

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ



νέο φροντιστήριο

Το παρόν εγχειρίδιο αποτελεί πόνημα φροντίδας και πολυετούς εμπειρίας της συγγραφικής ομάδας. Η φιλοδοξία μας, είναι να αποτελέσει βιβλίο βάσης και χρήσιμο φροντιστηριακό βοήθημα τόσο για το μαθητή, όσο και για τους εκπαιδευτικούς του ομίλου μας.

Προσπάθειά μας, είναι να οργανώσουμε και να κατηγοριοποιήσουμε τις ασκήσεις που πλαισιώνουν κάθε ενότητα, με στόχο την εξάσκηση, αλλά και την καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών των μαθηματικών από τους υποψηφίους.

Ευχαριστώ τους εξαίρετους μαθηματικούς και συναδέλφους Αγοργιανίτη Ιωάννη, Βερέμη Δημήτριο, Δελενίκα Μαρία, Ζαφείρη Βασίλειο, Κανελλόπουλο Γεώργιο, Μπαρπαρή Νεφέλη, καθώς επίσης και τον ταλαντούχο συνάδελφο Θανόπουλο Γεώργιο για την οργάνωση του υλικού, αλλά και την επεξεργασία, διαμόρφωση και ολοκλήρωση της μορφής του βιβλίου.

ΤΣΙΜΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Ακαδημαϊκός υπεύθυνος

Θετικών Σπουδών Ομίλου Φροντιστηρίων ΝΕΟ.

νέο φροντιστήριο



νέο φροντιστήριο

Περιεχόμενα:

Πραγματικοί αριθμοί – Συναρτήσεις	5
Μονότονες συναρτήσεις – Αντίστροφη συνάρτηση	17
Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	41
Ιδιότητες των ορίων	43
Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	63
Όριο συνάρτησης στο άπειρο	69
Συνέχεια συνάρτησης	79
Ορισμοί – Αντιπαραδείγματα – Αποδείξεις – Βασικές Προτάσεις – ερωτήσεις τύπου Σ – Λ	107

νέο φροντιστήριο



νέο φροντιστήριο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f(x) = 5x^3 - x + 1$
- ii. $f(x) = e^x - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$
- iii. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6}$
- iv. $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 - 4x + 4}$
- v. $f(x) = \frac{2 + 3^x}{x^2 + x + 1}$
- vi. $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 5}{x^3 + 3x^2 - 4}$
- vii. $f(x) = \frac{e^x}{|x| + 1}$
- viii. $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x + 1| - 2}$
- ix. $f(x) = \frac{4^x - \sigma\upsilon\nu x}{|x^2 - 1| - 3}$
- x. $f(x) = \frac{x^2 - 4|x| + 3}{|x| - x}$
- xi. $f(x) = \frac{5|x| + 7|x|}{|x| + x}$
- xii. $f(x) = \frac{x + e^x}{2\eta\mu x - 1}$
- xiii. $f(x) = \frac{5^x - 6^{x+1}}{\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}}$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
- ii. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x - x^2}$
- iii. $f(x) = \sqrt[9]{x^2 - 2x + 1}$
- iv. $f(x) = \sqrt[5]{2x^2 - 3x + 4}$
- v. $f(x) = \sqrt[7]{x^3 - x^2 + x - 1}$
- vi. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{e^x - 1}{e^x - 2}}$
- vii. $f(x) = \sqrt[10]{1 + \eta\mu x}$
- viii. $f(x) = \sqrt[6]{\sigma\upsilon\nu x - 1}$
- ix. $f(x) = \sqrt[8]{6x - x^2 - 9}$
- x. $f(x) = \ln(e^x - 1)$
- xi. $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$
- xii. $f(x) = \log(e^{2x+1} - e^{3x} + e^x - e)$
- xiii. $f(x) = \log(2 - \eta\mu x)$
- xiv. $f(x) = \ln(3 + \sigma\upsilon\nu x)$
- xv. $f(x) = \log(1 - \eta\mu x)$
- xvi. $f(x) = \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x)$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{|x|-3}$
- ii. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[7]{4-x}$
- iii. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-5x+4} + \sqrt[4]{7x-x^2-10}$
- iv. $f(x) = \sqrt[5]{2\ln x - \ln^2 x}$
- v. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x - 2}$
- vi. $f(x) = \sqrt[8]{\ln(3ex^2 + 2ex) - 1}$
- vii. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{4x+5}{3-2x}} - 1$
- viii. $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x-1}}}$
- ix. $f(x) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{x-3}}}{|x|+x}$
- x. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{5x-4-x^2}}{x^2-4x+3}$
- xi. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{25-x^2}}{\sqrt{6-x-x^2}}$
- xii. $f(x) = \ln(\ln x)$
- xiii. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
- xiv. $f(x) = \ln^2 x - \frac{\sqrt{2-e^x}}{e^{3x} + e^{2x} - 2e^x - 2}$
- xv. $f(x) = \sqrt{10 - |x+2|} + \ln(|x|-1)$
- xvi. $f(x) = \frac{3}{2\sin x + 1} + \frac{1}{\varepsilon\phi 2x}$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$
- ii. $f(x) = \frac{\sqrt{\pi e^x - x e^x}}{x^2 + \ln^2 \frac{x}{\pi} + \eta \mu^2 x + \pi^2 - 2\pi x}$
- iii. $f(x) = \frac{\eta \mu(e^x) + \sqrt{e^{3x} - e^{2x}}}{\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{x}}$
- iv. $f(x) = \frac{3}{2\sin x + 1} + \frac{1}{\varepsilon\phi 2x}$
- v. $f(x) = \frac{\varepsilon\phi x + \sigma\phi x}{\eta \mu^2 x - 6\eta \mu x + 8}$
- vi. $f(x) = \frac{2^x + 3^x + 4^x}{\sin^2 x + \sin x - 2} + \ln|x|^5$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - \lambda x^2 + 3}{x^2 - 2\lambda x + 1}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

6. Να βρεθεί για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{8x+12}{4x^2-12\lambda x+(2\lambda+1)^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
7. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α ώστε, να έχει το πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{ax^2 + 4x + a - 3}$
8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε $D_f = \mathbb{R}$
9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1} - \lambda\right)$, όπου $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε $D_f = \mathbb{R}$
10. Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες, όταν:
- $f(x) = x^3 - 7x + 6$
 - $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$
 - $f(x) = e^x + 2$
 - $f(x) = 2\ln(1+x) - 4$
 - $f(x) = \frac{\ln(x^2-4x+4)}{\sqrt{x-1}}$
 - $f(x) = 1 - 2\eta\mu x$
11. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:
- $f(x) = x^3 - 4x$
 - $f(x) = \frac{e^x-1}{x^2-3x+2}$
 - $f(x) = \frac{\ln x+1}{e^x-3}$
 - $f(x) = (|x| - 3)(1 - 2e^x)\ln(x+3)$
12. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g , όταν :
- $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x - 1$
 - $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + x - 1$
 - $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$ και $g(x) = 3x^2 + x - 1$
13. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g ;
- $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = 3x + 4$
 - $f(x) = 1 - x^2$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$
 - $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 + 2x + 2$.
Να βρείτε:
- Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
 - Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g .
15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 6x + 11$ και $g(x) = -\frac{6}{x}$. Να βρείτε:
- Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
 - Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f και C_g .
16. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ και $g(x) = x^2 + \alpha x + 2\beta$, να τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = -1$ και στον άξονα $y'y$.
17. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + e^x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .
18. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 3$ διέρχεται από τα σημεία A(-2,5) και B(1,4).
- Να βρεθούν τα α, β .
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.
19. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις και μετά, από τη γραφική τους παράσταση, να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών σε καθεμία περίπτωση:
- $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -1, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2}, & x > 2 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} \varepsilon \varphi \frac{x}{2}, & -\pi < x \leq 0 \\ \eta \mu x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$.
- Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
 - Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.
 - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

21. Να αποδείξετε ότι είναι ίσες οι συναρτήσεις f, g με τύπους:
- $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ και $g(x) = x + 1$
 - $f(x) = \frac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2-x}$
22. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 2$ και $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ είναι ίσες.
23. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$ και $g(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ είναι ίσες.
24. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g , των οποίων οι τύποι δίνονται παρακάτω είναι ίσες. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f(x) = g(x)$.
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ και $g(x) = |x - 3|$
 - $f(x) = \frac{x^2-4}{|x|-2}$ και $g(x) = |x| + 2$
 - $f(x) = \ln \frac{(x+2)^5}{3-x}$ και $g(x) = 5 \ln(x+2) - \ln(3-x)$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$ και $g(x) = \sqrt{x+5}\sqrt{x+3}$
25. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων είναι ίσα. Αν όχι, να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο μπορεί οι συναρτήσεις να είναι ίσες.
- $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$, $g(x) = |x| - 1$.
 - $f(x) = \ln(x+3) + \ln(x-3)$, $g(x) = \ln(x^2 - 9)$.
26. Να προσδιοριστούν ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{2a^2x+a}{x+1-a}$ και $g(x) = \frac{(3a-1)x+a}{x+a}$ να είναι ίσες.
27. Να προσδιοριστούν ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{\lambda(\lambda x-1)}{x+2-\lambda^2}$ και $g(x) = \frac{(3\lambda-2)x+3\lambda-4}{x+\lambda}$ να είναι ίσες.
28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\lambda+1)x+3}{x+\lambda+2}$ και $g(x) = \frac{(\lambda^2-\kappa)x+\mu-2}{x-\lambda+6}$. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f = g$.

29. Να προσδιοριστούν ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f και g με
 $f(x) = \alpha x + 3$ και $g(x) = \frac{\alpha x^3 + 4\alpha x^2 + 4x + 3}{x^2 + \alpha x + 1}$ να είναι ίσες.
30. Να προσδιοριστούν ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f και g με
 $f(x) = 3 + x + \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ και $g(x) = \frac{2\lambda x^3 + x^2 - \lambda^2 x + 3\lambda}{x^2 - \lambda x + 1}$ να είναι ίσες.
31. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ όπου
 i. $f(x) = x - 1$ και $g(x) = x^2 + 3x + 4$
 ii. $f(x) = \ln \frac{2x}{x+1}$ και $g(x) = \ln(x + 1)$
32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 2}$. Να ορίσετε τις
 συναρτήσεις: $f + g, f \cdot g, \frac{1}{f}$ και $\frac{f}{g}$.
33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ και $g(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 1}$. Να βρεθούν οι
 συναρτήσεις: $f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}, 2f - 3g$.
34. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ και $g(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$. Να βρείτε τις
 συναρτήσεις: $f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, 2f + g$.
35. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ όπου
 i. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \geq 1 \\ x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x, & x \geq 2 \end{cases}$
 ii. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq 2 \\ 2x + 4, & x > 2 \end{cases}$ και $f(x) = \begin{cases} 3x \mp 6, & x > 1 \\ 4 - 2x, & x \leq 1 \end{cases}$
36. Οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και $\forall x \in A$ ισχύει
 $(f + g)(x)[(f + g)(x) - 2] + f(x)(f - g)(x) = g(x)(f - g)(x) + 2(fg)(x) - 2$
 Να δείξετε ότι: $f = g$
37. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , υποσύνολο του $\mathbb{R}$,
 για τις οποίες ισχύει:
 $f(x) \cdot [f(x) + g(x) + 2] \leq g(x) \cdot [f(x) - g(x) - 2] - 2$, για κάθε $x \in A$.
 Να αποδειχθεί ότι: $f = g$.

38. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 $[(f + g)(x)]^2 + 8 \leq f(x) \cdot (g(x) + 4) + g(x) \cdot (f(x) + 4)$, για κάθε $x \in A$.
 Να δείξετε ότι: $f = g$.
39. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 $f(x)[(f + g)(x)] - 4(f + g)(x) \leq g(x)[(f - g)(x)] - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι: $f = g$.
40. Οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και $\forall x \in A$ ισχύει
 $2(f + g)(x)[(f + g)(x) - 2x] \leq [(f + g)(x)]^2 - [(f - g)(x)]^2 - 4x^2$
 Να δείξετε ότι: $f = g$.
41. Να βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις
- $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x - 3$
 - $f(x) = x - x^2 - 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{2x}{x-1}$
 - $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^3 - 1$
 - $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{2x - 1}$
 - $f(x) = 2\ln x + 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = 2^x$ και $g(x) = \sqrt{x - 8^{2000}}$
 - $f(x) = x^2 + 1, x \in [-2, 0]$ και $g(x) = x^2 - 3x, x \in (-1, 5]$
 - $f(x) = 2, x \in [6, +\infty)$ και $g(x) = x + 2$
 - $f(x) = 1, x \in (-\infty, 0)$ και $g(x) = x^2$
 - $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και $g(x) = \sin x$
42. Να βρεθεί αν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
- $f(x) = \frac{x}{x-1}$
 - $f(x) = \ln x$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$
 - $f(x) = \frac{4}{\sqrt{-x-1}}$
43. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, όταν:
- $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \frac{2x+1}{x^2}$
 - $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{6-2x}$
 - $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \sqrt{x+4}$

44. Να βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, όταν:
- $f(x) = \sqrt{-x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$
 - $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$
 - $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(x-1)$
45. Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$, όταν:
- $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = \sqrt{1-|x-3|}$
 - $f(x) = -e^x$ και $g(x) = \ln(x+3)$
46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta x$ και $g(x) = x - 2$, $a, \beta, x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 3x - 2$.
47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x+1}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.
48. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ και $g(x) = \frac{3}{x+2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.
49. Να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g των παρακάτω συναρτήσεων:
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \ln x$
 - $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \ln(e^x + 1)$
 - $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 4 \\ x-2, & x \leq 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
50. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :
- $f(x^2)$
 - $f(\ln x)$
51. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :
- $f(1-x^2)$
 - $f(3-\sqrt{x})$
 - $f(\ln x - 1)$
52. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,1]$ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x-2) + f(\ln x)$

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 9$. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 9]$.
54. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha^2 + \beta\gamma \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\alpha}{\gamma}\right\}$.
55. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 2018x - 2017$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι: $f(1) = 1$.
56. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- $f(3x - 2) = 3f(x) - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο.
57. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 6x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(1) = 1$.
58. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
59. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $(f \circ f \circ f)(x) = x^2 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
60. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta x$ και $g(x) = x - 2$, $a, \beta, x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 3x - 2$.
61. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - ax + \beta - 1$ και $g(x) = x + \beta$, $a, \beta, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα a, β αν είναι γνωστό ότι: $(f \circ g)(x) = x^2 + x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.
62. Αν $f(x) = ax + \beta$, $a \neq 0$, να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $(f \circ f)(x) + f(1 - x) = f(x + 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
63. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
- Αν f, g περιττές συναρτήσεις, τότε η $g \circ f$ είναι περιττή.
 - Αν f άρτια, τότε και $g \circ f$ άρτια.
 - Αν f περιττή και g άρτια, τότε $g \circ f$ άρτια.
 - Αν f περιττή και $g \circ f$ περιττή, τότε g περιττή.

