

	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ		ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ.
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΚΑΤΑΡΑ ΟΛΓΑ	
	ΤΜΗΜΑ	Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ		
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ		

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΥΛΗ: 1.8, 2.1, 2.2, 2.3 (χωρίς την εξίσωση εφαπτομένης)

ΘΕΜΑ Α

A1 Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

να δείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

A2. Πότε μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

A3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Αν μία συνάρτηση f ορίζεται στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$, $f(β) > 0$ και υπάρχει $\xi \in (α, β)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη η f είναι συνεχής στο $[α, β]$.
- Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
- Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα ανοικτό διάστημα $(α, β)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το σύνολο (A, B) , όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

- ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$, τότε η f παίρνει στο $[α, β]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 4} = 1$$

- B1. Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

Μονάδες 7

- B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την $f'(2)$.

Μονάδες 8

- B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(2x) + x^2 - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση.

- Γ1. Αν $1 < f(x) < e$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

- Γ2. Αν $f(0) > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = e^x + x \ln \frac{1}{x} \text{ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.}$$

Μονάδες 7

- Γ3. Αν $f(\alpha) + f(3\alpha) = 4\alpha$, $\alpha > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x) - \alpha}{x - 3\alpha} = \frac{f(x) - 3\alpha}{x - \alpha}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(\alpha, 3\alpha)$.

Μονάδες 7

- Γ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$, ώστε $g(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = xe^x + \ln(xe^x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

- Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

- Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 5

- Δ3. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

- Δ4. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{f^{-1}(x)} + 1) - f^{-1}(x))$$

Μονάδες 5

- Δ5. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = 2\sin x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λαύρα Οργα ♡

