

|                                                                                                       |                          |                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------|
| <br>VΕΟ φροντιστήριο | ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ | ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ                         |
|                                                                                                       | ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ                | Δελενίκα Μαρία<br>Ζαφείρης Βασίλειος<br>Τσίμος Βασίλειος |
|                                                                                                       | ΤΜΗΜΑ                    |                                                          |
|                                                                                                       | ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ                | Άνω Πατήσια / Κάτω Πατήσια                               |
|                                                                                                       | ΔΙΑΡΚΕΙΑ                 | 3 Ώρες                                                   |

### ΘΕΜΑ Α

A.1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού και να γράψετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (5 Μονάδες)

A.2. Αν μια συνάρτηση  $f$

- Είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ ,

Τότε να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή σε όλο το  $\Delta$ . (8 Μονάδες)

A.3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες»

- Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(7 Μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

- Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει μοναδική λύση.
- Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σε αυτό.
- Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.
- Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  τότε είναι συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ .

v.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$

(5 Μονάδες)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(\ln x) = \frac{e \cdot \ln x}{x}$  για  $x > 0$

B.1. Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

(3 Μονάδες)

B.2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(2+2 Μονάδες)

B.3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης αν υπάρχουν.

(2+2+2 Μονάδες)

B.4. Να βρείτε:

i. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$

(4 Μονάδες)

ii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

(4 Μονάδες)

B.5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^1 f(x) dx$

(4 Μονάδες)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 1$  και
- $(x-1)f''(x) + 2f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  για κάθε  $x > 0$

Γ.1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(6 Μονάδες)

Γ.2. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της.

(6 Μονάδες)

Γ.3. Να αποδείξετε ότι  $f''(1) = \frac{2}{3}$ .

(6 Μονάδες)

Γ.4. Ένα σημείο  $M$  κινείται στην γραφική παράσταση της  $f$  και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $4 \text{ cm/sec}$ . Αν  $A$  είναι η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$  και  $B$  τυχαίο σημείο του  $y'y$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $ABM$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία το  $M$  διέρχεται από το σημείο  $(1, f(1))$

(7 Μονάδες)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 3) \ln x + 2x - 5, x > 0$ .

Δ.1. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 5)

Δ.2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

Δ.3. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$  τέτοιο ώστε:  $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ . Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

Δ.4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} 2xe^{f(\rho_1)}[f(x^2 - 1) - 2x^2 - 7]dx$$

(Μονάδες 4)

Δ.5. Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[1, +\infty)$  να αποδείξετε ότι

$$(x + 1)F'(x) < F'(x^2) - 3x \text{ για κάθε } x > 1$$

(Μονάδες 4)

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