Λύση

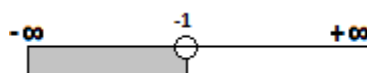
α. $4 - 2(x - 1) < 5 - 3x \Leftrightarrow$

$$4 - 2x + 2 < 5 - 3x \Leftrightarrow$$

$$-2x + 3x < 5 - 2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$x < -1$$

Παριστάνουμε τις λύσεις της ανίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



β. $1 - \frac{3(2x-1)}{4} \geq x - \frac{2-3x}{2} \Leftrightarrow$

$$4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{3(2x-1)}{4} \geq 4x - 4 \cdot \frac{2-3x}{2} \Leftrightarrow$$

$$4 - 3(2x-1) \geq 4x - 2(2-3x) \Leftrightarrow$$

$$4 - 6x + 3 \geq 4x - 4 + 6x \Leftrightarrow$$

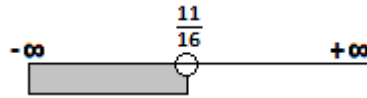
$$-6x - 4x - 6x \geq -4 - 3 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-16x \geq -11 \quad x \leq \frac{11}{16}$$

Προσοχή!!!

Όταν διαιρούμε με αρνητικό αριθμό
η φορά της ανίσωσης αλλάζει

Παριστάνουμε τις λύσεις της ανίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



2. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $2x + 2 > 3x - (x + 5)$

β. $4 - 2(x - 1) < 5 - 2x$

γ. $3 - (2x + 1) \leq 2(1 - x)$

Λύση

α. $2x + 2 > 3x - (x + 5) \Leftrightarrow$

$$2x + 2 > 3x - x - 5 \Leftrightarrow$$

$$2x - 3x + x > -2 - 5 \Leftrightarrow$$

$$0x > -7$$

Η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $4 - 2(x - 1) < 5 - 2x \Leftrightarrow$

$$4 - 2x + 2 < 5 - 2x \Leftrightarrow$$

$$-2x + 2x < -4 - 2 + 5 \Leftrightarrow$$

$$0x < -1$$

Η ανίσωση είναι αδύνατη

γ. $3 - (2x + 1) \leq 2(1 - x) \Leftrightarrow$

$$3 - 2x - 1 \leq 2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$-2x + 2x \leq -3 + 1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$0x \leq 0$$

Η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

α. $3 - 2(x + 1) \geq 5$ και $2x - 10 < 3x - 1$

β. $1 - \frac{1-x}{2} < x$ και $1 - \frac{4-x}{4} \geq \frac{x+4}{8}$

Λύση

α. $3 - 2(x + 1) \geq 5 \Leftrightarrow$

$2x - 10 < 3x - 1 \Leftrightarrow$

$3 - 2x - 2 \geq 5 \Leftrightarrow$

$2x - 3x < 10 - 1 \Leftrightarrow$

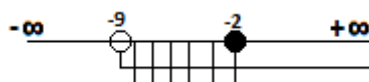
$-2x \geq -3 + 2 + 5 \Leftrightarrow$

$-1x < 9 \Leftrightarrow$

$-2x \geq 4 \Leftrightarrow$

$x > -9 \Leftrightarrow$

$x \leq -2$



Επομένως οι δυο ανισώσεις συναληθεύουν για $-9 < x \leq -2$ ή

για $x \in (-9, -2]$

β. $1 - \frac{1-x}{2} < x \Leftrightarrow$

$1 - \frac{4-x}{4} \geq \frac{x+4}{8} \Leftrightarrow$

$2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1-x}{2} < 2x \Leftrightarrow$

$8 \cdot 1 - 8 \cdot \frac{4-x}{4} \geq 8 \cdot \frac{x+4}{8} \Leftrightarrow$

$2 - (1 - x) < 2x \Leftrightarrow$

$8 - 2(4 - x) \geq x + 4 \Leftrightarrow$

$2 - 1 + x < 2x \Leftrightarrow$

$8 - 8 + 2x \geq x + 4 \Leftrightarrow$

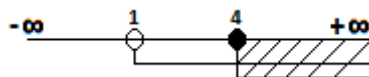
$x - 2x < -2 + 1 \Leftrightarrow$

$2x - x \geq -8 + 8 + 4 \Leftrightarrow$

$-1x < -1 \Leftrightarrow$

$x \geq 4$

$x > 1$



Επομένως οι δυο ανισώσεις συναληθεύουν για $x > 4$ ή για

$$x \in [4, +\infty)$$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $|x| < 2$

δ. $|2x - 4| \geq 8$

β. $|x| > 2$

ε. $|x + 6| < 0$

γ. $|2x - 4| \leq 8$

στ. $|x - 5| \leq -3$

Λύση

α. $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

β. $|x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ή } x < -2$

γ. $|2x - 4| \leq 8 \Leftrightarrow$

$$-8 \leq 2x - 4 \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$-8 + 4 \leq 2x \leq 8 + 4 \Leftrightarrow$$

$$-4 \leq 2x \leq 12 \stackrel{:2}{\Leftrightarrow}$$

$$-2 \leq x \leq 6$$

δ. $|2x - 4| \geq 8 \Leftrightarrow$

$$2x - 4 \geq 8 \text{ ή } 2x - 4 \leq -8$$

$$2x \geq 8 + 4 \text{ ή } 2x \leq 4 - 8$$

$$2x \geq 12 \text{ ή } 2x \leq -4$$

$$x \geq 6 \text{ ή } x \leq -2$$

ε. $|x + 6| < 0$ Η ανίσωση είναι αδύνατη ($|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

$$|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta \text{ ή } x < -\theta$$

στ. $|x - 5| \leq -3$ Η ανίσωση είναι αδύνατη

5. Να λύσετε την ανίσωση

α. $|2x - 1| + 2 - \frac{|6x-3|}{8} \geq \frac{|4-8x|+3}{5}$

Λύση

$$|2x - 1| + 2 - \frac{|6x - 3|}{8} \geq \frac{|4 - 8x| + 3}{5} \Leftrightarrow$$

$$|2x - 1| + 2 - \frac{|3(2x - 1)|}{8} \geq \frac{|4(1 - 2x)| + 3}{5} \Leftrightarrow$$

$$|2x - 1| + 2 - \frac{3|2x - 1|}{8} \geq \frac{4|2x - 1| + 3}{5} \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $|2x - 1| = \omega$ και η ανίσωση γράφεται:

$$\omega + 2 - \frac{3\omega}{8} \geq \frac{4\omega + 3}{5} \Leftrightarrow$$

$$40\omega + 40 \cdot 2 - 40 \cdot \frac{3\omega}{8} \geq 40 \frac{4\omega + 3}{5} \Leftrightarrow$$

$$40\omega + 80 - 15\omega \geq 8(4\omega + 3) \Leftrightarrow$$

$$40\omega + 80 - 15\omega \geq 32\omega + 24 \Leftrightarrow$$

$$40\omega - 15\omega - 32\omega \geq -80 + 24 \Leftrightarrow$$

$$-7\omega \geq -56 \Leftrightarrow$$

$$\omega \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$|2x - 1| \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$-8 \leq 2x - 1 \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$-8 + 1 \leq 2x \leq 8 + 1 \Leftrightarrow$$

$$-7 \leq 2x \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-7}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

6. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \leq 9$

Λύση

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - 4)^2} \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$|x - 4| \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$-9 \leq x - 4 \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$-9 + 4 \leq x \leq 9 + 4 \Leftrightarrow$$

$$-5 \leq x \leq 13$$

7. Να λύσετε την ανίσωση $|2 - x| \leq |x + 6|$

Λύση

$$|2 - x| \leq |x + 6|$$

και τα δυο μέλη της ανίσωσης είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το μηδέν οπότε

υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο επομένως έχουμε:

$$|2 - x| \leq |x + 6| \Leftrightarrow |2 - x|^2 \leq |x + 6|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2 - x)^2 \leq (x + 6)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 12x + 36 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x - x^2 - 12x \leq 36 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-16x \leq 32 \Leftrightarrow x \geq -2$$

8. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 2| \geq 3x - 8$

Λύση

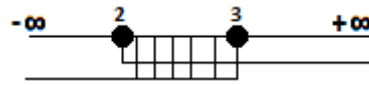
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ τότε

$$|x - 2| \geq 3x - 8 \Leftrightarrow x - 2 \geq 3x - 8 \Leftrightarrow$$

$$x - 3x \geq -8 + 2 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

Συναληθεύουμε με τον περιορισμό $x \geq 2$



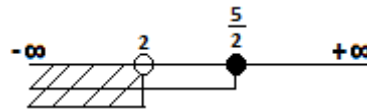
Άρα $x \in [2, 3]$ ή $2 \leq x \leq 3$

- Αν $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ τότε:

$$|x - 2| \geq 3x - 8 \Leftrightarrow -x + 2 \geq 3x - 8 \Leftrightarrow$$

$$-x - 3x \geq -8 - 2 \Leftrightarrow -4x \geq -10 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} = 2,5$$

Συναληθεύουμε με τον περιορισμό $x < 2$



Άρα $x < 2$ ή $x \in (-\infty, 2)$

9. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει $4 \leq |x - 5| \leq 8$

Λύση

$$4 \leq |x - 5| \leq 8$$

- $4 \leq |x - 5| \Leftrightarrow$

$$|x - 5| \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$x - 5 \geq 4 \text{ ή } x - 5 \leq -4$$

$$x \geq 9 \text{ ή } x \leq 1$$

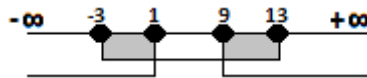
- $|x - 5| \leq 8 \Leftrightarrow$

$$-8 \leq x - 5 \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$-8 + 5 \leq x \leq 8 + 5 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq x \leq 13$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών



Οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $-3 \leq x \leq 1$ ή $9 \leq x \leq 13$. Μπορούμε να γράψουμε

$$x \in [-3, 1] \cup [9, 13]$$

Τα καθαρά Μαθηματικά είναι, κατά κάποιο τρόπο, η ποίηση των λογικών ιδεών.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να λύστε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών

α. $2(x - 3) + 4 > 8$

β. $3(x - 2) > x - 6$

γ. $2x - 12 \leq 3(x - 5) - x + 3$

δ. $1 - 2(3x - 1) < x - (2x - 5)$

ε. $-x + 4(x - 3) < 6(x - 2) - 3x$

στ. $6(x - 1) - 2(x - 4) \geq 1$

2. Να λύστε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών

α. $5 - 3(x - 1) < x - 4(x - 2)$

β. $10 - 7(x - 1) > 3x - 5(2x - 3)$

γ. $13 - 3(x - 2) < 4(x + 3) - 7(x - 3)$

δ. $x - (2x - 1)^2 \geq 3 - 4x(x - 1)$

ε. $25 - (x + 1)^2 \leq (x + 2)^2 - 2(x - 2)^2$

στ. $3x^2 - 2(x - 1)^2 > x^2 - x + 1$

3. Να λύστε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών

α. $3 - \frac{2x+1}{3} \leq \frac{1-x}{2}$

β. $x - \frac{x-1}{8} > 1 - \frac{x}{4}$

$$\gamma. \frac{7-3x}{12} - \frac{x-2}{4} \geq \frac{3-2x}{3} - \frac{5-x}{6}$$

$$\delta. \frac{x+1}{3} - \frac{x+8}{12} \geq \frac{5x-16}{6}$$

$$\epsilon. \frac{x+1}{16} - \frac{2x+1}{8} \geq \frac{x-1}{16} - \frac{x+1}{2}$$

4. Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$. Να βρείτε:

α. Τις λύσεις τους

β. Το σύνολο των κοινών τους λύσεων

5. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$\alpha. 3x - 2(1 - x) > 2x + 7 \text{ και } 2(7x - 3) \geq 12 + 5x$$

$$\beta. 4(3 - x) + 8 \leq 9 + 3(2 - x) \text{ και } 13 - 5(2 - x) < 9 - (6 - 5x)$$

$$\gamma. x - \frac{x-1}{8} \geq 1 - \frac{x}{4} \text{ και } x^2 - 1 > \frac{x(2x-1)}{2}$$

$$\delta. \frac{4x-3}{5} - x > \frac{16}{5} \text{ και } \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \leq \frac{5}{4}$$

$$\epsilon. \frac{2x-4}{6} \leq 0 \text{ και } \frac{x-3}{2} + \frac{3x+1}{2} > 2x$$

$$\sigma\tau. \frac{x-1}{2} + \frac{2(x+1)}{3} \geq \frac{x+2}{2} - \frac{13}{6} \text{ και } \frac{2x-1}{4} + 2x \leq \frac{x+1}{2} - \frac{11}{4}$$

6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $5 - \frac{x-4}{2} \geq 2x - 3$ και

$$x - 15 + 6(3 - x) < (x - 3)(x + 3) - x(x + 1)$$

7. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

$$\alpha. 4 < 6x - 2 < 8$$

$$\beta. -24 \leq 3(x + 3) - 2(2x + 1) < 12$$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $|x| < 8$

δ. $|x| > 2$

β. $|x - 2| < 5$

ε. $|x - 4| > 6$

γ. $|2x + 6| \leq 8$

στ. $|1 - 2x| \geq 5$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $4 - 8|x| > 0$

δ. $|-2x + 8| \geq 4$

β. $|x| + 4 < 0$

ε. $|-6x + 3| \leq 9$

γ. $3|x| + 6 > 0$

στ. $|13x - 12| < -8$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $|x| - \frac{|x|-1}{12} > \frac{5|x|}{6}$

β. $|x - 2| - \frac{|x-2|-4}{15} > 1 - \frac{2|x-2|}{5}$

γ. $8 - |2x - 6| \leq \frac{|3-x|+11}{2}$

δ. $|x - 3| - \frac{|2x-6|+1}{3} > \frac{|9-3x|-3}{4}$

ε. $1 - \frac{|2x-1|}{4} \geq |1 - 2x| - \frac{|6x-3|-2}{8}$

στ. $\frac{|x-2|+3}{4} - \frac{|2x-4|-1}{8} \leq \frac{|x-2|}{8}$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \geq 2$

β. $\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} \leq 1$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $|x - 1| > |x + 3|$

γ. $|2 - x| \leq |x + 6|$

β. $|2x - 1| \geq 2|x - 2|$

δ. $|x - 3| \geq |x + 1|$

ε. $|3x - 2| < |2x - 3|$

13. Να λυθούν οι ανισώσεις

α. $|x + 2| > 2x - 6$

β. $|2x - 4| \leq x + 1$

γ. $|x + 6| \leq 2x$

14. Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{4|x| - 8}{|x| + 1} < 2$$

15. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

α. $3 \leq |x| \leq 5$

γ. $4 \leq |2x - 6| \leq 10$

β. $3 \leq |x - 1| \leq 6$

δ. $2 < |2x - 1| \leq 5$

16. Να λύσετε την ανίσωση $|4 - |x - 1|| < 3$

17. Να λυθεί η ανίσωση $d(x, 1) - 2d(x, -2) < x + 1$

18. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $|2x + 3| = 2x + 3$

ii. $|3 - 2(x + 1)| = 2x - 1$

iii. $||x| - 2| = 2 - |x|$

iv. $d(x, 1) - \frac{|x-1|-4}{15} > 1 - \frac{|2-2x|}{5}$

19. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $2 - |2x - 3| < 0$

ii. $|3 - 2x| < 2$

iii. $\frac{|x|+6}{|x|+4} \geq 2$

iv. $\left| \frac{x}{|2x|+2} \right| > \frac{1}{3}$

v. $|3x - 2| - 1 < \left| x - \frac{2}{3} \right|$

vi. $2|x| + |-x| + |3x| \leq 12$

20. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $1 \leq |x - 1| \leq 2$

ii. $||x - 2| - 5| \leq 2$

21. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $3|x - 1| - 2|x + 2| \leq x - 3$

ii. $d(x, 3) + 2|x + 1| \geq 2$

22. Να λυθεί η ανίσωση $2 \leq \sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq 3$

23. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $|2x - 4| \leq 0$

ii. $|3 - x| > 0$

iii. $|2 - 3(x - 1)| < -1$

iv. $\left| 3 - \frac{2}{x-1} \right| \geq -2$

24. Να λυθεί η ανίσωση $|x^2 - x| + |x^2 + x - 2| \leq 0$

25. Να λυθούν οι ανισώσεις

α. $|8|x - 2| - 3| \leq 5$

β. $|3 - |2x - 1|| < 2$

26. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε την ανίσωση

$$(\lambda - 1)x \geq \lambda - \lambda^2$$

27. α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$

β. Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$

γ. Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με την βοήθεια του άξονα , να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα η ένωση διαστημάτων.

28. α. Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x + 5| \geq 3$

γ. Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με την βοήθεια του άξονα , να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα η ένωση διαστημάτων.

29. α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

i. $|2x - 3| \leq 5$

ii. $|2x - 3| \geq 1$

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

30. α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

i. $|1 - 2x| < 5$

ii. $|1 - 2x| > 11$

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

31. α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

32. α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 4| = 3|x - 1|$

β. Να λύσετε την ανίσωση $|3x - 5| > 1$

γ. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β) . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33. α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ (1)

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 2$ (2)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

34. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 2| < 3$

α. Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 5$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

35. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y για τους οποίους ισχύει $|y - 2| < 1$

α. Να αποδείξετε ότι $y \in (1, 3)$

β. Να απλοποιήσετε την επόμενη παράσταση $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$

36. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί την σχέση $|x + 1| < 2$ να

αποδείξετε ότι:

α. $x \in (-3, 1)$

β. Η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι ανεξάρτητη του x .

37. α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 4$

β. Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση να

αποδείξετε ότι $\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$

38. α. Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$

β. Αν $\alpha \geq -1$ να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς

απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

39. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|2x - 1| < 1$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$

β. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους

αριθμούς $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

40. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ να έχει

μοναδική λύση x_0 για την οποία να ισχύει $d(x_0, -1) \leq 2$.

41. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που το τριπλάσιό του,

ελαττωμένο κατά 4, δεν υπερβαίνει το μισό του.

42. Ένας γραφίστας αμείβεται με 10€ για κάθε σχέδιο που παράγει. Τα

ημερήσια έξοδά του είναι 25€. Να υπολογίσετε τον ελάχιστο αριθμό

σχεδίων που πρέπει να κατασκευάζει έτσι ώστε να κερδίσει 1.200€ σε

διάστημα ενός μηνός (25 εργάσιμες ημέρες).

43. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$

β. Έστω $\lambda \neq 0$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει

$$|x_1 - x_2| > 1$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Αν $2x < \psi$ τότε $x - \frac{\psi}{2} < 0$
2. Αν ο αριθμός x είναι το πολύ 7 τότε $x \leq 7$
3. Αν $-4x > -8$ τότε $x > 2$
4. Αν $|x - 2| < 3$ τότε $x < -1$ ή $x > 5$
5. $|x| + |x - 1| > 0$ για κάθε x
6. Αν $2\alpha - 5 \geq 3\beta$ και $2\alpha + 5 \leq 3\beta$ τότε $|2 - 3\beta| \geq 5$
7. Αν $-3 < x < 1$ τότε $|x + 1| < 2$
8. Αν $x < -4$ ή $x > 2$ τότε $|x + 1| > 3$
9. Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

$$d(x, -2) < 1 \Leftrightarrow$$

$$|x + 2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq x \leq -1$$



4.2. Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

➤ Παραγοντοποίηση τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$

- Αν $\Delta > 0$ τότε:

$$ax^2 + bx + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

Όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου

- Αν $\Delta = 0$ τότε:

$$ax^2 + bx + \gamma = \alpha(x - x_1)^2 = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε:

$$ax^2 + bx + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

➤ Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α**, μόνο αν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών
- **Μηδέν** όταν η τιμή του x είναι κάποια από της ρίζες του τριωνύμου
- **Ομόσημο** του a σε κάθε άλλη περίπτωση.

Δηλαδή:

- Αν $\Delta > 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου τότε:

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2+bx+\gamma$	ομόσημο του α	ετερόσημο του α	ομόσημο του α	

- Αν $\Delta = 0$ και x_1 ή διπλή ρίζα του τριωνύμου τότε:

	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2+bx+\gamma$	ομόσημο του a	ϕ	ομόσημο του a

- Αν $\Delta < 0$ τότε:

	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2+bx+\gamma$	ομόσημο του a	

➤ **Ανισώσεις της μορφής $ax^2 + bx + \gamma >, \geq, <, \leq 0$**

- Για να λύσουμε μια ανίσωση μιας από τις παραπάνω μορφές βρίσκουμε πρώτα το πρόσημο του αντίστοιχου τριωνύμου και στη συνέχεια το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων ή τα σημεία που επαληθεύεται η ανίσωση.



Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α. $x^2 - 5x + 6$

β. $x^2 - 6x + 9$

γ. $6x^2 - x - 2$

Λύση

α. Έχουμε $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Άρα $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

β. Έχουμε $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

γ. Έχουμε $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα $6x^2 - x - 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$

β. $\frac{2x^2+8x-42}{x^2+7x}$

Λύση

α. Έχουμε:

▪ $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

Αφού $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

▪ $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Αφού $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x-1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x-1}{2x+1}$$

β. Έχουμε:

▪ $2x^2 + 8x - 42 = 2(x^2 + 4x - 21) = 2(x - 3)(x + 7)$

Αφού $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4+10}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4-10}{2} = -7 \end{cases}$$

▪ $x^2 + 7x = x(x + 7)$

Άρα

$$\frac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 + 7x} = \frac{2(x-3)(x+7)}{x(x+7)} = \frac{2(x-3)}{x}$$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $x^2 - 4x + 3 < 0$

δ. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

β. $x^2 + x - 2 \geq 0$

ε. $x^2 - 4x + 4 > 0$

γ. $-x^2 + 2x + 15 < 0$

στ. $x^2 - 8x + 16 \leq 0$

Λύση

α. Είναι $x^2 - 4x + 3 < 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Άρα

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	-	+	

Δηλαδή $x \in (1,3)$

β. Είναι $x^2 + x - 2 \geq 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Άρα

	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	+	+	-	+

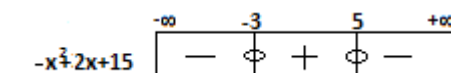
Δηλαδή $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

γ. Είναι $-x^2 + 2x + 15 < 0$

$$\Delta = 2^2 - 4(-1) \cdot 15 = 4 + 60 = 64 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} \frac{-2 + 8}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \\ \frac{-2 - 8}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \end{cases}$$

Άρα

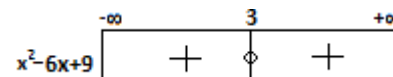


Δηλαδή $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

δ. Είναι $x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0$ Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αφού $\Delta = 0$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

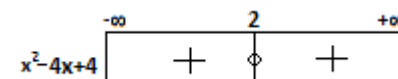


ε. Είναι $x^2 - 4x + 4 > 0$

$$\text{Έχουμε } \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} = 2$$

Άρα

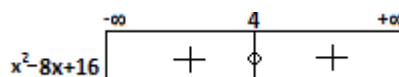


Δηλαδή $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

στ. Είναι $x^2 - 8x + 16 \leq 0$

$$\text{Έχουμε: } \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$



$$\text{Άρα } x = 4$$

4. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{1}{2}(x^2 + x - 12) > 0$

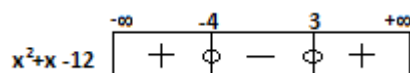
Λύση

$$-\frac{1}{2}(x^2 + x - 12) > 0 \xrightarrow{\cdot(-2)}$$

$$x^2 + x - 12 < 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$



$$\text{Άρα } x \in (-4, 3)$$

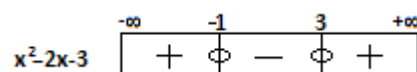
5. Να λύσετε την ανίσωση $2x - 1 \leq x^2 - 4 < 12$

Λύση

$$2x - 1 \leq x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

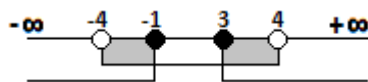
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$



$$\text{Δηλαδή } x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$

Συναληθεύοντας έχουμε



Άρα $x \in (-4, -1] \cup [3, 4)$

6. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x - (\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1) = 0$ (1) με

παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση

2^{ου} βαθμού

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο

ερώτημα (α) η εξίσωση (1) παίρνει την μορφή

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο

ερώτημα (α) η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1) αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού.

Λύση

α. Πρέπει $\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

Άρα για $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ή (1) είναι εξίσωση 2^{ου}

βαθμού .

β. Είναι $(\lambda^2 - \lambda)x - (\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda(\lambda - 1)x - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0 \stackrel{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda x - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ. Έχουμε $\alpha = \lambda, \beta = -(\lambda + 1), \gamma = 1$ άρα

$$\begin{aligned}\Delta &= [-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2 > 0\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

δ. Οι ρίζες της (1) είναι

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{(\lambda + 1) \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2}}{2\lambda} \\ &= \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda + 1 + |\lambda - 1|}{2\lambda} = \frac{\lambda + 1 + \lambda - 1}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{2\lambda} = 1 \\ x_2 = \frac{\lambda + 1 - |\lambda - 1|}{2\lambda} = \frac{\lambda + 1 - \lambda + 1}{2\lambda} = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}\end{aligned}$$

Το σημαντικό πράγμα είναι να μην σταματήσεις να κάνεις ερωτήσεις. Η περιέργεια έχει τον λόγο της που υπάρχει.

Albert Einstein

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α. $x^2 - 5x + 6$

δ. $-x^2 + 8x - 16$

β. $x^2 + 3x + 2$

ε. $6x^2 - x - 2$

γ. $-x^2 + 4x - 3$

στ. $3x^2 + 5x - 2$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $x^3 - 3x^2 - 4x$

δ. $x^4 - 5x^2 + 4$

β. $x^3 - (2 - \sqrt{2})x^2 - \sqrt{8}x$

ε. $x^2 - 3|x| - 10$

γ. $9x^2 - 9\sqrt{3}x + 6$

στ. $(x^2 - 3x)^2 - 2x^2 + 6x$

3. Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τις παραστάσεις:

i. $x^2 + 2|x| - 3$

ii. $x^6 + 7x^3 - 8$

4. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$f(x, y) = 2(x - y + 1)^2 - 3(x - y + 1) + 1$$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $\frac{x^2+3x-4}{x^2-16}$

ε. $\frac{x^2-4x+4}{x^2+3x-10}$

β. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

στ. $\frac{-x^2+4x+5}{x^2-3x-4}$

γ. $\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$

ζ. $\frac{x^3+3x^2-10x}{x^3+5x^2}$

δ. $\frac{x^2+4x+5}{-2x^2+2x+4}$

η. $\frac{2x^2+5x-12}{2x^3-x^2-3x}$

θ. $\frac{2x^2+5|x|-3}{x^2-2|x|-15}$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - (\kappa - 2\lambda)x - 2\kappa\lambda}{2x^2 - (2\kappa - 1)x - \kappa}$$

$$B = \frac{\alpha(\alpha - \beta) - 2\beta^2}{\alpha^4 + \alpha\beta^3}$$

7. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α. $x^2 + 2(\alpha - 1)x - 3\alpha(\alpha + 2)$

β. $x^2 - (\varepsilon\alpha + 2)x + 2\alpha(\alpha + 2)$

γ. $-x^2 + \alpha x + \beta(\beta - \alpha)$

δ. $x^2 + (\alpha + \beta)x - 2\alpha(\alpha - \beta)$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $x^2 - 5x + 6 < 0$

δ. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

β. $x^2 - 3x - 10 \geq 0$

ε. $x^2 - x + 2 < 0$

γ. $-3x^2 + 4x + 4 > 0$

στ. $-2x^2 + 5x - 4 \geq 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

δ. $-4x^2 + 4x - 1 < 0$

β. $x^2 - 16x + 64 < 0$

ε. $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$

γ. $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 0$

στ. $2x^2 - 4x + 2 < 0$

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\omega^2 - 6\omega + 9 < 0$

ii. $-\lambda^2 + 6\lambda - 9 \geq 0$

iii. $\alpha^2 - 8\alpha + 16 \geq 0$

iv. $-2\mu^2 + 12\mu - 18 < 0$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2 \leq 9$

ii. $x^2 > 2x$

iii. $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

iv. $x^2 - 7x + 12 > 0$

v. $\frac{5x^2-2}{2} > x - 1$

vi. $(2x - 3)^2 < 4$

12. Να λύσετε την ανίσωση $(x + 1)^2 - 9|x + 1| - 10 \leq 0$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $|2x + 1| < |x - 1|$

ii. $|3x - 1| \leq |x + 1|$

14. Να λύσετε την ανίσωση $|x^2 + x + 10| \leq 3x^2 + 2x + 7$

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις

α. $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$

β. $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

γ. $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$

16. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$2x^2 - 8x - 6 < x^2 - 6x + 9 < 3x^2 - 8x + 5$$

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$-x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda - 6 = 0 \text{ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.}$$

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση

$$4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0 \text{ αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$ έχει

πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

20. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

$$(2\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 3\lambda = 0$$

έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

21. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το πλήθος και το είδος των ριζών

$$\text{της εξίσωσης } x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$$

22. Αν τα α , β και γ είναι τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι

η παράσταση:

$$x^2 - 2\alpha x + (\beta + \gamma)^2$$

είναι πάντα θετική.

23. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = (\lambda + 2)x^2 + 2(\lambda + 2)x - \lambda$$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Δίνεται η παράσταση $A = 2[f(x)]^2 - f(x) - x^3 + 2017$

Να αποδείξετε ότι αν θέσουμε $x = 1$, η παράσταση γίνεται θετική.

25. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση:

$$f(x) = \sqrt{|2x^2 + x + 1| - 2}$$

26. Να αποδείξετε ότι:

$$2\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\gamma^2 \geq 4\beta(\alpha + \gamma) \text{ για κάθε } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

27. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$$

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

28. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Αν μια ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $x_0 = 1$ να προσδιορίσετε την τιμή του λ

β. Για $\lambda = 3$ να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

29. Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$$

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

30. α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 2x - 1$

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση

$$A = \frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $|A(x)| = 1$

31. Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2)

α. Να βρείτε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2)

β. Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

32. α. Να λύσετε τις ανισώσεις $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$

β. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α)

33. α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών

γ. Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$

α. Να βρείτε τις ρίζες του

β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$

γ. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης

$$2x^2 - 3x + 1 < 0$$

35. α. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$$

β. Να λύσετε την ανίσωση $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

γ. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) είναι και

λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β)

36. α. Να αποδείξετε $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

37. α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$

β. Δίνεται η επόμενη παράσταση:

$$A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$$

i. Για $3 < x < 7$ να αποδείξετε ότι $A = -x^2 + 11x - 24$

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$ για τις οποίες ισχύει $A = 6$

38. α. Να λύσετε την ανίσωση $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$

β. Αν α και β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να

αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

39. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in$

$\mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1)

να έχει ρίζες πραγματικές.

- β. Να λύσετε την ανίσωση $S^2 - P - 2 \geq 0$ όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

40. Δίνονται οι ανισώσεις $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$

- α. Να βρείτε τις λύσεις τους
- β. Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$
- γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή λύση τους.

41. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

- α. Να βρείτε τις λύσεις τους
- β. Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$
- γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή λύση τους.

42. Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$

- α. Να βρείτε τις λύσεις τους
- β. Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$
- γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$

43. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$

- α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β. Αν $K = -\frac{8889}{4444}$ η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν ,

θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

44. α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$

β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

45. α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$

β) Να βρείτε

i. Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

ii. Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 18x - 18$$

46. α. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β. θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α και β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$

Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

47. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 + \beta x + \beta^2$ όπου $\beta \in \mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου

β. i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i) όταν $\beta = 0$;

γ. Με την βοήθεια της απάντησής σας στο ερώτημα (β) να

αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε

πραγματικούς αριθμούς α και β που δεν είναι και οι δυο

ταυτόχρονα 0.

48. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$

γ) Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και

$\alpha + 1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$

Αν για το E εμβαδόν του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

49. Δίνεται η ανίσωση $|x + 1| < 4$ (1)

- α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1)
- γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δυο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή για κάθε $x \leq 0$

50. Δίνεται η ανίσωση $|x - 1| \leq 3$ (1)

- α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1)
- γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δυο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή για κάθε $x \geq 0$

51. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2)

Να βρείτε:

- α. Τις ρίζες της εξίσωσης (1)
- β. Τις ρίζες της εξίσωσης (2)
- γ. Το τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$, που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον για κάθε αρνητικό αριθμό x να έχει θετική τιμή.

52. α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 + \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

- i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες άνισες
- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

53. Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς

1 και 2

α. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο

P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι:

$$\gamma = 2\alpha \text{ και } \beta = -3\alpha$$

β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για

κάθε $x \in (1, 2)$ τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$

54. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι

έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;

γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$ όπου S και P το

άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα

έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

55. Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο:

$$x^2 - (6\lambda - 1)x + 9\lambda^2 + 1$$

- i. να αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.
- ii. να είναι τέλειο τετράγωνο.
- iii. να μην αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

56. Δίνεται το τριώνυμο $\tau(x) = (\lambda - 2)x^2 + 2\lambda x + 2\lambda, \lambda \neq 2$.

- i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει ρίζες άνισες.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $\tau(x) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

57. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - 2(\lambda^2 + \lambda)x + 2\lambda + 2$$

- i. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου ισούται με:

$$\Delta = 4 \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 2)$$

- ii. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία διπλή ρίζα.

- iii. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το τριώνυμο $f(x)$ να έχει δύο άνισες ρίζες.
- iv. Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $f(x)$ δεν παραγοντοποιείται;

58. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x - \lambda + 2 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση:

- i. να έχει πραγματικές ρίζες
- ii. να είναι αδύνατη
- iii. να έχει ρίζες ετερόσημες
- iv. να έχει ρίζες θετικές
- v. να έχει ρίζες αρνητικές
- vi. να έχει αντίθετες ρίζες
- vii. να έχει αντίστροφες ρίζες

59. Δίνεται η παράσταση:

$$A(x) = |x - 3| + |6 - 2x| - 6$$

- i. Να λυθεί η εξίσωση $A(x) = 0$
- ii. Να λυθεί η ανίσωση $A(x) \geq 0$
- iii. Να λυθεί η ανίσωση $A(x) < 0$
- iv. Να βρεθούν όλες οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι

$$A(x) = 3 \cdot |x + 2| - 9$$

60. Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες τότε:

i. Να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

ii. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

61. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

β. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ. Για $\lambda > 2$ να αποδείξετε ότι:

i. Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί

ii. $x_1 + 4x_2 \geq 4$

62. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1) , να βρείτε

για ποιες τιμές του λ ισχύει: $0 \leq d(x_1, x_2) < 2$

63. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1) με παράμετρο

$\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες

πραγματικές και άνισες.

γ. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και

$d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των

πραγματικών αριθμών , να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}.$$

Τα μαθηματικά αξιώματα είναι γενικώς αποδεκτά ως αληθή επειδή κανένας δεν έχει συμφέρον να αποδείξει ότι είναι εσφαλμένα.

Montesquieu

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Το τριώνυμο $-x^2 - x + 2$ αν παραγοντοποιηθεί θα γραφεί στη μορφή:
 $(x + 2)(x - 1)$.
2. Αν $\Delta=0$ για κάποιο τριώνυμο, τότε το τριώνυμο αυτό είναι τέλειο τετράγωνο.
3. Αν το ρ_1 είναι μια διπλή ρίζα του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, τότε το τριώνυμο παραγοντοποιημένο γράφεται στη μορφή $(x - \rho_1)(x - \rho_1)$.
4. Η κλασματική παράσταση $K = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$ μετά την απλοποίηση γίνεται
 $K = \frac{x-1}{2x+1}$.
5. Αν παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $x^4 - 8x^2 - 9$ τότε θα πάρουμε το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$.
6. Το τριώνυμο $x^2 - 3ax + a^2$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως προς a ως εξής: $2(a - x)(2a - x)$.
7. Το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ αν παραγοντοποιηθεί γράφεται
 $f(x) = (x - 2)(x - \frac{3}{2})$.
8. Η εξίσωση $8x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 7 = 0$ έχει δύο ρίζες ίσες, αν $\lambda = -15$.
9. Η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda + 1)x - 2\lambda = 0$ δεν έχει καμία ρίζα αν $\lambda = 0$.
10. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει ρίζες αρνητικές.
11. Αν $x^2 > 1$ τότε $x > \pm 1$.
12. Αν $\Delta > 0$ και $a > 0$ τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ είναι πάντα θετικό.

13. Αν $\lambda = \frac{5}{3}$ τότε το τριώνυμο $P(x) = x^2 - 6\lambda x + 9\lambda^2 - 3\lambda + 5$ γίνεται

τέλειο τετράγωνο.

14. Η ανίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda + 6 > 0$ αληθεύει για κάθε

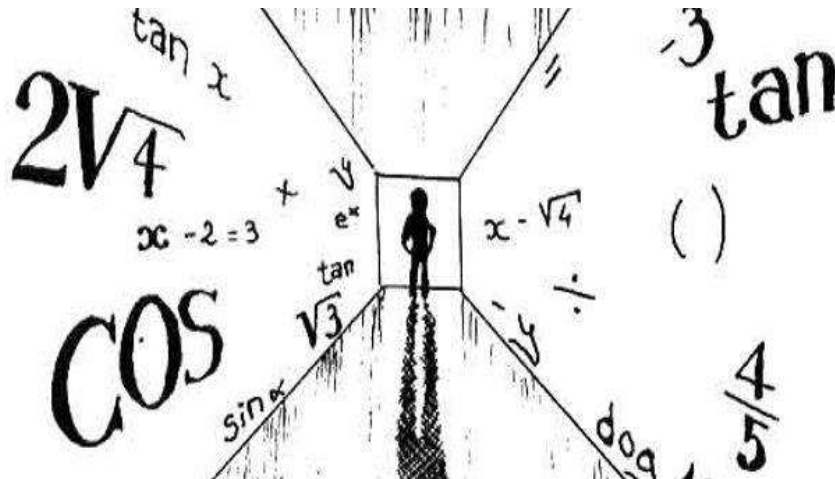
$x \in \mathbb{R}$ όταν $\lambda > 3$.

15. Η παράσταση $|x^2 - 5x + 10|$ δεν ορίζεται γιατί $\Delta < 0$ και μέσα στο

απόλυτο δεν μπαίνουν αρνητικοί αριθμοί.

16. Αν το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ είναι θετικό για $x < 1$, αρνητικό για

$1 < x < 3$ και πάλι θετικό αν $x > 3$ τότε είναι $\Delta > 0$.



Κεφάλαιο 5^ο Πρόοδοι

5.1. Η έννοια της ακολουθίας

➤ Ορισμός ακολουθίας

- Ακολουθία λέμε κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}^*$ των θετικών ακεραίων.
- Αν λοιπόν $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{N}^*$ τότε η συνάρτηση α λέγεται ακολουθία. Η τιμή $\alpha(n)$ του τυχαίου $n \in \mathbb{N}^*$ λέγεται όρος της ακολουθίας και συμβολίζεται με α_n .
- ✓ Ο α_1 λέγεται πρώτος όρος της ακολουθίας, ο α_2 λέγεται δεύτερος όρος και γενικά ο α_n n -οστός όρος της ακολουθίας.
- ✓ Το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_n) το συμβολίζουμε με S_n .
- Μια ακολουθία μπορούμε να την ορίσουμε με δυο τρόπους:
 - α. Γνωρίζοντας τον n -οστό της όρο α_n
 - β. Δίνοντας έναν αναδρομικό τύπο και ένα πλήθος όρων της, ώστε από τον αναδρομικό τύπο να μπορούν να βρεθούν όλοι οι όροι.

Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών

α. $\alpha_n = 2n + 1$

β. $\alpha_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

γ. $\alpha_n = \eta\mu \frac{n\pi}{4}$

Λύση

α. Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Για $n = 2$ έχουμε $\alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

Για $n = 3$ έχουμε $\alpha_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Για $n = 4$ έχουμε $\alpha_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

Για $n = 5$ έχουμε $\alpha_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

β. Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = \frac{1^2-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

Για $n = 2$ έχουμε $\alpha_2 = \frac{2^2-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$

Για $n = 3$ έχουμε $\alpha_3 = \frac{3^2-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$

Για $n = 4$ έχουμε $\alpha_4 = \frac{4^2-1}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$

Για $n = 5$ έχουμε $\alpha_5 = \frac{5^2-1}{5+1} = \frac{24}{6} = 4$

γ. Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = \eta\mu \frac{1\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $n = 2$ έχουμε $\alpha_2 = \eta\mu \frac{2\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

Για $n = 3$ έχουμε $\alpha_3 = \eta\mu \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $n = 4$ έχουμε $\alpha_4 = \eta\mu \frac{4\pi}{4} = \eta\mu \pi = 0$

Για $n = 5$ έχουμε $\alpha_5 = \eta\mu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (α_n) για την οποία

ισχύει $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n}$

Λύση

Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n}$ για $n = 1$ προκύπτει $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{2}$

Ομοίως για $n = 2$ προκύπτει $\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

για $n = 3$ προκύπτει $\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{2}$

για $n = 4$ προκύπτει $\alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες

α. $\alpha_n = n + 3$

β. $\alpha_n = 3^n - 2$

Λύση

α. Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} θέτοντας στον τύπο $\alpha_n = n + 3$ όπου n το $n + 1$ Έχουμε $\alpha_{n+1} = n + 1 + 3 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = n + 4$

Παρατηρούμε ότι $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (n + 4) - (n + 3) \Leftrightarrow$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = n + 4 - n - 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1$$

Επίσης από τον τύπο $\alpha_n = n + 3$ για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = 4$

Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1 \quad \text{με} \quad \alpha_1 = 4$$

β. Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} θέτοντας στον τύπο $\alpha_n = 3^n - 2$ όπου n το $n + 1$ Έχουμε $\alpha_{n+1} = 3^{n+1} - 2 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} \alpha_n = 3^n - 2 \\ \alpha_{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n + 2 = 3^n \\ \alpha_{n+1} + 2 = 3 \cdot 3^n \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\alpha_n + 2}{\alpha_{n+1} + 2} = \frac{3^n}{3 \cdot 3^n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_n + 2}{\alpha_{n+1} + 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 3(\alpha_n + 2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} + 2 = 3\alpha_n + 6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 4$$

Επίσης από τον τύπο $\alpha_n = 3^n - 2$ για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = 1$

Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$$\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 4 \quad \text{με } \alpha_1 = 1$$

Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από το ιδιαίτερο προνόμιο, ότι στην πορεία της ιστορίας πάντα προοδεύουν και ποτέ δεν οπισθοδρομούν.

