

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ



νέο φροντιστήριο

Συγγραφική ομάδα

- Παπαγούλα Νατάσα
- Βερέμης Δημήτρης
- Κουντούπης Ηλίας

Ευχαριστούμε θερμά τους εξάιρετους συναδέλφους Βασίλη Τσίμο και Βασίλη Ζαφείρη για την παροχή του υλικού τους, που βοήθησε σημαντικά για την ολοκλήρωση του υπάρχοντος βιβλίου.

Περιεχόμενα

§ 1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.....	5
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	9
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	11
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	13
§ 1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	14
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	17
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	22
§1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ.....	23
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	26
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	29
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	34
§ 1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	38
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	45
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	50
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	58
§ 1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	62
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	66
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	71
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	80
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ	87
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ	89
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ	91
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	93
§2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ.....	99
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	106
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	112
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	123
§2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.....	126
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	128
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	130
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	135
§2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.....	139
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	140
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	141
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	148
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ.....	152
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ	155
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ	158

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	160
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΥΘΕΙΑΣ	165
§3.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ	167
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	173
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	179
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	200
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ.....	211
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΥΚΛΟΥ.....	213
§3.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ	215
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	218
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	220
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	229
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ.....	234
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.....	236
§3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ.....	238
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	241
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	242
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	244
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ.....	246
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΛΛΕΙΨΗΣ	248
§3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ.....	250
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	254
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	255
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ	259
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ.....	262
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ	264
§ 3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2 + By^2 + Γx + Δy + E = 0$	266
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	267
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	276

Πρόλογος

Αναλυτική Γεωμετρία

Μαθηματικός κλάδος τον οποίο ίδρυσε ο Καρτέσιος (1637) και ο οποίος μας επιτρέπει να ανακαλύπτουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων μελετώντας τις αλγεβρικές ιδιότητες των εξισώσεών του, χωρίς να προσφεύγουμε στα ίδια τα σχήματα.

«Κάθε μορφή αποτελείται από σημεία, Αν κατορθώσουμε να ταυτοποιήσουμε κάθε σημείο, θα γνωρίσουμε τη μορφή που συνθέτουν. Πώς να γνωρίσουμε ένας σημείο;

Εντοπίζοντάς το με ένα σύστημα ονοματοθεσίας. Αυτό που, από την εποχή του Πτολεμαίου, γινόταν με τη γεωγραφία, επιχειρούμε να το κάνουμε με τη γεωμετρία.

Τα σημεία του γεωμετρικού χώρου θα ταυτοποιούνται στο εξής μέσω του ζεύγους τετμημένης – τεταγμένη. Για να μπορέσουμε όμως να εντοπίσουμε το σημείο, πρέπει να ξεκινήσουμε από ένα αρχικό σημείο. Που να το τοποθετήσουμε;

Οποιοδήποτε ζεύγος τεμνόμενων ευθειών (οι περίφημοι άξονες των συντεταγμένων) είναι κατάλληλο να μας δώσει το σημείο αναφοράς, με αφετηρία το οποίο όλα τα σημεία θα ταυτοποιηθούν.

Χώρος οριοθετημένος, γεωμετρία αλγεβροποιημένη.

Μια λογική απέναντι σε μια ασιθητική».

Denis Guedj

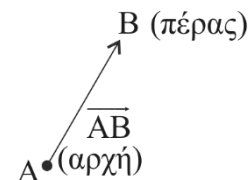
§ 1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός του Διανύσματος

1. Πως ορίζεται το διάνυσμα και πως συμβολίζεται;

• Το διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.



• Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο B.

• Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε και τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένα με βέλος π.χ.: $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}$.

• Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**.

Για παράδειγμα το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.



2. i. Τι λέγεται μέτρο ή μήκος διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

Μέτρο ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται η απόσταση των άκρων του, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

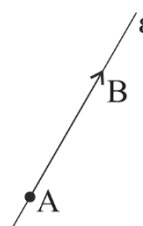
ii. Τι λέγεται μοναδιαίο διάνυσμα;

Μοναδιαίο λέγεται το **διάνυσμα**, που έχει μέτρο 1.

Δηλαδή $|\vec{a}| = 1 \Leftrightarrow \vec{a}$: μοναδιαίο διάνυσμα.

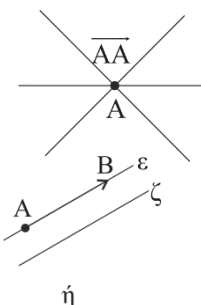
3. i. Τι λέγεται φορέας του μη μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

Φορέας του μη μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται το $\overrightarrow{AB}$.



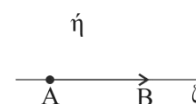
ii. Τι γνωρίζετε για τον φορέα μηδενικού διανύσματος;

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.



iii. Πότε λέμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ζ ;

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι **παράλληλο** προς την ευθεία ζ , αν ο φορέας του είναι παράλληλος ή συμπίπτει με την ζ και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \parallel \zeta$.

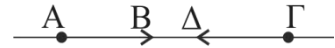
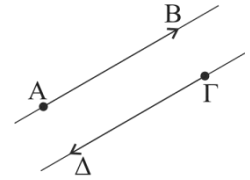


4. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά; Τι σημαίνει ότι δύο διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση;

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**, όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.

Συμβολίζουμε : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια διεύθυνση** σημαίνει $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



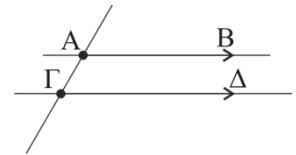
5. i. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ομόρροπα; Τι σημαίνει ότι δύο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση;

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**, όταν:

- έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους
- ή
- έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ, ΓΔ περιέχει την άλλη.

Συμβολίζουμε: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

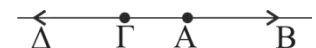
Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** σημαίνει $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (ίδια διεύθυνση και φορά).



ii. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται αντίρροπα; Τι σημαίνει ότι δύο διανύσματα έχουν αντίθετη κατεύθυνση;

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.

Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά).



Τσα Διανύσματα

6. i. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα;

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \text{και} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| \end{cases}$$



ή



ii. Ποια σχέση συνδέει τα μηδενικά διανύσματα;

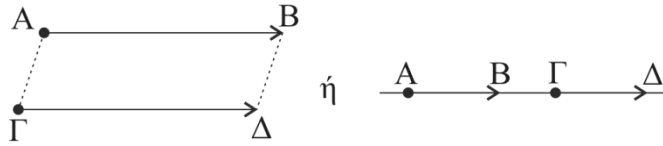
Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται **ίσα** μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

iii. Αν ισχύει $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ ποιες άλλες ισότητες διανυσμάτων προκύπτουν;

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$$

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Delta}$$

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{\Delta\Gamma}$$



iv. a) Αν το σημείο M είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, ποιες ισότητες διανυσμάτων προκύπτουν;

Αν το M είναι μέσο του AB, τότε $\vec{AM} = \vec{MB}$ ή $\vec{BM} = \vec{MA}$.

b) Αν ισχύει $\vec{BM} = \vec{MA}$ ποια η θέση του M σε σχέση με A και B;

Αν ισχύει $\vec{AM} = \vec{MB}$ ή $\vec{BM} = \vec{MA}$, τότε το M είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.



c) Πως συνδυάζονται οι απαντήσεις των a), b);

M μέσο του AB $\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB}$ ή $\vec{BM} = \vec{MA}$.

Αντίθετα Διανύσματα

7. i. Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα;

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

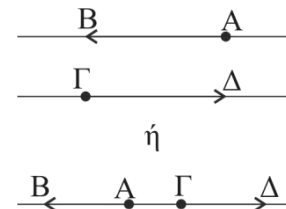
ii. Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ όταν είναι αντίθετα;

$\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ αντίθετα $\Leftrightarrow \vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$ ή $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$.

iii. Ποιο είναι το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{AB}$;

Αντίθετο του $\vec{AB}$ είναι το $-\vec{AB}$ ή $\vec{BA}$ δηλαδή:

$$-\vec{AB} = \vec{BA}.$$



Γωνία δύο Διανυσμάτων

8. i. a) Τι ονομάζουμε γωνία των δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

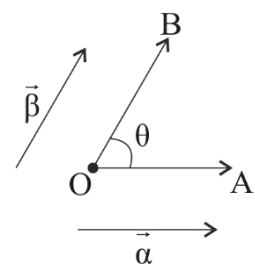
Γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζουμε την **κυρτή γωνία**

$\hat{A\hat{O}B}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και

OB, όταν με αρχή ένα σημείο O σχηματίσουμε τα διανύσματα: $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και

$\vec{OB} = \vec{\beta}$.

Συμβολίζουμε: $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ ή $(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ ή με ένα μικρό γράμμα.

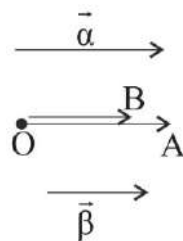


b) Τι τιμές παίρνει η γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$;

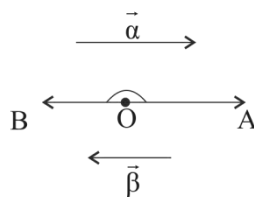
$$0^\circ \leq \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) \leq 180^\circ \quad \text{ή} \quad 0 \leq \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) \leq \pi$$

ii. Ποια η θέση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όταν $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 0, \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \pi$;

$$\bullet \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$$



$$\bullet \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \pi \Leftrightarrow \vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$$



iii. Πότε τα διανύσματα λέγονται ορθογώνια ή κάθετα;

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται ορθογώνια ή κάθετα όταν $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{2} \quad (90^\circ)$ και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

iv. a) Τι θεωρούμε ως γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} (\neq \vec{0}), \vec{0}$;

Ως γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ (μη μηδενικό) και $\vec{0}$, θεωρούμε την γωνία $\left(\vec{\alpha}, \vec{0} \right) = \theta$ με $0 \leq \theta \leq \pi$, δηλαδή

οποιαδήποτε γωνία θ με $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

b) Γιατί το $\vec{0}$ είναι ομόρροπο, αντίρροπο ή κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα;

Γιατί ως γωνία του $\vec{0}$ με κάθε άλλο διάνυσμα θεωρούμε την θ με $0 \leq \theta \leq \pi$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. i. Το μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή: $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$. Ειδικά

$$|\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A, B \text{ συμπίπτουν.}$$

ii. Γενικά ισχύουν:

- $|\vec{\alpha}| \geq 0$
- $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- $|\vec{\alpha}| > 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \neq \vec{0}$
- $|\vec{-\alpha}| = |\vec{\alpha}|$
- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$.

2. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα έχει έναν φορέα, ενώ το μηδενικό διάνυσμα έχει άπειρους φορείς.

3. i. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με φορείς ευθείες παράλληλες ισχύει: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (1) το συμπέρασμα, που προκύπτει, είναι ότι το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι **παραλληλόγραμμο** (γιατί λόγω της (1) έχουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δηλαδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = \Gamma\Delta$).

ii. Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι **ίσα**, πχ: τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δείχνουμε ένα απ' τα παρακάτω:

a) τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του ορισμού της ισότητας των διανυσμάτων.

b) ότι ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BD}$ οπότε με εναλλαγή των ακραίων ή μεσαίων γραμμμάτων αντίστοιχα προκύπτει το ζητούμενο.

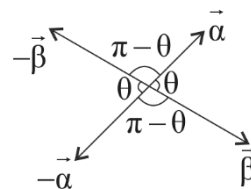
c) ότι καθένα από τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσο προς άλλο διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$, οπότε θα είναι και μεταξύ τους ίσα.

d) ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AD και $B\Gamma$ (που ορίζουν τα δύο ακραία και τα δύο μεσαία γράμματα της ισότητας, που θέλουμε να αποδείξουμε) έχουν κοινό μέσο, οπότε με την προϋπόθεση ότι τα A, B, Γ, Δ δεν είναι συνευθειακά το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

4. i. Για να υπολογίσουμε τη **γωνία** δύο διανυσμάτων πρέπει τα διανύσματα να έχουν **κοινή αρχή**.

ii. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \theta$, τότε:

- $(-\vec{\alpha}, -\vec{\beta}) = \theta$
- $(\vec{\alpha}, -\vec{\beta}) = (-\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi - \theta$



iii. Τα συγγραμμικά (παράλληλα) διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα. Οπότε:

- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \text{ ή } \pi$
- $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \neq 0 \text{ και } \pi$

iv. Όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, τότε $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, γιατί: αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, άτοπο.

5. Για να αποδείξουμε ότι **δύο σημεία ταυτίζονται**, πχ: τα A,B δείχνουμε ένα απ' τα παρακάτω:

i. ότι $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

ii. ότι $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, (O: σημείο του χώρου)

iii. ότι $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EZ}$, όταν τα A και B είναι μέσα των EZ, ΓΔ αντίστοιχα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύει $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 5 = 2|\vec{a}| + 4|\vec{b}|$, αποδείξτε ότι το $\vec{a}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

Λύση

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 5 = 2|\vec{a}| + 4|\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| + 1 + |\vec{b}|^2 - 4|\vec{b}| + 2^2 = 0 \Leftrightarrow (|\vec{a}| - 1)^2 + (|\vec{b}| - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| = 1 \text{ και } |\vec{b}| = 2.$$

Άρα το $\vec{a}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $|\vec{b}| = 2 = 2|\vec{a}|$.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E , ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα Δ , E συμπίπτουν.

Λύση

$$\text{Έχουμε: } \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{Δίνεται: } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\Gamma} \quad (2)$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), έχουμε $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BE}$, οπότε τα Δ , E συμπίπτουν.

3. Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma} \right) = 100^\circ$ και $A\Delta$, BE ύψη. Να βρείτε τις

γωνίες:

$$\text{i. } \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma} \right) \quad \text{ii. } \left(\overrightarrow{\Delta A}, \overrightarrow{B\Gamma} \right) \quad \text{iii. } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma A} \right) \quad \text{iv. } \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE} \right)$$

Λύση

Για να βρούμε γωνία δύο διανυσμάτων πρέπει να έχουν κοινή αρχή.

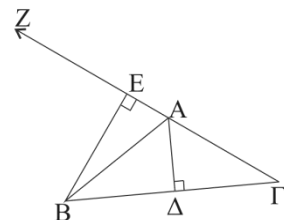
i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται:

- $AB = A\Gamma$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, (1) και
- $\hat{A} = 100^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 100^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{B} = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 40^\circ$

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν κοινή αρχή και $\hat{AB\Gamma} = 40^\circ$ είναι

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma} \right) = 40^\circ.$$

ii. Επειδή $A\Delta$ ύψος, έχουμε $\overrightarrow{A\Delta} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$, άρα $\left(\overrightarrow{\Delta A}, \overrightarrow{B\Gamma} \right) = 90^\circ$.



iii. Αφού τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma A}$ δεν έχουν κοινή αρχή, παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma A}$, οπότε:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma A} \right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AZ} \right) = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

iv. Το τρίγωνο BAE είναι ορθογώνιο με $\hat{E} = 90^\circ$, $\hat{EAB} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AZ} \right) = 80^\circ$ (από iii. ερώτημα), άρα

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE} \right) = \hat{ABE} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}| - 3 \geq 0$ και $|\vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha}| + 8 \leq 6|\vec{\beta}|$.
 - i. Αποδείξτε ότι το $|\vec{\alpha}|$ γίνεται ελάχιστο όταν το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα.
 - ii. Βρείτε το $|\vec{\beta}|$ όταν το $|\vec{\alpha}|$ έχει την ελάχιστη τιμή του.

2. Έστω M το μέσο της πλευράς AB ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Με αρχή το M γράφουμε τα διανύσματα $\vec{MA} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{ME} = -\vec{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι το A είναι μέσο του DE .

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B} = \left(\vec{BA}, \vec{B\Gamma} \right) = 70^\circ$. Σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ και φέρνουμε το ύψος του ΔE . Να βρείτε τις γωνίες:

i. $\left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma} \right)$	ii. $\left(\vec{B\Gamma}, \vec{\Delta E} \right)$	iii. $\left(\vec{\Delta B}, \vec{BA} \right)$
iv. $\left(\vec{EA}, \vec{E\Delta} \right)$	v. $\left(\vec{A\Gamma}, \vec{BA} \right)$	

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τα διανύσματα $\vec{EA}, \vec{E\Delta}$;

§ 1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

Πρόσθεση Διανυσμάτων

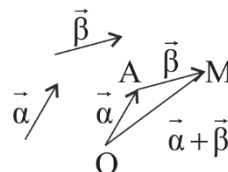
1. i. Τι λέγεται άθροισμα ή συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, και μετά με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AM} = \vec{\beta}$.

Το διάνυσμα $\vec{OM}$ (με αρχή, την αρχή του πρώτου και πέρας, το πέρας του τελευταίου διανύσματος)

λέγεται **άθροισμα ή συνισταμένη** των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και

συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Άρα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$.



Τα διανύσματα που το πέρας του ενός είναι αρχή για το άλλο, λέγονται διαδοχικά διανύσματα.

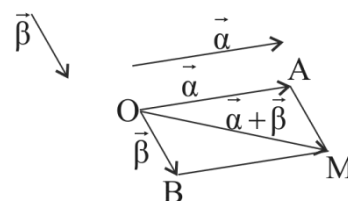
ii. Περιγράψτε λεκτικά και σχηματικά τον κανόνα παραλληλογράμμου, για την πρόσθεση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Με αρχή ένα σημείο O , παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $OBMA$ που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB .

Τότε η διαγώνιος OM , ορίζει το άθροισμα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, δηλαδή

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}.$$



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

2. i. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων;

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών.

Δηλαδή, αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική)
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική)
- $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

ii. Πως προσθέτουμε n διανύσματα: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ με $n \geq 3$;

Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$, $n \geq 3$ ορίζεται ως εξής:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \dots + \vec{a}_n = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \dots + \vec{a}_{n-1}) + \vec{a}_n$$

Δηλαδή, για να προσθέσουμε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου.

Αφαίρεση Διανυσμάτων

3. i. Πως ορίζεται η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$;

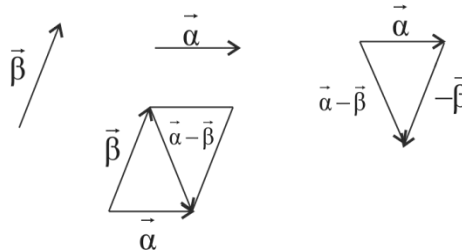
Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$

από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται

ως άθροισμα των διανυσμάτων

$\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$.

Δηλαδή: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$.



ii. Αποδείξτε ότι: «αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο, ώστε $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$ ».

Έχουμε $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow (-\vec{\beta}) + (\vec{\beta} + \vec{x}) = (-\vec{\beta}) + \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Διάνυσμα Θέσεως

4. i. Τι ορίζετε σαν διάνυσμα θέσεως ή διανυσματική ακτίνα σημείου M στο χώρο;

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου.

Τότε για κάθε σημείο M του χώρου, ορίζεται το

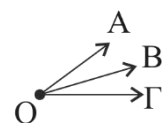
διάνυσμα $\vec{OM}$, το οποίο λέγεται διάνυσμα θέσεως

του M ή διανυσματική ακτίνα του M .



ii. Τι λέγεται σημείο αναφοράς στο χώρο;

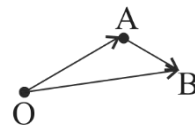
Σημείο αναφοράς στο χώρο λέγεται ένα σημείο O , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου.



iii. Με τι ισούται ένα διάνυσμα, σε σχέση με τις διανυσματικές ακτίνες των άκρων του;

Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη **διανυσματική ακτίνα** του **πέρατος** μείον τη **διανυσματική ακτίνα της αρχής**.

Δηλαδή, αν Ο σημείο αναφοράς : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$



Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

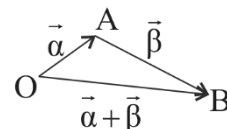
5. i. Ποια σχέση συνδέει το μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων, με τα μέτρα των διανυσμάτων;

Για τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το μέτρο του αθροίσματός τους $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$,

ισχύει: $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

Γιατί: Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left| (OA) - (AB) \right| \leq (OB) \leq (OA) + (AB).$$



ii. Πότε ισχύουν τα « $\Rightarrow$ » στην παραπάνω σχέση;

$$\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$$

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$$

$$\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0}$$

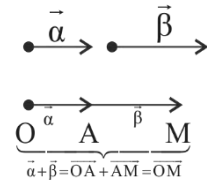
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων:

i. δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου, που θα πάρουμε σαν αρχή του ενός (στη μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων) ή σαν κοινή αρχή και των δύο διανυσμάτων (στον κανόνα του παραλληλογράμμου).

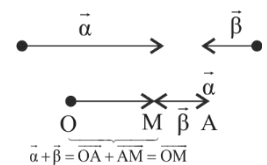
ii. **ομόρροπων**, $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, έχει ίδια κατεύθυνση με την κοινή κατεύθυνση των δύο διανυσμάτων και μέτρο το άθροισμα των μέτρων τους, δηλαδή

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \uparrow \uparrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \text{ και } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$



iii. **αντίρροπων**, $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, έχει διεύθυνση ίδια με την κοινή διεύθυνση των δύο διανυσμάτων, φορά τη φορά του διανύσματος με μεγαλύτερο μέτρο και μέτρο την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους, δηλαδή αν $|\vec{\alpha}| > |\vec{\beta}|$, τότε

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \uparrow \uparrow \vec{\alpha} \text{ και } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$$



2. Όταν έχουμε **άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων**, συνήθως χρησιμοποιούμε την ισότητα $\vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$, ενώ όταν έχουμε άθροισμα δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

3. i. Η **αφαίρεση** δύο διανυσμάτων με **κοινό πέρας** μετατρέπεται σε πρόσθεση δύο διαδοχικών διανυσμάτων, δηλαδή $\vec{AB} - \vec{FB} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$, γιατί $-\vec{FB} = \vec{BF}$.

ii. Η **αφαίρεση** δύο διανυσμάτων με **κοινή αρχή** (την οποία θεωρούμε σαν σημείο αναφοράς) γίνεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.

4. i. **Σημείο αναφοράς** μπορεί να θεωρηθεί οποιοδήποτε σημείο του χώρου ή ακόμα και οποιοδήποτε σημείο του σχήματός μας («αυθαίρετα» επιλεγμένο).

ii. Όταν έχουμε να κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις διανυσμάτων, συνήθως, συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε σημείο αναφοράς O (δικής μας επιλογής) ώστε με εφαρμογή της ιδιότητας $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ να απλοποιήσουμε τελικά τις πράξεις.

5. i. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, άρα το μέγιστο του $|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}|$ είναι το $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, ενώ το ελάχιστο του $|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}|$ είναι το $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$

ii. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο **διανύσματα** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ομόρροπα**, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$. Αντίστοιχα, για να αποδείξουμε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **αντίρροπα**, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$.

iii. Ισχύει $|\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_v| \leq |\vec{\alpha}_1| + |\vec{\alpha}_2| + |\vec{\alpha}_3| + \dots + |\vec{\alpha}_v|$, $v = 1, 2, \dots$

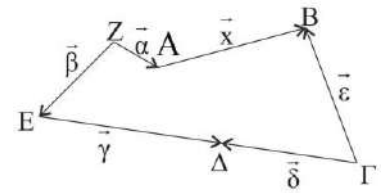
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό σχήμα να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται.

Λύση

Έχουμε: $\vec{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB} \quad (1)$.

Άρα: $\vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta} + \vec{\varepsilon}$



Το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων έχει αρχή, την αρχή του πρώτου και πέρας, το πέρας του τελευταίου

2. Αν ισχύει $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NG}$ και τα A, B, Γ, Δ δεν είναι συνευθειακά, αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Έχουμε

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NG} \Rightarrow \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{NG} \Rightarrow \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{NG} - \overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG}$$

Άρα το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

3. Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, M ισχύει $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ συμπίπτουν.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{GD} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Οπότε τα σημεία B, Γ συμπίπτουν.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$$

$$A, B \text{ συμπίπτουν} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

4. Έστω τα διανύσματα $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ και } \lambda \leq 0)$. Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ και $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$, να δείξετε ότι:

i. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq 5$

ii. $4 \leq |\vec{b}| \leq 10$

iii. $5 \leq |\vec{a} + \vec{b} - \vec{b}| \leq 9$

iv. $|\vec{b} - \vec{b}| \leq 12$

Λύση

i. Ισχύει $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Άρα $|\vec{a} + \vec{b}| \leq 3 + 2 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| \leq 5$.

ii. Έχουμε $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

$$\text{Οπότε } |3 - |\vec{\beta}|| \leq 7 \leq 3 + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - |\vec{\beta}| \leq 7 \\ 7 \leq 3 + |\vec{\beta}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq 3 - |\vec{\beta}| \leq 7 \\ 4 \leq |\vec{\beta}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq -|\vec{\beta}| \leq 4 \\ |\vec{\beta}| \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq |\vec{\beta}| \leq 10 \\ |\vec{\beta}| \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq |\vec{\beta}| \leq 10$$

iii. Είναι $\left| |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |-\vec{\gamma}| \right| \leq \left| |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + (-\vec{\gamma})| \right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |-\vec{\gamma}|$ και $|-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}| = 2$

$$\text{Άρα } |7 - 2| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}| \leq 7 + 2 \Rightarrow 5 \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}| \leq 9$$

iv. Ισχύει $|\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = |(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\gamma})| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |-\vec{\alpha}| + |-\vec{\gamma}| = 7 + 3 + 2 = 12$

$$\text{Δηλαδή } |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| \leq 12$$

5. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{5} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$. Αποδείξτε ότι τα

διανύσματα:

i. $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα

ii. $\vec{a}, -\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα

Λύση

$$\text{Δίνονται } \vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{|\vec{a}|}{5} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3} = \lambda \quad (2).$$

i. Για να είναι τα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ομόρροπα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$$

$$\boxed{|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}}$$

Από τη (2) έχουμε:

$$\frac{|\vec{a}|}{5} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{|\vec{\gamma}|}{3} = \lambda \Leftrightarrow |\vec{a}| = 5\lambda \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = 2\lambda \quad \text{και} \quad |\vec{\gamma}| = 3\lambda \quad (3)$$

$$\text{Ισχύει } (1) \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{a} \quad \text{άρα} \quad |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |\vec{a}| \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 5\lambda \quad (4)$$

$$\text{Είναι } |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}| \stackrel{(3)}{=} 2\lambda + 3\lambda \Leftrightarrow |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}| = 5\lambda \quad (5)$$

$$\text{Από τις (4) και (5) προκύπτει } |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$$

Επομένως $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.

ii. Για να είναι τα $\vec{a}, -\vec{\beta}$ αντίρροπα, αρκεί να δείξουμε ότι $|\vec{a} + (-\vec{\beta})| = \left| |\vec{a}| - |-\vec{\beta}| \right| \Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{\beta}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right|$

$$\text{Από την (1)} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

$$\boxed{|\vec{a} - \vec{\beta}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}}$$

$$\text{άρα } |\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} |\vec{a} - \vec{\beta}| = 3\lambda \quad (6)$$

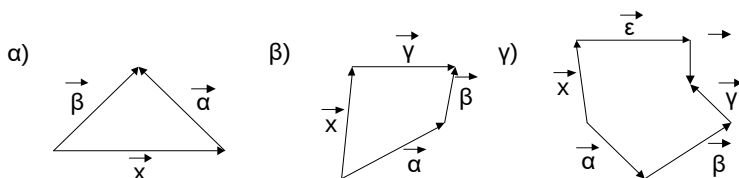
Είναι $\left\| \vec{\alpha} - \vec{\beta} \right\| \stackrel{(3)}{=} |5\lambda - 2\lambda| = 3\lambda \quad (7)$

Από τις (6) και (7) έχουμε $\left| \vec{\alpha} - \vec{\beta} \right| = \left\| \vec{\alpha} - \vec{\beta} \right\|$.

Οπότε $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$.
2. Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε το $\vec{x}$ ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που σημειώνονται στα σχήματα.



3. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{E\Lambda} + \overrightarrow{ZB}$.
Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
4. Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ, E ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{E\Gamma}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E συμπίπτουν. (υπόδειξη: δείξε ότι $\overrightarrow{E\Delta} = \vec{0}$)
5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{E\Lambda}$.
6. Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
7. Αν $|\vec{\alpha}| = 6$ και $|\vec{\beta}| = 4$ να αποδείξετε ότι $2 \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 10$.
8. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.
9. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.
10. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 5$ και $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| \leq 3$.
i. Αποδείξτε ότι:
 - a. $|\vec{\gamma}| - 3 \leq |\vec{\beta}| \leq |\vec{\gamma}| + 3$
 - b. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \neq \vec{0}$
 - c. $2 \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| \leq 8$
- ii. Αν επιπλέον ισχύει $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| + 3$ να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα.
11. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\gamma}| = 4$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} \neq \vec{0}$.

§1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

1. Γράψτε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα.

- Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda \vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:
 - ✓ είναι **ομόρροπο του $\vec{\alpha}$** , αν $\lambda > 0$ και **αντίρροπο του $\vec{\alpha}$** , αν $\lambda < 0$ και
 - ✓ έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.
- Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.
 - Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \vec{\alpha}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

2. i. Ποιες ιδιότητες ισχύουν για το γινόμενο $\lambda \cdot \vec{\alpha}$;

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

- 1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
- 2) $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
- 3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

ii. Ποιες είναι οι συνέπειες του ορισμού και των ιδιοτήτων του γινομένου $\lambda \cdot \vec{\alpha}$;

Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

- 1) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0}$
- 2) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$
- 3) $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$
- 4) $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$
- 5) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- 6) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

3. i. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Πώς ορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων;

Γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ με $n \geq 3$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{u} = \kappa_1\vec{\alpha}_1 + \kappa_2\vec{\alpha}_2 + \dots + \kappa_n\vec{\alpha}_n$, όπου $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n \in \mathbb{R}$

4. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

• Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$. Τότε από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα ισχύει $\lambda\vec{\beta} \parallel \vec{\beta}$, άρα έχουμε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

• Έστω $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$. Θέτουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, άρα $|\vec{\alpha}| = \kappa|\vec{\beta}|, (\kappa \geq 0)$. Συνεπώς:

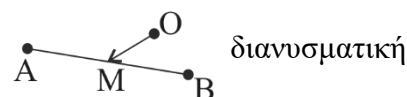
- ✓ Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$ (δηλαδή $\lambda = \kappa > 0$)
- ✓ Αν $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$ (δηλαδή $\lambda = -\kappa < 0$)
- ✓ Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0\vec{\beta}$ (δηλαδή $\lambda = 0$)

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει μοναδικός $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$.

Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

5. i. Τι ονομάζουμε διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος;

Αν M μέσο του τμήματος AB και O σημείο αναφοράς ονομάζουμε ακτίνα μέσου (του AB) το διάνυσμα $\vec{OM}$.



ii. Με τι ισούται η διανυσματική ακτίνα του μέσου M , ευθύγραμμου τμήματος AB , σε σχέση με τις διανυσματικές ακτίνες των άκρων του;

Αποδείξτε τον τύπο.

- Αν O σημείο αναφοράς και M μέσο του AB τότε $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

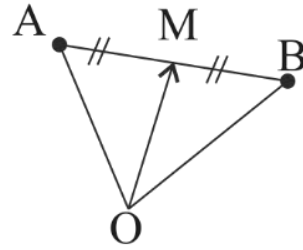
Απόδειξη

Μ μέσο του AB, άρα

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 2$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. i. Στον πολλαπλασιασμό $\lambda \vec{\alpha}$ ($\lambda \neq 0, \vec{\alpha} \neq \vec{0}$), αν ο λ είναι φυσικός αριθμός, τότε το γινόμενο $\lambda \vec{\alpha}$ εκφράζει το άθροισμα λ διανυσμάτων, ίσων με το $\vec{\alpha}$.

ii. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε, για το $\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ ισχύουν:

$$\vec{\beta} \uparrow \vec{\alpha}, \text{ αφού } \frac{1}{|\vec{\alpha}|} > 0 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \left| \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \right| = \frac{1}{|\vec{\alpha}|} |\vec{\alpha}| = 1$$

2. Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, ισχύουν:

- $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \geq 0$
- $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \leq 0$

Σε κάθε περίπτωση από τις παραπάνω έχουμε $|\vec{\alpha}| = |\lambda| |\vec{\beta}|$

3. Για να αποδείξουμε **ισότητα διανυσματικών σχέσεων** ή για να **υπολογίσουμε άθροισμα διανυσμάτων**, συνήθως ακολουθούμε τα παρακάτω:

- Εξετάζουμε αν υπάρχουν διανύσματα με συντελεστή τον ίδιο πραγματικό αριθμό, οπότε εφαρμόζουμε τις ιδιότητες: $\lambda \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BG} = \lambda (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = \lambda \overrightarrow{AG} \quad (1),$

$$\lambda \overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{AG} = \lambda (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG}) = \lambda \overrightarrow{GB} \quad (2),$$

$$\lambda \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AG} = \lambda (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}) = 2\lambda \overrightarrow{AM} \quad (3), \text{ όταν } M \text{ μέσο του } BG.$$

Αν δεν υπάρχουν διανύσματα με συντελεστή τον ίδιο πραγματικό αριθμό, τότε παίρνουμε σημείο αναφοράς και εκφράζουμε κάθε διάνυσμα σαν διαφορά διανυσματικών ακτίνων μέσω της ιδιότητας $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad (4)$

- Ειδικά, αν έχουμε άθροισμα διανυσματικών ακτίνων και το άθροισμα των πραγματικών αριθμών που είναι συντελεστές τους είναι μηδέν, τότε γράφουμε τον μεγαλύτερο, κατά απόλυτη τιμή, συντελεστή ως άθροισμα των άλλων και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (2).

4. Για να αποδείξουμε ότι ένα **διάνυσμα** $\vec{v}$ είναι **σταθερό**, όταν είναι εκφρασμένο σε σχέση με διανύσματα που κάποια έχουν μεταβλητό σημείο M σαν άκρο, κάνουμε **απαλοιφή** του μεταβλητού σημείου.

Σπανιότερα, υποθέτουμε ότι υπάρχει και άλλο σημείο M', διαφορετικό του M, μέσω του οποίου εκφράζεται το διάνυσμα $\vec{v}$ με ανάλογη διανυσματική σχέση και εξισώνοντας τις μορφές του $\vec{v}$ καταλήγουμε σε άτοπο.

5. Για να **προσδιορίσουμε τη θέση σημείου X** που επαληθεύει διανυσματική ισότητα, συνήθως εργαζόμαστε ως εξής:

- εκλέγουμε ένα σταθερό σημείο, συνήθως απ' τα δοσμένα της σχέσης, σαν σημείο αναφοράς (π.χ. A).

- εκφράζουμε κάθε διάνυσμα της σχέσης που έχει άκρο X σαν διαφορά διανυσματικών ακτίνων.
- υπολογίζουμε ισοδύναμα, μέσω της δοσμένης σχέσης, το $\overrightarrow{AX}$ σαν γραμμικό συνδυασμό γνωστών διανυσμάτων και το κατασκευάζουμε χρησιμοποιώντας ιδιότητες.

6. i. Για να αποδείξουμε ότι δύο μη μηδενικά **διανύσματα** $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ που εκφράζονται μέσω διανυσματικών σχέσεων είναι **παράλληλα**, αρκεί να δείξουμε ένα από τα παρακάτω:

- ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ ή
- ότι είναι παράλληλα προς ένα τρίτο διάνυσμα και τα δύο.

Ειδικά για να αποδείξουμε ότι:

- ✓ $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$.
- ✓ $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda < 0$ τέτοιο, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$.

ii. Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα έχουν ίδιο φορέα ή ότι τρία **σημεία** είναι **συνευθειακά** (π.χ.: τα $\overline{AB}, \overline{BF}$ ή τα A, B, Γ) δείχνουμε ότι δύο διανύσματα απ' αυτά που ορίζουν τα A, B, Γ είναι παράλληλα.

7. Για να αποδείξουμε ότι τα μη μηδενικά **διανύσματα** $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν φορείς που **τέμνονται**, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- υποθέτουμε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, οπότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τέτοιο, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ (1).
- εκφράζουμε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μέσω γνωστών διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ της άσκησης και τα αντικαθιστούμε στη σχέση (1).
- μετασχηματίζουμε ισοδύναμα, μέσω πράξεων την παραπάνω σχέση ώστε να καταλήξουμε σε μορφή $x \cdot \vec{u} + \psi \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (2) με $\vec{u}, \vec{v}$ μη παράλληλα.

Τότε: αν $x \neq 0$, $(2) \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{\psi}{x} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$, άτοπο

άρα πρέπει $x = 0$ (3).

Οπότε: $(2) \Leftrightarrow \psi \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \psi = 0$ (4), ($\vec{v} \neq \vec{0}$)

Αλλά το σύστημα των (3), (4) είναι αδύνατο, άτοπο.

Άρα τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη παράλληλα, δηλαδή οι φορείς τους τέμνονται.

8. Για να **υπολογιστούν παράμετροι** (πραγματικοί αριθμοί) από δοσμένη διανυσματική ισότητα, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της σχέσης, συναρτήσει δύο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$, που είναι μη παράλληλα οπότε προκύπτει ισοδύναμη ισότητα της μορφής $A \cdot \vec{u} + B \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (5), όπου τα A, B είναι σχέσεις των παραμέτρων.

- ✓ Αν $A \neq 0$, τότε $(5) \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{B}{A} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$, άτοπο

άρα $A = 0$, οπότε $(5) \Leftrightarrow B\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow B = 0$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ υπολογίζουμε τις παραμέτρους.

9. Για να βρούμε το **γεωμετρικό τόπο** ενός σημείου M διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Αν η δοσμένη σχέση περιέχει πραγματικό αριθμό παράμετρο και είναι δυνατό να γραφεί (χρησιμοποιώντας ισοδυναμίες) στη μορφή $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{\alpha}$, όπου A σταθερό σημείο και $\vec{\alpha}$ σταθερό μη μηδενικό διάνυσμα, τότε $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{\alpha}$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι ευθεία ε , $\varepsilon \parallel \vec{\alpha}$ που διέρχεται από το σημείο A .

ii. Αν η δοσμένη σχέση περιέχει μέτρα διανυσμάτων μετασχηματίζουμε τα εντός των μέτρων αθροίσματα ή γραμμικούς συνδυασμούς, χρησιμοποιώντας συνήθως τα εξής:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MK} \text{ (όπου } K \text{ μέσο του } AB).$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG} \text{ (όπου } G \text{ το κέντρο βάρους του τριγώνου } AB\Gamma), \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AA},$$

και προσπαθούμε να φθάσουμε σε κάποια από τις παρακάτω μορφές:

$$\checkmark \quad |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|, \text{ οπότε το } M \text{ ανήκει στη μεσοκάθετο του } AB.$$

$$\checkmark \quad |\overrightarrow{MA}| = \rho > 0, \text{ οπότε το } M \text{ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το } A \text{ και ακτίνα } \rho.$$

iii. Αν εκτός απ' τη δοσμένη σχέση που περιέχει το M , υπάρχουν μεταβλητά γεωμετρικά στοιχεία που ικανοποιούν κάποια δεδομένα, εκφράζουμε τον τρόπο μεταβολής των μεταβλητών στοιχείων χρησιμοποιώντας παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ και τα δεδομένα τους (π.χ. αν το μεταβλητό σημείο X κινείται στο τμήμα AB , τότε $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$ με $0 \leq \lambda \leq 1$) οπότε έχουμε σχέσεις αντίστοιχες των παραπάνω περιπτώσεων i, ii.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$7\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AA} = 5\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{BA}$$

Λύση

$$\text{Έχουμε: } 7\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AA} = 5\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) - 5(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA}) + 2\overrightarrow{AA} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AA} - 5\overrightarrow{AA} - 2\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AA} - 7\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \text{ που ισχύει.}$$

2. Αν ισχύει $2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{ML}$ είναι αντίρροπα.

Λύση

Αν θεωρήσουμε το L ως σημείο αναφοράς, έχουμε:

$$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ και } \lambda \leq 0)$$

$$2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{LB} + 2(\overrightarrow{LB} - \overrightarrow{LM}) = \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LB}$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LB} - 2\overrightarrow{LM} = 2\overrightarrow{LK} - 2\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{LB}$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{LM} - \overrightarrow{LM} = 2\overrightarrow{LK}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{ML} = 2\overrightarrow{LK}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ML} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KL}$$

Άρα $\overrightarrow{ML} \uparrow \downarrow \overrightarrow{KL}$

3. Αν ισχύει $(\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{PG}$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των A, B, Γ για τις διάφορες τιμές του κ.

Λύση

$$\text{i. Έχουμε } (\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{PG} \Leftrightarrow (\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 2)\overrightarrow{PG} + 3\overrightarrow{PG}$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 2)\overrightarrow{PA} - (\kappa + 2)\overrightarrow{PG} = 3\overrightarrow{PG} - 3\overrightarrow{PB}$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 2)(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PG}) = 3(\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PB})$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 2)\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{BG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\kappa + 2}{3}\overrightarrow{GA} \quad (1)$$

Οπότε $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{GA}$ και επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{GA}$ έχουν κοινό άκρο το Γ έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα, τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ii. • Αν $\frac{\kappa+2}{3} < 0 \Leftrightarrow \kappa < -2$, από την (1) έχουμε $\overrightarrow{B\Gamma} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\Gamma A}$.

Οπότε, τα σημεία B και Γ είναι εκατέρωθεν του A.

• Αν $\frac{\kappa+2}{3} > 0 \Leftrightarrow \kappa > -2$, από την (1) έχουμε $\overrightarrow{B\Gamma} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\Gamma A}$.

Οπότε, τα σημεία A και B είναι εκατέρωθεν του Γ.

• Αν $\frac{\kappa+2}{3} = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$, από την (1) έχουμε $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0}$.

Οπότε, τα σημεία B και Γ συμπίπτουν.

4. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι, για οποιοδήποτε σημείο M, το διάνυσμα $\vec{v} = 7\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} - 2\overrightarrow{OG} - 4\overrightarrow{OD}$ είναι σταθερό.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{v} &= 7\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} - 2\overrightarrow{OG} - 4\overrightarrow{OD} \\ &= 7\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OG} - 4\overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OG} - 4\overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + 4(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{DA} \text{ που είναι σταθερό.} \end{aligned}$$

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να βρείτε σημείο P τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Λύση

Αν θεωρήσουμε το A ως σημείο αναφοράς, έχουμε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) &= -\overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PB} &= -\overrightarrow{BD} \quad (\text{ABΓΔ παρ/μο, άρα } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} &= \frac{\overrightarrow{BG}}{3} \end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BG}$ είναι ομόρροπα και επειδή έχουν κοινό άκρο το B, έχουν τον ίδιο φορέα.

Οπότε τα σημεία B, Γ, P είναι συνευθειακά και το P έχει εκατέρωθεν τα B, Γ.

Επομένως το σημείο P βρίσκεται στην πλευρά BΓ του παραλληλόγραμμου.

6. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{v}, \vec{u}$ ισχύουν: $|\vec{v}| = 3$, $\vec{v} - 2\vec{u} = 2\vec{a}$ και $3\vec{v} + \vec{u} = \vec{\beta}$.

i. Να εκφράσετε το $\vec{v}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \frac{3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}{2}$ είναι ομόρροπο του $\vec{v}$ και να βρείτε το μέτρο του.

iii. Αν $\vec{\delta} = \frac{4}{3}\vec{w} - 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{\eta} = \vec{w} - \frac{9}{4}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$ να αποδείξετε ότι είναι παράλληλα.

Λύση

i. Έχουμε:

$$\begin{cases} \vec{v} - 2\vec{u} = 2\vec{\alpha} \\ 3\vec{v} + \vec{u} = \vec{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} - 2\vec{u} = 2\vec{\alpha} \\ 6\vec{v} + 2\vec{u} = 2\vec{\beta} \end{cases} \xrightarrow{+} 7\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \quad \text{άρα} \quad \vec{v} = \frac{2}{7}\vec{\alpha} + \frac{2}{7}\vec{\beta}$$

ii. Δίνεται $\vec{\gamma} = \frac{3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}{2} = \frac{3}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ (1)

Από το i ερώτημα έχουμε $\vec{v} = \frac{2}{7}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \frac{7}{2}\vec{v}$, οπότε η (1) γράφεται:

$$\vec{\gamma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \frac{21}{4}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \uparrow \uparrow \vec{v}.$$

Είναι $\vec{\gamma} = \frac{21}{4}\vec{v}$ άρα $|\vec{\gamma}| = \left| \frac{21}{4}\vec{v} \right| = \frac{21}{4}|\vec{v}| = \frac{21}{4} \cdot 3 = \frac{63}{4}$

iii. Δίνεται $\vec{\eta} = \vec{w} - \frac{9}{4}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{\eta} + \frac{9}{4}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$ (2)

Αντικαθιστούμε την (2) στο

$$\vec{\delta} = \frac{4}{3}\vec{w} - 3\vec{u} - 2\vec{v} \Rightarrow \vec{\delta} = \frac{4}{3}\left(\vec{\eta} + \frac{9}{4}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}\right) - 3\vec{u} - 2\vec{v} \Rightarrow \vec{\delta} = \frac{4}{3}\vec{\eta} + 3\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{u} - 2\vec{v} \Rightarrow \vec{\delta} = \frac{4}{3}\vec{\eta}$$

άρα $\vec{\delta} \parallel \vec{\eta}$.

7. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Δ, Γ, με σημείο αναφοράς το Β, είναι $-\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $-9\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$, $-4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

αντίστοιχα, με $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$.

i. Να αποδείξετε ότι οι φορείς των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Ρ και να βρείτε τη διανυσματική του ακτίνα.

ii. Να εξετάσετε αν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

iii. Αν Μ μέσο του ΑΒ και Ν μέσο του ΔΓ, να αποδείξετε ότι $MN \parallel B\Gamma$ και $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}}{2}$.

Λύση

i. Έχουμε $\overrightarrow{BA} = -\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Delta} = -9\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = -4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

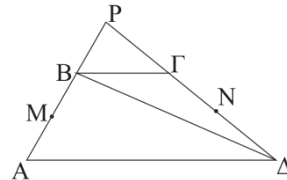
Άρα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta} = -4\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 9\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

Έστω $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \lambda(5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} - 5\lambda\vec{\alpha} = 3\lambda\vec{\beta} - 2\vec{\beta}$
 $\Leftrightarrow (1-5\lambda)\vec{\alpha} = (3\lambda-2)\vec{\beta}$ (1)

- Αν $1-5\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{5}$, (1) $\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{3\lambda-2}{1-5\lambda}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, ΑΤΟΠΟ
- Αν $1-5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}$, (1) $\Rightarrow \vec{0} = -\frac{7}{5}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$, ΑΤΟΠΟ

Άρα τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα,
 επομένως οι φορείς τους τέμνονται στο σημείο P.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A, B, P
 είναι συνευθειακά, καθώς και τα Δ, Γ, P .



Τότε:

- $\overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \kappa \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \kappa(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \kappa\vec{\alpha} + 2\kappa\vec{\beta}$ (2)
- $\overrightarrow{GP} \parallel \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{GP} = \mu \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \mu \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{BG}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \mu(5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) - 4\vec{\alpha} - \vec{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = (5\mu-4)\vec{\alpha} + (3\mu-1)\vec{\beta} \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2) και (3) έχουμε: } \kappa\vec{\alpha} + 2\kappa\vec{\beta} = (5\mu-4)\vec{\alpha} + (3\mu-1)\vec{\beta} \Leftrightarrow (\kappa-5\mu+4)\vec{\alpha} = (-2\kappa+3\mu-1)\vec{\beta} \quad (4)$$

Αν $\kappa-5\mu+4 \neq 0$ από (4) $\Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, ΑΤΟΠΟ

Άρα $\kappa-5\mu+4=0$, οπότε από την (4) $\Rightarrow -2\kappa+3\mu-1=0$ (αφού $\vec{\beta} \neq \vec{0}$).

Επομένως ($\kappa-5\mu+4=0$ και $-2\kappa+3\mu-1=0$) $\Leftrightarrow (\kappa=1$ και $\mu=1)$.

Τότε από την (2) ή την (3) έχουμε $\overrightarrow{BP} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

ii. Επειδή οι φορείς των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ τέμνονται, πρέπει να εξετάσουμε αν $\overrightarrow{A\Delta} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.

$$\text{Έχουμε } \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} = -9\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} + \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} = -8\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} = 2(-4\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}.$$

Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με βάσεις $A\Delta, B\Gamma$.

$$\begin{aligned} \text{iii. } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{GN} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{B\Gamma} + \frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{2} = \frac{\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}{2} - 4\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \frac{-5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}}{2} \\ &= \frac{-12\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}}{2} = \frac{3}{2}(-4\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{B\Gamma}, \text{ άρα } \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}, \text{ οπότε } MN \parallel B\Gamma. \end{aligned}$$

Έχουμε βρει στο ii. $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$.

$$\text{Επίσης } \overrightarrow{MN} = \frac{3\overrightarrow{B\Gamma}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}}{2}.$$

8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

i. $\overrightarrow{OM} = \kappa \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$, με $\kappa + \lambda = 1$ και A, B σημεία ευθείας ε .

ii. $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MB}|$ και A, B, Γ κορυφές τριγώνου.

iii. $|\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM}| = |2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG}|$ και A, B, Γ κορυφές τριγώνου με $|\overrightarrow{BG}| = 6$.

Λύση

i. Με $\kappa + \lambda = 1 \Leftrightarrow \kappa = 1 - \lambda$ η σχέση $\overrightarrow{OM} = \kappa \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$ ισοδύναμα γράφεται:

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda) \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \lambda \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ και A κοινό σημείο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ άρα τα A, B, M είναι συνευθειακά.

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η ευθεία ε .

ii. Έχουμε: $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow$
 $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}| \quad (1)$

Έστω P μέσο του AB και Σ μέσο του $B\Gamma$.

Τότε $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MP}$ και $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MS}$,

$$(1) \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow$$

οπότε $|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MB}| \quad (2)$

Έστω Δ μέσο του PB και E μέσο του $B\Sigma$.

Τότε $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{M\Delta}$ και $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME}$, οπότε

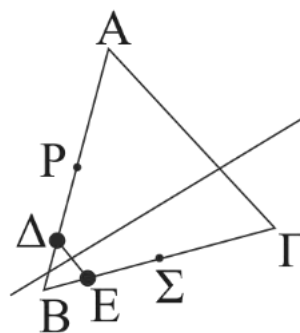
$$(2) \Leftrightarrow |2\overrightarrow{M\Delta}| = |2\overrightarrow{ME}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{M\Delta}| = |\overrightarrow{ME}|$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΔE .

iii. Έχουμε $|\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM}| = |2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG}| \quad (1)$

Έστω Δ μέσο του $B\Gamma$, οπότε $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{M\Delta}$ και $(1) \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{M\Delta}| = 3|\overrightarrow{BG}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{M\Delta}| = 3 \cdot 6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{M\Delta}| = 9$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Δ (μέσο του $B\Gamma$) και ακτίνα $\rho = 9$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Θεωρούμε δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ένα σημείο O και τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, $\vec{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{OD} = 6\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι $\vec{AB} \parallel \vec{GD}$.
2. Έστω O το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε M του επιπέδου του παραλληλογράμμου ισχύει: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$.
3. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με κέντρο K και M μέσο του $K\Gamma$. Αποδείξτε ότι: $\vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{AM} - 2\vec{AG}$.
4. Αν ισχύει $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MG} = \vec{NA} + 2\vec{NB} + 3\vec{NG}$, να δείξετε ότι τα σημεία M, N ταυτίζονται.
5. Έστω A, B, Γ τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας (ϵ) του επιπέδου Oxy . Να αποδειχθεί ότι για κάθε σημείο M του επιπέδου Oxy το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MG}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα.
6. Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.
 - i. Να προσδιορίσετε ένα σημείο M τέτοιο, ώστε $\vec{BG} + \vec{AM} = \vec{GD} - \vec{BA}$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MG} - \vec{MD}$ είναι σταθερό.
7. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία E και Z της διαγωνίου AG έτσι, ώστε: $AE = ZG = \frac{1}{4}AG$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$:
 - i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{DZ}$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
 - ii. Να δείξετε ότι το $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου. Αν είναι $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{OM} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma}$. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, B, M είναι συνευθειακά και ότι το M είναι μέσο του AB .
9. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία M, N τέτοια ώστε να ισχύουν: $\vec{AM} = \vec{AN}$ και $\vec{BN} = \vec{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M, Γ, N είναι συνευθειακά.
10. Αν ισχύει $2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 5\vec{PG} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
11. Αν ισχύει η ισότητα $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία K, L, M είναι συνευθειακά.

12. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και ορίζουμε στο επίπεδο όπου τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε :

$\overrightarrow{A\Delta} = 5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$ να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

13. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma}$.

- Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

14. Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$.

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.
- Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

15. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z στην $A\Delta$ και στη διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta})$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$.
- τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά.

16. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν M και M' είναι τα μέσα των $AB, A'B'$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{MM'}$.

17. Δίνεται κύκλος κέντρου K και ακτίνας R και $AB, \Gamma\Delta$ κάθετες χορδές του που τέμνονται στο σημείο Σ .

- Να δείξετε ότι $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta} = 2\overrightarrow{K\Sigma}$.
- Αν M το μέσο του $A\Gamma$ και N το μέσο του ΔB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $M\Sigma N K$ είναι παραλληλόγραμμο.

18. Έστω M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και N το κοινό σημείο των AM και $B\Delta$.

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{N\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Delta}$.

19. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $AB \parallel \Delta\Gamma$ και M, N τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το ευθύγραμμο τμήμα MN είναι παράλληλο στις βάσεις του τραπεζίου.

ii. $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}}{2}$

20. Δίνονται τα σημεία O, A, B, Γ τέτοια, ώστε τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι αν $\overrightarrow{O\Gamma} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και να βρείτε τη σχετική τους θέση για τις διάφορες τιμές του λ .

21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z τέτοια ώστε να ισχύουν: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

22. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y όταν ισχύει η ισότητα $(x-y+1)\overrightarrow{AB} + (y-3x)\overrightarrow{B\Gamma} + 2x\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$ και τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.

23. Δίνονται τα διανύσματα: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha} + \frac{\vec{\beta}}{2}$, που σχηματίζουν τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν

O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου, να βρείτε το $\overrightarrow{OB}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

24. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα τετράπλευρο. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta}|$.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 5$, $|\vec{\gamma}| = 4$ και $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 7$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 2$ και

$\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ να

i. Βρείτε το $|\vec{\beta}|$

ii. Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

26. Έστω A, B σημεία του επιπέδου (P) . Ορίζουμε τα σημεία K και Λ από τις σχέσεις

$$8\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0} \text{ και } 8\overrightarrow{\Lambda A} - 3\overrightarrow{\Lambda B} = \vec{0}$$

i. Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{11}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Lambda\Lambda} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

ii. Αν M τυχαίο σημείο ορίζουμε τα διανύσματα $\vec{u} = 8\vec{MA} + 3\vec{MB}$ και $\vec{v} = 8\vec{MA} - 3\vec{MB}$.

Να εκφραστεί το $\vec{u}$ συναρτήσει του $\vec{MK}$ και το $\vec{v}$ συναρτήσει του $\vec{ML}$.

iii. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων M του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $8|\vec{MA}| = 3|\vec{MB}|$.

27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\vec{A\Delta} = 2\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma}$ και $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma}$.

i. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

28. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O . Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\vec{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$, τότε:

i. να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

§ 1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΘΕΩΡΙΑ

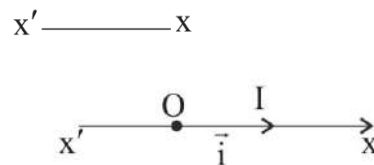
Άξονας – Καρτεσιανό Επίπεδο

1. i. Πώς ορίζεται ο άξονας;

Σε μια ευθεία $x'x$ επιλέγουμε δύο σημεία O και I ,

έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox . Τότε λέμε ότι έχουμε έναν **άξονα**, με **αρχή το O** και **μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$** και τον συμβολίζουμε $x'x$.

Χαρακτηρίζουμε : **θετικό ημιάξονα Ox** , την ημιευθεία Ox και **αρνητικό ημιάξονα Ox'** , την ημιευθεία Ox' .



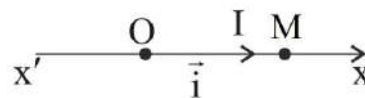
ii. Πώς ορίζεται η τετμημένη σημείου M , που βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$;

Επειδή $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{i}$, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x , τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. Τον αριθμό x ονομάζουμε **τετμημένη** του M .

Αντίστροφα: Από την ισότητα $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ προκύπτει ότι σε κάθε

πραγματικό x , αντιστοιχεί μοναδικό σημείο M του άξονα $x'x$ με τετμημένη x .

Συμβολίζεται **$M(x)$** .



iii. Πότε λέμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και πότε ένα κανονικό;

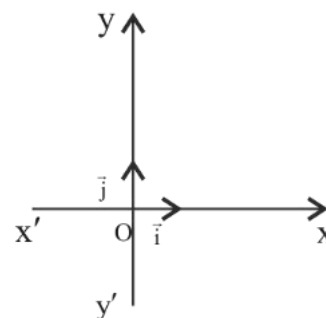
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο έχουμε όταν σχεδιάσουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O .

Κανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο έχουμε όταν σχεδιάσουμε δύο άξονες $x'x$, $y'y$ με κοινή αρχή O και ίσου μήκους μοναδιαία διανύσματα.

iv. Πως ορίζεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο;

Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο (ή **καρτεσιανό επίπεδο**), έχουμε όταν σχεδιάσουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$, $y'y$ με κοινή αρχή O και ισομήκη μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}$).

Συμβολίζουμε **Oxy** .



ν. Αποδειξτε ότι: Σε κάθε σημείο M του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος (x, y) και αντίστροφα.

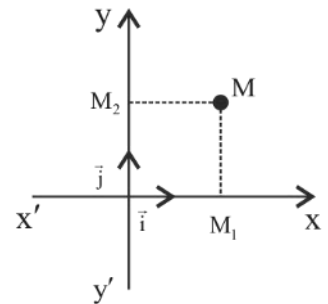
Απόδειξη

Από το M φέρνουμε παράλληλη ευθεία στον $y'y$ που τέμνει τον $x'x$ στο M_1 και παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει στον $y'y$ στο M_2 .

Αν x είναι η τετμημένη του M_1 (στον $x'x$) και y η τετμημένη του M_2 (στον $y'y$), τότε ο x λέγεται τετμημένη του M και ο y λέγεται τεταγμένη του M .

Συντεταγμένες του M είναι: η τετμημένη x και η τεταγμένη y .

Άρα σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος (x, y) συντεταγμένων.



Αντίστροφα: Έστω ζεύγος (x, y) . Πάνω στον άξονα $x'x$ παίρνουμε το σημείο $M_1(x)$ και στον $y'y$ το σημείο $M_2(y)$. Από τα M_1 και M_2 φέρνουμε παράλληλες στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο M . Το σημείο M είναι το ζητούμενο. Άρα, σε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) αντιστοιχεί μοναδικό σημείο M του επιπέδου με τετμημένη x και τεταγμένη y και συμβολίζεται $M(x, y)$ ή απλά (x, y) .

Συντεταγμένες Διανύσματος

2. i. Πρόταση: Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Απόδειξη

Έστω Oxy ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου.

Θα αποδείξουμε ότι:

- το $\vec{\alpha}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Με αρχή το O σχεδιάζουμε $\vec{OA} = \vec{\alpha}$.

