

 νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ		ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ		
	ΤΜΗΜΑ		
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ		
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ	

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν f μία συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ όπου f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

7 Μονάδες

A2. Πότε μία συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο;

4 Μονάδες

A3. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

4 Μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 . Σ Λ

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάποια $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$. Σ Λ

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε $f'(x) = -\sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ Λ

δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Σ Λ

ε) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ

10 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 3 & , x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} & , x > 1 \end{cases}$$

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

5 Μονάδες

B2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

6 Μονάδες

B3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \ln(x - 2)$. Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

8 Μονάδες

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{5}{2}$.

6 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής με $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \frac{1}{e}$ και $f(e) = 1 - e$, για την οποία ισχύει: $f^2(x) + 2xf(x) = \ln^2 x - x^2$, για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.

7 Μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ είναι η οριζόντια ευθεία $y = -1$, με σημείο επαφής το $B(1, -1)$.

7 Μονάδες

Γ3. Αν M σημείο της C_f με $x > 1$, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OBM όπου O η αρχή των αξόνων, δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = \ln \sqrt{x}$, $x > 1$.

5 Μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x E(x) - 2 E(2)}{x - 2} = 2 E'(2) + \ln \sqrt{2}$.

6 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\rho_1, 0)$ και $B(\rho_2, 0)$ με $\rho_1 \neq \rho_2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\rho_1, \rho_2\}$.

5 Μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f''(x)f(x) < (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 Μονάδες

Δ3. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο 1 συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)^{g(1+h)}}{h} = 5 \text{ και } g(1) = f(1).$$

Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha = h(x_0)$, όπου

$h(x) = 3(f'(x))^2 + f''(x)(3f''(x) - f(x))$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι $(f'(\rho_1))^2 + (f'(\rho_2))^2 = 10$ να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x^2 + 3x + 1$

10 Μονάδες

Δ4. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+2) \left(f\left(\frac{x}{x+2}\right) - 5 \right) \right]$

5 Μονάδες

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Ευχόμαστε επιτυχία!