Edward Gibbon, 1737-1794

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών

α. $\alpha_n = 3n - 4$

β. $\alpha_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

γ. $\alpha_n = |2 - n|$

δ. $\alpha_n = (-1)^n \cdot n$

ε. $\alpha_n = (-1)^n |4 - 3n|$

στ. $\alpha_n = \frac{(-1)^n \cdot 15}{n}$

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών

α. $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 2$

β. $\alpha_1 = -2$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 5$

γ. $\alpha_1 = -1$ και $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$

δ. $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$

ε. $\alpha_1 = -1$ και $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n}$

στ. $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 2$

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες

α. $\alpha_n = 3^n$

β. $\alpha_n = 3^n - 2$

γ. $\alpha_n = 5n - 2$

δ. $\alpha_n = 2 \cdot 3^n$

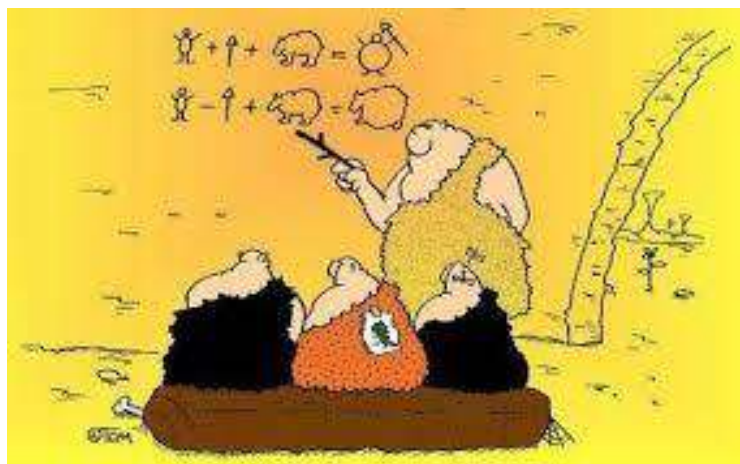
ε. $\alpha_n = 5^n + 3$

στ. $\alpha_n = 3 - \frac{n}{2}$

4. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = x \cdot 2^n + y$ τις οποίες ο τέταρτος όρος είναι ο 30 και ο πέμπτος όρος είναι 78. Να βρείτε:

α. Τις τιμές $x, y \in \mathbb{R}$

β. Τους τέσσερις πρώτους όρους της ακολουθίας



5.2. Αριθμητική πρόοδος

➤ Ορισμός αριθμητικής προόδου

Μια ακολουθία (a_n) λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου αριθμού.

Ισχύει ότι $a_{n+1} = a_n + \omega$ ή $a_{n-1} - a_n = \omega$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ο σταθερός αριθμός $\omega \neq 0$ λέγεται **διαφορά** της προόδου.

➤ n - οστός όρος αριθμητικής προόδου

Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (a_n) με διαφορά ω , ισχύει ότι:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\omega$$

➤ Άθροισμα n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (a_n) με διαφορά ω , το **άθροισμα** S_n των πρώτων n - όρων της δίνεται από τον τύπο:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)\omega] \quad \text{ή} \quad S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

➤ Αριθμητικός μέσος

Έστω α, β, γ τρεις πραγματικοί αριθμοί. Οι αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Ο αριθμός β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών α και γ .

Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Να βρείτε το n – οστό όρο των αριθμητικών προόδων

α. 6, 9, 12, ...

β. -5, -3, -1, ...

Λύση

α. $\alpha_1 = 6$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 9 - 6 = 3$

Άρα ο n – οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = 6 + (n - 1)3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = 6 + 3n - 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = 3n + 3$$

β. $\alpha_1 = -5$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2$

Άρα ο n – οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = -5 + (n - 1)2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = -5 + 2n - 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = 2n - 7$$

2. Έστω η αριθμητική πρόοδος (α_n) με πρώτο όρο το -12 και τέταρτο όρο το 3.

α. Να βρείτε την διαφορά της αριθμητικής προόδου

β. Να βρείτε το n – οστό όρο της προόδου

γ. Να βρείτε τον α_{12}

Λύση

α. Έχουμε ότι $\alpha_1 = -12$ και $\alpha_4 = 3$

Όμως $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$ άρα για $n = 4$ έχουμε:

$$\alpha_4 = \alpha_1 + (n - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$3 = -12 + 3\omega \Leftrightarrow$$

$$15 = 3\omega \Leftrightarrow$$

$$\omega = 5$$

β. Ο n – οστός όρος της πρόοδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = -12 + (n - 1)5 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = -12 + 5n - 5 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = 5n - 17$$

γ. Για $n = 12$ έχουμε $\alpha_{12} = 5 \cdot 12 - 17 \Leftrightarrow$

$$\alpha_{12} = 60 - 17 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{12} = 43$$

3. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο 3^{ος} όρος είναι 2 και ο 7^{ος} όρος είναι -10. Να βρείτε

α. Το n – οστό όρο της προόδου

β. Το 13^ο όρο της προόδου

Λύση

α. Έχουμε $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$ άρα για $n = 3$ έχουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$2 = \alpha_1 + 2\omega$$

Έχουμε $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$ άρα για $v = 7$ έχουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$-10 = \alpha_1 + 6\omega$$

$$\text{Από (1), (2) έχουμε } \begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 2 \\ \alpha_1 + 6\omega = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - 2\omega = -2 \\ \alpha_1 + 6\omega = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = -3 \\ \alpha_1 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Δηλαδή } \alpha_v = 8 + (v - 1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_v = 8 - 3v + 3 \Leftrightarrow \alpha_v = -3v + 11$$

$$\text{β. Για } v = 13 \text{ έχουμε } \alpha_{13} = -3 \cdot 13 + 11 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{13} = -39 + 11 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{13} = -28$$

4. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 18$ και $\omega = -3$ τότε να βρείτε:

α. Τον όρο που ισούται με το -12

β. Τους αρνητικούς όρους

Λύση

α. Έστω ότι ο όρος που ψάχνουμε είναι ο α_v τότε ισχύει ότι:

$$\alpha_v = -12 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$18 + (v - 1)(-3) = -12 \Leftrightarrow$$

$$18 - 3v + 3 = -12 \Leftrightarrow$$

$$-3v = -33 \Leftrightarrow$$

$$v = 11$$

$$\text{Άρα } \alpha_{11} = -12$$

β. Έχουμε $\alpha_n < 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha_1 + (n - 1)\omega < 0 \Leftrightarrow$$

$$18 + (n - 1)(-3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$18 - 3n + 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$-3n < -21 \Leftrightarrow$$

$$n > 7$$

Άρα οι αρνητικοί όροι της αριθμητικής προόδου είναι οι

$$\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \dots$$

5. Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $3x - 2, x^2 - 11, -x + 4$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Λύση

Θα πρέπει να ισχύει $2(x^2 - 11) = (3x - 2) + (-x + 4) \Leftrightarrow$

$$2x^2 - 22 = 3x - 2 - x + 4 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+7}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{1-7}{2} = -3 \end{cases}$$

6. Σε μια αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = -5$, το άθροισμα των πρώτων 16 όρων είναι ίσο με 400. Να βρείτε:

α. Την διαφορά της αριθμητικής προόδου

β. Το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου

γ. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε ώστε να έχουν άθροισμα 72.

Λύση

α. Είναι $S_{16} = 400 \Leftrightarrow$

$$\frac{16}{2}[2\alpha_1 + (16 - 1)\omega] = 400 \Leftrightarrow$$

$$8(2 \cdot (-5) + 15\omega) = 400 \Leftrightarrow$$

$$-10 + 15\omega = 50 \Leftrightarrow$$

$$15\omega = 60 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 4$$

β. Το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου είναι

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2\alpha_1 + 39\omega)$$

$$= 20(2(-5) + 39 \cdot 4)$$

$$= 20(-10 + 156)$$

$$= 20 \cdot 146$$

$$= 2920$$

γ. Είναι $S_v = 72 \Leftrightarrow$

$$\frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v - 1)\omega] = 72 \Leftrightarrow$$

$$\frac{v}{2}[-10 + (v - 1)4] = 72 \Leftrightarrow$$

$$\frac{v}{2}(-10 + 4v - 4) = 72 \Leftrightarrow$$

$$v(4v - 14) = 144 \Leftrightarrow$$

$$4v^2 - 14v - 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\nu^2 - 7\nu - 72 = 0$$

Λύνοντας της εξίσωση 2^{ου} βαθμού προκύπτει ότι

$$\nu_1 = -\frac{9}{2} \text{ Απορρίπτεται διότι } \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\nu_2 = 8 \text{ Δεκτή}$$

$$\text{Άρα } S_8 = 72$$

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα $1 + 5 + 9 + \dots + 197$

Λύση

$$\text{Είναι } \alpha_1 = 1, \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 5 - 1 = 4$$

$$\text{Άρα } \alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 1 + (n - 1)4 \Leftrightarrow \alpha_n = 4n - 3$$

$$\text{Επομένως } 197 = 4n - 3 \Leftrightarrow 200 = 4n \Leftrightarrow n = 50$$

$$\text{Επομένως } 1 + 5 + 9 + \dots + 197 = S_{50}$$

$$= \frac{50}{2}(1 + 197)$$

$$= 25 \cdot 198$$

$$= 4950$$

8. Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 3n - 6$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική προόδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά και τον πρώτο όρο.

Λύση

$$\text{Θέτοντας όπου } n \text{ το } n+1 \text{ στον τύπο } \alpha_n = 3n - 6$$

$$\text{Έχουμε: } \alpha_{n+1} = 3(n + 1) - 6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 3n + 3 - 6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 3n - 3$$

Υπολογίζουμε την διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ και έχουμε:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = (3n - 3) - (3n - 6) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 3n - 3 - 3n + 6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 3$$

Άρα η ακολουθία α_n είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 3$

Τέλος από τον τύπο $\alpha_n = 3n - 6$ για $n = 1$ βρίσκουμε $\alpha_1 = -3$

- 9. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 156 κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 30 κεραμίδια και κάθε επόμενη έχει 3 κεραμίδια λιγότερα. Πόσες σειρές κεραμιδιών έχει η στέγη;**

Λύση

Το πλήθος των κεραμιδιών της κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική

πρόοδο (α_n) με $\alpha_n > 0$, $\alpha_1 = 30$ και $\omega = -3$

$$\text{Έχουμε } S_n = 156 \Leftrightarrow \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega] = 156 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{2} [2 \cdot 30 + (n-1)(-3)] = 156 \Leftrightarrow$$

$$n(60 - 3n + 3) = 312 \Leftrightarrow$$

$$n(-3n + 63) = 312 \Leftrightarrow$$

$$-3n^2 + 63n - 312 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-n^2 + 21n - 104 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n_1 = 8 \text{ ή } n_2 = 13$$

Για $n = 13$ έχουμε $\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 30 - 36 = -6$ Απορρίπτεται

Για $n = 8$ έχουμε $\alpha_{13} = \alpha_1 + 7\omega = 30 - 21 = 9 > 0$

Άρα η στέγη έχει 8 σειρές κεραμίδια.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τον n – οστό όρο των αριθμητικών προόδων.

α. $1, 3, 5, \dots$

β. $-2, 0, 2, \dots$

γ. $6, 2, -2, \dots$

δ. $-1, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \dots$

ε. $-5, 1, 7, \dots$

στ. $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \dots$

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = -15$ και $a_7 = 9$. Να βρείτε:

α. Την διαφορά ω της προόδου

β. Τον 12° όρο της προόδου

γ. Ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 41

3. Έστω η αριθμητική πρόοδος $-9, -5, -1, \dots$ Να βρείτε

α. Τον πρώτο όρο και την διαφορά της προόδου

β. Το n – οστό όρο της προόδου

γ. Το 13° όρο της προόδου

4. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $6, 1, -4, \dots$ Να βρείτε:

α. Το n – οστό όρο της προόδου

β. Τον 20° όρο της προόδου

γ. Ποιος όρος της είναι ίσος με -89

5. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -3$ και $\alpha_{10} = 12$. Να βρείτε:

α. Την διαφορά ω της προόδου

β. Τον n – οστό όρο της

γ. Τον α_{25}

6. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_4 = 11$ και $\alpha_{11} = 53$. Να βρείτε:

α. Τον α_1 και το ω

β. Τον n – οστό όρο της προόδου

γ. Τον α_{30}

7. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$

β. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

8. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_2 = 0$ και $\alpha_4 = 4$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$

β. Ο n – οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$

και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

9. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3

β. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$

10. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$. Να βρείτε:

α. Την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου

β. Τον μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $\alpha_n > 0$

11. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω

α. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = 2$

β. Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.

12. α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x +$

$2, (x + 1)^2, 3x + 2$ με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε την διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

13. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $3x - 2, x^2 -$

$11, -x + 4$ με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

14. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των αριθμητικών πρόοδων

α. $-4, -1, 2, \dots$

δ. $2, -1, -4, \dots$

β. $-1, -\frac{3}{2}, -2, \dots$

ε. $-8, -3, 2, \dots$

γ. $3, 5, 7, \dots$

στ. $-2, -6, -10, \dots$

15. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

α. $1 + 4 + 7 + \dots + 94$

β. $-5 - 1 + 2 + 7 \dots + 135$

γ. $-7 - 1 + 5 + \dots + 53$

δ. $-10 - 7 - 4 - \dots + 10$

16. α. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 50 θετικών άρτιων

β. Να βρείτε το άθροισμα όλων των περιττών αριθμών μεταξύ του -20 και 15.

17. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$

β. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33 ,
να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

18. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$

β. Να βρείτε το α_{20}

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

19. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$ και $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου

β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ,
ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να
αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$

β. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να
προσθέσουμε , ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.
(Δίνεται $\sqrt{1849} = 43$)

21. Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι με την σειρά που δίνονται

διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω

α. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$

β. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$ να υπολογίσετε το

άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

22. Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 8n - 4$.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος της

οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά ω

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{30}$

23. Δίνεται η ακολουθία (α_n) της οποίας ο n -οστός όρος είναι

$$\alpha_n = 7 - 2n.$$

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

β. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 28 όρων της α_n

24. Έστω ότι οι αριθμοί $x - 3$, $2x + 1$, $2x + 3$ είναι διαδοχικοί όροι

αριθμητικής προόδου

α. Να βρείτε το x

β. Αν ο $x - 3$ είναι ο α_3 να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \dots + \alpha_{37}$$

25. α. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι με την σειρά που

δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε την διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

26. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$

β. Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 3n - 2$

γ. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνά το 30;

δ. Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60.

27. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) όπου $n \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι

όροι της προόδου είναι: $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$ όπου

$x \in \mathbb{Z}$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $x = 3$

β. Να βρείτε τον n -οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που ισούται με 2014.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$

28. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = \kappa^2$, $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος

$\kappa > 1$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός

β. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$ τότε:

i. Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

29. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε

σειρά έχει κ καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^η

σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α. Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β. Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

30. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β. Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

31. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3 , 7 , 11 , 15 , ... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α. Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το άθροισμα των 40 πρώτων αυτών αριθμών

- γ. Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου , από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235, Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.
32. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.
- α. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;
- β. Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;
- γ. Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.
- ι. Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

- ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

33. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

- α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά της προόδου
- β. Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου
- γ. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;
- δ. Αν στη πρώτη σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα της κάθε σειράς από την δεύτερη και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε να βρείτε:
- i. Από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα
- ii. Πόσοι είναι οι θεατές;

Τα καθαρά Μαθηματικά είναι, κατά κάποιο τρόπο, η ποίηση των λογικών ιδεών.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

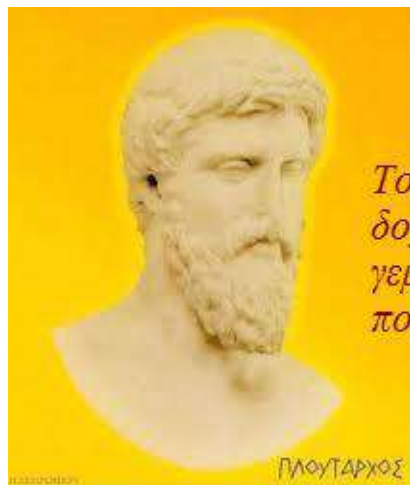
1. Αν ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 8 - 6n$ τότε η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.
2. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω ισχύει $\alpha_n = \alpha_1 + (n + 1)\omega$
3. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο η διαφορά ω είναι θετικός ακέραιος αριθμός.
4. Η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου ορίζεται ως εξής: $\omega = \alpha_n - \alpha_{n-1}$
5. Αν θεωρήσουμε τρεις διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου τότε το διπλάσιο του μεσαίου όρου ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο. Δηλαδή αν α , β και γ οι τρεις διαδοχικοί όροι θα ισχύει:
$$2\beta = \alpha + \gamma.$$
6. Ο 18^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 16$ και $\omega = 4$ είναι 68.
7. Σε μια αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$ το άθροισμα των 308 πρώτων όρων της είναι 142450.
8. Οι αριθμοί $(x - 1)^2$, $x^2 + 1$, $(x + 1)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου για κάθε πραγματικό αριθμό x .
9. Οι αριθμοί $x - 5$, $3x + 7$, $1 - 4x$ δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου για καμία τιμή του x .

10. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο 12, 18, 24, ...Το άθροισμα

$$A = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{31} \text{ είναι } A = 2772$$

11. Για το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου με

$$\text{πρώτο όρο } \alpha_1 \text{ και διαφορά } \omega \text{ ισχύει ο τύπος } S_n = \frac{n}{2} [\alpha_1 + (n - 1)\omega]$$



*Το μυαλό δεν είναι ένα
δοχείο που πρέπει να
γεμίσει, αλλά μια φωτιά
που πρέπει ν' ανάψει.*

ΠΛΟΥΤΑΡΧΟΣ

5.3. Η γεωμετρική πρόοδος

➤ Ορισμός γεωμετρικής πρόοδου

Μια ακολουθία (α_n) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό του ίδιου αριθμού.

Ισχύει ότι $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \lambda$ ή $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lambda \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ο σταθερός αριθμός λ λέγεται **λόγος** της προόδου

➤ n – οστός όρος γεωμετρικής προόδου

Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με λόγο λ , ισχύει ότι:

$$\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1}$$

➤ Άθροισμα n διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με λόγο λ , το **άθροισμα** S_n των πρώτων n – όρων της δίνεται από τον τύπο:

$$S_n = \alpha_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, \text{ αν } \lambda \neq 1$$

$$S_n = n\alpha_1, \text{ αν } \lambda = 1$$

➤ Γεωμετρικός μέσος

Έστω α, β, γ τρεις πραγματικοί αριθμοί. Οι αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Ο αριθμός β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών α και γ



Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

1. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με όρους $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots$ Να βρεθούν

α. Ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου

β. Ο τύπος της προόδου

γ. Ο $10^{\text{ος}}$ όρος της

Λύση

α. Είναι:

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4$$

β. Είναι $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$ με $\alpha_1 = \frac{1}{8}$ και $\lambda = 4$ Άρα

$$\alpha_n = \frac{1}{8} 4^{n-1} = \frac{4^{n-1}}{8} = \frac{(2^2)^{n-1}}{2^3} = \frac{2^{2n-2}}{2^3} = 2^{2n-2-3} = 2^{2n-5}$$

γ. Είναι $\alpha_{10} = 2^{2 \cdot 10 - 5} = 2^{15}$

2. Έστω η γεωμετρική πρόοδος $6, -3, \frac{3}{2}, \dots$

α. Να βρείτε το n – οστό όρο

β. Να βρείτε το α_{10}

γ. Ποιος όρος ισούται με $-\frac{3}{64}$

Λύση

α. Είναι $\alpha_1 = 6$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ άρα

$$\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = 6 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 \beta. \text{ Για } n = 10 \text{ έχουμε: } a_{10} &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{10-1} \\
 &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 \\
 &= -6 \cdot \frac{1}{512} \\
 &= -\frac{6}{512} \\
 &= -\frac{3}{256}
 \end{aligned}$$

γ. Έστω ότι είναι ο a_n , άρα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{3}{64} \Leftrightarrow 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{3}{64} \Leftrightarrow \\
 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= -\frac{3}{64 \cdot 6} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128} \Leftrightarrow \\
 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \Leftrightarrow n-1 = 7 \Leftrightarrow n = 8
 \end{aligned}$$

3. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο 3^{ος} όρος είναι $-\frac{3}{2}$ και ο 6^{ος} όρος είναι

$-\frac{3}{16}$ να βρείτε την πρόοδο και τον 10^ο όρο της.