64. Να αποδείξετε ότι:
- Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
 - Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
 - Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(4-x) = x + f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
 - Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x^2 + 3) + e = e^x + f(4x) \forall x \in \mathbb{R}$
 - Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1-x) + f(x) = x^3 + 2 \forall x \in \mathbb{R}$
65. Να εκφραστούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων:
- $f(x) = (x^2 - 5x + 1)^{2017}$
 - $f(x) = \eta\mu^2 x$
 - $f(x) = \eta\mu(x^2 + \sigma\upsilon\nu x)$
 - $f(x) = \eta\mu^2(x^2 + \sigma\upsilon\nu x)$
 - $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^x + 4}$
66. Να εκφράσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων:
- $f(x) = \frac{3-\eta\mu x}{3+\eta\mu x}$
 - $f(x) = \sqrt{1 + (x^2 - 3x)^{2018}}$
 - $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2)$
 - $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$
 - $f(x) = \ln \frac{\eta\mu^2 x + 1}{\eta\mu^4 x + 2}$
 - $f(x) = \ln^2(\eta\mu x)$
67. Να βρεθεί η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:
- $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 5x + 1$ και $g(x) = x + 4$.
 - $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 3$ και $g(x) = 2x - 1$.
 - $(f \circ g)(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 5$ και $g(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.
 - $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}$ και $g(x) = x^2 + 1$.
 - $(f \circ g)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$ και $g(x) = \eta\mu x$.
 - $(f \circ g)(x) = |\eta\mu x|$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.
 - $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 3$ και $g(x) = 2x - 1$.
 - $(f \circ g)(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 5$ και $g(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.
 - $(f \circ g)(x) = \ln x + x$ και $g(x) = \ln x - 2, x > 0$.
 - $(f \circ g)(x) = 3 \ln x - x^2 + 1$ και $g(x) = \ln x + 1, x > 0$.

68. Να βρεθεί η συνάρτηση g , για την οποία ισχύει:
- $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 6x - 2$ και $f(x) = 2x - 4$.
 - $(f \circ g)(x) = 6x^6 - 9x^3 + 3021$ και $f(x) = 3x - 5000$.
 - $(f \circ g)(x) = e^x + x \cdot \eta\mu x$ και $f(x) = x - 1$.
 - $(f \circ g)(x) = 2x + 1$ και $f(x) = e^x$.
 - $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$ και $f(x) = e^x + 3, x \neq 0$.
 - $(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2$ και $f(x) = \ln x - 1, x > 0$.
 - $(f \circ g)(x) = x + 3$ και $f(x) = \ln(x - 1), x > 1$.
 - $(f \circ g)(x) = x + 3$ και $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$.
69. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :
- $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(\ln x + 1) = 2 \ln x + x + 3$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - $f(2x - 5) = 8x^2 - 4x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
70. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ όπου $0 < a \neq 1$
Να αποδείξετε ότι $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
71. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x + \lambda$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha + \beta) \neq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
72. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- $f(0) = 0$.
 - Η f είναι περιττή.
 - $f(x - y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
73. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $f(x + y) = 2f(x) + 2f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- $f(0) = 0$.
 - Η f είναι περιττή.
 - Η f είναι σταθερή.
74. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x + y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- $f(0) = 0$.
 - Η f είναι άρτια.
 - $f(x - y) = f(x) - f(y), x, y \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

75. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
 i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 ii. Η f είναι άρτια.
 iii. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
76. Έστω περιττή συνάρτηση f με $0 \in D_f$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
77. Να βρείτε την περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:
 $(x^2 + 3)f(x) \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
78. Για μια συνάρτηση f ισχύει $(n+1)f(x) + nf(-x) = x^{2n+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 $n \in \mathbb{N}^*$.
 i. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
 iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$.
79. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 \neq \beta^2$ και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :
 $\alpha f(x) + \beta f(-x) = (\alpha + \beta)\eta\mu\chi\sigma\upsilon\eta x, \forall x \in \mathbb{R}$
 i. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
80. Να βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:
 $f(x) + x \leq 3x^2 \leq f(x+1) - 5x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
81. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$
 για κάθε $x > 0$:
 i. Να βρείτε τον τύπο της f
 ii. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- i. $f(x) = 2x^5 - 4$
- ii. $f(x) = \sqrt{3-x} + 2$
- iii. $f(x) = 7e^{2-x} + 3$
- iv. $f(x) = 2 - \ln(x-3)$
- v. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$
- vi. $f(x) = x^2 - 2x - 5$
- vii. $f(x) = 3\sqrt{2-x} - 5$
- viii. $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$
- ix. $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- i. $f(x) = \sqrt{x-3} + 2x^6$
- ii. $f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$
- iii. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x} + 3$
- iv. $f(x) = 3\eta\mu x - 5\sigma\upsilon\nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- v. $f(x) = e^{-2x} - 3x^2 - \sqrt{x-2}$

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

- i. $f(x) = -x^3 - 2x + 4$
- ii. $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x}$
- iii. $f(x) = \ln x + x - 1$
- iv. $f(x) = x^2 - 6x + 8$
- v. $f(x) = 2^x + 3^x - 2^{-x}$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$
- ii. $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x \leq 1 \\ x^{2017} + x, & x > 1 \end{cases}$
- iii. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$
- iv. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x < 0 \\ e^x + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$

5. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
6. i. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση f . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ σταθερός) έχει το πολύ μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της.
 ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα το πολύ σημείο.
 iii. Έστω ότι οι συναρτήσεις φ και h έχουν κοινό πεδίο ορισμού A , $\varphi \uparrow A$ και $h \downarrow A$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_h έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
 iv. Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$g(x-1) + g(x-2) = g(4-x) + g(5-x)$$
7. Να λυθούν οι εξισώσεις:
- $2 \cdot x^3 + 5 \cdot e^x = 5$
 - $\frac{3}{x} = 1 + \ln(x-2)$
 - $e^{5-x} - 1 = \ln(x-4)$
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + x^3 + x = 3$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $e^{5x} + e^{3x} + e^x < 3$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{2-x} - \sqrt{x+7} - x$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $2\sqrt{2-x} - \sqrt{x+7} - x + 5 = 0$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - Να βρείτε το πρόσημο της f .
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$.
1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$.
 3. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 4x$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $2^{1-x} < 6 + 4(x-1)$.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1-x)^{2017} - x^{2017} + 5$.
- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
 - Να λυθεί η ανίσωση: $f[2f(x-1) - 8] > 6$.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2017^x + x^{2017}, x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
 - Να λυθεί η ανίσωση: $2017^{3x-1} - 2017^{x+3} > (x+3)^{2017} - (3x-1)^{2017}$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - a^x, x \in \mathbb{R}, a \in (0,1)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 - Να λύσετε την ανίσωση: $a^x - a^{x^3} > x - x^3$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x, x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση: $\ln^2(x^2 + 4) - \ln^2(x^2 + x + 1) < 0$.
17. Να λυθούν οι εξισώσεις:
- $e^{2-x} = 1 + \ln(x-1)$
 - $7x^3 + \ln x = \frac{5}{x} + 2$
 - $3^{2-x} = \ln(x+2) + 27$
 - $e^{2x} + 5x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 - $e^{x^2} - e^{x^3} = x^3 - x^2$
 - $e^{2x^2+1} - e^{x^2+2} = \ln \frac{x^2+2}{2x^2+1}$
 - $e^{x^5} - e^{x^7} = 2 \ln x$
18. Να λύσετε τις ανισώσεις:
- $3x^5 + 2x^3 + 7x > 12$
 - $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$
 - $e^{x-2} + x^3 > 9$
 - $\ln \frac{x^2+1}{x^2+x+5} < (x^2+x+5)^5 - (x^2+1)^5$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 1, x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) > 7$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^{1-x} + 3^{1-x} - 2, x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λυθούν οι ανισώσεις:

1. $2^{1-x} + 3^{1-x} < 5$.

2. $f(f(x)) < 3$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 10 - 4\ln^3 x, x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(ex) - 5) < 10$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x \in \Delta = (1, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

ii. Για κάθε $\alpha > \beta > 1$ ισχύει $\alpha^\alpha > \beta^\beta$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \ln(x+1), x > -1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{e^2}{\sin \theta + 1} < 2 + \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \varphi^2 \theta}$, για κάθε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln x, x > 0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ ισχύει:

$$e^\beta - e^\alpha > e^{a+\beta} \cdot \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

iii. Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{-(x^2+1)} - e^{-(x^2+x+2)} < \ln(x^2+1) - \ln(x^2+x+2).$$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{2-x} - 1$

i. Να βρείτε την σχετική θέση των C_f και C_g .

- ii. στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln \frac{1-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} < \sqrt{1+\eta\mu x} - \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}.$$

26. Έστω γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα
ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει
$$f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

27. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(3,1)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(1 + f(x)) < 0$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\ln x - \frac{1}{x} + 4\right) < 1$.

28. Θεωρούμε την γνησίως μονότονη συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,e)$ και $B(e,2)$.

- i. Να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii. Να λυθεί η ανίσωση: $f(f(\ln x)) < 2$.

29. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(e^x - x) + f(1 - x) = e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 3) < 0$.

30. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4-x) + f(x+2) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι γνησίως μονότονη. Να λύσετε:

- i. Την εξίσωση $f(x) = 0$
ii. Την ανίσωση $f(x^2 - 6) > 0$

31. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + x^5 + x^7$ είναι γνησίως αύξουσα

- ii. Να λυθεί η ανίσωση: $x^3 + x^5 + x^7 > 3$
iii. Να λυθεί η ανίσωση: $(x^2 - 3)^3 - 8x^3 + (x^2 - 3)^5 - 32x^5 \leq 128x^7 - (x^2 - 3)^7$

32. Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x - g(x)$ τότε:

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x^2} - e > g(x^2) + 2$

33. Έστω $\alpha \in (0, 1)$.

- i. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = a^x - x$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση: $\alpha^{x^2+1} - \alpha^{2x} \geq (x-1)^2$

34. i. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $3^x + 4^x > 5^x$

iii. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln \frac{3^x + 4^x}{5^x} < e^{5^x} - e^{3^x + 4^x}$

35. Έστω οι ορισμένες στο σύνολο A συναρτήσεις f και g . Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν f, g γνησίως αύξουσες στο A τότε: $f + g$ γνησίως αύξουσα στο A .
- ii. Αν f γνησίως αύξουσα στο A και g γνησίως φθίνουσα στο A τότε: $f - g$ γνησίως αύξουσα στο A .
- iii. Αν f γνησίως φθίνουσα στο A και g γνησίως αύξουσα στο A τότε: $f - g$ γνησίως φθίνουσα στο A .
- iv. Αν $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και f, g γνησίως αύξουσες στο A τότε: $f \cdot g$ γνησίως αύξουσα στο A .
- v. Αν $f(x) \leq 0$ και $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in A$ και f, g γνησίως αύξουσες στο A τότε: $f \cdot g$ γνησίως φθίνουσα στο A .

36. i. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Αν οι f και g έχουν ίδιο είδος μονοτονίας τότε $g \circ f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β. Αν οι f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε $g \circ f$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(f(x)) = 2 - x - x^3$

37. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και f γνησίως φθίνουσα στο A .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f^2(x) - 1}{2f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

38. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσες και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{f}{g}$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2)g(x) - f(x)g(x^2) > 0$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $2\ln f^3(x) + \ln g^6(1) = 3\ln g^2(x) + \ln f^6(1)$

39. Έστω άρτια συνάρτηση f και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \alpha < \beta$ τέτοιοι ώστε $[\alpha, \beta] \subseteq D_f$

Να αποδείξετε ότι:

i. Αν f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε f γνησίως φθίνουσα στο $[-\beta, -\alpha]$.

ii. Αν f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε f γνησίως αύξουσα στο $[-\beta, -\alpha]$.

40. Έστω περιττή συνάρτηση f και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \alpha < \beta$ τέτοιοι ώστε $[\alpha, \beta] \subseteq D_f$

Να αποδείξετε ότι:

i. Αν f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε f γνησίως αύξουσα στο $[-\beta, -\alpha]$.

ii. Αν f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε f γνησίως φθίνουσα στο $[-\beta, -\alpha]$.

41. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g(x) = f(x+1) - f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λύσετε την ανίσωση :

$$f(x^4 + 2) - f(x^2 + 2) \leq f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1).$$

42. Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f(5x) > f(3x) + f(7x)$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^3) = f(x^4) + f(x^8)$, $x > 0$.

43. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν για την f ισχύει $\ln(f(x)) + f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in A$, να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.

44. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
 $x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.
45. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο A με $f(x) > 0$ και $f(x) = x - \ln f(x)$ για κάθε $x \in A$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.
46. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύει $x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.
47. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
48. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^5(x) + 5e^{f(x)} = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
49. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^{-x} - x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα.
 ii. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει $(f(x) + x + 1) \cdot e^{f(x)} = 1$. Να αποδείξετε ότι:
 α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα
 β) $f(0) = 0$
50. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει
 $e^{f(x)} + f(x) = x$.
 i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 ii. $f(1) = 0$
 iii. $0 < f(2) < 1$
51. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει $e^{x-f(x)} = f(x)$.
 i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 ii) $f(1) = 1$ και $0 < f(0) < 1$.
52. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x < 0$ να ισχύει $\ln(e^{f(x)} + x) = -x$.
 i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

53. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η C_f είναι κάτω από τη C_g , να αποδείξετε ότι: $(f \circ f)(x) < (g \circ g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
54. Αν f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $(f \circ g)(x) = x, x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση $g(f(x^2 - 3x + 3)) > x$.
55. Έστω οι ορισμένες και γνησίως αύξουσες στο σύνολο A συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι:
- Η συνάρτηση $h = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A
 - Η εξίσωση $f(x) + g(x) = f(x) \cdot g(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα στο A .
56. Έστω γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι:
- $f \circ g \uparrow \mathbb{R}$ και $f \cdot g \downarrow \mathbb{R}$
 - Η εξίσωση $\frac{f(g(x))}{f(x)} = g(x)$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.
57. Έστω συναρτήσεις f και g με $D_f = D_g = \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f \uparrow \mathbb{R}$ και $f(g(x) + \alpha) \leq f(x) \leq f(g(x + \alpha))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της g .
58. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
59. Έστω γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f \circ f = g \circ g$ και $f \circ g = g \circ f$. Να αποδείξετε ότι $f = g$.
60. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(1) = 1$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = xf(x) - 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 - Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) - \ln(e \cdot x) = 0$
 - Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^7) = f(x^5) + f(x^9)$
61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{5^x + 1}$.
- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $(3x+18)^3 - (7x+12)^3 < \frac{5^{7x+12} - 5^{3x+18}}{\sqrt{5^{7x+12} + 1} + \sqrt{5^{3x+18} + 1}}$

62. Να βρεθούν τα ακρότατα και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x+1}}$

ii. $f(x) = \sqrt{x-2}$

iii. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-5}$

iv. $f(x) = e^{2x} - 1$

v. $f(x) = \ln(x-1) + 3$

vi. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x + 5$

vii. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2}$

63. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 5 - 3|x-1|$

ii. $f(x) = 2(x+3)^4 - 7$

iii. $f(x) = 4 - \sqrt{x-1}$

iv. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 9$

v. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

64. i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$ έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2}$ έχει ελάχιστο το $-\sqrt{2}$ και μέγιστο το $\sqrt{2}$.

65. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 5 - 2\ln x, x \in \Delta = [1, e]$

ii. $f(x) = \frac{5}{x+3}, x \in \Delta = [-1, 2)$

66. Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

67. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(A)$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(A) = [2, +\infty)$

- ii. $f(A) = (-5, 7]$
 iii. $f(A) = [-2, 0) \cup [6, +\infty)$

68. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει μέγιστο το 5. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x) = 2 - 3f(x)$.
69. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f έχει μέγιστο και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ έχει μέγιστο.
70. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και έχει ελάχιστο, να αποδείξετε ότι έχει και μέγιστο.
71. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{4f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 .
72. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $g(\xi) = 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = g^2(x) + \frac{1}{g^2(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο ξ .
73. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:
 $2f(x) \leq f(1) + f(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
 i. $f(1) = f(2)$
 ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
74. Μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα $f(x) + x \leq x^2 + 1 \leq f(x+1) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να βρεθεί ο τύπος της f .
 ii. Να βρεθεί το ελάχιστο της f .
75. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $(f(x) - f(y))(x^2 - y^2 - 2x + 2y) \leq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 1 .
76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2$
 i. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0
 ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x^2 + 1} = 3 \sin x - 2$
77. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει ελάχιστο μόνο στο 2 με ελάχιστη τιμή 3 .

