

|                                                                                   |                             |                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|
|  | ΜΑΘΗΜΑ -<br>ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ | ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ<br>Α ΛΥΚΕΙΟΥ |
|                                                                                   | ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ                   | ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΒΑΣΙΛΗΣ      |
|                                                                                   | ΤΜΗΜΑ                       |                        |
|                                                                                   | ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ                   | ΚΑΤΩ ΠΑΤΗΣΙΩΝ          |
|                                                                                   | ΔΙΑΡΚΕΙΑ                    | ΤΡΕΙΣ (3) ΩΡΕΣ         |

## ΘΕΜΑ Α

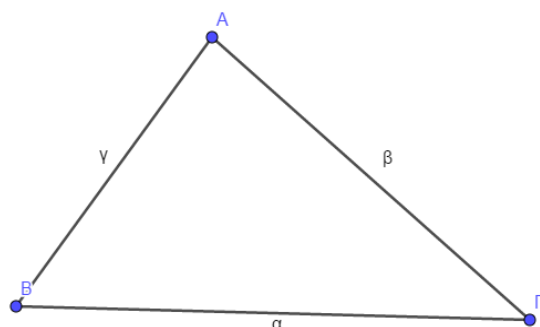
**A1)** Να συμπληρθούν οι παρακάτω προτάσεις στα κενά που υπάρχουν και να μεταφερθούν στο φύλλο των απαντήσεων:

**α)** Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ..... από κάθε .....

**β)** Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια ..... ή ..... γωνία.

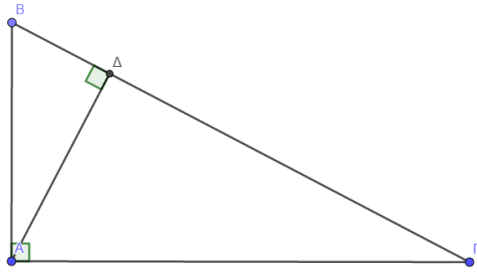
**γ)** Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες τότε αυτό είναι ..... Αν και οι τρεις γωνίες είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι .....

**δ)** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τότε:



- $AB < A\Gamma \Leftrightarrow \dots$
- $B\Gamma > BA \Leftrightarrow \dots$
- $\hat{B} < \hat{A} \Leftrightarrow \dots$

**ε)** Στο επόμενο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο,  $AD \perp B\Gamma$  και  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ . Να διατάξετε τα μήκη  $AB, A\Gamma, \Delta B, \Delta \Gamma$  από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

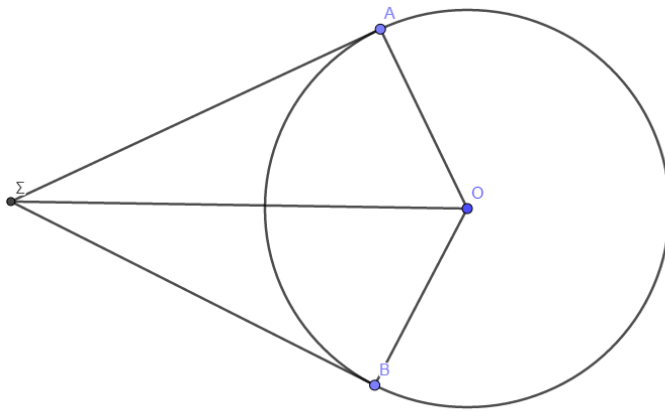


- .....<.....<.....<.....

(15 μονάδες)

A2) Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής:

α) Με βάση το παρακάτω σχήμα λανθασμένη είναι η πρόταση:



- $OA \perp SA$  και  $OB \perp SB$
- $\widehat{ASO} = \widehat{BSO}$
- $\widehat{AOS} = \widehat{BOS}$
- η ευθεία  $SO$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$
- δεν ισχύει καμιά από τις προηγούμενες προτάσεις

β) Δίνονται οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  με  $R > \rho$  και  $K\Lambda = \delta$ . Τότε:

- οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν ισχύει  $\delta = R - \rho$
- οι κύκλοι τέμνονται, αν  $\delta > R + \rho$
- οι κύκλοι είναι ομόκεντροι, αν ισχύει  $\delta = |R - \rho|$
- οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν ισχύει  $\delta = R + \rho$
- δεν ισχύει τίποτα από τα παραπάνω.