Φέρνουμε τις προβολές του A , A_1 και A_2 στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} \quad (1).$$

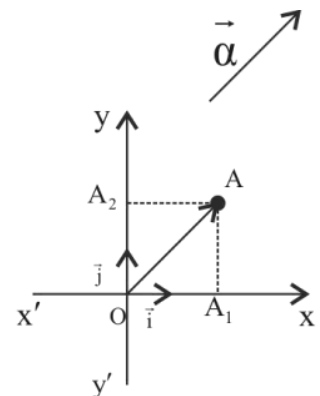
Αν x, y οι συντεταγμένες του A , τότε ισχύει $\vec{OA_1} = x\vec{i}$ και $\vec{OA_2} = y\vec{j}$

Επομένως η (1) γράφεται: $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

- η έκφραση του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδική.

Έχουμε $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Έστω ότι $\vec{\alpha} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$



Τότε $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow x\vec{i} - x'\vec{i} = y'\vec{j} - y\vec{j} \Leftrightarrow (x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}, (2).$

Αν $x \neq x' \Leftrightarrow x - x' \neq 0$, από τη (2) έχουμε: $\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j},$

δηλαδή $\vec{i} \parallel \vec{j}$, ΑΤΟΠΟ.

Άρα $x = x'$, οπότε από (2): $(y' - y)\vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow (y' - y = 0 \text{ ή } \vec{j} = \vec{0}).$

Αλλά $\vec{j} \neq \vec{0}$ επομένως $y' = y.$

ii. Ποιες είναι οι συνιστώσες του $\vec{\alpha}$, όταν εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και ποιες οι συντεταγμένες του;

Όταν έχουμε $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$:

- **συνιστώσες** του $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα είναι τα διανύσματα $x\vec{i}$, $y\vec{j}$.
- **συντεταγμένες** του $\vec{\alpha}$ είναι οι αριθμοί x, y και λέγονται: **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ ο x και **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$ ο y .

iii. Πότε δύο διανύσματα, που βρίσκονται σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και είναι εκφρασμένα σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ίσα;

Δύο διανύσματα είναι ίσα, αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες.

Δηλαδή αν $\vec{\alpha} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ και $\vec{\beta} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2).$

iv. Πως συμβολίζεται το $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ μέσω των συντεταγμένων του;

Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη x και τεταγμένη y , συμβολίζεται με το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) . Οπότε: $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (x, y).$

v. Γράψτε το μηδενικό διάνυσμα, μέσω συντεταγμένων.

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} \Leftrightarrow \vec{0} = (0, 0)$$

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

3. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του:

i. αθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} + \vec{\beta} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \\ &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \\ &= x_1\vec{i} + x_2\vec{i} + y_1\vec{j} + y_2\vec{j} \\ &= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}\end{aligned}$$

ii. γινομένου $\lambda \cdot \vec{\alpha}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{\alpha} = \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\lambda \vec{\alpha} &= \lambda (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \\ &= (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} = (\lambda x_1, \lambda y_1)\end{aligned}$$

iii. γραμμικού συνδυασμού $\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = \lambda (x_1, y_1) + \mu (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

4. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και M μέσο του AB ,

να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του M είναι:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$\text{δηλαδή } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

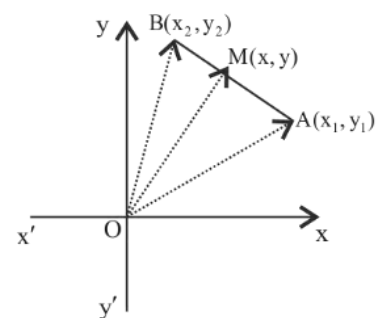
Απόδειξη

Έστω $M(x, y)$ το μέσο του AB .

$$\text{Ισχύει } \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$\begin{aligned}(x, y) &= \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

5. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του $\overrightarrow{AB}$ είναι $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$, δηλαδή $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Απόδειξη

Έχουμε: $A(x_1, y_1)$, άρα $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$, άρα $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

Έστω: $\overrightarrow{AB} = (x, y)$

Επειδή: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Άρα $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

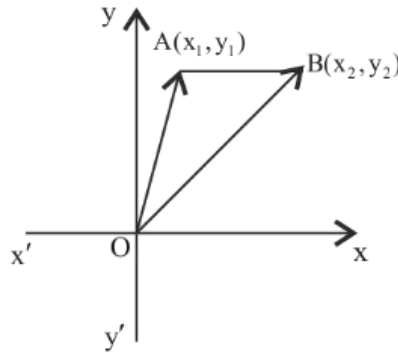
Δηλαδή:

- Τετμημένη του $\overrightarrow{AB}$ = τετμημένη του B – τετμημένη του A

- Τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$ = τεταγμένη του B – τεταγμένη του A

(τέλος – αρχή)

Οπότε $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



Μέτρο Διανύσματος

6. Να αποδείξετε ότι ο τύπος που δίνει το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$ είναι $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Απόδειξη

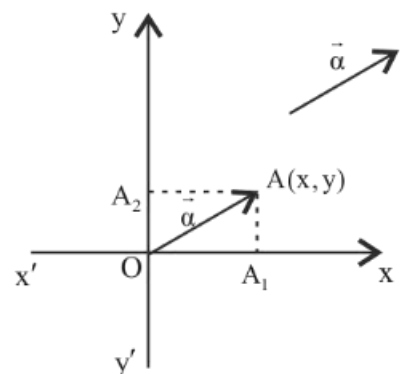
Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (x, y)$ η διανυσματική ακτίνα του σημείου A, οπότε $A(x, y)$.

Αν A_1, A_2 οι προβολές του A στους άξονες x', y' αντίστοιχα, ισχύει

$(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$. Άρα

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 = \\ &= (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Επομένως $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



7. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και

$B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Απόδειξη

Ισχύουν

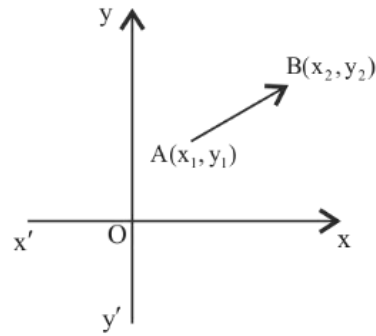
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| \quad (1),$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ και}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

Άρα από (1) και (2):

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

8. i. Τι ονομάζουμε ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, που έχει ως 1^η γραμμή τις συντεταγμένες του

$\vec{\alpha}$ και ως 2^η γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{\beta}$, τη λέμε **ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** (με τη σειρά που δίνονται) και τη συμβολίζουμε με $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Δηλαδή $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

ii. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με γνωστές συντεταγμένες, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Απόδειξη

• Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, που έχουν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

✓ Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2) \Leftrightarrow (x_1 = \lambda x_2 \text{ και } y_1 = \lambda y_2), \text{ οπότε}$$

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \lambda x_2 y_2 - x_2 \lambda y_2 = 0.$$

✓ Αν $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x_1 \cdot 0 - 0 \cdot y_1 = 0$.

Άρα αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, έχουμε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

• Έστω $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad (1)$

✓ Αν $x_2 \neq 0$, τότε από την (1) $y_1 = \frac{x_1}{x_2} y_2$, οπότε αν θέσουμε $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$,

θα έχουμε $x_1 = \lambda x_2$ και $y_1 = \lambda y_2$.

Άρα $\vec{\alpha} = (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda (x_2, y_2) = \lambda \vec{\beta}$ και συνεπώς $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

✓ Αν $x_2 = 0$, τότε από την (1) $x_1 = 0$ ή $y_2 = 0$, οπότε:

- Αν $x_1 = 0$, τότε $\vec{\alpha} \parallel y'y$ και με $x_2 = 0$ έχουμε $\vec{\beta} \parallel y'y$, άρα $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.
- Αν $y_2 = 0$, τότε με $x_2 = 0$ έχουμε $\vec{\beta} = \vec{0}$, άρα $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

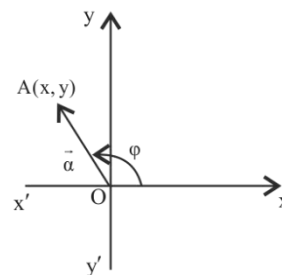
Οπότε αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ έχουμε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

9. i. Τι ονομάζουμε γωνία φ , που σχηματίζει το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$; Τι τιμές παίρνει;

Γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$, όταν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ ονομάζουμε τη γωνία φ που διαγράφει ο ημιάξονας Ox , αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία OA .

Τιμές της γωνίας φ : $0 \leq \varphi < 2\pi$



ii. Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος $\vec{\alpha}$;

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, με $x \neq 0$, ορίζουμε ως **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή λ , το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του $\vec{\alpha}$.

Επομένως $\lambda = \frac{y}{x} = \tan \varphi$, όπου φ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$

- Αν $x = 0$, δηλαδή $\vec{\alpha} \parallel y'y$ τότε **δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης** για το $\vec{\alpha}$.
- Αν $y = 0$, δηλαδή $\vec{\alpha} \parallel x'x$ και $x \neq 0$, τότε $\lambda = 0$.

iii. Να αποδείξετε ότι: αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, με $x_1, x_2 \neq 0$ εφόσον ορίζονται συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{x_2 y_1}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. i. Η απόσταση του σημείου $M(x, y)$ από τον άξονα:

- $x'x$ είναι $|y|$
- $y'y$ είναι $|x|$.

ii. Για το σημείο $M(x, y)$ έχουμε:

- $M \in x'x \Leftrightarrow y = 0$, δηλαδή έχει τη μορφή $M(x, 0)$
- $M \in y'y \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή έχει τη μορφή $M(0, y)$

iii. Το συμμετρικό του σημείου $M(x, y)$ ως προς:

- Τον άξονα $x'x$, είναι $M_1(-x, y)$
- Τον άξονα $y'y$, είναι $M_2(x, -y)$
- Το $O(0, 0)$, είναι $M_3(-x, -y)$
- Τη διχοτόμο των γωνιών του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου ($y = x$), είναι $M_4(y, x)$.

2. i. Οι συντεταγμένες διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ με αρχή την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων είναι ίδιες με τις συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος.

Δηλαδή $A(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = (x, y)$.

ii. Αν $\vec{\alpha} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ έχουμε:

- $\vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow y = 0$, δηλαδή $\vec{\alpha} = (x, 0)$
- $\vec{\alpha} \parallel y'y \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή $\vec{\alpha} = (0, y)$
- Αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\alpha}$ είναι το $-\vec{\alpha} = (-x, -y)$.

iii. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε:

- $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Leftrightarrow (x_1 \neq 0 \text{ ή } y_1 \neq 0)$
- $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta} \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \text{ ή } y_1 \neq y_2)$

3. Για να βρούμε τις **συντεταγμένες ενός σημείου X** εκφράζουμε με ισοδύναμη διανυσματική σχέση τις προϋποθέσεις του προβλήματος ή τις ιδιότητες που αφορούν το X, οπότε αυτή τη σχέση τη μετασχηματίζουμε σε σχέση συντεταγμένων.

π.χ.:

- Αν το $X(x, y)$ είναι συμμετρικό του $A(\alpha_1, \alpha_2)$ ως προς το $B(\beta_1, \beta_2)$ τότε: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BX}$ ή B μέσο του AX ή $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{BX}$

- Αν το X είναι σημείο τομής των ευθειών $AB, \Gamma\Delta$, με A, B, Γ, Δ σταθερά σημεία, τότε: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AX}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta X}$.
- Αν το X είναι σημείο της ευθείας AB , τότε επειδή τα A, B, X είναι συνευθειακά σημεία ισχύει: $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{XB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{XB}) = 0$

4. i. Για να αποδείξουμε ότι δύο **ευθύγραμμα τμήματα** έχουν **κοινό μέσο**, συγκρίνουμε τις συντεταγμένες των μέσων τους (πρέπει να είναι ίσες).

ii. Για να αποδείξουμε ότι **δύο σημεία ταυτίζονται**, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν ίδιες συντεταγμένες.

5. Όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι **παράλληλα** ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow (\text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ ή } \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}} \text{ (όταν ορίζονται)}$$

Ειδικά η ισοδυναμία:

- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, έχει νόημα αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και δηλώνει επιπλέον αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ή αντίρροπα.
- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$, εφαρμόζεται συνήθως όταν τα διανύσματα εκφράζονται με συντεταγμένες, δεν χρειάζεται περιορισμούς, αλλά δεν προσδιορίζει τη σχέση που έχουν οι φορές των διανυσμάτων.
- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$, έχει νόημα μόνο αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$ ώστε να ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσής τους και δεν προσδιορίζει τη σχέση που έχουν οι φορές των διανυσμάτων.

Οπότε

i. Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνονται με συντεταγμένες και θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

- **είναι ή δεν είναι παράλληλα**, υπολογίζουμε την $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
- **είναι ομόρροπα ή αντίρροπα**, βρίσκουμε σχέση της μορφής $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ και συμπεραίνουμε ανάλογα με το αν $\lambda > 0$ ή $\lambda < 0$ (κάποιες φορές χρειάζεται να προηγηθεί η σχέση $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$).

ii. Αν δίνονται οι συντεταγμένες διανύσματος $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και **αναζητούμε διάνυσμα $\vec{\beta}$** για το οποίο ισχύει μια συνθήκη και επιπλέον είναι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, χρησιμοποιούμε εκτός από τη δοσμένη συνθήκη και τις παρακάτω σχέσεις αντίστοιχα

- $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
- $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda > 0$
- $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda < 0$

6. Για να αναλυθεί διάνυσμα $\vec{X}$ σε δύο συνιστώσες με γνωστές διευθύνσεις που καθορίζονται από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ή για να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{X}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε, οι συνιστώσες του $\vec{X}$ να είναι: $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha}$ και $\vec{v} = \lambda \vec{\beta}$, οπότε $\vec{X} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ (1).

Αντικαθιστούμε τα $\vec{x}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα με τις συντεταγμένες τους και μετά τις πράξεις προκύπτει σύστημα με αγνώστους τα κ, λ .

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη παράλληλα, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε υπάρχει μοναδικός τρόπος γραφής του $\vec{X}$ σύμφωνα με την (1).
- Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \parallel \vec{X}$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οπότε το $\vec{X}$ γράφεται με άπειρους τρόπους σύμφωνα με την (1).
- Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και το $\vec{X}$ μη παράλληλο στο $\vec{\alpha}$, το σύστημα είναι αδύνατο, οπότε το $\vec{X}$ δεν γράφεται σύμφωνα με την (1), ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

7. Για να βρούμε τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$, $x \neq 0$ με τον άξονα $x'x$, εφαρμόζουμε τα παρακάτω:

- Βρίσκουμε $\lambda = \frac{y}{x}$
- Προσδιορίζουμε γωνία φ με $\varepsilon\varphi = |\lambda|$

$$\left(\varepsilon\varphi 0^\circ = 0, \varepsilon\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1, \varepsilon\varphi 60^\circ = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \right)$$

- Σχηματίζουμε σε σύστημα συντεταγμένων διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και αν βρίσκεται στο:

- ✓ 1° τεταρτημόριο, έχουμε $\omega = \varphi$
- ✓ 2° τεταρτημόριο, έχουμε $\omega = \pi - \varphi$
- ✓ 3° τεταρτημόριο, έχουμε $\omega = \pi + \varphi$
- ✓ 4° τεταρτημόριο, έχουμε $\omega = 2\pi - \varphi$

Ειδικά αν $\vec{\alpha} = (0, y)$, τότε όταν:

- ✓ $y > 0$, έχουμε $\omega = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$
- ✓ $y < 0$, έχουμε $\omega = 270^\circ \left(\frac{3\pi}{2} \right)$

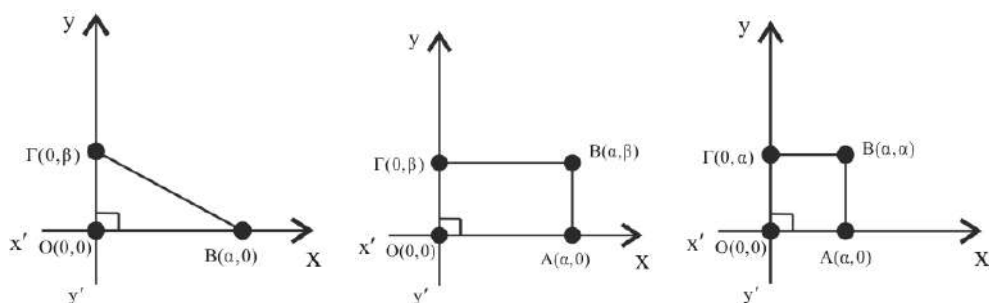
8. Για να αποδείξουμε γεωμετρικά προβλήματα, πολλές φορές διευκολύνει η αναλυτική μέθοδος που περιγράφεται με τα παρακάτω βήματα:

- Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy , έτσι ώστε να έχουμε όσο γίνεται περισσότερα σημεία με κάποια συντεταγμένη 0 .
- Εκφράζουμε τα στοιχεία του σχήματος χρησιμοποιώντας συντεταγμένες και κατόπιν εφαρμόζοντας ιδιότητες αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

Ειδικά για το βήμα i., έχουμε ότι:

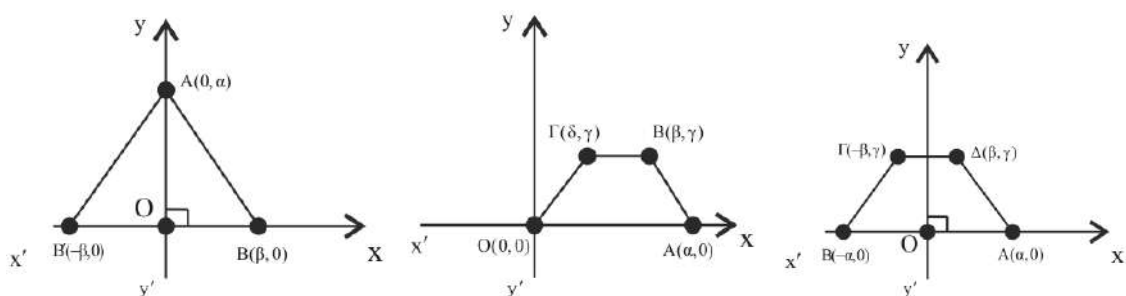
A. Αν στο πρόβλημα υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή τετράγωνο, τότε:

- αρχή των αξόνων είναι η κορυφή της ορθής γωνίας,
- άξονες $x'x$, $y'y$ οι ευθείες των δύο κάθετων πλευρών, που διέρχονται από την κορυφή της ορθής γωνίας.



B. Αν στο πρόβλημα υπάρχει ισοσκελές ή ισόπλευρο τρίγωνο, ή ισοσκελές τραπέζιο, τότε:

- άξονας $x'x$ είναι η ευθεία της βάσης του τριγώνου ή της μεγάλης βάσης του τραπέζιου.
- άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος της αντίστοιχης βάσης του τριγώνου.

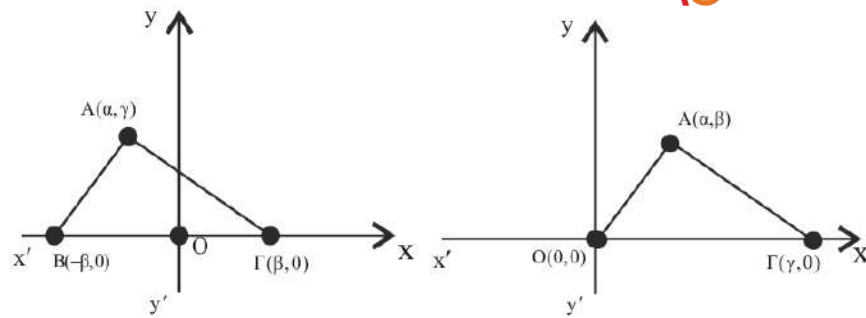


Γ. ▯ Αν στο πρόβλημα υπάρχει σκαληνό τρίγωνο τότε:

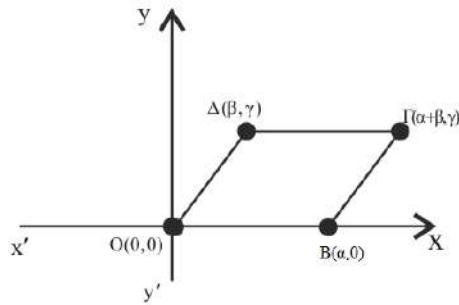
- άξονας $x'x$ είναι η ευθεία της βάσης του
- άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος της βάσης του

ή

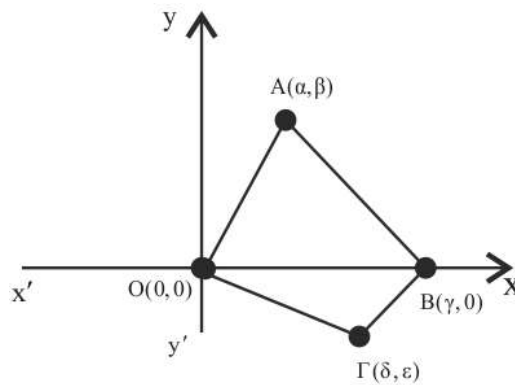
- αρχή των αξόνων είναι η μια κορυφή της βάσης του
- άξονας $x'x$ είναι η ευθεία της βάσης του
- άξονας $y'y$ είναι η ευθεία, που είναι κάθετη στον $x'x$ στην κορυφή που θεωρούμε αρχή των αξόνων.



- Αν στο πρόβλημα υπάρχει παραλληλόγραμμο, τότε κάνουμε ότι και στην περίπτωση b).



- Αν στο πρόβλημα υπάρχει τυχαίο τετράπλευρο, τότε:
 - αρχή των αξόνων είναι μία κορυφή του
 - άξονας $x'x$ είναι η ευθεία μιας διαγωνίου του
 - άξονας $y'y$ είναι ευθεία κάθετη στον $x'x$ στην κορυφή που θεωρούμε αρχή των αξόνων.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 4, \lambda^2 - 2\lambda)$. Να βρείτε τον λ ώστε να ισχύει:

i. $\vec{a} = \vec{0}$,

ii. $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} \parallel x'x$.

Λύση

$$\text{i. } \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4, \lambda^2 - 2\lambda) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \\ \lambda(\lambda - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) \\ \vec{a} = \vec{0} &\Leftrightarrow x = 0 \text{ και } y = 0 \end{aligned}$$

ii. Στο i. ερώτημα βρήκαμε: $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 2$,

άρα εφόσον θέλουμε $\vec{a} \neq \vec{0}$ πρέπει $\lambda \neq 2$.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) \\ \vec{a} \neq \vec{0} &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0 \end{aligned}$$

Είναι:

$$\vec{a} \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2$$

(απορρίπτεται αφού $\lambda \neq 2$).

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) \\ \vec{a} \parallel x'x &\Leftrightarrow \vec{a} = (x, 0) \end{aligned}$$

Άρα $\lambda = 0$

$$\vec{a} \parallel y'y \Leftrightarrow \vec{a} = (0, y)$$

2. Αν $\vec{a} = (\kappa - 1, \lambda - 2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda, 2\kappa - 1)$ να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε να ισχύει $\vec{a} = \vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x_1, y_1) \\ \vec{\beta} &= (x_2, y_2) \\ \vec{a} = \vec{\beta} &\Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \kappa - 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \lambda & 2\kappa - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa - 1 = \lambda \\ \lambda - 2 = 2\kappa - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \lambda + 1 \\ \lambda - 2 = 2(\lambda + 1) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \lambda + 1 \\ \lambda - 2\lambda = 2 - 1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \lambda + 1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -3 + 1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -2 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (-3, -1)$.

i. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, όταν ισχύει $2\vec{\gamma} = 4\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{v}$.

ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{v}, \vec{\gamma}$ του i. ερωτήματος.

Λύση

i.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{v} &= \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \quad (\text{αντικαθιστούμε τα } \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \\ &= (-1, 2) - 2(-3, -1) \\ &= (-1, 2) + (6, 2) \\ &= (-1 + 6, 2 + 2) \\ &= (5, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2) \\ \lambda \vec{a} &= \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \\ \vec{a} + \vec{b} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad 2\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{\gamma} = 4 \cdot (-1, 2) + (-3, -1) - (5, 4) \Leftrightarrow$$

$$2\vec{\gamma} = (-4, 8) + (-3, -1) + (-5, -4) \Leftrightarrow 2\vec{\gamma} = (-4 - 3 - 5, 8 - 1 - 4) \Leftrightarrow$$

$$2\vec{\gamma} = (-12, 3) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\vec{\gamma} = \frac{1}{2}(-12, 3) \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \left(-\frac{12}{2}, \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\gamma} = \left(-6, \frac{3}{2}\right)$$

ii. Αναζητούμε αριθμούς λ, μ τέτοιους ώστε να ισχύει:

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{\gamma} \Leftrightarrow (1, 5) = \lambda(5, 4) + \mu \left(-6, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (1, 5) = (5\lambda, 4\lambda) + \left(-6\mu, \frac{3}{2}\mu\right) \Leftrightarrow (1, 5) = \left(5\lambda - 6\mu, 4\lambda + \frac{3}{2}\mu\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda - 6\mu = 1 \\ 4\lambda + \frac{3}{2}\mu = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda - 6\mu = 1 \\ 8\lambda - 3\mu = 10 \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε: } D = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 63, \quad D_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 63, \quad D_\mu = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 42$$

$$\text{Άρα } \lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{63}{63} = 1, \mu = \frac{D_\mu}{D} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Επομένως } \vec{u} = \vec{v} + \frac{2}{3}\vec{\gamma}$$

4. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $M(0, 3)$, M μέσο του AB . Να υπολογιστούν:

i. οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$

ii. το μέτρο του $\overrightarrow{AM}$

iii. οι συντεταγμένες του B

iv. το μήκος του AB

v. οι συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου Γ του A ως προς το B .

vi. η γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $x'x$.

Λύση

i. $A(1, 2), M\left(\begin{smallmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

Άρα $\overrightarrow{AM} = (0-1, 3-2) = (-1, 1)$

$$\begin{array}{l} A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \\ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \end{array}$$

ii. Από i. : $\overrightarrow{AM} = (-1, 1)$,

άρα $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\vec{a} = (x, y) \text{ άρα } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

iii. Έστω $B(x_2, y_2)$. Δίνεται $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τότε } M\left(\frac{1+x_2}{2}, \frac{2+y_2}{2}\right) \\ \text{Δίνεται } M(0, 3) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ σημεία} \\ \text{Μ μέσο } AB \text{ άρα } M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \end{array}$$

Άρα $\frac{1+x_2}{2} = 0$ και $\frac{2+y_2}{2} = 3$

$\Leftrightarrow 1+x_2 = 0$ και $2+y_2 = 6$

$\Leftrightarrow x_2 = -1$ και $y_2 = 4$

Οπότε $B(-1, 4)$

iv. $A(1, 2), B(-1, 4)$: $(AB) = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2): (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

v. Το B θα είναι μέσο του ΑΓ.

Άρα:

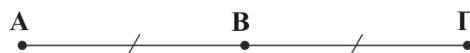
$$x_B = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = -3$$

$$y_B = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow y_\Gamma = 6$$

Άρα $\Gamma(-3, 6)$

vi. Έχουμε $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} x_2 & y_2 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

$$\vec{a} = (x, y), \lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\varphi, x \neq 0$$



$$\bullet \quad \overrightarrow{AB} = (-1-1, 4-2) = (-2, 2)$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

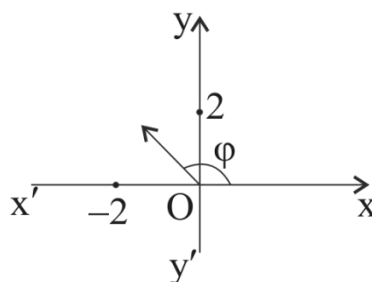
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\lambda = \frac{2}{-2} = \varepsilon\varphi\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -1$$

$$\bullet \quad \text{Ισχύει } \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

• Σχεδιάζω το $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$ σε σύστημα συντεταγμένων Oxy.

$$\bullet \quad \text{Άρα } \varphi = 180^\circ - 45^\circ \Leftrightarrow \varphi = 135^\circ$$



5. Να βρείτε τις τιμές του z ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (z-1, 1)$ και $\vec{b} = (1, 2z-1)$ να είναι αντίρροπα.

Λύση

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & 2z-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(2z-1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 3z + 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z(2z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ή } z = \frac{3}{2}$$

$$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \text{ άρα } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\text{και } \vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ με } \lambda < 0$$

(γι' αυτές τις τιμές του z έχουμε $\vec{a} \parallel \vec{b}$).

Εξετάζουμε για ποια τιμή του z τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι αντίρροπα.

$$\text{Αν } z = 0$$

$$\vec{a} = (-1, 1)$$

$$\vec{b} = (1, -1) = -1(-1, 1) = -1\vec{a}$$

$$\text{Δηλαδή } \vec{b} = -1\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$$

δεκτό

$$\text{Αν } z = \frac{3}{2}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{3}{2} - 1, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{b} = \left(1, 2 \cdot \frac{3}{2} - 1\right) = (1, 2) = 2\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2\vec{a}$$

$$\text{Δηλαδή } \vec{b} = 2\vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$$

απορρίπτεται

6. Δίνεται $\vec{a} = (1, -2)$.

i. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ τέτοιο ώστε: $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{a}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{45}$.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο διανύσματος $\vec{v}$ και τις συντεταγμένες του, όταν ισχύει $\vec{v} = |\vec{v}| \cdot (2, -3) - \vec{a}$.

Λύση

Δίνεται $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{a}$ άρα $\vec{\beta} = \lambda \vec{a}$ με $\lambda < 0$.

$$\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \lambda \vec{a}, \text{ με } \lambda < 0$$

i. Αντικαθιστώ το $\vec{a}$:

$$\vec{\beta} = \lambda(1, -2) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (\lambda, -2\lambda) \quad (1)$$

$$\text{άρα } |\vec{\beta}| = \sqrt{\lambda^2 + (-2\lambda)^2} \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \sqrt{5\lambda^2}$$

$$\vec{a} = (x, y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Deltaίνεται \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{45}, \quad \text{άρα } \sqrt{45} = \sqrt{5\lambda^2} \Leftrightarrow (\sqrt{45})^2 = (\sqrt{5\lambda^2})^2 \Leftrightarrow 45 = 5\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = 3 \quad \text{ή} \quad \lambda = -3$$

Εφόσον $\lambda < 0$, δεκτό $\lambda = -3$. Άρα από την (1) έχουμε: $\vec{\beta} = (-3, 6)$

$$\text{ii. } \vec{v} = |\vec{v}|(2, -3) - \vec{a} = (2|\vec{v}|, -3|\vec{v}|) + (-1, 2) = (2|\vec{v}| - 1, 2 - 3|\vec{v}|)$$

Άρα έχουμε

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2|\vec{v}| - 1)^2 + (2 - 3|\vec{v}|)^2}$$

$$|\vec{v}|^2 = (2|\vec{v}| - 1)^2 + (2 - 3|\vec{v}|)^2$$

$$\Leftrightarrow 12|\vec{v}|^2 - 16|\vec{v}| + 5 = 0$$

Θέτω $|\vec{v}| = x \geq 0$.

Οπότε το τριώνυμο $12x^2 - 16x + 5 = 0$ έχει $\Delta = 16$ άρα $x = \frac{5}{6}$ ή $x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Άρα } |\vec{v}| = \frac{5}{6} \text{ και } \vec{v} = \left(2 \cdot \frac{5}{6} - 1, 2 - 3 \cdot \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \text{ ή } |\vec{v}| = \frac{1}{2} \text{ και } \vec{v} = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

7. Αν το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(1, 2)$ και $B(-1, 0)$ είναι το σημείο $K(0, 3)$ να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

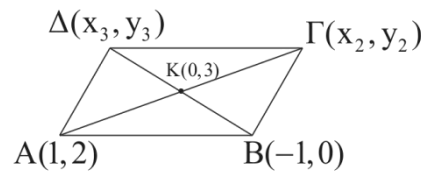
ii. το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

i.

- $K \text{ μέσο } A\Gamma \Leftrightarrow K\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$A\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \Gamma(x_2, y_2) : K\left(\frac{1+x_2}{2}, \frac{2+y_2}{2}\right) \Bigg\} \begin{array}{l} \text{Δίνεται: } K(0,3) \end{array}$$



Άρα $\frac{1+x_2}{2} = 0$ και $\frac{2+y_2}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$$1+x_2 = 0 \text{ και } 2+y_2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = -1 \text{ και } y_2 = 4$$

Οπότε $\Gamma(-1, 4)$

- $K \text{ μέσο } B\Delta \Leftrightarrow K\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right)$

$$B\left(\begin{smallmatrix} x_4 & y_4 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \Delta(x_3, y_3) : K\left(\frac{x_3-1}{2}, \frac{y_3+0}{2}\right) \Bigg\} \begin{array}{l} \text{άρα} \\ K(0,3) \end{array}$$

Άρα $\frac{x_3-1}{2} = 0$ και $\frac{y_3+0}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$$x_3 - 1 = 0 \text{ και } y_3 = 6 \Leftrightarrow$$

$$x_3 = 1 \text{ και } y_3 = 6$$

Οπότε $\Delta(1, 6)$

ii. Αν G το βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ, ισχύει: $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$, αφού BK διάμεσός του.

Έστω $G(x, y)$. Τότε $\overrightarrow{BG} = (x+1, y)$, $\overrightarrow{BK} = (1, 3)$.

Έχουμε: $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK} \Leftrightarrow (x+1, y) = \frac{2}{3}(1, 3) \Leftrightarrow (x+1, y) = \left(\frac{2}{3}, 2\right)$

$$\Leftrightarrow x+1 = \frac{2}{3} \text{ και } y = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ και } y = 2$$

Άρα $G\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

8. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2), B(-3, 0), E(3, -1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma} = (-3, -5)$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

a) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, b) του σημείου Γ, c) του σημείου Δ

όταν ισχύει $2\overrightarrow{A\Delta} - 3\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$

ii. Να αναλύσετε το $\overrightarrow{AB}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\overrightarrow{A\Gamma}, 5\overrightarrow{A\Gamma}$.

iii. Να προσδιορίσετε σημείο Μ του άξονα γ'γ, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές στην κορυφή Μ.

iv. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β, Ε είναι κορυφές τριγώνου.

Λύση

i. a) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$\overrightarrow{AB} = (-3+1, 0-2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, -2)$$

b) $\overrightarrow{AG} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$

Έστω $G(x_3, y_3)$

$$\overrightarrow{AG} = (x_3 + 1, y_3 - 2)$$

$$\text{Δίνεται } \overrightarrow{AG} = (-3, -5)$$

$$\text{Άρα } (x_3 + 1, y_3 - 2) = (-3, -5) \quad (\text{ίσα διανύσματα})$$

$$x_3 + 1 = -3 \quad \text{και} \quad y_3 - 2 = -5 \Leftrightarrow$$

$$x_3 = -4 \quad \text{και} \quad y_3 = -3$$

$$\text{Άρα } G(-4, -3)$$

c) $\overrightarrow{AL} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1)$

Έστω $L(x_4, y_4)$

$$\overrightarrow{AL} = (x_4 + 1, y_4 - 2)$$

$$\overrightarrow{LE} = (x_5 - x_4, y_5 - y_4)$$

$$\overrightarrow{LE} = (3 - x_4, -1 - y_4) \quad (1)$$

$$2\overrightarrow{AL} - 3\overrightarrow{LE} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$2(x_4 + 1, y_4 - 2) - 3(3 - x_4, -1 - y_4) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(2x_4 + 2, 2y_4 - 4) + (-9 + 3x_4, 3 + 3y_4) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(2x_4 + 2 - 9 + 3x_4, 2y_4 - 4 + 3 + 3y_4) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$2x_4 - 7 + 3x_4 = 0 \quad \text{και} \quad 2y_4 - 1 + 3y_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_4 = \frac{7}{5} \quad \text{και} \quad y_4 = \frac{1}{5}$$

$$\text{Άρα } L\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

ii. $\overrightarrow{AE}^{(1)} = \left(3 - \frac{7}{5}, -1 - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right) \quad \text{άρα } 5\overrightarrow{AE}^{(1)} = 5\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right) = (8, -6)$

$$\overrightarrow{AG}^{(1)} = (-3, -5)$$

Αρκεί να γράψουμε το $\overrightarrow{AB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AG}, 5\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AB} = \mu \overrightarrow{AG} + \rho 5\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow$$

$$(-2, -2) = \mu(-3, -5) + \rho(8, -6) \Leftrightarrow$$

$$(-2, -2) = (-3\mu, -5\mu) + (8\rho, -6\rho) \Leftrightarrow$$

$$(-2, -2) = (-3\mu + 8\rho, -5\mu - 6\rho) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3\mu + 8\rho = -2 \\ -5\mu - 6\rho = -2 \end{cases} \cdot 6 \Leftrightarrow \begin{cases} -18\mu + 48\rho = -12 \\ -40\mu - 48\rho = -16 \end{cases}$$

$$-58\mu = -28 \Leftrightarrow \mu = \frac{28}{58} \Leftrightarrow \mu = \frac{14}{29}$$

$$-3\mu + 8\rho = -2 \Leftrightarrow 8\rho = 3 \cdot \frac{14}{29} - 2 \Leftrightarrow \rho = \frac{-2}{29}$$

iii. Έστω $M(0, y)$ το ζητούμενο σημείο.

$$\text{Ισχύει } (MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(-1-0)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4 - 4y + y^2 = 9 + y^2 \Leftrightarrow -4y = 4 \Leftrightarrow y = -1$$

Άρα $M(0, -1)$

iv. Πρέπει τα σημεία A, B, E να μην είναι συνευθειακά, δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (-2, -2)$ και $\overrightarrow{AE} = (4, -3)$ να μην είναι συγγραμμικά. Έχουμε:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AE}, \text{ άρα τα } A, B, E \text{ είναι κορυφές τριγώνου.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 1, \lambda^2 - \lambda)$. Για ποια τιμή του λ ισχύει:

- i. $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ii. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x$.

2. Αν $\vec{v} = (\alpha - 1, -2)$, $\vec{w} = (\beta - 2, \alpha)$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε $\vec{v} = \vec{w}$.

3. Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε τα $\vec{\alpha} = (1, \kappa - 1)$, $\vec{\beta} = (\kappa - 1, 9)$ να είναι αντίρροπα.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4\lambda + 5, 3\lambda^2 - 1)$, $\vec{\beta} = (\lambda^2 - 7\lambda - 1, 2\lambda^2 + 3)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

5. Αν $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 0)$ να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων:

- i. $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ ii. $\vec{\gamma}$, όταν ισχύει: $3\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{v}$

6. Αν $\vec{\alpha} = (-1, 2)$, $\vec{\beta} = -3\vec{j}$, βρείτε τα $\vec{u}, \vec{v}$ όταν ισχύει $\begin{cases} \vec{v} + \vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \\ \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{\alpha} \end{cases}$

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (-y^2 - 4y + 5, x + 2)$. Για ποιες τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ είναι :

- i. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$
 ii. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} \parallel x'x$
 iii. $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = -20\vec{i} + 9\vec{j}$

8. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(1, 3)$, $\Gamma(0, 2)$. Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ .

9. Αν το σημείο B είναι συμμετρικό του $A(-1, 2)$ ως προς το σημείο $K(1, 2)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του B .

10. Αν το κέντρο του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι $K\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ και το παραλληλό-γραμμο έχει κορυφές $A(0, 1)$, $B(-2, 0)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ, Δ και το βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Gamma\Delta$.

11. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$ και το διάνυσμα $\vec{AG} = (4, -3)$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

α) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

β) του σημείου Γ

γ) του σημείου Δ όταν ισχύει $2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$

ii. Να εξετάσετε αν μπορεί το $\overrightarrow{AB}$ να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{GD}$.

12. Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$, $M(1, 2)$, M μέσο του AB . Να υπολογιστούν:

i. οι συντεταγμένες του σημείου B

ii. οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

iii. το μήκος του AB

iv. το μέτρο του $\overrightarrow{AM}$

v. το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $x'x$.

13. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(7, 4)$. Να βρείτε τα σημεία M, N για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{NB}$.

14. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$, όταν ισχύει: $\vec{\alpha} = (-4, -2) + |\vec{\alpha}| \cdot (1, 1)$

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -1)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$, $\vec{\gamma} = (12, -5)$

i. Να δείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii. Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

16. Αν $\vec{\alpha} = (1, -3)$, να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ τέτοιο ώστε $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\alpha}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{40}$.

17. Αν τα σημεία $K(4, 0)$, $L(6, 2)$ και $M(3, 5)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB , BG και AG αντιστοίχως του τριγώνου ABG να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

18. Οι τεταγμένες των σημείων A, B είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$y^2 - (\lambda^2 + 3\lambda + 10)y - 4 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το μέσο M του τμήματος AB να έχει τεταγμένη ίση με 5.

19. Έστω σημεία $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, M μέσο του AB και η σχέση $4\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OM}$.

ii. Να δείξετε ότι τα O, Γ, M είναι συνευθειακά και βρείτε τη σχετική θέση τους.

iii. Να βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ όταν ισχύει $\overrightarrow{OG} = \lambda \overrightarrow{GM}$.

20. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-1,0)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό K τέτοιο ώστε $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του K ;

21. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

22. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,4)$. Αν η AG τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Δ και η AB τον άξονα $y'y$ στο σημείο E τότε :

- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των Δ και E .
- Να αποδείξετε ότι τα μέσα των OA , ED και $B\Gamma$ είναι συνευθειακά.

23. Θεωρούμε τα σημεία $A(a+1,3)$, $B(a,4)$ και $\Gamma(-4,5a+4)$, $a \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του a , τα A , B , Γ είναι συνευθειακά.
- Αν $a=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

24. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τρεις κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $\Gamma(4,3)$ και $\Delta(2,3)$.

- Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$.
- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής K των διαγωνίων AG και $B\Delta$, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής B .

25. Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2a, 4a-2)$ και $B(5a+1, -a)$, $a \in \mathbb{R}$.

- Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του a και να βρείτε το a ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 10$.
- Έστω $a=2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .

26. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7,3)$.

- Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο.
- Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

27. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = (2,2)$, $\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$

- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα με τον άξονα $x'x$
- Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}^\wedge, \vec{\beta})$

28. Αν $A(x-y, 3y)$, $\overrightarrow{OB} = (2x-y, x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα x, y ώστε το $\overrightarrow{OA}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 315° και $|\overrightarrow{AB}| = 4$.

§ 1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1. i. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Ορισμός

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\angle \vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

ii. Ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες του ορισμού $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$;

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ (συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων)
- $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ (συνθήκη ομόρροπων διανυσμάτων)
- $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ (συνθήκη αντίρροπων διανυσμάτων)

iii. Πως ορίζεται το τετράγωνο του $\vec{\alpha}$; Αποδείξτε ότι $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$.

Το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του $\vec{\alpha}$** .

$$\text{Ισχύει } \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

Απόδειξη

$$\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| \cos(\angle \vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = |\vec{\alpha}|^2 \cos 0 = |\vec{\alpha}|^2.$$

Αναλυτική Έκφραση του Εσωτερικού Γινομένου

2. i. Ποια είναι η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$;

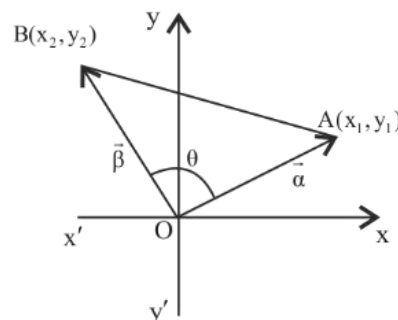
Να αποδείξετε τον τύπο.

- Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Δηλαδή:

«το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους».

Απόδειξη



Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, με αρχή το O(0,0) σχεδιάζουμε τα διανύσματα:

$$\vec{OA} = \vec{\alpha} = (x_1, y_1), \text{ άρα } A(x_1, y_1)$$

$$\vec{OB} = \vec{\beta} = (x_2, y_2), \text{ άρα } B(x_2, y_2)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB και έχουμε:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$-2x_1x_2 - 2y_1y_2 = -2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$$

ii. Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων.

a) $(\lambda\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda\vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

b) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)

c) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$ και $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}, \lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$, τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Αποδείξεις

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2), \vec{\gamma} = (x_3, y_3)$

a) $(\lambda\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda(x_1, y_1)) \cdot (x_2, y_2)$

$$= (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2)$$

$$= (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2$$

$$= \lambda(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$= \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\vec{\alpha} \cdot (\lambda\vec{\beta}) = (x_1, y_1) \cdot (\lambda x_2, \lambda y_2)$$

$$= x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2)$$

$$= \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

b) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$$= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3)$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3)$$

$$= \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} &\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \quad (x_1x_2 \neq 0) \\
 &\Leftrightarrow \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = \frac{-x_1x_2}{x_1x_2} \\
 &\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1
 \end{aligned}$$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

3. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$, δύο μη μηδενικά διανύσματα και θ η γωνία τους, να αποδείξετε ότι:

$$\cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Απόδειξη

$$\text{Είναι: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}, \quad (1)$$

$$\text{Επίσης: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\text{Επομένως η (1) γράφεται: } \cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

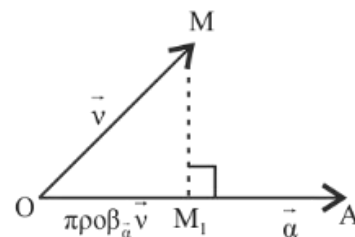
4. i. Αν $\vec{\alpha}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου, με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ πως ορίζεται η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$;

Ορισμός

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OM} = \vec{v}$.

Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\vec{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.

Το διάνυσμα $\vec{OM}_1$ λέγεται **προβολή του του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, δηλαδή $\vec{OM}_1 = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.



ii. Αποδείξτε ότι : $\vec{\alpha}\vec{v} = \vec{\alpha} \text{ προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, για $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} \\
 &= \vec{\alpha} \cdot (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}) \\
 &= \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M} \quad (\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{\alpha}) \\
 &= \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + 0 \\
 &= \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}
 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. i. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, δεν είναι διάνυσμα αλλά πραγματικός αριθμός.

ii. Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων δεν ορίζεται για τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γιατί το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ που είναι πραγματικός αριθμός αν πολλαπλασιαστεί επί $\vec{\gamma}$, δηλαδή $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$, δίνει διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\gamma}$. Οπότε $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$.

iii. Το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ εξαρτάται από τη γωνία τους. Αναλυτικά:

- $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ οξεία $\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$
- $0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$
- $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ αμβλεία $\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$
- $\frac{\pi}{2} < (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq \pi \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$

iv. Οι τιμές του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων ανήκουν στο διάστημα $[-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|, |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|]$, γιατί:

$$-1 \leq \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq 1, \text{ (πολλαπλασιάζουμε επί } |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| > 0 \text{)}, \text{ άρα}$$

$$-1|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq 1 \cdot |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

Οπότε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ έχει ελάχιστη τιμή ίση με $-|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ και μέγιστη τιμή ίση με $|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$.

Αυτό μας διευκολύνει να βρίσκουμε μέγιστη και ελάχιστη τιμή παραστάσεων της μορφής $\lambda x + \kappa y$ αν θεωρήσουμε ότι αυτή είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (\lambda, \kappa)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$, δηλαδή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda x + \kappa y$.

v. Κάθε παράσταση αλγεβρική μπορεί να θεωρηθεί ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

π.χ. το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, μπορεί να είναι το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{v} = (\alpha x + \beta, 1)$, $\vec{w} = (x, \gamma)$, αφού $\vec{v} \cdot \vec{w} = (\alpha x + \beta)x + 1 \cdot \gamma = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

vi. Σε γεωμετρικό σχήμα για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, πρέπει αυτά να έχουν κοινή αρχή, ώστε να είναι δυνατόν να προσδιορίζεται η γωνία τους.

2. Ισχύουν:

- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \pm |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\vec{\alpha}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- $(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \pm 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$
- $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + 2\vec{\gamma}\vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \dots + \vec{\beta}_v) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_2 + \dots + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_v$

3. Στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ, γενικά:

i. Η προσεταιριστική ιδιότητα,

δηλαδή ισχύει: $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

ii. Η διαγραφή διανύσματος,

Δηλαδή έχουμε: $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{\beta}$,

ενώ: αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

iii. Η ιδιότητα των δυνάμεων $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

δηλαδή έχουμε $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \neq \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ και μάλιστα $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ γιατί

$$(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \left[|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{\beta}) \right]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cos^2(\angle \vec{a}, \vec{\beta}) \leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$$

$$(-1 \leq \cos \theta \leq 1 \Leftrightarrow |\cos \theta| \leq 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta \leq 1)$$

iv. Η ιδιότητα των απόλυτων τιμών $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

δηλαδή ισχύει $|\vec{a}\vec{\beta}| \neq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ και μάλιστα $|\vec{a}\vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ γιατί

$$|\vec{a}\vec{\beta}| = \left| |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{\beta}) \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \left| \cos(\angle \vec{a}, \vec{\beta}) \right| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

v. Η ιδιότητα των πραγματικών αριθμών $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$,

αλλά ισχύει ότι αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

4. Για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{v}$ έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Αν είναι γνωστές ή προσδιορίζονται οι συντεταγμένες του, έστω $\vec{v} = (x, y)$, τότε $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ii. Αν μπορούμε από τα δεδομένα να σχηματίσουμε εξίσωση με άγνωστο το $|\vec{v}|$, τότε οι μη αρνητικές ρίζες της είναι οι δυνατές τιμές του $|\vec{v}|$.

iii. Αν το $\vec{v}$ είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ που έχουν γνωστά μέτρα και γνωστές γωνίες ή εσωτερικά γινόμενα ανά δύο τότε $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n)^2$, κάνουμε ανάπτυγμα ταυτότητας, οπότε το $|\vec{v}|$ είναι η θετική τετραγωνική ρίζα του παραπάνω αποτελέσματος των πράξεων.

5. Για να υπολογίσουμε την γωνία ή το συνημίτονο της γωνίας δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$:

- υπολογίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{x} \cdot \vec{y}$ (χρησιμοποιώντας τον ορισμό ή την αναλυτική έκφραση ή πολλαπλασιάζοντας τους γραμμικούς συνδυασμούς τους).
- υπολογίζουμε τα μέτρα τους $|\vec{x}|, |\vec{y}|$ (σύμφωνα με την παρατήρηση 4).
- χρησιμοποιούμε τον τύπο $\cos(\angle \vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

6. Για να αποδείξουμε την **καθετότητα** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ πρέπει να αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

Οπότε:

- Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, είναι γνωστά απλώς υπολογίζουμε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- Αν υπάρχει δοσμένη σχέση με διανύσματα $\vec{v}, \vec{w}, \dots$ και εσωτερικά γινόμενα, σχηματίζουμε σ' αυτήν το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, το «απομονώνουμε» στο ένα μέλος της ισότητας και δείχνουμε ότι το άλλο μέλος είναι μηδέν.
- Αν υπάρχει δοσμένο σχήμα με ορθές γωνίες, τότε αντικαθιστούμε τα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, συναρτήσεως των διανυσμάτων, που σχηματίζουν τις ορθές γωνίες και παίρνουμε υπ' όψη μας ότι τα εσωτερικά γινόμενα αυτών των διανυσμάτων είναι μηδέν.
- Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, δεν έχουν δοθεί σε σύστημα συντεταγμένων και τα πρόβλημά είναι γεωμετρικό, μπορούμε να εκλέξουμε «κατάλληλο» σύστημα, προσέχοντας τα δεδομένα να εκφράζονται όσο γίνεται απλούστερα. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και εφαρμόζουμε την i. περίπτωση.
- Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση προσπαθούμε να δείξουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ χρησιμοποιώντας γνωστές καθετότητες και πιθανή ύπαρξη ίσων μέτρων διανυσμάτων.

7. Για να προσδιορίσουμε διάνυσμα $\vec{u} = (x, y)$ με δεδομένη κάποια ιδιότητά του και επιπλέον:

- $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$, όπου $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ γνωστό διάνυσμα, τότε χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x\alpha_1 + y\alpha_2 = 0$.
- ότι το $\vec{u}$ σχηματίζει γνωστές γωνίες με γνωστά μη μηδενικά διανύσματα π.χ. το $\vec{\alpha}$, τότε χρησιμοποιούμε την ισότητα: $\cos(\angle \vec{u}, \vec{\alpha}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{\alpha}|} = \frac{x\alpha_1 + y\alpha_2}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$.

Εννοείται ότι για να βρεθούν οι συντεταγμένες x, y του $\vec{v}$ η δεύτερη σχέση που χρειαζόμαστε προκύπτει από την ιδιότητα του που έχει δοθεί.

8. Για να βρούμε την **προβολή** διανύσματος $\vec{v}$ πάνω σε διάνυσμα $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\text{Ισχύει } \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} \parallel \vec{\alpha} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \lambda \vec{\alpha}$$

$$\text{Έστω } \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \vec{v}_1.$$

$$\text{Τότε } \begin{cases} \vec{\alpha} \vec{v} = \vec{\alpha} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_1 \parallel \vec{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \vec{v} = \vec{\alpha} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_1 = \lambda \vec{\alpha}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \lambda \vec{\alpha} \\ \vec{v}_1 = \lambda \vec{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\vec{\alpha} \vec{v}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \\ \vec{v}_1 = \lambda \vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\text{οπότε } \vec{v}_1 = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \vec{v}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \cdot \vec{\alpha}$$

9. Ανάλυση γνωστού διανύσματος $\vec{v}$ σε συνιστώσες:

i. Παράλληλες σε γνωστά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ($\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$)

Αναζητούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\vec{v} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}$

Οπότε ή λύνοντας το σύστημα, που προκύπτει, όταν αντικαταστήσουμε τα διανύσματα με τις συντεταγμένες

$$\text{τους ή λύνοντας το σύστημα } \begin{cases} \vec{v} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} \vec{\alpha} \\ \vec{v} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} \vec{\beta} + \mu \vec{\beta} \vec{\beta} \end{cases} \text{ προσδιορίζουμε τα } \lambda, \mu \text{ και οι ζητούμενες συνιστώσες είναι}$$

τα διανύσματα $\lambda \vec{\alpha}, \mu \vec{\beta}$.

ii. Κάθετες μεταξύ τους από τις οποίες η μια είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, με $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Υποθέτουμε ότι οι ζητούμενες συνιστώσες είναι $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ με $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ και $\vec{v}_1 \parallel \vec{\alpha}$. Τότε $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Α' Τρόπος: Έστω $\vec{v}_2 = (x, y)$, τότε λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \parallel \vec{\alpha} \\ \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \\ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \lambda \vec{\alpha}, \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2) \\ x \lambda \alpha_1 + y \lambda \alpha_2 = 0 \\ (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2) + (x, y) = \vec{v} \end{cases}$$

Προσδιορίζουμε τα λ, x, y άρα και τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

Β' Τρόπος: Εφόσον $\vec{v}_1 \parallel \vec{\alpha}$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{v}_1 = \lambda \vec{\alpha} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2)$

$$\text{Οπότε λύνοντας το σύστημα } \begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \vec{v}_1 \\ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}, \text{ αφού αντικαταστήσουμε με συντεταγμένες τα } \vec{\alpha}, \vec{v}, \vec{v}_1,$$

προσδιορίζουμε τα $\lambda, \vec{v}_1, \vec{v}_2$.

Γ' Τρόπος: Εφόσον $\vec{v}_1 \parallel \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \lambda \vec{\alpha} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

Ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, οπότε βρίσκουμε το λ , άρα και το $\vec{v}_1$.

Χρησιμοποιούμε την σχέση $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ για να βρούμε το $\vec{v}_2$.

Δ' Τρόπος: Βρίσκουμε τις συντεταγμένες διανύσματος $\vec{\beta}$, με $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ και έχουμε $\vec{\beta} = (-\alpha_2, \alpha_1)$, οπότε το $\vec{v}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες παράλληλες σε γνωστά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ όπως στην περίπτωση i.

10. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση διανυσμάτων σε μια γεωμετρική άσκηση, στην οποία υπάρχει και κάποια καθετότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια από τις παρακάτω μεθόδους:

i. Προβολές:

Στο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα διάνυσμα με την προβολή του πάνω στο άλλο. Δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

Η παραπάνω ισότητα εφαρμόζεται και αντίστροφα.

ii. Διανυσματική ακτίνα:

Επιλέγουμε σαν αρχή κατάλληλο σημείο (συνήθως αυτό που εμφανίζεται στις διανυσματικές σχέσεις τις περισσότερες φορές). Εκφράζουμε όλες τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα με διανυσματικές συνθήκες και όλα τα διανύσματα βάσει του τύπου $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Την κάθε διανυσματική ακτίνα για λόγους ευκολίας τη συμβολίζουμε με το μικρό γράμμα του άκρου της π.χ. $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Έτσι μετατρέπουμε την άσκηση από γεωμετρική σε αλγεβρική.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

ii. $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$

iii. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

iv. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

v. $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

Λύση

i. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$

Άρα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -1$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \sin \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right)$$

ii. $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

iii. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 1^2 + 2(-1) + 2^2 = 3$

Σε γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων ισχύουν
οι ταυτότητες τετραγώνου

iv. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 \stackrel{\text{iii.}}{\Leftrightarrow} |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{3}$

Για να βρούμε το μέτρο γραμμικού συνδυασμού
διανυσμάτων υψώνουμε στο τετράγωνο

v. $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2|\vec{\beta}|^2 \stackrel{(i)}{=} 1^2 - 3(-1) + 2 \cdot 2^2 = 12$

Στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύει η
επιμεριστική ιδιότητα

2. Αν $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\left(\vec{\beta}, \vec{\gamma}\right) = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\gamma}| = 1$ και οι γωνίες $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$, $\left(\vec{\beta}, \vec{\gamma}\right)$ είναι

διαδοχικές, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Λύση

- Βρίσκουμε, κάνοντας σχήμα, την $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

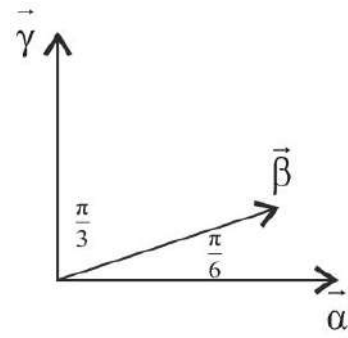
$$(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{6} + \frac{\frac{2}{3}\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \text{άρα } \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}, \quad (1)$$

- Υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} = \sqrt{3}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\vec{\beta}\vec{\gamma} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \quad (4) \quad \text{γιατί από (1) έχουμε } \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}.$$



- Για να βρούμε το μέτρο γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$\begin{aligned} |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 &= (2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow \\ |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 &= (2\vec{\alpha})^2 + (-\vec{\beta})^2 + \vec{\gamma}^2 + 2 \cdot 2\vec{\alpha}(-\vec{\beta}) + 2 \cdot 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 2(-\vec{\beta})\vec{\gamma} \Leftrightarrow \\ |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 &= 4|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}\vec{\gamma} \Leftrightarrow \\ |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 &= 4(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2 - 4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 &= 4 \cdot 3 + 2 + 1 - 6\sqrt{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 &= 15 - 7\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}| &= \sqrt{15 - 7\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- 3. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ όταν δίνονται**

$$\vec{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}, \quad \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}, \quad |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Λύση

Από το παραλληλόγραμμο έχουμε:

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AG} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{AG} = 4\vec{a} + \vec{b}$$

Άρα

$$|\vec{AG}| = |4\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{AG}|^2 = (4\vec{a} + \vec{b})^2 \Leftrightarrow |\vec{AG}|^2 = 16\vec{a}^2 + 8\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AG}|^2 = 16 \cdot 1^2 + 8|\vec{a}||\vec{b}|\cos 135^\circ + (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow |\vec{AG}|^2 = 16 + 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2$$

$\begin{aligned} * \cos 135^\circ &= \\ \cos(180^\circ - 45^\circ) &= \\ -\cos 45^\circ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 = 10 \Leftrightarrow \sqrt{|\overrightarrow{A\Gamma}|^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (A\Gamma) = \sqrt{10}$$

4. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ όταν δίνονται:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \quad \overrightarrow{B\Gamma} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \quad |\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 60^\circ.$$

Λύση

$$\text{Ισχύει } M \text{ μέσο } B\Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2} \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{AB} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} - \vec{\beta} = 4\vec{\alpha}.$$

Τότε έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 4\vec{\alpha}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{5\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$$

$$\text{Άρα } |\overrightarrow{AM}| = \left| \frac{5\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2} \right| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}|^2 = \left(\frac{5\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2} \right)^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{25\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2}{4} \quad (2)$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (3)$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} |\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{25 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 2^2}{4} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{19}{4} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

5. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων: $\vec{\alpha} = (3, \sqrt{3})$, $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$.