Λύση

$$\text{Έχουμε } a_3 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^2 = -\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{και } a_6 = -\frac{3}{16} \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^5 = -\frac{3}{16} \quad (2)$$

Από $\frac{(2)}{(1)}$ έχουμε:

$$\frac{a_1 \cdot \lambda^5}{a_1 \cdot \lambda^2} = \frac{-\frac{3}{16}}{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{Δηλαδή } \alpha_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 = -6$$

$$\text{Άρα } \alpha_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Έχουμε } \alpha_{10} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = -6 \cdot \frac{1}{512} = -\frac{3}{256}$$

4. Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 3 , 9 , 27 , ... που υπερβαίνει το 2016.

Λύση

$$\text{Η γεωμετρική πρόοδος έχει } \alpha_1 = 3 \text{ και } \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{Άρα ο τύπος της είναι } \alpha_n = 3 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 3^n$$

Έχουμε $\alpha^n > 2016 \Leftrightarrow 3^n > 2016$ όμως $3^6 = 729$ και $3^8 = 2187$ άρα θα πρέπει $n > 6$. Δηλαδή ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το 2016 είναι ο α_7

5. Οι αριθμοί $x - 2$, $2x - 2$, $4x + 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε:

α. Τον αριθμό x

β. Τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 27

Λύση

α. Ισχύει ότι:

$$(2x - 2)^2 = (x - 2)(4x + 4) \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 8x + 4 = x^2 + 4x - 8x - 8 \Leftrightarrow$$

$$-4x = -12 \Leftrightarrow$$

$$x = 3$$

β. Αν γ ο γεωμετρικός μέσος των $x = 3$ και 27 τότε ισχύει

$$y^2 = 3 \cdot 27 \Leftrightarrow y^2 = 81 \Leftrightarrow y = 9$$

6. Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής

προόδου να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \frac{1}{\alpha+\beta}$ αποτελούν

διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Λύση

Αφού α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε ότι $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

και $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$

Για να αποτελούν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \frac{1}{\alpha+\beta}$ διαδοχικούς όρους

αριθμητικής προόδου πρέπει:

$$2 \cdot \frac{1}{\alpha-\gamma} = \frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha-\gamma)(\alpha+\beta) + (\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 - 2\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \gamma\beta + \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 = \alpha\gamma \text{ που ισχύει}$$

7. Να βρείτε το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

2, 4, 8, ...

Λύση

Η γεωμετρική πρόοδος έχει $a_1 = 2$ και $\lambda = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$

Άρα το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της είναι

$$S_8 = 2 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (2^8 - 1) = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

8. Να υπολογίσετε το άθροισμα $1 + (-3) + 9 + \dots + 729$

Λύση

Οι όροι του αθροίσματος αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$ και

$$\lambda = -3$$

Το πλήθος των όρων του αθροίσματος ισούται με την τάξη του τελευταίου όρου.

$$\text{Είναι } \alpha_n = 729 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} = 729 \Leftrightarrow 1 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^6$$

$$\Leftrightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\text{Οπότε } 1 + (-3) + 9 + \dots + 729 = S_7 = 1 \cdot \frac{(-3)^7 - 1}{-3 - 1} = \frac{-2187 - 1}{-4} = \frac{-2188}{-4} =$$

$$547$$

9. Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος της οποίας να βρείτε τον λόγο και το πρώτο όρο της.

Λύση

Βρίσκουμε το όρο α_{n+1} θέτοντας όπου n το $n + 1$ στο τύπο $\alpha_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$

Υπολογίζουμε το πηλίκο

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{2^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{2^n}} = \frac{2^n \cdot 3^{n+2}}{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}} = 2^{n-(n+1)} \cdot 3^{n+2-(n+1)} = 2^{-1} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Αφού το πηλίκο $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ είναι σταθερός αριθμός $\frac{3}{2}$, η ακολουθία (α_n) είναι

γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\text{Είναι } \alpha_1 = \frac{3^{1+1}}{2^1} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους να βρείτε το n – οστό όρο

α. $2, -6, 18, \dots$

β. $-4, 2, -1, \dots$

γ. $1, 3, 6, \dots$

δ. $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, \dots$

ε. $\frac{28}{7}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \dots$

στ. $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$

2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = -\frac{2}{3}$ και $a_4 = 18$. Να βρείτε:

α. Τον λόγο λ της προόδου

β. Το n – οστό όρο

γ. Τον a_8

3. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = -4$ και $a_5 = -\frac{1}{4}$. Να βρείτε

α. Τον λόγο λ της προόδου

β. Το n – οστό όρο

γ. Τον a_{10}

4. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) ισχύει $a_6 = -108$ και $a_3 = 4$. Να βρείτε

α. Τον a_1 και το λ

β. Τον a_5

5. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικό λ ισχύει ότι $\alpha_3 = 1$ και

$$\alpha_5 = 4$$

α. Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 2^{n-5}$

6. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$. Να

αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$

7. Να βρείτε τον όρο της γεωμετρικής προόδου $2, -6, 18, \dots$ που είναι

ίσος με -486 .

8. Να βρείτε τον όρο της γεωμετρικής προόδου $18, 6, 2, \dots$ που είναι

μικρότερος του $\frac{2}{81}$.

9. Οι αριθμοί $x - 3, x + 2, 20$ με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί

όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε:

α. Τον αριθμό x

β. Το γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 50 .

10. Οι αριθμοί $2, x - 1, x^2 + 2x - 3$ με την σειρά που δίνονται είναι

διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί

να πάρει ο αριθμός x .

11. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $x + 2, 2x + 1, x - 5$ δεν

μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

12. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να

δείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha - \beta)^2}{(\beta - \gamma)^2} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

13. Δίνονται οι διαφορετικοί ανά δυο αριθμοί α, β, γ . Αν οι αριθμοί

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2}, \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \gamma^2}, \frac{\beta^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

14. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πέντε πρώτων όρων των προόδων

α. $2, 6, 18, \dots$

β. $3, 9, 27, \dots$

γ. $-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \dots$

δ. $192, 96, 48, \dots$

ε. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

στ. $-80, 40, -20, \dots$

15. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

α. $3 + 6 + 12 + \dots + 384$

β. $5 + 10 + 20 + \dots + 640$

γ. $4 - 8 + 16 - \dots - 8192$

δ. $-80 + 40 - 20 + \dots + \frac{5}{8}$

ε. $18 - 6 + 2 - \dots + \frac{2}{81}$

16. Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 3 \cdot 2^n$

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος

β. Να βρείτε τον α_1 και το λ

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{\alpha_{16}-\alpha_1}{S_{10}}$

17. Ο n – οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = \frac{2^{n+2}}{3^n}$

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος

β. Να βρείτε τον α_1 και το λ

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_1 και λ

18. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$

α. Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$

β. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι 200 , να βρείτε τον πρώτο όρο α_1

19. Να βρείτε

α. Τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί x , $2x + 1$, $5x + 4$ με την σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Τον λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

20. α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι

αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι

γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

21. Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που

δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

22. α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που

δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε:

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

23. α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2^o όρο, τον 5^o και τον 4^o όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

24. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\beta > 0$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

25. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα

ακόλουθα

$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16, \lambda > 0$$

- α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο της προόδου
- β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n)
- γ. Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n) αντίστοιχα να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση :

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$

26. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

- α. Να αποδείξετε ότι $E=1$
- β. Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε
- i. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β
- ii. Να βρείτε τα μήκη α και β

27. Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m , με τον ακόλουθο τρόπο:

Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1^{o} λεπτό προχωράει 1 cm , το 2^{o} λεπτό προχωράει 3 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το

προηγούμενο λεπτό.

- α. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο a_n αυτής της προόδου.
- β. Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.
- γ. Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.
- δ. Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1° λεπτό προχωράει 1 cm, το 2° λεπτό προχωράει 2 cm, το 3° λεπτό προχωράει 4 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.
- ι. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο b_n αυτής της προόδου.
- ii. Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm.

«Το μυστικό της ζωής δεν είναι να κάνουμε αυτό που μας αρέσει, είναι να μας αρέσει αυτό που κάνουμε»

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η ακολουθία $k, 4k, 6k, 8k, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
2. Η ακολουθία που περιγράφεται από τον γενικό τύπο $a_n = 2 \cdot 3^n$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
3. Μπορεί να υπάρχει γεωμετρική πρόοδος με $a_5 = 0$ και $a_{12} = 128$.
4. Οι αριθμοί 12, 20, 35 μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
5. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $a_1 > 0$ και $\lambda < 0$ τότε $a_5 < 0$.
6. Ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών α και $\frac{1}{\alpha}$ με $\alpha \neq 0$ είναι 1.
7. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{3}{5}, 3, 15, \dots$ ο 7^{ος} όρος είναι 9375.
8. Στη γεωμετρική πρόοδο ο λόγος λ ορίζεται ως το πηλίκο δύο τυχαίων όρων της προόδου.
9. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα των n πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$.
10. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta \cdot \gamma$.



Κεφάλαιο 6^ο Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1. Η έννοια της συνάρτησης

➤ Ορισμός συνάρτησης

- Συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι μια διαδικασία όπου κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζει σε ένα μόνο στοιχείο ενός συνόλου B .
- Τα στοιχεία του συνόλου A τα συμβολίζουμε $x \in A$.
- Τα στοιχεία του συνόλου B τα συμβολίζουμε με $y \in B$
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης, το x λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή της συνάρτησης. Το σύνολο B λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης, το y λέγεται **εξαρτημένη** μεταβλητή της συνάρτησης. Θέτουμε $y = f(x)$
- Γράφουμε $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ που διαβάζεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A και σύνολο τιμών το σύνολο B .
- Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε με A_f ενώ το σύνολο τιμών το συμβολίζουμε με $f(A)$
- Για να ορίσουμε ολοκληρωμένα μια συνάρτηση θα πρέπει να γράψουμε τον τύπο της, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

➤ **Εύρεση πεδίου ορισμού**

- Το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f περιέχει όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $y \in \mathbb{R}$, ώστε $y = f(x)$. Αυτό σημαίνει ότι κάποιο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αν και μόνο αν το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
- ✓ Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
- ✓ Αν ο τύπος της f περιέχει κλάσματα, τότε απαιτούμε όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδέν
- ✓ Αν ο τύπος της f περιέχει ριζικά, τότε απαιτούμε όλες οι υπόριζες ποσότητες να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το μηδέν.

Μεθοδολογίες - λυμένα παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(1), f(\alpha + 1)$

γ. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

β. $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

$$f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2$$

$$f(\alpha + 1) = (\alpha + 1)^2 - 5(\alpha + 1) + 6$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 5\alpha - 5 + 6$$

$$= \alpha^2 - 3\alpha + 2$$

γ. $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 25 - 36 = -11 < 0$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Επομένως το -3 δεν ανήκει

στο σύνολο τιμών της f .

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

α. $f(x) = \frac{3}{x-2}$

β. $f(x) = \frac{x+2}{|x+1|-3}$

γ. $f(x) = \sqrt{-2x+6}$

δ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$

Λύση

α. Θα πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι

$$A_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

β. Πρέπει $|x + 1| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x + 1| \neq 3 \Leftrightarrow$

$$x + 1 \neq 3 \text{ και } x + 1 \neq -3$$

$$x \neq 2 \quad x \neq -4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι

$$A_f = (-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

γ. Πρέπει $-2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = (-\infty, 3]$

δ. Πρέπει $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$x^2-7x+12$	+	-	+	

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = (-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της

γ. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(2), f(1)$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

Λύση

α. Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ Άρα το πεδίο ορισμού της

f είναι $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

β. Είναι:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

γ. Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = \frac{0^2 + 0 + 1}{0 + 1} = 1$

Για $x = 2$ έχουμε $f(2) = \frac{2^2 + 2 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$

Το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , άρα το $f(1)$ δεν ορίζεται

δ. Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + x - 3 & , \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε:

α. Το πεδίο ορισμού της f

β. Τις τιμές $f(-1), f(0), f(2), f(1)$

Λύση

α. Ο τύπος της $f(x) = 2x - 4$ ορίζεται για $x \leq 1$ δηλαδή έχει πεδίο

ορισμού $A_1 = (-\infty, 1]$

Ο τύπος $f(x) = -x^2 + x - 3$ ορίζεται για $x > 1$ δηλαδή έχει πεδίο

ορισμού $A_2 = (1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$

β. Για $x = -1$ έχουμε $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 = -6$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

Για $x = 2$ έχουμε $f(2) = -2^2 + 2 - 3 = -4 + 2 - 3 = -5$

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$

Τα μαθηματικά είναι η τέχνη να δίνεις το ίδιο όνομα σε διαφορετικά πράγματα.

Ανρί Πουανκαρέ

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

δ. $f(x) = \frac{x-1}{4x-6}$

β. $f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$

ε. $f(x) = \frac{x^2+5x}{x}$

γ. $f(x) = \frac{2}{-x+8}$

στ. $f(x) = \frac{2x+8}{4}$

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^3-4x^2+4x}$

iv. $\tau(x) = \frac{1}{|2-x|-1}$

ii. $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$

v. $\varphi(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}-1}$

iii. $h(x) = \sqrt{4 - |1 - 2x|}$

vi. $\kappa(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 2}$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

i. $f(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3+2x^2-3x}$

ii. $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}-2} - \sqrt{x^2-16}$

iii. $h(x) = \sqrt{2 - \frac{|x|}{2}}$

iv. $\varphi(x) = \sqrt{x + |x|}$

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-6x+9}$

γ. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x}$

β. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$

δ. $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2+x+1}$

$$\epsilon. f(x) = \frac{x-3}{x^2+x-12}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{4x}{x^2-x+\frac{1}{4}}$$

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha. f(x) = \frac{3x}{x-2} - \frac{4}{x+3}$$

$$\beta. f(x) = \frac{6x-2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{3x}{x^2-2x+1} - \frac{2}{4x^2-4x+1}$$

$$\delta. f(x) = \frac{x^6+1}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x+3}$$

$$\epsilon. f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+2} - \frac{4x}{x^2-6x}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{x+2}{x^{2016}-1} - \frac{1}{x^3-1}$$

6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha. f(x) = \sqrt{x-8}$$

$$\beta. f(x) = \sqrt{-2x+8}$$

$$\gamma. f(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{-x^2+x+2}$$

$$\epsilon. f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha. f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$$

$$\beta. f(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{x}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} - \frac{2}{x-4}$$

$$\epsilon. f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{5-x}}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{-x+8}}$$

8. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha. f(x) = \frac{x-2}{|x-2|-|2x-1|}$$

$$\beta. f(x) = \sqrt{4 - |x + 8|}$$

$$\gamma. f(x) = \sqrt{|x| - 6}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{|x + 3| - 2}$$

$$\epsilon. f(x) = \sqrt{|x - 4| + 6}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt{7 - |2x + 1|}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x - 4$

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f

β. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$

γ. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -8 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & , x < 0 \\ -x^2 + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f

β. Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-3)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{2x^2 + 8x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

γ. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης για $x = 2$, $x = 4$, $x = -4$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

12. Δίνεται η $f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 4$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha$ για την οποία ισχύει $f(4) = 6$

α. Να βρείτε τον αριθμό α

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x+3) = 3f(x-1)$

14. α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A

β. Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$ Να βρείτε:

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ισχύει

$$f(x) = x^2 + 4x$$

β. Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$

19. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12, x \in \mathbb{R}$

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών

β. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 0$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & x < 0 \\ 2x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(-5) = f(4)$

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 9$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 3 \\ x^2 & 3 < x < 10 \end{cases}$

α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή

διαστήματος

β. Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(3), f(5)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$

23. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

α. Αν ισχύει $f(2) = g(2)$ να βρείτε την τιμή του α

β. Για $\alpha = 1$ να λύσετε:

i. Την εξίσωση $f(x) = g(x)$

ii. Την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$ και με την βοήθεια αυτής να

λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$

γ. Για κάθε $x \in A$ να λύσετε την εξίσωση

$$(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$$

25. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^3 - 1}{1 - x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq x^2 - 4$

iv. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε να ισχύει

$$f(\alpha) - f(\alpha + 1) = 2 - \alpha^2$$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{2-\alpha}{x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

i. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A = f(-1) + 2f(1)$ και

$$B = f(-2) + 4\alpha \cdot f(2)$$

ii. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $A + B = -3$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{f(2) - f(-1)}{3}$

ii. Να βρείτε το α ώστε $f(\alpha^2) = 5$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{x^2-9}{f(x)}$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|g(x) - 1| \leq 3$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\alpha) - g(\alpha + 1) = 2$

29. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \alpha\beta\gamma$

Αν $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$ τότε να δείξετε ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$

30. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x - \alpha, & x \leq 1 \\ \beta x^2 - \alpha, & x > 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Αν $f(0) = 2$ και $f(2) = -2$, να βρείτε τα α και β
- iii. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = -1$ τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $f(x) = 0$

β) $f(f(1)) = (x - 1)^8 - 15$

31. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(x - y) = f(x) - f(y)$

τότε

- i. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$
- ii. $f(-x) = -f(x)$
- iii. Αν η συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^2) = f(1)$$

32. Αν $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha + 1$ και $f(0) = 2$ να δείξετε ότι:

- i. $\alpha = 1$
- ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

33. Αν $f(x) = (x + 1)^{2018}$ να δείξετε ότι:

- i. $f(-1) = 0$
- ii. $f(f(-1)) = 1$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $g(x) = \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\left| \frac{1}{g(x)} - 1 \right| = 1$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι:

- i. $f(x) = 0$
- ii. $f(x) = -f(-x), x \in \mathbb{R}$
- iii. $f(x) = \frac{f(1)+f(5)}{2}$

36. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία οι σχέσεις $f(\rho) = 4$ και $f(f(\rho)) = 5$. Να βρείτε τον αριθμό $f(4)$.

37. α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες
- ii. Την τιμή α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε

β. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$

38. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$ με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες
- β. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

39. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου
- β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες.
- γ. i) Αν $3 < \lambda < 12$ να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δυο άνισες θετικές ρίζες.
- ii) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

40. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

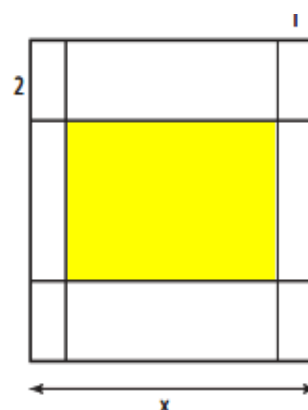
- α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;
- γ. Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

41. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;
- γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$ τότε:
- Να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$
 - Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$

42. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας

επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



- α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των

επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4)$$

β. Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης

των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

γ. Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του

τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών

στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

43. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας

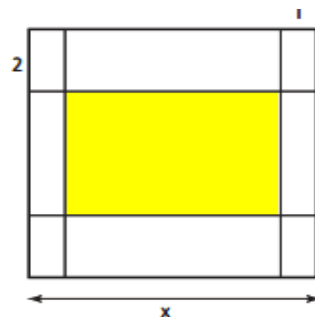
επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x \text{ cm}$

($5 \leq x \leq 10$), στο οποίο η περιοχή τύπωσης

περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω

και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο

σχήμα).



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των

επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=x^2-6x+8$$

β. Να βρεθεί το η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής

τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2 .

- γ. Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2 , να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

44. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

- α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$.
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x)=20x-x^2$.
- γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.
- δ. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm .

30. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο O .
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο M με $OM > 600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο A που βρίσκεται μεταξύ του O και του M , με $OA = 600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή $t \text{ min}$ δίνεται από τον τύπο $S_{\lambda}(t) = 10 t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή $t \text{ min}$ δίνεται από τον τύπο $S_{\chi}(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

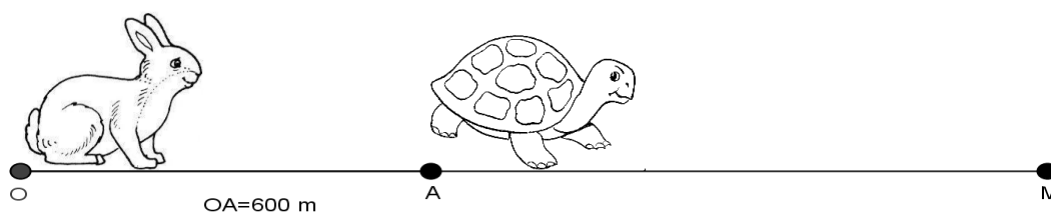
β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM=2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12 \text{ min}$

και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.



