

 νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ		ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ		
	ΤΜΗΜΑ		
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ		
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ	

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v$ με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$.

Μονάδες 5

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται "1-1";

Μονάδες 2

A4. Να θεωρήσετε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση που είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού της είναι και γνησίως μονότονη.

Σ Λ

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.

Σ Λ

γ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

Σ Λ

δ) Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Σ Λ

ε) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$.

B1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 6

B2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

B3. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x) dx$.

Μονάδες 4

B5. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1.**, **B2.**, **B3.** να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη, κοίλη για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \ln 2}{x} = \frac{1}{2}$$

Γ1. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(0, f(0))$

Μονάδες 3

Γ2. Αν F είναι μια παράγουσα της f με $F(0) = 0$, τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(e^x - 1)}{4F(x) - x^2 - 4f(0)x}$

Μονάδες 3

Γ3. α) Αν $\kappa < \lambda$ ν.δ.ο. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο ώστε $3f'(x_0) = 2f'(\kappa) + f'(\lambda)$

Μονάδες 3

β) Ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\kappa, \lambda)$ με $\xi_1 < \xi_2$ ώστε να ισχύει:

$$2(x_0 - \kappa) \cdot f''(\xi_1) = (\lambda - x_0) \cdot f''(\xi_2), \text{ όπου } x_0 \text{ το σημείο του προηγούμενου ερωτήματος}$$

Μονάδες 3

Γ4. α) Ν.δ.ο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 3

β) Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = e^{f(x)-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ν.δ.ο $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση: $(x - 1)^2 = \ln \frac{e^{(x^2+1)+1}}{e^{2x+1}}, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 3

Γ6. Ένα σημείο $A(x, f(x))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f με τέτοιο τρόπο ώστε η τετμημένη του x να μεταβάλλεται με ρυθμό $x'(t) = 9x(t)$ μον/sec, όπου t ο χρόνος. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A την χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = \ln 2$ μον.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και G μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$.

Υποθέτουμε ότι:

- $G(1) = 1 = -f(1) = \frac{f'(1)}{2}$
- $G(x)f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- $\int_1^2 (f^2(x) + G(x)f'(x))dx = \frac{7}{8}$ και $\int_1^2 \left(1 - \frac{f'(x)G(x)}{f^2(x)}\right)dx = -1$

- $f(D_f) = (-\infty, 0)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(2) = -\frac{1}{4}$ και $G(2) = \frac{1}{2}$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε $f^2(\xi) - f'(\xi)G(\xi) = \frac{\pi f^2(\xi)\eta\mu\left(-\frac{\pi\xi}{2}\right)}{2}$

Μονάδες 4

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και f^{-1} γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx + \int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x)dx = \frac{1}{2}$

(Θεωρείστε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής)

Μονάδες 4

γ) Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x)$

(Θεωρείστε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής)

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_2^{101} f(x)dx < \int_3^{100} f(x)dx$

Μονάδες 3

Ευχόμαστε επιτυχία!