Λύση

Ισχύουν:

$$\boxed{\cos\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}} \quad (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad \vec{\alpha}\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2 \\ \vec{\beta} = (x_2, y_2) \end{array}} \quad (2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\alpha} = (x, y) \\ |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}} \quad (3)$$

Από την (2) έχουμε: $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}(-1) = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$

άρα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2\sqrt{3}.$

Από την (3) έχουμε:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}, \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Από την (1) έχουμε: $\text{syn}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{36}}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Οπότε με $\text{syn}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}$ και $0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq \pi$, είναι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}.$

6. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, να υπολογίσετε το συνημίτονο

της γωνίας των διανυσμάτων:

$$\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \quad \vec{v} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

Λύση

Επειδή δίνεται η γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ βρίσκουμε αρχικά το εσωτερικό γινόμενο τους:

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{syn}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 2 \text{syn}60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \text{syn}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (2)$$

Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων, τα αντικαθιστούμε και εφαρμόζουμε επιμεριστική ιδιότητα.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{u}\vec{v} &= (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = \\ &= 3|\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 \stackrel{(1)}{=} 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 2^2 = -3 \end{aligned}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\text{Άρα } \vec{u}\vec{v} = -3, \quad (3)$$

Για να βρούμε το μέτρο γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων, υψώνουμε στο τετράγωνο.

$$\begin{aligned} \bullet \quad |\vec{u}| &= |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{u}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{u}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\vec{u}|^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow |\vec{u}|^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\vec{u}|^2 = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\bullet |\vec{v}| = |3\vec{a} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = (\vec{a} + \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = 9\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = 9 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{19} \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε στην (2) τις (3), (4), (5) οπότε έχουμε:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{19}} = \frac{-\vec{\beta} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{\vec{\beta} \cdot 19}. \text{ Άρα } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\sqrt{57}}{19}$$

7. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}| = 3, |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{a} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$ (1).

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\vec{\beta}$.

ii. Να βρείτε την γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$.

iii. Να δείξετε ότι $\vec{a} = 3\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = -\vec{\beta}$.

Λύση

i. Για να βρούμε εσωτερικό γινόμενο, όταν δίνεται γραμμικός συνδυασμός 3 διανυσμάτων, «αφήνουμε» στο 1^ο μέλος τα διανύσματα που θέλουμε το γινόμενό τους, βάζουμε μέτρα και υψώνουμε στο τετράγωνο.

$$(1) \vec{a} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{\beta} = -4\vec{\gamma}, \text{ άρα}$$

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 = |-4\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 16 \cdot 1^2 \Leftrightarrow 3^2 + 2\vec{a}\vec{\beta} + 1^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$9 + 2\vec{a}\vec{\beta} + 1 = 16 \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{\beta} = +6 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{\beta} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{\beta} = 3$$

$$\text{ii. } \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{3}{3 \cdot 1} = 1 \text{ και επειδή } 0 \leq (\vec{a}, \vec{\beta}) \leq 180^\circ, \text{ έχουμε } (\vec{a}, \vec{\beta}) = 0^\circ$$

$$\text{iii. Εφόσον } (\vec{a}, \vec{\beta}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \\ \lambda > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Άρα } |\vec{a}| = |\lambda \vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow 3 = |\lambda| \cdot 1 \xrightarrow{\lambda > 0} \Leftrightarrow \lambda = 3$$

$$\text{Οπότε από (2): } \vec{a} = 3\vec{\beta}$$

$$\text{Αντικαθιστούμε στην } \vec{a} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0} \text{ το } \vec{a} = 3\vec{\beta}$$

$$\text{και έχουμε } 3\vec{\beta} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{\gamma} = -4\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = -\vec{\beta}$$

8. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ θεωρούμε σημεία Μ και Ν τέτοια ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BG}$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AN}$ και $\overrightarrow{GM}$ είναι κάθετα.

Λύση

Εφόσον το τρίγωνο είναι ισόπλευρο έχουμε ότι κάθε γωνία του είναι 60° και οι πλευρές του έχουν ίδιο μήκος, έστω $\alpha = (AB) = (BG) = (AG)$.

Για να είναι τα διανύσματα $\overrightarrow{AN}$ και $\overrightarrow{GM}$ κάθετα, αρκεί να δείξουμε ότι: $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{GM} &= (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BG}) = \left(\frac{\overrightarrow{BG}}{5} - \overrightarrow{BA}\right) \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{3} - \overrightarrow{BG}\right) = \frac{16\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{BA}^2 - 3\overrightarrow{BG}^2}{15} \\ &= \frac{16\alpha \cdot \alpha \cdot \cos 60^\circ - 5\alpha^2 - 3\alpha^2}{15} = \frac{8\alpha^2 - 8\alpha^2}{15} = 0, \text{ άρα } \overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{GM}. \end{aligned}$$

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες διανύσματος $\vec{w}$ όταν ισχύουν: $|\vec{w}| = \sqrt{265}$ και $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

Λύση

Έστω $\vec{w} = (x, y)$.

$$\text{Έχουμε } 3\vec{v} - 5\vec{u} = 3 \cdot (4, -3) - 5(-2, 3) = (12, -9) + (10, -15) = (22, -24)$$

$$\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{w} \cdot (3\vec{v} - 5\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 22x - 24y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12y}{11}, \text{ οπότε } \vec{w} = \left(\frac{12y}{11}, y\right).$$

$$\text{Είναι } |\vec{w}| = \sqrt{265} \Leftrightarrow \left(\frac{12y}{11}\right)^2 + y^2 = 265 \Leftrightarrow \frac{144y^2 + 121y^2}{121} = 265$$

$$\Leftrightarrow 265y^2 = 265 \cdot 121 \Leftrightarrow y^2 = 121 \Leftrightarrow y = 11 \text{ ή } y = -11.$$

$$\text{Άρα } \vec{w} = (12, 11) \text{ ή } \vec{w} = (-12, -11)$$

10. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (2, 7)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε κάθε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a}$.

Λύση

$$\bullet \text{ Έστω } \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \text{ οι συνιστώσες του } \vec{\beta}, \text{ άρα } \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Δίνεται ότι } \vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2 \text{ και έστω } \vec{\beta}_1 // \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = \lambda \vec{a} \quad (2)$$

$$\bullet \text{ Από } \vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2 \text{ και } \vec{\beta}_1 // \vec{a} \text{ έχουμε } \vec{\beta}_2 \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta}_2 = 0 \quad (3)$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{\beta} \stackrel{(1)}{=} \vec{a} \cdot (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}_1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}_2 \stackrel{(2)(3)}{\Leftrightarrow} \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{a}) + 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{a}|^2 \quad (4)$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 7(-3) = -19 \quad (5)$$

- $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53} \quad (6)$
- $(4) \Leftrightarrow -19 = \lambda (\sqrt{53})^2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{19}{53}$
- $(2) \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = -\frac{19}{53}(2, 7) \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = \left(-\frac{38}{53}, -\frac{133}{53}\right)$
- $(1) \Leftrightarrow \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1$
 $\Leftrightarrow \vec{\beta}_2 = (1, -3) + \left(\frac{38}{53}, \frac{133}{53}\right)$
 $\Leftrightarrow \vec{\beta}_2 = \left(1 + \frac{38}{53}, -3 + \frac{133}{53}\right)$
 $\Leftrightarrow \vec{\beta}_2 = \left(\frac{91}{53}, -\frac{26}{53}\right)$

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$.

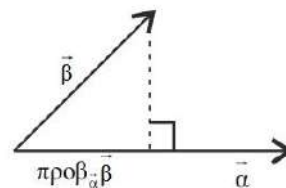
i. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{a}$.

ii. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του $\vec{a}$.

Λύση

i. Έχουμε:

- $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \lambda \vec{a}$



- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{a}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a} \Leftrightarrow 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = \lambda (1^2 + 1^2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{2}$ Άρα

$$\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \frac{15}{2}(1, 1) = \left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

ii. Έστω $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ οι ζητούμενες συνιστώσες του $\vec{\beta}$.

Άρα $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \quad (1)$

Αν το $\vec{\beta}_1$ έχει τη διεύθυνση του $\vec{a}$, τότε $\vec{\beta}_1 = \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$, από i ερώτημα.

Οπότε από την (1) έχουμε $\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 = (5, 10) - \left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

12. Έστω AB ευθύγραμμο τμήμα με $(AB) = 8$ και K το μέσο του.

i. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M ισχύει: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MK}^2 - 16$.

ii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M, όταν ισχύει $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 9$.

Λύση

i. Ισχύουν: K μέσο του $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MK}$ (1)

και $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$$2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \quad (3)$$

Τότε από την (1) είναι: $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ (4)

Χρησιμοποιώντας τις (3) και (4) έχουμε:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MK} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \right) \left(\overrightarrow{MK} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \right) = \overrightarrow{MK}^2 - \frac{\overrightarrow{AB}^2}{4} = \overrightarrow{MK}^2 - \frac{8^2}{4} = \overrightarrow{MK}^2 - 16$$

ii. Αντικαθιστώντας $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$ στην σχέση του ερωτήματος i. έχουμε:

$$9 = \overrightarrow{MK}^2 - 16 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MK}|^2 = 25 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MK}| = 5.$$

Δηλαδή τα σημεία M ισαπέχουν από το σταθερό σημείο K , απόσταση 5. Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο K και ακτίνα $\rho = 5$.

13. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{v} = (|\vec{a}|, \vec{a} \cdot \vec{\beta})$, $\vec{w} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}, |\vec{\beta}|)$, με

$\left(\vec{a}, \vec{\beta} \right) = \varphi$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$

ii. $|\vec{v}| = |\vec{w}| \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{\beta}|$

iii. $\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \eta \mu^2 \varphi = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| - 1}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|}$

iv. $\vec{v} = 2\vec{w} \Rightarrow |\vec{a}| = 4|\vec{\beta}|$

v. αν $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = -2\vec{\beta}$:

a) τότε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}, \vec{w}$ είναι αμβλεία.

b) αν επιπλέον $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{a}$ τότε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι $\frac{3\pi}{4}$.

Λύση

Είναι $\vec{a}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, άρα $|\vec{a}|, |\vec{\beta}| > 0$.

i. $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (|\vec{a}|, \vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}, |\vec{\beta}|) = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) + |\vec{\beta}| \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{\beta})(|\vec{a}| + |\vec{\beta}|) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$, γιατί $|\vec{a}| + |\vec{\beta}| > 0$ αφού τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά.

$$\text{ii. } |\vec{v}| = |\vec{w}| \Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$$

$$\text{iii. } \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} |\vec{\alpha}| & \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} & |\vec{\beta}| \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| - |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \sigma \nu \varphi = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| (1 - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma \nu \varphi) = 0 \Leftrightarrow 1 - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sigma \nu \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu \varphi = \frac{1}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow 1 - \eta \mu^2 \varphi = \frac{1}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \eta \mu^2 \varphi = 1 - \frac{1}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \eta \mu^2 \varphi = \frac{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| - 1}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

$$\text{iv. } \vec{v} = 2\vec{w} \Leftrightarrow (|\vec{\alpha}|, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, |\vec{\beta}|) \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{\alpha}| = 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\beta}| \end{cases} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 4|\vec{\beta}|$$

$$\text{v. Ισχύει } \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot (-2\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

$$\text{a) Άρα } \vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|) \stackrel{(1)}{=} -2|\vec{\beta}|^2 (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|) < 0, \text{ οπότε η γωνία των } \vec{v}, \vec{w} \text{ είναι αμβλεία.}$$

$$\text{b) Ισχύει } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{4}\vec{\alpha}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: } 2|\vec{\beta}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \frac{1}{2\sqrt{2}}|\vec{\alpha}|$$

$$\text{Είναι } \sigma \nu \varphi = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} \stackrel{(2)}{=} \frac{-\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}| \frac{1}{2\sqrt{2}}|\vec{\alpha}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και επειδή } 0 \leq \varphi \leq \pi, \text{ έχουμε } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$.

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii. $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ iii. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$
iv. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ v. $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

2. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ όταν ισχύουν $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = (\vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά διανύσματα.

3. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ όταν $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $\vec{AD} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = 150^\circ$.

4. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ όταν δίνονται: $\vec{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{BG} = 2\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = 30^\circ$

5. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, -1)$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα : i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
ii. $\vec{\alpha} \cdot (-2\vec{\beta})$ iii. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

6. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.

7. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ τότε αν $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να υπολογίσετε : i. $|\vec{v}|$
ii. τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{v})$ και $(\vec{v}, \vec{\beta})$.

8. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = 45^\circ$, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
 $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

9. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 45^\circ$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}$.

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

11. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

12. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (2, -3)$, $\vec{\beta} = (5, 1)$ και $\vec{\gamma} = (4, 6)$.

i. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα : α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.

ii. Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$.

13. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(4, 2)$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

14. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \frac{2}{3}$, $|\vec{\gamma}| = \frac{10}{3}$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$:

i. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii. Υπολογίστε την γωνία $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$.

iii. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = -3\vec{\beta}$, $\vec{\gamma} = 5\vec{\beta}$.

15. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ έχουμε $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.

16. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})$ να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

17. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, αποδείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

18. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

19. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ αν είναι γνωστό ότι $|\vec{u}| = 5$ και $\vec{\alpha}\vec{u} = 10$ με $\vec{\alpha} = (2, -1)$.

20. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν ίσα μέτρα να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες:

i. Η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\alpha}$.

ii. Η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$.

22. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που σχηματίζουν γωνία $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν συγχρόνως $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.

23. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

24. i. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

ii. Χρησιμοποιώντας το i. ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8y$, όταν ισχύει $x^2 + y^2 = 36$.

iii. Με τη βοήθεια του i. ερωτήματος να αποδείξετε ότι $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 10$.

25. Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $\frac{2\pi}{3}$ και ο ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει διαγώνιους $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

ii. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

iii. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

26. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ για το οποίο είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$.

27. Αν $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PG} = \vec{0}$ και $|\overrightarrow{PA}| = 6$, $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PG}| = 2\sqrt{3}$ να αποδείξετε ότι:

- Τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.
- Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A και B .
- $\angle A\hat{P}\Gamma = 90^\circ$
- Το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{AG}$.

28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε να ισχύουν $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = |\vec{\beta}| = \frac{|\vec{\gamma}|}{3} = \lambda$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.
- Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του λ .

29. Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο να δείξετε ότι $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

30. i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,1)$, $B(3,\lambda+2)$

και $\Gamma(\lambda^2 - 2, 3)$ είναι ορθογώνιο στο A .

ii. Για την μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$.

31. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k .
- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

32. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ και $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι οξεία.
- Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ .

33. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία: $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$.
- Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

34. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$
- Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ να είναι κάθετα.
- Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$.

35. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$.

- Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
- Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$.

36. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

- Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$.
- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

37. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Να υπολογίσετε τα εξής:

- το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$.
- το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$.

38. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

- τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
- το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$.

39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.
- Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα.

40. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$, $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

- Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

41. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u} \perp \vec{v}$ και $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$

- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{a} - \vec{b}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$.

42. Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{b} = \left(\frac{1}{7}, 1\right) \text{ και } \vec{a} + 7\vec{b} = (\mu + 2, 7 - 2\mu), \mu \in \mathbb{R}.$$

i. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{a}$ ως συνάρτηση του μ .

ii. Αν $\mu = 2$, τότε:

α. να αποδείξετε ότι $\vec{a} = (3, -4)$ και ότι το $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{a} + 7\vec{b}$.

β. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$.

43. Έστω $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{b} = (-5, 1)$ δύο διανύσματα.

i. Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{|\vec{a}| + |\vec{b}|}{\sqrt{-\vec{a}\vec{b}}}$.

ii. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

44. i. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

ii. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγώνιου ΒΔ.

45. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε $\vec{AB} = (-1, 4)$ και $\vec{AG} = (3, 6)$.

i. Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.

ii. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου.

46. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

i. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι κάθετα.

ii. Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

α. να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$.

β. να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$.

γ. αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OG}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

47. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{a} - \vec{b}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

ii. Αν ισχύει $\vec{b} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

α, να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$.

- β. να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
- γ. να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

48. i. Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$.

ii. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

- α. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.
- β. Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

Οδηγία: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ)

1. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
2. Αν $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$, όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB.
3. Αν $\vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
4. Αν $\vec{AB} = \vec{BA}$, τότε $\vec{AB} = \vec{0}$.
5. Αν $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$, τότε $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) + (\vec{\beta} \wedge \vec{\alpha}) = 2\pi$
6. Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του.
7. Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ορίζεται τρίγωνο.
8. Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά.
9. Αν $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.
10. Αν το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$, τότε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$.
11. Αν $k\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$, τότε $k = \lambda$, για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
12. Αν $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$.
13. Αν AM διάμεσος τριγώνου ABΓ, τότε $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2}$.
14. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

15. Δύο διανύσματα με ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι ομόρροπα.
16. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$ τότε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι οξεία.
17. Το $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα.
18. Το $(\lambda \vec{\alpha}) \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα.
19. Μπορούμε να γράψουμε: $\vec{\alpha}(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$
20. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
21. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \neq \frac{\pi}{2}$.
22. Τα ζεύγη $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $-\vec{\alpha}, -\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα.
23. Όταν οι συντελεστές δύο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα.
24. Ισχύουν:
- i. $(\vec{\alpha} \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$ ii. $\vec{\alpha}(\vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \vec{\beta}) \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\gamma}$ iii. $|\vec{\alpha} \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$
- iv. $(\vec{\alpha} \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ v. $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \pm \vec{\beta}$ vi. $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$
- vii. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$
25. Ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{προβ}_{\vec{v}} \vec{\alpha}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Οδηγία: Στις παρακάτω προτάσεις ποια επιλογή είναι η σωστή;

1. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ το M είναι μέσο της AB . Αν $\overrightarrow{AD} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

a) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta M}$ ισούται με:

i. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$ ii. $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$ iii. $-\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$

iv. $\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ v. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

b) Το διάνυσμα $\overrightarrow{M\Gamma}$ ισούται με:

i. $\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$ ii. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ iii. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

iv. $\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ v. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

c) Με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

i. $\overrightarrow{AB}$ ii. $\overrightarrow{B\Delta}$ iii. $\overrightarrow{\Delta B}$ iv. $\overrightarrow{\Gamma A}$ v. $\overrightarrow{A\Gamma}$

d) Με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

i. $\overrightarrow{A\Gamma}$ ii. $\overrightarrow{\Gamma A}$ iii. $\overrightarrow{BA}$ iv. $\overrightarrow{\Delta B}$ v. $\overrightarrow{B\Delta}$

2. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε:

i. κ, λ θετικοί ii. κ, λ αρνητικοί iii. κ, λ αντίστροφοι

iv. κ, λ ετερόσημοι v. κανένα από τα προηγούμενα

3. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό όταν:

i. $\theta = 2\kappa\pi$ ii. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ iii. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

iv. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$ v. καμία τιμή του θ

4. Είναι $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Το $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ όταν:

i. $\theta = \kappa\pi$ ii. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ iii. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

iv. $\theta = \kappa\pi + \pi$ v. $\theta = \kappa\pi - \pi$

5. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι παράλληλο στο $\vec{\beta} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ όταν:

i. $\theta = 0$ ii. $\theta = \frac{\pi}{4}$ iii. $\theta = \frac{\pi}{2}$

iv. $\theta = \pi$

v. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

6. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2, 2\lambda)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$, με $\lambda \neq 0$ είναι παράλληλα. Τότε ο λ ισούται με:

i. -2

ii. -1

iii. $\sqrt{2}$

iv. 1

v. 2

7. Αν $|\vec{\kappa}| = 2$, $|\vec{\nu}| = 3$, $\vec{\kappa} \cdot \vec{\nu} = -3$ και $\theta = (\vec{\kappa}, \vec{\nu})$, τότε η γωνία θ ισούται με:

i. 0°

ii. 30°

iii. 60°

iv. 120°

v. 150°

8. Σύμφωνα με το σχήμα το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:

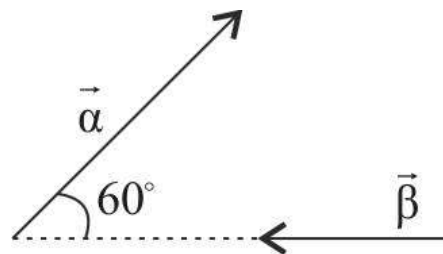
i. $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

ii. $\frac{1}{2} |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

iii. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

iv. $-\frac{1}{2} |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

v. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$



9. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά 4cm και κέντρο O .

Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

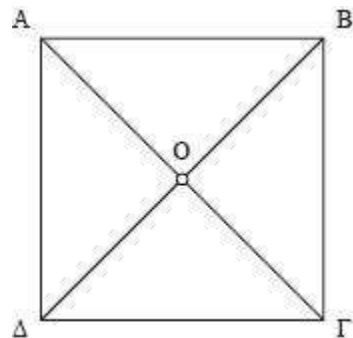
i. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma B} = 0$

ii. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 16$

iii. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$

iv. $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$

v. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} = -16$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Κάθε διάνυσμα της στήλης Α έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη Α (Διάνυσμα)	Στήλη Β (Μέτρο)
1. $-\sqrt{8}\vec{i} + \vec{j}$ 2. $x\vec{i} + y\vec{j}$ 3. $(2\eta\mu\theta)\vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{j}$ 4. $(x - y)\vec{i} + 2\sqrt{xy}\vec{j}$	i. $\sqrt{2}$ ii. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$ iii. 3 iv. $\sqrt{x^2 + y^2}$ v. $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$ vi. 2 vii. $ x + y $

2. Κάθε διάνυσμα της στήλης Α σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ, η οποία γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη Α (Διάνυσμα $\vec{u}$)	Στήλη Β (θ)
1. $-3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$ 2. (1,1) 3. $(1, \sqrt{3})$ 4. (-1,1)	i. $\frac{3\pi}{4}$ ii. $\frac{\pi}{3}$ iii. $\frac{2\pi}{3}$ iv. $\frac{\pi}{4}$ v. $\frac{5\pi}{6}$ vi. $\frac{\pi}{6}$

3. Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \pi$. Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη Α, με την τιμή του που βρίσκεται στην στήλη Β.

Στήλη Α (εσωτερικό γινόμενο)	Στήλη Β (τιμή)
1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	i. -1
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$	ii. 0
3. $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$	iii. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	iv. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	v. $\frac{1}{2}$

4. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος με γωνία $A = 60^\circ$ και πλευρά 6cm . Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	i. 18
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$	ii. 36
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	iii. 0
4. $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	iv. -36
	v. -18
	vi. $18\sqrt{3}$

5. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A και έχει γωνία $B = 60^\circ$. Αν η υποτείνουσα του $B\Gamma$ είναι 8cm , να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$	i. -16
2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$	ii. $16\sqrt{3}$
3. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$	iii. 16
	iv. 0
	v. $-16\sqrt{3}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha}$. Έστω M το σημείο τομής των διαγωνίων του.

i. Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii. Αν $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM} = \mu \overrightarrow{B\Delta}$, να βρείτε τα λ, μ .

2. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \overrightarrow{A\Gamma}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A\Gamma}$, για τα οποία ισχύει ότι τα A και Γ δεν ταυτίζονται.

i. Ποιά είναι η θέση των σημείων A, B ως προς την ευθεία $\Gamma\Delta$;

ii. Να βρείτε τον κ όταν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

iii. Για την τιμή του κ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι $7\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{P\Gamma}$, όπου P τυχαίο σημείο του επιπέδου.

3. Έστω A, B, Γ διακεκριμένα σημεία και διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{M\Gamma}$.

i. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M , το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι σταθερό.

ii. Αν το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα,

a) να δείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία $A\Gamma$ και να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων A, B, Γ .

b) αν επιπλέον ισχύει $\overrightarrow{AP} = \chi \overrightarrow{B\Gamma}$, να βρείτε το χ ώστε το P να είναι μέσο του AB .

4. Έστω O σημείο αναφοράς και οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B, Γ, Δ είναι αντίστοιχα: $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, όπου τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα.

i. a) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

b) Να αποδείξετε ότι $(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B}) // \overrightarrow{AB}$.

ii. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{u} = (\kappa - 1)\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = (3\kappa + 2)\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

5. i. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\vec{\gamma}$ μοναδιαίο διάνυσμα να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \geq 2$.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $|10\vec{\alpha}| = |5\vec{\gamma}| = |\vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι: τα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα, τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίρροπα και

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}, \vec{\beta} = -5\vec{\gamma}.$$

6. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda - 1, -2)$, $B(-1, 0)$, $\Gamma(\lambda - 3, 2\lambda)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε τα A, B, Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Για $\lambda = -1$:

a) να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM

b) να βρείτε σημείο Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο.

c) αν E είναι το μέσο της διαμέσου AM και Z το σημείο για το οποίο ισχύει $2\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{Z\Gamma}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Z και να δείξετε ότι τα B, Z, E είναι συνευθειακά.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1 = 0$, (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Έστω ότι τα σημεία A, B έχουν τεταγμένες τις ρίζες της εξίσωσης (1) και το σημείο $M(\kappa, 3)$ είναι μέσον του AB .

a) Να βρείτε το λ

b) Να βρείτε το κ , ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{MO}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 300° .

ii. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης τις ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

8. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(1, 4)$, $B(6, 4)$, $\Gamma(9, 1)$ και $\Delta(2, 1)$.

i. Να αποδείξετε ότι:

a) το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

b) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$

ii. Θεωρούμε σημείο M τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το x , ώστε το σημείο M να είναι συμμετρικό του Γ ως προς το Δ .

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ με AM

διάμεσο, για το οποίο γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

i. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

iii. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM .

iv. Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \overrightarrow{AM}$ είναι $\frac{\pi}{6}$.

10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$.

i. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

iii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

11. Οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{\gamma}$ των σημείων A, B και Γ είναι τέτοιες, ώστε να ισχύουν οι εξής σχέσεις: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = \sqrt{7}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

ii. Να υπολογίσετε:

a) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

b) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii. Αν για το διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{x} \parallel (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$

a) να αποδείξετε ότι $\vec{x} = -\frac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$,

b) να υπολογίσετε το $|\vec{x}|$.

12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, -1)$, $B(7, 2)$, $\Gamma\left(-\frac{5}{7}, -2\right)$ και AM διάμεσος του.

i. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$.

ii. Να βρείτε σημείο P του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο APB να είναι ορθογώνιο στο P.

iii. Να βρείτε την προβολή του $\overrightarrow{AM}$ πάνω στο $\overrightarrow{AB}$.

13. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, και AD το ύψος του. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα, τότε:

i. να βρείτε το $|\overrightarrow{B\Gamma}|$

ii. να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BD}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii. να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

14. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} = \left(2, \frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}|\right)$.

i. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

iii. Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

iv. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

15. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν: $\vec{\gamma} = (-2, 4)$, $\vec{\beta} = (1, 3)$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = (2, 1)$.

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\vec{\gamma}, \vec{\beta} \right)$.

ii. Να δείξετε ότι $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$.

iii. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

iv. Αν είναι γνωστό ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε:

a) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

b) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΓ με $\overrightarrow{\text{ΟΑ}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} = \vec{\gamma}$ είναι ισοσκελές με διάμεσο την ΟΒ , όπου $\overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \vec{\beta}$.

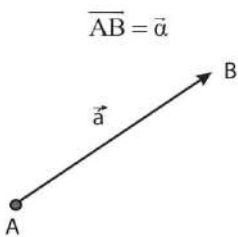
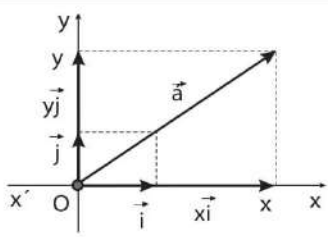
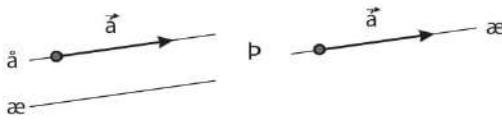
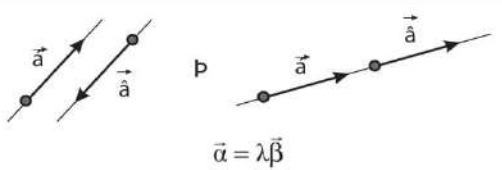
16. Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

i. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{x} - 2\vec{\beta})$.

iii. Αν $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 120^\circ$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\beta}$ να βρείτε το $|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}|$ και το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία

ισχύει: $\overrightarrow{\text{ΜΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΜΒ}} = 1$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ	ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ
Διάνυσμα	
	 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \text{ αν } \begin{matrix} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{matrix}$
Μηδενικό διάνυσμα	
$\vec{0} = \overrightarrow{AA}$	$\vec{0} = (0, 0)$
Μέτρο διανύσματος	
$ \overrightarrow{AB} = (AB) \geq 0$	$\vec{a} = (x, y) \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ $ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Φορέας διανύσματος	
ευθεία (ε): 	
$\vec{a} // \zeta$	
	$\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\zeta} \quad \text{ή} \quad (\vec{a} // y'y \text{ και } \zeta // y'y)$
$\vec{a} // \vec{\beta}$	
 $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$	$\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$ ή $\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}, \text{ (αν υπάρχουν)}$ ή $(\vec{a} // y'y \text{ και } \vec{\beta} // y'y)$
$\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$	
$\vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \text{ με } \lambda > 0 \quad \text{ή} \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$	$(\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \text{ και } \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda > 0)$ ή $(\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}} \text{ και } \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda > 0)$ ή $(\vec{a} // y'y // \vec{\beta} \text{ και } \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda > 0)$ ή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta} $
$ \vec{a} + \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\beta} $	

$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$	
$\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, με $\lambda < 0$ ή $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \pi$, (180°)	$(\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \text{ και } \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda < 0)$ ή $(\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}} \text{ και } \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda < 0)$ ή $(\vec{a} // \vec{y}'\vec{y} // \vec{\beta} \text{ και } \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda < 0)$ ή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta} $
$ \vec{a} + \vec{\beta} = \vec{a} - \vec{\beta} $	
$\vec{a} = \vec{\beta}$	
$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \text{ και } \vec{a} = \vec{\beta} $	$\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \quad x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$
$\vec{a} = -\vec{\beta}$	
$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \text{ και } \vec{a} = \vec{\beta} \text{ ή } -\vec{AB} = \vec{BA}$	$\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \quad x_1 = -x_2 \text{ και } y_1 = -y_2$
$\vec{a} // \vec{x}'\vec{x}$	
—	$y = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = (x, 0) \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = 0$
$\vec{a} // \vec{y}'\vec{y}$	
—	$x = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = (0, y) \Leftrightarrow$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
$(\vec{a}, \vec{\beta})$	
$0 \leq (\vec{a}, \vec{\beta}) \leq \pi$	$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{ \vec{a} \cdot \vec{\beta} } = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
$(\vec{a}, \vec{x}'\vec{x}) = \omega$	
—	$0 \leq (\vec{a}, \vec{x}'\vec{x}) < 2\pi, \quad \lambda_{\vec{a}} = \varepsilon \varphi \omega = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$
$\vec{a} \perp \vec{\beta}$	
$(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}, (90^\circ)$	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ ή } \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1 \text{ (}\vec{a}, \vec{\beta} \not// \vec{y}'\vec{y}\text{)}$ ή $(\vec{a} // \vec{x}'\vec{x} \text{ και } \vec{\beta} // \vec{y}'\vec{y}) \text{ (}\lambda_{\vec{a}} = 0\text{)}$
$\vec{a} + \vec{\beta}$	
$\vec{a} = \vec{AB}$ $\vec{\beta} = \vec{B\Gamma}$	$\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \quad (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$	

§2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Εξίσωση Γραμμής

1. Ορισμός

Μία εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται **εξίσωση μιας γραμμής C** , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C , και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

- Αν η εξίσωση μιας γραμμής C είναι $f(x, y) = 0$, τότε έχουμε:

$$M(x_0, y_0) \in C \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = 0.$$

- Με τις εξισώσεις των γραμμών μπορούμε με αλγεβρικές μεθόδους να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των γραμμών αυτών ή να αντιμετωπίσουμε συναφή προβλήματα.

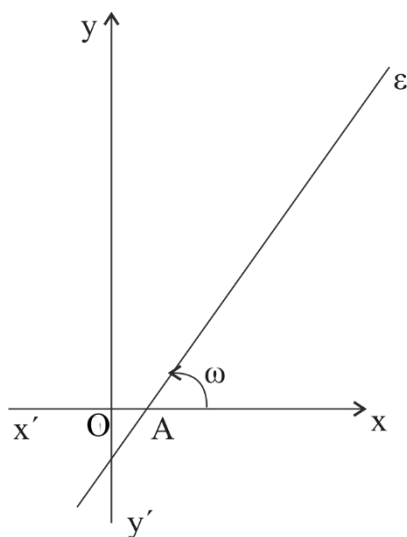
Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

2. i. Τι λέμε γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$;

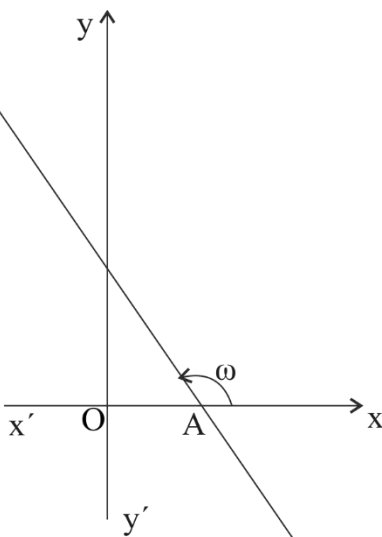
Ορισμός

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .

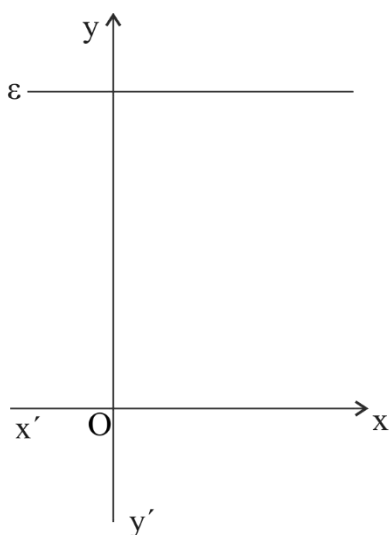
Γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, λέμε τη γωνία ω που διαγράφει ο $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε .



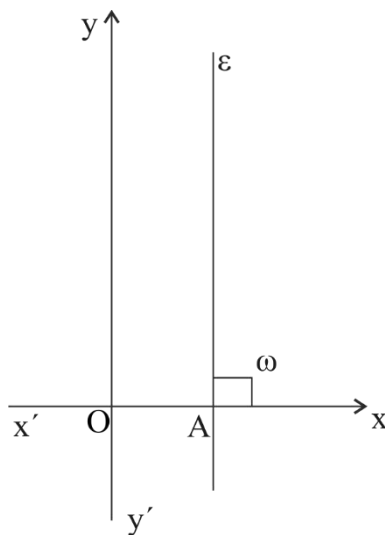
$$0 < \omega < \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$



$$\omega = 0$$



$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

- Αν η ευθεία ε είναι **παράλληλη προς τον άξονα $x'x$** , (3^ο σχήμα) τότε λέμε ότι η ε σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\omega = 0$.
- Οι **τιμές που παίρνει η γωνία ω** που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή $0 \leq \omega < \pi$.

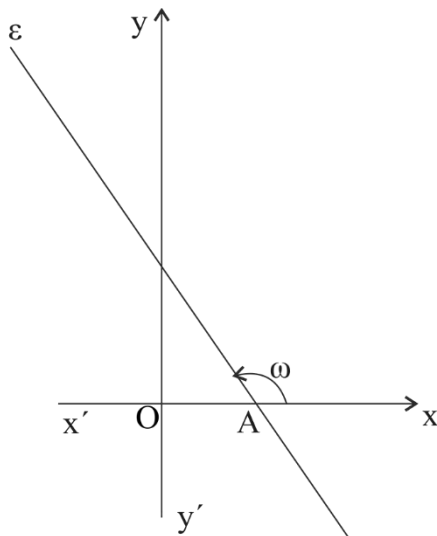
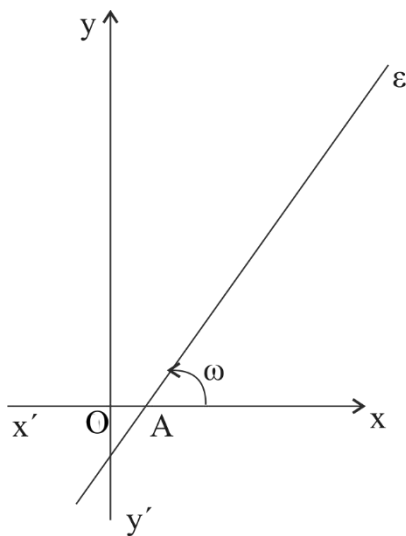
ii. Τι ορίζουμε ως συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ε ;

Ορισμός

Ως **συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση**, μιας ευθείας ε , ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει

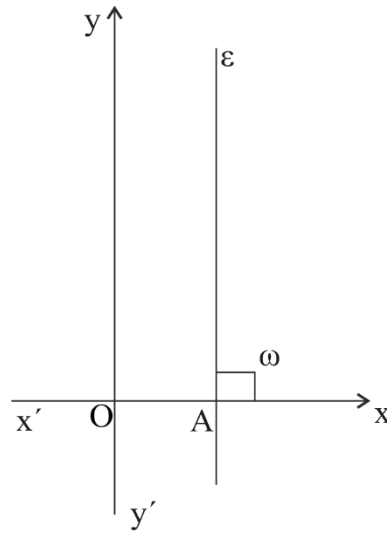
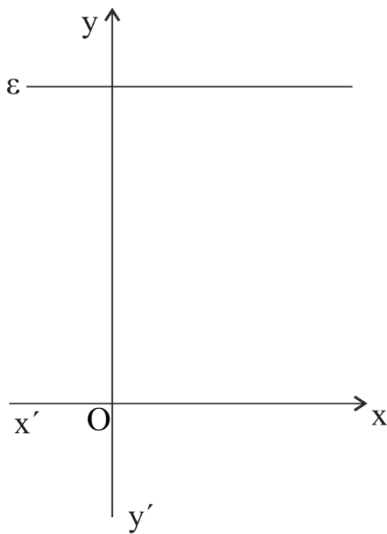
η ε με τον άξονα $x'x$, όταν $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ ($\omega \neq 90^\circ$) και συμβολίζουμε με λ . Δηλαδή $\lambda = \varepsilon\omega$.

- Οι **τιμές που παίρνει ο συντελεστής διεύθυνσης** ευθείας ε , σε σχέση με το είδος της γωνίας ω , είναι:



$$0 < \omega < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lambda > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \Leftrightarrow \lambda < 0$$



$$\omega = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varepsilon \perp y'y$$

$\Leftrightarrow$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης

- Όταν είναι γνωστά ένα σημείο μιας ευθείας και ο συντελεστής διεύθυνσης της, τότε μπορούμε να τη σχεδιάσουμε.

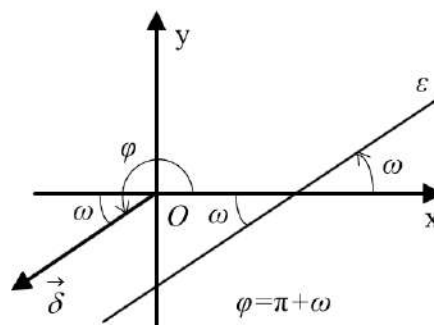
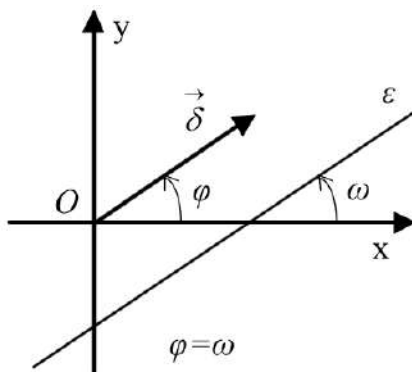
iii. Θεώρημα

Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Δηλαδή: $\varepsilon \parallel \vec{\delta} (\parallel y'y) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\delta}}$

Απόδειξη

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε . Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον $x'x$ αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$, οπότε $\varepsilon\varphi = \varepsilon\varphi$ ή $\varepsilon\varphi = \varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi$, άρα $\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_\varepsilon$.



iv. Πως βρίσκουμε συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε , μη παράλληλης στον άξονα $y'y$ που διέρχεται από δύο σημεία με γνωστές συντεταγμένες;

- Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με

$$x_1 \neq x_2 \text{ είναι } \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

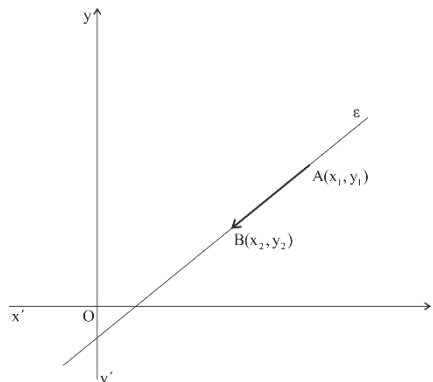
Απόδειξη

Επειδή $x_1 \neq x_2$ η ευθεία ε δεν είναι κατακόρυφη.

$$\text{Είναι } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ και } \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Αφού ο φορέας του $\overrightarrow{AB}$ είναι η ευθεία ε , ισχύει:

$$\varepsilon \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}}, \text{ άρα } \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Προσοχή

Αν για τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ από τα οποία διέρχεται η ευθεία ε έχουμε $x_1 = x_2$, δηλαδή είναι $\varepsilon \parallel y'y$, τότε **δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσής της**.

Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

3. Αν οι ευθείες ε_1 , ε_2 ($\nparallel y'y$) έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 , λ_2 αντιστοίχως, τότε:

- Συνθήκη παραλληλίας: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2$.

$$\text{Τότε } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\delta}_1} = \lambda_{\vec{\delta}_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

- Συνθήκη καθετότητας: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2$.

$$\text{Τότε } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\delta}_1} \cdot \lambda_{\vec{\delta}_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$$

Προσοχή

Αν $\varepsilon_1 \parallel y'y$ (δηλαδή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε_1), τότε

- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 \parallel y'y$ (δηλαδή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε_2)
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$

Εξίσωση Ευθείας

4. i. Πότε ορίζεται μια ευθεία

Μια ευθεία ορίζεται, όταν δίνονται:

- ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή
- δύο σημεία της.

ii. Θεώρημα

Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Απόδειξη

Έστω Oxy σύστημα συντεταγμένων. Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε , αν και μόνο αν:

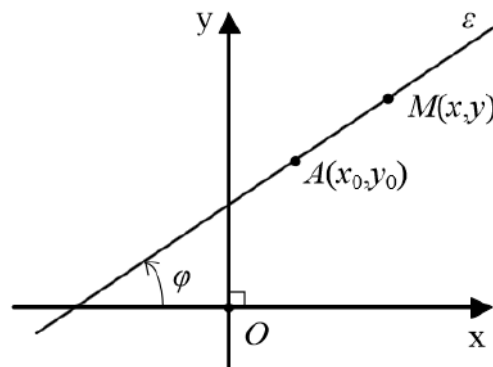
$$\overrightarrow{AM} \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{AM}} = \lambda \quad (1)$$

Είναι:

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0) \text{ και } \lambda_{\overrightarrow{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

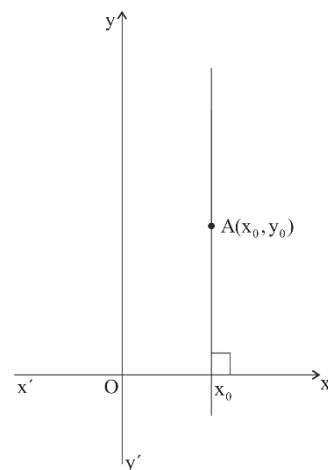
$$(1) \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0) \quad (2)$$

Επειδή η (2) επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$, αυτή είναι η εξίσωση της ευθείας (ε).



Προσοχή

✓ Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα x' , δηλαδή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσής της, είναι $x = x_0$.



✓ Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι:

I. $x = x_0$

II. $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

iii. Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, είναι

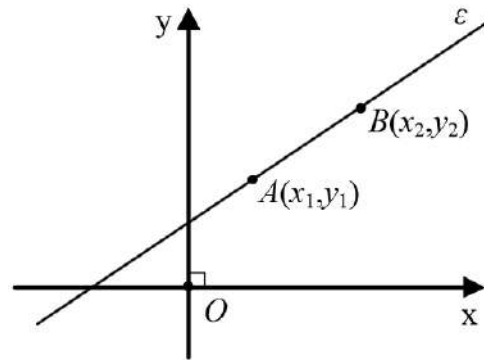
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Απόδειξη

Με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Επειδή η ε διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , η εξίσωσή της είναι:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$



Προσοχή

✓ Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 = x_2$, είναι $x = x_1$.

✓ Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$.

5. Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων ευθείας

i. Εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, \beta)$ και

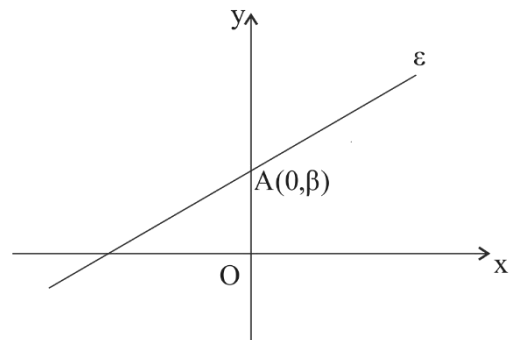
έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι $y = \lambda x + \beta$.

Απόδειξη

Από τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$,

για το $A(0, \beta)$ έχουμε:

$$y - \beta = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow y - \beta = \lambda x \Leftrightarrow y = \lambda x + \beta$$



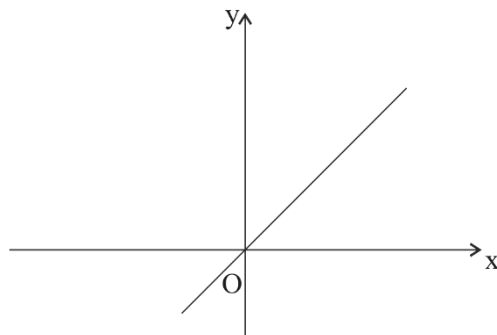
ii. Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι $y = \lambda x$.

Απόδειξη

Από τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$,

για το $O(0, 0)$ έχουμε:

$$y - 0 = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow y = \lambda x.$$

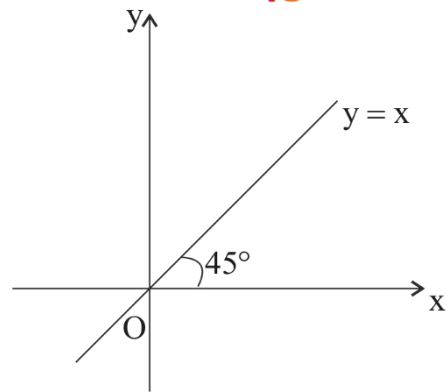


- Η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$, είναι $y = x$

Απόδειξη

Από τον τύπο $y = \lambda x$ με $\lambda = \tan 45^\circ = 1$, έχουμε:

$$y = x.$$

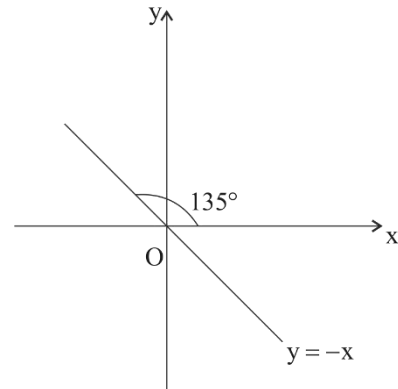


- Εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $y\hat{O}x'$ είναι $y = -x$.

Απόδειξη

Από τον τύπο $y = \lambda x$ με $\lambda = \tan 135^\circ = -1$, έχουμε:

$$y = -x.$$



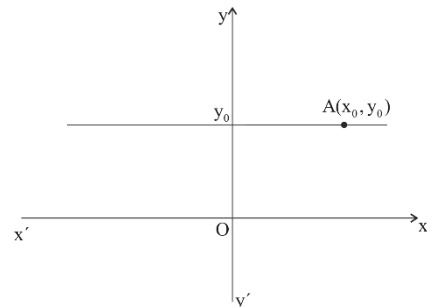
- iii. Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, είναι

$$y = y_0.$$

Απόδειξη

Από τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ με $\lambda = 0$ έχουμε:

$$y - y_0 = 0(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = 0 \Leftrightarrow y = y_0$$



Προσοχή

Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. **i.** Για να διαπιστώσουμε αν ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ είναι σημείο μιας γραμμής, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της $x = \alpha$, $y = \beta$ και ελέγχουμε αν επαληθεύεται.
 - ii.** Τα σημεία τομής γραμμών, (κοινά σημεία γραμμών), έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.
 - iii.** Η εξίσωση μιας γραμμής δεν είναι πάντα συνάρτηση. Για να διαπιστώσουμε αν μια γραμμή είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, ελέγχουμε αν κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο της. Στην περίπτωση που έχουμε μόνο την εξίσωση της γραμμής και όχι την γραφική της παράσταση, επιλύουμε ως προς y και αν έχει μοναδική λύση τότε η εξίσωση της γραμμής είναι συνάρτηση.
 - iv.** Για να διαπιστώσουμε αν μια γραμμή C με γνωστή εξίσωση και $M(x, y)$ ένα σημείο της, είναι **συμμετρική** ως προς:
 - a. τον άξονα $y'y$
ελέγχουμε αν το σημείο $M_1(-x, y)$ ανήκει στη C .
 - b. τον άξονα $x'x$
ελέγχουμε αν το σημείο $M_2(x, -y)$ ανήκει στη C .
 - c. Την **αρχή των αξόνων** $O(0,0)$
ελέγχουμε αν το σημείο $M_3(-x, -y)$ ανήκει στη C .
(Δηλαδή αν τα σημεία M_1, M_2, M_3 αντίστοιχα, επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής C .)
 - v.** Η **συμμετρική μιας γραμμής** $C: f(x, y) = 0$, ως προς:
 - a. τον άξονα $y'y$ είναι η $C_1: f(-x, y) = 0$
 - b. τον άξονα $x'x$ είναι η $C_2: f(x, -y) = 0$
 - c. την **αρχή των αξόνων** είναι η $C_3: f(-x, -y) = 0$
2. **i.** Όλα τα διανύσματα μιας ευθείας έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης λ , που είναι και συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.
 - ii.** Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία όταν είναι γνωστά ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$ και ο συντελεστής διεύθυνσής της $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, $\nu \neq 0$, προσδιορίζουμε δεύτερο σημείο της B ως εξής: «μετακινούμε» το A ν μονάδες αριστερά ή δεξιά (ανάλογα αν το ν είναι αρνητικό ή θετικό αντίστοιχα) και στη συνέχεια μ μονάδες πάνω ή κάτω (ανάλογα αν το μ είναι αρνητικό ή θετικό αντίστοιχα), οπότε οι συντεταγμένες του B είναι $B(x_1 + \nu, y_1 + \mu)$.
- Προσοχή:** αν το λ έχει πρόσημο « $-$ », το τοποθετούμε ή στον αριθμητή του ή στον παρονομαστή του.
3. **i.** Τα x, y στις διάφορες μορφές των εξισώσεων της ευθείας, παριστάνουν τις συντεταγμένες του τυχαίου σημείου της. Οπότε:

a. Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία ε ή η ε διέρχεται από το σημείο A , αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε .

b. Για να προσδιορίσουμε ένα σταθερό σημείο, πάνω σε ευθεία με γνωστή εξίσωση αντικαθιστούμε όπου x κάποιον σταθερό αριθμό και προσδιορίζουμε το y . Οι τιμές των x, y είναι οι συντεταγμένες του σταθερού σημείου.

c. Αν για τις συντεταγμένες των διακεκριμένων σημείων $B(x_1, y_1), \Gamma(x_2, y_2)$ ισχύουν οι σχέσεις:
 $y_1 = ax_1 + \beta, y_2 = ax_2 + \beta$, τότε η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι $y = ax + \beta$.

ii. Για να βρούμε σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα

a. $x'x$: αντικαθιστούμε στην εξίσωση της $y = 0$ και λύνουμε με άγνωστο το x .

b. $y'y$: αντικαθιστούμε στην εξίσωση της $x = 0$ και λύνουμε με άγνωστο το y .

iii. Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία με γνωστή εξίσωση χρειάζεται να προσδιορίσουμε δύο σημεία της. Ειδικά αν η ευθεία έχει $\lambda \neq 0$ συνήθως για το σχεδιασμό της γραφικής της παράστασης χρησιμοποιούμε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

Προσοχή

Τα σημεία μιας ευθείας παράλληλης με τον άξονα:

✓ $y'y$, έχουν ίδια τετμημένη (οπότε αυτή η ευθεία δεν είναι συνάρτηση)

✓ $x'x$, έχουν ίδια τεταγμένη

iv. Αν δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σημείο τομής τους έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.

4. i. Πως βρίσκουμε, αν υπάρχει, τον συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε :

Δεδομένα		Συντελεστής διεύθυνσης λ
$\omega = (\varepsilon, x'x)$ και	$\omega \neq \frac{\pi}{2}$	$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$
	$\omega = \frac{\pi}{2}$	—
$\varepsilon \parallel \vec{\delta}$	$\vec{\delta} \nparallel y'y$	$\lambda = \lambda_{\vec{\delta}}$
	$\vec{\delta} \parallel y'y$	—
$\varepsilon \perp \vec{\delta}$ και	$\vec{\delta} \nparallel y'y, x'x$	$\lambda \cdot \lambda_{\vec{\delta}} = -1$
	$\vec{\delta} \parallel y'y$	$\lambda = 0$
	$\vec{\delta} \parallel x'x$	—
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \ A, B \in \varepsilon$	$x_1 \neq x_2$	$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
	$x_1 = x_2$	—

$\varepsilon \parallel \eta$	$\eta \nparallel y'y$	$\lambda = \lambda_\eta$
	$\eta \parallel y'y$	—
$\varepsilon \perp \eta$ και	$\eta \nparallel y'y, x'x$	$\lambda \cdot \lambda_\eta = -1$
	$\eta \parallel y'y$	$\lambda = 0$
	$\eta \parallel x'x$	—

Προσοχή

- ✓ Αν η ευθεία ε έχει γνωστή εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ με $\beta \neq 0$, για να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης της λ , επιλύουμε ως προς y .
- ✓ Αν τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ της ευθείας ε εκφράζονται με παράμετρο εξετάζουμε αν υπάρχει τιμή της παραμέτρου τέτοια, ώστε να ισχύει $x_1 = x_2$, οπότε για την τιμή αυτή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε .

ii. Πως βρίσκουμε την εξίσωση μιας ευθείας ε :

Δεδομένα	Εξίσωση ευθείας ε που χρησιμοποιούμε
$A, B \in \varepsilon$ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 \neq x_2$	$(\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})$ $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$ ή $y = \lambda x + \beta$
$A, B \in \varepsilon$ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 = x_2$ ή $\varepsilon \parallel y'y$	$x = x_1$
$A(x_0, y_0), \lambda$	$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
$A(x_0, y_0), \varepsilon \parallel y'y$	$x = x_0$
$A(x_0, y_0)$	$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ή $x = x_0$
λ	$y = \lambda x + \beta$

Προσοχή

- ✓ Όταν στα δεδομένα έχουμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ε , θεωρούμε ότι ή είναι γνωστός ή μπορούμε να τον προσδιορίσουμε σύμφωνα με το 4.ι.
- ✓ Αν $\varepsilon \parallel x'x$, τότε $\lambda = 0$.
- ✓ Στην περίπτωση που το δεδομένο είναι ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ της ευθείας ε , τότε μπορεί να προκύπτουν και από τους δύο τύπους ($y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, $x = x_0$) εξισώσεις της ε , ανάλογα με τα δεδομένα.

5. Για να βρούμε τη μεσοκάθετο ε ευθύγραμμου τμήματος AB , ακολουθούμε τις παρακάτω διαδικασίες:

I.

- Βρίσκουμε το μέσο M του AB: $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$
- Χρησιμοποιούμε ότι $\varepsilon \perp AB$
- Εφαρμόζουμε την κατάλληλη εξίσωση του 4.ii.

ή

II. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: «ένα σημείο $\Lambda(x, y)$ ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος AB, αν και μόνο αν, ισαπέχει από τα άκρα του A και B», δηλαδή $(\Lambda A) = (\Lambda B)$, εφαρμόζουμε τον τύπο απόστασης δύο σημείων και στα δύο μέλη και μετά τις πράξεις προκύπτει η εξίσωση της μεσοκαθέτου.

6. Για να βρούμε το συμμετρικό $A'(x_2, y_2)$ σημείου $A(x_1, y_1)$ ως προς ευθεία ε (δεδομένη) εφαρμόζουμε τα εξής:

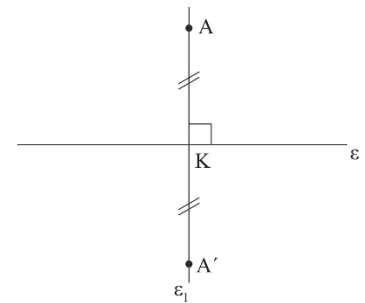
I.

- Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ε_1 , χρησιμοποιώντας ότι:
 $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$ και $A \in \varepsilon_1$.
- Προσδιορίζουμε το σημείο τομής K των $\varepsilon, \varepsilon_1$, λύνοντας το σύστημά τους.
- Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x_K = \frac{x_1+x_2}{2}, y_K = \frac{y_1+y_2}{2}$ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του A' .

ή

II.

- Αν $x_2 \neq x_1$ έχουμε: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} \quad (1)$.
- Το μέσο K του AA' με συντεταγμένες $K(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ εφόσον ανήκει στην ε επαληθεύει την εξίσωση της, οπότε έχουμε εξίσωση (2).
- Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του A' .



Προσοχή

Στην διαδικασία I. χρησιμοποιώντας τα δύο πρώτα βήματα, βρίσκουμε την **προβολή K του σημείου A στην ευθεία ε** , που είναι και το **πλησιέστερο σημείο της ευθείας ε από το σημείο A**.

7. Εξισώσεις στοιχείων τριγώνου

i. Για να βρούμε την **εξίσωση πλευράς τριγώνου** χρησιμοποιούμε την κατάλληλη περίπτωση, σύμφωνα με τα δεδομένα, του 4.ii.

Ειδικά:

Αν στο τρίγωνο οι δύο πλευρές του είναι οι άξονες, τότε πρέπει ότι η ευθεία της τρίτης πλευράς να μην είναι παράλληλη με τους άξονες και να μην διέρχεται από την αρχή τους $O(0,0)$. Οπότε η εξίσωσή της είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ με $\lambda \neq 0$ και $y_0 - \lambda x_0 \neq 0$.