Οι λέξεις είναι ένα εντελώς ασαφές υποκατάστατο για τις μαθηματικές εξισώσεις.

Isaac Asimov

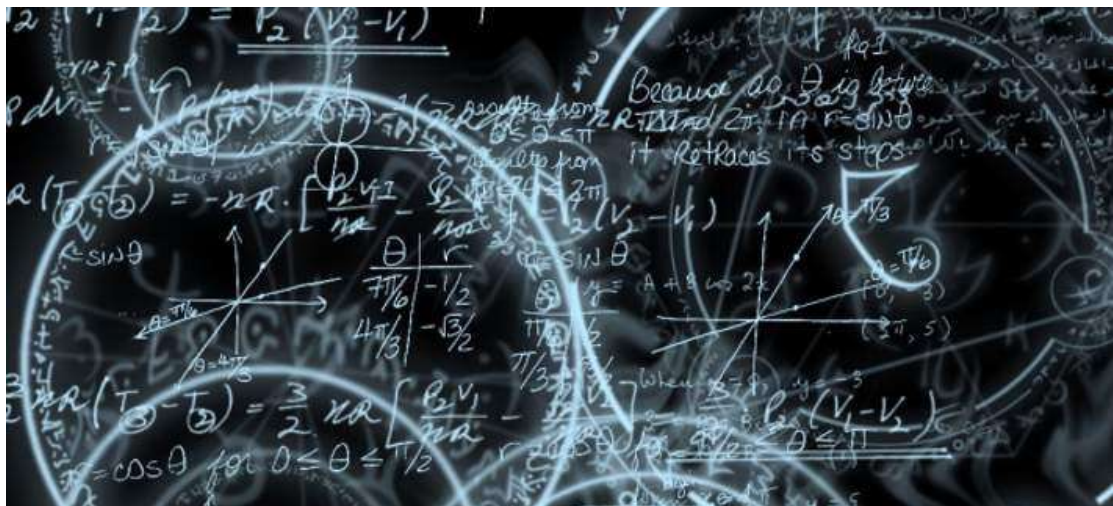
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$.
2. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{21x-4}{x^2-4}$ είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|10x - 3|}$ είναι το $\mathbb{R}$.
4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x-8}{25-x^2}$ είναι το $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, +\infty)$.
5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{|x| + 2}$ είναι το $[-2, +\infty)$.
6. Η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| - 6$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή $f(x) = \begin{cases} x - 8, & x \geq 2 \\ -x - 4, & x < 2 \end{cases}$.
7. Η συνάρτηση $f(x) = |x - 1| - 5$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα $f(x) = \begin{cases} x - 6, & x \geq 1 \\ -x - 4, & x < 1 \end{cases}$.
8. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x$ τότε η παράσταση $f(0) + f(1) + f(2)$ ισούται με 7.
9. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x + 2$ τότε ισχύει η σχέση $f(2\alpha) + f(4\beta) = 2f(\alpha + 2\beta)$.
10. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{P(x)}$ είναι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$.

11. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{15}{\sqrt{R(x)}}$ είναι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} / R(x) > 0\}.$$

12. Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

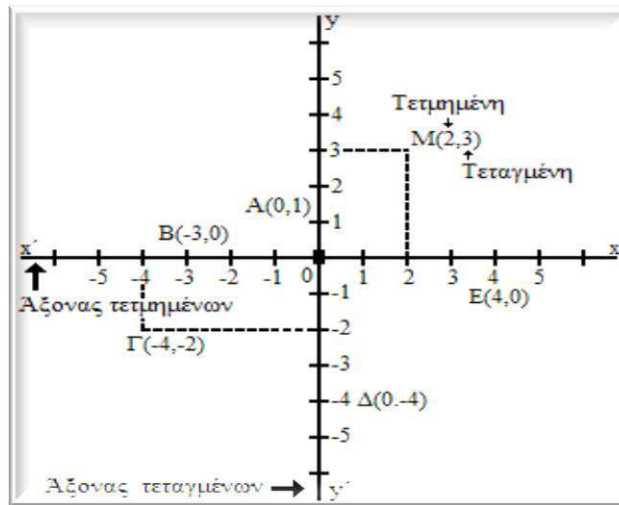


6.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης

➤ Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

- Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από δυο κάθετους άξονες. Ο οριζόντιος άξονας xx' λέγεται άξονας των τετμημένων ενώ ο κατακόρυφος yy' άξονας των τεταγμένων .
- Κάθε σημείο M του επιπέδου συμβολίζεται με ένα ζεύγος αριθμών $M(x,y)$ όπου ο πρώτος αριθμός ονομάζεται τετμημένη του σημείου και ο δεύτερος τεταγμένη. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται συντεταγμένες.
- Κάθε ζεύγος αριθμών (x,y) ενός σημείου M αποτελεί τις συντεταγμένες του.
- Κάθε σημείο του άξονα xx' έχει τεταγμένη 0 . Αν ένα σημείο έχει 0 τεταγμένη βρίσκεται πάνω στον άξονα xx' .
- Κάθε σημείο του άξονα yy' έχει τετμημένη 0 . Αν ένα σημείο έχει τετμημένη 0 βρίσκεται πάνω στον άξονα yy'
- Το σημείο που ενώνονται οι άξονες λέγεται αρχή των αξόνων και έχει συντεταγμένες $(0,0)$
- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος αριθμών και αντιστρόφως κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο του επιπέδου.

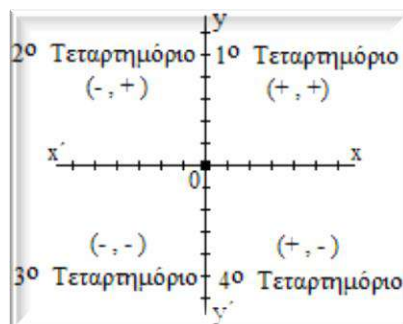
- Οι άξονες x' και y' αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων ή απλώς σύστημα αξόνων.



- ✓ Όταν οι μονάδες μέτρησης στους άξονες είναι ίδιες το σύστημα αξόνων ονομάζεται **ορθοκανονικό** ενώ αν δεν είναι ίδιες ονομάζεται **ορθογώνιο**.

➤ Τεταρτημόρια

- Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε 4 κομμάτια καθένα από τα οποία ονομάζεται τεταρτημόριο.



➤ Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Γραφική παράσταση συνάρτησης είναι η απεικόνιση όλων των ζευγών $(x, f(x))$ που την επαληθεύουν σε άξονες συντεταγμένων. Την συμβολίζουμε με C_f .
- ✓ Όταν ένα σημείο βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν.

➤ Εξισώσεις – Ανισώσεις και γραφική παράσταση

- Τα σημεία στα οποία τέμνει η C_f τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$
- Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$
- Τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με $x \in A_f \cap A_g$
- Για να βρούμε το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$ βρίσκουμε την τιμή $f(0)$ αρκεί το $0 \in A_f$.

➤ Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

- Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

➤ Συμμετρίες σημείων σε άξονες συντεταγμένων

- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x\chi'$ όταν έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $γγ'$ όταν έχουν αντίθετη τετμημένη και ίδια τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων όταν έχουν αντίθετη τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και του $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου όταν η τετμημένη του ενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου και αντίστροφα.

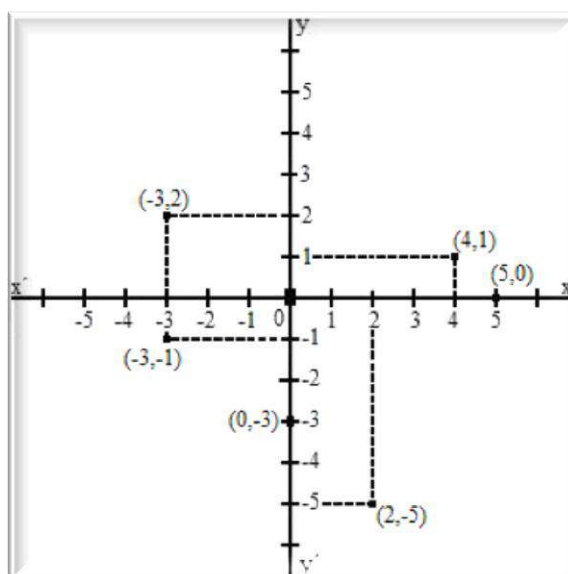


Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών σε άξονες συντεταγμένων:

α) $(4,1)$ β) $(-3,2)$ γ) $(-3,-1)$ δ) $(2,-5)$ ε) $(5,0)$ στ) $(0,-3)$

Λύση



2. Να βρείτε

α. Σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει καθένα από τα σημεία

$A(2, 4)$, $B(-3, 1)$, $\Gamma(-1, -5)$, $\Delta(4, -2)$

β. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $M(7 - |2\alpha - 1|, \alpha^2 - 36)$

ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο;

Λύση

α. Ισχύει ότι $2 > 0$ και $4 > 0$. Άρα το σημείο A ανήκει στο 1^ο

τεταρτημόριο

Ισχύει ότι : $-3 < 0$ και $1 > 0$. Άρα το σημείο Β ανήκει στο 2^ο

τεταρτημόριο

Ισχύει ότι : $-1 < 0$ και $-5 < 0$. Άρα το σημείο Γ ανήκει στο 3^ο

τεταρτημόριο.

Ισχύει ότι : $4 > 0$ και $-2 < 0$. Άρα το σημείο Δ ανήκει στο 4^ο

τεταρτημόριο

β. Πρέπει $7 - |2\alpha - 1| < 0 \Leftrightarrow$ και $\alpha^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow$

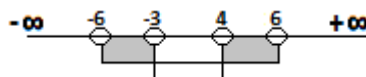
$|2\alpha - 1| > 7 \Leftrightarrow \alpha^2 < 36 \Leftrightarrow$

$2\alpha - 1 > 7$ και $2\alpha - 1 < -7 \Leftrightarrow |\alpha| < 6 \Leftrightarrow$

$2\alpha > 8$ $2\alpha < -6 \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6$

$\alpha > 4$ $\alpha < -3$

Συναληθεύοντας τις λύσεις έχουμε:



Άρα $\alpha \in (-6, -3) \cup (4, 6)$

3. Να βρείτε:

α. Το συμμετρικό του σημείου $M(-3, 1)$ ως προς τον άξονα $x'x$ και

ως προς τον άξονα $y'y$

β. Το συμμετρικό του σημείου $K(-2, 4)$ ως προς την αρχή των

αξόνων

γ. Το συμμετρικό του σημείου $\Lambda(2, 6)$ ως προς την διχοτόμο του 1^{ου}

και του 3^{ου} τεταρτημορίου.

Λύση

α. Το συμμετρικό του σημείου $M(-3,1)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $M'(-3,-1)$

Το συμμετρικό του σημείου $M(-3,1)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $M''(3,1)$

β. Το συμμετρικό του σημείου $K(-2,4)$ ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $K'(2,-4)$

γ. Το συμμετρικό του σημείου $\Lambda(2,6)$ ως προς την διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και του $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου είναι το $\Lambda'(6,2)$

4. Δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(4,2)$

α. Να βρείτε τις αποστάσεις (AB) , $(B\Gamma)$, $(A\Gamma)$

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

Λύση

$$\alpha. (AB) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(4+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\beta. (B\Gamma)^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$$

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 8 + 18 = 26$$

Δηλαδή ισχύει ότι $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$, άρα σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha^2 + 2\alpha)x^2 + (6\beta - 22)x + \beta^2 - 5$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$.

Να βρείτε :

α. Τους πραγματικούς αριθμούς α και β

β. Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) \text{ και } g(x) = -2x + 4$$

γ. Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'

δ. Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα y'

Λύση

α. Ισχύει ότι $A_f = \mathbb{R}$

Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$ έχουμε

$$f(-1) = 6 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^3 + (\alpha^2 + 2\alpha)(-1)^2 + (6\beta - 22)(-1) + \beta^2 - 5 = 6 \Leftrightarrow$$

$$-1 + \alpha^2 + 2\alpha - 6\beta + 22 + \beta^2 - 5 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 - 6\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 - 6\beta + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 1)^2 + (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Άρα } \alpha + 1 = 0 \text{ και } \beta - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -1 \quad \beta = 3$$

$$\text{Δηλαδή } f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

β. Ισχύει ότι $A_g = \mathbb{R} = A_f$

$$\text{Πρέπει } f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = -2x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \text{ ή } x = 2$$

- Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 4$
- Για $x = -1$ έχουμε $f(-1) = 6$
- Για $x = 2$ έχουμε $f(2) = 0$

Άρα οι C_f και η C_g τέμνονται στα σημεία $A(0,4)$ $B(-1,6)$ και $\Gamma(2,0)$

γ. Πρέπει $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \quad x = \pm 2$$

Άρα τα σημεία όπου η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι

$$K(-2,0), \Lambda(1,0) \text{ και } M(2,0)$$

δ. Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 4$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $N(0,4)$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = 20 - 5|x|$. Να

βρείτε τα διαστήματα στα οποία

α. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

β. Η C_g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

γ. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

Λύση

α. $A_f = \mathbb{R}$

$$\text{Πρέπει } f(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 > 4 \Leftrightarrow$$

$$|x| > 2 \Leftrightarrow$$

$$x > 2 \text{ ή } x < -2$$

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

β. $A_g = \mathbb{R}$

$$\text{Πρέπει } g(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$20 - 5|x| < 0 \Leftrightarrow$$

$$5|x| > 20 \Leftrightarrow$$

$$|x| > 4 \Leftrightarrow$$

$$x > 4 \text{ ή } x < -4$$

Άρα η C_g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν

$$x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$$

γ. Θα πρέπει $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4 > 20 - 5|x| \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 5|x| - 24 > 0 \Leftrightarrow$$

$$|x|^2 + 5|x| - 24 > 0$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ άρα η ανίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + 5\omega - 24 > 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121 > 0$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2} = \begin{cases} \frac{-5+11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-5-11}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \end{cases}$$

Άρα $\omega < -8 \Leftrightarrow |x| < -8$ Αδύνατο

$$\omega > 3 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \text{ ή } x < -3$$

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για $x \in (-\infty, -3) \cup$

$(3, +\infty)$

«Το επίπεδο το χρησιμοποίησαν οι Μαθηματικοί για να κάνουν τη δουλειά τους και δεν το δανείζουν σε κανέναν για να χωρίσει τον κόσμο»

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$
 $\Gamma(-3, -1)$, $\Delta(2, -2)$, $E(-1, 0)$, $Z(0, 5)$
2. Να σχεδιάσετε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία
 $A(4, 2)$, $B(-1, 2)$, $\Gamma(-1, -2)$, $\Delta(4, -2)$. Τι είδους τετράπλευρο είναι το
ΑΒΓΔ.
3. Το σημείο $A(3\kappa + 1, 4 - \kappa)$ βρίσκεται στον άξονα $x'x$. Να βρείτε τις
συντεταγμένες του.
4. Το σημείο $A(\kappa - 4, \kappa + 1)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$. Να βρείτε τις
συντεταγμένες του.
5. Δίνεται το σημείο $A(1, -2)$. Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς:
 - α. Τον άξονα $x'x$
 - β. Τον άξονα $y'y$
 - γ. Την αρχή των αξόνων
 - δ. Την διχοτόμο της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων
6. Δίνεται το σημείο $A(-2, 4)$. Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς:
 - α. Τον άξονα $x'x$
 - β. Τον άξονα $y'y$
 - γ. Την αρχή των αξόνων
 - δ. Την διχοτόμο της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων

7. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων

α. $A(2, 4)$ και $B(5, 8)$

β. $O(0, 0)$ και $B(4, -3)$

γ. $A(-7, -3)$ και $B(-3, 0)$

δ. $A(-1, 1)$ και $B(0, 1)$

ε. $A(1, 4)$ και $B(5, 2)$

στ. $A(-1, 5)$ και $B(3, 2)$

8. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(-2, -1)$

α. Να βρείτε τις αποστάσεις (AB) , $(B\Gamma)$ και $(A\Gamma)$

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

9. Τα σημεία $A(-3, 3)$ και $B(2, \lambda)$ απέχουν απόσταση $(AB) = 5$. Να

βρείτε:

α. Τον αριθμό λ

β. Το σημείο Γ του αρνητικού ημιάξονα Ox' ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με βάση την AB

γ. Την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$

10. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων

των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

β. $f(x) = 2x^2 - 4x$

γ. $f(x) = x^2 + x + 1$

δ. $f(x) = |2x - 4| - 2$

ε. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 2}$

στ. $f(x) = \sqrt{|x| - 3}$

ζ. $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x}$

η. $f(x) = \frac{\sqrt{|x-3|-2}}{x^2 + 2x - 8}$

θ. $f(x) = |x - 2| - |2x + 1|$

11. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω

συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες:

i. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

iii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

iv. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 1 \\ x^2 - 1, & x \leq 1 \end{cases}$

v. $f(x) = |x - 1| + 3$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4$.

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.

ii. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{|x + 2| - 7}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(6, 4)$.

14. Να βρεθεί σημείο M του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(2, 3)$. Ποιο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABM ;

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία

α. Η C_f βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$

β. Η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 8x - 12$ και

$$g(x) = -x^2 + 2x + 8$$

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της C_g

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

ii. Η C_g δεν βρίσκεται κάτω από την C_f

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2 - x + 1$

i. Για ποιες τιμές του x οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται; Ποια είναι τα σημεία τομής A και B ;

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g .

iii. Να βρείτε σημείο M της C_g που ισαπέχει από τα A και B .

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 3$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot (x + \alpha) + \alpha^2$, $\alpha \neq 0$

- i. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$
- ii. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 3)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$

- α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$
- β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f
- γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.
- β) Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f .
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x + 1) - f(2x) > x^2 - x$.

24. α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$

β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ και } g(x) = x^2 - x + 3 \text{ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το } A(1, 3)$$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x, x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f ,

g τέμνονται σε τρία σημεία, τα οποία και να βρείτε

β. Αν A , O και B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών

παραστάσεων, όπου $O(0, 0)$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B

είναι συμμετρικά ως προς το O .

26. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της

συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\mu = -6$

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

γ. Για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

27. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ Να βρείτε:

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε το σημείο

$M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β , για τις οποίες ισχύει $f(1) = 0$ και

$f(2) = 3$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

γ) Για $\alpha = 1$, $\beta = 0$ και $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) - 1 = g(x + 1)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9x^2 + a|x| + 1}{3|x| - 1}$, για την οποία ισχύει $f(-1) = 2$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 2$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ \alpha x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε την τιμή $f(x^2 + 1)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{3x-2}$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν:

α) τετμημένη 2

β) τεταγμένη 1

32. α) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + x - 2$ με τους άξονες.

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + x + \beta$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2 και τον άξονα $x'x$ στο -1 .

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με

$$x \in \mathbb{R}$$

- α. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$
- β. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$
- γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g .

34. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$ με

$$x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

- α. Για $\alpha = 1$ να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία
- γ. Για $\alpha > 1$ να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α

β. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

- i. Να βρείτε την τιμή του α
- ii. Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δυο σημεία τομής.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$ όπου

$x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$

α. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g να βρείτε την παράμετρο λ , ώστε να ισχύει

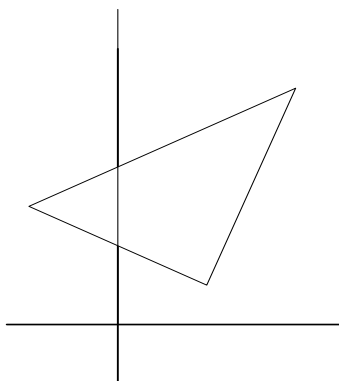
$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$$

Ο μαθηματικός είναι ένας τυφλός σε ένα σκοτεινό δωμάτιο που ψάχνει για μια μαύρη γάτα που δεν είναι εκεί.

Κάρολος Δαρβίνος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

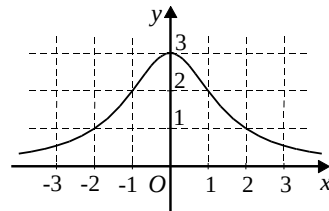
1. Το συμμετρικό του σημείου $A(-2, 3)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $A'(-2, -3)$.
2. Η απόσταση των σημείων $A(x-1, -2)$ και $B(5, -2)$ είναι -3 .
3. Το σημείο $A(-1, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = |x-2| - |x+1|$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{1}{2}$.
5. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + \kappa$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε $\kappa = 0$.
6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο σε ένα σημείο.
7. Το παρακάτω γράφημα αντιστοιχεί σε συνάρτηση.



