

 νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ	
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	
	ΤΜΗΜΑ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	

ΘΕΜΑ Α

A₁) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$;

(5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

A₂) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)

A₃) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

A₄) Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

- i. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ
- ii. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο σημείο αυτό. Σ Λ
- iii. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$. Σ Λ
- iv. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
- v. $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x \neq 0\}$ Σ Λ

(10 ΜΟΝΑΔΕΣ)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1}$ και $g(x) = \ln x + 1$

B₁) Να βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες. (6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

B₂) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} (6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

B₃) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

I. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^4-6x^5}{x^3+1}$ (4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

II. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$ (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

III. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ (4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$$

Γ₁) Να αποδείξετε ότι $f(3)=5$ (6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ₂) Να αποδείξετε ότι $f'(3)=6$ (6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ₃) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}$ (6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ₄) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και g με $g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 + 5}, & x > 2 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι:

- Η g παραγωγίζεται στο $x_0 = 2$.
- Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- $h(x) \cdot \eta\mu(h^2(x)) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - f(x)}{x^3 + x} = \alpha + \beta$.
- $|f(x) - \eta\mu x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ₁) Να βρεθούν τα α, β

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Δ₂) Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο 0

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Δ₃) Να βρεθεί το $h(0)$

(5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Δ₄) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{h^4(x) + h^2(x) + 4} - 2}{\eta\mu(h^2(x))}, & x \neq 0 \\ \frac{h(0) + 1}{4}, & x = 0 \end{cases} \quad (6 \text{ ΜΟΝΑΔΕΣ})$$

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