Αν επιπλέον το τρίγωνο που σχηματίζεται με τους άξονες είναι ισοσκελές, τότε η γωνία της τρίτης πλευράς του με τον άξονα $x'x$ είναι $\frac{\pi}{4}$ ή $\frac{3\pi}{4}$.

ii. Για να βρούμε την **εξίσωση ύψους τριγώνου** χρησιμοποιούμε:

- την καθετότητά του προς την απέναντι πλευρά
- την κορυφή από την οποία διέρχεται

iii. Για να βρούμε την **εξίσωση διαμέσου τριγώνου** χρησιμοποιούμε:

- το μέσο της πλευράς την οποία τέμνει η διάμεσος
- την κορυφή από την οποία διέρχεται

8. Για να αποδείξουμε ότι **τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά** ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από τα δύο γνωστά σημεία και εξετάζουμε αν το τρίτο σημείο την επαληθεύει.

2^{ος} τρόπος

Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης 2 ευθειών, (π.χ. AB, AG), που ορίζουν τα 3 σημεία και εξετάζουμε αν είναι ίσοι.

3^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε αν και τα τρία σημεία έχουν ίδια τετμημένη, οπότε βρίσκονται σε μία ευθεία παράλληλη στον $y'y$.

9. i. Για να δείξουμε ότι **δύο ευθείες τέμνονται**:

Δείχνουμε ότι έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης ή

Δείχνουμε ότι η μία είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$ και η άλλη δεν είναι ή

Λύνουμε το σύστημά τους και παρατηρούμε ότι έχει μοναδική λύση

ii. Για να δείξουμε ότι **δύο ευθείες είναι παράλληλες**:

Δείχνουμε ότι έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης ή

Δείχνουμε ότι είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$ ή

Λύνουμε το σύστημά τους και παρατηρούμε ότι είναι αδύνατο.

Προσοχή

Αν το σύστημά τους έχει άπειρες λύσεις, τότε οι ευθείες συμπίπτουν.

iii. Για να δείξουμε ότι **δύο ευθείες είναι κάθετες**, δείχνουμε ότι:

Το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι ίσο με -1 ή

Η μία είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$ και η άλλη παράλληλη στον $x'x$

iv. Για να δείξουμε ότι **τρεις ευθείες τέμνονται στο ίδιο σημείο**, βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο και εξετάζουμε αν και η τρίτη ευθεία διέρχεται από αυτό.

✓ Τα παραπάνω αφορούν το πρόβλημα της **Σχετικής Θέσης Ευθειών**.

10. Όταν θέλουμε να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $A(x(\mu), y(\mu))$ με $\mu \in \mathbb{R}$ και $x(\mu), y(\mu)$ συναρτήσεις του μ , τότε:

✓ Θέτουμε $x = x(\mu), y = y(\mu)$

✓ Κάνουμε απαλοιφή του μ , παίρνοντας υπόψη τους περιορισμούς που προκύπτουν από τα $x(y), y(\mu)$ για τα x, y και βρίσκουμε τη γραμμή C που είναι ο γεωμετρικός τόπος.

- Αν οι συντεταγμένες του A εκφράζονται μέσω $\eta\omega$, $\sigma\omega$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:
 $\eta\mu^2\omega + \sigma\omega^2 = 1, -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\omega\omega \leq 1$.
- Αν υπάρχουν δύο παράμετροι μ_1, μ_2 , πρέπει να απαλειφθούν και οι δύο.
- Αν μία από τις συντεταγμένες του A είναι σταθερή, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία που ορίζει.
- Αν για το A ισχύει κάποια γεωμετρική ιδιότητα, τότε γράφουμε την αντίστοιχη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες του A και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε σε εξίσωση των x, y , που είναι η εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει το A .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι γραμμές C: $x^2 + y^2 - 13 = 0$, ε: $x + y - 5 = 0$.

i. Να εξετάσετε αν τα $A(2,3)$, $B(1,3)$ είναι σημεία της γραμμής C.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραμμών C και ε.

iii. Οι εξισώσεις των γραμμών C, ε είναι συναρτήσεις;

iv. Είναι η γραμμή C συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$;

v. Να προσδιορίσετε την συμμετρική της γραμμής ε ως προς τον άξονα $y'y$.

Λύση

i. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του $A(2,3)$ στην C, έχουμε:

$$2^2 + 3^2 - 13 = 0, \text{ που ισχύει.}$$

Άρα $A \in C$.

Ομοίως, για το σημείο $B(1,3)$ με $x=1$, $y=3$ από την C έχουμε:

$$1^2 + 3^2 - 13 = 0, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα $B \notin C$.

ii. Για να βρούμε τα σημεία τομής (κοινά σημεία) των γραμμών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + (5 - x)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x^2 - 10x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Άρα τα κοινά σημεία των C και ε είναι τα: $\Gamma(2,3)$, $\Delta(3,2)$.

iii. Για την C έχουμε: $x^2 + y^2 = 13 \Leftrightarrow y^2 = 13 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{13 - x^2}$

Εφόσον δεν είναι μοναδική η λύση της εξίσωσης C, ως προς y, η C δεν είναι συνάρτηση.

Για την ε έχουμε: $x + y = 5 \Leftrightarrow y = -x + 5$, δηλαδή η λύση της εξίσωσης της ε, ως προς y είναι μοναδική.

Άρα η ε είναι συνάρτηση.

iv. Εξετάζουμε αν το σημείο $M(x, -y)$ ανήκει στην C.

$$\text{Έχουμε: } x^2 + (-y)^2 - 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 13 = 0, \text{ που ισχύει.}$$

Άρα η γραμμή C είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$.

v. Η συμμετρική της γραμμής ε ως προς τον άξονα $y'y$ είναι:

$$-x + y - 5 = 0.$$

2. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ (αν υπάρχει) της ευθείας ε, τη γωνία ω που σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$ και την εξίσωση της ε, όταν:

i. $\varepsilon \parallel \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (-\sqrt{3}, 1)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 2)$.

ii. $\varepsilon \parallel \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (0, 3)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 2)$.

iii. $\varepsilon \perp \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (0, 3)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 2)$.

iv. Η ε διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,4)$.

- v. Η ε διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(1,4)$.
- vi. $\varepsilon \perp \eta$ με $\eta: x=1$ και η ε διέρχεται από το $A(1,3)$.
- vii. Η ε διέρχεται από τα σημεία $A(\mu,2)$ και $B(1,1)$.
- viii. $\varepsilon \parallel \eta$ με $\eta: y=-x$ και η ε διέρχεται από το $A(1,3)$.

Λύση

i. Έχουμε:

- $(\varepsilon \parallel \vec{\delta} \text{ και } \vec{\delta} \parallel y'y) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\vec{\delta}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\varepsilon\varphi\omega = \lambda \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \omega = \frac{5\pi}{6}, (0 \leq \omega < \pi)$
- $\varepsilon: y-2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$

ii. Έχουμε:

- $(\varepsilon \parallel \vec{\delta} \text{ και } \vec{\delta} \parallel y'y) \Rightarrow \varepsilon \parallel y'y$, οπότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε .
- $\omega = \frac{\pi}{2}$
- $\varepsilon: x = \sqrt{3}$

iii. Έχουμε:

- $(\varepsilon \perp \vec{\delta} \text{ και } \vec{\delta} \parallel y'y) \Rightarrow \varepsilon \perp x'x \Leftrightarrow \lambda = 0$
- $\omega = 0$
- $y-2 = 0(x-\sqrt{3}) \Leftrightarrow y = 2$

iv. Είναι:

- $x_A \neq x_B$ άρα $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{2-1} = 1$
- $\varepsilon\varphi\omega = \lambda \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$
- $\varepsilon: y-3 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x+2$

v. Είναι:

- $x_A = x_B = 1$, οπότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε .
- $\omega = \frac{\pi}{2}$
- $\varepsilon: x = 1$

vi. Έχουμε:

- $(\varepsilon \perp \eta \text{ και } \eta \parallel y'y) \Rightarrow \varepsilon \perp x'x \Leftrightarrow \lambda = 0$
- $\omega = 0$
- $\varepsilon: y = 3$

vii. Επειδή το σημείο Α είναι παραμετρικό, διακρίνουμε περιπτώσεις:

I. Αν $x_A = x_B \Leftrightarrow \mu = 1$, τότε

- δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε.
- $\omega = \frac{\pi}{2}$
- ε: $x = 1$

II. Αν $x_A \neq x_B \Leftrightarrow \mu \neq 1$, τότε

- $\lambda = \frac{1-2}{1-\mu} = \frac{1}{\mu-1}$
- Αν:
 - $\mu > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$
 - $\mu < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \omega < \pi$
- ε: $y-1 = \frac{1}{\mu-1}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\mu-1}x + \frac{\mu-2}{\mu-1}$

viii. Έχουμε:

- $\varepsilon \parallel \eta \Leftrightarrow \lambda = -1$
- $\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$
- ε: $y-3 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x+4$

3. Δίνονται οι ευθείες ε: $x-y-4=0$ και η: $y = (|\mu|-2)x+3$. Να βρείτε:

- τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε και τα σημεία Α και Β στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.
- τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες ε και η να είναι κάθετες και κατόπιν το σημείο τομής τους Δ.
- το πλησιέστερο σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων.

Λύση

i. Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Άρα η ε: $x-y-4=0 \Leftrightarrow y = x-4$ έχει $\lambda_\varepsilon = 1$.

Σημείο τομής της ε με τον άξονα $x'x$:

$$y=0 \Rightarrow 0 = x-4 \Leftrightarrow x=4.$$

Άρα είναι το σημείο Α(4,0).

Σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$:

$$x=0 \Rightarrow y=0-4 \Leftrightarrow y=-4.$$

Άρα είναι το σημείο Β(0,-4).

ii. $\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow 1 \cdot (|\mu| - 2) = -1 \Leftrightarrow |\mu| = 1 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$

Με $\mu = \pm 1$ έχουμε $\eta: y = -x + 3$

Το σημείο τομής των ε και η είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Άρα: $\Delta\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

iii. Το πλησιέστερο σημείο της ευθείας ε από το σημείο $O(0,0)$, είναι το ίχνος Γ της κάθετης ευθείας J από το O στην ε .

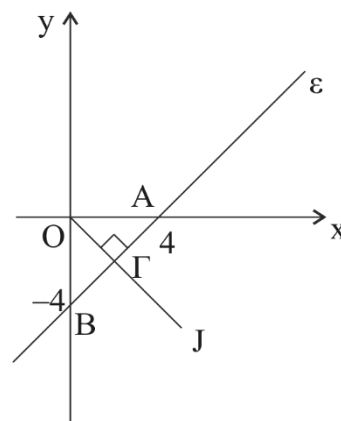
Είναι $\varepsilon \perp J \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_J = -1 \Leftrightarrow \lambda_J = -1$

Άρα $J: y = -x$

Λύνουμε το σύστημα των ε και J για να βρούμε τις συντεταγμένες του Γ .

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα $\Gamma(2, -2)$.



4. Δίνονται τα σημεία $A(-3,5)$ και $B(1,3)$.

i. Να βρείτε τη μεσοκάθετο του τμήματος AB .

ii. Αν ε η ευθεία της μεσοκαθέτου του τμήματος AB , να βρείτε:

I. την προβολή K του σημείου $\Gamma(-2,6)$, στην ευθεία ε .

II. το συμμετρικό Γ' του σημείου $\Gamma(-2,6)$, ως προς την ε .

Λύση

i. Έστω ε η μεσοκάθετος του τμήματος AB . Η ε διέρχεται από το μέσο M του AB και είναι $\varepsilon \perp AB$.

Έχουμε: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, άρα $M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$,

δηλαδή $M(-1,4)$ και $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-5}{1+3} = -\frac{1}{2}$.

Είναι $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 2$.

Οπότε η εξίσωση της ε είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

$\varepsilon: y - 4 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = 2x + 6$

ii. Έχουμε:

I. Η προβολή K του σημείου $\Gamma(-2,6)$ στην ευθεία ε , είναι το ίχνος της κάθετης ευθείας η από το Γ στην ε .

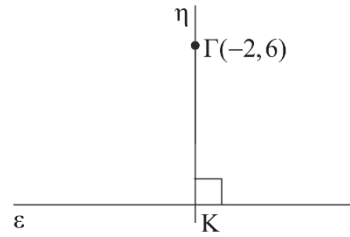
Είναι:

$$\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta} = -\frac{1}{2}$$

και η η διέρχεται από το $\Gamma(-2, 6)$,

$$\text{άρα έχει εξίσωση } \eta: y - 6 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$\text{Λύνουμε το σύστημα των } \varepsilon \text{ και } \eta: \begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{26}{5} \end{cases}$$



$$\text{Άρα } K(-\frac{2}{5}, \frac{26}{5}).$$

II. Αν $\Gamma'(\alpha, \beta)$ το συμμετρικό του $\Gamma(-2, 6)$ ως προς την ε , τότε το μέσο K του $\Gamma\Gamma'$ ανήκει στην ε .

Είναι:

$$K(\frac{\alpha - 2}{2}, \frac{\beta + 6}{2}) \text{ και}$$

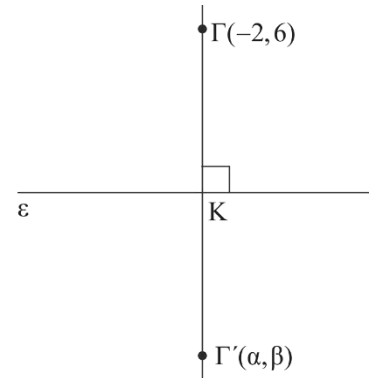
$$K \in \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\beta + 6}{2} = 2 \frac{\alpha - 2}{2} + 6 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = -2 \quad (1)$$

Επίσης

$$\varepsilon \perp \Gamma\Gamma' \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\Gamma\Gamma'} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda_{\Gamma\Gamma'} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Gamma'} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta - 6}{\alpha + 2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 10 \quad (2)$$

$$\text{Από το σύστημα των (1) και (2) έχουμε: } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{6}{5} \\ \beta = \frac{22}{5} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \Gamma'(\frac{6}{5}, \frac{22}{5}).$$



5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$, $\Gamma(1, 4)$. Να βρείτε την εξίσωση

i. της πλευράς AB

ii. του ύψους AD

iii. της διαμέσου BM

iv. της μεσοκαθέτου της πλευράς AG

Λύση

$$\text{i. Είναι } A(-1, 2), B(3, -2), \text{ με } x_A \neq x_B, \text{ άρα } \lambda_{AB} = \frac{-2 - 2}{3 + 1} = -1.$$

Η ευθεία AB έχει $\lambda_{AB} = -1$ και διέρχεται από το $A(-1, 2)$, άρα έχει εξίσωση:

$$y - 2 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

$$\text{ii. Είναι } AD \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AD} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$$

$$\text{και } \lambda_{BF} = \frac{4+2}{1-3} = -3$$

$$\text{άρα } \lambda_{\Delta\Delta}(-3) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Delta\Delta} = \frac{1}{3}.$$

Επίσης η ευθεία ΑΔ διέρχεται από το Α(-1,2)

$$\text{άρα έχει εξίσωση } y-2 = \frac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

iii. Μ μέσο ΑΓ, άρα $M(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+4}{2})$, δηλαδή $M(0,3)$.

Η διάμεσος ΒΜ έχει $\lambda_{BM} = \frac{3+2}{0-3} = -\frac{5}{3}$ και διέρχεται από το $M(0,3)$ άρα

έχει εξίσωση

$$y-3 = -\frac{5}{3}(x-0) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x + 3.$$

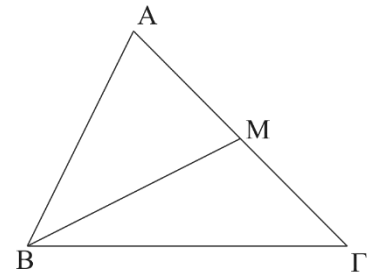
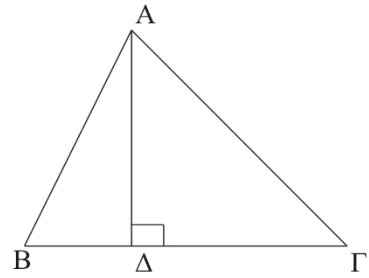
iv. Έστω $N(x,y)$ σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ. Τότε:

$$(NA) = (NG)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 3$$



6. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές τα σημεία Α(-8,2), Β(7,4) και ορθόκентρο το Η(5,2). Να βρείτε:

i. την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

ii. τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

iii. την εξίσωση της πλευράς ΑΒ

Λύση

i. Το ΑΗ είναι ύψος του τριγώνου, άρα $AH \perp BG$. Έχουμε

$$\lambda_{AH} = \frac{2-2}{5+8} = 0 \Leftrightarrow AH \parallel x'x.$$

Οπότε $AH \parallel x'x$ και $AH \perp BG \Rightarrow BG \perp x'x$ και η εξίσωση της ΒΓ

έχει μορφή $x = x_0$.

Η ΒΓ περνάει από το $B(7,4)$ άρα έχει εξίσωση $x = 7$.

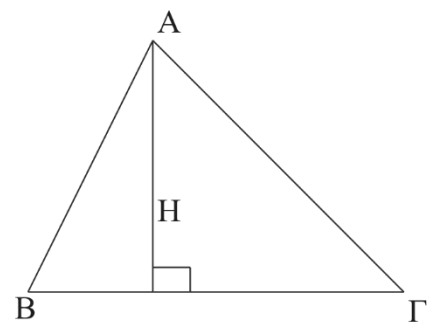
ii. Το Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΒΓ και ΑΓ.

Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ:

$$BH \text{ ύψος άρα, } BH \perp AG \text{ και } \lambda_{BH} = \frac{2-4}{5-7} = 1, \text{ άρα } \lambda_{BH} \cdot \lambda_{AG} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AG} = -1.$$

Η ευθεία ΑΓ έχει $\lambda_{AG} = -1$ και περνάει από το $A(-8,2)$ άρα έχει εξίσωση: $y-2 = -1(x+8) \Leftrightarrow y = -x-6$.

$$\text{Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΓ και ΒΓ: } \begin{cases} y = -x-6 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -13 \\ x = 7 \end{cases}$$



Άρα $\Gamma(7, -13)$.

iii. Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{7+8} = \frac{2}{15}$ και η ευθεία AB διέρχεται από το $A(-8, 2)$, άρα έχει εξίσωση $y - 2 = \frac{2}{15}(x + 8) \Leftrightarrow y = \frac{2}{15}x + \frac{46}{15}$.

7. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται: η κορυφή $A(1, 2)$ και οι εξισώσεις

$\mu_1: x - 3y + 1 = 0$ και $\mu_2: y - 1 = 0$, δύο διαμέσων του.

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το A δεν επαληθεύει τις εξισώσεις μ_1 και μ_2 άρα $A \notin \mu_1$ και $A \notin \mu_2$.

Έστω $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$.

M μέσο AB, άρα $M(\frac{1+x_B}{2}, \frac{2+y_B}{2})$

N μέσο AG, άρα $N(\frac{1+x_\Gamma}{2}, \frac{2+y_\Gamma}{2})$

$M \in \mu_2 \Leftrightarrow \frac{2+y_B}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow y_B = 0$

$\Gamma \in \mu_2 \Leftrightarrow y_\Gamma - 1 = 0 \Leftrightarrow y_\Gamma = 1$

$N \in \mu_1 \Leftrightarrow \frac{1+x_\Gamma}{2} - 3 \cdot \frac{2+y_\Gamma}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + x_\Gamma - 6 - 3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_\Gamma = 6$

$B \in \mu_1 \Leftrightarrow x_B - 3y_B + 1 = 0 \Leftrightarrow x_B = -1$

Άρα $B(-1, 0)$, $\Gamma(6, 1)$

Εξίσωση ευθείας AB

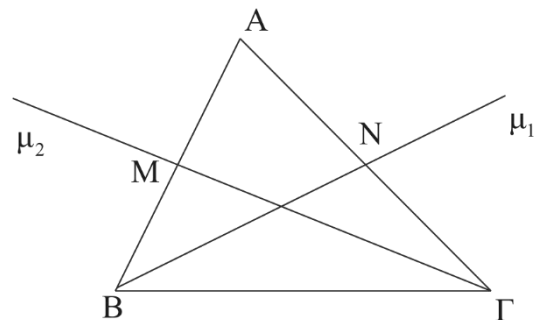
$\lambda_{AB} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$, $B(-1, 0)$, άρα $y = x + 1$

Εξίσωση ευθείας AG

$\lambda_{AG} = \frac{1-2}{6-1} = -\frac{1}{5}$, $A(1, 2)$, άρα $y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$

Εξίσωση ευθείας BG

$\lambda_{BG} = \frac{1-0}{6+1} = \frac{1}{7}$, $B(-1, 0)$, άρα $y = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$.



8. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(3, -5)$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας ε με εξίσωση $7x + y - 23 = 0$ τέτοιο ώστε, το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.

Λύση

Έστω $M(x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow 7x + y - 23 = 0 \Leftrightarrow y = 23 - 7x$, οπότε $M(x, 23 - 7x)$.

Το τρίγωνο AMB είναι ορθογώνιο στο M άρα: $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ (1)

Είναι

$$\overrightarrow{AM} = (x-4, 23-7x-2) = (x-4, 21-7x)$$

$$\overrightarrow{BM} = (x-3, 23-7x+5) = (x-3, 28-7x)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-4)(x-3) + (21-7x)(28-7x) = 0 \Leftrightarrow 50x^2 - 350x + 600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = 3$$

Με $x = 4$, $M(4, -5)$

Με $x = 3$, $M(3, 2)$

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες ε_1 :

$y = \frac{1}{2}x$ και $\varepsilon_2: y = \frac{1}{2}x + 1$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει $(AB) = 1$.

Λύση

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(0,1)$ είναι:

I. $\varepsilon: x = 0$ **II.** $\varepsilon: y - 1 = \lambda(x - 0)$

- Εξετάζουμε την περίπτωση **I.** $\varepsilon: x = 0$

Σημείο τομής των $\varepsilon, \varepsilon_1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα $A(0,0)$.

- Σημείο τομής των $\varepsilon, \varepsilon_2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα $B(0,1)$.

Είναι $(AB) = 1$

Άρα η ευθεία $\varepsilon: x = 0$ είναι δεκτή

- Εξετάζουμε την περίπτωση **II.** $\varepsilon: y - 1 = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow \lambda x - y = -1$

με $\lambda \neq \frac{1}{2}$, εφόσον τέμνει τις ε_1 και ε_2 .

Σημείο τομής των $\varepsilon, \varepsilon_1$

$$\begin{cases} \lambda x - y = -1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda \neq 0, D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, D_y = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Άρα } A\left(\frac{2}{1-2\lambda}, \frac{1}{1-2\lambda}\right)$$

Σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{cases} \lambda x - y = -1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda$$

$$\text{Άρα } B(0,1)$$

Είναι

$$(AB) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{2}{1-2\lambda} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{1-2\lambda} - 1\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-2\lambda)^2} + \frac{4\lambda^2}{(1-2\lambda)^2} = 1 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 = 4 + 4\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 4 + 4\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y = -\frac{3}{4}x + 1.$$

10. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y = -2x + 4$, $\varepsilon_2: y = -4x - 4$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι ώστε το M να είναι μέσο του AB .

Λύση

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(0,1)$, είναι:

$$\text{I. } \varepsilon: x = 0, \quad \text{II. } \varepsilon: y - 1 = \lambda x$$

- Εξετάζουμε την περίπτωση **I.** $\varepsilon: x = 0$

Σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } A(0,4)$$

Σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -4x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } B(0,-4)$$

Το μέσο του AB είναι $(0,0)$ διαφορετικό του $M(0,1)$ οπότε η ευθεία $\varepsilon: x = 0$ απορρίπτεται.

- Εξετάζουμε την περίπτωση **II.** $\varepsilon: y - 1 = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = -1$ με $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq -4$ εφόσον τέμνει τις ε_1 και ε_2 .

Σημείο τομής $\varepsilon, \varepsilon_1$

$$\begin{cases} \lambda x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 2 \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda + 2$$

$$\text{Άρα } A\left(\frac{3}{\lambda+2}, \frac{4\lambda+2}{\lambda+2}\right).$$

Σημείο τομής $\varepsilon, \varepsilon_2$

$$\begin{cases} \lambda x - y = -1 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 4 \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda$$

$$\text{Άρα } B\left(\frac{-5}{\lambda+4}, \frac{4-4\lambda}{\lambda+4}\right).$$

$$\text{Οπότε το μέσο του } AB \text{ έχει } x = \frac{\frac{3}{\lambda+2} - \frac{5}{\lambda+4}}{2} = \frac{2(-\lambda+1)}{2(\lambda+2)(\lambda+4)} = \frac{1-\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+4)} \text{ και}$$

$$y = \frac{\frac{4\lambda+2}{\lambda+2} + \frac{4-4\lambda}{\lambda+4}}{2} = \frac{2(2\lambda+1)(\lambda+4) + 2(2-2\lambda)(\lambda+2)}{2(\lambda+2)(\lambda+4)} = \frac{7\lambda+8}{(\lambda+2)(\lambda+4)}$$

Δίνεται ότι το μέσο του AB είναι το $M(0,1)$ άρα

$$\frac{1-\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+4)} = 0 \text{ και } \frac{7\lambda+8}{(\lambda+2)(\lambda+4)} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ και } \frac{15}{3 \cdot 5} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Επομένως $\varepsilon: y = x + 1$.

11. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , όταν

i. $M(\lambda+1, 2\lambda-2), \lambda \in \mathbb{R}$

ii. $M(\lambda+1, 3), \lambda \geq 1$

iii. $M(2, \lambda^2+1)$

Λύση

i. Έστω C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M .

Ισχύει:

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 \\ y = 2(x - 1) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ (αφού } \lambda \in \mathbb{R}) \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $y = 2x - 4$

ii. Έστω C ο γεωμετρικός τόπος.

Είναι:

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1, \lambda \geq 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = x - 1 \geq 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ημιευθεία $A\varepsilon \parallel x'x$ με αρχή το σημείο

$A(2, 3)$, εξίσωση $y = 3$ και $x \geq 2$.

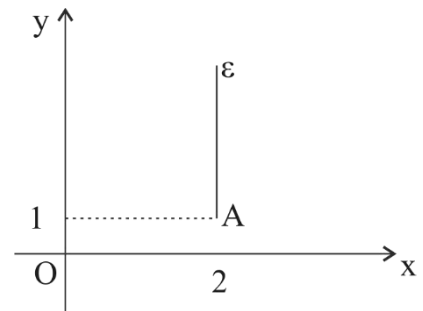
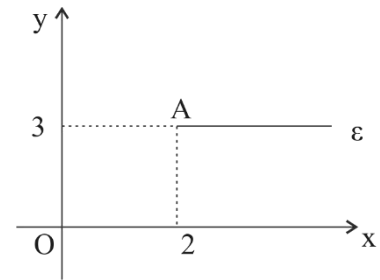
iii. Έστω C ο γεωμετρικός τόπος.

Είναι:

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \lambda^2 = y - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ημιευθεία $A\varepsilon \parallel y'y$ με αρχή το

σημείο $A(2, 1)$, εξίσωση $x = 2$ και $y \geq 1$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ (αν υπάρχει) της ευθείας ε , τη γωνία που σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$ και την εξίσωση της ε , όταν:

i. $\varepsilon \parallel \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (-1, \sqrt{3})$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$.

ii. $\varepsilon \parallel \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (0, -2)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(3,5)$.

iii. $\varepsilon \perp \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (0, -2)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(3,5)$.

iv. $\varepsilon \parallel \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (-2, 0)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(3,5)$.

v. $\varepsilon \perp \vec{\delta}$, με $\vec{\delta} = (-1, 1)$ και η ε διέρχεται από το σημείο $A(3,5)$

vi. Η ε διέρχεται από τα σημεία

α. $A(-6, -2)$ και $B(3, 7)$. β. $A(1, -1)$ και $B(1, 2)$.

γ. $A(0, -3)$ και $B(6, -3)$. δ. $A(-3, 4)$ και $O(0, 0)$.

vii. Η ε διέρχεται από το $A(1, -2)$ και $\varepsilon \perp \delta$ με $\vec{\delta} = (2, 0)$.

2. Να εξετάσετε αν τα σημεία είναι συνευθειακά:

α. $A(-1, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(2, 8)$ β. $A(2, 4)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(4, 10)$ γ. $A(a, 2)$, $B(1, a)$ και $\Gamma(1, -1)$

3. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 .

β. Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:

i. να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ .

ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$.

4. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

ii. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB .

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθυγράμμου τμήματος AB .

iv. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB .

v. Να βρεθεί τον εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB .

5. Αν $A(2, 1)$ και $\varepsilon: y = x - 5$ να βρείτε:

i. την προβολή B του σημείου A στην ε .

ii. το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς την ε .

iii. το συμμετρικό σημείο Γ του A ως προς το A' .

6. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ε .

ii. Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ε .

iii. Να βρείτε το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς την ευθεία ε .

7. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που είναι συμμετρική της $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ ως προς την $\delta: y = -3x + \frac{3}{2}$.

8. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2x - y + 3 = 0$ και $\eta: y = (|\mu| - 1)x$. Να βρείτε:

i. τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε και τα σημεία A και B στα οποία τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

ii. το σημείο της ευθείας ε που είναι το πλησιέστερο:

α. από την αρχή των αξόνων

β. από το σημείο $\Gamma(-1, 2)$

iii. τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες ε και η να είναι παράλληλες.

iv. τις εξισώσεις των συμμετρικών ευθειών ε' και η' των ε και η ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

9. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$, $\Gamma(1, 4)$. Να βρείτε την εξίσωση:

i. της πλευράς $B\Gamma$

ii. του ύψους BH

iii. της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$

iv. της διαμέσου ΓM .

10. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 3)$, $\Gamma(2, -4)$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου $AB\Gamma$, που διέρχεται από το σημείο A .

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου του τριγώνου $AB\Gamma$ που διέρχεται από το σημείο B .

iii. Να βρείτε το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

11. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε κορυφές $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$ και ορθόκεντρο $H(-1, 2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φορέων των πλευρών του και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ , όταν η ευθεία $B\Gamma$ είναι οριζόντια.

12. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $A(-10, 2)$, $B(6, 4)$ και το ορθόκεντρο $H(5, 2)$. Βρείτε τις συντεταγμένες του Γ και τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

13. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται: η κορυφή $A(-1, 2)$ και οι εξισώσεις $y = -\frac{5}{3}x + 3$, $x = 1$ δύο διαμέσων του μ_1 , μ_2 αντίστοιχα. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

14. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $A(3, -1)$, ορθόκεντρο $H(4, -1)$, η μεσοκάθετος του AB έχει εξίσωση $\varepsilon: x + 4y - 16 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η κορυφή B έχει συντεταγμένες (5, 7).

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου.

15. Δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(8,1). Να βρείτε σημείο M της ευθείας $2x + 3y - 1 = 0$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.

16. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x - 3y - 12 = 0$, όταν ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τετραγωνικές μονάδες.

17. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ϵ η οποία διέρχεται από το σημείο A(-3,2) και ορίζει με τους αρνητικούς ημιάξονες τρίγωνο εμβαδού 4.

18. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνάει από το σημείο M(1,2) και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

19. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = x - 1$ και $\epsilon_2: y = -x + 1$. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ϵ που διέρχεται από το σημείο M(1,1) και τέμνει τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στα σημεία A, B αντίστοιχα, έτσι ώστε το σημείο M να είναι μέσο του AB.

20. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία A(0,4), B(6,6) και Γ(7,3). Να βρεθούν οι προβολές Κ, Λ των Α και Γ αντίστοιχα στη ΒΔ. Κατόπιν να αποδειχθεί ότι το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

21. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών ρόμβου που έχει μια κορυφή το (1,3) μια πλευρά με εξίσωση $\epsilon: y = -2x + 5$ και μια του διαγώνιο με εξίσωση $\delta: y = x - 1$.

22. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών παραλληλογράμμου το οποίο έχει μια κορυφή το σημείο (-1,1) και δυο πλευρές με εξισώσεις $\epsilon_1: 2x + 3y = 14$ και $\epsilon_2: 3x - 2y = 8$.

23. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των υπολοίπων κορυφών παραλληλογράμμου που έχει δυο κορυφές τα σημεία (1,2) και (0,-1) και το κέντρο του Ο έχει συντεταγμένες $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

24. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, όταν

i. $M(2\lambda - 4, \lambda + 2), \lambda \in \mathbb{R}$

ii. $M(-2, \lambda + 2), \lambda \geq 1$

iii. $M(\eta \mu \theta, 2)$

iv. $M(|\lambda| - 1, |\lambda|), \lambda \in \mathbb{R}$

v. $M(2\alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha + \beta = 2$

§2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Η Εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

1. Θεώρημα

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία.

Απόδειξη

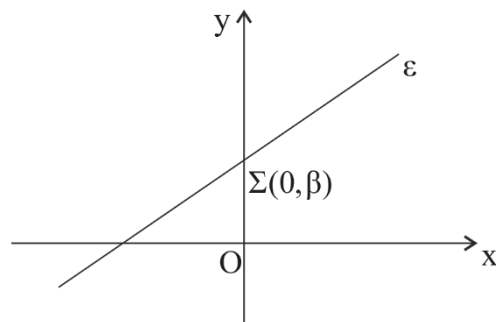
(Ευθύ)

Θα αποδείξουμε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Έστω ευθεία ε στο καρτεσιανό επίπεδο.

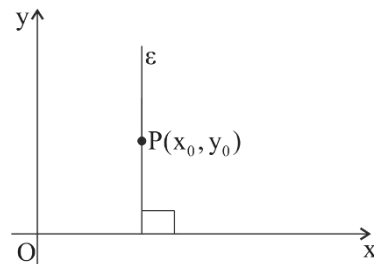
Αν η ευθεία ε :

- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\Sigma(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$, δηλαδή με $A = \lambda$, $B = -1$, $\Gamma = \beta$, ($B \neq 0$) γράφεται



$$Ax + By + \Gamma = 0.$$

- Είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $1x + 0y + (-x_0) = 0$, δηλαδή με $A = 1$, $B = 0$, $\Gamma = -x_0$, ($A \neq 0$) γράφεται $Ax + By + \Gamma = 0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.



(Αντίστροφο)

Θα αποδείξουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ (1) με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

- Αν $B \neq 0$, τότε $(1) \Leftrightarrow By = -Ax - \Gamma \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$ που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Sigma(0, -\frac{\Gamma}{B})$.
- Αν $B = 0$, τότε $A \neq 0$ (υπόθεση) και γράφεται η (1):

$$Ax + 0y + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax = -\Gamma \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$$

που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P(-\frac{\Gamma}{A}, 0)$

Άρα σε κάθε περίπτωση η (1) παριστάνει ευθεία.

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

2. i. Η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Απόδειξη

Έστω ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$

- Αν $B \neq 0$, τότε $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B}$, οπότε είναι παράλληλη στο $\vec{\delta} = (B, -A)$ αφού και $\lambda_{\vec{\delta}} = -\frac{A}{B}$.
- Αν $B = 0$, τότε $\varepsilon \parallel y'y$, άρα παράλληλη στο $\vec{\delta} = (0, -A) = (B, -A)$ αφού και $\vec{\delta} \parallel y'y$.

ii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι το $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι κάθετο στο $\vec{\eta} = (A, B)$, αφού

$$\vec{\delta} \cdot \vec{\eta} = (B, -A) \cdot (A, B) = A \cdot B - A \cdot B = 0.$$

Οπότε είναι $\vec{\delta} \parallel \varepsilon$ και $\vec{\delta} \perp \vec{\eta}$ άρα $\varepsilon \perp \vec{\eta}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. i. Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με τα A, B, Γ δοσμένα παραμετρικά, παριστάνει ευθεία, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν τιμές για τις οποίες τα A, B δεν μηδενίζονται συγχρόνως. Οπότε λύνουμε το σύστημα ($A = 0$ και $B = 0$) και αν έχει λύση την εξαιρούμε από το $\mathbb{R}$.

ii. Για να παριστάνει μια εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία παράλληλη στον άξονα:

a. $x'x$, πρέπει $A = 0$ και $B \neq 0$

b. $y'y$, πρέπει $B = 0$ και $A \neq 0$

2. i. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$:

- Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$, άρα και στο αντίθετό του διάνυσμα $(-B, A)$ και

- Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$, άρα και στο αντίθετό του διάνυσμα $(-A, -B)$.

ii. Για να βρούμε την οξεία γωνία ω δύο ευθειών με εξισώσεις $\varepsilon_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $\varepsilon_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα παράλληλα διανύσματά τους:

$\vec{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$, $\vec{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$ όπου $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2$.

- Βρίσκουμε από τον τύπο $\cos \varphi = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|}$ την γωνία φ των $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$.

Αν $\cos \varphi > 0$, τότε η φ είναι οξεία γωνία, οπότε $\omega = \varphi$.

Αν $\cos \varphi < 0$, τότε η φ είναι αμβλεία γωνία, οπότε $\omega = \pi - \varphi$.

3. Σχετική θέση ευθειών ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ (1) και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ (2) και παράλληλα διανύσματα $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ αντίστοιχα όταν τα $A_1, B_1, \Gamma_1, A_2, B_2, \Gamma_2$ εκφράζονται με παραμέτρους.

i. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται $\Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) \neq 0$ ή $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται $\Leftrightarrow D \neq 0$, όπου D η ορίζουσα του συστήματος των (1) και (2).

Ειδικά αν θέλουμε να βρούμε και το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) με μέθοδο οριζουσών.

ii. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0$ ή $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow D = 0$

iii. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0$

4. Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς x, y παριστάνει δύο ευθείες ακολουθούμε κάποιον από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Προσθέτοντας ή αφαιρώντας σταθερούς όρους την μετατρέπουμε σε άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων της μορφής $(ax + by + \gamma)^2$ και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν οπότε έχουμε τις εξισώσεις των δύο ευθειών.

2^{ος} τρόπος

Την θεωρούμε δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x ή y και βρίσκουμε τις λύσεις της που είναι οι εξισώσεις των δύο ευθειών. Γενικά προσπαθούμε να την παραγοντοποιήσουμε εμφανίζοντας παράγοντες πρώτου βαθμούς ως προς x , y . Περίπου αντίστοιχη διαδικασία εφαρμόζουμε και για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από δεύτερο ως προς x , y .

5. Για να αποδείξουμε ότι μια **μεταβλητή ευθεία** της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ (1), με τα A, B, Γ εξαρτώμενα από παραμέτρους, **διέρχεται από σταθερό σημείο** (ανεξάρτητο των παραμέτρων), ακολουθούμε κάποια από τις παρακάτω διαδικασίες:

1^{ος} τρόπος

- Δίνουμε 2 τυχαίες (επιτρεπόμενες) τιμές στις παραμέτρους
- Λύνουμε το σύστημα των 2 ευθειών, που προκύπτουν (δηλαδή προσδιορίζουμε το σημείο τομής τους)
- Διαπιστώνουμε ότι η λύση του συστήματος επαληθεύει την (1), οπότε η ευθεία με εξίσωση (1), για κάθε τιμή των παραμέτρων, διέρχεται απ' το σταθερό σημείο, που έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος.

2^{ος} τρόπος

- Μετασχηματίζουμε την εξίσωση (1), ισοδύναμα, «παραγοντοποιώντας» την ως προς τις παραμέτρους ή ως προς τις δυνάμεις του και έχουμε π.χ. την μορφή $\kappa(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + \lambda(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) = 0$ (2)
- Για να ισχύει η (2) για κάθε τιμή των παραμέτρων (κ, λ) , δηλαδή για να είναι ταυτότητα ως προς αυτές, πρέπει: $(\Sigma): \{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \text{ και } \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0\}$
- Λύνοντας το σύστημα (Σ) , προσδιορίζουμε το σταθερό σημείο, απ' το οποίο διέρχεται η (1).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1).

i. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει:

α. Ευθεία

β. Ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ. Ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$

δ. Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

Λύση

i. $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0 \quad (1)$

α. Για να παριστάνει η (1) ευθεία, πρέπει $2\lambda^2 + \lambda - 3 \neq 0$ ή $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$.

$$\text{Έστω } \begin{cases} 2\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{3}{2} \\ \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Οπότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία, για $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.

β. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, όταν:

$$(\lambda \neq 1 \text{ και } 2\lambda^2 + \lambda - 3 = 0) \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{3}{2}) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

γ. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, όταν:

$$(\lambda \neq 1 \text{ και } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0) \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2) \Leftrightarrow \lambda = -2$$

δ. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όταν $\lambda \neq 1$ και οι συντεταγμένες του O την επαληθεύουν.

$$\text{Δηλαδή: } (\lambda \neq 1 \text{ και } -5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0) \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{8}{5}) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{8}{5}$$

ii. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 2\lambda^2 x + \lambda x - 3x - \lambda^2 y - \lambda y + 2y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(2x - y - 5) + \lambda(x - y - 3) + (-3x + 2y + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \\ -3x + 2y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο $A(2, -1)$.

2. Να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις:

i. $(2 - \sqrt{3})x - y + 5 = 0$ και $(2 + \sqrt{3})x - y - 7 = 0$

ii. $x = 2$ και $y = \sqrt{3}x - 2$

Λύση

i. Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2$, με $\vec{\delta}_1 = (1, 2 - \sqrt{3})$, $\vec{\delta}_2 = (1, 2 + \sqrt{3})$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) &= \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{1^2 + (2 - \sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2 + (2 + \sqrt{3})^2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{(8 - 4\sqrt{3})(8 + 4\sqrt{3})}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Αν ω η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τότε $\sin \omega = \frac{1}{2}$, οπότε $\omega = \frac{\pi}{3}$.

ii. Για τις $\varepsilon_1: x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$, $\varepsilon_2: \sqrt{3}x - y - 2 = 0$ έχουμε $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2$ τα $\vec{\delta}_1 = (0, 1)$, $\vec{\delta}_2 = (1, \sqrt{3})$.

$$\text{Είναι } \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Έστω ω η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

$$\text{Τότε } \sin \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ οπότε } \omega = \frac{\pi}{6}.$$

3. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon: 2\kappa x - (1 + \kappa)y + 1 - 3\kappa = 0 \text{ και } J: (1 + 3\kappa)x + (\kappa - 1)y + 2 - 6\kappa = 0.$$

i. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

ii. Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε και J .

(Τράπεζα Θεμάτων 4^ο Θέμα)

Λύση

Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon$ άρα $\vec{\delta}_1 = (1 + \kappa, 2\kappa)$ και $\vec{\delta}_2 \parallel J$ άρα $\vec{\delta}_2 = (1 - \kappa, 1 + 3\kappa)$.

i. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 + \kappa & 2\kappa \\ 1 - \kappa & 1 + 3\kappa \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + \kappa)(1 + 3\kappa) - 2\kappa(1 - \kappa) = 0 \Leftrightarrow 5\kappa^2 + 2\kappa + 1 = 0$$

Τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, άρα αδύνατο.

Οπότε δεν υπάρχει τιμή του κ , ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

$$\text{ii. } \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} \quad (1)$$

Έχουμε $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = (1 + \kappa)(1 - \kappa) + 2\kappa(1 + 3\kappa) = 5\kappa^2 + 2\kappa + 1$

$$|\vec{\delta}_1| = \sqrt{(1 + \kappa)^2 + (2\kappa)^2} = \sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}$$

$$|\vec{\delta}_2| = \sqrt{(1 - \kappa)^2 + (1 + 3\kappa)^2} = \sqrt{10\kappa^2 + 4\kappa + 2} = \sqrt{2} \sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}$$

Τότε

$$(1) \Leftrightarrow \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1} \sqrt{2} \sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}} = \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{(5\kappa^2 + 2\kappa + 1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Οπότε } (\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα η οξεία γωνία των ε, J είναι $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Επομένως η αμβλεία γωνία των ε, J είναι $\omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

4. Να βρείτε εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με την η:

$$x - y + 1 = 0.$$

Λύση

Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel \eta$ με $\vec{\delta}_1 = (1,1)$ και $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon$.

Η ευθεία ε είναι της μορφής:

I. $x = 2$ ή

II. $y - 1 = \lambda(x - 2)$

Οπότε:

I. $\varepsilon: x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$

$$\vec{\delta}_2 = (0,1)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{0+1}{\sqrt{2} \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\varepsilon: x = 2$ δεκτή εξίσωση.

II. $\varepsilon: y - 1 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow \lambda x - y + 1 - 2\lambda = 0$

$$\vec{\delta}_2 = (1, \lambda)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\lambda}{\sqrt{2} \sqrt{1+\lambda^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1+\lambda^2} = 1+\lambda \Leftrightarrow 1+\lambda^2 = (1+\lambda)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Άρα $\varepsilon: y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

5. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \mu x + 8y + \kappa = 0$, $\varepsilon_2: 2x + \mu y - 1 = 0$

Να βρείτε τις τιμές των $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$, ώστε:

i. Οι ε_1 και ε_2 να τέμνονται

ii. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε_1 και ε_2 .

$$\begin{cases} \mu x + 8y = -\kappa \\ 2x + \mu y = 1 \end{cases} \quad \text{και υπολογίζουμε την ορίζουσά του.}$$

$$D = \begin{vmatrix} \mu & 8 \\ 2 & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 16 = (\mu - 4)(\mu + 4)$$

i. (Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται) $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 4$ και $\mu \neq -4$

ii. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow \mu = 4$ ή $\mu = -4$

• Με $\mu = 4$

$$\varepsilon_1: 4x + 8y + \kappa = 0 \Leftrightarrow x + 2y + \frac{\kappa}{4} = 0$$

$$\varepsilon_2: 2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Αν } \frac{\kappa}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = -2 \text{ οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ ταυτίζονται.}$$

Αν $\kappa \neq -2$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

• Με $\mu = -4$

$$\varepsilon_1: -4x + 8y + \kappa = 0 \Leftrightarrow x - 2y - \frac{\kappa}{4} = 0$$

$$\varepsilon_2: 2x - 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Αν } -\frac{\kappa}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ ταυτίζονται.}$$

Αν $\kappa \neq 2$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ (1).

i. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του λ η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

iii. Να βρείτε συνάρτηση του λ , το σημείο τομής Α των δύο ευθειών.

iv. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του Α, καθώς το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

Λύση

i. Θεωρούμε την (1) τριώνυμο ως προς x , οπότε

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2\lambda x - y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0$$

$$\text{και έχει διακρίνουσα } \Delta = 4\lambda^2 - 4(-y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2) = 16\lambda^2 + 16\lambda y + 4y^2 = (4\lambda + 2y)^2$$

$$\text{και ρίζες } x = y + 3\lambda \text{ ή } x = -y - \lambda \Leftrightarrow x - y - 3\lambda = 0 \text{ ή } x + y + \lambda = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

i. Για τις $\varepsilon_1: y = x - 3\lambda, \varepsilon_2: y = -x - \lambda$ έχουμε:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, άρα $\lambda_1 \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

ii. Για να βρούμε το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x - y = 3\lambda \\ x + y = -\lambda \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2, D_x = \begin{vmatrix} 3\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda - \lambda = 2\lambda, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 3\lambda = -4\lambda$$

Άρα $x = \frac{2\lambda}{2} = \lambda, y = \frac{-4\lambda}{2} = -2\lambda$, οπότε το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το $A(\lambda, -2\lambda)$.

iv. Έστω C ο γεωμετρικός τόπος.

$$\text{Είναι } A(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2x \end{cases}$$

Άρα ο C είναι η ευθεία $y = -2x$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

7. Δίνονται οι ευθείες

$\varepsilon_1: 2x - \lambda y - 4 = 0, \varepsilon_2: 3\lambda x + 5y + 7 = 0$ και $\varepsilon_3: x - 2y + 3 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει ότι:

i. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$

ii. $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$

iii. οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και η συμμετρική ε'_3 της ε_3 ως προς τον άξονα $x'x$, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1, \vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2, \vec{\delta}_3 \parallel \varepsilon_3$. Τότε $\vec{\delta}_1 = (\lambda, 2), \vec{\delta}_2 = (-5, 3\lambda), \vec{\delta}_3 = (2, 1)$.

i. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_3 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \vec{\delta}_3 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

ii. Έχουμε

$$\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Leftrightarrow \vec{\delta}_2 \parallel \vec{\delta}_3 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5 & 3\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5 - 6\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{6}$$

iii. Η συμμετρική ευθεία της ε_3 ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $\varepsilon'_3: x + 2y + 3 = 0$.

Βρίσκουμε το σημείο τομής των ε_1 και ε'_3 λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} 2x - \lambda y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + \lambda, D_x = \begin{vmatrix} 4 & -\lambda \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\lambda, D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

Για $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -4$ οι $\varepsilon_1, \varepsilon'_3$ τέμνονται στο σημείο $A(\frac{8-3\lambda}{\lambda+4}, \frac{-10}{\lambda+4})$.

Για να διέρχονται οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_3$ από το ίδιο σημείο πρέπει

$$A \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow 3\lambda \frac{8-3\lambda}{\lambda+4} + 5 \frac{-10}{\lambda+4} + 7 = 0 \Leftrightarrow -9\lambda^2 + 31\lambda - 22 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -\frac{22}{9}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται η εξίσωση $(\kappa^2 + \kappa - 2)x + (\kappa^2 - 1)y + \kappa - 2 = 0$ (1).

Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει

- i. Ευθεία
- ii. Ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
- iii. Ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$
- iv. Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

2. Δίνεται η εξίσωση $(2 - \lambda)x + (\lambda + 2)y = \lambda + 6$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία.
- β. Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

3. Δίνεται η εξίσωση $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι:
 - α. Για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 - β. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που ορίζεται από την (1) και διέρχεται από το σημείο $B(-\frac{1}{8}, 0)$.

4. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 , ε_2 με εξισώσεις:

- i. $\varepsilon_1: y = x$, $\varepsilon_2: x = 5$
- ii. $\varepsilon_1: x = -2$, $\varepsilon_2: \sqrt{3}x - y = 0$
- iii. $\varepsilon_1: -3x + 4y + 2 = 0$, $\varepsilon_2: x + 7y - 1 = 0$
- iv. $\varepsilon_1: (1 - \lambda)y - (1 + \lambda)x = 0$, $\varepsilon_2: y = \lambda x$
- v. $x^2 - xy - 6y^2 - 3x + 14y - 4 = 0$

5. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y = 5$ και $\varepsilon_2: (\kappa - 1)y + x = 2$.

Να βρείτε αν υπάρχει ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η γωνία των ε_1 , ε_2 να είναι $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

6. Να βρείτε εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 1)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με την ευθεία $\eta: y + 2 = 0$.

7. i. Να βρεθεί η οξεία γωνία θ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες:
 $\varepsilon_1: x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: x = 2$.

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $P(2,1)$ και σχηματίζει με την ευθεία ε_1 γωνία $\hat{\theta} = 30^\circ$.

8. Δίνονται οι ευθείες

α. $\varepsilon_1: (\lambda + 2)x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + \lambda y + 5 = 0$.

β. $\varepsilon_1: 2\lambda y - (2\lambda + 1)x + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: 3\lambda x - (\lambda + 1)y - 2 = 0$.

i. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να είναι παράλληλες.

ii. Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ε_1 και ε_2 να είναι κάθετες;

9. Να βρεθεί ευθεία από τις $\varepsilon: (2\kappa + 3\lambda - 2)x - (\kappa + \lambda)y - (2\lambda + \kappa - 2) = 0$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq -2$, που να είναι κάθετη στη $\delta: x + y + 2007 = 0$.

10. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x - 2\mu y - \lambda = 0$,
 $\varepsilon_2: (\mu - 1)x - 3y + 1 - 2\lambda = 0$:

i. Τέμνονται.

ii. Είναι παράλληλες.

iii. Ταυτίζονται.

11. Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών $\begin{cases} \varepsilon_1: \lambda x - (\lambda + 1)y = 1 \\ \varepsilon_2: x - 2\lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$.

12. Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών που παριστάνει η εξίσωση:

i. $4x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 3y = 0$

ii. $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0$

13. Δίνεται η εξίσωση: $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών;

ii. Έστω A, B σημεία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα και $M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Να βρείτε:

α. Τις συντεταγμένες των A, B .

B. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και το εμβαδό του τριγώνου OAB.

γ. Την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες OA και OM.

14. Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + (\lambda - 2)y + 3 = 0$ (1) και $4x^2 - y^2 - 2y + 4x = 0$ (2).

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) παριστάνει σύνολο ευθειών, οι οποίες διέρχονται όλες από κάποιο σταθερό σημείο.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους.

iii. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 , ε_2 ανήκουν στο σύνολο ευθειών της εξίσωσης (1).

15. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (2\lambda + 1)y = \lambda - 1$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + (2\lambda - 1)y = \lambda$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο M. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M, όταν το λ μεταβάλλεται;

16. Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x - (\lambda + 1)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 2y + \lambda - 2 = 0$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες να τέμνονται, καθώς και ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους.

17. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 - \mu x + 3\mu y - 2\mu^2 = 0$.

i. Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

ii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των παραπάνω ευθειών

18. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - y^2 + xy - 2x + y = 0$

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 - y^2 + xy - 2x + y = 0$ παριστάνει ζεύγος ευθειών και να βρείτε το σημείο τομής τους A.

ii. Να βρείτε το σταθερό σημείο B από το οποίο διέρχονται οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση $x + 2y + 1 + \kappa(x - y - 4) = 0$.

iii. Να βρείτε εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B.

19. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει η εξίσωση: $\lambda x^2 + (\lambda^2 - 1)xy - \lambda y^2 = 0$.

20. Δίνεται η εξίσωση $(x + 2)^2 + \mu(y - 1)^2 = 0$ (1).

i. Να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Υπάρχουν τιμές του μ για τις οποίες, οι ευθείες που παριστάνει η (1) είναι κάθετες;

21. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda^2 - 4\lambda + 1)x + (3\lambda^2 - 7\lambda + 2)y - 6\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0$ (1).

- i.** Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ η εξίσωση (1) παριστάνει μία ευθεία ε_λ .
- ii.** Σε μία παραθαλάσσια περιοχή με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, οι πορείες 10 πλοίων είναι οι ευθείες ε_λ με $\lambda \in \{1, 2, \dots, 10\}$.
- α.** Να αποδείξετε ότι οι πορείες και των 10 πλοίων διέρχονται από το ίδιο σημείο, στο οποίο βρίσκεται ένα λιμάνι. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του λιμανιού αυτού;
- β.** Στο σημείο (3,1) υπάρχει φάρος. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα 10 πλοία θα συγκρουστεί με το φάρο.

22. Για τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου ισχύει ότι: $\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha(t^2+1)-2t}{t^2+1} \vec{i} + \frac{\beta t}{t^2+1} \vec{j}$, όπου α, β σταθεροί

πραγματικοί αριθμοί, $t \in \mathbb{R}$ παράμετρος και O η αρχή των αξόνων.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η σταθερή ευθεία $\varepsilon: \beta x + 2y - \alpha\beta = 0$

ii. Έστω $\beta \neq 0$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής A, B της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, αντίστοιχα.

β. Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι ευθείες που προκύπτουν όταν στην εξίσωση της ε θέσουμε $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$, αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

γ. Για ποιες τιμές του β , το εμβαδό του παραπάνω τραπεζίου είναι 3 τετραγωνικές μονάδες;

23. Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.

24. Να βρεθεί η σχετική θέση των $\varepsilon_1: (\sin\theta - \eta\mu\theta)x - (\sin\theta + \eta\mu\theta)y = -\alpha$ και $\varepsilon_2: (\sin\theta + \eta\mu\theta)x + (\sin\theta - \eta\mu\theta)y = \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους.

25. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A

ii. να εξετάσετε εάν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι A όταν κινείται ευθύγραμμα ποια είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι.

§2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

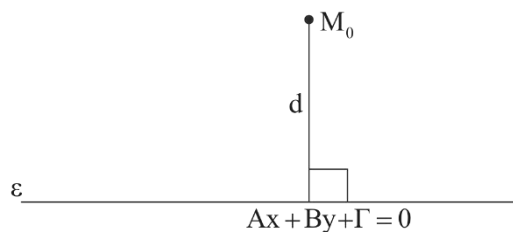
ΘΕΩΡΙΑ

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

1. Έστω ε μια ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ και $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής.

Η απόσταση του σημείου M_0 από την ευθεία ε συμβολίζεται με $d(M_0, \varepsilon)$ και είναι ίση με:

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Εμβαδόν τριγώνου

2. Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ οι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Το εμβαδό του $AB\Gamma$ είναι ίσο με: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})|$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Για να βρούμε την απόσταση d δύο παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

- Θεωρούμε γνωστό σημείο A στη μία ευθεία –έστω $A \in \varepsilon_1$ –
- Υπολογίζουμε την απόσταση του A από την άλλη ευθεία $d(A, \varepsilon_2)$, οπότε $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2)$.

2. Για να βρούμε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ακολουθούμε τα παρακάτω:

1^{ος} τρόπος

$$M(x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

2^{ος} τρόπος

Έστω $A(x_1, y_1) \in \varepsilon_1, B(x_2, y_2) \in \varepsilon_2$ τότε το μέσο $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ του AB είναι σημείο της ε και εφόσον $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$ (δηλαδή λ_ε : γνωστό) η εξίσωση της ε δίνεται από τη σχέση $y - y_M = \lambda_\varepsilon(x - x_M)$.

3. Για να βρούμε τις εξισώσεις των διχοτόμων δ_1, δ_2 , των γωνιών που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: «κάθε σημείο της διχοτόμου, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας».

$$\text{Οπότε } M(x, y) \in \delta_1 \text{ ή } \delta_2 \Leftrightarrow d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2).$$

Αν θέλουμε να βρούμε ποια από τις δ_1, δ_2 είναι διχοτόμος της οξείας γωνίας των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τότε παίρνουμε ένα σημείο $A \in \varepsilon_1$ και υπολογίζουμε τις αποστάσεις $d(A, \delta_1)$ και $d(A, \delta_2)$. Η μικρότερη απόσταση προκύπτει από τη διχοτόμο της οξείας γωνίας. Αν $d(A, \delta_1) = d(A, \delta_2)$ τότε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x + y + 2 = 0$

i. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $P(-2, 2\sqrt{2})$ από την ε .

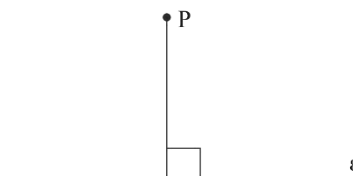
ii. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η κάθετης στην ε , που ισαπέχει από τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

iii. Να βρείτε την ευθεία $J: \lambda x + \lambda y + 4 = 0$ που η απόσταση της από την ε είναι $\sqrt{2}$.

Λύση

i. Ελάχιστη απόσταση σημείου από ευθεία είναι το μήκος της κάθετης, από το σημείο στην ευθεία, δηλαδή

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|-2 + 2\sqrt{2} + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$



ii. Από την ε έχουμε: $x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 2$, άρα $\lambda_\varepsilon = -1$.

Είναι $\eta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = 1$.

Άρα η εξίσωση της η είναι $y = x + \beta \Leftrightarrow x - y + \beta = 0$.

Η ευθεία η ισαπέχει από τα A και B , οπότε:

$$d(A, \eta) = d(B, \eta) \Leftrightarrow \frac{|1 - 1 + \beta|}{\sqrt{2}} = \frac{|-1 - 1 + \beta|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |\beta| = |\beta - 2| \Leftrightarrow$$

$$\beta = -\beta + 2 \text{ ή } \beta = \beta - 2, \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα $\eta: y = x + 1$

iii. Αρχικά πρέπει $J \parallel \varepsilon$ και $\lambda \neq 0$ (για να ορίζεται η ευθεία J).

Έχουμε $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon$ το $\vec{\delta}_1 = (-1, 1)$ και $\vec{\delta}_2 \parallel J$ το $\vec{\delta}_2 = (-\lambda, \lambda)$,

$$\text{οπότε } J \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda + \lambda = 0, \text{ που ισχύει.}$$

Με $x = 0$ στην ε έχουμε $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$, άρα $\Gamma(0, -2) \in \varepsilon$.

