

 νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ		ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΖΑΦΕΙΡΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΔΕΛΕΝΙΚΑ ΜΑΡΙΑ	
	ΤΜΗΜΑ	Γ Λυκείου Θ1	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	Άνω Πατήσια	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ	

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(6 Μονάδες)

A2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle (σχήμα).

(3 Μονάδες)

A3. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αρχική συνάρτηση η παράγουσα της συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ;

(3 Μονάδες)

A.4 Έστω μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ η οποία παρουσιάζει κρίσιμα σημεία. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Όλα τα κρίσιμα σημεία της f αποτελούν θέσεις τοπικών ακροτάτων της »

- Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό με Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής)
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(1,2) Μονάδες

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ):

α. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το ολικό της ελάχιστο.

β. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = f(\beta)$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$, τότε λόγω του Θεωρήματος Rolle, η f θα είναι και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ τότε η f είναι σταθερή στο $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

δ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ε. Η C_f μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη σε άκρο κλειστού διαστήματος του D_f .

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει στο σημείο $x_1 = -1$ τοπικά ακρότατο με τιμή 5 τότε :

B.1 Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -3$

B.2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B.3 Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B.4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ .

B.5 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 f''(x)e^x dx$

(6 , 6 , 4 , 4 , 5 Μονάδες)

Θέμα Γ

Γ. 1 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{2x} + \alpha & x < 0 \\ 2023 & x = 0 \\ x \cdot \ln(x+1) + (a - 2022)x + \beta + 2005 & x > 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β αν γνωρίζεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Για $\alpha = 2023$ και $\beta = 18$

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο αυτό.

iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iv. Να δείξετε ότι $2f(x) - 4000 \geq -\frac{1}{e} + 46$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(4 , 4 , 4 , 3 Μονάδες)

Γ. 2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ με $x > 0$ και $x \neq 1$. Έστω $A(x, f(x))$ ένα σημείο της C_f .

Έστω E είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τον οριζόντιο άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$, το σημείο A και την κάθετη από το A στον $x'x$.

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x & x > 1 \\ -x \cdot \ln x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

- ii. Να βρείτε την τιμή του $x < 1$ ώστε το εμβαδόν να γίνεται μέγιστο.
iii. Αν την χρονική στιγμή t_0 ένα κινητό που κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο $M(e^2, 2)$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 μονάδες / sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του παραπάνω ορθογωνίου την χρονική στιγμή t_0 .

(3 , 4 , 3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \text{ και } f(1) = 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι 1-1.

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x$.

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες τη συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{f(x+1)}{x}, x \in (0, +\infty)$$

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2[f(e^x)]^2 = 3 \sin x$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - x) \eta \mu \frac{x}{2} dx$

(3 , 6 , 5 , 4 , 5 , 5 Μονάδες)