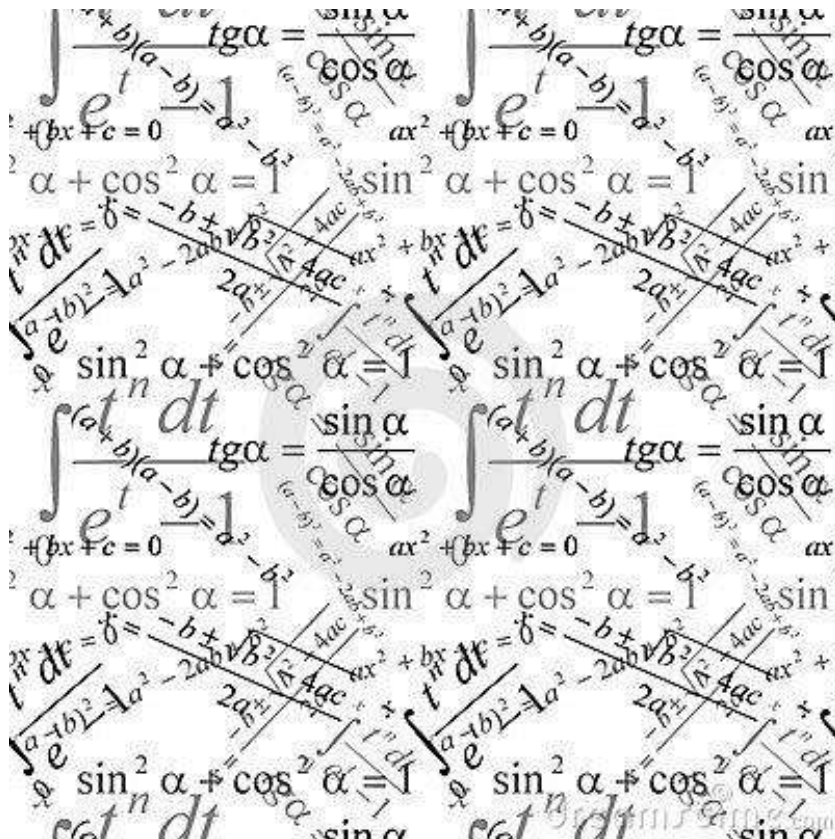
8. Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f(x) = \frac{6}{2+x^2}$. Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 2$ είναι

$$-1 < x < 1.$$



9. Το σημείο $M(x, y)$ με $x < 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.



6.3. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

➤ Η εξίσωση $y = ax + \beta$

- Η εξίσωση $y = ax + \beta$ παριστάνει **ευθεία** που διέρχεται από το σημείο $B(0, \beta)$ του άξονα $y'y$. Το **a λέγεται κλίση** της ευθείας. Αν A το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ τότε η γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζεται από την ημιευθεία Ax και την ευθεία κατά την **θετική φορά** λέγεται **γωνία της ευθείας με τον άξονα $x'x$** .
- ✓ Αν η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν τότε $\hat{\omega} = 0^\circ$.
- ✓ Σε κάθε περίπτωση για την γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \hat{\omega} < 180^\circ$

➤ Συντελεστής διεύθυνσης

- Ως συντελεστή διεύθυνσης η ως κλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) συμβολίζεται με λ_ε ή απλά λ .
- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- ✓ Αν $\hat{\omega}$ οξεία τότε $\lambda_\varepsilon > 0$
- ✓ Αν $\hat{\omega}$ αμβλεία τότε $\lambda_\varepsilon < 0$
- ✓ Αν $\hat{\omega} = 0$ τότε $\lambda_\varepsilon = 0$
- ✓ Αν $\hat{\omega} = 90^\circ$ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

➤ Κλίση ευθείας (ε) που διέρχεται από δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ ή $B(x_2, y_2)$

- Η κλίση ευθείας (ε) που διέρχεται από δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ ή $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

➤ Σχετικές θέσεις δυο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

- Αν έχουμε δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντιστοίχως και αν υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως. Τότε ισχύει ότι:
- Αν $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$ άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν

- ✓ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες
- ✓ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$ τότε οι ευθείες συμπίπτουν

- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_2$ τότε οι ευθείες συμπίπτουν.

➤ Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$ και έχει κλίση $\lambda = \alpha = \varepsilon\varphi\omega$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$.

Ισχύει ότι:

- Αν $\alpha > 0$ τότε $0^0 < \omega < 90^0$
 - Αν $\alpha < 0$ τότε $90^0 < \omega < 180^0$
 - Αν $\alpha = 0$ τότε $\omega = 90^0$
- ✓ Στην περίπτωση που είναι $\alpha = 0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x) = \beta$ και λέγεται σταθερή συνάρτηση διότι η τιμή είναι ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➤ Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x$

- Αν $\beta = 0$ η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ παίρνει την μορφή $f(x) = \alpha x$, οπότε η γραφική παράσταση είναι η ευθεία $y = \alpha x$ και περνάει από την αρχή των αξόνων.

- ✓ Για $\alpha = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$. Για την γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^0$. Άρα η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος του $1^{ου}$ και του $3^{ου}$ τεταρτημορίου.
- ✓ Για $\alpha = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$. Για την γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^0$. Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος του $2^{ου}$ και του $4^{ου}$ τεταρτημορίου.

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία

α. $y = x + 3$

β. $y = \sqrt{3}x - 3$

γ. $y = -x + 12$

δ. $y = -\sqrt{3}x + 4$

Λύση

α. Είναι $\alpha = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1$ Άρα $\omega = 45^0$

β. Είναι $\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$ Άρα $\omega = 60^0$

γ. Είναι $\alpha = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1$ Άρα $\omega = 135^0$

δ. Είναι $\alpha = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$ Άρα $\omega = 120^0$

2. Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(4, 9)$. Να βρείτε

τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

Λύση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 3}{4 - (-2)} = \frac{6}{6} = 1$$

Άρα $\alpha = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1$ άρα $\omega = 45^0$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία

α. Έχει κλίση $\alpha = 2$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 3)$

β. Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x - 1$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, -2)$

Λύση

α. Έχει κλίση $\alpha = 2$ άρα $(\varepsilon): y = 2x + \beta$

Αφού (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,3)$ έχουμε

$$3 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3 \text{ Δηλαδή } y = 2x + 3$$

β. Αφού η (ε) είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x - 1$ έχουμε ότι

$$\alpha = 3, \text{ δηλαδή } (\varepsilon): y = 3x + \beta$$

$$\text{Όμως το σημείο } A(-2,2) \in (\varepsilon) \text{ άρα } 2 = 3 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$$

$$\text{Άρα } y = 3x + 8$$

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Η ευθεία $(\varepsilon): y = (|\lambda + 3| - 4)x + 2016$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

β. Η ευθεία $y = (\lambda^2 - 3\lambda - 10)x - 1961$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

Λύση

$$\text{α. Πρέπει } \alpha > 0 \Leftrightarrow |\lambda + 3| - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda + 3| > 4 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + 3 > 4 \text{ ή } \lambda + 3 < -4 \Leftrightarrow$$

$$\lambda > 1 \quad \lambda < -7$$

$$\text{Άρα } \lambda \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{β. Πρέπει } \lambda^2 - 3\lambda - 10 < 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-10$	+	-	+	

Άρα $\lambda \in (-2, 5)$

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία

$A(2, -1)$ και $B(-1, 1)$

Λύση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι $\alpha = \frac{1+1}{-1-2} = -\frac{2}{3}$

Άρα $(\varepsilon): y = -\frac{2}{3}x + \beta$

Όμως $B(-1, 1) \in (\varepsilon)$ άρα $1 = -\frac{2}{3}(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$, δηλαδή

$$(\varepsilon): y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Ένα σωστά προσδιορισμένο πρόβλημα έχει λυθεί κατά 50%.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι επόμενες ευθείες με τον

άξονα $x'x$

α. $y = x - 4$

δ. $y = -x + 6$

β. $y = \sqrt{3}x - 6$

ε. $y = -\sqrt{3}x$

γ. $y = \frac{\sqrt{3}x-4}{3}$

στ. $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

2. α) Να βρείτε το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η

ευθεία $\varepsilon: y = (\alpha^2 - 2\alpha + 2)x + 3$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία

$\zeta: y = (\alpha^2 - 1)x - 2$ με τον άξονα $x'x$ να είναι αμβλεία.

3. α) Να βρείτε το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η

ευθεία $\varepsilon: y = (\alpha^2 - 2\alpha + 2)x + 3$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία

$\zeta: y = (\alpha^2 - 1)x - 2$ με τον άξονα $x'x$ να είναι αμβλεία.

6. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon: y = (\lambda^4 - 1)x + 1 - \lambda$

είναι παράλληλη:

α) στον άξονα $x'x$

β) στη διχοτόμο των γωνιών $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'Oy'}$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία

α. Έχει κλίση $\alpha = -2$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 3)$

- β. Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^0$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -10)$
- γ. Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 1981$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, -4)$
5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$
- α. Η ευθεία $(\varepsilon): y = (|12\lambda - 3| - 7)x + 2004$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$
6. Η ευθεία $(\zeta): y = (\lambda^2 + \lambda - 2)x + 2018$ σχηματίζει αμβλεία Να βρείτε :
- α) τον λ έτσι ώστε οι ευθείες: $(\varepsilon_1): y = (\lambda^2 - 2\lambda)x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = -1$ να είναι παράλληλες.
- β) γωνία με τον άξονα $x'x$
7. Η ευθεία $y = (\lambda + 3)x + 2\lambda + 8$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- α. Να βρείτε το λ
- β. Να σχεδιάσετε την ευθεία
8. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
- $$f(x) = \begin{cases} x - 4 & , x > 2 \\ 2x - 6 & , x \leq 2 \end{cases}$$
9. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων
- α. $f(x) = |x|$
- β. $f(x) = |x - 2|$
- γ. $f(x) = 2 - |x + 1|$
10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία
- α. $A(-4, 0)$ και $B(0, 2)$

β. $A(1, 3)$ και $B(2, 1)$

γ. $A(0, -1)$ και $B(4, -1)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα

σημεία $A(1, 6)$ και $B(-1, 4)$ να βρείτε τις τιμές των α και β

β. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$ να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και

$y'y$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική της f τέμνει τους

άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

13. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x < -1 \\ x & \text{αν } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

14. α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \text{ και στην συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της}$$

$$15. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \alpha, & x \leq 3 \\ -\frac{3}{2}x + \beta, & x > 3 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β , αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $A(-1, -3)$ και $B(7, -3)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .
- β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που δημιουργείται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.
- γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f των οποίων η τετμημένη ισούται με την τεταγμένη.
- δ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

16. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$$

- α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f
- β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in A$
- γ. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$

17. α) Να βρείτε το εμβαδόν E του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία

$$\varepsilon: y = 2x + 4 \text{ και τους άξονες } x'x \text{ και } y'y.$$

β) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το εμβαδόν E του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία $\zeta: y = 2x + \lambda - 2$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ να είναι 0,25.

18. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} + 1 \text{ και στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της } f \text{ με τη}$$

βοήθεια της C_f .

19. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά

από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$

α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

20. Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x

χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά

προσέγγιση από τη σχέση:

$$T=15+25\cdot x, \text{ όταν } 0\leq x\leq 200$$

α. Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

- β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες
- γ. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

22. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$
- β. Για $\lambda = -1$ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
- γ. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$ να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο
- δ. Για $\lambda = 1$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$
- β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$
- γ. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη του

σημείου M ισχύει $|2x - 1| < 3$ να αποδείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$

24. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ και } g(x) = 3x - 4 \quad x \in \mathbb{R}$$

- α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και g
- β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g
- γ. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = ax + 1$, $a < 1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f
- γ. Να βρείτε την τιμή του α, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$
- δ. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x'x και y'y.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 4x + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - 9 \text{ με πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}$$

- α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης g με τον άξονα x'x

- β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$, $(-3, 0)$
- γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες
- δ. Να βρείτε την συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία , διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g , σε σημείο του ημιάξονα Ox .

27. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , x < 0 \\ x + 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

- α. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$
- β. i) Να χαράξετε την C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους
- ii) να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γ) (i) , να

προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (β)(ii) αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

28. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{αν } x > 2 \\ -x + 3 & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$$

γ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ. Να λύσετε $f(x) \leq 0$

22. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β. Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία

ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ. Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα

σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που

διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να

επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να

διανύσουμε.

δ. Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των

εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του

σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές

τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

Οι εξισώσεις είναι περισσότερο ενδιαφέρουσες για μένα. Η πολιτική είναι για το παρόν, ενώ οι εξισώσεις είναι για την αιωνιότητα.

Αϊνστάιν

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Οι ευθείες $y = \frac{3}{6}x + 4$ και $y = \frac{1}{2}x + 5$ είναι παράλληλες.
2. Οι ευθείες $y = \frac{10}{\sqrt{5}}x + 7$ και $y = 2\sqrt{5}x - 2$ είναι παράλληλες.
3. Οι ευθείες $y = (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 11$ και $y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 3$ είναι
κάθετες.
4. Η ευθεία που περνάει από τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(1, 2)$ είναι η
 $y = -x + 3$.
5. Η ευθεία $4x + 2y - 5 = 0$ είναι παράλληλη με την $y = 4x + 5$.
6. Η ευθεία $y = 3$ είναι παράλληλη με την $y = 3x$.
7. Η ευθεία $x = 2$ είναι παράλληλη με την $y = 2x + 4$.
8. Η ευθεία $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με
τον x' γωνία 30° .
9. Όλες οι ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης.
10. Η συνάρτηση $f(x) = \lambda x - 5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1.
11. Η ευθεία $4x - 3y = -12$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,4)$ και
 $B(3,0)$.
12. Η ευθεία $x = 2y - 5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 2.
13. Η ευθεία που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, διέρχεται από
την αρχή των αξόνων αν $\beta=0$.

14. Αν στις ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ ισχύει $\beta_1 \cdot \beta_2 = -1$, τότε οι ευθείες είναι κάθετες.
15. Η συνάρτηση $f(x) = |1 - x| + 2$ έχει για γραφική παράσταση μια ευθεία.
16. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $D_f = \mathbb{R}$ είναι ευθεία.
17. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $D_f = [\kappa, +\infty)$ είναι ημιευθεία.
18. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $D_f = [\lambda, \mu]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.
19. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1 + |x + 1|$ αποτελείται από δύο ημιευθείες που τέμνονται στο σημείο $A(-1, 1)$.



Απόδειξη: Η διαδικασία της λογικής επιβεβαίωσης μιας μαθηματικής πρότασης που ξεκινά από ένα σύνολο αποδεκτών αρχών (αξιωμάτων ή ήδη αποδεδειγμένων προτάσεων) και προχωρεί μέσω σαφώς ορισμένων και ολοκληρωμένων λογικών βημάτων, που λέγονται και συμπερασματικοί κανόνες. Οι αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη αποτελούσαν για είκοσι τρεις περίπου αιώνες το πρότυπο μαθηματικής απόδειξης. Όμως, προς τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, η παλιά αποδεικτική μέθοδος έγινε αντικείμενο διεξοδικότατης φιλοσοφικής και λογικής διερεύνησης και βρέθηκε να είναι ελλιπής, κυρίως σε δυο κατευθύνσεις: α) την έννοια των αξιωμάτων ως «αυτονόητων αληθειών» και β) των λογικών αλμάτων, όπου η διαίσθηση -που ειδικά στον Ευκλείδη είναι κυρίως οπτική- γεωμετρική- συμπλήρωνε κάποια κενά που άφηναν οι συμπερασματικοί κανόνες. Με την έννοια αυτή το εγχείρημα των Φρέγκε, Ράσελ, Ουάιτχεντ και των άλλων λογικιστών, δηλαδή η θεμελίωση των μαθηματικών στη λογική, ξεκινά σε μεγάλο βαθμό ως αντίδραση στις ατέλειες της αποδεικτικής μεθόδου του Ευκλείδη, αλλά και των επιγόνων του, δυτικών μαθηματικών, που τον είχαν ως πρότυπο. Γενικότερα, η αναζήτηση των θεμελίων των μαθηματικών περιλάμβανε στους κεντρικούς στόχους της μια πλήρη θεωρία και πρακτική της αυστηρά λογικής απόδειξης, σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά θα μπορούν να παράγουν όλες τις αλήθειες τους από ένα μικρό, συνεπές σύνολο αξιωμάτων. Το μεγάλο ερώτημα του Χίλμπερτ, το λεγόμενο Πρόβλημα της Απόφασης που τέθηκε το 1928 και απαντήθηκε επτά χρόνια αργότερα από τον Τούρινγκ, ουσιαστικά ισοδυναμεί με το αίτημα ενός ενιαίου, πανίσχυρου μηχανισμού αποδείξεων, ικανού να χαρακτηρίσει αληθή ή ψευδή την οποιαδήποτε μαθηματική πρόταση με βάση έναν αυστηρά καθορισμένο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος : Μια συστηματική διαδικασία, καθορισμένη βήμα προς βήμα από απόλυτα σαφείς κανόνες, που ξεκινά από ορισμένη κατάσταση και καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αν και ο όρος προέρχεται από τα μαθηματικά, όπου κυρίως χρησιμοποιείται, αλγόριθμος κάλλιστα μπορεί να είναι μια καλογραμμένη μαγειρική συνταγή ή οι οδηγίες για να βρούμε κάποια διεύθυνση. Η λέξη είναι η ευρωπαϊκή παραφθορά του ονόματος του Άραβα μαθηματικού και αστρονόμου Αλ Καρίζμι , που έζησε τον 9^ο αιώνα στη Βαγδάτη , όπου συνέλεξε και κατέγραψε πολλές μεθόδους υπολογισμών , κάποιες από τις οποίες πιθανότατα εφηύρε ο ίδιος. (Το βιβλίο με αυτή τη συγκομιδή, η περίφημη Αλ Γιαμπρ , αποτελεί και την ιστορική αφετηρία της λέξης «άλγεβρα».) Απλός μαθηματικός αλγόριθμος είναι , για παράδειγμα, η μέθοδος που μαθαίνουμε στο δημοτικό για την πρόσθεση δυο ακεραίων: «Γράψτε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο , ευθυγραμμισμένους δεξιά. Στην αρχή προσθέστε την άκρη δεξιά στήλη , και αν το αποτέλεσμα είναι μονοψήφιο , γράψτε το από κάτω , στην ίδια στήλη. Αν είναι διψήφιο , γράψτε από κάτω το δεξιά ψηφίο του αποτελέσματος, κρατήστε το πρώτο ψηφίο και προσθέστε το στη δεύτερη στήλη από τα δεξιά...» , κ.ο.κ. Ίσως ο παλαιότερος γνωστός ενδιαφέρων αλγόριθμος είναι αυτός που δίνει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του, για τον υπολογισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δυο μη αρνητικών αριθμών. Οι αλγόριθμοι άρχισαν να αποκτούν μεγάλο ενδιαφέρον το 15^ο αιώνα με τη διάδοση του δεκαδικού συστήματος που, αντίθετα από το ρωμαϊκό , επέτρεπε τη δημιουργία μεθόδων για αριθμητικούς υπολογισμούς , όπως αυτόν που αναφέραμε πρωτύτερα. Σήμερα , οι αλγόριθμοι κατά κανόνα κωδικοποιούνται με σύνθετα συμβολικά συστήματα που αποκαλούνται γλώσσες προγραμματισμού και είναι στη βάση της λειτουργίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών και του Ίντερνετ.

Κεφάλαιο 7^ο Μελέτη βασικών συναρτήσεων

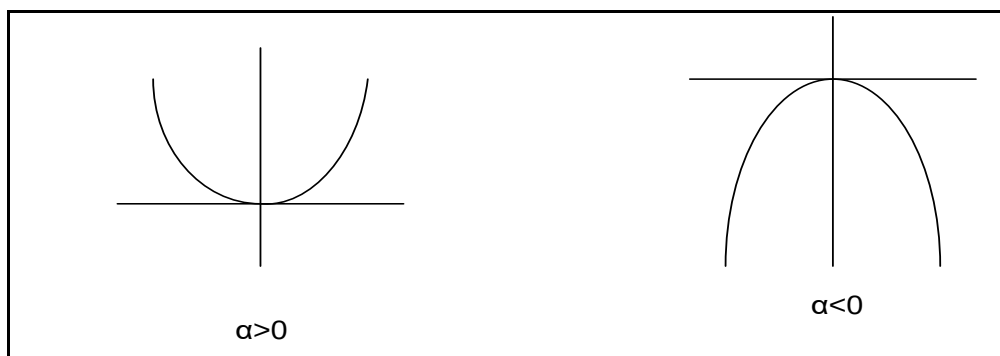
7.1. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$

➤ Ιδιότητες – χαρακτηριστικά της συνάρτησης $f(x) = ax^2$

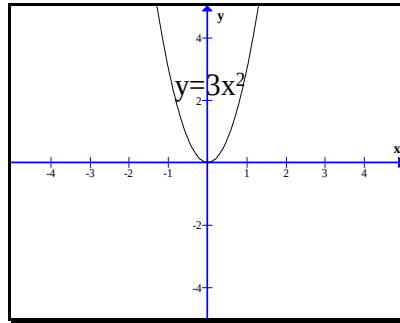
- Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, έχει πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς ($\mathbb{R}$)
- Η γραφική της παράσταση είναι μια καμπύλη γραμμή που ονομάζεται παραβολή.
- Στη συγκεκριμένη συνάρτηση ο συντελεστής του x^2 , το «α», καθορίζει τη μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση της f.