Αν d η απόσταση των J, ε , τότε:

$$\begin{aligned} d &= d(\Gamma, J) \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 2\lambda + 4|}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |-2\lambda + 4| = \sqrt{2} \sqrt{2\lambda^2} \\ &\Leftrightarrow 2|\lambda - 2| = 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda - 2 = \lambda \text{ αδύνατη ή } \lambda - 2 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

Άρα $J: x + y + 4 = 0$

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 8 = 0$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 , παράλληλες.

ii. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1 , ε_2 και το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές έχουν φορείς αυτές τις ευθείες.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2 .

Λύση

i. Θεωρούμε την (1) τριώνυμο ως προς y , οπότε γράφεται

$$y^2 + (2x+6)y + (x^2 + 6x + 8) = 0$$

και έχει διακρίνουσα $\Delta = (2x+6)^2 - 4(x^2 + 6x + 8) = 4$

$$\text{και ρίζες } y = \frac{-(2x+6) \pm 2}{2} = -(x+3) \pm 1,$$

δηλαδή $\varepsilon_1: y = -x - 4$ και $\varepsilon_2: y = -x - 2$ που είναι ευθείες παράλληλες αφού $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

ii. Έχουμε $A(0, -4) \in \varepsilon_1$ και $\varepsilon_2: x + y + 2 = 0$.

$$\text{Αν } d \text{ η απόσταση των } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \text{ είναι } d = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|0 - 4 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Το εμβαδό E του τετραγώνου είναι $E = d^2 = 2$.

iii. Έστω ε η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1: x + y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: x + y + 2 = 0$.

$$M(x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + y + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + y + 4 = -x - y - 2 \text{ ή } x + y + 4 = x + y + 2 \text{ αδύνατη}$$

Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2 είναι $\varepsilon: x + y + 3 = 0$.

3. Η ευθεία $\varepsilon: 12x - 4y + 5 = 0$ είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών ε_1 και ε_2 που απέχουν $d = \frac{\sqrt{10}}{20}$. Να

βρείτε τις εξισώσεις των ε_1 , ε_2 .

Λύση

Έχουμε:

$$M(x, y) \in \varepsilon_1 \text{ ή } \varepsilon_2 \Leftrightarrow d(M, \varepsilon) = \frac{d}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|12x - 4y + 5|}{\sqrt{12^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{40} \Leftrightarrow |12x - 4y + 5| = \sqrt{160} \frac{\sqrt{10}}{40}$$

$$\Leftrightarrow |12x - 4y + 5| = 1 \Leftrightarrow 12x - 4y + 5 = 1 \text{ ή } 12x - 4y + 5 = -1$$

$$\Leftrightarrow 12x - 4y + 4 = 0 \text{ ή } 12x - 4y + 6 = 0$$

Άρα $\varepsilon_1: 12x - 4y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: 12x - 4y + 6 = 0$

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ισαπέχουν από την $\varepsilon: 2x + y - 1 = 0$ και έχουν μεταξύ τους απόσταση $d = \sqrt{20}$.

Λύση

Η ε είναι μεσοπαράλληλη των ζητούμενων ευθειών ε_1 και ε_2 .

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \varepsilon_1 \text{ ή } \varepsilon_2 &\Leftrightarrow d(M, \varepsilon) = \frac{d}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{20}}{2} \Leftrightarrow |2x + y - 1| = \frac{\sqrt{100}}{2} \\ &\Leftrightarrow |2x + y - 1| = 5 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 5 \text{ ή } 2x + y - 1 = -5 \\ &\Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0 \text{ ή } 2x + y + 4 = 0 \end{aligned}$$

Άρα οι εξισώσεις των ζητούμενων ευθειών είναι

$$\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0 \text{ και } \varepsilon_2: 2x + y + 4 = 0$$

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(2,3)$ και απέχουν από το $O(0,0)$ απόσταση ίση με 2 μονάδες.

Λύση

Οι ευθείες ε που διέρχονται από το $A(2,3)$, έχουν εξίσωση $y - 3 = \lambda(x - 2)$ ή $x = 2$.

• Αν $\varepsilon: x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ τότε $d(O, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|0 - 2|}{1} = 2$, ισχύει άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι δεκτή.

• Αν $\varepsilon: y - 3 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow \lambda x - y + 3 - 2\lambda = 0$, τότε

$$\begin{aligned} d(O, \varepsilon) = 2 &\Leftrightarrow \frac{|0 - 0 + 3 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |3 - 2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow |3 - 2\lambda|^2 = 4(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 9 - 12\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y - 3 = \frac{5}{12}(x - 2) \Leftrightarrow 5x - 12y + 26 = 0$$

Οπότε οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξισώσεις $x = 2$ και $5x - 12y + 26 = 0$.

6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - 3y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x - 2y - 2 = 0$. Να βρείτε:

i. Τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

ii. Τη διχοτόμο της οξείας γωνίας των ε_1 και ε_2 .

Λύση

i. Έστω δ_1, δ_2 οι ζητούμενες διχοτόμοι και $M(x, y)$.

$$M \in \delta_1 \text{ ή } \delta_2 \Leftrightarrow d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} &= \frac{|3x-2y-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow |2x-3y+2| = |3x-2y-2| \\ \Leftrightarrow 2x-3y+2 &= 3x-2y-2 \text{ ή } 2x-3y+2 = -3x+2y+2 \\ \Leftrightarrow x+y-4 &= 0 \text{ ή } x-y=0 \end{aligned}$$

Άρα $\delta_1: x+y-4=0$ και $\delta_2: x-y=0$

ii. Θεωρούμε σημείο της ε_1 , έστω $A(-1,0)$.

$$\text{Έχουμε: } d(A, \delta_1) = \frac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ και } d(A, \delta_2) = \frac{|-1-0|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή $d(A, \delta_1) > d(A, \delta_2)$, έχουμε ότι η δ_2 είναι διχοτόμος της οξείας γωνίας των ε_1 και ε_2 .

7. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $\varepsilon_1: 3x-2y-5=0$ και $\varepsilon_2: 3x+2y-1=0$ ισούται με 4.

Λύση

Έστω $M(x, y)$.

Ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{d(M, \varepsilon_1)}{d(M, \varepsilon_2)} &= 4 \Leftrightarrow d(M, \varepsilon_1) = 4d(M, \varepsilon_2) \\ \Leftrightarrow \frac{|3x-2y-5|}{\sqrt{13}} &= 4 \frac{|3x+2y-1|}{\sqrt{13}} \\ \Leftrightarrow |3x-2y-5| &= 4|3x+2y-1| \\ \Leftrightarrow 3x-2y-5 &= 4(3x+2y-1) \text{ ή } 3x-2y-5 = -4(3x+2y-1) \\ \Leftrightarrow 9x+10y+1 &= 0 \text{ ή } 15x+6y-1=0 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι οι ευθείες

$$\varepsilon_3: 9x+10y+1=0, \varepsilon_4: 15x+6y-1=0.$$

8. Να βρείτε σημεία της ευθείας $\varepsilon: 2x-3y+1=0$, που απέχουν από την ευθεία $\eta: 4x-3y+2=0$ απόσταση 3 μονάδων.

Λύση

$$\text{Έστω } A(x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow 2x-3y+1=0 \Leftrightarrow y = \frac{2x+1}{3}$$

$$\text{Άρα } A(x, \frac{2x+1}{3}).$$

$$\text{Είναι } d(A, \eta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|4x-3\frac{2x+1}{3}+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|4x-2x-1+2|}{5} = 3 \Leftrightarrow |2x+1| = 15$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=15 \text{ ή } 2x+1=-15 \Leftrightarrow x=7 \text{ ή } x=-8$$

Άρα $A(7,5)$ ή $A(-8,-5)$

9. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $\Gamma(2\lambda+1,1-\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο που έχει σταθερό εμβαδό.

Λύση

Πρέπει να δείξουμε ότι τα σημεία A , B , Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε: } \overrightarrow{AB} = (-3-1, 4-2) = (-4, 2), \quad \overrightarrow{A\Gamma} = (2\lambda+1-1, 1-\lambda-2) = (2\lambda, -\lambda-1)$$

$$\text{με } \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2\lambda & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 4\lambda + 4 - 4\lambda = 4 \neq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ισχύει } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει σταθερό εμβαδό.

10. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$, $B(3,-1)$ και η ευθεία $\varepsilon: y = -3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ε ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδό 2 τετραγωνικές μονάδες.

Λύση

$$\text{Αν } \Gamma(\alpha, \beta) \in \varepsilon \Leftrightarrow \beta = -3\alpha, \text{ τότε } \Gamma(\alpha, -3\alpha).$$

$$\text{Είναι } (AB\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = 2 \Leftrightarrow |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = 4 \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε } \overrightarrow{AB} = (3-4, -1-2) = (-1, -3) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (\alpha-4, -3\alpha-2)$$

$$\text{με } \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ \alpha-4 & -3\alpha-2 \end{vmatrix} = 3\alpha + 2 + 3\alpha - 12 = 6\alpha - 10$$

$$\text{Τότε } (1) \Leftrightarrow |6\alpha - 10| = 4 \Leftrightarrow 6\alpha - 10 = 4 \text{ ή } 6\alpha - 10 = -4 \Leftrightarrow \alpha = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ ή } \alpha = 1$$

$$\text{Άρα } \Gamma\left(\frac{7}{3}, -7\right) \text{ ή } \Gamma(1, -3).$$

11. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ε που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Λύση

Η ευθεία ε πρέπει να τέμνει τους άξονες και να μην διέρχεται από την αρχή τους.
Αφού $A \in \varepsilon$ έχουμε ότι η εξίσωση της ε είναι $y-2 = \lambda(x+1) \Leftrightarrow y = \lambda x + \lambda + 2$ με $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$ (αν η ε διέρχεται από το $O(0,0)$ τότε $0 = 0 + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = -2$)

Τα σημεία τομής της ε με τους άξονες είναι:

- Για $x = 0 \Rightarrow y = \lambda + 2$, άρα $B(0, \lambda + 2)$
- Για $y = 0 \Rightarrow 0 = \lambda x + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x = -\lambda - 2 \Leftrightarrow x = \frac{-\lambda - 2}{\lambda}$, άρα $\Gamma(\frac{-\lambda - 2}{\lambda}, 0)$.

$$\text{Είναι } (OB\Gamma) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma})| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma})| = 1 \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε } \overrightarrow{OB} = (0, \lambda + 2), \overrightarrow{O\Gamma} = (\frac{-\lambda - 2}{\lambda}, 0), \text{ με } \det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}) = \begin{vmatrix} 0 & \lambda + 2 \\ \frac{-\lambda - 2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(\lambda + 2)^2}{\lambda}.$$

Τότε

$$(1) \Leftrightarrow \left| \frac{(\lambda + 2)^2}{\lambda} \right| = 1 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = |\lambda| \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = \lambda \text{ ή } (\lambda + 2)^2 = -\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \quad (2) \text{ ή } \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \quad (3)$$

H (2) έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$, άρα είναι αδύνατη.

H (3) έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$, άρα $\lambda = -1$ ή $\lambda = -4$

Οπότε η ε έχει εξίσωση $y = -x + 1$ ή $y = -4x - 2$

12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y - 4 = 0$

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 .

ii. Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

Λύση

i. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους:

$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 6y + y = -3 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άρα $A(-2, 3)$.

ii. Σημείο τομής της ε_1 με τον $y'y$:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3, \text{ άρα } B(0, -3)$$

Σημείο τομής της ε_2 με τον $x'x$:

$$y = 0 \Rightarrow x = 4, \text{ άρα } \Gamma(4, 0)$$

α. $B(0, -3), \Gamma(4, 0)$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{0 + 3}{4 - 0} = \frac{3}{4} \text{ και } \Gamma \text{ σημείο της } B\Gamma, \text{ άρα η εξίσωση της είναι}$$

$$y = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 3.$$

β. $A(-2, 3)$, $B(0, -3)$, $\Gamma(4, 0)$

Είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|, \quad \overrightarrow{AB} = (0 + 2, -3 - 3) = (2, -6), \quad \overrightarrow{A\Gamma} = (4 + 2, 0 - 3) = (6, -3)$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 36 = 30$$

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ τετραγωνικές μονάδες.

γ. Είναι $(K\text{B}\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{B\Gamma}) \right|$ (1), με $\overrightarrow{BK} = (x, y + 3)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (4, 3)$ και

$$\det(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} x & y + 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3x - 4y - 12$$

Άρα (1) $\Rightarrow (K\text{B}\Gamma) = \frac{1}{2} |3x - 4y - 12|$

Έχουμε

$$(K\text{B}\Gamma) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2} |3x - 4y - 12| = 15$$

$$\Leftrightarrow |3x - 4y - 12| = 30$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4y - 12 = 30 \text{ ή } 3x - 4y - 12 = -30$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4y - 42 = 0 \text{ ή } 3x - 4y + 18 = 0$$

Οπότε τα σημεία $K(x, y)$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_3: 3x - 4y - 42 = 0$,

$\varepsilon_4: 3x - 4y + 18 = 0$ που είναι παράλληλες αφού $\lambda_3 = \frac{3}{4} = \lambda_4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να βρεθεί η απόσταση των γραμμών που προκύπτουν από την εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4xy - 2x + y = 0$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(0, 2)$ ισαπέχουν από αυτή.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που απέχει από το σημείο $A(2, 1)$ απόσταση 1 και είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 3x - 4y = 6$.
4. Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $\epsilon: x - y + 2 = 0$ τα οποία απέχουν από την ευθεία $\delta: 12x - 5y + 17 = 0$ απόσταση ίση με 7.
5. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: x - y - 3 = 0$.
 - i. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $M(3, 3\sqrt{2})$ από την ϵ .
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η , $\eta \perp \epsilon$, που ισαπέχει από τα σημεία $A(2, 1)$, $B(1, -1)$.
 - iii. Να βρείτε την ευθεία $J: ax - ay + 6 = 0$ που η απόστασή της από την ϵ είναι $12\sqrt{2}$.
6. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $\epsilon_1: 5x + 12y - 1 = 0$ και $\epsilon_2: 5x + 12y + 15 = 0$.
7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4xy + 4y^2 - 1 = 0$.
 - i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 παράλληλες.
 - ii. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 και το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω σ' αυτές.
 - iii. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ϵ_1 και ϵ_2 .
8. Να βρείτε τις εξισώσεις των παράλληλων ευθειών ϵ_1 , ϵ_2 που
 - i. απέχουν $d = \frac{4\sqrt{34}}{17}$ και έχουν την ευθεία $\epsilon: 3x + 5y - 6 = 0$ μεσοπαράλληλη.
 - ii. απέχουν $d = \sqrt{10}$ και έχουν την ευθεία $\epsilon: y = 3x - 1$ μεσοπαράλληλη.
9. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που απέχει από την $\epsilon: 3x + 4y - 5 = 0$, απόσταση $d = 4$.

10. Να βρεθούν οι τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι $\varepsilon_1: x + \mu y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x + 2y + \lambda = 0$ είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $\sqrt{2}$.

11. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(-1,1)$ και απέχουν από το $B(0,1)$ απόσταση ίση με 1 μονάδα.

12. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας ε , η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$ και απέχει από την αρχή των αξόνων 2 μονάδες.

13. Να βρείτε την διχοτόμο της

i. αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x - 3y + 5 = 0$, $\varepsilon_2: 3x - 4y - 5 = 0$.

ii. οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 4y - 2 = 0$, $\varepsilon_2: 5x - 12y = 0$.

14. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $\varepsilon_1: x - y - 2 = 0$, που απέχουν από την ευθεία $\eta: 3x + 4y - 1 = 0$ απόσταση $\frac{14}{5}$.

15. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $x + y - 1 = 0$, $y = 2x - 1$, $y + 7 = 3(x + 2)$.

16. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν του τετράπλευρου που έχει κορυφές τα σημεία $A(1,-2)$, $B(-2,3)$, $\Gamma(-1,-4)$ και $\Delta(5,0)$.

17. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία $A(4,2)$, $B(-6,-2)$ και $\Gamma(4,-5)$ σχηματίζουν τρίγωνο του οποίου να βρεθεί το εμβαδό.

18. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(\lambda+1, \lambda^2+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδό ίσο με $\frac{5}{2}$.

19. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$ και $\Gamma(2\kappa+1, 1-\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου με σταθερό εμβαδό για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ .

iii. Να δειχτεί ότι το ύψος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό και να βρεθεί η τιμή του κ , για την οποία το ύψος BE γίνεται μέγιστο.

iv. Για την παραπάνω τιμή του κ να βρεθεί η θέση του σημείου Γ καθώς και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$.

20. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα σημεία $A(2,3)$, $B(3,-4)$, $\Gamma(1,\lambda)$ είναι κορυφές τριγώνου το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με 4.

21. Έστω τα σημεία $A(3,4)$ και $B(5,-2)$. Να βρεθεί σημείο M , έτσι ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ισοσκελές με κορυφή M και εμβαδό $E = 10$.

22. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$, $B(7,-1)$ και η ευθεία $\varepsilon: x + 3y = 2$. Να βρείτε σημείο M της ευθείας ε τέτοιο ώστε το εμβαδό του τριγώνου ABM να είναι 12 τετραγωνικές μονάδες.

23. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει πλευρά την $\varepsilon: x - 2y + 1 = 0$, κορυφή $A(2,4)$, $M\left(4, \frac{5}{2}\right)$ μέσο την $B\Gamma$ και

εμβαδό $E = \frac{15}{2}$. Να βρεθούν:

- i. Το μήκος του ύψους AK .
- ii. Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
- iii. Οι συντεταγμένες των B , Γ .

24. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = -\frac{1}{2}x$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο που έχει εμβαδό $\frac{9}{16}$.

25. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$.

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B .
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB .
- iii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$.

26. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τις ευθείες

$$\varepsilon_\lambda: (\lambda + 3)x + y - \lambda + 2 = 0$$

- i. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M .
- ii. Αν $B(1,2)$, να αποδείξετε ότι $d(B, \varepsilon) \leq 7$ και να βρείτε ποια από τις ευθείες ε_λ απέχει τη μέγιστη απόσταση από το B .
- iii. Να βρείτε ποια από τις ευθείες ε_λ είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: 3x + y - 3 = 0$.
- iv. Έστω ε_1 η ευθεία που προκύπτει στο ερώτημα iii. Αν $M \in \varepsilon_1$ και $N \in \eta$, να δείξετε ότι $(MN) \geq \frac{\sqrt{10}}{2}$.

27. Έστω σημείο $M(\mu, -3\mu + 5)$ με $\mu \in [1, 2]$ και A, B οι προβολές του M πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 1$, $\varepsilon_2: y = 2x$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου N του τμήματος AB .

ii. Να βρεθεί το σημείο M ώστε το E_{MAB} να γίνεται μέγιστο

28. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$, έχει αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδό, το οποίο και να βρεθεί.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

Οδηγία: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.
2. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μια ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζεται πάντα ως $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
3. Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_1, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.
4. Υπάρχουν δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύουν συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.
5. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$.
6. Οι ευθείες $y = \frac{-\kappa}{3}x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa = 3\lambda$.
7. Από το σημείο $A(x_0, y_0)$ περνά μια μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ .
8. Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, όταν $\alpha = \beta$.
9. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μια ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωση της είναι της μορφής $x = x_0$.
10. Η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\kappa \neq 0$.
11. Η ευθεία $y = \lambda x + 3$ έχει δυο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
12. Η εξίσωση $xy = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.

- 13.** Το σημείο $A(\eta\mu\theta, 0)$ με $\theta = \frac{\pi}{7}$ ανήκει στην ευθεία $2x + \kappa y = 3$.
- 14.** Η συμμετρική της ευθείας $y = 3x$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 3x + 3$.
- 15.** Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία.
- 16.** Η εξίσωση $y = |x|$ παριστάνει μια μόνο ημιευθεία.
- 17.** Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας.
- 18.** Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.
- 19.** Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει $B = 0$.
- 20.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
- 21.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, -B)$.
- 22.** Δυο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (A, B)$ και $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες.
- 23.** Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$, με $B \neq 0$, έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$.
- 24.** Η εξίσωση της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta} = (A, B)$ και $\vec{v} = (x, y)$.
- 25.** Οι ευθείες $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ είναι κάθετες. Τότε ισχύει $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$.
- 26.** Για την απόσταση $d(A, \varepsilon)$ του σημείου A από την ευθεία ε ισχύει $d(A, \varepsilon) = 0$. Τότε το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε .

27. Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

28. Η απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ επαληθεύει την ισότητα

$$|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \varepsilon) \sqrt{A^2 + B^2}.$$

29. Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με την ορίζουσα $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$.

30. Αν A, B, Γ τρία σημεία του επιπέδου και $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 2(AB\Gamma)$ ή $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = -2(AB\Gamma)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Οδηγία: Στις παρακάτω προτάσεις, ποια επιλογή είναι η σωστή;

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ ισούται:

- α. με την εφαπτομένη της συμπληρωματικής γωνίας που σχηματίζει η ε με τον $x'x$
- β. με τον συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος κάθετου στην ε
- γ. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ε με τον $x'x$
- δ. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ε με το θετικό ημιάξονα Oy

2. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον $y'y$ ισούται με:

- α. 1
- β. -1
- γ. 0
- δ. δεν ορίζεται.

3. Αν το σημείο $(3, \kappa)$ ανήκει στη ευθεία $\varepsilon: \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 1$, τότε

- α. $\kappa = 0$
- β. $\kappa = 2$
- γ. $\kappa = 3$
- δ. $\kappa = 5$

4. Η ευθεία $y = \lambda x + 3$

- α. είναι κάθετη στον $x'x$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
- β. είναι κάθετη στον $y'y$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
- γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $(\frac{1}{\lambda}, 5)$
- δ. περνάει από την αρχή των αξόνων

5. Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$

- α. τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- β. είναι και οι δυο κάθετες στην $y = -x$
- γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = -1$
- δ. είναι παράλληλες $\lambda = 2$

6. Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία είναι

- α. $y = |\lambda| x - 2$
- β. $y = 3x + 2$
- γ. $y = |\lambda| x + \beta$ με $\lambda < 0$
- δ. η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$

7. Έστω ευθεία ε που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha\beta \neq 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

$$\alpha. \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$$

$$\beta. y - y_0 = \beta(x - x_0)$$

$$\gamma. \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\delta. y - y_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$$

8. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ αντίστοιχα με $\alpha = 2\beta$. Τότε

- α. η ε σχηματίζει γωνία 60° με τον $x'x$
- β. η ε σχηματίζει γωνία 90° με τον $x'x$
- γ. η ε σχηματίζει γωνία οξεία με τον $x'x$
- δ. η ε σχηματίζει γωνία αμβλεία με τον $x'x$

9. Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. Τότε το σύστημα των εξισώσεών τους

- α. έχει άπειρες λύσεις
- β. έχει μοναδική λύση
- γ. δεν έχει λύση
- δ. έχει δυο λύσεις

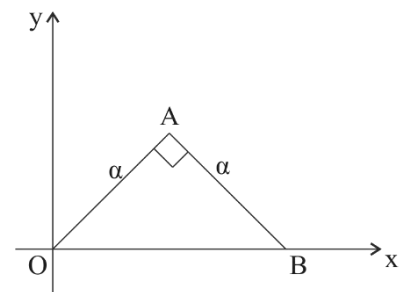
10. Μια ευθεία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης όταν

- α. η εξίσωση της είναι της μορφής $y = c$
- β. έχει συντελεστή διεύθυνσης 0
- γ. είναι παράλληλη στον $x'x$
- δ. δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της

11. Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας OA είναι $y = \sqrt{3}x$. Η

γωνία OAB ισούται με:

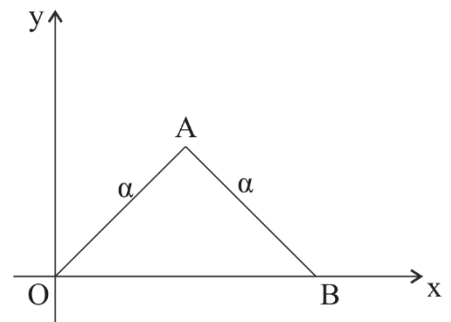
- α. 30°
- β. 60°
- γ. 45°
- δ. 90°



12. Στο διπλανό σχήμα η γωνία OAB είναι ορθή, $\alpha \neq 1$ και $B(\beta, 0)$. Η

εξίσωση της ευθείας OA είναι

- α. $y = \frac{\alpha}{\beta}x$
- β. $y = \frac{\beta}{\alpha}x$
- γ. $y = \sqrt{\alpha}x$
- δ. $y = x$



13. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει

- α. μια ευθεία κάθετη στον $x'x$

β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας $\angle xOy$

γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας $\angle yOx'$

δ. τις διχοτόμους των γωνιών $\angle xOy$ και $\angle yOx'$

14. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία όταν

α. $A = 0$ και $B = 0$

β. $A = 0$ ή $\Gamma \neq 0$

γ. $A^2 + B^2 \geq 0$

δ. $|A| + |B| > 0$

15. Έστω $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:

α. Το διάνυσμα $\vec{v} = (B, A)$ είναι κάθετο στον ε

β. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, -B)$ είναι παράλληλο στην ε

γ. το διάνυσμα $\vec{v} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην ε

δ. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην ε

16. Η απόσταση του σημείου $A(-1, 1)$ από την ευθεία $\alpha x + \beta y = 0$ με $\alpha > \beta$ είναι

α. $\frac{(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$

β. $\frac{(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$

γ. $-\frac{|\beta - \alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

δ. $\frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

17. Τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\kappa, 0)$, $B(0, \lambda)$ με $\kappa, \lambda > 0$ ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν

α. $2\kappa\lambda$

β. $\frac{1}{2}(\kappa + \lambda)\kappa$

γ. $\frac{1}{2}(\kappa - \lambda)(\kappa + \lambda)$

δ. $\frac{1}{2}\kappa\lambda$

18. Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $\Gamma(a, \beta)$ είναι

α. $\frac{a\beta}{2}$

β. $\frac{a|\beta|}{2}$

γ. $\frac{|\alpha\beta|}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = \lambda x + 7$ και $\delta: y = 3x - 1$. Για κάθε τιμή του λ που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα, η ευθεία ε παίρνει μια θέση στο καρτεσιανό επίπεδο που περιγράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δυο στηλών.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lambda = -\frac{1}{3}$	Α. $\varepsilon \parallel \delta$
	Β. $\varepsilon \parallel x'x$
2. $\lambda = 3$	Γ. $\varepsilon \parallel y'y$
	Δ. $\varepsilon \perp \delta$
3. $\lambda = 0$	Ε. $\varepsilon \parallel$ διχοτόμο της xOy

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία που η εξίσωσή της βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα, με το συντελεστή της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$	Α. 0
	Β. δεν ορίζεται
2. $\varepsilon_2: y = y_0$	Γ. 1
	Δ. β
3. $\varepsilon_3: x = x_0$	Ε. α
4. $\varepsilon_4: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$	Ζ. $-\frac{\beta}{\alpha}$
5. $\varepsilon_5: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	Η. $-\frac{\alpha}{\beta}$

3. Να αντιστοιχίσετε τις ευθείες της στήλης Α του πίνακα με τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $y = 2x - 1$	Α. $\vec{\delta}_1 = (0, 2)$
	Β. $\vec{\delta}_2 = (2, -1)$
2. $2x + y + 2 = 0$	Γ. $\vec{\delta}_3 = (2, 0)$
	Δ. $\vec{\delta}_4 = (2, 1)$

3. $y = 3$	Ε. $\vec{\delta}_5 = (1, -2)$
4. $x = -1$	Ζ. $\vec{\delta}_6 = (-1, -2)$

4. Κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα είναι κέντρο μιας οικογένειας ευθειών από τη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη Α Κέντρο	Στήλη Β Εξίσωση οικογένειας ευθειών
1. (2,1)	Α. $(x+6y-7)+\lambda(2x-15y+1)=0$
	Β. $(x+y+1)+\lambda(2x-5y+7)=0$
2. (7,1)	Γ. $(x+y-3)+\lambda(2x-y-3)=0$
	Δ. $(x+y-1)+\lambda(x+2y-3)=0$
3. (-1,2)	Ε. $(x+y-8)-\lambda(-x+2y+5)=0$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η εξίσωση: $(2x-1)^2 + \lambda(y+2)^2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τιμές του λ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει 2 ευθείες:

α. κάθετες

β. παράλληλες.

2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = kx - 3$, $\varepsilon_2: y = (2k+5)x + 2$, $\varepsilon_3: 5x + y + 3 = 0$,

$\varepsilon_4: ax + by + 2 = 0$ με $k, a, b \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 , ε_2 και να αποδείξετε ότι, καθώς το k μεταβάλλεται, κινείται σε ευθεία ε .

ii. Αν η ε είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών ε_3 και ε_4 να βρείτε τα a , b .

3. Δίνεται η εξίσωση $6x^2 + 5xy - 4y^2 = 0$ (1) και η ευθεία $\varepsilon: x = 4$.

i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 , ε_2 , που διέρχονται από το $O(0,0)$.

ii. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες ε , ε_1 , ε_2 .

4. Δίνονται οι εξισώσεις

$2\lambda x - (\lambda+1)y - 3\lambda + 1 = 0$ (1) και $(3\lambda+1)x + (\lambda-1)y - 6\lambda + 2 = 0$ (2).

i. Να αποδείξετε ότι οι (1) και (2) παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχεται κάθε μία από τις παραπάνω ευθείες.

iii. Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία που να ανήκει και στα δύο σύνολα ευθειών που ορίζουν οι (1), (2).

iv. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , ώστε να είναι παράλληλες οι ευθείες που ορίζονται από τις (1) και (2).

v. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , ώστε να είναι κάθετες οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις (1) και (2).

5. Δίνεται ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 3 = 0$ και σημεία $P(3,1)$, $M(-3,0)$.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο $\Sigma \in \varepsilon$, ισχύει: $(O\Sigma) \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

ii. Να βρείτε το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ε .

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MPP' .

iv. Αν $(APP') = \frac{8}{5}$ και A σημείο της ε , ποιες είναι οι συντεταγμένες του A ;

6. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 0)$, $B(2\lambda, 3\lambda)$ με $\lambda \neq 0$.

- i. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα A, B για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην AB στο σημείο της A.
- iii. Αν η ε τέμνει την ευθεία η : $x = -2\lambda$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

7. Δίνονται οι εξισώσεις $(\varepsilon_1): (k^2 - 1)x - (k^2 + 2k + 1)y + 2k + 2 = 0$ και

$$(\varepsilon_2): (k - 1)x - (k + 1)y + 2k^2 + 4 = 0.$$

- i. Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε οι (ε_1) και (ε_2) να παριστάνουν ευθείες.
- ii. Για τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ που βρήκατε:
 - α. Να δείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.
 - β. Να δείξετε ότι η (ε_1) διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρεθεί.
 - γ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2) με την ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

8. Έστω τρίγωνο ABΓ με πλευρές πάνω στις ευθείες $(\varepsilon_1): y - x = 1$, $(\varepsilon_2): y + x - 2 = 0$ και στον οριζόντιο άξονα, ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων xOy . Θεωρούμε ότι τα σημεία $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο άξονα με $x_B < x_\Gamma$.

- i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του A, B, Γ.
- ii. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.
- iii. Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου AM, της διχοτόμου AE και του ύψους AD, που φέρουμε από την κορυφή A.
- iv. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς AG και η απόσταση της από την πλευρά AB.
- v. Να βρεθούν τα σημεία τομής μιας ευθείας παράλληλης στον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο (4,3) με τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

9. Ένα γήπεδο γκολφ είναι τοποθετημένο στο επίπεδο (ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων). Σε έναν αγώνα γκολφ χτυπάμε το μπαλάκι από το σημείο $A(-3, 0)$ και έστω ότι αυτό ακολουθεί τη διαδρομή ευθείας με εξίσωση $y - x = 3$. Θεωρούμε ότι η τρύπα βρίσκεται στο σημείο B με συντεταγμένες $B(2, 3)$ του ίδιου ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

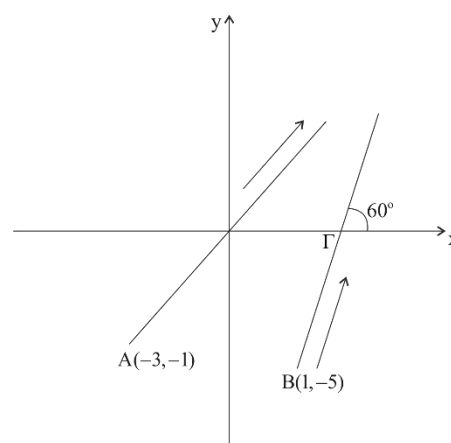
- i. Να ελεγχθεί αν θα μπει το μπαλάκι στη τρύπα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii. Έστω ότι η τρύπα βρισκόταν στο σημείο Γ με συντεταγμένες $\Gamma(a, 3a)$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a ώστε το μπαλάκι να μπει στη τρύπα.
- iii. Ποια είναι η μικρότερη απόσταση που θα έχει το μπαλάκι από την τρύπα (σημείο B), και σε ποιο σημείο της διαδρομής του θα συμβεί αυτό;
- iv. Ποια πρέπει να είναι η κλίση της ευθείας ώστε αν χτυπούσαμε το μπαλάκι από το σημείο A να πετύχουμε απευθείας το στόχο μας (σημείο B); Ποια θα είναι τότε η εξίσωση της ευθείας αυτής και ποια η απόσταση AB.

10. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι: $\Pi_1(t+1, t+2), \Pi_2(3t, 3t+2)$ για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.

- Αν τα πλοία Π_1, Π_2 ξεκινούν από τα λιμάνια A και B αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση των δύο λιμανιών.
- Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.
- Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
- Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο πλοία θα συναντηθούν;

11. Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τα σημεία A και B αντίστοιχως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων A και B.
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.
- Να βρεθεί η απόσταση του σημείου B από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλον κινητό.
- Να εξετασθεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών.



12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία.

Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a}\vec{b} + 12)x + (\vec{a}\vec{b} - 12)y - 5 = 0$ (1).

- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$.
- Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$.
- Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$.
- Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b} \perp \vec{a}$.

13. Δίνονται τα σημεία $A(3, 4), B(5, 7)$ και $\Gamma(2\mu+1, 3\mu-2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ .
- Να αποδείξετε ότι:
 - Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ δεν εξαρτάται από το μ .
 - Για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ .

14. Δίνονται τα σημεία $A(\kappa-1, 3), B(\kappa, 2)$ και $\Gamma(\kappa+1, -1)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, τα σημεία A,B,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii. Για $\kappa = -1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε $(MAB) = 2(AB\Gamma)$

iv. Για $\kappa = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων N για τα οποία ισχύει $\frac{d(N, AB)}{d(N, B\Gamma)} = \sqrt{5}$.

15. Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon): \kappa x + (\kappa - 1)y = 3\kappa^2 - 3\kappa$ και $(\eta): (\kappa - 1)x + \kappa y = 2010\kappa$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

i. Έστω $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ οι ευθείες που προκύπτουν από την ευθεία (ε) για $\kappa = 2$ και $\kappa = \frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Η ευθεία

(ε_1) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, ενώ η ευθεία (ε_2) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου ABΓΔ.

ii. Αν οι ευθείες (ε) και (η) είναι παράλληλες, να βρείτε την απόσταση τους.

iii. Για $\kappa \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M των σημείων E και Z, στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων.

iv. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε η αρχή των αξόνων να απέχει την μέγιστη δυνατή απόσταση από την ευθεία (η) .

16. Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - y^2 = xy$ (1).

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, τις οποίες και να σχεδιάσετε.

ii. Να βρείτε την οξεία γωνία θ που σχηματίζουν οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία A, B αντιστοίχως, ώστε το σημείο M να είναι μέσο του AB.

17. Δίνονται οι εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): 2\lambda x - (\lambda + 1)y - 3\lambda + 1 = 0 \quad (\varepsilon_2): (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 6\lambda + 2 = 0 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι παριστάνουν ευθείες διερχόμενες από σταθερά σημεία.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\eta): y = 3x - 5$ να περιέχεται σε κάποια από τις παραπάνω οικογένειες ευθειών.

iii. Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία που να ανήκει ταυτόχρονα και στις δυο παραπάνω οικογένειες ευθειών.

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 2(2x + y)\kappa + 3\kappa^2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε) και (η) .

ii. Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon) \perp (\eta)$.

iii. Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών (ε) και (η) .

iv. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου M.

19. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται σημείο $A(\alpha, \beta)$ του 1^{ου} τεταρτημορίου. Μία ευθεία ε διέρχεται από το A και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία B, Γ αντίστοιχα.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ .

ii. Να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) \geq 2\alpha\beta$ για κάθε τιμή του λ (συντελεστή διεύθυνσης της ε) και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , όταν το εμβαδό του τριγώνου $OB\Gamma$ είναι ελάχιστο.

iii. Αν η ευθεία ε_1 , συμμετρική της ε : $\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$, ως προς το $O(0,0)$, διέρχεται από τα σημεία $\Delta(-1, -1)$ και $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

20. Δίνονται οι ημιευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda x$, $\varepsilon_2 : y = -\lambda x$, με $\lambda > 0$ και $x > 0$, και η ευθεία ε που τις τέμνει στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των A και B , συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

ii. Αν το σημείο M ανήκει στον ημιάξονα Ox να αποδείξετε ότι ο Ox είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

iii. Έστω ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2)x - \sqrt{7} \cdot |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|y + |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 0$, όπου τα διανύσματα

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{3}$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες και το A έχει τετμημένη $\frac{7}{8}$. Να αποδείξετε ότι:

$|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 2$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

Γωνία ευθείας με το $x'x$	Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας ή κλίση
$0 \leq \omega < \pi$	$\lambda = \varepsilon \varphi \omega, \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}$
$\omega = 0$	$\lambda = 0$
$\omega = \frac{\pi}{2}$	δεν ορίζεται
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ σημεία ευθείας ε	
$x_1 \neq x_2$	$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$x_1 = x_2$	δεν ορίζεται

Σχετική θέση ευθείας ε και διανύσματος $\vec{\delta}$	Συνθήκη συντελεστών διεύθυνσης
$\vec{\delta} // \varepsilon$ και $\vec{\delta}, \varepsilon \not// y'y$	$\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_{\varepsilon}$
$\vec{\delta} // \varepsilon$ και $\vec{\delta} // y'y$	$\varepsilon // y'y \Leftrightarrow$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε
Σχετική θέση ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$	
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \not// y'y$	$\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 // y'y$	$\varepsilon_2 // y'y \Leftrightarrow$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε_2
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \not// y'y, x'x$	$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 // y'y$	$\varepsilon_2 // x'x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = 0$
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 // x'x$	$\varepsilon_2 // y'y \Leftrightarrow$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε_2

Δεδομένα στοιχεία για την ευθεία	Εξίσωση ευθείας
$A(x_0, y_0), \lambda$	$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
$A(x_0, y_0)$ και δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης	$x = x_0$
$A(x_0, y_0)$ και $\varepsilon // x'x$	$y = y_0$
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $x_1 \neq x_2$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $x_1 = x_2$	$x = x_1$
$A(x_0, y_0)$	$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \quad \text{ή} \quad x = x_0$
$A(0, \beta), \lambda$	$y = \lambda x + \beta$
$O(0, 0), \lambda$	$y = \lambda x$
διχοτόμος της $x\hat{O}y$	$y = x$
διχοτόμος της $y\hat{O}x'$	$y = -x$

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	Διάνυσμα
$Ax + By + \Gamma = 0, \text{ με } A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0$	παράλληλο: $\vec{\delta} = (B, -A)$ κάθετο: $\vec{\eta} = (A, B)$

	Απόσταση σημείου από ευθεία
$\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0, M(x_0, y_0)$	$d(M, \varepsilon) = \frac{ Ax_0 + By_0 + \Gamma }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

	Εμβαδόν τριγώνου
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$	$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) $

§3.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

Εξίσωση Κύκλου

1. Ορισμός

Κύκλος ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου αυτού. Το σταθερό σημείο ονομάζεται **κέντρο** και η σταθερή απόσταση **ακτίνα** του κύκλου. Συμβολικά, γράφοντας $C(K, \rho)$ εννοούμε κύκλο με κέντρο το σημείο K και ακτίνα ρ .

2. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ , είναι: $x^2 + y^2 = \rho^2$

Απόδειξη

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy και τον κύκλο (C) ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων

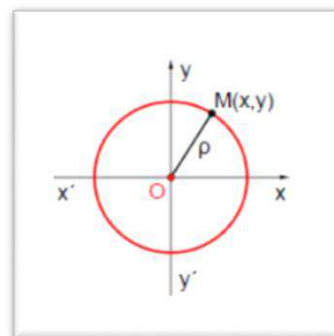
$O(0,0)$ και ακτίνα $\rho > 0$

Το σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο του κύκλου (C) αν και μόνο αν ισχύει

$$: (OM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

Δηλαδή:

Ο κύκλος ο οποίος έχει **κέντρο την αρχή των αξόνων** και **ακτίνα ρ** έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$



$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

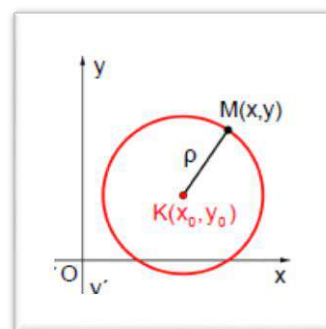
3. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

Απόδειξη

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy και τον κύκλο (C) ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho > 0$. Το σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο του κύκλου (C) αν και μόνο αν ισχύει:

$$(KM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Δηλαδή Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

4. Η εφαπτομένη κύκλου $C(O, \rho)$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής), είναι:

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κύκλο (C) με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και

το σημείο του $A(x_1, y_1)$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου (C) στο σημείο $A(x_1, y_1)$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην εφαπτομένη (ε)

όταν και μόνο όταν $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{OA}$ δηλαδή :

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ (1). Όμως $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$. Έτσι η (1) γίνεται

$$x_1 \cdot (x - x_1) + y_1 \cdot (y - y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x - x_1^2 + y_1 \cdot y - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = x_1^2 + y_1^2$$

όμως $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$ (επειδή το $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου). Άρα $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$

Δηλαδή η εφαπτομένη του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής) θα έχει εξίσωση :

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

ΜΕ ΟΜΟΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ , ΟΤΑΝ ΑΥΤΟΣ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟ $O(0,0)$

5. Διερεύνηση της εξίσωσης : $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

Μετασχηματίζουμε ισοδύναμα την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot x + 2 \cdot \frac{B}{2} \cdot y + \Gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot x + \frac{A^2}{4} \right) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{B}{2} \cdot y + \frac{B^2}{4} \right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{A}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{B}{2} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \quad (1)$$

Για την εξίσωση (1) έχουμε ότι

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ τότε η εξίσωση (1) **παριστάνει κύκλο** με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

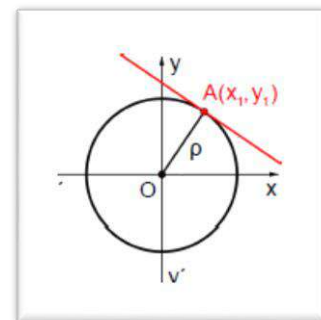
και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ τότε η εξίσωση (1) **παριστάνει μόνο ένα σημείο** το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ τότε η εξίσωση (1) **είναι αδύνατη**

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ (1) με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο και αντιστρόφως κάθε κύκλος έχει την εξίσωση (1)

6. Σχετική θέση σημείου-κύκλου - Μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σημείου από τα σημεία του κύκλου



Αν A, B, Γ σημεία του επιπέδου που βρίσκεται ο $C(K, \rho)$ τότε :

- $(AK) < \rho \Leftrightarrow$ Το A εσωτερικό σημείο του κύκλου

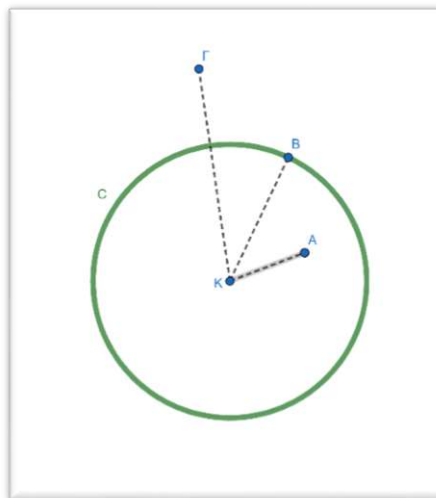
- $\text{Max } d(A, C) = \rho + (AK)$
- $\text{min } d(A, C) = \rho - (AK)$

- $(BK) = \rho \Leftrightarrow$ Το B ανήκει στον κύκλο

- $\text{Max } d(B, C) = 2\rho$
- $\text{min } d(B, C) = 0$

- $(\Gamma K) > \rho \Leftrightarrow$ Το Γ εξωτερικό σημείο του κύκλου

- $\text{Max } d(\Gamma, C) = (\Gamma K) + \rho$
- $\text{min } d(\Gamma, C) = (\Gamma K) - \rho$



7. Σχετική θέση ευθείας – κύκλου - Ελάχιστη απόσταση των σημείων της ευθείας από τα σημεία του κύκλου

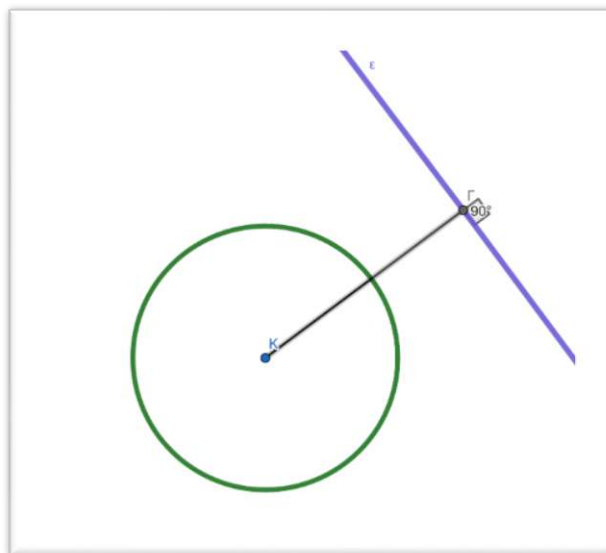
Θεωρούμε κύκλο $C(K, \rho)$ και ευθεία (ϵ) στο ίδιο επίπεδο. Υπάρχουν τρεις σχετικές θέσεις ευθείας – κύκλου :

A. Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία

(η ευθεία τότε λέγεται εξωτερική του κύκλου).

Αυτό το διαπιστώνουμε αλγεβρικά ως εξής:

- Το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας (ϵ) είναι αδύνατο, είτε :
- Η απόσταση του κέντρου K του κύκλου C από την ευθεία (ϵ) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ του κύκλου, δηλ. $d(K, \epsilon) > \rho$.
- $\text{min } d(C, \epsilon) = d(K, \epsilon) - \rho$

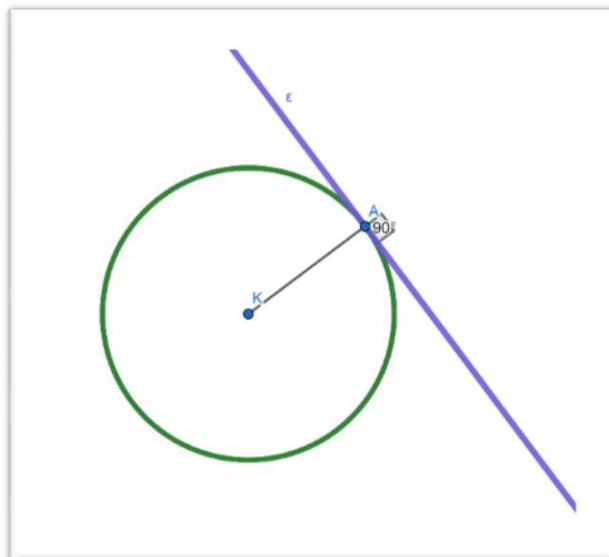


Β. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο

(η ευθεία τότε λέγεται εφαπτομένη του κύκλου). Αυτό το διαπιστώνουμε αλγεβρικά ως εξής :

- Το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας (ε) έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) που είναι το σημείο επαφής, είτε :
- Η απόσταση του κέντρου K του κύκλου C από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου, δηλ. $d(K, \varepsilon) = \rho$ (Συνθήκη επαφής).

$$\min d(C, \varepsilon) = 0$$

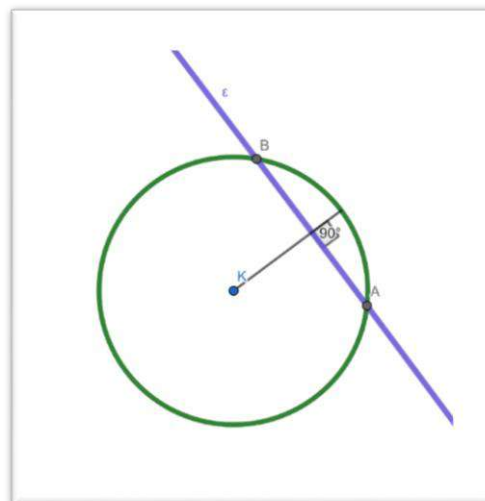


Γ. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία

(η ευθεία τότε λέγεται τέμνουσα του κύκλου). Αυτό το διαπιστώνουμε αλγεβρικά ως εξής :

- Το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας (ε) έχει δύο λύσεις (x_1, y_1) , (x_2, y_2) που είναι τα κοινά τους σημεία A και B , είτε :
- Η απόσταση του κέντρου K του κύκλου C από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ του κύκλου, δηλ. $d(K, \varepsilon) < \rho$.

$$\min d(C, \varepsilon) = 0$$



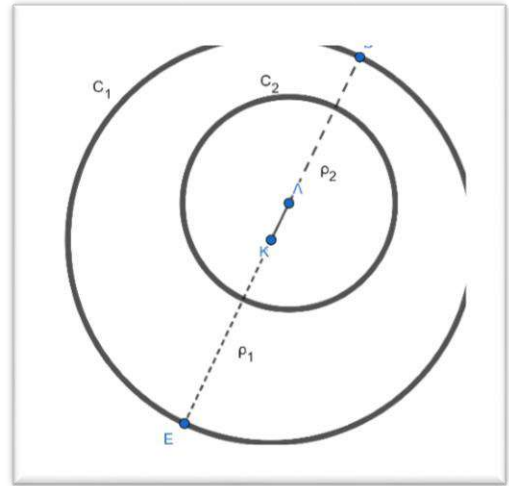
8. Σχετική θέση δύο κύκλων - Μέγιστη και ελάχιστη απόσταση σημείων δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους $C_1(K, \rho_1)$, $C_2(L, \rho_2)$, με $\rho_1 > \rho_2$, στο ίδιο επίπεδο. Για να βρούμε τη σχετική τους θέση υπολογίζουμε την απόσταση των κέντρων τους, δηλ. τη διάκεντρο KL , οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. $0 \leq (K\Lambda) < \rho_1 - \rho_2 \Leftrightarrow$ Ο κύκλος C_2 βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C_1 .

$$\text{Max } d(C_1, C_2) = K\Lambda + \rho_1 + \rho_2$$

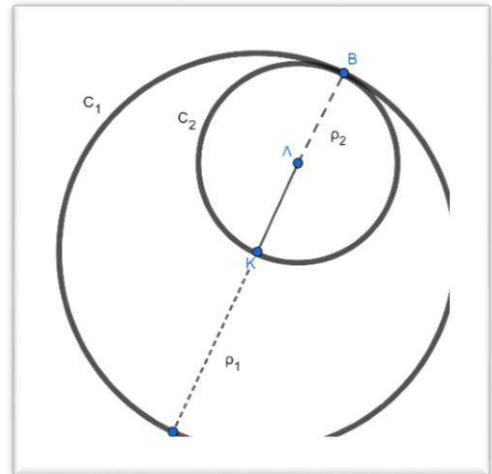
$$\text{min } d(C_1, C_2) = \rho_1 - \rho_2 - K\Lambda$$



2. $(K\Lambda) = \rho_1 - \rho_2 \Leftrightarrow$ Ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

$$\text{Max } d(C_1, C_2) = 2\rho_1$$

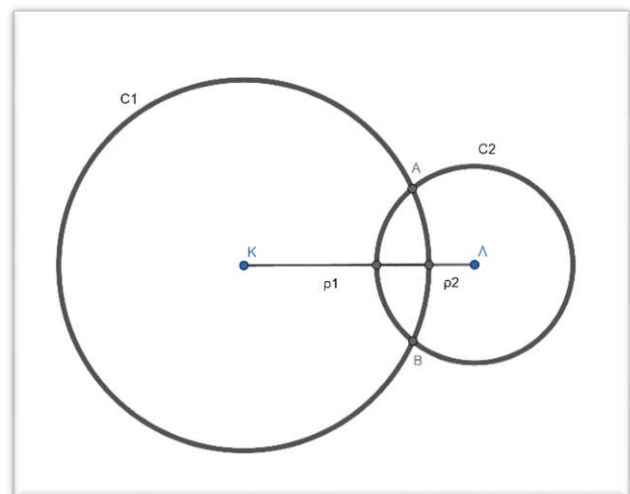
$$\text{min } d(C_1, C_2) = 0$$



3. $\rho_1 - \rho_2 < (K\Lambda) < \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow$
Οι κύκλοι C_1, C_2 τέμνονται

$$\text{Max } d(C_1, C_2) = K\Lambda + \rho_1 + \rho_2$$

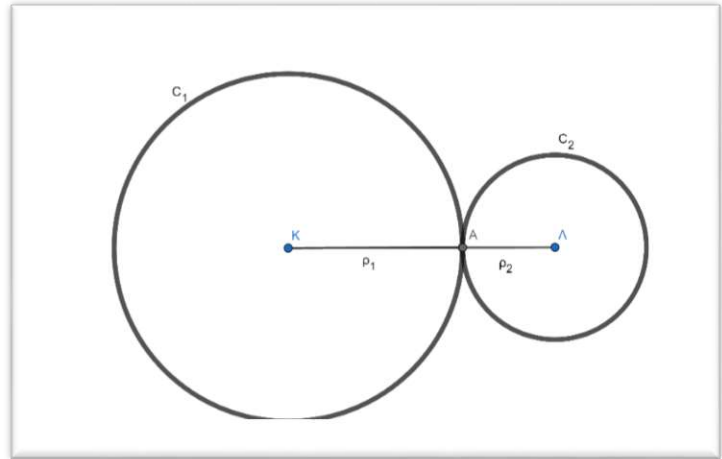
$$\text{min } d(C_1, C_2) = 0$$



4. $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow$ Οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά .

$$\text{Max } d(C_1, C_2) = K\Lambda + \rho_1 + \rho_2$$

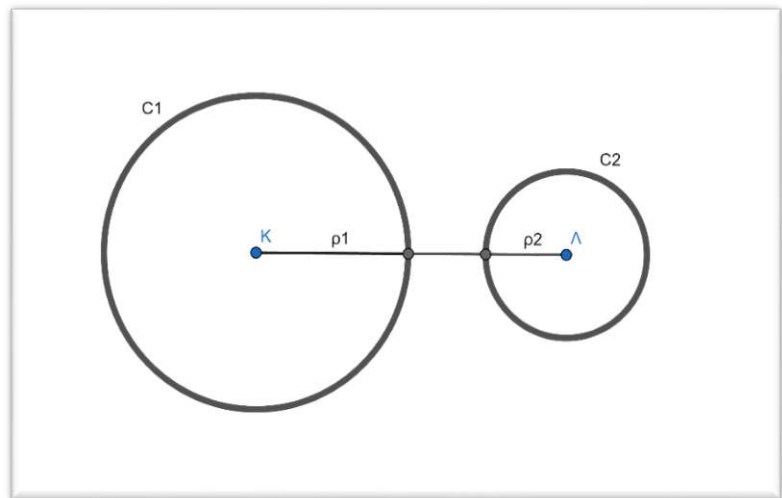
$$\text{min } d(C_1, C_2) = 0$$



5. $(K\Lambda) > \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow$ Κάθε ένας από τους κύκλους C_1, C_2 βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου .

$$\text{Max } d(C_1, C_2) = K\Lambda + \rho_1 + \rho_2$$

$$\text{min } d(C_1, C_2) = K\Lambda - \rho_1 - \rho_2$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1.Πως βρίσκουμε την εξίσωση και τα στοιχεία του κύκλου

- Αν γνωρίζουμε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα ρ του κύκλου τότε η εξίσωση του είναι $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$
- Αν δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, τότε αυτή παριστάνει κύκλο **μόνο όταν** ισχύει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Σ'αυτή την περίπτωση το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.
- Για να οριστεί ένας κύκλος C πρέπει να γνωρίζουμε **απαραίτητα το κέντρο και την ακτίνα του**. Έτσι, αν δίνονται ορισμένες συνθήκες θα πρέπει από αυτές να προσδιορίζουμε το κέντρο και την ακτίνα του. Θυμόμαστε πάντοτε ότι:
 - i) Ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει σ'έναν κύκλο C αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.
 - ii) Αν K το κέντρο του κύκλου C και AB μια χορδή του C τότε το K ανήκει **στη μεσοκάθετό της χορδής AB** . Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι αν αναζητούμε την εξίσωση ενός κύκλου που διέρχεται από δύο ή τρία γνωστά σημεία, τότε αν βρούμε τις μεσοκαθέτους των χορδών, που σχηματίζονται από τα σημεία αυτά, θα μπορούμε να προσδιορίσουμε το κέντρο του κύκλου.
 - iii) Αν ο κύκλος $C(K, \rho)$ εφάπτεται* σε ευθεία (ε) στο σημείο A , τότε ισχύουν: $d(K, \varepsilon) = \rho$ και $\overline{AK} \perp (\varepsilon)$.

* **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Ένας κύκλος C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται:

- στον άξονα $y'y \Leftrightarrow |x_0| = \rho$

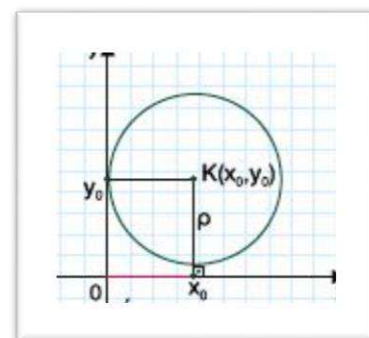
Απόδειξη

Ο άξονας $y'y$, έχει εξίσωση: $x = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$, οπότε αφού αφού ο κύκλος C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται στον άξονα $y'y$, θα πρέπει:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|1 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \rho \Leftrightarrow |x_0| = \rho$$

✓ η εξίσωση του κύκλου τότε είναι της μορφής:

$$(x \pm \rho)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2$$



- στον άξονα $x'x \Leftrightarrow |y_0| = \rho$

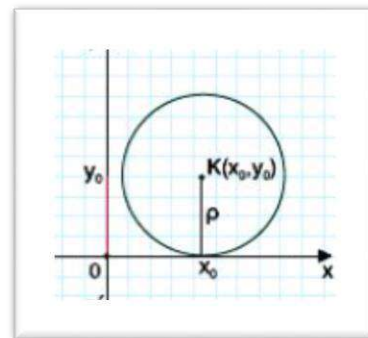
Απόδειξη

Ο άξονας $x'x$, έχει εξίσωση: $y = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0$, οπότε αφού ο κύκλος C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται στον άξονα $x'x$, θα πρέπει:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \rho \Leftrightarrow |y_0| = \rho$$

✓ η εξίσωση του κύκλου τότε είναι της μορφής:

$$(x - x_0)^2 + (y \pm \rho)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2$$

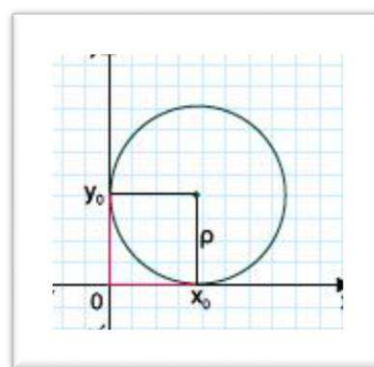


- στους άξονες $x'x, y'y \Leftrightarrow |x_0| = |y_0| = \rho$.

