

 νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ		Μαθηματικά Γ' Λυκείου Προσανατολισμού
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	Κατάρα Όλγα	
	ΤΜΗΜΑ		
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	ΙΛΙΟΥ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ώρες	

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

A.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

A.3 Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

- Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

- Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx.$$

(Μονάδες 10+5+10)

ΘΕΜΑ Β

- B.1** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.
- B.2** Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 - x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x)$ και τον άξονα $x'x$.
- B.3** Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = e^x$ και $h(x) = x$ καθώς και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 7+9+9)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$.

- Γ.1** Να προσδιοριστεί η εφαπτόμενη ευθεία ε της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Γ.2** Να υπολογιστεί το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία ε .

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = x^2 - x$.

- Γ.3** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_g που διέρχονται από το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
- Γ.4** Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων του ερωτήματος Γ.3, τότε να αποδείξετε ότι η C_g χωρίζει το τρίγωνο MAB σε δύο χωρία όπου ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{2}{1}$.

(Μονάδες 5+7+6+7)

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$ αντιστρέφεται .

Δ.2 Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

Θεωρούμε μία συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ισχύει ότι $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Δ.3 Να βρείτε $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 6+7+12)

Καλή επιτυχία!!!