Δηλαδή:

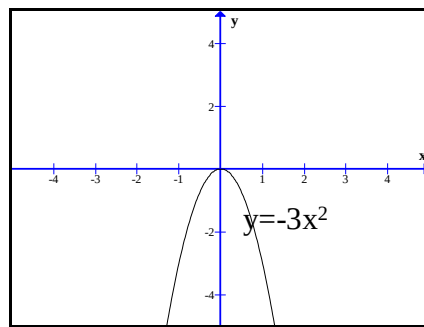
Αν $a > 0$ τότε η γραφική παράσταση έχει ελάχιστο ή λέμε ότι είναι ανοιχτή προς τα πάνω ενώ αν $a < 0$ έχει μέγιστο ή είναι ανοιχτή προς τα κάτω.



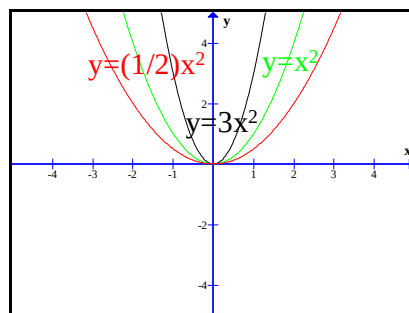
π.χ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x^2$



π.χ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x^2$



- Η τιμή του συντελεστή «α» μας δείχνει πόσο κλειστή ή πόσο ανοιχτή είναι η παραβολή μας. π.χ.

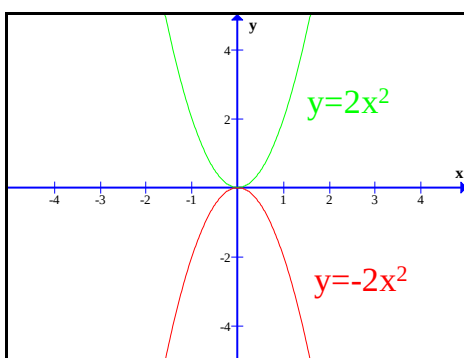


- Παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $O(0,0)$.
- Όποια κι αν είναι η μορφή της (ανοιχτή προς τα πάνω ή ανοιχτή προς τα κάτω) ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της. Δηλαδή οι δύο κλάδοι που αποτελούν τη γραφική της παράσταση, είναι συμμετρικοί ως προς τον $y'y$ (άρτια).

- Αν θεωρήσουμε ως «α» έναν θετικό αριθμό και σχεδιάσουμε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις παραβολές $f(x) = ax^2$ και την $g(x) = -ax^2$, αυτές θα είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

π.χ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

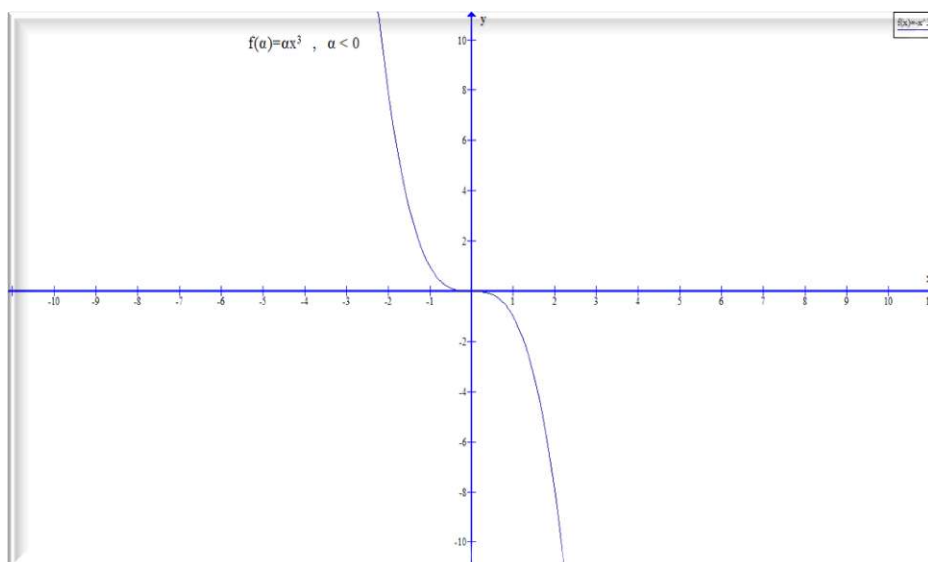
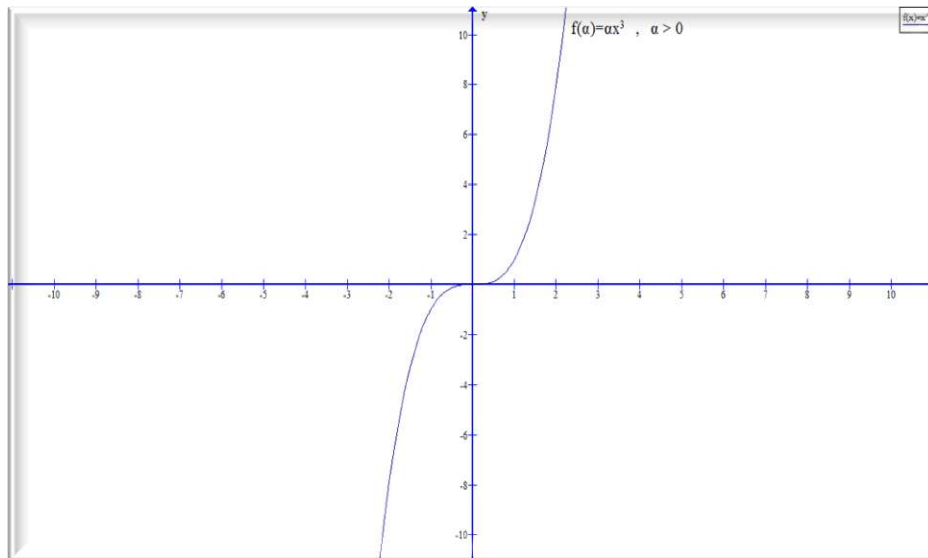
$$y = 2x^2 \text{ και } y = -2x^2$$



➤ Ιδιότητες – χαρακτηριστικά της συνάρτησης $f(x) = ax^3$

- Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$, έχει πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς ($\mathbb{R}$)
- Η γραφική παράσταση διέρχεται από τη αρχή των αξόνων και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων δηλαδή είναι περιττή.
- Στη συγκεκριμένη συνάρτηση ο συντελεστής του x^3 , το «α», καθορίζει τη μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση της f .
Δηλαδή:

Αν $a > 0$ τότε η γραφική παράσταση είναι γνησίως αύξουσα αν $a < 0$
είναι γνησίως φθίνουσα.

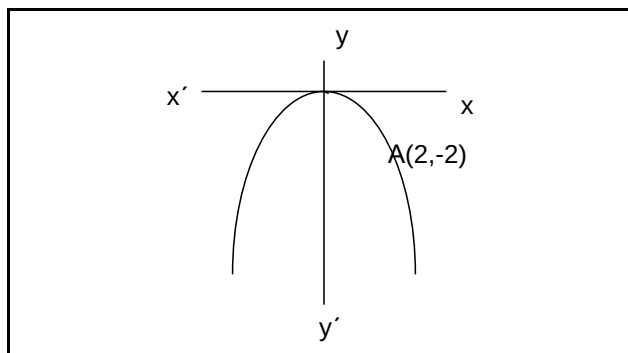


Το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες

Γαλιλαίος

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια παραβολή η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2, -2)$. Να βρείτε την εξίσωσή της.



2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (a^2 - 6a + 11)x^2$ διέρχεται από το σημείο $M(-3, 18)$
- i. Να βρείτε τον αριθμό a
 - ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .
3. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
- i) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
 - ii) $g(x) = x^2$
 - iii) $h(x) = 2x^2$
4. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις παραβολές:
- i) $f(x) = -2x^2$
 - ii) $g(x) = -5x^2$

5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 4$ και $h(x) = x^2 - 3$

ii) $f(x) = 0,5x^2$, $g(x) = 0,5(x - 1)^2$ και $h(x) = 0,5(x - 2)^2$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x^2$ και

$g(x) = (|\lambda - 5| - 1)x^2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Η C_f είναι παραβολή κι παρουσιάζει μέγιστο και η C_g διέρχεται από το σημείο $M(-2, 8)$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ

β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

7. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - x^3}{x - 1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τα σημεία της C_f με τεταγμένη 2

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

9. Δίνεται η παραβολή $C: y = x^2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$

i. Να σχεδιάσετε την παραβολή και την ευθεία στο ίδιο σύστημα αξόνων

ii. Να βρείτε γραφικά τα κοινά σημεία τους.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 \leq x + 2$

α) Γραφικά

β) Αλγεβρικά

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x+1}$

i. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παραπάνω συνάρτηση;

ii. Για $x \neq 1$:

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης

β) Να κάνετε την γραφική της παράσταση

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2$

i. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων

ii. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να λύσετε

α) Την εξίσωση $x^3 = x^2$

β) την ανίσωση $x^3 > x^2$

iii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

12. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την παραβολή $f(x) = x^2$ και

την ευθεία $y = 4$ και από τη γραφική παράσταση να βρείτε τις λύσεις

της ανίσωσης $x^2 < 4$.

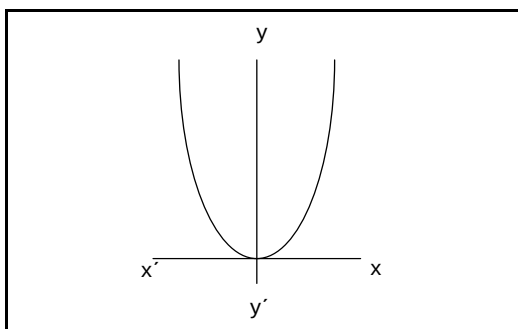
Αν νομίζεις ότι η μόρφωση είναι ακριβή, δοκίμασε την άγνοια.

Derek Bok

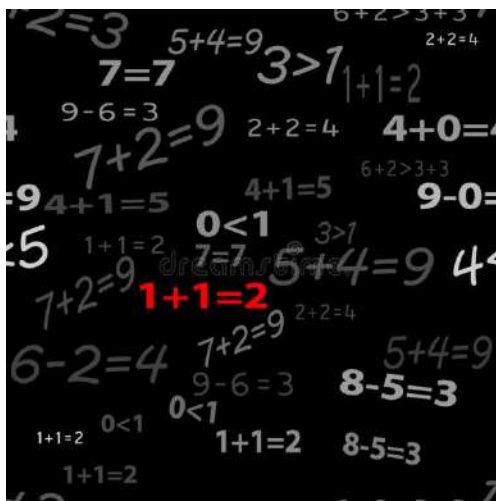
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η καμπύλη του παρακάτω σχήματος μπορεί να αντιστοιχεί στην

συνάρτηση $f(x) = -3x^2$

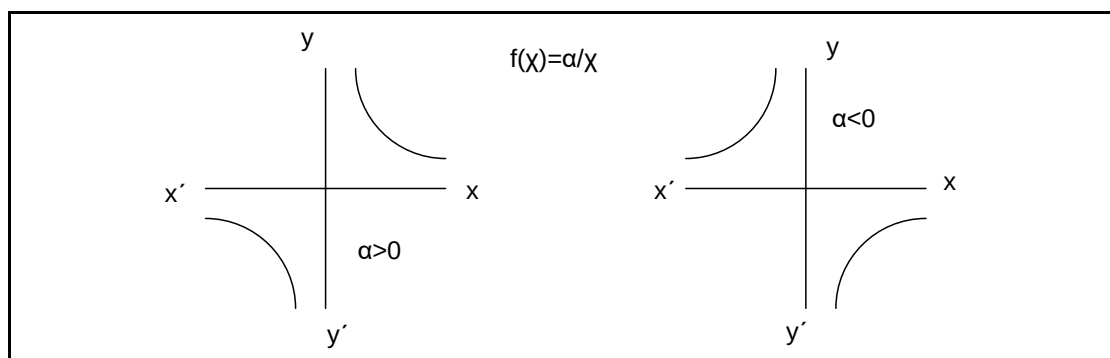


2. Η παραβολή $f(x) = 5x^2 - 2$ δεν είναι άρτια.
3. Η παραβολή $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4$ έχει ακρότατο το σημείο $O(0,0)$.
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ έχει έναν κλάδο κοινό με την γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$
5. Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2,5x^2$ είναι πιο «ανοιχτή» από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{2}{5}x^2$



7.2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$

- **Ιδιότητες - χαρακτηριστικά της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$**
- Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι κλασματική, αφού η μεταβλητή βρίσκεται στον παρονομαστή, οπότε θα πρέπει $x \neq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από το 0 και συμβολικά γράφουμε ότι $D_f = \mathbb{R}^*$ ή $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
 - Η γραφική της παράσταση λέγεται υπερβολή (ή ισοσκελής υπερβολή) και είναι μια καμπύλη που αποτελείται από δύο κλάδους, οι οποίοι όμως βρίσκονται ή στο 1^ο – 3^ο τεταρτημόριο ή στο 2^ο – 4^ο.
 - το «α» που εδώ είναι ο αριθμητής του κλάσματος, μας πληροφορεί για την μορφή της καμπύλης. Συγκεκριμένα:
 - Αν $\alpha > 0$ τότε ο ένας κλάδος βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο κι ο άλλος στο 3^ο ενώ αν $\alpha < 0$ οι κλάδοι βρίσκονται στα τεταρτημόρια 2 – 4.



✓ Επίσης το «α» μας δείχνει πόσο «ανοιχτή» ή πόσο «κλειστή»

είναι η καμπύλη.

- Είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων (περιττή)
- Δεν τέμνει ποτέ τους άξονες! Λέμε ότι οι άξονες λειτουργούν ως ασύμπτωτες της υπερβολής ή ότι η υπερβολή πλησιάζει τους άξονες ασυμπτωτικά αφού υπερβολή και άξονες δεν συμπίπτουν ποτέ!
- Από τις ιδιότητες των κλασμάτων ξέρουμε ότι όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής ενός κλάσματος, τόσο μικραίνει η αξία του. Στην περίπτωση της υπερβολής αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x (ο παρονομαστής) τόσο η καμπύλη πλησιάζει τον άξονα $x'x$ (δηλαδή το 0)
- Επίσης από τα κλάσματα ξέρουμε ότι όσο μικραίνει ο παρονομαστής τόσο μεγαλώνει η αξία του κλάσματος. Στην υπερβολή αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερες τιμές μπουν στη θέση του x (παρονομαστής) τόσο πιο «ψηλά» πάει η καμπύλη στον άξονα $y'y$.

Η εκπαίδευση δεν είναι το γέμισμα ενός κουβά, αλλά το άναμμα μιας φλόγας.

William Butler

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{x}$

ii) $g(x) = \frac{2}{x}$

iii) $h(x) = \frac{1}{2x}$

2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = -\frac{1}{x}$

ii) $g(x) = -\frac{2}{x}$

iii) $h(x) = -\frac{1}{2x}$

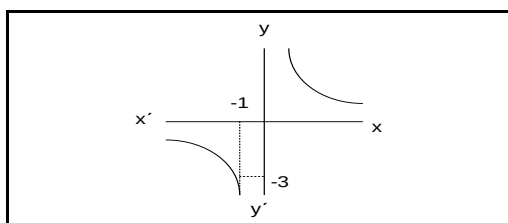
3. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις

γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ και $h(x) = \frac{1}{x} - 2$

ii) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{x-2}$ και $h(x) = \frac{1}{x+1}$

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια υπερβολή η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1, -3)$. Να βρείτε την εξίσωσή της και να σχεδιάσετε την συμμετρική της.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x-1}$ ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το 0.
2. Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2}{x-1}$ και $g(x) = -\frac{2}{1-x}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{-5}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x}$ είναι φθίνουσα για $x \in \mathbb{R}$.
5. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο.

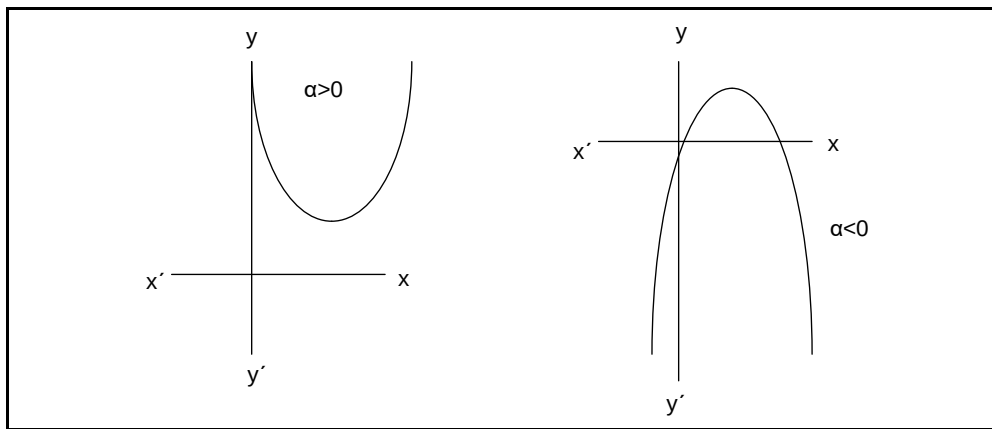


7.3. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

➤ Ιδιότητες – χαρακτηριστικά της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

- Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς ($\mathbb{R}$).
- Έχει μέγιστο όταν $a < 0$ και ελάχιστο όταν $a > 0$. Έχει δηλαδή τη μορφή:



- Έχει κορυφή (μέγιστο ή ελάχιστο) το σημείο με συντεταγμένες $K\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ όπου $\Delta = b^2 - 4a\gamma$.
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{b}{2a}$.
- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \gamma)$
- Αν $\Delta > 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$ όπου

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Αν $\Delta=0$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $(x_1, 0)$ όπου

$$x_1 = \frac{-\beta}{2\alpha}.$$

Αν $\Delta < 0$ τότε δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον $x'x$.

- ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

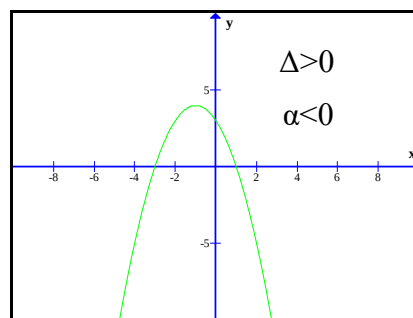
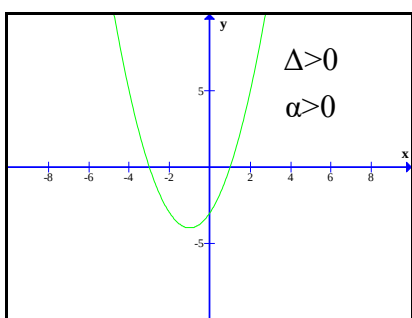
- ✓ Για να βρούμε τα κοινά σημεία της συνάρτησης

$y = ax^2 + bx + \gamma$ με τον άξονα yy' βάζουμε όπου $x = 0$ και βρίσκουμε την τιμή του γ .

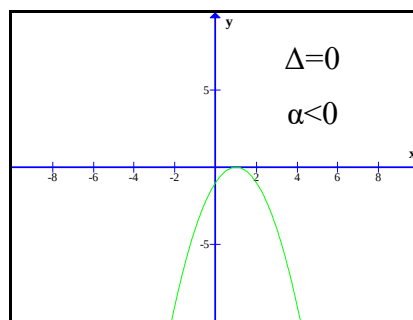
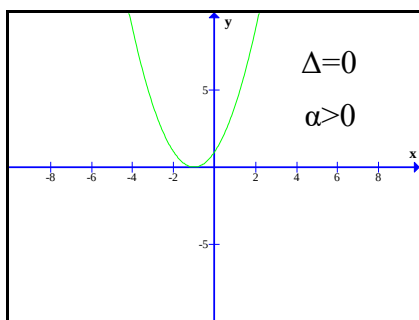
- ✓ Για να βρούμε τα κοινά σημεία της συνάρτησης

$y = ax^2 + bx + \gamma$ με τον άξονα xx' λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$

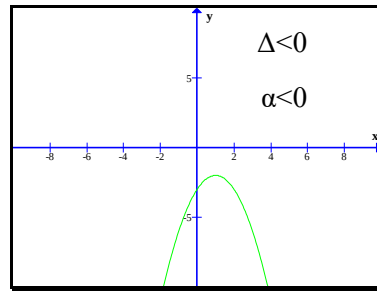
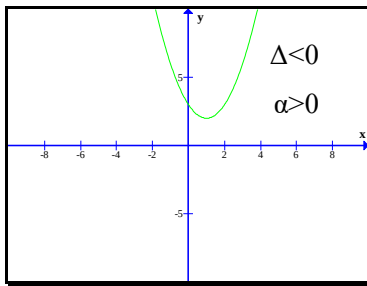
- ✓ Αν $\Delta > 0$ η παραβολή έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.