- i. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + (x-2)^2 = 3$
- iii. Αν ισχύει: $f(\alpha) + f(\ln \beta - 1) = 6$ να βρείτε τις τιμές των α, β .

78. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = (x-3)^4 + 1$
- iii. Αν ισχύει $f(\alpha) + f(e^\beta) = 2$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

79. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1:

- i. $f(x) = \sqrt{x-1}$
- ii. $f(x) = x^3 + 2x$
- iii. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

80. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1:

- i. $f(x) = x^2 - 9$
- ii. $f(x) = 5x^3 + 2x + 1$
- iii. $f(x) = 3 - \sqrt{7-2x}$
- iv. $f(x) = \sqrt{x+5}$
- v. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- vi. $f(x) = e^{-x} - \ln x$
- vii. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 4$
- viii. $f(x) = 2e^{3-x} - 5$
- ix. $f(x) = x^{12} - x^8 + x^2 + 3$
- x. $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$
- xi. $f(x) = (e^x - 1) \ln(x+2)$
- xii. $f(x) = \ln \frac{1}{x} - 2x^3 - 6x + 8$
- xiii. $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$

81. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι αντιστρέψιμες:

- i. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$
- ii. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 2}$
- iii. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
- iv. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1}$

82. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1:

- i. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 3 \\ \sqrt{x-3} + 1, & x \geq 3 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } f(x) &= \begin{cases} x-2, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases} \\
\text{iii. } f(x) &= \begin{cases} x^3+1, & x \leq 0 \\ 1-\frac{x}{4}, & x > 0 \end{cases} \\
\text{iv. } f(x) &= \begin{cases} -x^2+6x-5, & x \leq 3 \\ \frac{x+5}{2}, & x > 3 \end{cases} \\
\text{v. } f(x) &= \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ -2x+4, & x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

83. Α. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι 1-1. Να αποδείξετε ότι ισχύει η

$$\text{ισοδυναμία: } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 \in D_f)$$

B. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1, τότε και οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι 1-1.
- Αν η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1, τότε και η g είναι 1-1.
- Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1, τότε και η f είναι 1-1.

Γ. Έστω ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1. Να αποδείξετε ότι:

- Η συνάρτηση $h(x) = 5f^3(x) + 2f(x) + 3$ είναι 1-1.
- Η συνάρτηση $\varphi(x) = 2f^5(x) + f^3(x) + 3f(x) + 4e^{f(x)}$ είναι 1-1.

Δ. Να δείξετε ότι αν ισχύει $e^\alpha - e^\beta = \beta^3 - \alpha^3$ τότε: $\alpha = \beta$.

84. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

85. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) - f(x) = x^{2017}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

- Η f αντιστρέφεται.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

86. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = f(x) + x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

- Η f αντιστρέφεται.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

87. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$g(f(x)) = 5x^3 + e^{f(x)} - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

88. Έστω $\beta \neq 0$ και οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$(g \circ g)(x) = \alpha g(x) + \beta f(x^3 + 2004)$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι 1-1 να δειχτεί ότι και η g είναι 1-1.

89. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

90. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(3x) + 1 \leq 2f(x^2 + 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 1 = 2f(x^3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + 1) - f(x^2 - 3x + 2) = e^x + \ln(x + 1) - 1 \text{ για κάθε } x > -1.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

93. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(5 - x) \leq f(5 - x)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 3 - 2e^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f αντιστρέφεται.
- ii. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.
- iii. Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

95. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - 2x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, -1)$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι 1-1.

- ii. Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- iii. Η f είναι περιττή.
- iv. $f(0) = 0$.

97. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f(x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι $1-1$.
- ii. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως φθίνουσα.

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} + x - 2 > 0$

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$$

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x^x + x = 1$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{2x^2+1}{x^2+2} = \frac{1-x^2}{(2x^2+1)(x^2+2)}$.

101. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $e^x = 1 - x^{2017}$.
- ii. $\ln x = 1 - x$
- iii. $e^{2x} + 2x = 2 - e^x$
- iv. $x^{2017} + 2x^{2019} - 3 = 0$
- v. $3^x + x^3 = 1$

102. Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

103. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- i. $f(x^5 + 2) + 3g(x) = g(g(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

- α. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + 2x) \leq f(e^{-x})$.
- β. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $g(e^{3x} + 5x + 2) = g(3 - 2x^3)$.
104. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $5^x - 3^x - 2^x = 2\sqrt{6^x}$.
105. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y \neq 0$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα
- i. Να δειχτεί ότι $f(1) = 0$ (δηλαδή η μοναδική ρίζα είναι η $x_0 = 1$).
- ii. Να δειχτεί ότι η f είναι 1-1.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$.
106. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα
- i. να δείξετε ότι $f(0) = 1$ (δηλαδή ότι η μοναδική ρίζα είναι η $x_0 = 1$.)
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{f(2x+3)}{f(x+1)} = \frac{f(4x+5)}{f(x-2)}$.
107. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ με $x > 0$.
- i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot (x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right]$ στο $[2, +\infty)$.
108. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση των παρακάτω συναρτήσεων (αν υπάρχει):
- i. $f(x) = 1 - \sqrt{1 + e^x}$
- ii. $f(x) = e^{-x} - 1$
- iii. $f(x) = e^{x+1} - 4$
- iv. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{1-x}}$
- v. $f(x) = \frac{x}{x+3}$
- vi. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
- vii. $f(x) = \ln \frac{2x-2}{x+1}$
- viii. $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
109. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση των παρακάτω συναρτήσεων (αν υπάρχει):

$$i. f(x) = x^2 - 2x, x > 1$$

$$iii. f(x) = x^2 - 2x + 5, x \geq 1$$

$$ii. f(x) = x^2 - 6x + 10, x \geq 3$$

$$iv. f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

110. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

111. Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \leq 2 \\ 3 - 5x, & x > 2 \end{cases}.$$

112. i. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ 2x^2 + a, & x \geq 1 \end{cases}$ να είναι αντιστρέψιμη.

ii. Για $a = -2$, να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

113. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) - 2f^3(x) + x - 1 = 0 \text{ και } f(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρεθεί η f^{-1} .

114. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + 2f^3(x) - f(x) + x = 0 \text{ και } f(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε την f^{-1} .

115. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ και $f(\mathfrak{N}) = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\ln f(x) + f(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της.

ii. Να υπολογιστούν τα $f(2)$ και $f(\ln 3 + 4)$.

116. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \ln x$ και $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις g^{-1} και $g^{-1} \circ f$.

117. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 5)$ και $B(2, 4)$.

i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} .

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(x^2) - 3) = 5$.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(e^x + 3) - 3) > 5$.

118. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,6)$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x^2 + 2) - 1) = 3$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(2e^x) + 3) < 3$.
119. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(4\sin x + 2)) = 4$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2x + 2) - 5) > 0$.
120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-2x} - 3x - 2e^2, x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(x - 2e^2) - 1) = 3$.
 - Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(f(x) - 1 - 2e^2) < 0$.
121. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$.
122. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x, x > 0$ αντιστρέφεται.
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) - x = 0$
123. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x, x \in (0, +\infty)$ που έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.
 - Να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{e}{\pi} < \pi - e$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) < f\left(\frac{e}{x}\right)$ για $x > 1$.
124. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \sqrt{x} - 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .
 - Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(e^x) = x$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^x + 2) > x$.

125. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - e^{-x} + 2x$, $x \in (-1, +\infty)$ που έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^x - 2) < 0$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x-1) = x$, $x \in (-1, +\infty)$.
126. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3e^x + x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το $f^{-1}(0)$.
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.
 - Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(1 + f(x) - x) < 1$.
127. Δίνεται αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 6$. Να βρείτε το $f^{-1}(6)$ και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.
128. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x - 9$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $f^{-1}(-5)$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(\ln x) - 3) > 0$.
129. Α. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι:
- Η f αντιστρέφεται.
 - Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.
 - Οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.
- Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{31} + 4x + 4$.
- Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το $f^{-1}(9)$.
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^5 + x - 128$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρείτε τα $f^{-1}(-128)$, $f^{-1}(2)$.
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
131. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2017} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρεθούν τα $f^{-1}(-1)$ και $f^{-1}(-3)$.
 - Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

132. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2017} + e^x + x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
133. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^5 x + 3x - 2, x > 0$.
- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
134. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^3, x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.
- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρείτε αν ορίζεται το $f^{-1}(4)$.
 - Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12, f^{-1}(x) = -2$
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες καθώς και με την ευθεία $y = x$.
 - Να λύσετε την εξίσωση: $(2 - \eta\mu^2 x)^3 = \eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x + \eta\mu x - 2$.
136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-2x} - 3x - 2e^2, x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι αντιστρέφεται.
 - Να λυθεί η εξίσωση: $f(f^{-1}(x - 2e^2) - 1) = 3$.
 - Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(f(x) - 1 - 2e^2) < 0$.
137. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^5 + 2x - 2$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στην συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'O'y'}$.
 - Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .
 - Να λύσετε την εξίσωση: $(f^{-1}(x))^5 + 2f^{-1}(x) = 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x - 2) + x^5 < -2x$.
138. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x + 2) + f(x + 3) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(6 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x) - f(3 - x) < 3$.

139. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0,6)$ και $f(1) = 3$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(4 - x) < f^2(x) - 8$.

140. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9$ και $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(3) = 3$.
- ii. Η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

141. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) \leq 4f(x^2) - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

142. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) + 3 = 4f(x^5)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

143. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq f(x)f(10 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

144. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

145. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- ii. Να υπολογίσετε τα $f(-1)$ και $f(e^2)$.

146. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(f(x)) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii. $f(0) = 0$.
- iii. $f^{-1}(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.

147. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 και περιττή. Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f^{-1} είναι περιττή.

148. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 3f(x) + 5) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln(2 + e^x) + x^3 + 1) = 1$.

149. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- iii. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

150. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) - e^x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $f \uparrow \mathbb{R}$.
- iii. Να βρεθούν οι αριθμοί $f(\ln 2)$, $f(\ln 10)$, $f(\ln(e^3 + e))$.

151. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) = x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$.

152. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = e^x + x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f^3(x) + f(x)) = 0$.

153. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = 2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(1) = 1$.
- ii. Η f αντιστρέφεται.
- iii. Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- iv. $f^{-1}(x) = 2 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

154. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(f(x)) + g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- Η f αντιστρέφεται.
 - Ισχύει $f^{-1}(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
155. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
- $$(f \circ f)(x) - f(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{f(x)-x}{\lambda}\right) = x, x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$.
156. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ να ισχύουν $f(x) > 0$ και $f(f(x)) = xf(x)$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - Η f είναι 1-1
 - $f(1) = 1$
 - Αν $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ τότε $f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
157. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
 - Να αποδείξετε ότι: $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$, να αποδείξετε ότι:
 - Η f είναι 1-1.
 - $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
158. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ να ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$. Να αποδείξετε ότι:
- $f(1) = 0$
 - $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - Αν $f(0, +\infty) = \mathbb{R}$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε:
 - Η f είναι 1-1.
 - $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

159. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) - e^x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

ii. Να δείχτεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

iii. Να βρεθούν οι αριθμοί $f(\ln 2)$, $f(\ln 10)$ και $f(\ln(e^3 + e))$.

iv. Να προσδιοριστεί ο $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε:

α. $f(x_0) = e$

β. $f(x_0) = 3$

160. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 1 = e^{x-f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2 + 1) - f(\sin x) = 0$

161. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία

$$\text{ισχύει: } e^{f(x)} + 2f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{f(2x+3)} - e^{f(x+1)} = x + 2$

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2-x} - e^{x+3} = -2x^2 + 4x + 6$

162. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ για την οποία

$$\text{ισχύει } f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

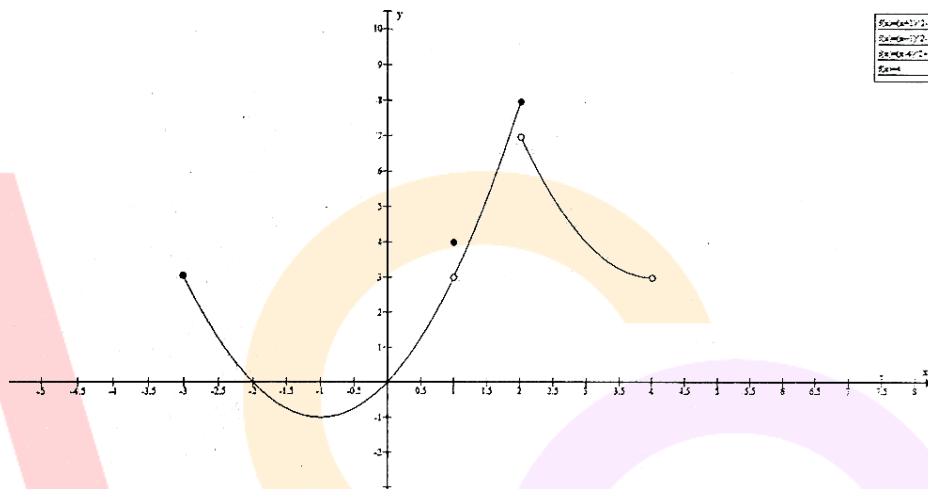
i. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

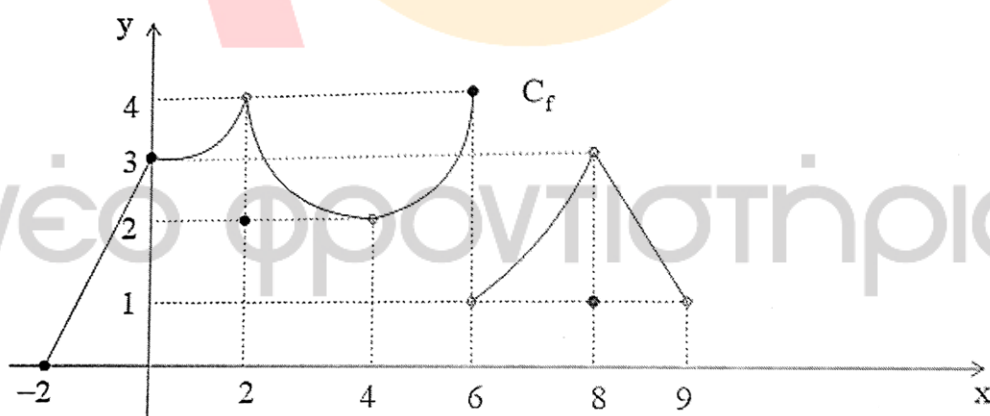
ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:



- i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

2. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ii. Να βρείτε το όριο της f στο x_0 και την τιμή της στο x_0 , εφόσον υπάρχουν, όταν: $x_0 = -2, 0, 2, 4, 6, 8, 9$ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στις περιπτώσεις που τα ζητούμενα δεν υπάρχουν.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-1,1) \\ \frac{1}{x}, & x \notin (-1,1) \end{cases}$

- i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ |x-2|, & x \in [0,3] \\ 5-x, & x > 3 \end{cases}$

- i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$ και $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2\lambda - 1$ να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Ποιο είναι αυτό το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$;

6. Αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \alpha + 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \beta + 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\alpha + 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3\beta - 4$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Νέο Φροντιστήριο

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ όταν :

 - $g(x) = 2 - 3f(x)$
 - $g(x) = [f(x)]^2$
 - $g(x) = \sqrt{4f(x) + 7}$
 - $g(x) = |f(x)|$
 - $g(x) = \frac{3f(x) - 1}{2f(x) + 5}$
 - $g(x) = \sqrt{|f(x) - 3|}$
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) - g(x)] = 7$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 3g(x)] = 5$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
- Να βρείτε τα όρια:

 - $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-1)^{10} (x^2 + x - 1)]$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 + x - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + x^3 + 2x + 1}{|x+3| - 1}$
- Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = 0 = \lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x)g(x)]$ Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$.
- Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim f(x)$ όταν:

 - $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & x > -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1$
 - $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} - 6x, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$
 - $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3}, & x < 1 \\ \sqrt{2x} - 2, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x - 4, & x \geq 2 \end{cases}, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2$

6. Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in [0, 2] \\ x^2 + 1, & x \in (2, 3] \\ 2\alpha x - 3\beta, & x \in (3, 4] \end{cases}$ να έχει όριο στα

σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$.

7. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha}{x + 1}, & x \geq 0 \\ \beta + 2\sqrt{x^2 + 1}, & x < 0 \end{cases}$ να έχει όριο στο $x_0 = 0$ και να διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

8. Για ποια $\alpha \in \mathbb{R}$ η $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \alpha^2 x + 7, & x > 1 \end{cases}$, έχει όριο στο $x_0 = 1$;

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 3x}$

vii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 7x + 2}$

xi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x^2 - 9}$

xii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + x}{x}$

xiii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 1}{x^3 + x + 2}$

10. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3 - x^2}{x^3 - x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 - 3x + 2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 2x^2 + x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 14x + 20}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} + e^x - 3}{e^x - 1}$

11. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{(x+1)^3 - 64}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 5x + 6}$

v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 4}$

vii. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 1}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2}$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 - 3x - 2}{x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 80}$

xi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

xii. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \right)$

12. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x}{x^2 - 9} + \frac{x^2}{9 - x^2} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2} \right)$

13. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x - x + 1}{e^x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x - 2} - \frac{4x}{x^2 - 4} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x - 2}{x + 1} - \frac{3}{x^2 + x} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x + 2}{x + 3} + \frac{4x + 7}{x^2 + x - 6} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{4x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4} \right)$

14. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{vx^{v+1} - (v+1)x^v + 1}{(x-1)^2} \quad v \in \mathbb{N}^*$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\rho - 1}{x^\mu - 1} \quad \rho, \mu \in \mathbb{N}^*$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^k - k}{x - 1} \quad k \in \mathbb{N}^*$

15. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}{x + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{3x+1} - 4}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} + 2x}{x^2 - 1}$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} + x - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x - 1}{\sqrt{x + 2} - x}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} - \sqrt[3]{x} - x - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} - 1}{x^2 - 4}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 2} - 3x - 2}{x^2 - 1}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{x} - 3}$$

16. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2x + 1}{x^4 - 1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)^2}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x^3 - 2x^2} + x}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{5x - 6}}{\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x + 3}}$$

17. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x^3 - 8}}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} + 2x}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{6x + 10}}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x^2}$$

$$\text{xi. } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 2x} - 8}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

$$\text{xii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x + 3} - 1}{\sqrt{5 + x} - 2}$$

$$\text{xiii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - \sqrt{8x + 1}}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{7x - 3}}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$$

$$\text{xiv. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 - x} - x + x^2}{x\sqrt{10 - x} - \sqrt{10 - x} - x + 1}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - \sqrt{4x + 1}}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{xv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{7 + x} - 2\sqrt{7 + x} - x^2 + 5x - 6}{x\sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x + 2} - x^2 + 4}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{x}$$

18. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x + 6} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x + 1}}{x\sqrt{x + 1}}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{3x - 2}}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{26 + x} - 3}{2x - 2}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{8x - 3x}}{x - 2}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}$$

$$\text{xi. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt[6]{x+1} + \sqrt{x+1} - 2}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3\sqrt{x+3} + 5}{x - \sqrt{x+8} + 2}$$

$$\text{xii. } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2-4} - \sqrt[3]{x+4}}{(x-8)^2}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3x+5} - \sqrt[3]{x} - x - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\text{xiii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+24} - \sqrt{x+13} + 1}{x-3}$$

19. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+3x}}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + 2x - \sqrt{1+6x^2}}{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{7+x}}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{\sqrt{7+\sqrt{x^2+3}} - 3}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} \right)$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5x+6} - \sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5x+6} - \sqrt{x^2-x-6}}{x^2-9}$$

$$\text{xi. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x-9} - \sqrt{x^2+3x-18}}{(x^2-9)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

20. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όταν:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}} - 1, & x > 1 \\ \frac{x^3-1}{x-1}, & x < 1 \end{cases} \quad \text{αν, } x_0 = 1$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x-x}}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}, & -1 < x < 0 \end{cases} \quad \text{αν, } x_0 = 0$$

21. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

i. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \leq 2 \\ x^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$ και $x_0 = 0, x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1, & x < -1 \\ 4x - 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$ και $x_0 = -1, x_0 = 2$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{x+2}}, & x \geq 1 \\ \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$

iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x+7}-9}{8x-16}, & x > 2 \\ \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}, & -2 < x < 2 \end{cases}$ και $x_0 = 2$

v. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}, & x > 3 \\ \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}, & -1 < x < 3 \end{cases}$ και $x_0 = 3$

22. Να υπολογίσετε τα $\mu \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \mu^2 x^2 - 3\mu x + 5, & x \leq 2 \\ x^2 + \mu^2 x + 1, & x > 2 \end{cases} \text{ έχει όριο στο } x_0 = 2.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, & 1 < x < 2 \\ \sqrt{x^2+5} + 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x-6}{\sqrt{x-2}-1}, & x > 3 \end{cases}$. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + \beta, & x \leq 4 \\ \frac{64\sqrt{x}-128}{x^2-16}, & x > 4 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2,6)$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

25. Αν $f(x) = \begin{cases} 2ax + 3\beta, & x < 1 \\ \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -8)$.

26. Αν $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 - \beta(x+1) + 3, & x < 3 \\ (2a - 3\beta^2)x + 5\beta^2 + 1, & x \geq 3 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

27. Αν $g(x) = \begin{cases} x^3 - 2ax^2 + \beta x, & x \leq -1 \\ 2ax + 3\beta, & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 3, & x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (a^2 + 3)x^2 + \beta^2, & x \leq 2 \\ (2a - 3\beta)x + 2, & x > 2 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + \beta, & x \leq -1 \\ 3x + 1, & -1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + a, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

30. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x + 2| + |x + 3| - 8}{|x^2 + x| - x - 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 3| + |x - 2| - 1 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9|x + 2| - 3|x - 2|}{x + 1}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 1| - |x - 3|}{x^2 - 4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x - 3| + 10|4 - x| - 10}{x^2 - 9}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4|x - 2| + |x^2 - 7| - 3}{|x| - 5}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| + x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$

x. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - x^2 + x + 2}{\sqrt{x + 2} - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + |x^2 - 4| + x - 2}{x^2 + x - 6}$

xi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9| + |x - 3|}{|x + 2| - 5}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 2x - 3| + |x - 3|}{|x^2 - 4x + 3| + x^2 - 6x + 9}$

xii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^3 - 4x^2 + 5x - 2|}{1 - |x|}$

31. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x| - x}{|x - 3|(x^2 + 9)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{|x + 3|}$

32. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| - |4-x^2| - 6}{|x-2| + 3}$

viii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9|x+2| - 3|x-2|}{x+1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 3}{|x+3|(x-3)}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - x - 2| - |2 - x|}{|4 - x^2|}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - x| - 6}{|x-4| - 1}$

x. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 5x + 6| - |9 - x^2|}{x^2 - 3|x| + |x-3|}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2| - |x+2|}{x}$

xi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$

xii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x-3|}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 3x| + x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

xiii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x + 2| + |x+3| - 8}{|x^2 + x| - x - 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4(x+1)}{|x| - 2}$

xiv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 7x + 10| - |x-5|}{|x^2 - 2x| - |x|}$

33. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ και $f(x) \neq 1$ κοντά στο 3, να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{2 - f(x)}}{\sqrt{f(x)} - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f^2(x) - 3f(x)| - 2}{|f(x)| - 1}$

34. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ και $f(x) \neq 1$ κοντά στο 2, να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 5f(x) - 6}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}{f(x) - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f^2(x) - 4| + |3 - f(x)| - 5}{f^2(x) - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f^2(x) + 8} - 4f(x)}{f(x) - 1}$

35. i. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 + x - 5) = 7$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ii. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3x^2 + x - 2) = -4$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

36. Αν $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 1}{x + 2} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

37. i. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)f(x)) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - 3x + 2} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (g(x)(x^2 - x - 6)) = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) \cdot g(x))$

iii. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 5$ και

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$.

iv. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x+2} - x} = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(\sqrt{x+7} - x - 1)] = \frac{1}{3}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$.

38. Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = 4$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

39. Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) \neq 5$

και $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - x}{x^2 - 5x} = 6$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - x^2 + 20}{x^2 - 3x - 10}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f^2(x) - 7f(x) + 10}{f^3(x) - 5f^2(x) + 2f(x) - 10}$

40. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x - 1} = 2$, να βρείτε το όριο:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2x}$.

41. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να ισχύει:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (\alpha - 2)x - 2\alpha}{x^2 - 4} = 2$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + \alpha x^2 - 9x - 9\alpha}{x^2 - 2x - 3} = 12$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \alpha x - \alpha - 1}{\sqrt{10 - x^2} - 3} = 6$$

42. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} = 2.$$

43. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3 - \beta x^2 - 2}{x - 1}$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$.

44. i. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2 - x + 2) = 3$. Να αποδείξετε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} = 2.$$

ii. Έστω f συνάρτηση τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \sqrt{f(x)}}{f(x) - 1} = 2$, να υπολογίσετε τα

$$\text{όρια: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(x) + x - 1}{x^2 f(x) - f(x)}.$$

45. Αν για συνάρτηση $f: (3, 4) \cup (4, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)f(x) - x^2 + 16}{2 - \sqrt{x}} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

46. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 5x + 6} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3x}{x - 3}$.

47. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2} = 1$ να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 8}{\sqrt{f(x)} + 12 - 2x}.$$

48. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3\alpha x + \beta - 4}{3x - 9} = 1$.

49. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\alpha x^2 + 3\beta x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \beta^2 + 5$.

50. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1}, & x > 1 \\ \frac{\beta x^3 + \gamma x^2 - 1}{x^3 - 1}, & x < 1 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

51. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + (\alpha + 1)x - 2\alpha - 1}{x^2 - 1} = 4$.

52. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha^2 x^2 - (\alpha^2 + 1)x - 2\alpha^2 + 2}{x^2 - 5x + 6} = -2$.

53. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι:
 $3x^2 + 5x - 7 \leq f(x) - 4 \leq x^3 + 6x^2 - 4x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

54. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν:

i. $x^2 - 2x \leq f(x) \leq x^3 - x^2 - x$, $x > 0$ και $x_0 = 1$

ii. $3x - x^2 \leq f(x) \leq 3x + x^2$ και $x_0 = 0$

55. Έστω συνάρτηση f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ώστε $(f(x) - 2x - 1)^2 \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

56. Αν $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \leq f(x) \leq \frac{4-x}{x^2-12x+32}$, για κάθε $x \in (3,4) \cup (4,5)$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

57. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\frac{\sqrt{x^2+6x+9}-5}{x^2-4} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2x}-2}{2x-4}$, $x \in (1,2) \cup (2,3)$. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

58. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x - x^3 \leq g(x) \leq x + x^3$, να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.
59. Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης f στην αντίστοιχη θέση x_0 , όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
- $x^2 + 7x - 16 \leq (x - 3)f(x) \leq 3x^2 - 7x + 4$ και $x_0 = 2$.
 - $x^3 - x \leq (x - 1)f(x) \leq x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ και $x_0 = 1$.
60. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $4x \leq f(x) + 4 \leq x^2 + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- Την τιμή $f(2)$.
 - Το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
 - Το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
61. Αν $x^2 + 2x \leq f(x) \leq 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$.
62. Αν $6\sqrt{x} - 6 \leq f(x) \leq x + 3$ για κάθε $x > 0$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9}$.
63. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $|f(x) - g(x)| \leq |x^2 g(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
64. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2$, να υπολογιστούν τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 5} - 3}{x^2 - 4}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x^2 - 5x + 6}$
65. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $|(x - 1)g(x) - x^3 + 1| \leq (x - 1)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
66. Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $|h(x) - 1| \leq |x^2 + x|$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

67. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $|(x+1)f(x) - x^2 - 5x - 4| \leq x^2 + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το
 όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
68. Αν $x^2 + 4x \leq f(x) \leq 3x^2 + 2$ για κάθε $x > -3$, να υπολογιστούν τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+4}-3}{\sqrt{2f(x)-6}-2}$
69. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) - 4f(x) \leq x - 4$, να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.
70. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} [f^2(x) + g^2(x) - 4f(x) - 6g(x)] = -13$, να υπολογιστούν τα
 όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
71. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) + g^2(x) + 6f(x) - 8g(x)] = -25$, να υπολογιστούν τα
 όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
72. Να βρείτε τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{3x+1}-1}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 3}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{7-2x} + \sqrt[3]{7-2x} - 2}{\sqrt[6]{7-2x} - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x}}$
73. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x+3) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
74. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x)}{f(x)} = \lambda$, $\lambda > 0$. Να
 βρείτε τον αριθμό λ .

75. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$. Να αποδείξετε ότι:
- Αν η f είναι άρτια, τότε $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lambda$.
 - Αν η f είναι περιττή, τότε $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -\lambda$.
76. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + x^2 - 2) = 2$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (αν υπάρχει).
77. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) + x + \sqrt{x^2 + 9}) = 2$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ (αν υπάρχει).
78. i. Αν η f είναι άρτια ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \left[f(x) + \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right]$.
- ii. Αν η f είναι περιττή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x-1) - f(1-x)]$.
79. Αν $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 1$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1)$.
80. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x}$.
81. Έστω η συνάρτηση f , τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει,
 $f(x) + f(x+3) = x^2 - x + 1$. Αν $\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + 4x - 3) = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
82. Να υπολογιστούν τα όρια: (αν υπάρχουν).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + \eta\mu x} - 3}{\sqrt{x+1} - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} - 1}{\eta\mu^2 x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2x^2 - x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \varepsilon\varphi x}{x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{3\eta\mu x + x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - 2\eta\mu x}{x^2}$

$$x. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\eta\mu^2 x}$$

83. Να υπολογιστούν τα όρια: (αν υπάρχουν).

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\eta\mu x} - \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{2\eta\mu x+1}-1}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x + x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$v. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x} \right)$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \right)$$

$$vi. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu 4x} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1}$$

84. Να βρείτε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$$

$$vi. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x - \eta\mu 5x}{x}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{3x^2}$$

$$vii. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1) + \eta\mu(x^2+x-2)}{x^2+x-2}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$$

$$viii. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \right)$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \eta\mu 3x}{x + \eta\mu 2x}$$

$$ix. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} - 1}{\eta\mu x}$$

$$v. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+4}-2}$$

85. Να βρείτε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\varepsilon\varphi 3x}$$

$$vii. \lim_{x \rightarrow 0} \left[2x \cdot \eta\mu \left(\frac{2}{x^3} \right) - 3x \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{3}{x^4} \right) \right]$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^3}}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}$$

$$viii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\varepsilon\varphi 2x}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x^2-5x+6}$$

$$ix. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{x^3}$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\sigma\upsilon\nu x} - 2}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1}$$

$$x. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 5x}{x + \eta\mu 2x}$$

$$v. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sigma\upsilon\nu \pi x - 1}{x - 2}$$

$$xi. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}$$

$$vi. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x + \eta\mu x| + |x - \eta\mu x|}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$xii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu x}{3x + \eta\mu x}$$

$$xiii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+9}-3}$$

86. Να βρείτε τα όρια:

- | | |
|---|--|
| i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\eta\mu\pi x}$ | vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\eta\mu x} - \sqrt{2-\eta\mu x}}{x}$ |
| ii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(x-\pi)^2}$ | viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\epsilon\phi x + 1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x\eta\mu x}$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ \eta\mu x }{x}$ | ix. $\lim_{x \rightarrow 3} \left[(x^2 - 3x) \cdot \eta\mu \left(\frac{2x+5}{x-3} \right) \right]$ |
| iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{3x^2 - 2x}$ | x. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{3}{x} \right) \right]$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x^2-7x+12}$ | xi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\epsilon\phi x)}$ |
| vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{4x^2+3x}$ | |

87. Να δείξετε ότι:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x + \eta\mu x}{x} = 2 \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{x^3} = -\frac{1}{2} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - \epsilon\phi^2 x}{x^4} = -1$$

88. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}$ και να το βρείτε.