✓ η εξίσωση του κύκλου είναι τότε της μορφής:

$$(x \pm \rho)^2 + (y \pm \rho)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 = x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$(x -)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2$$



2. Εφαπτομένη ευθεία κύκλου

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης γνωστού κύκλου C εργαζόμαστε ως εξής:

- Αν ο κύκλος C έχει κέντρο το $O(0,0)$, ακτίνα ρ και $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

- Αν ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(x_0, y_0)$, ακτίνα ρ και $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής, τότε αν $M(x, y)$ σημείο της ζητούμενης εφαπτομένης θα πρέπει να ισχύει:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KA} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1)(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

που είναι η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης. (δεν πρέπει να γνωρίζουμε τον τύπο, αλλά να γνωρίζουμε την διαδικασία για να τον βρούμε)

- Αν $C(K, \rho)$ ο κύκλος και $A(x_1, y_1)$ ένα σημείο της εφαπτομένης (ε)

του κύκλου, που δεν είναι το σημείο επαφής, τότε η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής: (ε): $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$ ή (ε): $x = x_1$

Τότε λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των $C, (\varepsilon)$ απαιτώντας να έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , (δηλαδή απαιτούμε $d(K, \varepsilon) = \rho$), που θα είναι το σημείο επαφής (οπότε προσδιορίζουμε το λ ή ελέγχουμε αν η ευθεία $x = x_1$ είναι εφαπτομένη του C)

- iv. Αν η εφαπτομένη (ε) του $C(K, \rho)$ ικανοποιεί κάποια συνθήκη (π.χ. είναι παράλληλη ή κάθετη σε μία γνωστή ευθεία ή σχηματίζει γνωστή γωνία με κάποια γνωστή ευθεία (δ) τότε από τη συνθήκη βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ της (ε). Έτσι, η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής :

$$\varepsilon : y = \lambda x + \beta$$

Το β προσδιορίζεται από το σύστημα των εξισώσεων των $C, (\varepsilon)$ το οποίο πρέπει να έχει μοναδική λύση, είτε από τη συνθήκη $d(K, \varepsilon) = \rho$.

- v. Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης γνωστού κύκλου η οποία ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα αλλά **δεν δίνεται το σημείο επαφής**, τότε υποθέτουμε ότι $M(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής και από την ιδιότητα καθώς και από το ότι το σημείο M θα ικανοποιεί την εξίσωση του κύκλου, καταλήγουμε σε **σύστημα ως προς x_1, y_1** . Βρίσκοντας έτσι το σημείο επαφής προσδιορίζουμε και τη ζητούμενη εξίσωση.

3.Παραμετρική οικογένεια κύκλων

1. Για να αποδείξουμε (ή για να βρούμε τις τιμές της παραμέτρου) ώστε μια εξίσωση της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με τα A, B, Γ δοσμένα παραμετρικά, να παριστάνει κύκλο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες ώστε να ισχύει: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

2. Για να αποδείξουμε ότι ένας **μεταβλητός κύκλος** της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ (1), με τα A, B, Γ εξαρτώμενα από παραμέτρους, **διέρχεται από σταθερό σημείο** (ανεξάρτητο των παραμέτρων), ακολουθούμε κάποια από τις παρακάτω διαδικασίες:

1^{ος} τρόπος

- Δίνουμε 2 τυχαίες (επιτρεπόμενες) τιμές στις παραμέτρους
- Λύνουμε το σύστημα των 2 κύκλων, που προκύπτουν (δηλαδή προσδιορίζουμε το σημείο τομής τους)
- Διαπιστώνουμε ότι η λύση του συστήματος επαληθεύει την (1), οπότε η ευθεία με εξίσωση (1), για κάθε τιμή των παραμέτρων, διέρχεται απ' το σταθερό σημείο, που έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος. **(Η μεθοδολογία αυτή είναι ίδια με την αντίστοιχη της ευθείας).**

2^{ος} τρόπος

- Μετατρέπουμε την αρχική εξίσωση σε εξίσωση πολωνυμικής μορφής ως προς την παράμετρο
- Στη συνέχεια απαιτούμε το πολυώνυμο να είναι το μηδενικό, δηλαδή οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι με το μηδέν.
- Η λύση του συστήματος που θα προκύψει είναι οι συντεταγμένες του σταθερού σημείου.

4.Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων

A.Για να βρούμε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων δύο κύκλων με κέντρα

$K(x_1, y_1)$, $K(x_2, y_2)$ και ακτίνες ρ_1, ρ_2 αντίστοιχα, ακολουθούμε την παρακάτω

διαδικασία:

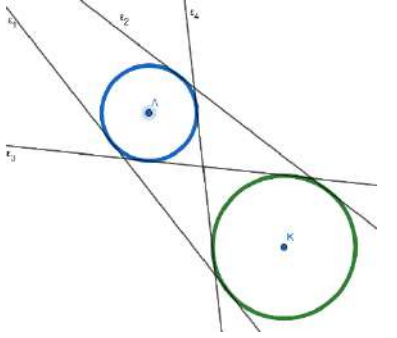
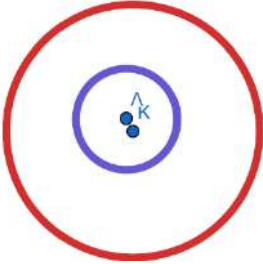
1. Ελέγχουμε αν υπάρχουν κατακόρυφες κοινές εφαπτόμενες που έχουν εξισώσεις:
$$\begin{cases} x = x_1 + \rho_1 \\ x = x_1 - \rho_1 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} x = x_2 + \rho_2 \\ x = x_2 - \rho_2 \end{cases}$$

2. Αναζητούμε τις κοινές εφαπτόμενες με εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες: $d(K_1, \varepsilon) = \rho_1$ και $d(K_2, \varepsilon) = \rho_2$ (Δηλαδή βρίσκουμε πλάγιες ή οριζόντιες εφαπτόμενες)

Β. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε συνοπτικά τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων και το πλήθος των εφαπτομένων τους.

Κοινά σημεία	σχήμα	Συνθήκη	Πλήθος κοινών εφαπτομένων
2		$\rho_1 - \rho_2 < (ΚΑ) < \rho_1 + \rho_2$ Οι κύκλοι τέμνονται	2
1 Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά		$(ΚΑ) = \rho_1 + \rho_2$ Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά	3
1 Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά		$(ΚΑ) = \rho_1 - \rho_2$ Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά	1

0 Ο ένας κύκλος είναι εκτός του άλλου		$\rho_1 - \rho_2 < (ΚΛ) < \rho_1 + \rho_2$ Ο ένας κύκλος είναι εκτός του άλλου	4
0		$0 \leq (ΚΛ) < \rho_1 - \rho_2$ Ο ένας κύκλος είναι εντός του άλλου	0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(-2, \sqrt{3})$

ii. Όταν εφάπτεται της ευθείας $x - y = 2$

Λύση

i. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής :

$(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(-2, \sqrt{3})$,

άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C): x^2 + y^2 = \rho^2 \stackrel{x=-2}{\stackrel{y=\sqrt{3}}{\Leftrightarrow}} (-2)^2 + (\sqrt{3})^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 7 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{7} . \text{ Άρα } (C): x^2 + y^2 = 7$$

ii. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής :

$(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία

$$(\varepsilon): x - y = 2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \text{ άρα } \rho = d(O, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} . \text{ Άρα}$$

$$(C): x^2 + y^2 = 2$$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. Όταν έχει κέντρο $K(1, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$

ii. Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(1, 2)$ και $B(7, 8)$

iii. Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x + 1$

iv. Όταν εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(1, 2)$.

Λύση

i. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο $K(1, 0)$ θα έχει εξίσωση της μορφής : $(C): (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C): (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = \rho^2 \stackrel{x=4}{\stackrel{y=-3}{\Leftrightarrow}} 3^2 + (-3)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 12 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} . \text{ Άρα } (C): (x - 1)^2 + y^2 = 12$$

ii. Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσον του AB άρα $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4$ και

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ άρα } K(4, 5) . \text{ Η ακτίνα του κύκλου είναι}$$

$$\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(7 - 1)^2 + (8 - 2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ Άρα}$$

$$(C): (x-4)^2 + (y-5)^2 = 18$$

A τρόπος

Αφού ο κύκλος διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\zeta): y = x + 1$ τότε το κέντρο του κύκλου θα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου

τμήματος AB και της ευθείας (ζ) . Έστω M το μέσο του AB τότε $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$ και

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \text{ άρα } M(2,0). \text{ Επίσης } (\varepsilon) \perp (AB) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1, \text{ όμως } \lambda_{AB} = \frac{0-0}{3-1} = 0 \text{ άρα ο}$$

συντελεστής διεύθυνσης της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος AB δεν ορίζεται. Άρα η (ε) είναι κάθετη στον $x'x$, οπότε: $(\varepsilon): x = x_0 \Leftrightarrow x = 2$

$$\begin{cases} (\varepsilon): x = 2 \\ (\zeta): y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ άρα το κέντρο του κύκλου είναι το } K(2,3) \text{ και η ακτίνα είναι}$$

$$\rho = (KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Άρα } (C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$$

B τρόπος

Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$, και ακτίνα ρ , δηλαδή έχει εξίσωση:

$(C): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. Αφού ο κύκλος διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλαδή:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} (1-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (1-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \quad (2) \text{ και}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=0 \end{matrix} (3-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (3-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \quad (3)$$

Από την (2) και (3) έχουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} (1-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \\ (3-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \end{cases}$$
 και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$(1-x_0)^2 - (3-x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x_0 + x_0^2 - 9 + 6x_0 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow 4x_0 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ και αφού το κέντρο του ανήκει στην ευθεία } (\zeta): y = x + 1, \text{ θα έχουμε } y_0 = x_0 + 1 \Rightarrow y_0 = 2 + 1 = 3, \text{ δηλαδή } K(2,3) \text{ και η ακτίνα}$$

$$\text{τού κύκλου θα είναι } \rho = (KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Άρα } (C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$$

iii. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$, και ακτίνα ρ , δηλαδή έχει εξίσωση:

$$(C): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2. \text{ Αφού ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα } x'x \text{ ισχύει: } \rho = |y_0| \text{ άρα}$$

$$(C): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = |y_0|^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2 \quad (1)$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(3,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλαδή:

$$(1) \Leftrightarrow (3-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = y_0^2 \Leftrightarrow (3-x_0)^2 + y_0^2 = y_0^2 \Leftrightarrow (3-x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο B(1,2) άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλαδή:

$$(1) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-y_0)^2 = y_0^2 \Leftrightarrow (1-3)^2 + (2-y_0)^2 = y_0^2 \Leftrightarrow 4+4-4y_0+y_0^2 = y_0^2 \Leftrightarrow y_0 = 2$$

και $\rho = |y_0| = |2| = 2$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση κύκλου θα είναι : (C): $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

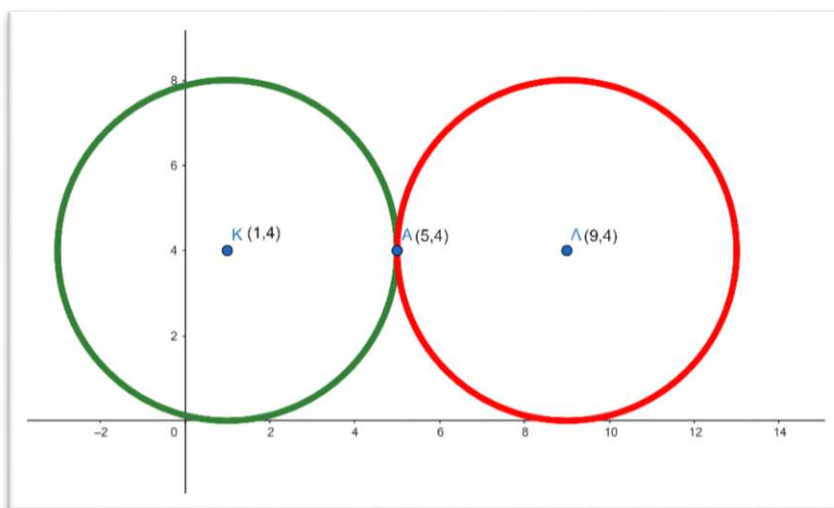
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις

- i. Ο κύκλος έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x'x και διέρχεται από το σημείο A (5,4) .
- ii. Ο κύκλος έχει κέντρο K (-3,2) και εφάπτεται στον άξονα y'y.
- iii. Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο K(-2,2) και εφάπτεται των αξόνων.

Λύση

i. Επειδή ο κύκλος εφάπτεται του άξονα x'x και διέρχεται από το σημείο A(5,4) , θα βρίσκεται πάνω από τον x'x. Οπότε, αν $K(x_0, y_0)$ είναι το κέντρο του κύκλου, θα είναι $y_0 > 0$. Επειδή ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x'x είναι:

$|y_0| = \rho \Leftrightarrow y_0 = 4$. Επίσης αφού ο κύκλος διέρχεται από το σημείο οι συντεταγμένες τότε του σημείου αυτού θα επαληθεύουν την εξίσωση:



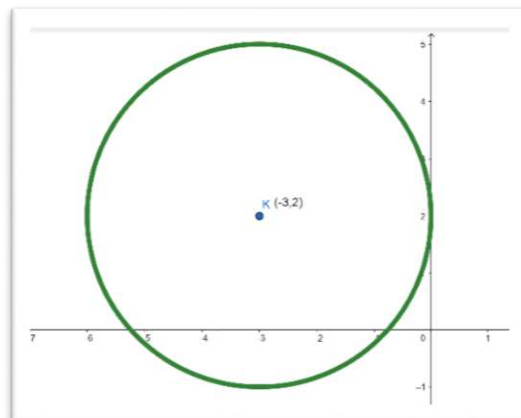
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-4)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (5-x_0)^2 + (4-4)^2 = 4^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 10x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 9 \text{ ή } x_0 = 1$$

άρα υπάρχουν δύο εξισώσεις που επαληθεύουν τα δεδομένα:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4^2 \text{ και } (x-9)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

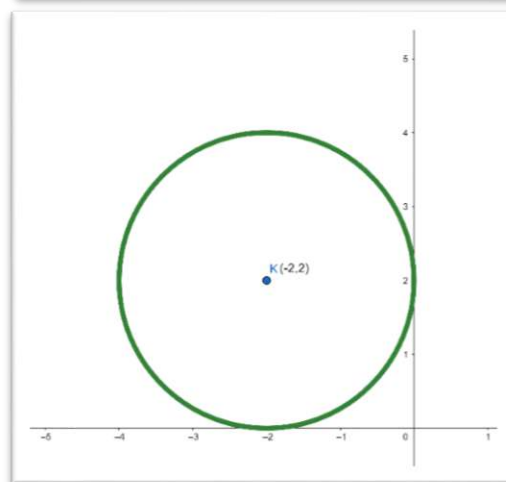
ii. Επειδή ο κύκλος εφάπτεται του $y'y$ και έχει κέντρο $K(-3,2)$ ισχύει ότι $\rho = |x_0| = |-3| = 3$ και η εξίσωσή του είναι:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$



iii. Επειδή ο κύκλος έχει κέντρο το $K(-2,2)$ και εφάπτεται στους άξονες, ισχύει ότι

$$\rho = |-2| = |2| = 2 \text{ και έχει εξίσωση: } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$



4. Να βρεθεί εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$, $B(7,0)$ και $\Gamma(-2,3)$

Λύση

Γνωρίζουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία, ότι η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του, οπότε το κέντρο του κύκλου θα βρίσκεται στο σημείο τομής της μεσοκαθέτου της AB και της μεσοκαθέτου της $A\Gamma$.

Θα βρούμε λοιπόν τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των AB και $A\Gamma$ και στην συνέχεια θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους. Η λύση του συστήματος θα μας δώσει τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου. Η ακτίνα ρ του κύκλου θα είναι ίση με την απόσταση του K από το A ή από το B ή από το Γ .

Έστω M το μέσο του AB , τότε

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2} \text{ και}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2} \text{ άρα } M\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

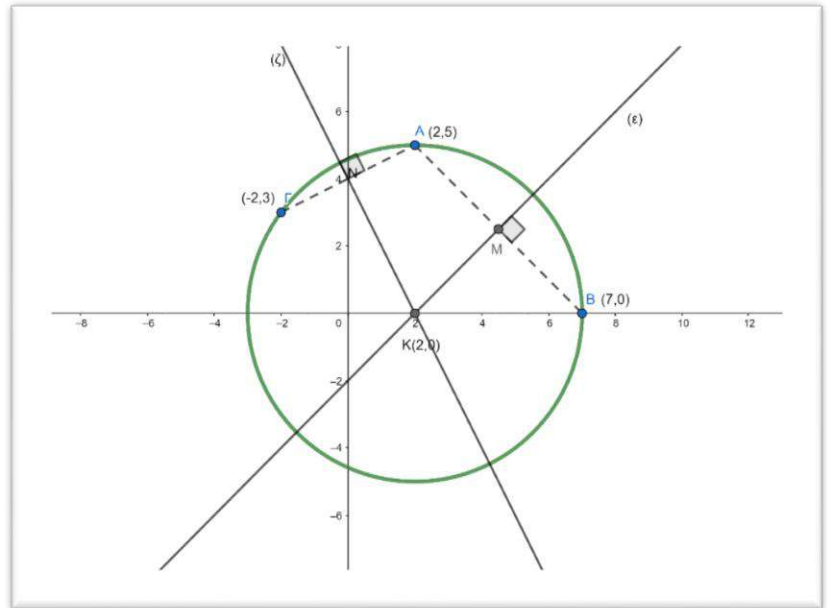
Επίσης $\lambda_{AB} = \frac{0-5}{7-2} = -1$ και επειδή

$$(\varepsilon) \perp (AB) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \text{ άρα η}$$

μεσοκάθετος (ε) του AB θα έχει
συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_\varepsilon = 1$ και η (ε)

διέρχεται από το $M\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ άρα: $(\varepsilon):$

$$y - \frac{5}{2} = 1\left(x - \frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - 2.$$



Ομοίως:

Έστω N το μέσο του AG , τότε $x_N = \frac{x_A + x_G}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0$ και $y_N = \frac{y_A + y_G}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$ άρα

$$N(0,4). \text{ Επίσης } \lambda_{AG} = \frac{5-3}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ και επειδή } (\zeta) \perp (AG) \Leftrightarrow \lambda_\zeta \cdot \lambda_{AG} = -1 \text{ άρα η μεσοκάθετος } (\zeta) \text{ του } AG$$

θα έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_\zeta = -2$ και η (ζ) διέρχεται από το $N(0,4)$ άρα: $(\zeta):$

$$y - 4 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 4. \text{ Άρα τελικά:}$$

$$\begin{cases} (\varepsilon): y = x - 2 \\ (\zeta): y = -2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ οπότε } K(2,0) \text{ και η ακτίνα του κύκλου θα είναι:}$$

$$\rho = (KA) = \sqrt{(2-2)^2 + (0-5)^2} = 5, \text{ άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:}$$

$$(c): (x-2)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25$$

5. Δίνονται τα σημεία $A(0,-1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(2,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

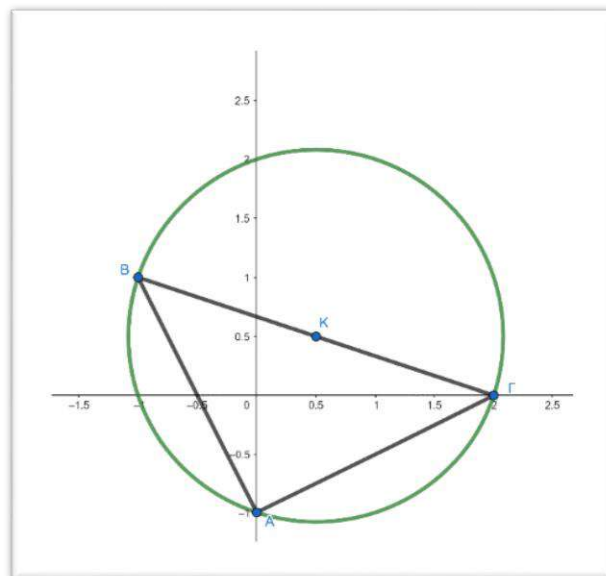
Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{1-(-1)}{-1-0} = -2$ και $\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2}$ $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$ άρα $A = 90^\circ$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A .

β) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου έχει διάμετρο την $B\Gamma$ αφού η γωνία A είναι ορθή, είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο του $B\Gamma$, άρα:

$$x_K = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \text{ και } y_K = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Για την ακτίνα ρ του κύκλου έχουμε:



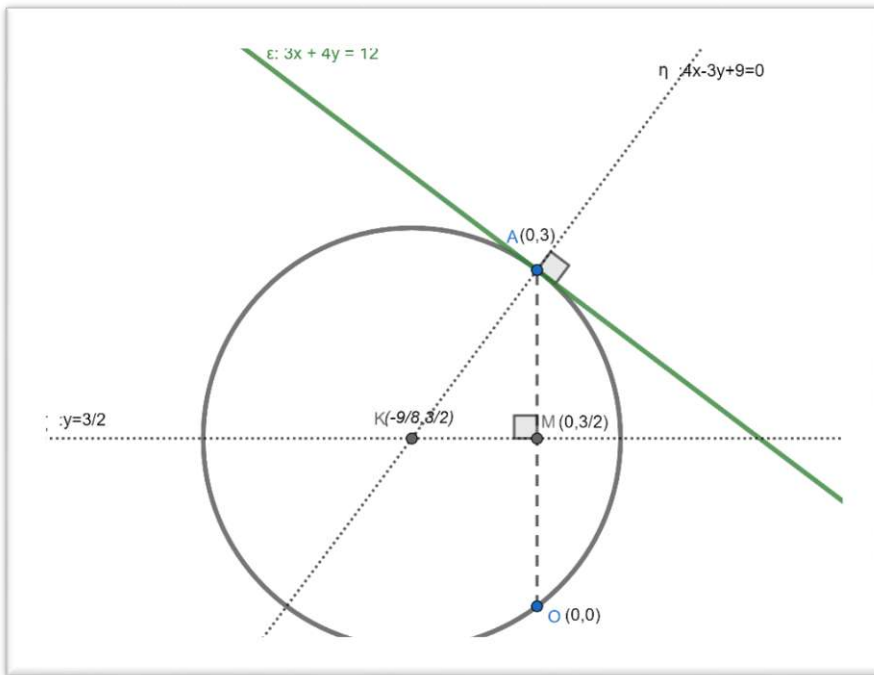
$$\rho = (KA) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}, \text{ άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και εφάπτεται της ευθείας $3x+4y=12$ στο σημείο $A(0,3)$

Λύση

Γνωρίζουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία, ότι η κάθετη ευθεία (η) στην εφαπτομένη (ϵ) ενός κύκλου στο σημείο επαφής $A(0,3)$ διέρχεται από το κέντρο του, οπότε το κέντρο K του κύκλου θα βρίσκεται στο σημείο τομής της μεσοκαθέτου (ζ) της AO και της και της ευθείας (η).



Έστω M το μέσο του ευθ τμήματος AO , τότε $x_M = \frac{x_A + x_O}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ και $y_M = \frac{y_A + y_O}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$,
 άρα $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Επίσης παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AO δεν ορίζεται άρα η
 μεσοκάθετος της (ζ) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_\zeta = 0$ και η ευθεία (ζ) θα έχει εξίσωση: (ζ): $y = \frac{3}{2}$
 . Επίσης:

$\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1$ όμως $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$ άρα $\lambda_\eta = \frac{4}{3}$ και η (η) διέρχεται από το $A(0,3)$ άρα:

(η): $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow 3y - 9 = 4x \Leftrightarrow 4x - 3y + 9 = 0$. Άρα τελικά:

$\begin{cases} (\zeta): y = \frac{3}{2} \\ (\eta): 4x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ άρα $K\left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2}\right)$. Και η ακτίνα του κύκλου είναι:

$\rho = (OK) = \sqrt{\left(-\frac{9}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \frac{15}{8}$ άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$(C): \left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2$$

7. Να βρείτε τι παριστάνουν οι εξισώσεις:

- i. $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 10 = 0$
- ii. $x^2 + y^2 + 5x - y + 2 = 0$
- iii. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

Λύση

i. Στην εξίσωση $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 10 = 0$ είναι $A = -3, B = 5, \Gamma = 10$

Άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-3)^2 + 5^2 - 4 \cdot 10 = 9 + 25 - 40 = -6 < 0$ άρα η εξίσωση παριστάνει κενό σύνολο.

ii. Στην εξίσωση $x^2 + y^2 + 5x - y + 2 = 0$ είναι $A = 5, B = -1, \Gamma = 2$

Άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 5^2 + (-1)^2 - 4 \cdot 2 = 25 + 1 - 8 = 18 > 0$

άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{5}{2}, -\frac{-1}{2}\right) = K\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

iii. Στην εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ είναι $A = -2, B = 6, \Gamma = 10$

Άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2)^2 + (6)^2 - 4 \cdot 10 = 4 + 36 - 40 = 0$ άρα η εξίσωση παριστάνει το σημείο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(\frac{2}{2}, -\frac{6}{2}\right) = K(1, -3)$$

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(8x-5)^2 + (8y+12)^2 = 192$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Λύση

$$(8x-5)^2 + (8y+12)^2 = 192 \Leftrightarrow 64x^2 - 80x + 25 + 64y^2 + 192y + 144 = 192 \Leftrightarrow$$

$$64x^2 + 64y^2 - 80x + 192y - 23 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{80}{64}x + \frac{192}{64}y - \frac{23}{64} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{8}x + \frac{24}{8}y - \frac{23}{64} = 0$$

$$\text{Είναι: } A = -\frac{10}{8}, B = \frac{24}{8}, \Gamma = -\frac{23}{64}. \text{ Άρα } A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left(-\frac{10}{8}\right)^2 + \left(\frac{24}{8}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{23}{64}\right) = \frac{768}{64} = 12 > 0$$

άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(\frac{10}{16}, -\frac{24}{16}\right) = K\left(\frac{5}{8}, -\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $K(0,0)$

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 5$ σε καθεμία από τις

παρακάτω περιπτώσεις:

- i. Στο σημείο του $A(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$
- ii. Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = 2x + 3$
- iii. Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): y = \frac{1}{2}x$
- iv. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$

Λύση

- i. Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ είναι σημείο που ανήκει στον κύκλο, αφού

$$x^2 + y^2 = \sqrt{3}^2 + (-\sqrt{2})^2 = 3 + 2 = 5, \text{ επομένως αφού ο κύκλος έχει κέντρο } K(0,0) \text{ και}$$

ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$, η εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο $A(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ θα είναι η

$$\text{ευθεία } (\varepsilon): x \cdot x_1 + y y_1 = \rho^2 \xrightarrow[\rho=\sqrt{5}]{\substack{x_1=\sqrt{3} \\ y_1=-\sqrt{2}}} x \cdot \sqrt{3} + y \cdot (-\sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 \Rightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 5$$

ii. Α ΤΡΟΠΟΣ

Ομοίως, στον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ είναι κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση: $(\varepsilon) // (\zeta): y = 2x + 3 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει την μορφή:

$(\varepsilon): y = 2x + \beta \Leftrightarrow 2x - y + \beta = 0$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα, δηλαδή:

$$d(0, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + \beta|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \text{ ή } \beta = -5, \text{ άρα:}$$

Αν $\beta = 5$ τότε: $(\varepsilon_1): 2x - y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 5$.

Αν $\beta = -5$ τότε: $(\varepsilon_2): 2x - y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Αν $A(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A θα έχει εξίσωση $(\varepsilon): x \cdot x_1 + y y_1 = \rho^2 \Rightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 5$ και επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία

$y = 2x + 3$, θα ισχύει: $-\frac{x_1}{y_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = -2 \cdot y_1$. Επειδή το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του

κύκλου C θα ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 = 5$. Επομένως, το σημείο $A(x_1, y_1)$ προσδιορίζεται

$$\text{από τη λύση του συστήματος: } \begin{cases} x_1 = -2 \cdot y_1 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \cdot y_1 \\ (-2 \cdot y_1)^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \cdot y_1 \\ 4y_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \cdot y_1 \\ y_1^2 = 1 \end{cases}$$

$$y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_1 = -1.$$

Αν $y_1 = 1$, τότε $x_1 = -2$ και αν $y_1 = -1$, τότε $x_1 = 2$. Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $A(-2, 1)$ και $B(2, -1)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι: $(\varepsilon_1): -2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 2x + 5$ και

$$(\varepsilon_2): 2x - y = 5 \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

iii.

Α ΤΡΟΠΟΣ

Στον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ είναι : κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση: $(\varepsilon) \perp (\zeta): y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$ όμως $\lambda_\zeta = \frac{1}{2}$ άρα $\lambda_\varepsilon = -2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής: $(\varepsilon): y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα, δηλ.

$$d(0, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \text{ ή } \beta = -5$$

Άρα:

Αν $\beta = 5$ τότε: $(\varepsilon_1): 2x + y + 5 = 0$.

Αν $\beta = -5$ τότε: $(\varepsilon_2): 2x + y - 5 = 0$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Αν $A(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A θα έχει εξίσωση $(\varepsilon): x \cdot x_1 + y y_1 = \rho^2 \Rightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 5$ και επειδή είναι κάθετη στην ευθεία

$y = \frac{1}{2}x$, θα ισχύει: $-\frac{x_1}{y_1} = -2 \Leftrightarrow x_1 = 2 \cdot y_1$. Επειδή το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του

κύκλου C θα ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 = 5$. Επομένως, το σημείο $A(x_1, y_1)$ προσδιορίζεται

από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} x_1 = 2 \cdot y_1 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot y_1 \\ (2 \cdot y_1)^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot y_1 \\ 4y_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot y_1 \\ y_1^2 = 1 \end{cases}$

$y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_1 = -1$.

Αν $y_1 = 1$, τότε $x_1 = 2$ και αν $y_1 = -1$, τότε $x_1 = -2$. Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $A(2, 1)$

και $B(-2, -1)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι: $(\varepsilon_1): 2x + y = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$ και

$(\varepsilon_2): -2x - y = 5 \Leftrightarrow y = -2x - 5$

iv.

Α ΤΡΟΠΟΣ

Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(5,0)$ είναι σημείο εκτός του κύκλου C , γιατί:

$$(OA) = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5 > \sqrt{5} = \rho$$

Από το εξωτερικό σημείο A του κύκλου διέρχονται οι ευθείες της μορφής:

$(\varepsilon): y - 0 = \lambda \cdot (x - 5) \Leftrightarrow y = \lambda \cdot x - 5 \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda \cdot x - y - 5 \cdot \lambda = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\eta): x = 5$

Α) Εξετάζουμε αν η ευθεία $(\eta): x = 5 \Leftrightarrow 1 \cdot x + 0 \cdot y - 5 = 0$ είναι εφαπτόμενη του C , υπολογίζοντας την

$$d(O, \eta) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 5 \neq \sqrt{5} = \rho, \text{ άρα η ευθεία } (\eta): x = 5 \text{ που διέρχεται από το } A(5,0) \text{ δεν είναι}$$

εφαπτομένη του C

Β) Θα βρούμε τώρα ποια από τις (άπειρες) ευθείες της μορφής $\lambda \cdot x - y - 5 \cdot \lambda = 0$, είναι εφαπτόμενες του C.

Για να γίνει αυτό απαιτούμε να ισχύει: $d(O, \varepsilon) = \rho = \sqrt{5}$, Οπότε έχουμε:

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5|\lambda| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$25\lambda^2 = 5(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 5\lambda^2 + 5 \Leftrightarrow 20\lambda^2 = 5 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{2} \text{ έχουμε: } (\varepsilon_1): \frac{1}{2}x - y - 5 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$$

$$\text{Για } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ έχω: } (\varepsilon_2): -\frac{1}{2}x - y + 5 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -x - 2y + 5 = 0$$

Αρα από το εξωτερικό σημείο A(5,0) του κύκλου διέρχονται δύο ευθείες που είναι εφαπτόμενες στον C.

Β ΤΡΟΠΟΣ

Αν $M(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M θα έχει εξίσωση $(\varepsilon): x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2 \Rightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 5$ και επειδή διέρχεται από το σημείο A(5,0) θα είναι για $x=5$ και $y=0$: $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 5 \Rightarrow 5 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$. Επειδή το σημείο

$M(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 5$ τότε θα ισχύει:

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \Rightarrow 1^2 + y_1^2 = 5 \Rightarrow y_1^2 = 4 \Rightarrow y_1 = \pm 2. \text{ Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα}$$

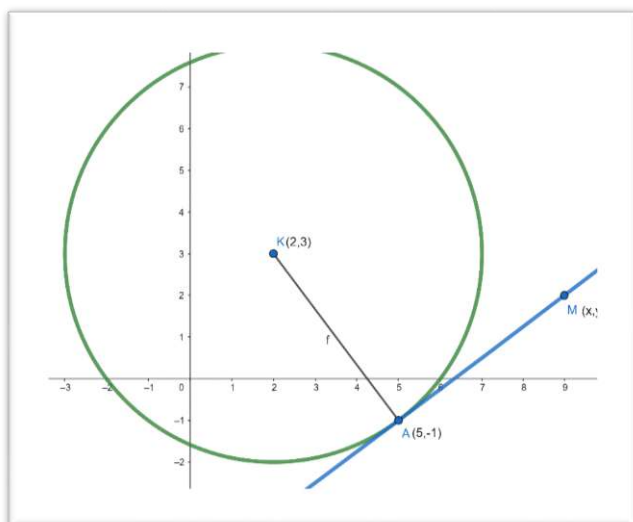
$M_1(1, 2)$ και $M_2(1, -2)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι

$$(\varepsilon_2): x + 2y = 5 \text{ και } (\varepsilon_1): x - 2y = 5.$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΤΟΥ Κ(0,0)

10. Δίνεται ο κύκλος (C): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ και το σημείο του A(5,-1). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο A.

Λύση



Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho=5$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(3,-5)$ είναι σημείο του κύκλου C , γιατί:

$$(KA) = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5 = \rho$$

Ονομάζουμε (ε) την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο επαφής $A(5,-1)$ και έστω ένα τυχαίο σημείο $M(x,y)$ που ανήκει στην (ε) . Τότε ισχύει: $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ (1). Όμως

$$\overrightarrow{KA} = (5-2, -1-3) = (3, -4) \text{ και } \overrightarrow{AM} = (x-5, y+1) \text{ άρα η (1) γίνεται}$$

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 3(x-5) + (-4)(y+1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 15 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 19 = 0$$

Δηλαδή η εφαπτομένη είναι η ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4y - 19 = 0$.

11. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$ και το σημείο $A(3, -5)$. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που φέρνουμε από το A προς τον κύκλο

Λύση

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(5, -1)$ και ακτίνα :

$$\rho = \frac{\sqrt{100 + 4 - 64}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(3, -5)$ είναι σημείο εκτός του κύκλου C , γιατί:

$$(KA) = \sqrt{(3-5)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{20} > \sqrt{10} = \rho$$

Οι ευθείες που διέρχονται από το $A(3, -5)$

$$\text{είναι της μορφής } \begin{cases} (\varepsilon_1): y + 5 = \lambda(x - 3) \\ (\varepsilon_2): x = 3 \end{cases}$$

- Επειδή $d(K, \varepsilon_2) = 2 \neq \sqrt{10} = \rho$ η (ε_2) δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου.
- $(\varepsilon_1): y + 5 = \lambda(x + 3) \Leftrightarrow y + 5 = \lambda x + 3\lambda \Leftrightarrow \lambda x - y - 3\lambda - 5 = 0$ (1) Για να είναι η (ε_1)

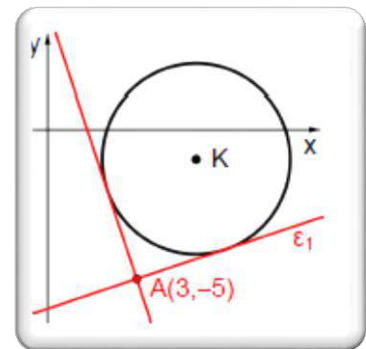
εφαπτομένη στον κύκλο απαιτούμε να ισχύει: $d(K, \varepsilon_1) = \rho \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 5 - (-1) - 3\lambda - 5|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |2\lambda - 4|^2 = (\sqrt{10} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 10(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 10\lambda^2 + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda^2 + 16\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 8\lambda - 3 = 0 (\Delta=0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3} \text{ και } \lambda_2 = -3$$

Οπότε από την (1) έχουμε $(\varepsilon_1): \frac{1}{3}x - y - 6 = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 18 = 0$ και $(\varepsilon_2): -3x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 4 = 0$



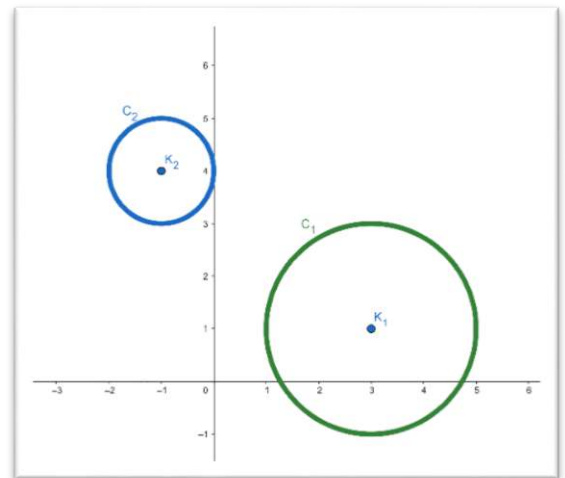
ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

12. Να βρεθεί η σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $C_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ και $C_2 : (x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$
- ii. $C_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ και $C_2 : \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$
- iii. $C_1 : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$ και $C_2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Λύση

- i. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(3,1)$ και ακτίνα $\rho_1=2$
 Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2(-1,4)$ και ακτίνα $\rho_2=1$
 Ισχύει ότι :
 $(K_1K_2) = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$
 Επίσης $\rho_1 + \rho_2 = 2 + 1 = 3$
 Επειδή $(K_1K_2) > \rho_1 + \rho_2$ οι δυο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



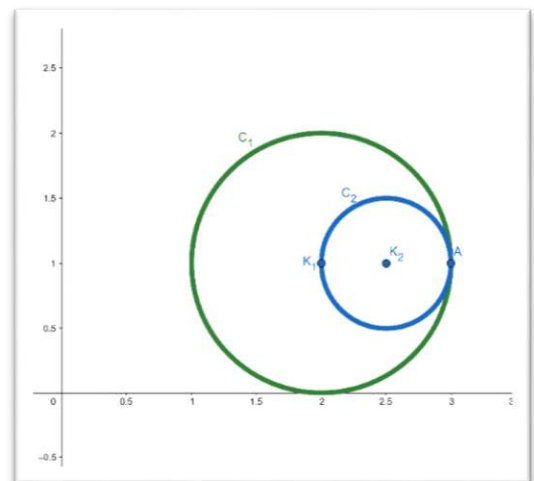
- ii. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(2,1)$ και ακτίνα $\rho_1=1$. Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ και ακτίνα $\rho_2 = \frac{1}{2}$

$$\text{Ισχύει ότι : } (K_1K_2) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

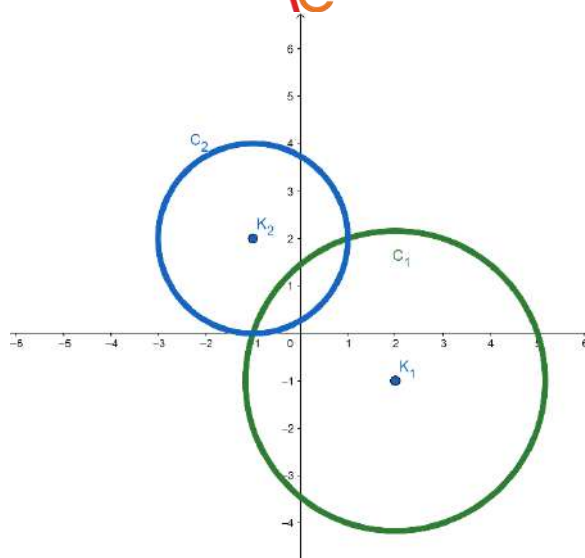
$$\text{Παρατηρούμε ότι } \rho_1 - \rho_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Δηλαδή } (K_1K_2) = \rho_1 - \rho_2$$

Άρα οι δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



- iii. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(2, -1)$ και
ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{10}$
Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2(-1, 2)$ και
ακτίνα $\rho_2 = 2$



Ισχύει ότι :

$$(K_1K_2) = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$

$$\text{Επίσης } \rho_1 + \rho_2 = \sqrt{10} + 2 \approx 5,16 \text{ και } \rho_1 - \rho_2 = \sqrt{10} - 2 \approx 3,16$$

Επειδή $\rho_1 - \rho_2 < (K_1K_2) < \rho_1 + \rho_2$, οι δυο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (5\lambda - 1)x + 3\lambda y + 2(\lambda - 1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
- Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων

Λύση

i. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 + (5\lambda - 1)x + 3\lambda y + 2(\lambda - 1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει :

$$A = 5\lambda - 1, B = 3\lambda, \Gamma = 2(\lambda - 1) \text{ . Είναι:}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (5\lambda - 1)^2 + (3\lambda)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\lambda - 1) = 25\lambda^2 - 10\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 8\lambda + 8 = 34\lambda^2 - 18\lambda + 9 \text{ .}$$

Η παράσταση αυτή είναι τριώνυμο της οποίας η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 34 \cdot 9 = 324 - 1224 = -900 < 0 \text{ , Οπότε το τριώνυμο θα παίρνει τιμές ομόσημες του } a = 34 > 0 \text{ ,}$$

άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 34\lambda^2 - 18\lambda + 9 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ δηλαδή η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο

για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K\left(-\frac{5\lambda - 1}{2}, -\frac{3\lambda}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{34\lambda^2 - 18\lambda + 9}}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

ii. Για να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων $K\left(-\frac{5\lambda-1}{2}, -\frac{3\lambda}{2}\right)$, θέτουμε

$x = -\frac{5\lambda-1}{2}$ και $y = -\frac{3\lambda}{2}$, οπότε κάνοντας απαλοιφή του λ παίρνουμε: $6x - 10y - 3 = 0$, που είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 3\lambda y + 25 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων.

Λύση

i. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 3\lambda y + 25 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει: $A = -4\lambda, B = 3\lambda, \Gamma = 25$. Είναι

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4\lambda)^2 + (3\lambda)^2 - 4 \cdot 25 = 16\lambda^2 + 9\lambda^2 - 100 = 25\lambda^2 - 100$. Η εξίσωση που δίνεται παριστάνει κύκλο, αν και μόνο αν

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 100 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2,$$

Άρα για κάθε $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K\left(2\lambda, -\frac{3\lambda}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{25\lambda^2 - 100}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4}$$

ii. Για να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων $K\left(2\lambda, -\frac{3\lambda}{2}\right)$, θέτουμε

$$x = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{2} \text{ (1) και } y = -\frac{3\lambda}{2}, \text{ οπότε κάνοντας απαλοιφή του } \lambda \text{ παίρνουμε:}$$

$$x = -\frac{4y}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x.$$

Αφού όμως $\lambda < -2$ ή $\lambda > 2$, θα πρέπει και λόγω της (1) $\frac{x}{2} < -2$ ή $\frac{x}{2} > 2 \Leftrightarrow x < -4$ ή $x > 4$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος θα είναι η ευθεία (ε): $y = -\frac{3}{4}x$, εκτός από το ευθύγραμμο τμήμα AB, όπου $A(-4, 3)$ και $B(4, -3)$

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2y + 4\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1). Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (1)

παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq \frac{1}{2}$, ο οποίος διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

Λύση

Η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2y + 4\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει: $A = -4\lambda, B = 2, \Gamma = 4\lambda$. Είναι

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4\lambda)^2 + 2^2 - 4 \cdot 4\lambda = 16\lambda^2 + 4 - 16\lambda = 4(2\lambda - 1)^2$. Η εξίσωση που δίνεται παριστάνει κύκλο,

αν και μόνο αν $4(2\lambda - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$. Θα δείξουμε τώρα

ότι όλοι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) με $\lambda \neq \frac{1}{2}$ διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και θα βρούμε.

Α τρόπος

Μετατρέπουμε την αρχική εξίσωση σε πολυώνυμο ως προς παράμετρο λ .

$$x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2y + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow (4 - 4\lambda)\lambda + x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

Επειδή πρέπει να ισχύει η σχέση αυτή να αληθεύει για κάθε

$\lambda \neq \frac{1}{2}$, θα πρέπει η παραπάνω σχέση να είναι το μηδενικό

πολυώνυμο ως προς λ , δηλαδή θα πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι με το 0. Απαιτούμε τότε:

$$\begin{cases} 4 - 4\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Οπότε οι κύκλοι (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο $T(1, -1)$

Β τρόπος

Για $\lambda=0$ και $\lambda=1$ έχουμε τους αντίστοιχους κύκλους: $(C_1): x^2 + y^2 + 2y = 0$ και

$(C_2): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$, οι οποίοι τέμνονται σε σημεία των οποίων οι συντεταγμένες

προκύπτουν λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων. Πράγματι:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Αρα $T(1, -1)$.

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $T(1, -1)$ επαληθεύουν την εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \neq \frac{1}{2}$,

αφού $1^2 + (-1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot \lambda = 0$ δηλαδή η εξίσωση αυτή είναι αόριστη ως προς λ .

ΧΟΡΔΗ ΚΥΚΛΟΥ

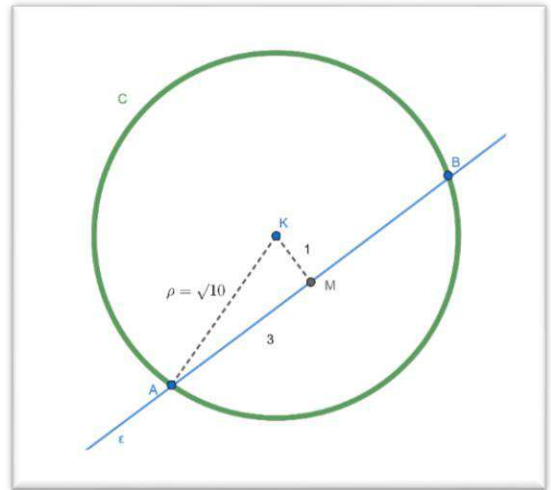
16. Να βρεθεί εξίσωση κύκλου, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(1, 3)$ και ορίζει πάνω στην ευθεία $\varepsilon: -3x + 4y - 4 = 0$ χορδή AB μήκους 6.

Λύση

Γνωρίζουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία ότι η προβολή M του K στην ευθεία (ε) , θα είναι το μέσον της χορδής AB , οπότε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AM θα είναι ίσο με 3. Επίσης

$$(KM) = d(K, \varepsilon) = \frac{|-3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = 1. \text{ Από το ορθογώνιο τρίγωνο } AMK \text{ που σχηματίζεται εφαρμόζοντας}$$

το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:



$$(AK)^2 = (AM)^2 + (KM)^2 \Rightarrow \rho^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow \rho^2 = 10 \Rightarrow \rho = \sqrt{10} \text{ Άρα η εξίσωση κύκλου θα είναι :}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$$

17. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = 4$ η οποία έχει μέσο το σημείο $M(1, -1)$.

Λύση

Έστω (ε) η ζητούμενη χορδή και έστω $N(x, y) \in (\varepsilon)$ τότε θα

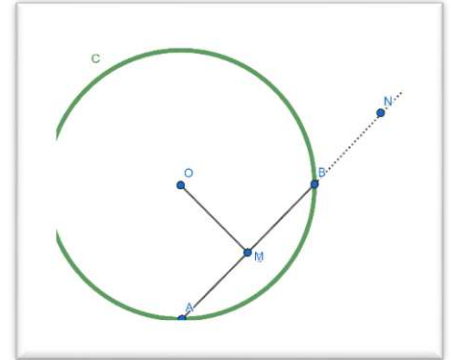
ισχύει: $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, (1)$. Όμως

$$\overrightarrow{OM} = (1-0, -1-0) = (1, -1) \text{ και } \overrightarrow{MN} = (x-1, y+1) \text{ άρα η (1)}$$

$$\text{γίνεται: } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow (x-1) + (-1)(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1-y-1=0 \Leftrightarrow x-y-2=0$$

Δηλαδή η ζητούμενη χορδή είναι η ευθεία $(\varepsilon): x-y-2=0$



ΚΟΙΝΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΚΥΚΛΩΝ

18. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων

$$C_1: x^2 + y^2 = 9 \quad \text{και} \quad C_2: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

Λύση

Α ΤΡΟΠΟΣ

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο το σημείο $K(1,-3)$,

Έστω (ε) η κοινή τους εφαπτόμενη και $M(x_1, y_1)$ το

σημείο επαφής του κύκλου C_1 με την ευθεία (ε) .

Το M είναι σημείο του C_1 άρα ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 = 9$

Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο

M θα έχει μορφή $xx_1 + yy_1 = 9$

Για να είναι η ευθεία $(\varepsilon): xx_1 + yy_1 = 9$ εξίσωση

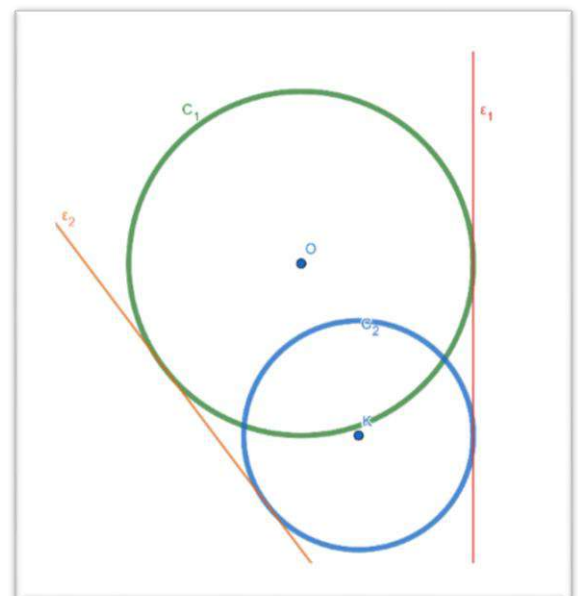
εφαπτομένης και του κύκλου C_2 θα πρέπει η απόσταση

της ευθείας (ε) από το κέντρο K του κύκλου C_2 να

είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου C_2 . Δηλαδή ισχύει

ότι: $d(K, \varepsilon) = r_2 \Leftrightarrow$

$$\frac{|x_1 - 3y_1 - 9|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|x_1 - 3y_1 - 9|}{\sqrt{9}} = 2 \Leftrightarrow |x_1 - 3y_1 - 9| = 6 \Leftrightarrow x_1 - 3y_1 - 9 = 6 \text{ ή } x_1 - 3y_1 - 9 = -6$$



$$x_1 - 3y_1 = 15 \text{ ή } x_1 - 3y_1 = 3$$

Λύνουμε τα συστήματα:

$$\begin{cases} x_1 - 3y_1 = 15 \\ x_1^2 + y_1^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 + 15 \\ (3y_1 + 15)^2 + y_1^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 + 15 \\ \text{Αδύνατη} \end{cases} . \text{ Άρα το σύστημα είναι αδύνατο}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3y_1 = 3 \\ x_1^2 + y_1^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 + 3 \\ (3y_1 + 3)^2 + y_1^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 + 3 \\ y_1 = 0 \text{ ή } y_1 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

Για $y_1=0$ έχουμε $x_1=3$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 9 \Rightarrow x \cdot 3 + y \cdot 0 = 9 \Rightarrow x = 3$

Για $y_1 = -\frac{9}{5}$ έχουμε $x_1 = -\frac{12}{5}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 9 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + y \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = 9 \Rightarrow -12x - 9y = 45 \Rightarrow 12x + 9y = -45 \Rightarrow 4x + 3y = -15 \text{ Άρα οι}$$

ευθείες θα έχουν μορφή: $\varepsilon_1: x=3$ και $\varepsilon_2: 4x + 3y = -15$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Ο C_1 σύμφωνα με την παρατήρηση θα έχει κατακόρυφες εφαπτόμενες τις ευθείες με εξισώσεις:

$x=0+3=3$ και $x=0-3=-3$. Ο C_2 που έχει κέντρο το σημείο $K(1,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$, θα έχει κατακόρυφες εφαπτόμενες τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1+2=3$ και $x=1-2=-1$. Άρα οι δύο κύκλοι έχουν κοινή εφαπτόμενη την ευθεία με εξίσωση: $\varepsilon_1: x=3$.

Αναζητούμε τώρα ευθείες της μορφής $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \lambda x+\beta-y=0$ που να είναι κοινή εφαπτομένη των δυο κύκλων. Τότε απαιτούμε:

$$\begin{cases} d(O, \varepsilon) = 3 \\ d(K, \varepsilon) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 3 \\ \frac{|\lambda \cdot 1 - (-3) + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} = |\beta| \\ 2 \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} = |\lambda + 3 + \beta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{4}{3} \\ \beta = -5 \end{cases} . \text{ Άρα η ευθεία θα έχει}$$

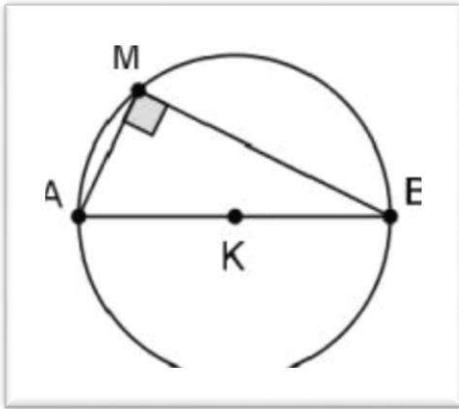
$$\text{εξίσωση: } \varepsilon_2: -\frac{4}{3}x - 5 - y = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 15 = 0$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

19. Δίνονται τα σημεία $A(1,4)$ και $B(-3,2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $\angle AMB = 90^\circ$.

Λύση

Επειδή η γωνία AMB είναι ορθή, είναι εγγεγραμμένη σε ημικόκλιο με διάμετρο το τμήμα AB . Το κέντρο K του κύκλου αυτού είναι το μέσο του AB , οπότε:



$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1 \text{ και } y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \text{ άρα}$$

$$K(-1, 3).$$

$$\text{Η ακτίνα του κύκλου είναι: } \rho = (AK) = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{και η εξίσωσή του είναι: } C: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

20. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M των οποίων το τετράγωνο των αποστάσεων από το σημείο $A(3, -1)$ είναι ίσο με την απόστασή τους από την ευθεία $(\varepsilon): 4x + 3y - 7 = 0$

Λύση

Έστω $M(x, y)$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$(AM)^2 = d(M, \varepsilon) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = \frac{|4x+3y-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = \frac{|4x+3y-7|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 50 = 4x + 3y - 7 \\ \text{ή} \\ 5x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 50 = -4x - 3y + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 34x + 7y + 57 = 0 \\ \text{ή} \\ 5x^2 + 5y^2 - 26x + 13y + 43 = 0 \end{cases}$$

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε :

$$5x^2 + 5y^2 - 34x + 7y + 57 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{34}{5}x + \frac{7}{5}y + \frac{57}{5} = 0, \text{ όπου}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left(-\frac{34}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{57}{5} = \frac{1156 + 49 - 1140}{25} = \frac{65}{25} > 0, \text{ δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο}$$

$$K\left(\frac{17}{5}, -\frac{7}{10}\right) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{65}}{5} = \frac{\sqrt{65}}{10}$$

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε :

$$5x^2 + 5y^2 - 26x + 13y + 43 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{26}{5}x + \frac{13}{5}y + \frac{43}{5} = 0, \text{ όπου}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left(-\frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{43}{5} = \frac{676 + 169 - 860}{25} = -\frac{15}{25} < 0, \text{ δηλαδή δεν παριστάνει κύκλο. Τελικά ο}$$

$$\gamma.\tau \text{ του } M \text{ είναι ο κύκλος } x^2 + y^2 - \frac{34}{5}x + \frac{7}{5}y + \frac{57}{5} = 0$$

21. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $x = 1$

Λύση:

Έστω $M(x, y)$ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο που ψάχνω και $(\varepsilon): x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ τότε θα ισχύει:

$$(OM)^2 = 4d(M, \varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}^2 = 4 \cdot \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4|x-1| \quad (1).$$

- Αν $x \geq 1$ τότε (1): $x^2 + y^2 = 4(x-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$

$A = -4, B = 0, \Gamma = 4$ έχω: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 - 16 = 0$ άρα η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$ παριστάνει το

σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K(2, 0)$

- Αν $x < 1$ τότε (1): $x^2 + y^2 = -4(x-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$

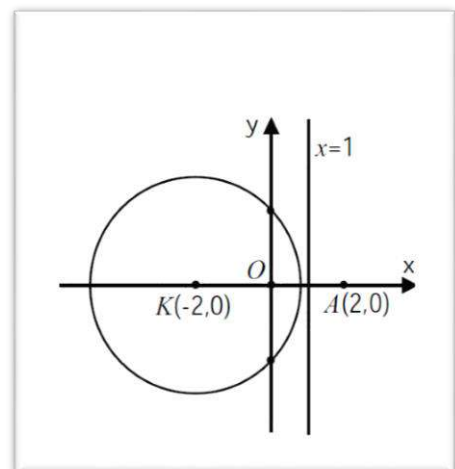
$A = 4, B = 0, \Gamma = -4$ έχω: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 16 = 32$ άρα η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο:

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K(-2, 0)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Τελικά ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σημείο $A(2, 0)$ και ο κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$

και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.



22. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών

του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο $A(2, 4)$

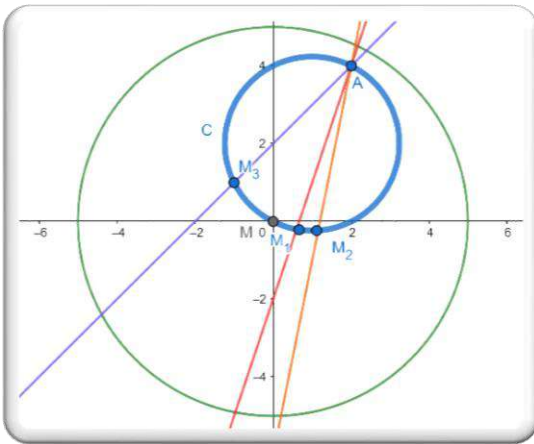
Λύση

Έστω $M(x, y)$ σημείο που ανήκει στον γεωμετρικό τόπο που ψάχνω, δηλαδή είναι μέσο χορδής κύκλου που

διέρχεται από το σημείο A , τότε θα ισχύει: $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, (1). Όμως

$\overrightarrow{OM} = (x-0, y-0) = (x, y)$ και $\overrightarrow{MA} = (2-x, 4-y)$ άρα η (1) γίνεται

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow x(2-x) + y(4-y) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 + 4y - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$



Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος C με

κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K(1, 2)$ και ακτίνα:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο σχήμα βλέπουμε χορδές που διέρχονται από το $A(2,4)$ και τα μέσα τους που είναι τα M_1, M_2, M_3 κτλ κινούνται στον κύκλο με $K(1, 2)$ και $\rho = \sqrt{5}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΚΛΟΥ

1. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$

- i. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου.
- ii. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $M(3,0)$, $N(0,-4)$, $\Pi(1,1)$ είναι σημεία του κύκλου.
- iii. Να εξετάσετε αν το σημείο $O(0,0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου

2. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων με εξισώσεις:

i. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

ii. $x^2 + (y-1)^2 = 1$

iii. $(x+3)^2 + y^2 = 5$

3. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

- α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$
- β) έχει κέντρο το σημείο $(3,-1)$ και ακτίνα 5
- γ) έχει κέντρο το σημείο $(-2,1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2,3)$
- δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1,3)$ και $B(-3,5)$
- ε) διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$, $(1,2)$ και $(-2,-1)$
- στ) διέρχεται από τα σημεία $(3,1)$, $(-1,3)$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $y=3x-2$
- ζ) έχει κέντρο το σημείο $(8,-6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x+y=10$
- θ) έχει $R=4$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το $A(5,4)$
- ι) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 2)$ εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(-6,2)$
- ια) έχει κέντρο το σημείο $(3,3)$ και εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$
- ιβ) έχει κέντρο το σημείο $(-3,1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x-3y+5=0$

4. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου αν γνωρίζουμε ότι :

- i) έχει κέντρο το $(2, 6)$ και περνάει από την αρχή των αξόνων.
- ii) περνάει από τα σημεία $A(2, 0)$, $O(0, 0)$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $2x - 3y = 0$.
- iii) περνάει από τα σημεία $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ και έχει ακτίνα 1.
- iv) περνάει από τα σημεία $A(2, -1)$, $B(-2, -3)$, $\Gamma(-1, 4)$
- v) περνάει από το σημείο $A(2, 2)$ και εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $B(5, 0)$.
- vi) έχει κέντρο το $K(1, 2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $2x + y - 6 = 0$.
- vii) περνάει από το σημείο $A(1, 3)$ και εφάπτεται στις ευθείες :

$$(\epsilon_1) : 2x - 3y - 1 = 0 \text{ και } (\epsilon_2) : 2x - 3y + 3 = 0 .$$

viii) εφάπτεται της ευθείας $3x - 4y - 4 = 0$ στο σημείο $A(0, -1)$ και περνάει από το σημείο $B(-1, -8)$.

ix) εφάπτεται στους άξονες και στην ευθεία $3x + 4y - 12 = 0$

x) έχει κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και η ευθεία $x - 3y + 6 = 0$ ορίζει σ'αυτόν χορδή AB μήκους 4 .

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από το σημείο $(1,0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x+y+6=0$ και $3x+y+2=0$

6. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\epsilon: 2x+y+1=0$ και διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(3,-1)$

7. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$

α) να αποδείξετε ότι $\angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$

β) να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ

8. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$ και ορίζει με την ευθεία $x-y=0$ τμήμα που το μήκος του είναι 2 μονάδες. Πόσες λύσεις έχει το πρόβλημα;

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΚΛΟΥ

9. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους . Αν ναι , να βρεθούν τα στοιχεία τους .

i) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$.

ii) $3x^2 + 3y^2 + 5x - 3y - 6 = 0$.

iii) $x^2 + y^2 - \alpha x - 2\beta y + \alpha\beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 2\beta$.

iv) $x^2 + y^2 + x \sin \alpha + y \eta \mu \alpha + \frac{1}{2} \eta \mu^2 \alpha = 0$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

v) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + 18 = 0$

vi) $4x^2 + (2y+3)^2 = 8$

10. Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0$ όπου α πραγματικός αριθμός

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό α .

ii. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2

iii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

11. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\kappa(x^2 + 3y^2) + (y - 3x + 1)(y + 3x + 2) = 0$ να παριστάνει κύκλο και έπειτα να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

ΔΙΕΛΕΥΣΗ ΚΥΚΛΩΝ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ

- 12.** Εστω η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y = 0$ (1) παριστάνει κύκλο.
- α) Να βρείτε τις τιμές του λ .
 - β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.
 - γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) με $\lambda \in \mathbb{R}^*$ διέρχονται από σταθερό σημείο.
 - δ) Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία $y = 3x - 2$ και η γωνία ΑΟΒ είναι ορθή, να βρείτε το λ .
- 13.** Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 + 2x - y - 3 + \lambda(x + y - 2) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$
- i. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C περνάει από δύο σταθερά σημεία.
 - iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.
- 14.** Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + 2y + 1 + 2\lambda(x - y - 1) = 0$ Να αποδείξετε ότι:
- i. Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο C για κάθε $\lambda \neq 0$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 - ii. Ο κύκλος C διέρχεται από σταθερό σημείο Σ καθώς το λ μεταβάλλεται στο
 - iii. Το κέντρο του κύκλου C κινείται σε μια ευθεία καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$.
 - iv. Ο κύκλος C εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 1 = 0$ στο σημείο Σ για κάθε $\lambda \neq 0$.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

- 15.** Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία:
- α) να τέμνει τον κύκλο
 - β) να εφάπτεται του κύκλου
 - γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο
- 16.** Να βρεθεί η σχετική θέση του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ και της ευθείας $y = x + t$ για τις διάφορες τιμές του $t \in \mathbb{R}$.
- 17.** Να βρεθούν οι τιμές του $t \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $2x - y + \sqrt{5}t = 0$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.
- 18.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$
- 19.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ οι οποίες γράφονται από το σημείο $(0, 6)$

20. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) :

- i) του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που περνάει από το σημείο $A(-4, 0)$
- ii) του κύκλου $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ στο σημείο $A(1, 0)$
- iii) του κύκλου $(x-1)^2 + y^2 = 4$ που περνάει από το σημείο $A(3,3)$
- iv) του κύκλου $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20$ που είναι παράλληλη με την ευθεία
(ε₁) : $2x + y - 7 = 0$
- v) του κύκλου $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$ που είναι κάθετη στην ευθεία
(ε₁) : $2x + y - 5 = 0$

21. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $y=x$ και είναι

ομόκεντρος με τον κύκλο $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

22. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (y-1)^2 - \mu(x-y) = 1 + 2\mu$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του μ η (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Να βρείτε τον κύκλο εκείνο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στον xx' .
- γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

24. Δίνεται μια γραμμή : $x^2 - 2kx + y^2 + 2ly = 0$ με k, l θετικοί αριθμοί.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραμμή είναι εξίσωση κύκλου και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- β) Δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: kx + 2kl = ly$ δεν τέμνει τον παραπάνω κύκλο.
- γ) Αν το τρίγωνο που σχηματίζει με τους άξονες η ευθεία ε είναι ισοσκελές δείξτε ότι το κέντρο του κύκλου είναι σημείο της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ-ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

25. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά

26. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

- α) να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο
- β) να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου
- γ) από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B) όπου τα A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2 να βρεθεί αυτό για το οποίο τα A, B απέχουν τη μικρότερη απόσταση
- δ) να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) το σημείο Γ ανήκει στον C_1 και το σημείο Δ ανήκει στον C_2 με τη μεγαλύτερη απόσταση

27. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κύκλων που εφάπτονται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$ στο $M(3,4)$ και έχουν ακτίνα 10.

28. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κύκλων :

i) $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

ii) $C_1 : x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$.

29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ , με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$.

β) Εστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

30. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + (\lambda - 2\mu)y^2 = \lambda$, που διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$

α) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ .

β) Για $\lambda = 5$ και $\mu = 2$

i) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη του κύκλου C στο A εφάπτεται στον κύκλο

$$C': x^2 + y^2 - 2(x - 1)\sqrt{5} - 1 = 0.$$

ii) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C και C' τέμνονται και να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτόμενη.

31. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $K(2, -1)$ και $A(-6, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο K που διέρχεται από το A , έχει εξίσωση

$$C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 100$$

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο A και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C .

32. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι: $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 + y^2 - 2x = 0$

εφάπτονται εσωτερικά.

33. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: 2x^2 + 2y^2 + 5x - y + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$

i. Να βρεθούν τα κέντρα K, Λ και οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα των κύκλων C_1 και C_2 καθώς και το διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda}$.

ii. Δείξτε ότι οι δύο κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά. Ποιο είναι το σημείο επαφής τους;

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

iv. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $A(1, 0)$ και εφάπτεται της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης $\varepsilon: x - y + 3 = 0$

34. Ένας κύκλος C εφάπτεται στον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ και

στο σημείο του $B(0, 5)$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 7)$. Αν $M(a, \beta)$ είναι το κέντρο του

κύκλου C τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι $\beta = 3\alpha + 5$
- ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 7$
- iii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

35. Θεωρούμε ένα πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.
- ii. Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από το ίδιο σημείο A (που είναι η φωλιά τους) του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες
- iii. Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x+y-1=0$ στο σημείο A.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

36. ι) Δίνονται τα σημεία A(-3,0) και B(3,0). Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του επιπέδου M(x,y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$

ii) Δίνονται τα σημεία A(2, 0) και B(0, 2). Να βρεθεί το σύνολο των σημείων

M(x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\alpha) \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 36 \quad \beta) \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BA}) = 16$$

iii) Δίνονται τα σημεία A(3, 0) και B(0, 3). Να βρεθεί το σύνολο των σημείων

M(x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA}|^2 + 2|\overrightarrow{MB}|^2 = 15$

37. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-2,0) και B(2,0) ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 20$

β) Εστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O, είναι συνευθειακά.

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ όταν το M κινείται στον κύκλο.

38. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4y + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε να παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε τον κύκλο που ορίζεται από την εξίσωση και εφάπτεται της ευθείας ε: $y = x - 1$.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

39. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 - 8x + y^2 - 4y = 0$.

i) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P του επιπέδου του κύκλου από τα οποία φέρνουμε κάθετες εφαπτόμενες στον κύκλο C.

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M των χορδών του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

40. Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy, θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-25,0) και B(-1,0) για τα

οποία ισχύει $|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 25$.

β) Θεωρούμε το σημείο Σ(7,1).

i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C.

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες.

41. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$. Να βρεθεί σημείο P του $x'x$ ώστε οι εφαπτομένες από το P στον κύκλο C να είναι κάθετες.

42. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(x,y), B(3,2) και Γ(1,0). Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το A κινείται στον κύκλο $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του A, ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι και ισοσκελές.

43. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

44. Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 2\lambda y + \frac{9\lambda^2}{2} - \lambda - \frac{1}{2} = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δειχτεί ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

β) Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

45. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο OAB ($\hat{O} = 90^\circ$). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων

M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{1}{3} \overline{MO}^2$, όπου A(2,0), B(0,4) και O(0,0)

46. Έστω σταθερό σημείο A(α,β) με $|\overline{OA}| = 3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overline{OM} \cdot (\overline{OM} - 2\overline{OA}) = 7$.

47. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α , ο κύκλος διέρχεται από την αρχή O .

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x$,

$\lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο A διαφορετικό από το O .

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του A συναρτήσει του λ .
- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το O .

ΠΟΛΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ

48. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 8$ και το σημείο $P(3, 1)$.

- i) Να δείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.
- ii) Αν PA, PB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το P στον κύκλο C , να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB .

49. Από σημείο $A(-2, 2)$ φέρουμε τις εφαπτομένες AB και AG προς τον κύκλο

$$C : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

- i. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του C .
- ii. Να υπολογίσετε το μήκος AB .
- iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας BG .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

50. Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ και το σημείο $A(1, 2)$.

- i) Να δείξετε ότι το A είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C .
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που περνάει από το A και ορίζει στον κύκλο C χορδή με μέσο το A .

51. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο $A(-1, -1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή με μέσο το A .

52. Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(8,0)$, ο οποίος τέμνει τον πρώτο κύκλο σε χορδή AB με μήκος $(AB)=6$

53. Δίνεται κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

- i. Να γράψετε τον κύκλο στη μορφή: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται του άξονα xx'
- iii. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο Π του κέντρου του κύκλου K ως προς την ευθεία $y = x$.
- iv. Αν $\Pi(2,1)$ το προηγούμενο σημείο δείξτε ότι το Π είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.
- v. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $\Pi(2,1)$ και τέμνει τον κύκλο στα A, B ώστε το Π να είναι μέσο της χορδής AB .

54. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 4$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.
- γ) Το σημείο $M(2,-1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M .

55. Να βρεθεί το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $M(7, 5)$ στον κύκλο $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

56. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y = 0$ $\lambda \neq 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$.

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

- i) η (ε) να εφάπτεται του C
- ii) η (ε) να ορίζει χορδή AB στον C
- iii) η χορδή AB να φαίνεται από το $O(0,0)$ υπό ορθή γωνία.

57. Δίνεται κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$. Μια ευθεία (ε) περνάει κέντρο του

κύκλου και είναι παράλληλη προς την $(\varepsilon_1): x + 2y = 0$. Η (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B . Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι $\frac{a^2}{\sqrt{5}}$ τ. μ.

58. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$ και έχει κέντρο το $K(4,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K .

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

59. Να βρεθεί σημείο P του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ που απέχει από την ευθεία $(\varepsilon): x - 2y + 4 = 0$ ελάχιστη απόσταση.

60. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από το κέντρο του κύκλου

$$C: x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0 \text{ και είναι κάθετη στην ευθεία } x + 2y - 7 = 0$$

61. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 6$. Να βρεθεί σημείο P του κύκλου C στο 1°

τεταρτημόριο, ώστε η εφαπτομένη του κύκλου στο P να τέμνει τους ημιάξονες Ox ,

Oy στα σημεία A, B αντίστοιχα ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$.

62. Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)(x-3) + (y-3)(y-5) = 0$

i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ii. Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy τα σημεία $A(1,3), B(3,3), \Gamma(3,5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων.

iii. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί κυκλικός δρόμος που να διέρχεται και από τους τέσσερις δήμους.

iv. Αν θεωρήσουμε ότι στο σύστημα αξόνων του ερωτήματος (ii) οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου K για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$) είναι $(t, t+2)$, να βρείτε την γραμμή στην οποία κινείται το αυτοκίνητο K , να εξετάσετε αν συναντά τον κυκλικό δρόμο και αν ναι σε ποια σημεία του.

63. Ένας ραδιοσταθμός εγκατέστησε κεραία στην τοποθεσία T και εκπέμπει το σήμα του

προς όλες τις κατευθύνσεις. Η ακτίνα εκπομπής είναι 50 Km. Στη θέση O βρίσκεται

ένα σπίτι το οποίο θεωρούμε ως αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων, ως προς το

οποίο είναι $T(10, -30)$.

- ι) Να ελέγξετε αν το O βρίσκεται μέσα στην εμβέλεια του σταθμού .
- ιι) Στην περιοχή υπάρχει ένας ευθύγραμμος αυτοκινητόδρομος που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0, 10)$ και $B(-\frac{10}{3}, 0)$. Υπάρχει τμήμα του αυτοκινητόδρομου , στο οποίο είναι δυνατή η λήψη του σήματος του ραδιοσταθμού; Όλες οι αποστάσεις είναι σε km
- ιιι) Στη θέση $K(20, 30)$ πρόκειται να αρχίσει δοκιμαστικές εκπομπές ένας άλλος ραδιοσταθμός , με ακτίνα εκπομπής 10Km . Μπορούν να εκπέμπουν και οι δύο ραδιοσταθμοί , χωρίς να αλληλοπαρεμβάλλονται ;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

Οδηγία: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

- | | | |
|--|---|---|
| 1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a$ ($a > 0$) παριστάνει κύκλο. | Σ | Λ |
| 2. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο. | Σ | Λ |
| 3. Ο κύκλος με κέντρο $K(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$ έχει πάντα εξίσωση:
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$. | Σ | Λ |
| 4. Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. | Σ | Λ |
| 5. Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| 6. Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά | Σ | Λ |
| 7. Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. | Σ | Λ |
| 8. Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία. | Σ | Λ |
| 9. Η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ με $\rho \in \mathbb{R}$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου. | Σ | Λ |
| 10. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι: $xx_1 + yy_1 + \rho^2 = 0$ | Σ | Λ |
| 11. Η εξίσωση $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = \rho^2, \rho \neq 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-x_0, -y_0)$ και ακτίνα $ \rho $. | Σ | Λ |
| 12. Η εξίσωση $3(x - y)^2 = 9 - 6xy$ παριστάνει κύκλο | Σ | Λ |
| 13. Η ευθεία $x + y + 1 = 0$ ορίζει στον $C: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ χορδή με μέγιστο μήκος | Σ | Λ |
| 14. Η ευθεία $x + y + 1 = 0$ τέμνει τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ | Σ | Λ |
| 15. Μία ευθεία που έχει με έναν κύκλο ένα μόνον κοινό σημείο είναι εφαπτόμενη του | Σ | Λ |

16. Η κάθετη στην εφαπτόμενη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του

$$M(x_1, y_1), \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda = \frac{x_1}{y_1}$$

Σ

Λ

17. Οι ευθείες $x = x_0 + \rho$ και $x = x_0 - \rho$, εφάπτονται στον κύκλο

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Σ

Λ

18. Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$

$$\text{και ακτίνα } \rho. \text{ Ισχύει: } (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2.$$

Σ

Λ

19. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$.

$$\text{Έχει πάντα εξίσωση } (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2.$$

Σ

Λ

20. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \alpha(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό α .

Σ

Λ

21. Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι

γραφική παράσταση συνάρτησης.

Σ

Λ

22. Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι

A. $x^2 + y^2 = 2$

Σ

Λ

4

Σ

Λ

Γ. $y = \sqrt{4 - x^2}$

Σ

Λ

Δ. $x = \sqrt{4 - y^2}$

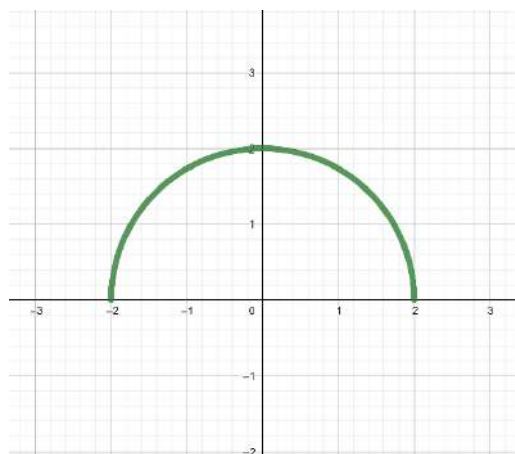
Σ

Λ

E. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Σ

Λ



B. $x^2 + y^2 =$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΥΚΛΟΥ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΥΚΛΟΥ	ΑΚΤΙΝΑ ΚΥΚΛΟΥ
$x^2 + y^2 = \rho^2$	$K(0,0)$	$ \rho $
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$	$K(x_0, y_0)$	$ \rho $
$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$	$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$	$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

Ο κύκλος εφάπτεται στους άξονες	- Ο κύκλος εφάπτεται στον $x'x$ - Ο κύκλος εφάπτεται στον $y'y$ - Ο κύκλος εφάπτεται στον $x'x$ και στον $y'y$	$\rho = y_0$ $\rho = x_0$ $\rho = y_0 = x_0$
---------------------------------	--	---

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ		ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
$x^2 + y^2 = \rho^2$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$xx_1 + yy_1 = \rho^2$
$x^2 + y^2 = \rho^2$	$M(x_0, y_0)$ (εξωτερικό σημείο)	ι) ελέγχω αν η $x=x_0$ είναι εφαπτομένη ιι) απαιτώ $d(K, \varepsilon) = \rho $, με $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$, θέτοντας, όπου $x=x_0$ και $y=y_0$ στην εξίσωση: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	Εστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης. Τότε θα πρέπει $\vec{KA} \perp \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{KA} \cdot \vec{AM} = 0$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$	$M(x_0, y_0)$ (εξωτερικό σημείο)	ι) ελέγχω αν η $x=x_0$ είναι εφαπτομένη ιι) απαιτώ $d(K, \varepsilon) = \rho $, με $\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ για να βρούμε το λ .
Οποιαδήποτε μορφή κύκλου	Γνωστός συντελεστής διεύθυνσης λ	απαιτώ το σύστημα κύκλου και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, να έχει μοναδική λύση για να βρούμε το β ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$ από την εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$, κατασκευάζοντας τον συντελεστή διεύθυνσης αυτής.

§3.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ

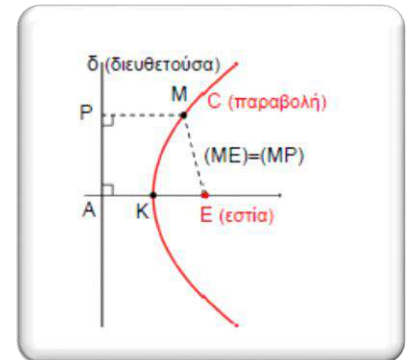
ΘΕΩΡΙΑ

Εξίσωση Παραβολής- Εξίσωση εφαπτόμενης

1. Ορισμός

Θεωρούμε ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την ευθεία δ και το σημείο E καλείται **παραβολή** με **εστία** E και **διευθετούσα** δ .

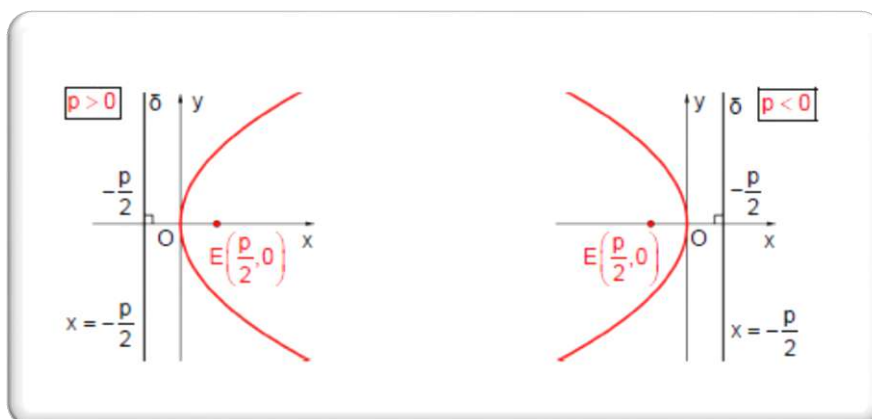
Αν A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ και K το μέσο της AE , τότε το K είναι προφανώς σημείο της παραβολής (αφού $d(K, \delta) = (EK) = \frac{1}{2}(AE)$) και ονομάζεται **κορυφή** της.



2. Βασικές εξισώσεις

A i) Έστω η παραβολή (c) με εστία E και διευθετούσα δ . Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy τέτοιο ώστε να έχει αρχή την κορυφή O της παραβολής και άξονα $x'x$ την κάθετη από το E στη διευθετούσα δ . Αν στο σύστημα αυτό η εστία E είναι το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ τότε :

- η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$
- η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2px$
- ο αριθμός p λέγεται παράμετρος της παραβολής και ισχύει $|p| = d(E, \delta)$

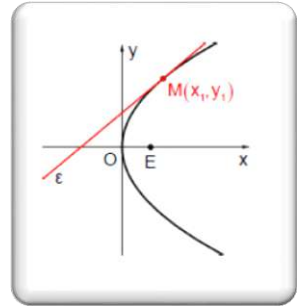


ii) Έστω η παραβολή (c) με εξίσωση $y^2 = 2px$ (εστία στον $x'x$)

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον τύπο

$$y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$$

- ✓ Στην κορυφή $O(0,0)$ εφαπτομένη της παραβολής είναι η ευθεία $x=0$

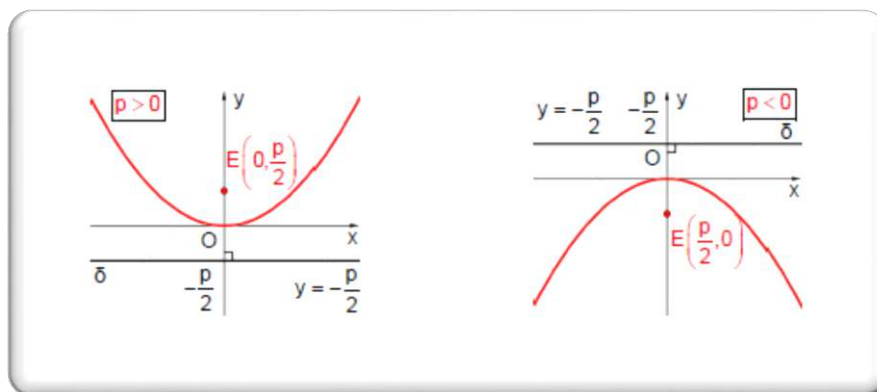


B i) Αν επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O την κορυφή της παραβολής και

άξονα $y'y$ την κάθετη από την εστία E στη διευθετούσα δ τότε αν η εστία είναι το σημείο

$$E\left(0, \frac{p}{2}\right) \text{ τότε:}$$

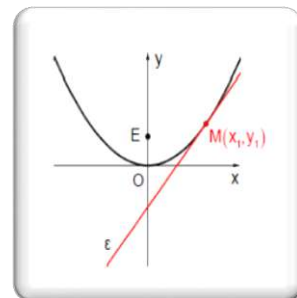
- η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $y = -\frac{p}{2}$
- η παραβολή έχει εξίσωση $x^2 = 2py$



ii) Έστω η παραβολή (c) με εξίσωση $x^2 = 2py$ (εστία στον $y'y$)

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον τύπο $x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$

- ✓ Στην κορυφή $O(0,0)$ η εφαπτομένη της παραβολής είναι η ευθεία $x=0$



3. Ιδιότητες παραβολής

α. Αν θεωρήσουμε την παραβολή $C : y^2 = 2px$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι αριθμοί p και x πρέπει να είναι ομόσημοι (αφού) $y^2 \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η παραβολή C βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο $y'y$ και η εστία E .

Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε την παραβολή $C : x^2 = 2py$, τότε αυτή βρίσκεται στο

ημιεπίπεδο που ορίζει ο $x'x$ και η εστία E .

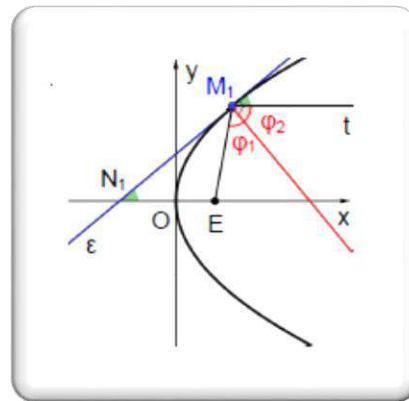
β. Αν θεωρήσουμε την παραβολή $C : y^2 = 2px$, και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της, τότε και το σημείο $M'(x_1, -y_1)$ (δηλαδή το συμμετρικό του M ως προς τον $x'x$) είναι σημείο της παραβολής C , αφού $(-y_1)^2 = y_1^2 = 2px_1$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η **παραβολή C έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$** .

Αντίστοιχα, η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Γενικά, η κάθετη από την εστία E προς την διευθετούσα δ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται άξονας της παραβολής.

γ. Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t που είναι ομόρροπη της OE , όπου E η εστία της παραβολής.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Προσδιορισμός εξίσωσης – στοιχείων παραβολής.

- Για να βρούμε την εξίσωση μιας παραβολής προσπαθούμε να βρούμε τη μορφή της εξίσωσης της (δηλαδή αν έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ ή τον $y'y$) και τον αριθμό p .

2. Εφαπτομένη παραβολής

- i) Για να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης μιας παραβολής αν γνωρίζουμε το σημείο επαφής, τότε χρησιμοποιούμε απ'ευθείας τους τύπους $yy_1 = p(x + x_1)$ ή $xx_1 = p(y + y_1)$, ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης της παραβολής.
- ii) Για να βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων μιας παραβολής που άγονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$, το οποίο δεν είναι το σημείο επαφής, τότε θεωρούμε την ευθεία με εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ και απαιτούμε το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας να έχει μοναδική λύση.
(στην παραπάνω περίπτωση θα πρέπει να είναι $x_0 \neq 0$ και $y_0 \neq 0$, γιατί τότε ή δεν θα είχαμε καθόλου εφαπτόμενη ή θα είχαμε την ευθεία $x=0$ ή $y=0$)
- iii) Αν δίνεται ή μπορεί να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_{(ε)}$ της εφαπτομένης της παραβολής, τότε :
 - α) Σαν εξίσωση εφαπτομένης θεωρούμε την $y = \lambda x + \beta$. Το β υπολογίζεται από την απαίτηση το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας να έχει μοναδική λύση, ή
 - β) Προσδιορίζουμε το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$, αφού ισχύει $\lambda_{(ε)} = \frac{p}{y_1}$ ή $\lambda_{(ε)} = \frac{p}{x_1}$
(ανάλογα με τη μορφή της παραβολής) και επιπλέον το σημείο A είναι σημείο της παραβολής άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της

3. Τέμνουσα ευθεία παραβολής

- α) Σε ασκήσεις που έχουν να κάνουν με ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$, η οποία τέμνει μια παραβολή στα σημεία A, B και χρειάζεται να εργαστούμε με τις συντεταγμένες των A, B :
Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας. Με αντικατάσταση στην εξίσωση της παραβολής καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες είτε τις τετμημένες είτε τις τεταγμένες των σημείων A, B .
Ενδέχεται να έχουμε εύκολα αυτό που ζητάμε κάνοντας χρήση των τύπων του Vieta* για τις ρίζες της εξίσωσης, αποφεύγοντας έτσι την πλήρη επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης για να βρούμε σχέσεις με τις τετμημένες είτε τις τεταγμένες των σημείων A, B .

 *Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει ρίζες τους πραγματικούς x_1, x_2 , τότε ισχύουν :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

β) Αν δίνεται ένα σημείο $M(x_M, y_M)$ εσωτερικό της παραβολής $y^2 = 2px$ και ζητάμε την εξίσωση της ευθείας η οποία τέμνει την παραβολή στα σημεία A, B ώστε το M να είναι μέσο της AB τότε :

i) Αν $y_M = 0$, η ζητούμενη ευθεία είναι η $x = x_M$ (γιατί ;)

ii) Αν $x_M \neq 0$, θεωρούμε $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ τα σημεία τομής της ζητούμενης ευθείας με την παραβολή, οπότε ισχύουν οι σχέσεις $y_1^2 = 2px_1$ (1) και $y_2^2 = 2px_2$ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) οπότε :

$$y_1^2 - y_2^2 = 2px_1 - 2px_2 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2p(x_1 - x_2)$$

Το $M(x_M, y_M)$ είναι μέσο του AB , άρα : $y_1 + y_2 = 2y_M$ οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$2y_M(y_1 - y_2) = 2p(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{p}{y_M} \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} = \frac{p}{y_M}$$

Δηλαδή, υπολογίσαμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας, οπότε η εξίσωση

$$\text{της θα είναι } (\epsilon) : y - y_M = \frac{p}{y_M}(x - x_M).$$

Με όμοιο τρόπο δουλεύουμε αν έχουμε ένα σημείο $M(x_M, y_M)$ εσωτερικό της παραβολής $x^2 = 2py$ και ζητάμε την εξίσωση της ευθείας η οποία τέμνει την παραβολή στα σημεία A, B ώστε το M να είναι μέσο της AB

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και επιπλέον:

- i. Έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία $E(4,0)$
- ii. Έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διευθετούσα $\delta: x=2$
- iii. Έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία $E(0,-2)$
- iv. Έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διευθετούσα $\delta: y=-3$

Λύση

- i. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $C: y^2 = 2px$. Επιπλέον ισχύει ότι: $\frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8$ άρα έχουμε: $C: y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = 16x$
- ii. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής, $C: y^2 = 2px$ Επιπλέον ισχύει ότι: $-\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = -4$ άρα έχουμε: $C: y^2 = 2(-4)x \Leftrightarrow y^2 = -8x$
- iii. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $C: x^2 = 2py$, Επιπλέον ισχύει ότι: $\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow p = -4$ άρα έχουμε $C: x^2 = 2py \Leftrightarrow x^2 = 2(-4)y \Leftrightarrow x^2 = -8y$
- iv. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $C: x^2 = 2py$, Επιπλέον ισχύει ότι: $-\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = 6$ άρα έχουμε $x^2 = 2py \Leftrightarrow x^2 = 12y$

2. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

- i. $y^2 = 6x$
- ii. $y^2 = -8x$
- iii. $x^2 = 4y$
- iv. $y = -\frac{1}{4}x^2$

Λύση:

- i. $y^2 = 6x, p = 3$ άρα Εστία: $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \rightarrow E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Διευθετούσα
 $(\delta): x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

ii. $y^2 = -8x, p = -4$ άρα Εστία: $E\left(0, \frac{p}{2}\right) \rightarrow E(0, 1)$. Διευθετούσα

$$(\delta): x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

iii. $x^2 = 4y, p = 2$ άρα Εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right) \rightarrow E(0, -1)$. Διευθετούσα:

$$(\delta): y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = -1$$

iv. άρα Εστία: $E\left(0, \frac{p}{2}\right) \rightarrow E(0, -1)$ Διευθετούσα:

$$(\delta): y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = 1$$

3. Δίνεται η παραβολή C με κορυφή $O(0, 0)$ η οποία έχει άξονα συμμετρίας $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, 6)$. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής C

ii. Την εφαπτομένη της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = \frac{1}{3}x + 10$

Λύση

i. Η εξίσωση της παραβολής θα είναι της μορφής $y^2 = 2px$. Το σημείο $A(3, 6)$ την επαληθεύει άρα έχουμε : $6^2 = 2p \cdot 3 \Leftrightarrow 36 = 6p \Leftrightarrow p = 6$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι : $y^2 = 12x$

ii. **Α ΤΡΟΠΟΣ**

Έστω $M(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής

Γνωρίζοντας ότι $p=6$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$\varepsilon: yy_1 = 6(x + x_1) \text{ ή ισοδύναμα } yy_1 = 6x + 6x_1$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{6}{y_1}$

Της η ευθεία ε είναι παράλληλη με την ευθεία ζ , άρα: $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta = \frac{1}{3}$

$$\text{Δηλαδή } \frac{6}{y_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_1 = 18$$

Το σημείο $M(x_1, y_1)$ επαληθεύει και την εξίσωση της παραβολής C άρα:

$$y_1^2 = 12x_1 \Leftrightarrow 18^2 = 12x_1 \Leftrightarrow x_1 = 27$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $18y = 6(x+27) \Leftrightarrow 3y = x+27$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Η ζητούμενη ευθεία θα έχει μορφή $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = \frac{1}{3}$, άρα $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \beta$

Αν θεωρήσουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} y^2 = 12x \\ y = \frac{1}{3}x + \beta \end{cases}$$
 , που προσδιορίζει τα κοινά σημεία της παραβολής και της

ευθείας θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό κοινό σημείο, που σημαίνει ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση που θα προκύψει θα πρέπει να έχει διακρίνουσα ίση με το 0. Πράγματι:

$$\begin{cases} y^2 = 12x \\ y = \frac{1}{3}x + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{12} \\ y = \frac{1}{3}x + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{12} \\ y = \frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{12} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{12} \\ y = \frac{y^2}{36} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{12} \\ y^2 - 36y + 36\beta = 0 \end{cases}$$

Για το τριώνυμο $y^2 - 36y - 36\beta = 0$, απαιτούμε $\Delta = 0$, οπότε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-36)^2 - 4 \cdot 36 \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 9. \text{ Άρα η εφαπτόμενη ευθεία της παραβολής που είναι}$$

παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = \frac{1}{3}x + 10$ είναι η $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + 9$

4. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $C_1: y^2 = 2x$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(3,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ έχουν δύο κοινά σημεία στα οποία δέχονται κοινές εφαπτόμενες των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

Λύση

Η παραβολή $C_1: y^2 = 2x$, έχει $\rho = 1$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(3,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ έχει

$$\text{εξίσωση: } (x-3)^2 + y^2 = 5$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y^2 = 2x \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ (x-3)^2 + 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 - 6x + 9 + 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} y^2 = 2x \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \text{ ή } y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι $A(2,2)$ και $B(2,-2)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C_1 στο σημείο $A(2,2)$ είναι:

$$2y=1(x+2) \Leftrightarrow 2y=x+2 \Leftrightarrow x-2y+2=0.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο $A(2,2)$ αποδεικνύεται (με γνωστή μέθοδο) ότι είναι: $x-2y+2=0$

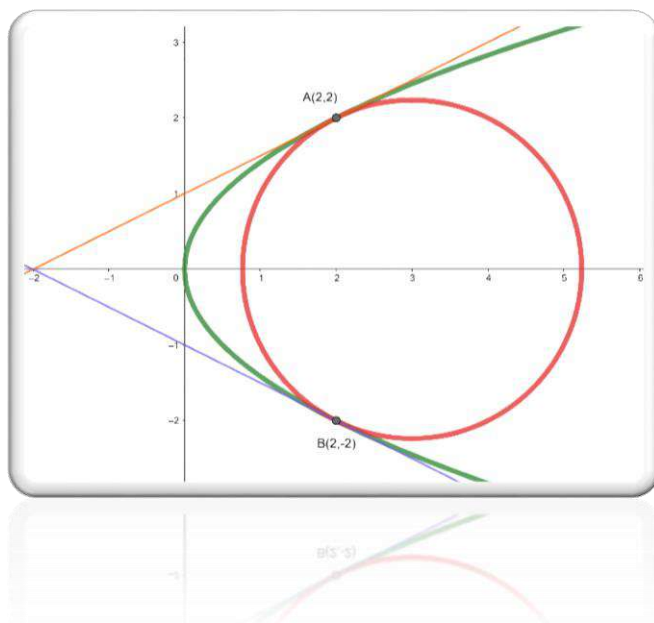
Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής και του κύκλου στο σημείο A είναι κοινές.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C_1 στο σημείο $B(2,-2)$ είναι:

$$-2y=1(x+2) \Leftrightarrow -2y=x+2 \Leftrightarrow x+2y+2=0.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο $A(2,2)$ αποδεικνύεται (με γνωστή μέθοδο) ότι είναι: $x+2y+2=0$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής και του κύκλου στο σημείο $B(2,-2)$ είναι κοινές.



5. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 6x$ να βρείτε:

- i. Την εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $A\left(\frac{1}{6}, -1\right)$
- ii. Την εφαπτομένη της παραβολής C που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°
- iii. Τις εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $M(10,8)$

Λύση

- i. Παρατηρούμε ότι $p=3$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής δίνεται από τον τύπο:

$y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$, στο σημείο επαφής $A\left(\frac{1}{6}, -1\right)$ θα είναι:

$$-1y = 3\left(x + \frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow -y = 3x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0$$

- ii. **Α ΤΡΟΠΟΣ**

Έστω $M(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής.

Βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της παραβολής C . Έχουμε ότι $\lambda = \varepsilon \cdot 135^0 = -1$

Άρα γνωρίζοντας ότι $p=3$ αντικαθιστώντας στον τύπο της εφαπτομένης της παραβολής έχουμε:

$$y \cdot y_1 = 3 \cdot (x + x_1) \Leftrightarrow y \cdot y_1 = 3x + 3x_1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{y_1}x + \frac{3x_1}{y_1}$$

$$\text{Έχουμε ότι } \lambda_{\varepsilon} = \frac{3}{y_1} = -1 \Leftrightarrow y_1 = -3 \quad (1)$$

$$\text{Το σημείο } M \text{ επαληθεύει και την παραβολή άρα έχουμε: } y_1^2 = 2px_1 \quad (2)$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στην } (2) \text{ την } (1) \text{ έχουμε: } 9 = 6x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$-3y = 3\left(x + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow -3y = 3x + \frac{9}{2} \Leftrightarrow -6y = 6x + 9 \Leftrightarrow 2x + 2y + 3 = 0$$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Εστω ότι η ζητούμενη εξίσωση εφαπτόμενης δίνεται από τον τύπο: (ε): $y = \lambda x + \beta$

Έχουμε ότι $\lambda = \varepsilon \cdot 135^0 = -1$, άρα (ε): $y = -x + \beta$. Θεωρώντας το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας

$$\text{και της παραβολής } \begin{cases} y = -x + \beta \\ y^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + \beta \\ x = \frac{y^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{y^2}{6} + \beta \\ x = \frac{y^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 6y - 6\beta = 0 \\ x = \frac{y^2}{6} \end{cases} \text{ . Για να}$$

εφάπτεται η συγκεκριμένη ευθεία της παραβολής θα πρέπει το σύστημα να έχει μοναδική λύση ή ισοδύναμα η εξίσωση: $y^2 + 6y - 6\beta = 0$ να έχει μοναδική λύση. Οπότε απαιτούμε

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6\beta) = 0 \Leftrightarrow 36 + 24\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2} \text{ . Άρα η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση:}$$

$$y = -x + \beta \stackrel{\beta = -\frac{3}{2}}{\Rightarrow} y = -x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x + 2y + 3 = 0$$

iii. Α ΤΡΟΠΟΣ

Έστω $N(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα δίνεται από την σχέση: $yy_1 = p(x + x_1)$

Άρα γνωρίζοντας ότι $p=3$ αντικαθιστώντας στον τύπο της εφαπτομένης της παραβολής έχουμε:

$$yy_1 = 3(x + x_1) \quad (1)$$

Το σημείο $M(10,8)$ επαληθεύει την εξίσωση άρα αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$8y_1 = 3(10 + x_1) \Leftrightarrow 8y_1 = 3x_1 + 30 \quad (2)$$

Το σημείο N επαληθεύει και την παραβολή άρα έχουμε: $y_1^2 = 6x_1 \quad (3)$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 8y_1 = 3x_1 + 30 \\ y_1^2 = 6x_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8y_1 = 3x_1 + 30 \\ x_1 = \frac{y_1^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y_1 = 3\frac{y_1^2}{6} + 30 \\ x_1 = \frac{y_1^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y_1^2 - 16y_1 + 60 = 0 \\ x_1 = \frac{y_1^2}{6} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 10 \text{ ή } y_1 = 6 \\ x_1 = \frac{y_1^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 10 \\ x_1 = \frac{50}{3} \\ y_1 = 6 \\ x_1 = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Αν $N\left(\frac{50}{3}, 10\right)$, τότε η ζητούμενη εξίσωση θα είναι: $10y = 3\left(x + \frac{50}{3}\right) \Leftrightarrow 3x - 10y + 50 = 0$

Αν $N(6,6)$, τότε η ζητούμενη εξίσωση θα είναι: $6y = 3(x + 6) \Leftrightarrow 3x - 6y + 18 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 6 = 0$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(10,8)$, θα έχουν μορφή: $x=10$ ή $y-8=\lambda(x-10)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Προφανώς η ευθεία $x=10$ δεν μπορεί να είναι εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 6x$, οπότε αναζητούμε ευθείες της οικογένειας $y-8=\lambda(x-10)$ με $\lambda \neq 0$ (γιατί;;;;) που να είναι εφαπτόμενες της C . Έχουμε:

$y-8=\lambda(x-10) \Leftrightarrow y=\lambda x-10\lambda+8$. Για να βρούμε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, θα πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases} y = \lambda x - 10\lambda + 8 \\ y^2 = 6x \end{cases} \text{ να έχει μοναδική λύση. Πράγματι:}$$

$$\begin{cases} y = \lambda x - 10\lambda + 8 \\ y^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x - 10\lambda + 8 \\ x = \frac{y^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{6} \\ y = \lambda \frac{y^2}{6} - 10\lambda + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{6} \\ \lambda y^2 - 6y - 60\lambda + 48 = 0 \end{cases} \text{ . Η δεύτερη}$$

εξίσωση παρατηρούμε ότι είναι ένα τριώνυμο με άγνωστο το y και για να έχει το σύστημα μοναδική λύση θα πρέπει και το τριώνυμο να έχει μοναδική λύση δηλαδή απαιτούμε $\Delta=0$. Οπότε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda(-60\lambda + 48) = 0 \Leftrightarrow 240\lambda^2 - 192\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow 20\lambda^2 - 16\lambda + 3 = 0, \text{ το τελευταίο τριώνυμο}$$

έχει λύσεις : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{3}{10}$ με αντίστοιχες εξισώσεις:

$$x - 2y + 6 = 0 \text{ και } 3x - 10y + 50 = 0$$

6. Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 8x$

ι) Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την εστία της και είναι παράλληλη στον yy' τέμνει την παραβολή στα A, B έτσι ώστε $(AB) = 8$

ιι) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής στα A, B και να δείξετε ότι αυτές είναι κάθετες και τέμνονται στον xx' .

ιιι) Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της παραβολής $C_1: y^2 = 8x$ και του κύκλου $C_2: x^2 + y^2 = 2$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

Λύση

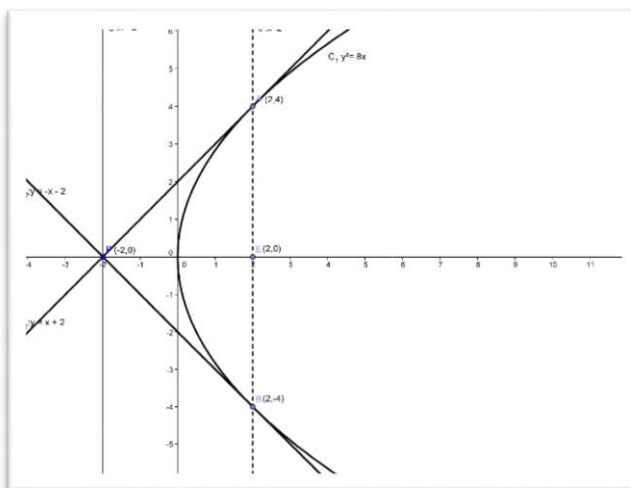
ι) Η εστία της παραβολής είναι $E(2,0)$ και η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την εστία της και είναι παράλληλη στον yy' είναι $\varepsilon: x=2$. Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} x=2 \\ y^2=8x \end{cases} \text{ προκύπτουν τα}$$

σημεία $A(2,4)$ και $B(2,-4)$.

Τότε:

$$(AB) = \sqrt{(2-2)^2 + (4+4)^2} = 8$$



ιι) Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B είναι αντίστοιχα:

$$\varepsilon_1: y \cdot 4 = 4(x+2) \Leftrightarrow y = x+2$$

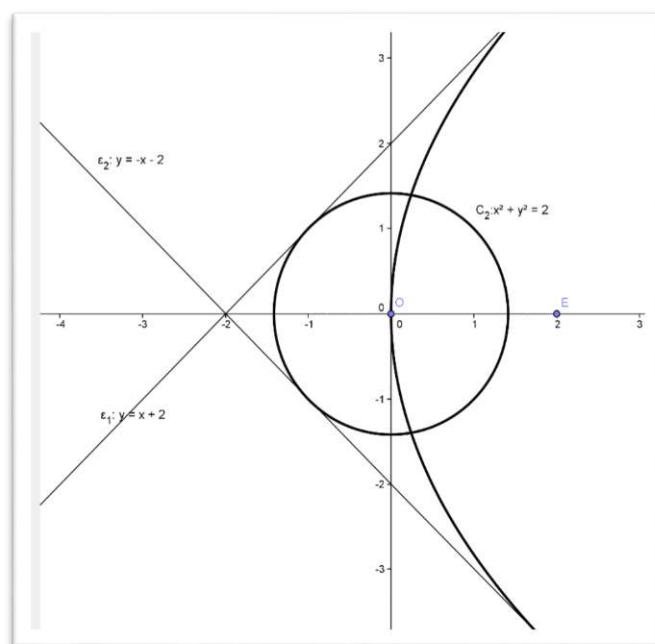
και

$$\varepsilon_2: y \cdot (-4) = 4(x+2) \Leftrightarrow y = -x-2.$$

Προφανώς είναι κάθετες αφού $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ και για να βρούμε που βρίσκεται το σημείο τομής τους λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ που}$$

είναι σημείο στον xx' .



iii) Εστω ότι η κοινή εφαπτόμενη έχει εξίσωση: $y=\lambda x+\mu$. Η ευθεία αυτή θα έχει ένα κοινό σημείο με την παραβολή και με τον κύκλο. Τότε αν λύσουμε το σύστημα της ευθείας με την παραβολή και τον κύκλο αντίστοιχα, θα οδηγηθούμε σε τριώνυμο και θα απαιτήσουμε η διακρίνουσα να είναι ίση με το μηδέν.

$$\begin{cases} y=\lambda x+\mu \\ y^2=8x \end{cases} \Rightarrow (\lambda x+\mu)^2=8x \Rightarrow \lambda^2 x^2+(2\lambda\mu-8)x+\mu^2=0. \quad \text{Απαιτούμε } \Delta=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda\mu=2. \quad (1) \quad \text{Ομοίως:}$$

$$\begin{cases} y=\lambda x+\mu \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+(\lambda x+\mu)^2=2 \Rightarrow (1+\lambda^2)x^2+2\lambda\mu x+\mu^2-2=0.$$

$$\text{Απαιτούμε } \Delta=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2\lambda^2+2=\mu^2. \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) προσδιορίζουμε τις τιμές των λ, μ .

$$\begin{cases} \lambda\mu=2 \\ 2\lambda^2+2=\mu^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=\frac{2}{\lambda} \\ 2\lambda^2+2=\mu^2 \end{cases} \quad \text{Τότε } 2\lambda^2+2=\frac{4}{\lambda^2} \Leftrightarrow 2\lambda^4+2\lambda^2-4=0.$$

Τότε $\lambda_1=1$ και $\mu_1=2$ και η εφαπτόμενη $y=x+2$ και $\lambda_2=-1$ και $\mu_2=-2$ και η εφαπτόμενη $y=-x-2$. Αφού $\lambda_1\lambda_2=-1$, τότε οι ευθείες αυτές είναι κάθετες.

7. Δίνεται η παραβολή $C: y^2=8x$ και το σημείο $M(4,1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας(ϵ), η οποία διέρχεται από το M και τέμνει την παραβολή στα σημεία Λ και N έτσι, ώστε το M να είναι το μέσον του ΛN .

Λύση

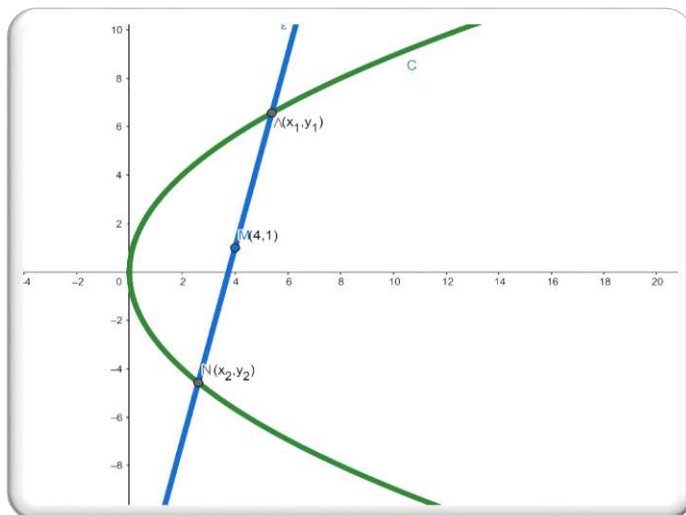
Α ΤΡΟΠΟΣ

Οι ευθείες που διέρχονται από το $M(4,1)$ θα έχουν μορφή: $x=4$ και

$y-1=\lambda(x-4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$. (γιατί;;;). Η ευθεία $x=4$ τέμνει την παραβολή $C: y^2=8x$ στα σημεία $\Lambda(4, 4\sqrt{2})$ και $N(4, -4\sqrt{2})$ και το σημείο $M(4,1)$

δεν είναι λύση του προβλήματος. Οπότε

αναζητούμε ποια από τις ευθείες $y-1=\lambda(x-4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ είναι λύση του προβλήματος. Για να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων Λ



$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y - 1 = \lambda(x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{8} \\ y = \lambda x - 4\lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{8} \\ y = \lambda \frac{y^2}{8} - 4\lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{8} \\ 8y = \lambda y^2 - 32\lambda + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{8} \\ \lambda y^2 - 8y - 32\lambda + 8 = 0 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι τριώνυμο με άγνωστο το y και έχει λύσεις τις τεταγμένες y_1, y_2 των σημείων Λ και N αντίστοιχα και από τους τύπους του **Vieta** θα ισχύει:

$$y_1 + y_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-8}{\lambda} = \frac{8}{\lambda} \quad (1). \text{ Αφού θέλουμε το μέσον του } \Lambda N \text{ να είναι το } M(4,1), \text{ θα πρέπει :}$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \Leftrightarrow y_1 + y_2 = 2 \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } \frac{8}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Αρα η ζητούμενη ευθεία θα είναι η $y - 1 = 4(x - 4) \Leftrightarrow 4x - y - 15 = 0$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Οι ευθείες που διέρχονται από το $M(4,1)$ θα έχουν μορφή: $x=4$ και $y=\lambda x+\beta$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$. (γιατί;;;). Η ευθεία $x=4$ τέμνει την παραβολή $C: y^2=8x$ στα σημεία $\Lambda(4, 4\sqrt{2})$ και $N(4, -4\sqrt{2})$ και το σημείο $M(4,1)$ δεν είναι λύση του προβλήματος. Εστω τώρα $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η ευθεία που διέρχεται από το M και τέμνει την παραβολή C στα σημεία $\Lambda(x_1, y_1)$ και $N(x_2, y_2)$, έτσι ώστε το σημείο $M(4,1)$ να είναι μέσο του ΛN . Τότε

$$\text{ισχύουν: } \begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ y_2^2 = 8x_2 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} = 4 \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 = 8 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 8(x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 = 8 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ (y_1 - y_2) \cdot 2 = 8(x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 = 8 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$$

Και εφόσον $\lambda_{\Lambda N} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, θα είναι $\lambda_{\Lambda N} = 4$, οπότε η ευθεία ΛN έχει εξίσωση $y = 4x + \beta$ και επειδή διέρχεται

από το σημείο $M(4,1)$, ισχύει: $1 = 4 \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -15$, άρα η ζητούμενη ευθεία θα είναι η $y = 4x - 15$

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

1. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

i. $y^2 = 12x$

ii. $y^2 = -12x$

iii. $y^2 = \frac{1}{6}x$

iv. $y^2 = -\frac{1}{6}x$

v. $y^2 = x$

vi. $x^2 = -24y$

vii. $x^2 = 16y$

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και επιπλέον:

i. Έχει εστία το σημείο $E(4,0)$

ii. Έχει εστία το σημείο $E(-3,0)$

iii. Έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta_1 : x = 4$

iv. Έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta_2 : x = -8$

3. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, και επιπλέον:

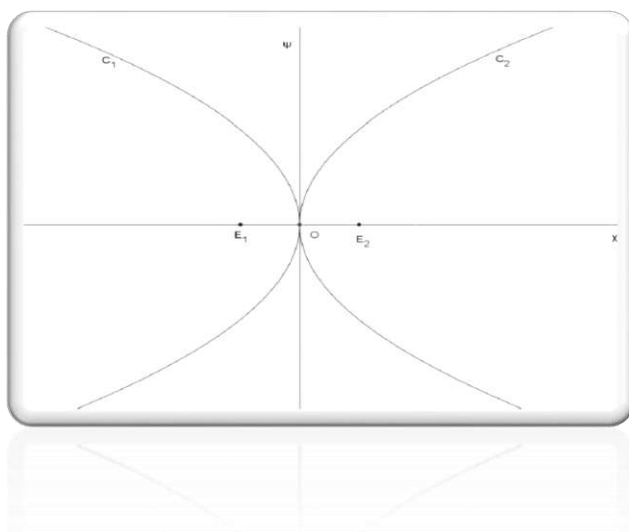
i. Έχει εστία το σημείο $E(0,3)$

ii. Έχει εστία το σημείο $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

iii. Έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta_1 : y = 3$

iv. Έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta_1 : y = -10$

4. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1 : y^2 = -2px$ και $C_2 : y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.



- α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2 .
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

5. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-8,8)$.

Να βρείτε:

- Την εξίσωση της παραβολής C .
- Την εστία E και την διευθετούσα δ της παραβολής C .

6. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(6,3)$. Να βρείτε:

- Την εξίσωση της παραβολής C .
- Την εστία E και την διευθετούσα δ της παραβολής C .

7. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον xx' και διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$. Να βρείτε:

- Την εξίσωση της παραβολής C
- Την εστία και την διευθετούσα της παραβολής C
- Το σημείο B διαφορετικό από το $O(0,0)$ της παραβολής ώστε $\angle AOB = 90^\circ$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

8. Να βρεθεί η εξίσωση τη εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: -2x + 2y = 5$.
- ii. όταν είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 3y + 1 = 0$.
- iii. όταν διέρχεται από το σημείο $A(-3, -2)$

9. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

- i. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία που έχουν τετμημένη $\frac{1}{2}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο που βρίσκεται πάνω στον άξονα xx' .

10. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$, $p > 0$. Η εστία E της C απέχει από την διευθετούσα δ απόσταση ίση με 8. Να βρείτε:

- i. Την εστία E και την διευθετούσα δ της παραβολής C .
- ii. Την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο με τεταγμένη -6 .

11. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ Να βρείτε:

- i. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x + y + 3 = 0$
- ii. Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής που διέρχονται από το σημείο $M(-2, 1)$

12. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον y' και εστία

$E\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Να βρείτε:

- i. Την εξίσωση της παραβολής C .
- ii. Την εφαπτομένη της παραβολής C που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx'

13. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της παραβολής $C_1: y^2 = 5x$ και του κύκλου:

$$C_2: x^2 + y^2 = 5.$$

14. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της παραβολής $C_1: y^2 = 8x$ και του κύκλου: $C_2: x^2 + y^2 = 2$

15. Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 8x$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο την εστία E της παραβολής C_1 . Να βρείτε:

- i. Την εξίσωση του κύκλου C_2 .
- ii. Τις κοινές εφαπτόμενες των C_1 και C_2 .

ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 16.** Δίνεται παραβολή $C_1: y^2 = 8x$. Να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B ώστε να ισχύει: $(AB) = 4\sqrt{3}$
- 17.** Δίνεται παραβολή $C: y^2 = 8x$
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η χορδή της παραβολής C που έχει μέσο το σημείο $M(2, -3)$
 - Αν O είναι η αρχή των αξόνων και E είναι ή εστία της παραβολής C να υπολογίσετε το άθροισμα $d(O, \varepsilon) + d(E, \varepsilon)$.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C , η οποία σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon: y = 3x - 2$ γωνία 45° .
- 18.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής $C: x^2 = -16y$ που απέχει από την κορυφή της απόσταση ίση με $2\sqrt{2}$.
- 19.** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C με κορυφή $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον $x'x$, που εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 4 = 0$.
- 20.** Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής $C: y^2 = 4x$ η οποία έχει μέσον $M(2, -1)$.
- 21.** Να βρείτε τον γ.τ. του μέσου M των χορδών της παραβολής $C: y^2 = 2x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: x - y + 1 = 0$.
- 22.** Να βρείτε τον γ.τ. του μέσου N της χορδής OM , όπου M τυχαίο σημείο της παραβολής $C: y^2 = 2px$.
- 23.** Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 8x$ που απέχει από την εστία απόσταση ίση με $d = 5$.
- 24.** Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της παραβολής $C_1: y^2 = 16x$ και του κύκλου: $C_2: x^2 + y^2 = 8$.
- 25.** Δίνονται οι παραβολές $x^2 = y$ και $y^2 = 8x$
- Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη αυτών.

- ii. Αν A το κοινό σημείο του (εκτός του $O(0,0)$), και $B\Gamma$ η κοινή εφαπτομένη να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

26. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

- i. Την εστία E και την διευθετούσα δ της παραβολής.
 ii. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων

απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- iii. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y = x - 1.$$

27. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος

της παραβολής C .

- α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
 β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία της B και Γ , τότε:
 i) να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.
 ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C .

28. Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.
 β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

29. Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία της παραβολής $C: y^2 = 15x$ με $y_1 + y_2 = 5\sqrt{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) η ευθεία AB σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα $x'x$, η οποία και να βρεθεί,
 ii) το μέσο του τμήματος AB κινείται σε σταθερή ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

Οδηγία: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

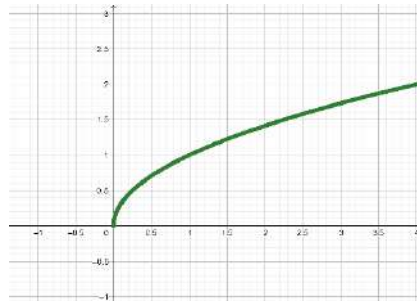
- | | | |
|--|---|---|
| 1. Η παραβολή με εστία το σημείο $(1, 0)$ έχει παράμετρο $p = 2$. | Σ | Λ |
| 2. Η ευθεία που έχει εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$. | Σ | Λ |
| 3. Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$. | Σ | Λ |
| 4. Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$ ισαπέχει από την ευθεία $x = -2$ και το σημείο $(4, 0)$. | Σ | Λ |
| 5. Η διευθετούσα της $y^2 = 3x$ είναι η ευθεία $x = -\frac{3}{4}$. | Σ | Λ |
| 6. Η διευθετούσα της $x^2 = 4y$ είναι η ευθεία $y = -1$. | Σ | Λ |
| 7. Η εστία της παραβολής $x^2 = y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| 8. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$. | Σ | Λ |
| 9. Στο σημείο (x_0, y_0) της παραβολής $y^2 = 2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{p}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$). | Σ | Λ |
| 10. Όλα τα σημεία της $C: y^2 = 2px$ με $p > 0$, εκτός του $(0, 0)$, έχουν θετική τετμημένη | Σ | Λ |
| 11. Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$ παριστάνει τμήμα παραβολής | Σ | Λ |
| 12. Αν μία ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την παραβολή $y^2 = 2px$ τότε αυτή εφάπτεται στην παραβολή | Σ | Λ |
| 13. Η παραβολή $C: y^2 = px$ έχει εστία το σημείο $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ | Σ | Λ |
| 14. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: x^2 = 2py$, στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x+x_1)$ | Σ | Λ |
| 15. Η απόσταση της εστίας E της παραβολής $x^2 = 2py$, από την διευθετούσα | | |

ευθεία δ είναι ίση με $|p|$.

Σ

Λ

16. Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$,
παριστάνει καμπύλη της μορφής του
διπλανού σχήματος.



Σ

Λ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ	ΕΣΤΙΑ	ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΑ
$y^2 = 2px, \quad p > 0$	$E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$\delta: x = -\frac{p}{2}$
$y^2 = 2px, \quad p < 0$	$E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$\delta: x = -\frac{p}{2}$
$x^2 = 2py, \quad p > 0$	$E\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$\delta: y = -\frac{p}{2}$
$x^2 = 2py, \quad p < 0$	$E\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$\delta: y = -\frac{p}{2}$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ		ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
$y^2 = 2px$ με $p > 0$ ή $p < 0$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$
$x^2 = 2py$ με $p > 0$ ή $p < 0$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$
$y^2 = 2px$ ή $x^2 = 2py$ με $p > 0$ ή $p < 0$	$M(x_0, y_0)$ (εξωτερικό σημείο)	ι) ελέγχω αν η $x = x_0$ είναι εφαπτομένη ii) απαιτώ το σύστημα παραβολής και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, να έχει μοναδική λύση ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$, θέτοντας, όπου $x = x_0$ και $y = y_0$ στην εξίσωση: $y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$ ή $x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$
$y^2 = 2px$ ή $x^2 = 2py$ με $p > 0$ ή $p < 0$	Γνωστός συντελεστής διεύθυνσης λ	απαιτώ το σύστημα παραβολής και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, να έχει μοναδική λύση για να βρούμε το β ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$ από την εξίσωση $y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$ ή $x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$, κατασκευάζοντας τον συντελεστή διεύθυνσης αυτής.

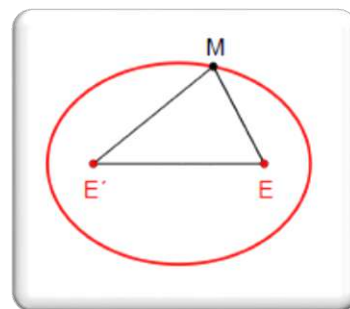
§3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ

ΘΕΩΡΙΑ

Εξίσωση Παραβολής- Εξίσωση εφαπτόμενης

1. Ορισμός

Έστω E και E' δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Ονομάζουμε **έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E'** το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το **άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία E και E'** είναι σταθερό και μεγαλύτερο του EE' .

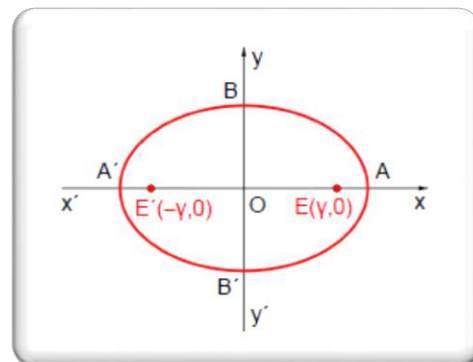


- Τα σταθερά σημεία E και E' τα ονομάζουμε **εστίες** της έλλειψης.
- Την **απόσταση** (EE') την συμβολίζουμε με 2γ και ονομάζεται, η απόσταση αυτή, **εστιακή απόσταση**.
- Το σταθερό άθροισμα το συμβολίζουμε με $2a$ Δηλαδή θα ισχύει: $(ME) + (ME') = 2a$
- Πρέπει πάντα να ισχύει $(ME) + (ME') > (EE') \Leftrightarrow 2a > 2\gamma$

2. Εξίσωση έλλειψης ως προς το σύστημα συντεταγμένων Oxy .

I. Έστω (c) μια έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E' . Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα $x'x$ την ευθεία EE' και άξονα $y'y$ τη μεσοκάθετο του EE' τότε

- Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$
- Η εξίσωση της έλλειψης αποδεικνύεται ότι είναι η
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ όπου } b^2 = a^2 - \gamma^2$$

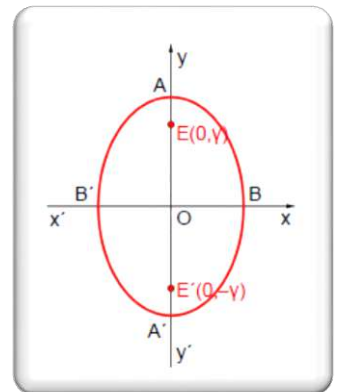


- ✓ Τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες xx' και yy' ονομάζονται κορυφές της έλλειψης.
- ✓ Τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα xx' είναι τα $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$ το μήκος του τμήματος AA' είναι ίσο με $2a$ και ονομάζεται **μεγάλος άξονας της έλλειψης**.
- ✓ Τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα yy' είναι τα $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$ το μήκος του τμήματος BB' είναι ίσο με $2b$ και ονομάζεται **μικρός άξονας της έλλειψης**.

II. Αν οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται πάνω στον άξονα yy' και είναι τα σημεία $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ με σταθερό άθροισμα 2γ η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από την σχέση:

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \text{ όπου } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2.$$

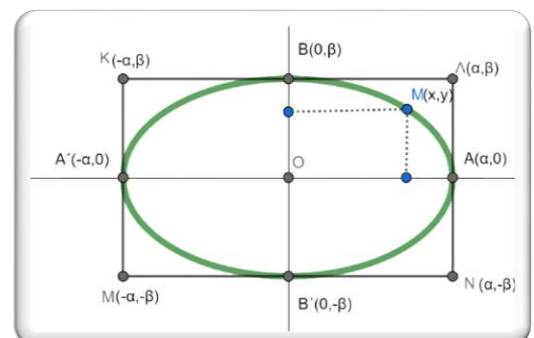
- ✓ Τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα yy' είναι τα $A(0,\alpha)$ και $A'(0,-\alpha)$ το μήκος του τμήματος AA' είναι ίσο με 2α και ονομάζεται **μεγάλος άξονας της έλλειψης**.
- ✓ Τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα xx' είναι τα $B(\beta,0)$ και $B'(-\beta,0)$ το μήκος του τμήματος BB' είναι ίσο με 2β και ονομάζεται **μικρός άξονας της έλλειψης**.



3. Ιδιότητες έλλειψης

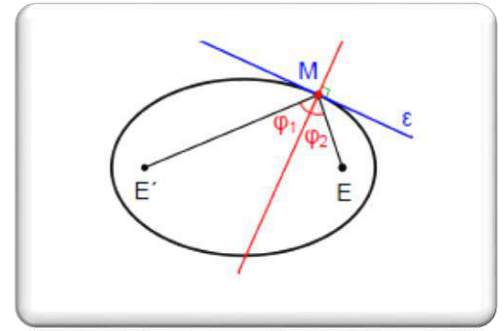
- i.** Οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης
- ii.** Η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της έλλειψης
- iii.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά σημεία ως προς το O λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Γενικά αν KL είναι μια διάμετρος μιας έλλειψης, τότε ισχύει: $2\beta \leq (KL) \leq 2\alpha$

iv. Αν $M(x, y)$ σημείο της έλλειψης τότε ισχύουν:
 $-\alpha \leq x \leq \alpha$, $-\beta \leq y \leq \beta$ δηλαδή η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x = -\alpha$, $x = \alpha$, $y = -\beta$, $y = \beta$



ν. Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο επαφής $M(x_1, y_1)$ διχοτομεί την γωνία $\angle EME$ όπου E και E' οι εστίες της έλλειψης.



4. Εκκεντρότητα έλλειψης

- Ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ λέγεται εκκεντρότητα της έλλειψης και προφανώς ισχύει: $0 < \varepsilon < 1$.
- Δύο ελλείψεις με την ίδια εκκεντρότητα ονομάζονται όμοιες.
- Όταν το ε τείνει στο 1 η έλλειψη επιμηκύνεται ενώ όταν το ε τείνει στο 0 η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.
- Για την εκκεντρότητα ε ισχύει ότι $\varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 - \varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

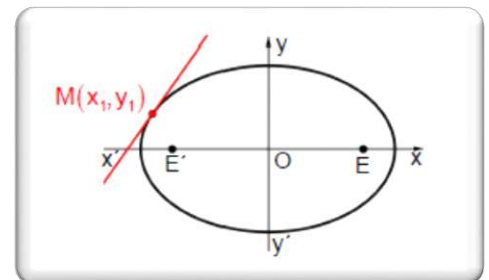
5. Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης

$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται

από την σχέση :

$$(\varepsilon): \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

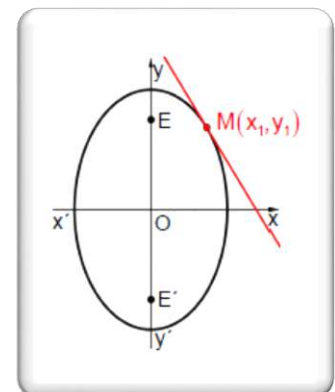


- Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης :

$C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από την

σχέση :

$$(\varepsilon): \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} = 1$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Προσδιορισμός εξίσωσης – στοιχείων έλλειψης

- i. Για να βρούμε την εξίσωση μιας έλλειψης πρέπει να βρούμε τα α και β . Θυμόμαστε ότι ισχύει πάντα $\alpha > \beta$ και $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$
- ii. Αν μας δίνεται η εξίσωση της έλλειψης, βρίσκουμε σε ποιόν άξονα είναι οι εστίες της κοιτάζοντας ποιά μεταβλητή (το x ή το y) έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή.

2. Εφαπτομένη - Τέμνουσα έλλειψης

- α) Αν θέλουμε να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης μιας έλλειψης και γνωρίζουμε το σημείο επαφής, τότε χρησιμοποιούμε απ'ευθείας τους τύπους ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης της έλλειψης.
- β) Αν θέλουμε να βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων μιας έλλειψης που **άγονται από το σημείο** $A(x_0, y_0)$, το οποίο δεν είναι το σημείο επαφής, τότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση εφαπτομένης στο (x_1, y_1) και την εξίσωση της έλλειψης βρίσκουμε το σημείο επαφής (x_1, y_1) .
- γ) Αν δίνεται ή μπορεί να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_{(ε)}$ της εφαπτομένης της έλλειψης, τότε :
- i) **Σαν εξίσωση εφαπτομένης θεωρούμε την $y = \lambda x + \beta$** . Το β υπολογίζεται από την απαίτηση το σύστημα των εξισώσεων της έλλειψης και της ευθείας να έχει μοναδική λύση, ή
- ii) **Προσδιορίζουμε το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$** , αφού ισχύει $\lambda_{(ε)} = -\frac{\beta^2 x_1}{a^2 y_1}$ ή
- $$\lambda_{(ε)} = -\frac{a^2 x_1}{\beta^2 y_1} \text{ (ανάλογα με τη μορφή της έλλειψης) και επιπλέον το σημείο } A \text{ είναι}$$
- σημείο της έλλειψης** άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις βασικές εξισώσεις
- δ) Σε ασκήσεις που έχουν να κάνουν με ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$, η οποία **τέμνει μια έλλειψη στα σημεία A, B** και χρειάζεται να εργαστούμε με τις συντεταγμένες των A, B ενεργούμε όπως αναφέραμε στην παράγραφο της παραβολής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει:

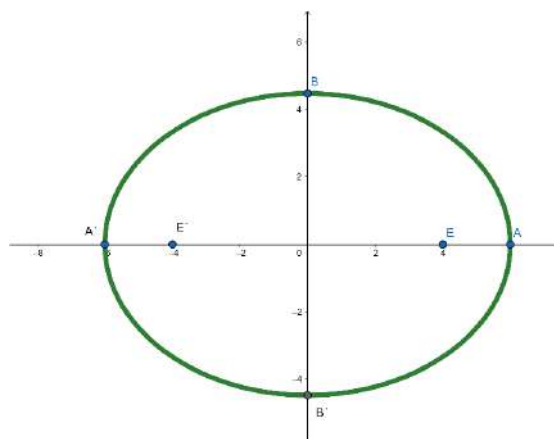
- Εστίες $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα 12
- Εστίες $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μήκος μικρού άξονα 2
- Εστίες $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$

Λύση

- Έχουμε ότι $\gamma=4$ και $2\alpha=12 \Leftrightarrow \alpha=6$

Άρα $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$



- Έχουμε ότι $\gamma=5$ και $2\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$

Άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 + 25 = 26$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{26} = 1$

- Έχουμε ότι $\gamma=3$ και γνωρίζουμε ότι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{3}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 5$

Άρα $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 25 - 9 = 16$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων τις κορυφές, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

- $25x^2 + 4y^2 = 100$

ii. $5x^2 + 169y^2 = 845$

Λύση

i. $25x^2 + 4y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

Επειδή $25 > 4$ έχουμε ότι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$

Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 - 4 = 21$

Επομένως το μήκος του μεγάλου άξονα είναι : $2\alpha = 10$, το μήκος του μικρού άξονα είναι $2\beta = 4$. Οι κορυφές της βρίσκονται στα σημεία $A'(0, -5)$, $A(0, 5)$, $B'(-2, 0)$,

$B(2, 0)$ και οι εστίες της είναι τα σημεία $E'(0, -\sqrt{21})$ και $E(0, \sqrt{21})$

Η εκκεντρότητα είναι ίση με: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

ii. $5x^2 + 169y^2 = 845 \Leftrightarrow \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{5} = 1$

Επειδή $169 > 5$ έχουμε ότι $\alpha^2 = 169 \Leftrightarrow \alpha = 13$ και $\beta^2 = 5 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{5}$

Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 169 - 5 = 164 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{164}$

Επομένως το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $2\alpha = 26$, το μήκος του μικρού άξονα είναι $2\beta = 2\sqrt{5}$, Οι κορυφές της βρίσκονται στα σημεία $A'(-13, 0)$, $A(13, 0)$,

$B'(0, -\sqrt{5})$, $B(0, \sqrt{5})$ και οι εστίες της είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{164}, 0)$ και

$E(\sqrt{164}, 0)$. Η εκκεντρότητα είναι ίση με $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{164}}{13}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΥΤΗΣ

1. Σε κάθε μια από τις παρακάτω ελλείψεις να βρείτε τις εστίες, τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα την εκκεντρότητα και τις κορυφές:

i. $3x^2 + 2y^2 = 24$

ii. $4x^2 + 12y^2 = 1$

iii. $x^2 + 50y^2 = 50$

iv. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

2. Δίνεται έλλειψη C η οποία έχει εστίες $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$ μια κορυφή της είναι το σημείο $A(13,0)$.
Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της έλλειψης C

ii. Τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα και την εκκεντρότητα της έλλειψης C

3. Δίνεται η έλλειψη $C: 9x^2 + 25y^2 = 225$ να βρείτε:

i. Τις εστίες της C

ii. Τις κορυφές και τα μήκη των αξόνων της C

iii. Την εκκεντρότητα της C

iv. Να σχεδιάσετε την C

4. Μεταβλητό τρίγωνο ABΓ με μεταβλητή κορυφή A έχει περίμετρο ίση με 20 και κορυφές $B(-3, 0)$, $\Gamma(3, 0)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A.

5. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$. Να βρείτε:

i. Τις εστίες της C

ii. Τις κορυφές και τα μήκη των αξόνων της C

iii. Την εκκεντρότητα της C

iv. Να σχεδιάσετε την C

6. Έστω E και E' οι εστίες της έλλειψης και M τυχαίο σημείο της $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Αν $(ME) = 1$ να βρείτε το μήκος ME' .

7. Μια έλλειψη έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$ και εστιακή απόσταση 8.

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης

2. Να σχεδιάσετε την έλλειψη

8. Αν ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα που συνδέει τις εστίες περνά από μια κορυφή της έλλειψης, να βρεθεί η εκκεντρότητά της.

9. Ναδειχθεί ότι: $\text{syn}(\text{OEB}) = \frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$ αν δίνεται ότι $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $E(\gamma, 0)$, $B(0, \beta)$ με $\alpha > \beta$

10. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ και η ευθεία $(\varepsilon) y = 2x + 1$,

α) Δείξτε ότι η ευθεία τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία Α και Β,

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής ΑΒ,

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, όπου Ο το κέντρο της έλλειψης.

11. Στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι $(EB) = \alpha$.

12. Έστω έλλειψη με εστίες Ε και Ε' στον xx' και μικρό άξονα ΒΒ'. Αν το τρίγωνο Ε'ΒΕ είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

ΕΛΛΕΙΨΗ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

13. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{2} = 1$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C στα σημεία της με τεταγμένη 1.

14. Δίνεται η έλλειψη $C: 3x^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C στο σημείο $A(1, 1)$.

ii. Την εφαπτόμενη ε της C που είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

15. Δίνεται η έλλειψη $C: 4x^2 + y^2 = 100$

i. Σε ποιόν άξονα βρίσκονται οι εστίες της C;

ii. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων της C.

iii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C που είναι κάθετες στην ευθεία

$$\varepsilon: 3x - 8y + 11 = 0$$

iv. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C που διέρχονται από το σημείο

$$P(1, 14)$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ

2. Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Σ Λ

3. Αν η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα, τότε η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$. Σ Λ

4. Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. Σ Λ

5. Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες Σ Λ

6. Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες Σ Λ

7. Η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν έχουν κοινό σημείο. Σ Λ

8. Η ευθεία $y = -3$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$. Σ Λ

9. Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της Σ Λ

10. Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Σ Λ

11. Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $C: x^2 + 9y^2 = 1$, από μία εστία της είναι ίση με: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Σ Λ

12. Το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου της έλλειψης $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ από τις εστίες αυτής είναι ίσο με 10 Σ Λ

13. Οι ελλείψεις $C_1: 4x^2 + 9y^2 = 36$ και $C_2: 36x^2 + 16y^2 = 576$ είναι όμοιες Σ Λ

14. Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζουμε την απόσταση ενός

σημείου της έλλειψης από μία εστία της

Σ

Λ

15. Αν E, E' σταθερά σημεία και για το μεταβλητό σημείο M ισχύει

$$(ME) + (ME') = 2a, a > 0 \text{ τότε το } M \text{ κινείται σε έλλειψη με εστίες}$$

$$E(\gamma, 0) \text{ και } E'(-\gamma, 0)$$

Σ

Λ

16. Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ είναι όμοιες.

Σ

Λ

17. Η εξίσωση $x^2 + ky^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $k > 0$.

Σ

Λ

18. Η εκκεντρότητα μίας έλλειψης ισούται με $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + 1}}$

Σ

Λ

19. Αν μία ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μία έλλειψη

τότε αυτή εφάπτεται στην έλλειψη στο σημείο αυτό

Σ

Λ

20. Σε μία έλλειψη ισχύει πάντα $a > \beta > \gamma$

Σ

Λ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ	ΕΣΤΙΕΣ	ΚΟΡΥΦΕΣ	μικρός άξονας μεγάλος άξονας
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$ $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \alpha > \gamma$	$E'(-\gamma, 0) \text{ , } E(\gamma, 0)$	$A'(-\alpha, 0) \quad A(\alpha, 0)$ $B'(0, -\beta) \quad B(0, \beta)$	$(B'B) = 2\beta$ $(A'A) = 2\alpha$
$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1,$ $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \alpha > \gamma$	$E'(0, -\gamma) \text{ , } E(0, \gamma)$	$A'(0, -\alpha) \quad A(0, \alpha)$ $B'(-\beta, 0) \quad B(\beta, 0)$	$(B'B) = 2\beta$ $(A'A) = 2\alpha$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ		ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$ $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \alpha > \gamma$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$
$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1,$ $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \alpha > \gamma$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$\frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} = 1$
Οποιαδήποτε μορφή εξίσωσης έλλειψης	$M(x_0, y_0)$ (εξωτερικό σημείο)	ι) ελέγχω αν η $x=x_0$ είναι εφαπτομένη ιι) απαιτώ το σύστημα έλλειψης και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y-y_0=\lambda(x-x_0)$, να έχει μοναδική λύση ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$, θέτοντας, όπου $x=x_0$ και $y=y_0$ στην εξίσωση: $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$ ή ή $\frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} = 1$
Οποιαδήποτε μορφή εξίσωσης έλλειψης	Γνωστός συντελεστής διεύθυνσης λ	απαιτώ το σύστημα έλλειψης και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, να έχει μοναδική λύση για να βρούμε το β ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$ από την εξίσωση $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$ ή ή, $\frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} = 1$ κατασκευάζοντας τον συντελεστή διεύθυνσης αυτής.

§3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

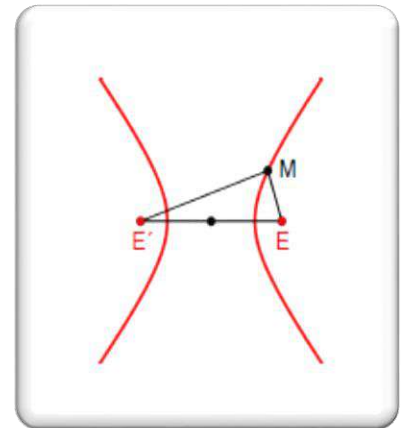
ΘΕΩΡΙΑ

Εξίσωση υπερβολής- Εξίσωση εφαπτόμενης

1. Ορισμός

Έστω E και E' δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Ονομάζουμε **υπερβολή με εστίες τα σημεία E και E'** το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το **η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία E και E'** είναι σταθερή και μικρότερη του EE' .

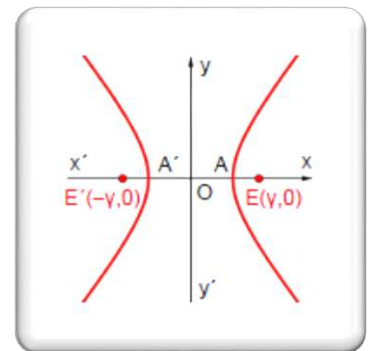
- Τα σταθερά σημεία E και E' τα ονομάζουμε **εστίες** της έλλειψης.
- Την **απόσταση (EE')** την συμβολίζουμε με 2γ και ονομάζεται, η απόσταση αυτή, **εστιακή απόσταση**.
- Την **απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων** την συμβολίζουμε με 2α Δηλαδή θα ισχύει: $|(ME) - (ME')| = 2\alpha$
- Πρέπει πάντα να ισχύει $|(ME) - (ME')| < (EE') \Leftrightarrow 2\alpha < 2\gamma$



2. Εξίσωση υπερβολής ως προς το σύστημα συντεταγμένων Οxy

I. Έστω (c) μια υπερβολή με εστίες τα σημεία E και E' . Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα $x'x$ την ευθεία EE' και άξονα $y'y$ τη μεσοκάθετο του EE' τότε:

- Οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$
- Η εξίσωση της έλλειψης αποδεικνύεται ότι είναι η $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

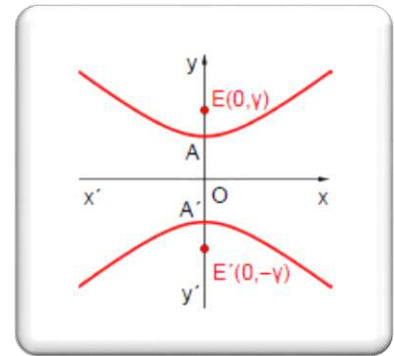


➤ Στην ειδική περίπτωση που ισχύει: $\alpha = \beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \alpha^2$

✓ Τα σημεία τομής της υπερβολής με τον άξονα xx' είναι τα $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$, ονομάζονται **κορυφές της** και το μήκος του τμήματος AA' είναι ίσο με 2α .

II. Εστω (c) μια υπερβολή με εστίες τα σημεία E και E'. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα y'y την ευθεία EE' και άξονα x'x τη μεσοκάθετο του EE' τότε:

- Οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία E'(0,-γ) και E(0,γ)
- Η εξίσωση της έλλειψης αποδεικνύεται ότι είναι η $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$



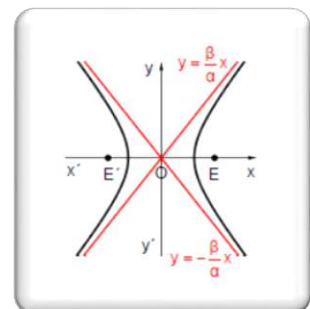
➤ Στην ειδική περίπτωση που ισχύει: $\alpha = \beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και έχει εξίσωση $y^2 - x^2 = \alpha^2$

- ✓ Τα σημεία τομής της υπερβολής με τον άξονα yy' είναι τα A(0,α) και A'(0,-α), ονομάζονται **κορυφές** της και το μήκος του τμήματος AA' είναι ίσο με 2α.

3. Ασύμπτωτες υπερβολής

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ δίνονται από τις

σχέσεις: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$

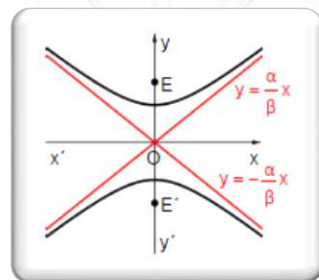


- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής C: $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ δίνονται από τις σχέσεις:

$y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$

- Αν η υπερβολή είναι **ισοσκελής** (δηλ αν $\alpha = \beta$),

τότε οι ασύμπτωτες θα είναι οι ευθείες $y = x$ και $y = -x$



- ✓ Ένας **μνημονικός κανόνας** για να βρούμε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής είναι να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της υπερβολής την μονάδα με μηδέν και να λύσουμε ως προς y (παραγοντοποιούμε το α μέλος, κάνοντας διαφορά τετραγώνων).

• **Ορθογώνιο βάσης υπερβολής**

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι

οι φορείς των διαγωνίων του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με $K(\alpha, \beta), \Lambda(\alpha, -\beta), M(-\alpha, -\beta), N(-\alpha, \beta)$

Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ λέγεται **ορθογώνιο βάσης υπερβολής**.

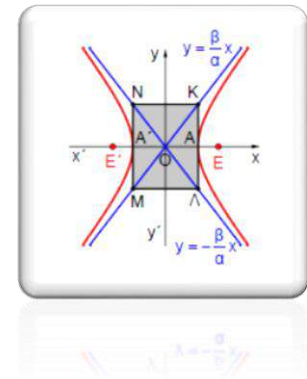
Με όμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε το ορθογώνιο βάσης της

υπερβολής $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$, αλλά τώρα οι κορυφές θα είναι $K(\beta, \alpha), \Lambda(-$

$\beta, \alpha), M(-\beta, -\alpha), N(\beta, -\alpha)$

✓ Το ορθογώνιο βάσης ισοσκελούς υπερβολής είναι τετράγωνο.

Παρατήρηση: Για να σχεδιάσουμε την υπερβολή, σχεδιάζουμε πρώτα το ορθογώνιο βάσης και τις ασύμπτωτες, που είναι οι διαγωνίες του. (Βλέπε σχετικό σχήμα).



4. **Εκκεντρότητα υπερβολής**

✓ Ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ λέγεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής.

✓ Ισχύει ότι: $\varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, άρα $\varepsilon > 1$.

✓ Στην περίπτωση της **ισοσκελούς υπερβολής** ($\alpha = \beta$) οπότε:

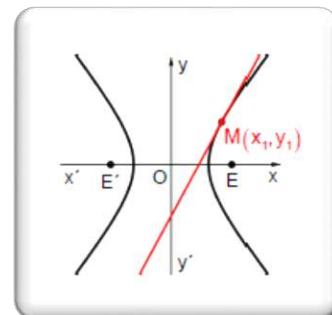
$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} \stackrel{\alpha=\beta}{=} \frac{\sqrt{2\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha} = \sqrt{2}$$

5. **Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής**

✓ Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής

$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από

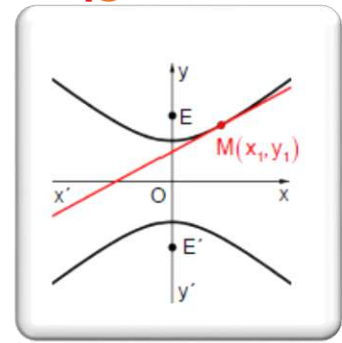
$$\text{την σχέση: } \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$



- ✓ Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής

$$C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \text{ σε ένα σημείο της } M(x_1, y_1)$$

$$\text{δίνεται από την σχέση : } \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} - \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$$

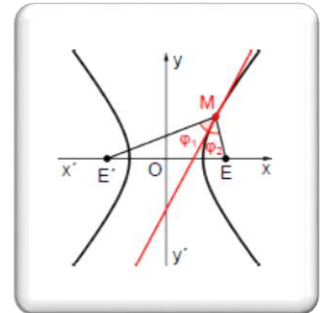


6. Ιδιότητες υπερβολής

- Η ευθεία που ενώνει τις εστίες E' και E της υπερβολής είναι ο άξονας συμμετρίας της.
- Το μέσο O του τμήματος $E'E$ είναι το κέντρο συμμετρίας της υπερβολής.
- Κάθε υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

❖ Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

- Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M **διχοτομεί** την γωνία $E'ME$ όπου E' , E οι εστίες της υπερβολής.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Προσδιορισμός εξίσωσης – στοιχείων έλλειψης

1. Για να βρούμε την εξίσωση μιας υπερβολής πρέπει να βρούμε τα a και b . Θυμόμαστε ότι ισχύει πάντα $\gamma^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$
2. Αν μας δίνεται η εξίσωση της υπερβολής, **βρίσκουμε σε ποιόν άξονα είναι οι εστίες της κοιτάζοντας ποιά μεταβλητή (το x ή το y), έχει το θετικό πρόσημο στην εξίσωση.**
3. Για να βρούμε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων μιας υπερβολής **θέτουμε στην εξίσωση της υπερβολής όπου 1 το 0 και παραγοντοποιούμε το 1^ο μέρος.**
4. Οι παρατηρήσεις και οι μεθοδολογίες για τη λύση ασκήσεων σχετικών με την υπερβολή είναι ανάλογες με αυτές των άλλων κωνικών τομών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΥΤΗΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει:

- i. Εστίες $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και η απόσταση των κορυφών είναι ίση με 16.
- ii. Εστίες $E'(0, -\sqrt{13})$ και $E(0, \sqrt{13})$ και ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y = \frac{3}{2}x \text{ και } y = -\frac{3}{2}x$$

- iii. Εστίες $E'(0,-2)$ και $E(0,2)$ και είναι ισοσκελής.

Λύση

- i. Η εξίσωση θα είναι της μορφής: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Η απόσταση των κορυφών είναι ίση με 16 άρα έχουμε $2a=16 \Leftrightarrow a=8$

Ισχύει ότι $\gamma=10 \Leftrightarrow \gamma^2=100 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 100 \Leftrightarrow 64 + \beta^2 = 100 \Leftrightarrow \beta^2 = 36$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

- ii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής: $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $y = \frac{3}{2}x$ και $y = -\frac{3}{2}x$

Άρα:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}\beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4}\beta^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ότι } \gamma = \sqrt{13} \Leftrightarrow \gamma^2 = 13 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 &= 13 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{9}{4}\beta^2 + \beta^2 = 13 \Leftrightarrow 9\beta^2 + 4\beta^2 = 52 \Leftrightarrow \\ 13\beta^2 &= 52 \Leftrightarrow \beta^2 = 4 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $\alpha^2 = 9$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

- iii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $y^2 - x^2 = a^2$ (αφού οι εστίες βρίσκονται στον $y'y$)

Έχουμε ότι : $\gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow 4 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $y^2 - x^2 = 2$

2. Σε κάθε μια από τις παρακάτω υπερβολές να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές τις ασύμπτωτες, τις κορυφές του ορθογωνίου βάσης και την εκκεντρότητα

i. $C_1: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

ii. $C_2: 6y^2 - 4x^2 = 72$

Λύση

i. Η υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, έχει $\alpha^2 = 16$, $\beta^2 = 9$

Ξέρουμε ότι: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16 + 9 = 25$

- Επομένως οι εστίες της υπερβολής C_1 είναι: $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$
- Οι κορυφές της υπερβολής C_1 είναι τα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$
- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής C_1 είναι οι : $y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{3}{4}x$ και $y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{3}{4}x$
- Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής C_1 είναι: $K(4,3)$, $\Lambda(-4,3)$, $M(4,-3)$, $N(-4,-3)$

▪ Η εκκεντρότητα της υπερβολής C_1 είναι : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$

ii. Η υπερβολή C_2 γράφεται $6y^2 - 4x^2 = 72 \Leftrightarrow \frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{18} = 1$

Έχει $\alpha^2 = 12 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{12} \Leftrightarrow \alpha = 2\sqrt{3}$ και $\beta^2 = 18 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Ξέρουμε ότι $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 12 + 18 = 30 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{30}$

Επομένως οι εστίες της υπερβολής C_2 είναι $E(0, \sqrt{30})$ και $E'(0, -\sqrt{30})$

Οι κορυφές της υπερβολής C_2 είναι τα σημεία $A'(0, -2\sqrt{3})$ και $A(0, 2\sqrt{3})$

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι ίσες με:

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}x = \frac{\sqrt{6}}{3}x \text{ και } y = -\frac{\alpha}{\beta}x = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$$

- Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής C_2 είναι: $K(3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, $\Lambda(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, $M(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$, $N(3\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$
- Η εκκεντρότητα της υπερβολής C_2 είναι: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{30}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{60}}{6} = \frac{2\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

3. Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. Να βρείτε: την εξίσωση της εφαπτομένης που

διέρχεται από το σημείο $A(2,3)$

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $A(2,3)$ είναι $x \cdot x_A - \frac{y \cdot y_A}{3} = 1$

όπου $x_A = 2$ και $y_A = 3$ άρα αντικαθιστώντας έχουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x \cdot 2 - \frac{y \cdot 3}{3} = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 1$$

4. Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ και το σημείο $M(2,-3)$. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το σημείο M .

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα άκρα της χορδής με μέσο το σημείο M .

Τότε ισχύει ότι: $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$ (1) και

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -3 \Leftrightarrow y_1 + y_2 = -6$$
 (2)

Τα σημεία A και B ανήκουν στην υπερβολή επομένως την επαληθεύουν άρα

$$x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} = 1$$
 (3)

$$x_2^2 - \frac{y_2^2}{4} = 1$$
 (4)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (3) και (4) κατά μέλη έχουμε:

$$x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} - \left(x_2^2 - \frac{y_2^2}{4} \right) = 1 - 1 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - \left(\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{4} = 0 \Leftrightarrow 4(x_1 - x_2) + \frac{6}{4}(y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{8}{3}$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $y + 3 = -\frac{8}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΥΤΗΣ

1. Σε κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις υπερβολών να βρείτε τις εστίες τις κορυφές ,

την εκκεντρότητα , τις ασύμπτωτες και τις κορυφές του ορθογωνίου βάσης:

i. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

ii. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

iii. $25x^2 - y^2 = 25$

iv. $4y^2 - 16x^2 = 1$

2. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, συμμετρικές

ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α. έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 7$ και $e = \frac{3}{2}$

β. έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και εξισώσεις ασύμπτωτων $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$

γ. έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

3. Δίνεται ισοσκελής υπερβολή C της οποίας οι εστίες είναι τα σημεία του άξονα xx' συμμετρικά ως

προς την αρχή των αξόνων. Αν η υπερβολή C διέρχεται από το σημείο $M(4, 2\sqrt{2})$ να βρείτε:

i. Την εξίσωση της υπερβολής C

ii. Τις εστίες , την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C .

4. Δίνεται υπερβολή C με εστίες

$E'(0, -\sqrt{5})$ και $E(0, \sqrt{5})$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, 3)$. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της υπερβολής C

ii. Την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C .

5. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $C: x^2 - y^2 = \alpha^2$ και μια ευθεία $\varepsilon // x'x$

που τέμνει την C στα σημεία Γ και Δ . Αν A είναι η κορυφή της υπερβολής τότε :

- i. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής
- ii. Να αποδείξετε ότι $AG \perp AD$.

6. Δίνονται οι υπερβολές

$$C_1: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{και} \quad C_2: 3y^2 - x^2 = 12$$

- i. Να βρείτε τις εστίες και τις κορυφές των C_1 και C_2 .
- ii. Να βρείτε τις εκκεντρότητες των C_1 και C_2 .
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των C_1 και C_2 .
- iv. Να σχεδιάσετε τις C_1 και C_2 .

7. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, της οποίας η ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60° .

ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

8. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{12} = 1$. Να βρείτε:

- i. Τις εφαπτόμενες της υπερβολής C στα σημεία της με τετμημένη 6
- ii. Το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων.

9. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{18}}{2}$

Να βρείτε:

- i. Την εξίσωση της υπερβολής C .
- ii. Τις εφαπτόμενες της υπερβολής C στα σημεία με τεταγμένη 7
- iii. Το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων.

10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: 8x^2 - y^2 = 8$ η οποία απέχει από την εστία $E(3, 0)$ απόσταση ίση με 2.

11. Δίνεται η υπερβολή $C: 3x^2 - y^2 = 2$. Να βρείτε:

- i. Την εφαπτομένη e_1 της C στο σημείο $A(1,1)$

- ii. Την εφαπτομένη ε_2 της C που είναι παράλληλη με την ε_1
- iii. Τις εφαπτόμενες της C οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $x-3y-4=0$

12. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C οι οποίες:

- i. Είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta: x-y+5=0$
- ii. Διέρχονται από το σημείο $\Sigma(1,-1)$

13. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή

$C: x^2 - y^2 = 9$ και η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $M(\sqrt{10}, 1)$. Αν d και d' οι αποστάσεις των εστιών E και E' από την εφαπτομένη (ε), να αποδείξετε ότι $d \cdot d' = a^2$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

14. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από το σημείο $A(5,0)$ και την ευθεία $\varepsilon: x = \frac{16}{5}$ ισούται με $\frac{5}{4}$

15. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ και η ευθεία $\delta: x = \frac{3}{2}$. Να αποδείξετε ότι η υπερβολή C είναι

το σύνολο (ο γεωμετρικός τόπος) των σημείων M για τα οποία το πηλίκο $\frac{d(M, E)}{d(M, \delta)}$ είναι

(σταθερό και) ίσο με ε

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
 Ισχύει πάντα $a > b$. Σ Λ
2. Η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ σε δύο σημεία.
Σ Λ
3. Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή.
Σ Λ
4. Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = a^2$ έχει εκκεντρότητα $e = \sqrt{2}$. Σ Λ
5. Η υπερβολή $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες
 $\varepsilon_1: y = \frac{\alpha}{\beta} x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{\alpha}{\beta} x$. Σ Λ
6. Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή. Σ Λ
7. Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή.
Σ Λ
8. Η ευθεία $y = \frac{1}{2} x$ εφάπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Σ Λ
9. Το σημείο $(5, 4)$ ανήκει σε μια ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$.
Σ Λ
10. Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. Σ Λ
11. Τα μόνα κοινά σημεία μίας υπερβολής και με το ορθογώνιο βάσης της, είναι οι κορυφές της Σ Λ
12. Η υπερβολή $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη Σ Λ
13. Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών της υπερβολής $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, προκύπτουν από την
 ισότητα: $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 0$ Σ Λ

- 14.** Οι υπερβολές $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, έχουν την ίδια εστιακή απόσταση, την ίδια εκκεντρότητα, τις ίδιες ασύμπτωτες και το ίδιο ορθογώνιο βάσης. **Σ** **Λ**
- 15.** Η υπερβολή $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, έχουν :
- α) την ίδια εστιακή απόσταση **Σ** **Λ**
- β) τις ίδιες εστίες **Σ** **Λ**
- γ) την ίδια εκκεντρότητα **Σ** **Λ**
- δ) τέσσερα κοινά σημεία **Σ** **Λ**
- 16.** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ έχουν εξίσωση $x = \pm \frac{\beta}{\alpha} y$. **Σ** **Λ**
- 17.** Η εκκεντρότητα μίας υπερβολής ισούται με $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + 1}}$ **Σ** **Λ**
- 18.** Οι κορυφές και οι εστίες μίας υπερβολής είναι συνευθειακά σημεία **Σ** **Λ**
- 19.** Οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής βρίσκονται πάνω στις ασύμπτωτες **Σ** **Λ**

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ	ΕΣΤΙΕΣ	ΚΟΡΥΦΕΣ	ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$ $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2, \gamma > \alpha$	$E'(-\gamma, 0)$ $E(\gamma, 0)$	$A'(-\alpha, 0)$ $A(\alpha, 0)$	$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$	$y = \frac{\beta}{\alpha} x$ $y = -\frac{\beta}{\alpha} x$
$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$ $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2, \gamma > \alpha$	$E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$	$A'(0, -\alpha)$ $A(0, \alpha)$	$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$	$y = \frac{\alpha}{\beta} x$ $y = -\frac{\alpha}{\beta} x$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ	ΕΣΤΙΕΣ	ΚΟΡΥΦΕΣ	ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ
$x^2 - y^2 = \alpha^2$ (ισοσκελής)	$E'(-\gamma, 0)$ $E(\gamma, 0)$	$A'(-\alpha, 0)$ $A(\alpha, 0)$	$\varepsilon = \sqrt{2}$	$y = x$ $y = -x$
$y^2 - x^2 = \alpha^2$ (ισοσκελής)	$E'(0, -\gamma)$ $E(0, \gamma)$	$A'(0, -\alpha)$ $A(0, \alpha)$	$\varepsilon = \sqrt{2}$	$y = x$ $y = -x$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ		ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$ $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2, \gamma > \alpha$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$
$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$ $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2, \gamma > \alpha$	$A(x_1, y_1)$ (σημείο επαφής)	$\frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} - \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$
Οποιαδήποτε μορφή εξίσωσης υπερβολής	$M(x_0, y_0)$ (εξωτερικό σημείο)	ι) ελέγχω αν η $x=x_0$ είναι εφαπτομένη ιι) απαιτώ το σύστημα υπερβολής και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y-y_0=\lambda(x-x_0)$, να έχει μοναδική λύση ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$, θέτοντας, όπου $x=x_0$ και $y=y_0$ στην εξίσωση: $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$ ή ή $\frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} - \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$
Οποιαδήποτε μορφή εξίσωσης έλλειψης	Γνωστός συντελεστής διεύθυνσης λ	απαιτώ το σύστημα υπερβολής και ευθείας (ε), με $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, να έχει μοναδική λύση για να βρούμε το β ή προσπαθώ να βρω το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$ από την εξίσωση $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$ ή ή, $\frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} - \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$ κατασκευάζοντας τον συντελεστή διεύθυνσης αυτής.

§ 3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$

Σχετική θέση ευθείας και κωνικής τομής

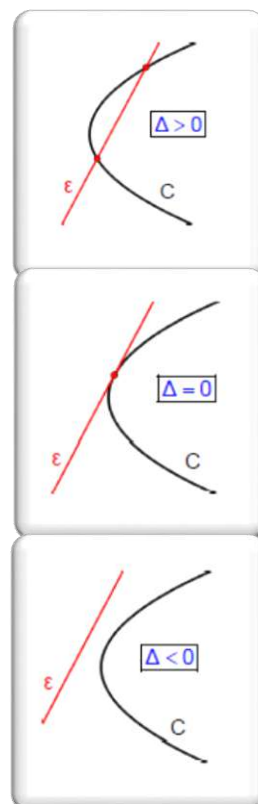
Έστω η ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta$ και η κωνική τομή $C: Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$

Η ευθεία (ε) και η κωνική έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta & (1) \\ Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0 & (2) \end{cases} \text{ έχει το πολύ δύο λύσεις.}$$

Για την επίλυση του συστήματος αντικαθιστούμε στην (2), όπου $y = \lambda x + \beta$ οπότε προκύπτει μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x .

- Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες, τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.
- Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες ίσες, τότε η ευθεία εφαπτεται της κωνικής.
- Τέλος αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.



Υπενθυμίζουμε ότι:

- Η συνθήκη $\Delta = 0$ μας επιτρέπει να λύνουμε προβλήματα που έχουν σχέση με την εφαπτομένη ευθεία σε κωνική τομή (παραβολή, έλλειψη, υπερβολή).
- Ισχύει και για τον κύκλο, αλλά εκεί μας συμφέρει από πλευράς πράξεων να χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της εφαπτομένης (ε) να απέχει από το κέντρο απόσταση ίση με την ακτίνα, η οποία περιγράφεται από τη συνθήκη $d(K, \varepsilon) = \rho$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Α) Μια παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, κορυφή το $O(0,0)$ και ο κύκλος

$$C: x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{διέρχεται από την εστία της. Να βρείτε την εξίσωσή της.}$$

- Β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκεται το σημείο $M(2t^2, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- Γ) Αν το $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ ανήκει στην παραβολή $C_1: y^2 = 2x$ να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της

$$C_1 \text{ στο } A \text{ εφάπτεται της παραβολής } C_2: x^2 = 2y \quad .$$

2. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 1 = 0$. Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1 .

α) Να αποδείξετε ότι $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$

- β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1 .

- γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 , τότε:

- i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.

- ii) να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1

3. α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το σημείο $K(3,4)$ είναι ίση με 3.

- β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του C από την αρχή των αξόνων καθώς και τα σημεία του C που έχουν αυτές τις αποστάσεις.

- γ. Να βρείτε τις εφαπτομένες του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

- δ. Να δείξετε ότι το σημείο $H(4,2)$ είναι εσωτερικό του C και να βρείτε τη χορδή του που έχει μέσο το H .

- ε. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του C από την ευθεία $\varepsilon: y = -2x$.

- στ. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 1$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C , C_1 καθώς και την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση τους.

- ζ. Να βρείτε την εφαπτομένη του C_1 στο σημείο $\Sigma\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(0,6)$.
- α) Να αποδείξετε ότι $C: x^2 + (y-4)^2 = 4$
- β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .
- γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος (β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 .
5. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 25$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο $M(0,-10)$. Αν A και B είναι τα σημεία επαφής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο, να βρείτε:
- Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2 .
 - Τις συντεταγμένες των σημείων επαφής A και B .
 - Την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία A και B .
6. Δίνεται η παραβολή $x^2 = 4y$ και οι ευθείες: $\varepsilon_1: x-y-1=0$ και $\varepsilon_2: x-2y+12=0$.
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 εφάπτεται στην παραβολή C και να βρείτε το σημείο τομής A
- β) Αν B και Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με την παραβολή C , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- γ) Εστω ε_3 η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $M\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$. Να βρείτε:
- την εξίσωση της ευθείας ε_3
 - την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3
7. Θεωρούμε την παραβολή $C_1: y^2 = 2px$ και την έλλειψη $C_2: 4x^2 + 2y^2 = 3p^2, p > 0$
- Να δείξετε ότι οι εστίες της έλλειψης C_2 είναι τα σημεία: $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$
 - Να δείξετε ότι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 είναι τα $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$

iii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_1 και C_2 στο σημείο είναι $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ κάθετες.

8. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 8$

9. Δίνονται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon : x = 4$. Αν

Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε

τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ .

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της

έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

10. Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

β) Αν M είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $(ME') = 2 \cdot (ME)$ τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ME' και ME .

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή.

11. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{16}{9}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) = 0$, όπου $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 25$

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο

τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B .

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 .

- 12.** Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που οι εστίες της συμπίπτουν με τις εστίες της έλλειψης:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \text{ και έχει εκκεντρότητα } e=2.$$

- 13.** Έστω η παραβολή $C_1: y^2 = -8x$ και η υπερβολή C_2 με εστίες $E'(-8,0)$, $E(8,0)$ και κορυφές

$$A'(-4,0) \text{ και } A(4,0).$$

- Να βρείτε την εστία E_1 και τη διευθετούσα δ της παραβολής C_1
- Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2
- Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C_2 που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, -6)$
- Έστω ε η εφαπτομένη της υπερβολής C_2 στο σημείο της $M(8,12)$ και K το σημείο τομής της ευθείας OM με τη διευθετούσα δ της C_1 . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και KE είναι κάθετες
- Έστω ζ η εφαπτομένη της παραβολής C_1 στο σημείο της με τεταγμένη -12 . Να βρείτε :
 - την εφαπτομένη της ζ
 - την οξεία γωνία που σχηματίζουν η εφαπτομένη ζ και η εφαπτομένη ε της C_2 στο $M(8,12)$

- 14.** Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που οι εστίες της συμπίπτουν με τις εστίες της έλλειψης:

$$C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \text{ και έχει εκκεντρότητα } e=2 \text{ Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις}$$

$$\text{ίδιες εστίες με την έλλειψη } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- 15.** Δίνονται οι εξισώσεις : $x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$ (2)

- Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν κύκλους C_1 και C_2 αντίστοιχα των οποίων να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες.
- Να αποδείξετε ότι τα κέντρα M των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά στους παραπάνω κύκλους C_1 και C_2 ανήκουν σε κλάδο υπερβολής της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

- 16.** Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ και η υπερβολή C_2 που έχει εκκεντρότητα $e=2$ και ίδιες εστίες με

την έλλειψη C_1 .

- Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2

- ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2
- iii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_1 και C_2 στο κοινό σημείο του 1^{ου} τεταρτημορίου είναι κάθετες
- iv. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής C_2 που διέρχονται από το σημείο $P(-2,6)$

17. Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή $C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy.

18. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία

$A'(-2,0)$, $A(2,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα $A'A$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$.

19. Η Εστία της παραβολής $C_1 : y^2 = 4x$ συμπίπτει με την μία εστία της έλλειψης

$$C_2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \alpha > \beta > 0$$

α) Να δείξετε ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ κινείται σε μία ισοσκελή υπερβολή.

β) Να δείξετε ότι $\alpha > 1$

γ) Αν επιπλέον η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης

20. Εστω οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + \lambda y = 2$ και $\varepsilon_2 : x - y = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

α) Να δείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών ανήκει σε μία ισοσκελή υπερβολή C .

β) Να υπολογίσετε τις εστίες E' και E της C .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο M που ανήκει στην ευθεία $y = -x$ και ισχύει

$$(ME) - (ME') = 8$$

21. Εστω η $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, με εστιακή απόσταση 2γ

- α) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου με διάμετρο τον μεγάλο άξονα της έλλειψης
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής A, B της έλλειψης με την $x=y$
- γ) Θεωρούμε την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο τομής της με την ευθεία $x=y$, το οποίο έχει αρνητική τεταγμένη. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με την εκκεντρότητα της έλλειψης.
- δ) Να υπολογίσετε την εξίσωση παραβολής με κορυφή O, άξονα συμμετρίας τον $x'x$, η οποία διέρχεται από τα A και B.

22. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 16$

- α) Να βρεθεί εξίσωση κύκλου με κέντρο το $K(0,0)$ που διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής
- β) Να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Γ με τεταγμένη $x_1=2$ και τεταγμένη $y_1>0$
- γ) Εστω M το σημείο τομής της εφαπτομένης του κύκλου στο Γ με τον άξονα xx' . Από το M φέρνουμε παράλληλη στον yy' που τέμνει τον ένα κλάδο της υπερβολής στα Δ και Ε. Να δείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο τα σημεία Δ και Ε διέρχεται από το Γ.

23. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{OG} = (x-1, 2x-4)$, $\vec{OD} = (x-2, x-3)$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε το x ώστε: $\vec{OG} \perp \vec{OD}$
- β) Για την μεγαλύτερη τιμή του x που βρήκατε στο α) ερώτημα
- ι) Να βρεθεί εξίσωση κύκλου με διάμετρο ΓΔ
- ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις εφαπτομένων του κύκλου στα Γ, Δ
- iii) Αν Β το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Γ με τον yy' και Α το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Δ με τον xx' , να βρεθεί η εξίσωση και η εκκεντρότητα της έλλειψης με κέντρο το $(0,0)$ και μία κορυφή στον άξονα yy' το Β και μία στον xx' στο Α.

24. Δίνεται το σημείο $P(x_0, y_0)$.

- i) Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ κινείται σε κύκλο με εξίσωση $C: x^2 + y^2 = 4$, να δείξετε ότι το $M(x, y)$ με $x = \frac{3}{2} \cdot x_0$, $y = \frac{1}{2} \cdot y_0$ κινείται σε έλλειψη C_1 της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.
- ii) Αν Ε, Ε', τα σημεία τομής του C με τον xx' , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων

$A(x,y)$ του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από τα E, E' είναι ίση με 1.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής που είναι κάθετη στο διάνυσμα

$$\vec{\alpha} = (5, 1)$$

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2(2 + \lambda)y + 4\lambda + 4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}^*$

α) Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$

β) Αν $\lambda = -2$, να βρεθεί εξίσωση έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία στα οποία ο κύκλος C τέμνει τον yy' και μήκος μικρού άξονα την διάμετρο του κύκλου.

γ) να βρείτε την εξίσωση υπερβολής με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον yy' ,

ασύμπτωτες παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{u} = (-4, -2)$ και εστιακή απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

26. Δίνεται η έλλειψη $(c_1): 9x^2 + 25y^2 = 225$ και η υπερβολή $(c_2): x^2 - 7y^2 = 14$. Να δείξετε ότι :

α) Οι $(c_1), (c_2)$ έχουν τις ίδιες εστίες.

β) Οι $(c_1), (c_2)$ τέμνονται σε τέσσερα σημεία, που αποτελούν κορυφές ορθογωνίου.

γ) Οι εφαπτόμενες των $(c_1), (c_2)$ στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.

27. Δίνονται οι κύκλοι $c_1: x^2 + y^2 = 5$ και $c_2: x^2 + y^2 - 10x - 20y + 45 = 0$

α) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα του κύκλου c_2

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου c_2 που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{OK}$, όπου O η αρχή των αξόνων και K το κέντρο του κύκλου c_2

γ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c_3 στον οποίο οι δύο προηγούμενοι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

28. Δίνεται η έλλειψη $c_1: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ και η παραβολή c_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα

συμμετρίας τον $y'y$ και η εστία της ταυτίζεται με την εστία E (με θετική τετμημένη) της έλλειψης c_1 .

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής c_2

- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 της παραβολής c_2 που διέρχονται από την εστία E' της έλλειψης c_1 οι οποίες είναι μεταξύ τους κάθετες
- γ) Έστω ε_3 και ε_4 οι εφαπτομένες της έλλειψης στα σημεία $A(8,0)$ και $\Gamma(4,6)$ αντίστοιχα και έστω M το σημείο τομής τους. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες του σημείου M
 - τη γωνία $\left(\overrightarrow{ME'}, \overrightarrow{M\Gamma}\right)$, όπου E' η εστία της έλλειψης με αρνητική τετμημένη

29. Δίνεται ο κύκλος $c_1: x^2 + y^2 = 9$

- Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου c_1 που σχηματίζουν γωνία 60° με τον άξονα $x'x$
- Τα σημεία τομής A' και A του κύκλου c_1 με τον άξονα $y'y$ είναι κορυφές μίας υπερβολής c_2 , της οποίας η μία ασύμπτωτη είναι η $y = \frac{3}{4}x$
 - Να βρείτε την εξίσωση, τις εστίες και την εκκεντρότητα της υπερβολής c_2
 - Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής που διέρχονται από το σημείο $P(-12, -3)$
- Έστω η εστία της υπερβολής c_2 με θετική τεταγμένη. Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου c_1 που απέχουν από την εστία E απόσταση ίση με $\frac{14}{3}$

30. Δίνεται η παραβολή $c_1: y^2 = 8x$, το σημείο $P(-4, 2)$ και η εφαπτομένη ε_1 της c_1 στο σημείο της $M(18, -12)$

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1
- Να βρείτε τις εφαπτομένες ε_2 και ε_3 που διέρχονται από το σημείο P
- Έστω A και B τα σημεία επαφής της παραβολής c_1 με τις παραπάνω εφαπτομένες ε_2 και ε_3
 - να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c_2 που έχει διάμετρο το AB
 - αν ε_4 είναι η εφαπτόμενη του κύκλου c_2 στο σημείο $N(-1, -1)$, να βρείτε

την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_4

31. Δίνεται η παραβολή $c: y^2 = 16x$ και η ευθεία $\varepsilon_1: 4x + 3y + 10 = 0$

- Αν $M(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της c , να αποδείξετε ότι $d(M, \varepsilon_1) = \frac{(\beta + 6)^2 + 4}{20}$

- Να βρείτε σημείο M της παραβολής c τέτοιο, ώστε η απόστασή του από την ευθεία ζ_1

να είναι η ελάχιστη δυνατή και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της c στο σημείο αυτό είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1

γ) Έστω ε_2 η ευθεία που είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από την εστία της παραβολής c .

i) να βρείτε την εξίσωση της ε_2

ii) να βρείτε τα σημεία τομής A και B της ευθείας ε_2 με την παραβολή c

iii) να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της c στα A και B είναι κάθετες.

32. Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0, (1)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_λ , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, του

οποίου να υπολογίσετε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .

β. i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_λ , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B , των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

ii) Αν $A(1,0)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_λ στο σημείο A .

γ. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C , με εστίες τα σημεία A, B και εκκεντρότητα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

δ. Αν M είναι ένα κοινό σημείο των C_λ, C , να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $(MA) + (MB) = 2(MK)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Μαθηματικά Ι – Αναλυτική Γεωμετρία* Γ' Λυκείου, ΟΕΔΒ (Έκδοση 1984)
2. *Μαθηματικά – Τόμος 1^{ος}*, Ηλία Ντζιώρα (Έκδοση 1976)
3. *Διανυσματική – Αναλυτική Γεωμετρία*, Νικόλαου Πνευματικού
4. *Αναλυτική Γεωμετρία* Γ' Λυκείου, 1^η Δέσμη, Νίκου Κυριακόπουλου
5. *Αναλυτική Γεωμετρία*, Βαγγέλη Σπανδάγου
6. *ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ* (1^η Δέσμη), Gaston Aligniac
7. Περιοδικά Ευκλείδης Β', Ε.Μ.Ε.
8. Εκπαιδευτικό υλικό Κ.Ε.Ε.