- ✓ Αν $\Delta = 0$ η παραβολή έχει με τον άξονα xx' ένα κοινό σημείο .



✓ Αν $\Delta < 0$ Η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x\chi'$.



Δώσε στον άνθρωπο ένα ψάρι και θα τον χορτάσεις μια φορά. Μάθε τον να πιάνει ψάρια και θα είναι χορτασμένος σε όλη του τη ζωή.

Μαϊμωνίδης

Μεθοδολογίες – λυμένα παραδείγματα

1. Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Λύση

- Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, η παραβολή $f(x)$:

α. Έχει ελάχιστο διότι $a = 1 > 0$.

β. Έχει κορυφή $K\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right) = K\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$$[\text{αφού } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1].$$

γ. Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{5}{2}$.

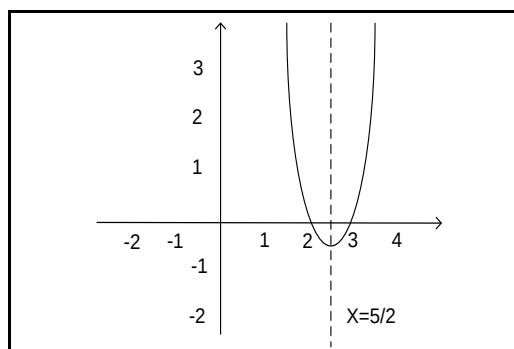
δ. Τέμνει τον y στο σημείο $(0,6)$

ε. Τέμνει τον x σε δύο σημεία αφού $\Delta > 0$, οι συντεταγμένες των οποίων

$$\text{βρίσκονται από τον τύπο } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Είναι}$$

δηλαδή τα σημεία $(2,0)$ και $(3,0)$.

- Τα παραπάνω φαίνονται στην παρακάτω γραφική παράσταση:



Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

iv) $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

ii) $g(x) = -x^2 + 6x - 4$

v) $g(x) = 2x^2 + 1$

iii) $h(x) = x^2 - 1$

vi) $h(x) = -x^2 + x - 1$

2. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των γραφικών παραστάσεων

των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = 2x^2 + 8x - 42$

iv) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$

ii) $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$

v) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

iii) $h(x) = 9x^2 - 12x + 4$

vi) $h(x) = 2x^2 - 4\sqrt{2}x - 1$

3. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = |x + 4| + 1$

ii) $g(x) = -|x + 4| + 1$

iii) $h(x) = 3|x| - 2$

iv) $f(x) = -2|x| + 3$

v) $g(x) = \sqrt{x-1} + 2$

vi) $h(x) = -\sqrt{x-1} + 2$

4. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής για την οποία γνωρίζουμε ότι

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,6)$ και τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(2,0)$

και $(3,0)$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής για την οποία ξέρουμε ότι τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,8)$ και τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(2,0)$ και $(4,0)$.
6. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(3,2)$.
7. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ και από την αρχή των αξόνων.
8. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3,0)$.
9. Η παραβολή $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ έχει κορυφή το σημείο $K(3, -5)$. Να βρείτε τα β και γ .
10. Αν η παραβολή $f(x) = \mu x^2 + (\mu + 2)x - 2(2\mu - 1)$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$, να βρείτε το μ .
11. Αν η παραβολή $g(x) = \kappa x^2 + (\kappa + 3)x - \kappa + 1$, έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, να βρείτε το κ .
12. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x) = (\kappa^2 - 9)x^2 + (\kappa - 1)x + 2$ παρουσιάζει μέγιστο τότε η συνάρτηση $g(x) = (3 - \kappa)x^2 + 5$ παρουσιάζει ελάχιστο.
13. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το σημείο $K(3, -4)$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 5.

14. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η κορυφή της παραβολής

$$y = \lambda x^2 - (2\lambda - 1)x - 1 + \lambda \text{ να βρίσκεται πάνω στην ευθεία } y = x.$$

15. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 - 9$

ii) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

iii) $h(x) = -x^2 + 2x + 2$

iv) $t(x) = -x^2 + 4x + 1$

16. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ αν η γραφική

παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \lambda x^2 - 4x + 4$ εφάπτεται στον άξονα

$x'x$. Μπορεί να είναι $\lambda = 0$;

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - (\alpha + 1)x - 3\beta$, η οποία

παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K(1, 2)$. Να βρείτε τους α και β .

18. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, 1)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα

$x'x$ έτσι ώστε το άθροισμα $(MA)^2 + (MB)^2$ να παίρνει τη μικρότερη

δυνατή τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2(\lambda - 1)x - 4\lambda$. Να βρείτε για ποια

τιμή του λ η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(1, 0)$.

- i. Αν M σημείο της γραφικής παράστασης της f να εκφράσετε την απόσταση AM ως συνάρτηση του x .
- ii. Να βρείτε τη θέση του M ώστε η απόσταση AM να είναι η ελάχιστη δυνατή.

iii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της απόστασης ΑΜ.

21. Ένα σώμα εκσφενδονίζεται κατακόρυφα προς τα επάνω και σε χρόνο t φτάνει σε ύψος $s(t) = -5 \cdot (t^2 - 8t)$. Να βρείτε το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και σε πόσο χρόνο γίνεται αυτό.

22. Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης κάθε αντικειμένου που παράγει ανάλογα με το πλήθος των παραγόμενων αντικειμένων. Ο τύπος που καθορίζει την τιμή πώλησης κάθε αντικειμένου είναι:

$$\Pi(x) = 200 - 3 \cdot x$$

όπου x : το πλήθος των αντικειμένων που κατασκευάστηκαν.

Το κόστος για την κατασκευή κάθε αντικειμένου είναι 18€ και ο φόρος που αναλογεί σε κάθε αντικείμενο που παράγεται είναι 2€.

- i. Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει το κέρδος της βιομηχανίας.
- ii. Να βρείτε πόσα αντικείμενα πρέπει να διατεθούν ώστε να επιτευχθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.
- iii. Να βρείτε το μέγιστο κέρδος.
- iv. Πόσα αντικείμενα πρέπει να κατασκευαστούν ώστε η βιομηχανία να παρουσιάζει ζημία;

Στους γονείς οφείλομεν το ζην, στους δε διδασκάλους το ευ ζην.

Μέγας Αλέξανδρος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ έχει μέγιστο το $-\frac{1}{2}$.
2. Όταν ένα τριώνυμο έχει $\Delta=0$, τότε δεν μπορούμε να πούμε αν έχει μέγιστο ή ελάχιστο.
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\gamma x^2+\beta x+\alpha$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\gamma)$.
4. Η συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$ έχει ελάχιστο για $x = -1$.
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 12$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.
6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \lambda x - 9$ έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^2 - 5x + 6$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$.
8. Αν $\Delta=0$ για κάποιο τριώνυμο, τότε το τριώνυμο αυτό είναι τέλειο τετράγωνο.
9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.
10. Από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δευτέρου βαθμού, μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της διακρίνουσας.

11. Μια παραβολή τέμνει πάντα τον $x'x$.

12. Μια παραβολή τέμνει πάντα τον $y'y$.

13. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 4x$ και

$$g(x) = |x^2 - 4x| \text{ είναι ίδιες.}$$

14. Η παραβολή που έχει κορυφή το σημείο $K(2, -\frac{3}{2})$, έχει δύο κοινά σημεία

με τον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 1/2)$ περιγράφεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

15. Η ελάχιστη τιμή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = 2(x - 1)^2 - 2 \text{ είναι το } -2.$$

16. Αν για την παραβολή $f(x) = ax^2 + bx + c$ ισχύει ότι $ac < 0$, τότε η

γραφική της παράσταση έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

17. Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$ διέρχεται

από την κορυφή της παραβολής $x^2 - 6x + 4$.

18. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |-x^2 + 4|$ βρίσκεται

κάτω από τον άξονα $y'y$.

19. Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$ δεν έχει

άξονα συμμετρίας γιατί $\Delta = -8 < 0$.

20. Αν $\Delta < 0$ τότε η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c$

έχει ελάχιστο.

21. Οι γραφικές παραστάσεις των τριωνύμων $f(x) = 2x^2 + x + 1$ και

$$g(x) = x^2 - x - 1 \text{ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.}$$

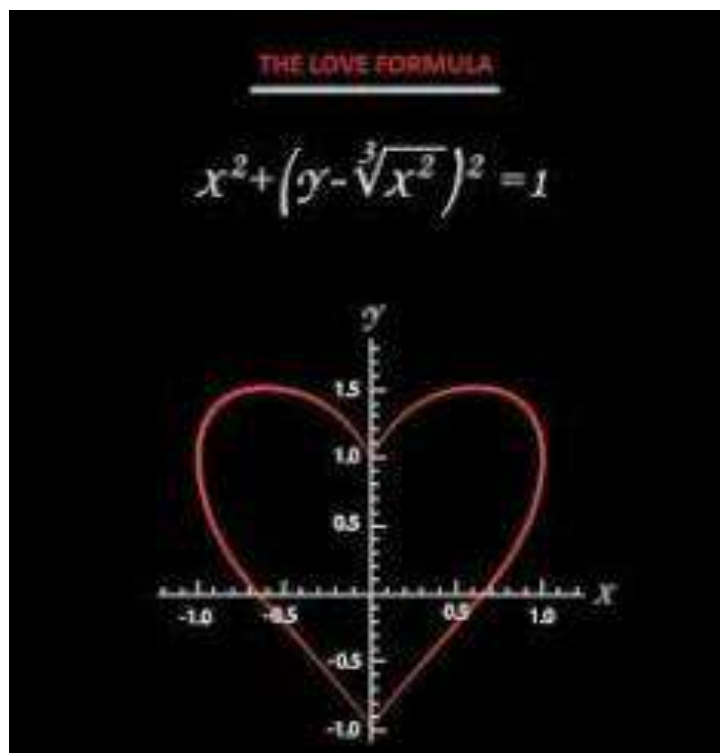
22. Μια παραβολή έχει μέγιστο το $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

23. Αν στην παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι $\alpha < 0$ και $\Delta < 0$ τότε η

γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από τον x' χ.

24. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2(x - 1)^2$ και

$g(x) = -2(x - 1)^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x' χ.



ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- i. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x - 10 < 0$
- ii. Για τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα (i) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mu = 2|x + 5| - 3|x - 2| + 5|x - 4|$
- iii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{\mu + 1}} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt[4]{\mu + 1}} \cdot \sqrt[3]{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \sqrt{3^4 \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt{3^5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3^5}}$

- i. Να βρείτε τον αριθμό α
- ii. Αν οι εξισώσεις $x^3 + 9a = 0$ (1) και $\frac{3\beta^3}{8}x^2 - 1 = 0$ (2) έχουν κοινή λύση τότε :
 - α) Να βρείτε τον αριθμό β
 - β) Να λύσετε την εξίσωση (2)
- iii. Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\alpha\beta - \sqrt{\alpha}} - \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = 0$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

β. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού β ώστε η εξίσωση $x^2 + \beta x + \alpha + 1 = 0$, (1) να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) με $\alpha = 3$ και $\beta > 4$, να υπολογίσετε το β ώστε $d(x_1, x_2) = 3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 2| < 2$

i. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 4$

ii. Να αποδείξετε ότι $x + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 4$

iii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$|x - 2| < 2 \text{ και } x^2 + x - 2 < 0$$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η παράσταση $A(x) = \frac{x^3 - 4x}{|x| - 2}$

i. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ορίζεται η παράσταση $A(x)$

ii. Να αποδείξετε ότι $A(x) = x(|x| + 2)$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 8$ αν $x \geq 2$

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 3)x - (\lambda - 1) = 0$, (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , πραγματικές και άνισες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = \lambda - 3$ και $x_1 \cdot x_2 = 1 - \lambda$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Να δείξετε ότι ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

δ. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$x_1^2 + x_2^2 > 8x_1x_2 + 4.$$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (a - 9)x + a^2 + 3a + 4 = 0$ (1).

α. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η (1) έχει διπλή ρίζα.

β. Για $a = 1$ να λύσετε την εξίσωση (1).

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2(x - 1)^2 - 8|x - 1| + 8 = 0$

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = (x - \lambda)^3 - x^2(x - 3\lambda) - 3x + 1$

α. Να αποδείξετε ότι μπορεί να πάρει την μορφή $A = 3(\lambda^2 - 1)x + 1 - \lambda^3$

β. Για τις διάφορες τιμές του λ , να διερευνήσετε την εξίσωση $A = 0$.

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 3)x + 5 - 4\lambda = 0$ (1)

A) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1)

- i. Να είναι αδύνατη
- ii. Να έχει μια διπλή ρίζα
- iii. Να έχει δύο άνισες ρίζες

B) Αν x_1, x_2 είναι οι δυο άνισες ρίζες την εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του

$\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq -2$

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες
- ii. Για $\lambda = 4$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ όπου x_1, x_2 είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης
- iii. Για $\lambda = 4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = (1 + x_1)^{2017}(1 + x_2)^{2017}$$

ΘΕΜΑ 11

Α) Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

ii. $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{2f(0)} = \sqrt{2}$

Γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{3f(3)}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{5}}{f(0)} + 668 \cdot f(1)$

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 - 4\alpha x - 3\beta$ για την οποία ισχύει

$$f(\alpha) + f(\beta) + 9 = 0.$$

α. Να υπολογίσετε τα α και β .

β. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 3$ να λύσετε την εξίσωση $||2x - 3| + f(0)| + 3f(5) = 0$.

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 - ax^2 + 2$ $x \in \mathbb{R}$ όπου

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f(1) \leq 0$

ΘΕΜΑ 14

Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): y = (|\lambda| - 3)x + \kappa^2 - 4$$

$$(\varepsilon_2): y = 2x + \lambda - \kappa \quad \text{με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ να είναι παράλληλες.

β. Να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε η ευθεία (ε_1) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 5$ να βρείτε το κοινό σημείο A των ευθειών (ε_1) και (ε_3) με $(\varepsilon_3): y = -x + 3$ καθώς και το κοινό σημείο B των ευθειών (ε_2) και (ε_3) .

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = |a + 2|x + 4$ και $\varepsilon_2: y = |2a - 1|x + 15$

- i. Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες να βρείτε το a .

- ii. Για $\alpha = 3$ να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A που η (ε_1) τέμνει τον άξονα $\gamma'\gamma$ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου B που η (ε_2) τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$.

ΘΕΜΑ 16

Έστω οι ευθείες $\varepsilon: y = \lambda(\lambda - 4)x + \lambda$ και $\zeta: y = (2\lambda - 9)x + 9$ είναι παράλληλες.

- i. Να βρείτε τον αριθμό λ
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ζ με τους άξονες και να την σχεδιάσετε.
- iii. Αν A το σημείο της ευθείας ε του οποίου η τεταγμένη είναι κατά 9 μικρότερη από την τετμημένη. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και στη συνέχεια το συμμετρικό του A ως προς:
- α) Τον άξονα $\chi'\chi$
- β) Τον άξονα $\gamma'\gamma$
- γ) Την αρχή των αξόνων
- δ) Την διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και της $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων
- iv. Να βρείτε σημείο B της ζ και σημείο Γ της ε , τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.

ΘΕΜΑ 17

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 2|\lambda|x + \lambda + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$
- ii. Για $\lambda=4$:
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ καθώς και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 2x - 2$.
- v. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = \frac{\sqrt[4]{f(5)}}{\sqrt{f(4)-1}} - \frac{2}{\sqrt{f(0)+1}}$ είναι ρητός.
- vi. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη διχοτόμο της $2^{\text{ης}}$ και της $4^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων;

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+2x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- iv. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{2014^3-4 \cdot 2014}{2014^2+2 \cdot 2014}$.

ΘΕΜΑ 19

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{(2x^2+7x-15)(4x-4)}{8x-12}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 4x - 5$.
- ii. Για ποιες τιμές η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;
- iii. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{f(3)} + \sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)} - 3} = -5(\sqrt{7} + 3)$

ΘΕΜΑ 20

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f έχει :
 - α. θετικές τιμές
 - β. αρνητικές τιμές
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$.

ΘΕΜΑ 21

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση $h(x) = [f(x)]^2 \cdot (4 - x^2)$.
- iii. Αν $h(x) = \frac{2+x}{x-4}$, να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τις $x_1 = h(3)$ και $x_2 = \frac{1}{h(3)}$.

ΘΕΜΑ 22

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-1}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=3$ και $x=0$.
- iii. Αν $g(3) = 3 + \sqrt{2}$ και $g(1) = -1$ να λύσετε την εξίσωση $g(3) + 2\alpha = \sqrt{2} - g(1)$.

ΘΕΜΑ 23

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1, & x \geq 0 \\ |2x - 3|, & x < 0 \end{cases}$

- i. Να βρείτε τις τιμές : $f(0), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- ii. Αν $x \geq 0$, να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 0$.
- iii. Αν $x < 0$, να λύσετε την ανίσωση : $f(x) \leq 5$.

ΘΕΜΑ 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x + 7, x \in \mathbb{R}$

- i. Να λύσετε την εξίσωση : $|f(x)| = 5$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση : $|f(x)| \leq 3$.
- iii. Να βρείτε στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες x' και y' .

- iv. Να βρείτε τα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(3, f(3))$ καθώς και την απόσταση (AB) .

ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x^2-2x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τις τιμές: $f(-1), f(2), f(f(1))$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - x - 6, x \in \mathbb{R}$

- i. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$.
- ii. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -6$ και κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ΘΕΜΑ 27

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}$ και $g(x) = \frac{1}{2}$.

- i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- iii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
- iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g .

ΘΕΜΑ 28

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = 9 - x^2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να λύσετε κάθε μία από τις ανισώσεις $P(x) \geq 0$ και $Q(x) \geq 0$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{P(x)} + \frac{1}{\sqrt{Q(x)}}$$

ΘΕΜΑ 29

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x-2|}}{x-5}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- iv. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{f(3)}{1-f(3)} + \frac{f(3)}{1+f(3)}$.

ΘΕΜΑ 30

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{3x^2-3x-2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) - \{2\} \\ -\frac{1}{x-2}, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) η οποία είναι παράλληλη στην

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ και διέρχεται από το σημείο } A(3, f(3)).$$

iv. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{f(4) - f(0)}{\sqrt{3} - f(3)} - \frac{3 \cdot f(-1)}{\sqrt{3} + f(1)}$$

ΘΕΜΑ 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x \cdot |x-3|}{\sqrt{1-|x|}}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 6x + 1 = -f(x) \cdot \sqrt{1-|x|}$.

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \lambda \cdot x + \kappa$.

i. Να βρείτε τα κ και λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ

να διέρχεται από τα σημεία $A(-1, -3)$ και $B\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

- ii. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = -1$ να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση ϕ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- iii. Να βρείτε την εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς κ, λ του ερωτήματος (i).

ΘΕΜΑ 33

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και $g(x) = |x - 1| - 2$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
- ii. Αν $x \geq 1$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$.

ΘΕΜΑ 34

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

- i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $[f(x)]^2 = [g(x)]^2 - 13$.

ΘΕΜΑ 35

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Αν $|x| < 1$ να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A(x) = [f(x)]^2 + |x - 3| + |x + 2|$$

- iii. Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 7 - 4x$.

ΘΕΜΑ 36

Έστω το σημείο $M(\lambda^2 - 7\lambda + 6, |\lambda - 1| - 3)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το M να ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox .
- ii. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το M να ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο των αξόνων.
- iii. Αν $\lambda = 2$ να βρείτε:
 - α. Το συμμετρικό του M ως προς τον $y'y$.
 - β. Το συμμετρικό του M ως προς τη διχοτόμο $y = x$.
 - γ. Την απόσταση του M από το σημείο $A(8, -7)$.

ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\kappa x - 2}{x - 1}$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $M(2, 0)$.
- γ. Για $\kappa = 1$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

ΘΕΜΑ 38

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

δ. Αν το σημείο $B(|\alpha - 2|, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης, να βρείτε την τιμή του α .

ΘΕΜΑ 39

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x - 3$

α. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$

β. Να λυθεί η ανίσωση $|-x^2 + 3x - 3| > 2x - 3$

ΘΕΜΑ 40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + 2\lambda - 4}$

α. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για $\lambda = 4$:

β. Να δείξετε ότι $f(x) = |x - 2|$.

γ. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -|2x^2 - 5x + 2|$.