89. i. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - 2x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ii. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iii. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} = 0.$

90. Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x} \right) \quad \text{v. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2} \eta\mu \frac{x^2+1}{x}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \eta\mu \frac{x}{x-1}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-x} \eta\mu \frac{3x}{x-1}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x}{x}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - 2\eta\mu x}{x^2}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \epsilon\phi x}{x^2}$$

91. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)}{x}, a \in \mathbb{R}^*.$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + f(-x) \cdot \eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x - 2x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x) + f(3x)}{x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu 3x)}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) \cdot f(5x) \cdot f(7x)}{x^3}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sigma\upsilon\nu 5x - 1)}{x}$

92. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7}-3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt[3]{(1-\eta\mu x)^2}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} (4-x^2) \varepsilon\varphi \frac{\pi x}{4}$

93. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\eta\mu x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

94. Να υπολογιστούν τα όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{\eta\mu 2x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 3x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 3x}{\varepsilon\varphi x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 2x - \varepsilon\varphi x}{x}$

95. Να υπολογιστούν τα όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\sqrt{x^2+x+1}-1)}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^2-x)}{\eta\mu(\sqrt{x^2+3}-2)}$

96. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu 3x}{x^3 + x} = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

97. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2-\eta\mu x}{x^2+x} = 3$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x}.$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5-3f(x)|-1}{x^2-x}.$

98. Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού $(0,4) \cup (4, +\infty)$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + \eta\mu \frac{\pi(x-4)}{2} - 4}{\sqrt{x}-2} = \frac{\pi}{2}.$$

Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x).$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-4}{x-4}.$

99. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \left(x+1 - |f(x)| + |x^2-4| \eta\mu \frac{1}{x-2} \right) = 3$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.$

100. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^\nu \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{x} \right), \nu \in \mathbb{N}^*$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

101. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x^2 f(x) - \eta\mu^2 2x| \leq x^4$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta\mu 3x}{x + \eta\mu x}$

102. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $2x\eta\mu x + f^2(x) \leq 2xf(x) + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

103. Αν $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$

104. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} \leq 1 + xf(x) \leq x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x^3} + \frac{x}{2} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

105. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$4x\sqrt{x^2 + 3} \leq (x-1)f(x) + 8x \leq 5x^2 + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + \eta\mu\pi x}{x^2 - 3x + 2}.$

106. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για την συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{4x-1} \left[5 - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{4x-1}\right) \right] + \sqrt{2}\alpha\sigma\upsilon\nu(\pi x) + \beta \quad \text{να ισχύει: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = 4$$

και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το $A(1,5)$.

107. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu^2 \frac{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)}{x} \sigma\upsilon\nu^3 \frac{\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 \sigma\upsilon\nu^3 \frac{x}{x-2} - 5x \sigma\upsilon\nu^3 \frac{x}{x-2} + 6 \sigma\upsilon\nu^3 \frac{x}{x-2} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^2 - 4x + 3)^8 \eta\mu^5 \frac{x+1}{x-1} \sigma\upsilon\nu^{16} \frac{x+1}{x-1} \right]$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \eta\mu^2 \frac{1}{x} - 3x^2 \sigma\upsilon\nu^3 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2} - 7x \eta\mu^8 \frac{x^2 - 1}{x^3} \right)$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x^5 \eta\mu \frac{1}{x} - 3x^4 \eta\mu \frac{2}{x} + 4x^3 \eta\mu \frac{3}{x} - 5x^2 \eta\mu \frac{4}{x} + 6x \eta\mu \frac{5}{x} \sigma\upsilon\nu \frac{6}{x} \right)$

108. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4a + 3$ και $xf(x) \geq \eta\mu 3x + 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

109. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) \cdot \eta\mu 2x \leq x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{5}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf^3(x) + \eta\mu 2x}{x^2 + \eta\mu 2x}$



νέο φροντιστήριο

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- | | |
|--|--|
| i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{(x^2-1)(x-1)}$ | ix. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^3-3x^2-9x+27}$ |
| ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x^3+10x^2+25x}$ | x. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5x-6}{x^4+4x^3+4x^2}$ | xi. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x}{x-3} - \frac{3}{x^2-7x+12} \right)$ |
| iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \left \frac{x^2+5x-6}{x^4+4x^3+4x^2} \right $ | xii. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x-3} - \frac{2x^2-3}{x^2-5x+6} \right)$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x-8}{x^4+5x^3+6x^2-4x-8}$ | xiii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+1}{ x (x+2)}$ |
| vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{(x^2-3x)(x^2-2x+1)}$ | xiv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x-1 +2x}{ x-2 (x+2)}$ |
| vii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-7x-6}{x^3-6x^2+9x}$ | xv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ x^2-1 +x-1}{ x-2 (x-3)}$ |
| viii. $\lim_{x \rightarrow 3} \left \frac{x^3-7x-6}{x^3-6x^2+9x} \right $ | |

2. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- | | |
|---|---|
| i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{ x }$ | vi. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4}{x\sqrt{x-3} - 9\sqrt{x} + 27}$ |
| ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x-5}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ | vii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-2}}{x-2}$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-5}{\sqrt{x^3-2x^2+x}}$ | viii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5x+6} - \sqrt{x^2-x-6}}{x^2-9}$ |
| iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-5}{\sqrt{x^2+4} - 2}$ | |
| v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-5}{\sqrt{x^2+5} - \sqrt{5-x^2}}$ | |

3. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- | | |
|---|--|
| i. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\eta\mu x}$ | vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\eta\mu x}$ |
| ii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ | vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x)}{x x }$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3-x}{1-\eta\mu x}$ | viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{ x \eta\mu x}$ |
| iv. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{5-2x}{\sigma\upsilon\nu x}$ | ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x }{ x ^3}$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}$ | x. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-2x}{\eta\mu x - x}$ |
| | xi. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - x\eta\mu \frac{1}{x} \right)$ |

$$\text{xii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\eta\mu^2 \frac{1}{x}}$$

$$\text{xiv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^3 \eta\mu x}$$

$$\text{xiii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

4. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-2)^6 + \sqrt{x^2+3}}{x+5}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|2x-5| + x^2 - 5x - 1}{3x^2 - 2x - 3}$$

5. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \eta\mu \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{|x+2|} - \sigma\upsilon\nu^3 \frac{x^2+x+1}{x^2-4} \right)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\eta\mu^8 \frac{x^2+3}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^4} \right)$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\sigma\upsilon\nu^9 \frac{x^3+64}{x^3-64} - \frac{1}{|x-4|^5} \right)$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{1}{x+5} - \eta\mu \left(\sigma\upsilon\nu \frac{x}{x^2-25} \right) \right)$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow -6} \left(\left(\sigma\upsilon\nu^2 \left(\eta\mu^9 \frac{x-6}{x+6} \right) \right) \left(-\frac{1}{(x+6)^3} \right) \right)$$

6. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν η f είναι άρτια, τότε $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lambda$.

ii. Αν η f είναι περιττή, τότε $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -\lambda$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\kappa x^3 + \lambda x^2 + \mu}{x-2}$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, όταν $8\kappa + 4\lambda + \mu = 0$.

8. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να εξεταστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-\lambda}{(x-1)^2}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \lambda}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - \lambda}{|x-1|}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3\lambda x - \lambda^2}{x - 2\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda - x - 2}{x\eta\mu x}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda}{(x-2)(\sqrt{x}+7-3)}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - 5x + \lambda^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{a^2 - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$, όπου $a \in \mathbb{R}^*$. Να μελετηθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ όταν το a διατρέχει το $\mathbb{R}^*$.

10. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να μελετηθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^2 + 2\lambda \mu x - \mu^2}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda \sin x + 2\lambda \mu x - \mu}{2x}$

11. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{|x-1|}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

12. Να βρεθεί ο λ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + \lambda x + 2}{(x-1)^2} = L, L \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρεθεί το L .

13. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3\alpha x + \beta - 4}{3x - 9} = 1$

14. Να υπολογίσετε τα $\mu \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \mu^2 x^2 - 3\mu x + 5, & x \leq 2 \\ x^2 + \mu^2 x + 1, & x > 2 \end{cases} \text{ έχει όριο στο } x_0 = 2.$$

15. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\alpha x^2 + 3\beta x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \beta^2 + 5$

16. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 - \beta(x+1) + 3, & x < 3 \\ (2\alpha - 3\beta^2)x + 5\beta^2 + 1, & x \geq 3 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}, & 1 < x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 5} + 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x - 6}{\sqrt{x - 2} - 1}, & x > 3 \end{cases}$. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$.

18. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε:

i. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \beta}{x^2 + 3x + 2} = 2$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha|1-x^2| + \beta|9-x^2| - 3x - 7}{x^2 - 4} = -\frac{7}{4}$

19. Αν $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 3\beta, & x < 1 \\ \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -8)$.
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 4 \\ \frac{64\sqrt{x}-128}{x^2-16}, & x > 4 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, 6)$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

21. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|--|
| i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x-2 - 4-x^2 - 6}{ x-2 + 3}$ | viii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9 x+2 - 3 x-2 }{x+1}$ |
| ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2+3}{ x+3 (x-3)}$ | ix. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x^2-x-2 - 2-x }{ 4-x^2 }$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ x^2-x -6}{ x-4 -1}$ | x. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ x^2-5x+6 - 9-x^2 }{x^2-3 x + x-3 }$ |
| iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x-2 - x+2 }{x}$ | xi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{ x -1}$ | xii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{ x-3 }$ |
| vi. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{ x^2-3x + x^2 - 4x + 3}{x^2-9}$ | xiii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ x^2+x+2 + x+3 - 8}{ x^2+x - x - 1}$ |
| vii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4(x+1)}{ x -2}$ | xiv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ x^2-7x+10 - x-5 }{ x^2-2x - x }$ |

22. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(a-1)|x-3| + (x^2-9)}{x-3}.$$

23. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x^2 - x}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \text{ στο } x_0 = 0.$$

24. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ αν:

- $\lim_{x \rightarrow -1} [xf(x) + 2] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{xf(x)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2-2} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)(x^2-2)] = +\infty$

25. Αν για τις συναρτήσεις f και g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{x+4} - 2)g(x)] = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))$.
26. Αν $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-1}{x+2} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
27. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ αν $g(x) = \frac{|3f(x)-17|}{(f(x))^2-2}$.
28. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x^2-1)}{x-2} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{g(x)(x-1)} = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.
29. Αν για τη συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)-1}{x^2+x-2}$.
30. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu 2x}{x^2-x} = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.
31. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+x}{x-1} = 2$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$.
32. Έστω άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x)$.
33. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-\alpha^2 f(\alpha x)}{x}$ (αν υπάρχει).
34. Έστω $\alpha < 0$ και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+\alpha)}{x^2+\alpha x} = -\infty$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x+\alpha)f(x)}{x^3-\alpha x^2} = -\infty$.

35. Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) > g(x) > 0$. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} = 0$ να αποδείξετε ότι:
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^2(x) + g^2(x) + f^2(x) * g^2(x)} = 0$
36. Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f(x) + 3g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$
37. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x)}{f(x)} = \lambda, \lambda > 0$. Να βρείτε τον αριθμό λ .
38. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη σε περιοχή του 0, τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 f(x) + \eta \mu \frac{1}{x} \right) = -\infty$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
39. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x+3) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
40. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(x) \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Νέο Φροντιστήριο

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

1. Να βρείτε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2 + x - 1)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 4x^3 - 7x + 8)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 7x^2 - 5x + 6)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 5x^4 + 7x^3 - 8)$
- v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 7x - 8}{5x^3 - 6x^2 + 9x - 5}$
- vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x^3 - 6x^2 + 9}{-6x^3 + 8x - 12}$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 7x - 8}{2x^2 - 8x + 4}$
- viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 7}{x^2 + x + 3}$
- ix. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x^3 - 6x + 8}{x^2 + x + 1}$
- x. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 6x + 7}{5x^2 + 2x - 3}$
- xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{2x^2 + 7x + 8}$
- xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x + 7}{-x^3 + 8x^2 - 7x + 6}$
- xiii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x+3} - \frac{5x^3}{x-2} \right)$
- xiv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^2 + 3x - \frac{3x^2 + 5}{x-1} \right)$
- xv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - 3 - \frac{x^3 + 7x - 2}{x^2 + 1} \right)$
- xvi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4 + 5x + 7}{x^3 + 1} + \frac{x^2 + 3}{x-1} \right)$

2. Να βρείτε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + 6x|}{3x^2 + x + 4}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1 - x^2| - |3x + 5|}{2 - |x^2 - x - 2|}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 + x^2 - 2| - |5 - 2x|}{|x^4 + 6x - 5| + 3x + 4}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x^3 + x^2 - x + 5| - |x^2 - 5x - 1|}{|x^3 + x - 2| + |7 - x|}$

3. Να βρείτε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 6x + 5}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - 6x + 2}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 3}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{x^2 - x})$
- v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 2x + 4} + 3x)$
- vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3x)$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 + 6})$
- viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
- ix. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x + 2}{x + 1}$
- x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - x + 4}{x + 2}$
- xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{16x^4 + 3} - \sqrt[5]{x^3 + 2}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 4}}$
- xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 2} - \sqrt[4]{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[5]{x^4 - 3}}$
- xiii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 7}}$
- xiv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5}}{x + 2}$
- xv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

4. Να βρείτε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 4 - \sqrt{x^2 + 3x + 5})$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 3})$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + 1} - x)x]$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + 15x + 3} + 5x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 5x + 10})$
- vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5} - \sqrt{4x^2 + 3x}}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$
- viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$
- ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 2x})$
- x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})$
- xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x} - 3x + 2)$

5. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\lambda x^3 + (2 - \lambda)x + 2]$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda^2 + \lambda)x^2 + (\lambda + 1)x + 1]$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha^2 - 4)x^3 + (\alpha - 2)x^2 - 2\alpha x + 1]$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\eta\mu\lambda - \lambda)x^3 + \lambda x^2 - 5x + 7]$

6. Να μελετηθούν τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu + 2)x^3 - \mu x + 4}{(\mu - 1)x^2 + 3x + 2}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\mu^2 - 4)x^3 + (\mu + 2)x^2 + (\mu + 2)^2 x + 2}{(\mu^2 - 1)x^2 + (\mu - 1)x - 5}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha^2 - 4)x^3 + (\alpha - 2)x^2 - 2\alpha x + 1]$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 + 2\lambda - 8)x^3 + (\lambda - 2)x^2 - 3}{x^2 + (\lambda + 4)x - 1}$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha^2 - 1)x^3 + (\alpha + 1)x^2 + 1}{(\alpha - \alpha^2)x^2 + (\alpha + 2)x + 2}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{(\mu - 1)x^3 + (\mu^2 - 1)x^2 + (\mu + 1)x + 2}{\mu x^2 + 2x + \mu}}$$

7. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ να μελετηθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta \mu \alpha + 2x - \eta \mu \alpha}{x^2 + 2x \eta \mu \alpha + 1}$

8. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 \sigma \upsilon \nu \varphi + (1 + \eta \mu \omega)x^2 - 2}{x \eta \mu \omega + 1}$, όπου $\omega, \varphi \in (0, \pi)$ Να

προσδιοριστούν οι ω, φ ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

9. Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες, όταν:

i. $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 4x + 4)}{\sqrt{x - 1}}$

ii. $f(x) = 1 - 2\eta \mu x$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

ii. Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g .

11. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g , όταν :

i. $f(x) = x - 3$ και $g(x) = \sqrt{x - 1}$

ii. $f(x) = \ln(e^{2x} + 2)$ και $g(x) = x + \ln 3$

12. Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + ax)$$

13. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{9x^2 + x + 1} - ax - \beta) = -1.$$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^3+ax^2-2}{2x^2+1}$, $g(x) = \frac{x^2+\beta x-1}{2x+3}$. Έστω λ το κοινό όριο των συναρτήσεων $\frac{f(x)}{x}$, $\frac{g(x)}{x}$ όταν $x \rightarrow +\infty$. Να υπολογιστούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \lambda x) = 1.$$

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 \eta \mu \theta + 2x - 1} - x + 2 \sigma \nu \nu \varphi$, $\theta, \varphi \in (0, \pi)$.

- Να αιτιολογήσετε γιατί έχει νόημα να μιλάμε για $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, να προσδιορίσετε τα θ, φ .

16. Να προσδιοριστούν οι $\omega, \varphi \in (0, 2\pi)$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x \cdot \eta \mu x - \sigma \nu \nu \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

17. Να προσδιοριστούν οι $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ και $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\frac{x^2}{2} \eta \mu^2 \alpha + 2x + 1} - \frac{x}{2} + 2 \sigma \nu \nu \beta) = 1.$$

18. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$|(2 + x^4)f(x) - 3x^4| \leq x^2 + 1, \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)+2x-3}{x+5} = 7$. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 f(x) + x^2 - 4}{xf(x) + 3x + 1}$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x^2 - 4}{f(x) + x + 2}.$$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)(f(x) - 2x) = x^2(x^2 - 2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και η } C_f \text{ βρίσκεται πάνω από}$$

την ευθεία $y = x$. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x).$$

22. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$$

23. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 3x + 2}$ για την οποία

$$\text{ισχύουν } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

i. Να βρείτε το $P(x)$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x)$

24. Δίνονται οι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^4(x) + g^4(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0.$$

25. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3\eta\mu x}{2x + \eta\mu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 - 2x^4 + x\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x)$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x}$

26. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu x}{x^2 + 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 2} \sigma\upsilon\nu 5x \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu^2 3x}{x^2 - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{5 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 + 2}{x^2 + 3} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\sqrt{4 + x^2} - 2) \eta\mu \frac{2}{x} \right]$

27. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{2}{x^2} \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^2 + \eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x})$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \eta\mu x)$

ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x})$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 - \sigma\upsilon\nu x}$

xi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x+1}{x^2+1} \cdot \sigma\upsilon\nu x)$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+2} \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

28. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{3x-2}{x^2+5}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\eta\mu \frac{3}{x}]$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x\eta\mu(\sqrt{x^2+1} - x)]$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{2}{x^4} \eta\mu \frac{1}{x})$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - 1)]$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 \eta\mu \frac{x^2}{x^4+1})$

29. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^5-3x+2}{x^v} \eta\mu \frac{1}{x^2})$ για τις διάφορες ακέραιες τιμές του ν με $v \geq -2$.

30. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq x^3 + 2\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

31. Αν για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)| \leq x$ για κάθε $x > 0$, να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)\eta\mu \frac{\pi}{x^2})$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(\frac{1}{x^2}))$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 2$. Να βρείτε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|1 - f^3(x)| + 3}{f(x) + 6}$

33. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 1}. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot \eta \mu \frac{2}{x}]$

34. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cdot \eta \mu^3(x^2) - 3 \cdot \sigma \nu^2 \frac{1}{x}}{x^5}, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} \cdot \eta \mu^2 \frac{2}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2 \cdot \sigma \nu^5(x^2)}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} \cdot \eta \mu \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

35. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 2^{x+2}}{4^{x+1} + 3^x}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{3x} - e^x}{2^x + e^x}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x} + 3^{2x+1} + 5^x}{4^{2x} + 3 \cdot 5^{x-1} + 6^{x+1}}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{2x+1} - 7^{x-1} + 3^{3x+2}}{3^{2x-1} + 4^{3x+1} + 2^{4x-3}}$$

36. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2}{e^x + 1}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x + 5^{x+2} - 7^{x+1}}{2 \cdot 4^x - 3^{x+2}}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + e^{x+1}}{3^{x+1} + e^{x+2}}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 4^x - 5^{x+1}}{2 \cdot e^x - 2^{2x+3}}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 2^{x+1} - 2 \cdot 5^x + 3}{e^{x+2} + 4^x}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x+1} - 5^{3x+2}}{3^{2x+1} + 2^{3x+2}}$$

37. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-5x}}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x^4}{2-|x|}}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^3-2}{x^2+2}}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x^2-3}{1-x}}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{\frac{x+\eta\mu x}{x-\sigma\nu\nu x}}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9^x - 3^x + 2} - 3^x)$$

38. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + \ln x}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 \ln(x+2) - \ln(x^2+3)]$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \sigma\nu\nu x) - 2 \ln x]$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^4 x - \ln^3 x - 6 \ln x + 8}{\ln^2 x + \ln x + 1}$$

$$\text{xiii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(2 + e^{x+3})]$$

$$\text{xiv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - \sqrt{x}]$$

39. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x - 5^{x+1}}{a^{x+1} + 5^x}, a > 0$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + a^{x+1}}{a^x + e^{x+1}}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + a^x}{e^x + a^{x+3}}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{a^{2x} + e^{2x}}{e^x} - x \right), a > 0$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + a^{x+1}}{a^x + e^{x+1}}$$

40. i. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) + x^2 - e^x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ii. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) > e^x + \eta\mu x, x > 0$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

41. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x^3 - x}{3x^2 + 2}} \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1} \cdot x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{x}}{x+1}}$

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - \eta\mu x)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε τα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

43. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 6$, να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 - 6}{2x^2 f(x) - 6x^3 + 4x - 5}.$$

44. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 2x + 4) \cdot f(x) \leq 2x^3 + 3x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

45. Έστω $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3. \text{ Να βρείτε το } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ ώστε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1.$$

46. Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα v μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t , δίνεται από τη σχέση

$$v(t) = \kappa \cdot (1 - e^{-t}), \text{ όπου } \kappa \text{ μια θετική σταθερά.}$$

i. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση v , για $t \geq 0$.

- ii. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.
- iii. Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ .

47. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα M και N αντίστοιχα.

i. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OMN ως συνάρτηση της τετμημένης k του σημείου M .

ii. Να βρείτε το όριο του εμβαδού, όταν:

α. $k \rightarrow +\infty$

β. $k \rightarrow 1$

48. Έστω οι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε:

$$|x \cdot f(x) - x| \leq g^2(x) \cdot |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{2000} \cdot g(x)) = l \in \mathbb{R}. \text{ Να βρεθεί}$$

$$\text{το } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

49. Έστω άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(6x+1)f(x) - 4x^2 \cdot \eta\mu \frac{2}{x}] = 2. \text{ Να βρεθούν τα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

50. Έστω η ορισμένη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Να

βρεθούν οι $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$ αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$3 \cdot f(x+2) - 2\sigma\nu\alpha + 2 \cdot f(4x-3) = 4 + 5f(x) + 2\sigma\nu\beta$$

51. Έστω οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $(0, +\infty)$ τέτοιες ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = m \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$x^2 \cdot f^2(x) + g^2(x) + 5x^4 \leq 2x^3 f(x) + 4x^2 g(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

i. Να βρεθούν οι αριθμοί l και m .

ii. Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$ αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$f(x) - 6x \geq (2\eta\mu\alpha + 3\eta\mu\beta)(x+1)$$

iii. Να βρεθούν οι αριθμοί $\gamma, \delta \in (-\pi, \pi)$ αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$

$$\text{ισχύει: } x \cdot g(x) + 12x^3 \leq (3\sigma\nu\gamma - 4\eta\mu\delta)(2x^3 + x + 5)$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

i. $f(x) = |\eta\mu(2x - 5) - \varepsilon\varphi x|$

ii. $f(x) = e^{\frac{3}{x}} + \ln(x^2 + 1)$

iii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{4 - x^2}$

iv. $f(x) = \eta\mu^5 3x \cdot \sqrt{2^{-x} + 8}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^2+5}-3}, & 0 < x \neq 2 \\ -\frac{3}{2}, & x = 2 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| \geq 1 \end{cases}$

v. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

vi. $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{e^2} - 1 - x\eta\mu \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

vii. $f(x) = \begin{cases} 3\sigma\upsilon\nu x + \ln(x^4 + 1), & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x^4+x^2}+\eta\mu 2x}{x^2+x}, & x > 0 \end{cases}$

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{|x|-x-2}}{x-1}, & x < 1 \\ \eta\mu\pi x + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu(2\pi x), & x \geq 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x e^{\frac{x-1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x} + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0. \\ \frac{|x^7 - x - 3| - 3}{x}, & x > 0 \end{cases}$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x)$.

5. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις.

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ x^2 + 3x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x - 2| + |x + 2| - 5}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^v - 1}{x}, & x \neq 0 \\ v, & x = 0 \end{cases}$

v. $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x} - x^2}{x + \sqrt{x}} \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu^2 x}}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$

6. Να βρείτε την τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 3x, & 1 < x < 2 \\ \beta x^2 - \alpha, & x \geq 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}, & x < 0 \\ x^2 + x + \alpha, & x \geq 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\eta\mu(\pi\sqrt{x})}{x - \sqrt{x}}, & x > 0, x \neq 1 \\ \alpha + \beta, & x = 0, x = 1 \\ \frac{(x-\beta)^2}{\pi - x}, & x < 0 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x - \alpha - \beta}{x - 1}, & x < 1 \\ \gamma, & x = 1 \\ \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$

v. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (\kappa + 2)x + 2\kappa}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \kappa^2, & x = 2 \end{cases}$

7. i. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - \alpha, & x \leq 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x+4}, & x > 0 \end{cases}$. Να βρεθεί το α

ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 - 2}{x-1}, & x \neq 1 \\ -2\alpha + 7, & x = 1 \end{cases}, \text{ να είναι συνεχής στο } x_0 = 1.$$

8. i. Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{x-\pi}, & x < \pi \\ \alpha x + 2, & x \geq \pi \end{cases}, \text{ να είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

ii. Να βρεθούν τα α, β ώστε η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2\beta(\beta-1)x + 2\alpha, & x \leq 2 \\ 2\sin \frac{\pi x}{2} - a^2, & x > 2 \end{cases}, \text{ να είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3a}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε το $a \in \mathbb{R}$,

ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

10. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2\alpha x^2 + \beta x + 5, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να

βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + x + \beta}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

12. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2|x-1| + x^2 - 3x + 2}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 + x + 1 + \alpha + \beta, & 1 \leq x < 2 \\ -3\alpha x + 2\beta, & x \geq 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β , έτσι ώστε η συνάρτηση
- $$f(x) = \begin{cases} 2\beta(\beta - 1)x + 2\alpha, & x \leq 2 \\ 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} - \alpha^2, & x > 2 \end{cases} \text{ να είναι συνεχής.}$$
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+\lambda}{x-2}, & x \neq 2 \\ \lambda - \kappa, & x = 2 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x - 2\beta + 3, & x \leq 1 \\ \frac{x^2+3x+\alpha}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 7\alpha x + 6\beta, & x \leq -1 \\ x^2 + 2\beta x + 4, & x > -1 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ και η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(3,1)$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + (\alpha^2 + 4\alpha)x + \beta^2, & x < 1 \\ x^3 - \beta^2 x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x^2+5}-3}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{2x+5}-3}, & -\frac{5}{2} \leq x < 2 \\ \alpha x^2 + (\beta - 1)x, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $g(x) = (a+1)x^2 + ax + 3\beta$, $h(x) = x^2 - 2\beta x + \beta$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{\eta \mu x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ x^{2017} + \lambda - 2, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

22. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $(x - 2)f(x) = x^2 - 7x + 10$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $f(2)$.
23. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $xf(x) = \eta\mu x + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $f(0)$.
24. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και έχει την ιδιότητα:
 $|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^4 \eta\mu^2 \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.
25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(x^2 - \pi^2)[f(x) - 1] = \eta\mu^2 x$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή $f(\pi)$.
26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την
οποία ισχύει: $xf(x) + 1 \leq \sigma\upsilon\nu 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία
ισχύει: $f(x + 1)f(1 - x) < x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
28. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $xf(x) \geq \eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1} - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι: $f(0) = 1$.
29. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $|xf(x) - x^2| \leq \eta\mu^4 x + 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η γραφική
παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
30. Δίνεται f συνεχής συνάρτηση στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει:
 $\left| x^2 f(x) - x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^{2018}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $f(0)$.
31. Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $|f(x)| \leq |\eta\mu x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι
 $f(0) = 0$.
32. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x \neq 0$, ισχύει:
 $(xf(x) - \eta\mu x)^2 < x^4 \eta\mu \frac{1}{x^2}$. Να υπολογίσετε το $f(0)$.
33. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
i. $xf(x) + 12 = \eta\mu 5x + (x - 3)(x - 4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
ii. $1 + (x^2 + 1)f(x) = (1 + f(x))\sigma\upsilon\nu^2 x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- iii. $(x-1)f(x) + 2 = \sqrt{x^2 + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
34. i. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
 $xf(x) = 5x + \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
 $f(x) + \sqrt{x^2 + x + 2} = 1 + x(f(x) + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
35. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις.
 i. $1 + (x^2 + 1)f(x) = (1 + f(x))\sigma\upsilon\nu^2 x + x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. $f(x) + \sqrt{x^2 + x + 2} = 1 + x(f(x) + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
36. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι $f^2(x) - 6f(x) + 9\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ναδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο 0.
37. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + x^2 - 2x - 5}{x + 2} = 2017$.
 Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-2, -3)$, να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.
38. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - xf(x)}{\eta\mu x + x} = 1$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$, να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) + g^2(x) \leq \eta\mu^{2\nu} x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.
40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) + g^2(x) \leq 2f(x) \cdot g(x) - x^2 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
41. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(x + y) = f(x) - f(y) \quad (1)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_1 = 5$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

42. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ (1), για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
43. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 + \eta\mu x \leq f(x) \leq 2|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
44. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x) = x + \eta\mu f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 i. $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
45. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) = x + \eta\mu f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 i. $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
46. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = -3$, περιττή και ισχύει $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+1-\eta\mu(x+3)}{x^2-9} = 2$.
 i. Να βρείτε την τιμή $f(-3)$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.
 iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2f(x)+1}{x-3}$.
47. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+f(x)}{x^2-4} = 3$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4f(2)}{\sqrt{x+2}-2}$.
48. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$ να δείξετε ότι $f(0) = 5$.
49. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο 2 και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4} = 3$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4f(2)}{\sqrt{x+2}-2} = 64$.

50. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(x) - 1}{x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi f(x))}{x - 1}$

51. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 4$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(2) = 3$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+3\eta\mu x) - f(x+2)}{x}$

52. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + 2f(y) + xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 1$, για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\theta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι συνεχής.

ii. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

55. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(2-x) + f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και στο 2.

56. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) + 1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$.

ii. Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
 - Αν η f είναι συνεχής στο $a \neq 0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
59. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
- Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
 - $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.
 - $f(2) > 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
 - Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ κοντά στο $\frac{1}{2}$.
 - Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 3, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Να δειχτεί ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1, 3]$ και να βρεθεί ο $\rho \in (1, 3)$, ώστε $f(\rho) = 0$.
61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -2 \leq x \leq 0 \\ -2x - 1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2, 2]$ και να βρεθεί το $x_0 \in (-2, 2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x \leq 2 \\ 2x - 6, & x > 2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[0, 4]$ και να βρεθεί $\xi \in (0, 4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.
63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2, & -2 \leq x < 1 \\ x^2 + 1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 3)$.
64. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μία ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:
- $x^4 + 8x^3 - x^2 + x - 3 = 0$, στο $(0, 1)$.
 - $5x^3 - 6x^2 - 3x + 1 = 0$, στο $(0, 1)$.
 - $x \ln x - e^{2x} \cdot \sin x = 0$, στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
 - $5x + 1 - 2 \sin x = 0$, στο $(0, \pi)$.

v. $2x\eta\mu x = e^x \sigma\upsilon\nu x$, στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

vi. $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^4}{x-1} = 0$, στο $(1,2)$.

vii. $\frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x^3+1}{x-3} = 0$, στο $(2,3)$.

viii. $\frac{x^{10}+1}{x-2} + \frac{x^{20}+1}{x+2} = 0$, στο $(-2,2)$.

ix. $\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{e^x}{\eta\mu x} = 0$, στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

x. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{4x-\pi} = \frac{\eta\mu x}{4x+\pi}$, στο $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

65. Να δειχθεί ότι η εξίσωση:

i. $x - \eta\mu^2 x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ii. $x^4 + 5x^3 + x = x^2 + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

iii. $x \ln x = -\alpha x$, $0 < \alpha < 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{1}{e}, 1)$

iv. $x^4 + (a^2 - 2)x^2 = (1-a)x + a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

66. i. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. Να αποδείξετε ότι έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (α, δ) η εξίσωση:

$$\frac{x-\beta}{(x-\alpha)(x-\gamma)} + \frac{x-\gamma}{(x-\beta)(x-\delta)} = 0$$

ii. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma < 0$ και $\alpha + \gamma = 2\beta$. Να αποδείξετε ότι έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (α, γ) η εξίσωση:

$$\frac{x^2 - \alpha^2}{(x-\beta)(x+\gamma)} = \frac{x^2 - \gamma^2}{(x+\alpha)(x-\beta)}$$

iii. Αν $\alpha < -1$ και $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (α, β) η εξίσωση: $\frac{x^3 - \alpha^3}{x-1} = \frac{x^3 - \beta^3}{x+1}$

67. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία παρουσιάζει μόνο στο 0 ελάχιστη τιμή το 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$.

68. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu\alpha)-f(a)}{x-2} + \frac{f(e^{-a}-1)-f(a)}{x-3} = 5$, $a < 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.
69. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:
- $$\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{\alpha}{\alpha-\xi} + \frac{\beta}{\beta-\xi}.$$
70. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, όπου:
- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 6x + 8, & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$
- έχει ρίζες στο διάστημα $[0,6]$, χωρίς να πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano.
71. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:
- $$x_0^2 + 3x_0 = e^{x_0} + 1.$$
72. Αν $\alpha < -1$, να αποδείξετε ότι έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(0,1)$ η εξίσωση: $\alpha^3 x^3 - 3\alpha^2 x^2 + 3\alpha x + 7 = 0$.
73. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει: $f(\alpha) = 2\alpha, g(\beta) = -2\beta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = g(x_0) + 2x_0$.
74. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f, f \circ g$ στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\beta) = f(\alpha) = a$ και $g(\alpha) = f(\beta) = \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(g(\xi)) + g(f(\xi)) = 2\xi$.
75. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda \in (0,1)$ και οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = a$ και $g(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $\lambda f(\xi) + (1-\lambda)g(\xi) = \xi$.
76. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$ με $\gamma \neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 είναι ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

77. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x) = 3x\eta\mu x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.
78. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,5]$, $f(1) = 3$ και $f(5) = 2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$.
79. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + x^3 - 2x + 1$ και $g(x) = 3x^3 - 5x + 3$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,2)$.
80. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2 \ln x - x < f(x) < \ln^2 x + x$ για κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = (e^2 + 1) \ln x - x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, e)$.
81. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x + 2 \leq f(x) \leq e^{x+2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^3 \cdot x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
82. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
- $|xf(x) - 2\eta\mu x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f(x) + f(x+2) = x^2 - 2016$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{x}{2} - 1$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,2)$.
83. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 5$ και $7\eta\mu(x-3) \leq (x-3)f(x) \leq x^2 + x - 12$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της παραβολής $y = -x^2 + x + 3$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(2,3)$.
84. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = 3x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- Η f αντιστρέφεται.
 - Η εξίσωση $f(f(x)) - f(x^2 - 3x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

85. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει:
 $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$. Να αποδειχθεί ότι:
 i. Η f αντιστρέφεται.
 ii. Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
86. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) - g^2(x) = -5x$ και $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε οποιοδήποτε διάστημα (α, β) , με $\alpha < 0$ και $\beta > 0$.
87. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow (0,2)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = 2f(\xi) - 3\xi$.
88. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 • $f(a) = a - 1$
 • $f(a + 1) = a$
 • $a < g(x) < a + 1, x \in \mathbb{R}$.
 Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a > 1$ υπάρχει $\xi \in (a, a + 1)$ τέτοιο ώστε:
 $f(\xi) \cdot g(\xi) = \xi^2 - \xi$.
89. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
90. Έστω f ορισμένη στο $[0, \alpha]$ συνεχής με $0 < f(x) < \beta$, για κάθε $x \in [0, \alpha]$. Αν $\beta^2 < 3\alpha$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f^2(x_0) - \beta f(x_0) + x_0 = 0$.
91. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' στο $A(0,3)$, να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ και η γραφική παράσταση της f έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
92. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η συνάρτηση $g(x) = f(\alpha + \beta - x)$. Να δείξετε ότι οι γραφικές των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

93. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο διάστημα $[0, \pi]$ με $f(\pi) = \pi$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi \sin \xi + \pi$.
94. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι: $e^{1-f(x)} + g(x) = e - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία A, B με ετερόσημες τετμημένες, να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο που βρίσκεται μεταξύ των A, B .
95. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον δύο ρίζες στο αντίστοιχο διάστημα:
- $x^5 - 24x + 3 = 0$, στο $(0, 3)$.
 - $3 \sin x = x + 2$, στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
 - $x^6 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$, στο $(-1, 1)$.
96. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^6 + \alpha x^2 + \beta = 0$ με $\beta > 0$ και $\alpha + \beta + 1 < 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.
97. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν) .
98. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x \eta \mu x + \sigma \nu x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
99. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μοναδική ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:
- $x^3 + 3x - 2 = 0$, στο $(0, 1)$.
 - $3 \eta \mu x = 1 + \sigma \nu x$, στο $(0, \frac{\pi}{2})$.
100. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2$.
101. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + 4x = \kappa$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ για κάθε $\kappa \in (0, 5)$.

102. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) + 2e^{x_0+1} + \ln x_0 = 3$.
103. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + xe^x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M της C_f με τετμημένη $\alpha \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η ευθεία OM (O η αρχή των αξόνων) να είναι κάθετη στην ευθεία $x + 4y - 5 = 0$.
104. i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 - xe^x = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.
 ii. Ομοίως η εξίσωση $6x^5 + x^3 + 5 = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(-1, 2)$.
105. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{2x-\alpha-\beta} = 0$, έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $\mathbb{R}$.
106. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-\alpha} + \frac{3}{x-\beta} + \frac{5}{x-\gamma} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.
107. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \sin x$ έχει δύο ακριβώς αντίθετες ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
108. Θεωρούμε την εξίσωση: $\frac{a^2}{x} + \frac{\beta^2}{x+1} + \frac{\gamma^2}{x-1} = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.
 i. Να δειχθεί ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.
 ii. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να δειχθεί ότι $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}$.
109. Έστω f συνεχής και περιττή στο $\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{R}$.
110. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2x \ln \frac{1}{x} = 1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.
111. Έστω η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x = 1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.
112. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1) + \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

113. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2 \ln x + 3e^x = 0$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.
114. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 \eta \mu \frac{1}{x_0}$.
115. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x = 1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.
116. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ συνεχείς, με $f(\alpha) = \alpha, g(\beta) = \beta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $\mu f(x_0) + \nu g(x_0) = (\mu + \nu)x_0$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ και είναι ομόσημοι.
117. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^2(\alpha) + f(\alpha)f(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = 0$.
118. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow [0,1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,2]$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$.
119. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0,4] \rightarrow [0,4]$, για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g, g \circ f$ στο $[0,4]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,4]$ τέτοιο ώστε $(f \circ g)(\xi) + (g \circ f)(\xi) = 2\xi$.
120. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \theta]$, $\theta > 0$ με $f(0) = f(\theta)$.
- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x) - f\left(\frac{\theta}{2} + x\right)$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left[0, \frac{\theta}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f\left(\frac{\theta}{2} + \xi\right)$.
121. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) + f(1) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.
122. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha\beta > 0$ και $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $x_0 f(x_0) = \alpha\beta$.

123. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$ όπου $\alpha, \beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε:
 $f^2(\xi) + \xi f(\xi) = 2\xi^2$.
124. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
 $(1 + e^\pi)f(\alpha) + (1 + \pi^e)f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.
125. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = 0$,
 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση
 $f(x)\eta\mu^2 x + g(x)\sigma\upsilon\nu^2 x = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
126. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$ με $0 < f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0, 3]$. Να
αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε:
 $f^2(x_0) + x_0 = 3f(x_0)$.
127. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και $f(0) = f(4)$, να
αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in [0, 4]$ με $\beta - \alpha = 2$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.
128. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[0, 1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
τέτοιο ώστε: $f(\eta\mu\xi) = f(\sigma\upsilon\nu\xi)$.
129. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: [0, 2017] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (0, 2017) \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $f(2017) \neq 0$ και $g(x) \cdot (2017 - x) - f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, 2017)$. Να
αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία της γραφικής παράστασης
της g με την ίδια τεταγμένη και άθροισμα τετμημένων ίσο με 2017.
130. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η συνάρτηση
 $g(x) = f(\alpha + \beta - x)$. Να δείξετε ότι οι γραφικές των f και g έχουν ένα
τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
131. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f σε κάθε περίπτωση:
- $f(x) = x - \eta\mu x$
 - $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1$
132. Να αποδείξετε ότι η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η
σχέση $f^2(x) = -x^2 + 6x - 8$ για κάθε $x \in \Delta = (2, 4)$, διατηρεί πρόσημο στο
 Δ .

133. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει ότι:
 $5f^2(x) - 3f(x) = 2x^2 - x + 5$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχθεί ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
134. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:
 $2f^2(x) - 3f(x) = 2x^4 + x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
135. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [0, 2)$ να ισχύει
 $f^3(x) + f(x) = 8 - x^3$.
i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 2)$.
ii. Να βρείτε το πρόσημο της f στο $(0, 2)$.
136. Έστω συνάρτηση f τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f^3(x) + f(x) = x^3 + 3x + 2$
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Να αποδείξετε ότι η f μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.
iv. Να βρείτε το πρόσημο της f στο πεδίο ορισμού της.
137. Έστω οι $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x)g(x) = -e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) > e$ και $g(1) < -e$. Να δείξετε ότι:
i. $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
ii. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = x_0$.
138. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(2) + f(5) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.
139. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g(\kappa) + g(\lambda) + g(\mu) = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, με $\kappa \neq \lambda \neq \mu$ και $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η g είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}$.
140. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει η σχέση:
 $f(x)(g(x) + 1) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

141. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τις ευθείες $y = x$ και $y = 3x$. Έστω και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-3x}{f(x)-x}$.
Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
142. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = -5$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(5) - 2)x^3 - 4x - 7]$.
143. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(5) = -2$. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[f(3)-4]x^5+3x+5}{x^3+6x^2+2}$.
144. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, με $f(3) = -5$ και $-1,4$ δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0)x^3+2x+5}{x^2+4}$.
145. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(0) = 5$ και $g(0) = 4$. Οι C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
146. Να λύσετε την ανίσωση $\eta\mu 2x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x < 0$, όταν $x \in (-\pi, \pi)$.
147. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x}{x^2-1} = \frac{e^x}{f(x)}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.
148. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(5) = 11$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
149. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
ii. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.
150. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(0)) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
151. Έστω η συνεχής και περιττή συνάρτηση $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.
i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

152. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) = 4 - x^2$ για κάθε $x \in A$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο $(-2, 2)$.
 - Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
153. Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f(x) - \sin x)(f(x) + \sin x) = \eta \mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα xx' .
 - Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
154. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-3, 3]$, για την οποία ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 9$, για κάθε $x \in [-3, 3]$.
- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[-3, 3]$.
 - Να δείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3, 3)$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(0) = -2$.
155. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) = x^4(x^4 + 4) - 4f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- Το $f(0)$.
 - Τον τύπο της f .
156. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{16} - \eta \mu(\pi x) + 7$. Να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή $\frac{7}{2}$ όταν $x \in (-4, 4)$.
157. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα $f^2(x) - 2f(x)\eta \mu x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
158. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα $f^2(x) = 2e^x f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
159. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f(x) - \eta \mu x)(f(x) + \eta \mu x) = 2f(x)\sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
160. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f(x) - e^x)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

161. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
 $(f(x) - e^x)(f(x) + e^x) = 1 - 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
162. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $(xf(x))^2 = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
 i. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
 ii. Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .
163. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 4$ για την οποία ισχύει
 $\frac{xf(x)+9}{2+f^2(x)} = \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
 ii. Να υπολογίσετε τα όρια:
 iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x - \ln x}$.
 iv. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2} + f^3(x)}{\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x - 1}$.
164. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x \eta \mu(\pi x) + 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε: $2f(x_0) = 5$.
165. Αν $f(x) = x^8 + x + 4$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε:
 $f(\xi) = 250$.
166. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{16} - \eta \mu(\pi x) + 7$. Να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή $\frac{7}{2}$ όταν $x \in (-4, 4)$.
167. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: [2015, 2018] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (2015, 2018)$ τέτοιο ώστε:
 $3f(x_0) = f(2016) + f(2017) + f(2018)$
168. Έστω $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(0) = 7$ και $f(5) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (0, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{10}.$$
169. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [2, 10] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [2, 10]$, ώστε: $f(x_0) = \frac{3f(3) + 5f(6) + 2f(8)}{10}$.

170. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \frac{f(1)+3f(2)+5f(3)+f(4)}{10}$.
171. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0,4]$, τέτοιο ώστε $2f(1)+3f(2)+4f(3)=9f(\xi)$.
172. Αν η $f:[\alpha,\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.
173. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$.
174. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[1,3] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) > 0$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε: $f^3(x_0) = f(1)f(2)f(3)$.
175. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $6f(\gamma) = f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)$.
176. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$n(n+1)f(\kappa) = 2[f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n)], n \in \mathbb{N}^*.$$
177. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\kappa, \lambda \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{f(\kappa)}{f(\lambda)} = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{3f(\alpha) + 2f(\beta)}.$$
178. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = -5, f(3) = 6$ και $f(6) = -10$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.
179. Έστω συνάρτηση $f:[2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:
- $f(2) = 2$
 - $f(3) = 3$
 - $f^2(x) - 3f(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in [2,3]$.
- Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

180. Έστω συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = 0$, $f(2) = 10$ και $f^3(x) + f(x) = 5x$ για κάθε $x \in (0,2)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

181. Έστω συνάρτηση $f: [1,8] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, με:

- $\frac{6x^2-6x}{x^2-1} \leq f(x) \leq \frac{6\sqrt{x}-6}{x-1}$
- $f(1) \cdot f(8) = 27$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 7$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,8)$.

182. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:

$f(x)(f \circ f)(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1000) = 999$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(\alpha) = 500$.
- Να βρείτε τον αριθμό: $f(500)$.

183. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f([\alpha, \beta]) = \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

184. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [2,10] \rightarrow \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

185. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) - 5f(x) + 6 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

186. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

187. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + e^{2017x} - 2$.

- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημό της για $x > 0$.
- Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^3(x) = f(2017) \cdot f(2018) \cdot f(2019)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(2017, 2019)$.

188. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι $g(x) \geq 0$. Να αποδείξετε ότι:

- Υπάρχουν $\xi_1, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε: $g(\xi_1) = \sqrt{g(x_1) \cdot g(x_2)}$.
- Υπάρχουν $\xi_2, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε: $g(\xi_2) \geq \sqrt{g(x_1) \cdot g(x_2)}$.

189. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- i. $f(x) = \frac{2-x^2}{x}, x \in (0, 2]$
- ii. $f(x) = \ln(x-1) + x^2, x \in [2, +\infty)$
- iii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu^3 x - 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- iv. $f(x) = -3x + 2\sigma\upsilon\nu x, x \in [0, \pi]$
- v. $f(x) = x^2 + \ln(x-1), x \in (1, 2)$
- vi. $g(x) = x^3 + 5x + 2, x \in [1, 3]$
- vii. $h(x) = \frac{5}{\sqrt{x}-3}, x \in (4, 9)$

190. Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ της συνάρτησης f όταν:

- i. $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$ και $\Delta = [0, 1]$
- ii. $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ και $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- iii. $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 3$ και $\Delta = [-1, 1]$
- iv. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ και $\Delta = (-3, 3)$
- v. $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$ και $\Delta = (-1, 1)$
- vi. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu^3 x$ και $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- vii. $f(x) = \eta\mu x - \varepsilon\varphi x$ και $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- viii. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $\Delta = [1, 3]$
- ix. $f(x) = 2x^2 - 4x$ και $\Delta = [1, 3]$
- x. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x^2$ και $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$

- i. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$, έχει μία μόνο ρίζα.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $\ln x + e^{x-1} = 1$

193. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x + 1$

- Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα.

194. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ συνεχής η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Αν ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } f(1) = -2.$$

- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

195. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\ln x_0 = \frac{1}{x_0} + e$.

196. Έστω $f(x) = \frac{1}{3} \frac{3^{x+1} + 4^{x+1}}{3^x + 4^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το σύνολο τιμών και να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(x_0) = \frac{2007}{2006}$.

197. Έστω f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 2}{x} = 3 \text{ και } 2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1, x \in (0, 1).$$

- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $g(x) = f(x) - \ln x - 3$, $x \in (0, 1)$.
- Να δείξετε ότι η $h(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει την $y = x$ σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -e^{-x} + 5x - 3$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

199. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x^2 - 1 - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
200. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta = [0, 5]$ και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[0, 2], [2, 4], [4, 5]$. Αν $f(0) = 1, f(2) = -2, f(4) = 3$ και $f(5) = -4$, να βρεθούν:
- Η μονοτονία της f .
 - Το σύνολο τιμών της f .
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ .
201. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta = [-2, 8]$ και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[-2, 3], [3, 5], [5, 8]$. Αν $f(-2) = -2, f(3) = 4, f(5) = 1$ και $f(8) = 2$, να βρεθούν:
- Η μονοτονία της f .
 - Το σύνολο τιμών της f .
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ .
202. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x - 1) + e^x = 3 - x$ έχει μοναδική ρίζα.
203. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.
204. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2x^{2017} + x^3 + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.
205. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.
- Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία μόνο ρίζα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.
 - Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1.$$
206. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x + 1) - \ln x$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x + 1) + \eta\mu\theta = \ln x + \theta$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$ για κάθε $\theta > 0$.

207. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να λύσετε την ανίσωση: $e^{f(f(x))} < 6$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(\ln(e^{2x} + e^x) - 12) = \ln \frac{1+e}{e^2}$ έχει μοναδική λύση.
208. Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση f με $f^{-1}(x) = -x^3 - x + 2, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
209. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[1,4]$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η σχέση $f^2(1) + f^2(4) = 2f(4) - 6f(1) - 10$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
210. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [2,5] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και ισχύει η σχέση $f^2(2) + f^2(5) = 8f(2) - 2f(5) - 17$. Να βρεθεί:
- Το είδος μονοτονίας της f .
 - Το σύνολο τιμών της f .
211. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1, x \in \Delta = (0, +\infty)$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Με το δεδομένο ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$.
212. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\nu} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^\nu} = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι:
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x^\nu) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^\nu) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$
 - Αν ν περιττός, η εξίσωση $f(x) + x^\nu = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.
213. Η ανάβαση στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου (Μύτικας, 2.917 μ.) γίνεται συνήθως από τη θέση Πριόνια και διαρκεί για ένα μέσο ορειβάτη 6 ώρες. Η κατάβαση διαρκεί επίσης 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει από τα Πριόνια στις 6 το πρωί και βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου και διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση από τον Μύτικα και σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, βρίσκεται στα Πριόνια. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο ο ορειβάτης βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

214. Θεωρούμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $A(0,3)$ και $B(4,2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M στο εσωτερικό του ύψους του BA , τέτοιο ώστε: $(MO) = (MA) + (MB)$.



ΟΡΙΣΜΟΙ

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Απάντηση:

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδίο Ορισμού $A = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \}$.

Σύνολο τιμών: $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}$.

2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$ λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

3. ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$ και
- ii. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

4. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$.

Απάντηση:

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο $f \cdot g$ και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Επιπλέον,

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = A \cap B$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

5. ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση:

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και τη συμβολίζουμε $g \circ f$ τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A : f(x) \in B\}$.

Η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$ δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

6. ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

7. ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

8. ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .

9. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$ όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

10. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

11. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1

Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

12. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

i. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται;

ii. Με την προϋπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της f ;

Απάντηση:

i. Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι 1-1 στο A .

ii. Αν η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1} , τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A, \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

13. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Απάντηση:

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και

- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

14. ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση:

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

15. ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Πότε λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση:

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - l| < \varepsilon$

16. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

17. ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, συνεχής συνάρτηση.

18. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

19. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

20. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

Δηλαδή,

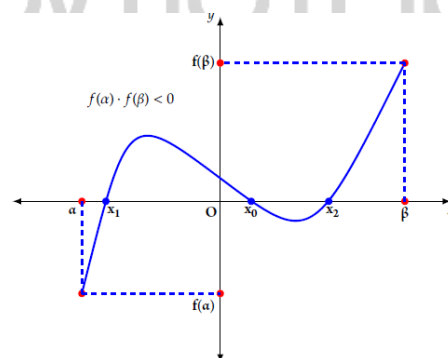
η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$



Σχήμα 1: Θ. Bolzano

21. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Δηλαδή,

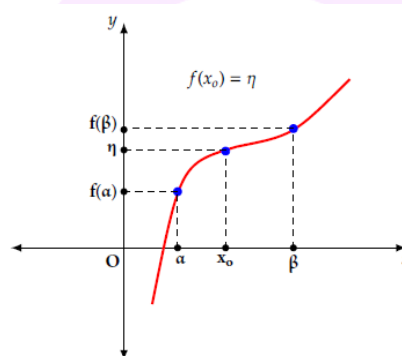
η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

22. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ Θ.Ε.Τ.

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = \eta$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



Σχήμα 2: Θ.Ε.Τ.

23. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

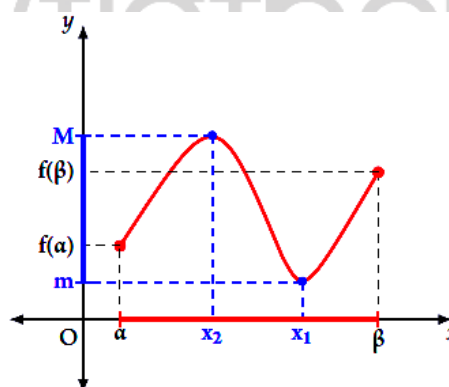
Απάντηση:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή,

υπάρχουν δύο, τουλάχιστον, σημεία x_1 και x_2 του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε να

ισχύει: $\min f(x) = m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M = \max f(x) \forall x \in [\alpha, \beta]$



Σχήμα 3: Θ.Μ.Ε.Τ.

Ισχυρισμοί - Αντιπαραδείγματα

Αντιπαραδείγμα 1

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \ln x, D_f = (0, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x}, D_g = [0, +\infty)$, τότε $(f \circ g)(x) = \ln \sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$ ενώ $(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x}, x \in [1, +\infty)$, δηλαδή:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Αντιπαραδείγμα 2

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ολικό μέγιστο, έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστο, το $y = 1$ σε καθένα από τα σημεία $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, αφού

$$f(x) \leq f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αντιπαραδείγμα 3

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

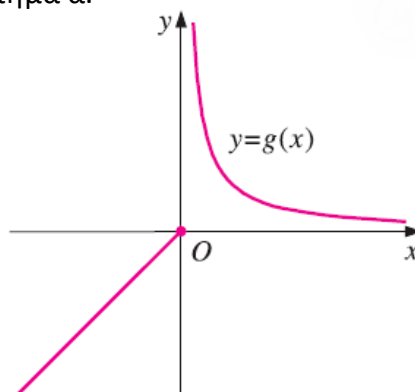
Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1/x, & x > 0 \end{cases}$

η οποία είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, η f είναι 1-1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σ' ένα σημείο, αλλά



δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Αντιπαράδειγμα 4

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Τότε, το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

εξαρτάται από τα άκρα a, β των παραπάνω διαστημάτων.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης

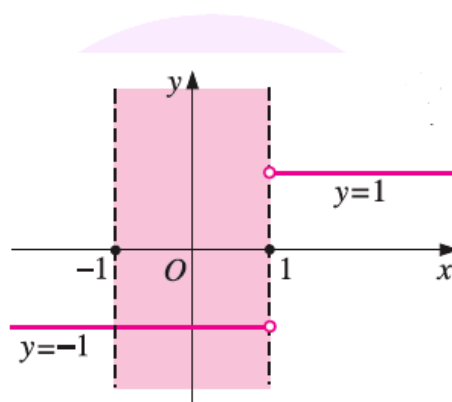
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο η f παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = 1$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$$



Αντιπαράδειγμα 5

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$$

Απάντηση:

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$ με $x > 0$

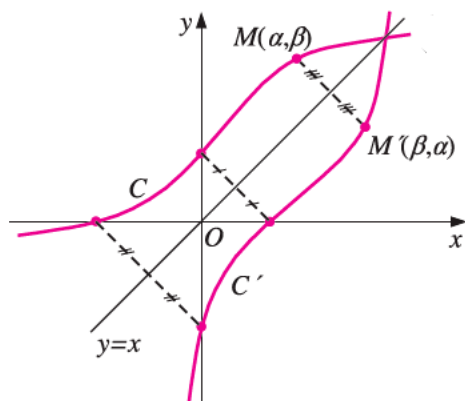
$$\text{τότε: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\text{ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} \right) = 1$$

Αποδείξεις

Θεώρημα 1

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Απόδειξη:

Επειδή,

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Θεώρημα 2 : Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0) \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} (x^n) + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1}) + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} (x) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0) \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Θεώρημα 3: Όριο ρητής συνάρτησης

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη:

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Θεώρημα 4: Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$, οπότε $g(\alpha)g(\beta) < 0$. Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = \eta$. ■

Βασικές Προτάσεις (δεν απαιτείται απόδειξη)

Πρόταση 1: Μονοτονία Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$.

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Πρόταση 2

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

δηλαδή οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 3: Γενίκευση Κριτηρίου Παρεμβολής

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$.

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$,
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$,

Πρόταση 4: Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης

Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα Δ και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty \\ \text{ή} \\ \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Τότε:

$$f(\Delta) = (-\infty, +\infty)$$

$$\Delta = (\alpha, \beta) \text{ ή } (\alpha, +\infty) \text{ ή } (-\infty, \beta) \text{ ή } (-\infty, +\infty)$$

Πρόταση 5: Βασικές ανισότητες

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\eta\mu x| \leq |x|$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$.

- Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x = 1$, δηλαδή: $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

- Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $e^x \geq x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x$

Βασικές Προτάσεις (απαιτείται απόδειξη)

Πρόταση 1

Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο A , τότε η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο $f(A)$.

Απόδειξη.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Τότε, υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια ώστε:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \xrightarrow[f \nearrow A]{f^{-1}(y_1)f^{-1}(y_2) \in A,} f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 < y_2$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $y_1 < y_2$

Συνεπώς, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Πρόταση 2

Σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$, με f γνησίως αύξουσα

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

Απόδειξη.

• Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f^{-1}(x_0) = f(x_0)$

Τότε:

$$f(f^{-1}(x_0)) = f(f(x_0)) \Rightarrow f(f(x_0)) = x_0 \quad (9)$$

– Αν $f(x_0) < x_0 \xrightarrow{f \nearrow} f(f(x_0)) < f(x_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_0 < f(x_0)$, άτοπο.

– Αν $f(x_0) > x_0 \xrightarrow{f \nearrow} f(f(x_0)) > f(x_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_0 > f(x_0)$, άτοπο.

Συνεπώς, ισχύει: $f(x_0) = x_0$.

• Αντιστρόφως, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = x_0$

Τότε:

$$x_0 = f^{-1}(x_0)$$

οπότε:

$$f(x_0) = f^{-1}(x_0)$$

Άρα τελικά:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

δηλαδή οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 3

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

Απόδειξη.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |0| = 0$.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε για κάθε $x \in D_f$ ισχύει: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Όμως, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Πρόταση 4

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Απόδειξη.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^2 = 0^2 = 0$

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ τότε για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

$$-\sqrt{f^2(x)} = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$$

Όμως, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{f^2(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0$, συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Πρόταση 5

Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και "1-1", τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη.

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε υπάρχουν:

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ με: } f(x_1) > f(x_2) \text{ και } f(x_2) < f(x_3)$$

Από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, αν $\gamma \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_2) < \gamma < \min \{f(x_1), f(x_3)\}$$

τότε υπάρχει $\alpha \in (x_1, x_2)$ και $\beta \in (x_2, x_3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\alpha) = \gamma = f(\beta)$$

Όμως η f είναι "1-1", οπότε $\alpha = \beta$, άτοπο, διότι $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ Η ΛΑΘΟΣ

1. Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε $f(\alpha) = \beta$ και αντίστροφα. Σ Λ
2. Υπάρχει συνάρτηση που για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $x = \alpha$ τουλάχιστον δύο φορές. Σ Λ
3. Η συνάρτηση $g \circ f$, αν ορίζεται, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x/x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$. Σ Λ
4. Ισχύει πάντοτε ότι: $g \circ f = f \circ g$. Σ Λ
5. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο A . Σ Λ
6. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Σ Λ
7. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα. Σ Λ
8. Αν μια περιττή συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 , τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $-x_0$. Σ Λ
9. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε είναι και " $1 - 1$ ". Σ Λ
10. Αν μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$, τότε είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ
11. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1 - 1$, τότε η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μία ακριβώς ρίζα για κάθε $y \in f(A)$. Σ Λ
12. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1 - 1$, τότε οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες. Σ Λ
13. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \neq 0$, έχει για αντίστροφη τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{c}$. Σ Λ
14. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$. Σ Λ
15. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Σ Λ
16. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Σ Λ
17. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f$. Σ Λ
18. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$. Σ Λ
19. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$. Σ Λ
20. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Τότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Σ Λ
21. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Σ Λ
22. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
23. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \neq 0$, τότε $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = f(x_0)$. Σ Λ

- | | | |
|--|---|---|
| 24. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$. | Σ | Λ |
| 25. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . | Σ | Λ |
| 26. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$. | Σ | Λ |
| 27. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και δε μηδενίζεται στο Δ , τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ . | Σ | Λ |
| 28. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m , τότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [m, M]$. | Σ | Λ |
| 29. Δεν υπάρχει συνεχής μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$. | Σ | Λ |
| 30. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. | Σ | Λ |

Το ταξίδι συνεχίζεται...

νέο φροντιστήριο