γ) Δύο κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$ . Τότε ισχύει ότι:

- $K\Lambda > R + \rho$
- η  $AB$  είναι μεσοκάθετος της  $K\Lambda$
- η  $K\Lambda$  είναι μεσοκάθετος της  $AB$
- $\widehat{KAL} + \widehat{KBL} = 180^\circ$
- το  $KALB$  είναι ρόμβος

δ) Δύο κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$ . Τότε ισχύει ότι:

i)  $K\Lambda = R + \rho$

ii) η  $AB$  διχοτομεί την  $K\Lambda$

iii) τα κοινά εφαπτόμενα τμήματα των κύκλων είναι ίσα και προεκτεινόμενα τέμνονται πάνω στην διάκεντρο

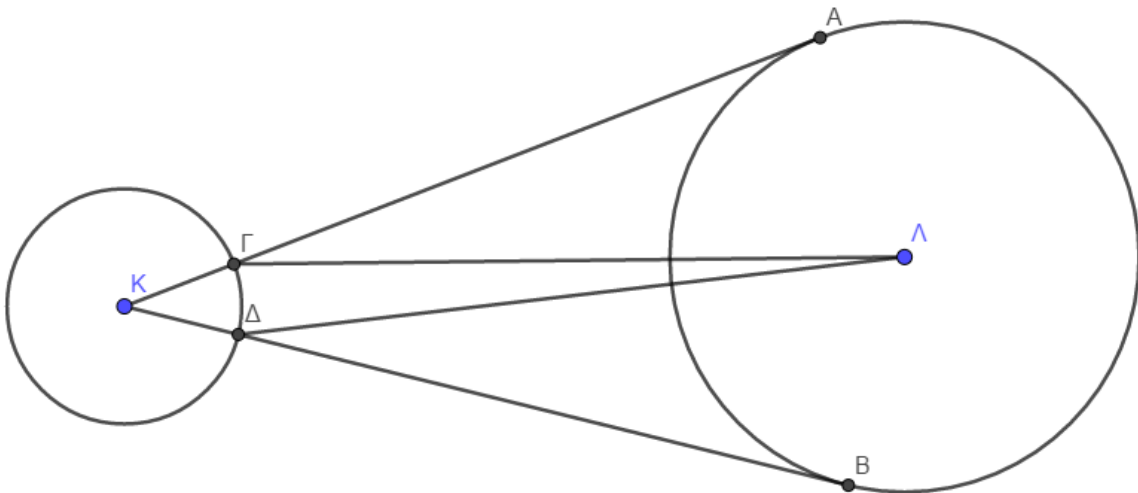
iv)  $K\Lambda > R - \rho$

(10 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Β

**B1)** Να συμπληρώσετε τα κενά στην λύση της παρακάτω άσκησης και να μεταφέρετε την λύση και το σχήμα στο φύλλο διαγωνίσματος.

Άσκηση: Δίνονται δύο κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(\Lambda, R)$  με  $K\Lambda > R + \rho$ . Έστω  $KA$  και  $KB$  τα εφαπτόμενα τμήματα προς τον κύκλο  $(\Lambda, R)$  που τέμνουν τον κύκλο  $(K, \rho)$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι  $\Lambda\Gamma = \Lambda\Delta$



Λύση: Επειδή ..... , κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου. Φέρνουμε τις ακτίνες  $\Lambda A$  και ..... . Τότε  $\Lambda A \perp \dots$  και  $\dots \perp KB$ . Επειδή τα  $KA$  και ..... είναι ..... τμήματα ισχύει ότι .....=.....

Είναι όμως .....=.....=  $\rho$ , οπότε .....=  $\Delta B$  ως διαφορές ίσων τμημάτων. Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ..... και  $\Lambda B \dots$ . Τότε αυτά θα έχουν:

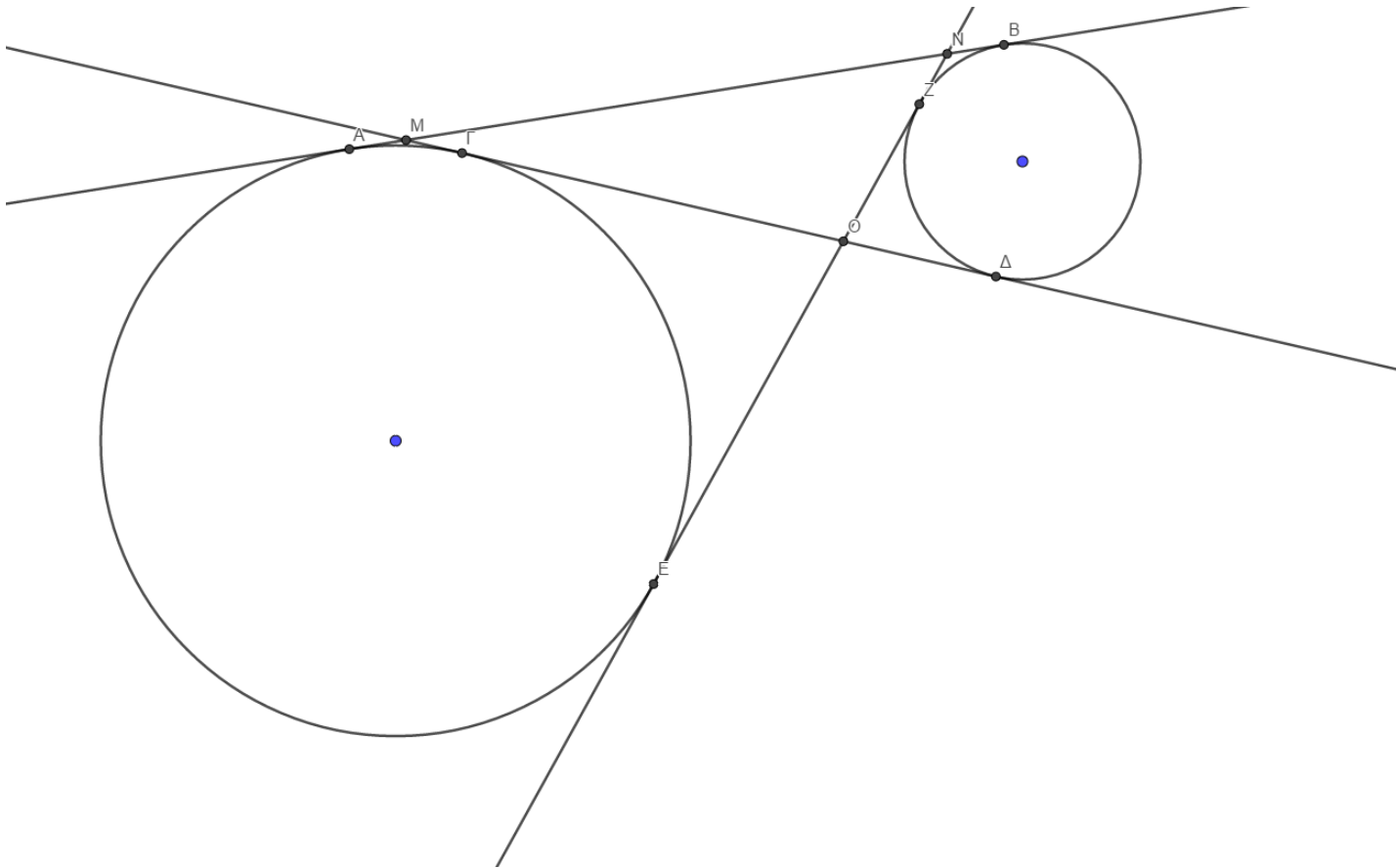
- $\Gamma A = \dots$
- $\dots = \Lambda B$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα  $\Lambda\Gamma = \Lambda\Delta$

(15 μονάδες)

**B2)** Οι εσωτερικές εφαπτομένες  $\Gamma\Delta$  και  $EZ$  δύο κύκλων τέμνουν την κοινή εξωτερική εφαπτομένη  $AB$  στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι  $AM = BN$

(\*ονομάστε με μικρά γράμματα  $\chi, \gamma, \alpha, \beta$  τα ίσα εφαπτόμενα τμήματα πάνω στο σχήμα και χρησιμοποιείτε τα για να περιγράψετε τα υπολοιπα και αλγεβρικά φτάστε στο ζητούμενο)



(10 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Γ

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και μια ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη προς την πλευρά  $A\Gamma$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $E$ . Αν  $M$  το μέσο του τμήματος  $BE$ , να αποδειχθεί ότι:

$\alpha)$   $\Delta M \perp B\Gamma$ ,

$\beta)$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  είναι παράλληλη προς την  $\Delta M$ .

(25 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος  $Ax$  της γωνίας  $\hat{A}$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρνουμε κάθετη στην  $Ax$  στο σημείο  $P$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $K$  και την προέκταση της  $AB$  στο  $\Sigma$ .

Να αποδειχθεί ότι :

**α)**  $A\Sigma = AK$

**β)**  $B\Sigma = \Gamma N$

**γ)**  $2A\Sigma = AB + A\Gamma$

(25 μονάδες)

(\* για το (β) φέρτε βοηθητική ευθεία από το  $\Gamma$  παράλληλη προς την  $AB$  και  $N$  σημείο τομής της παράλληλης με την προέκταση της  $\Sigma K$ )

(Στα θέματα  $\Gamma$  και  $\Delta$  προσμετράται για τον τελικό βαθμό αν το σχήμα είναι ολόσωστο με bonus 5 μονάδες το καθένα)

Καλή επιτυχία!

νέο φροντιστήριο