

Οδηγός Επιτυχίας
ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

νέο φροντιστήριο

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΡΙΓΩΝΑ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

➤ Κριτήρια ισότητας τριγώνων

- 1^ο κριτήριο(Π-Γ-Π) :Αν δυο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.
- 2^ο κριτήριο(Γ-Π-Γ) :Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.
- 3^ο κριτήριο(Π-Π-Π) :Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

➤ Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία ή
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

- Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και ύψος.
- Δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- Τριγωνική ανισότητα
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.
- Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

- Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν:
- δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή
 - δύο εντός ,εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή
 - δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές τότε είναι παράλληλες.

➤ Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

- Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές (180°).
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου σε μοίρες είναι $(2n-4) \cdot 90^\circ$.
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές (360°).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ-ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

➤ Παραλληλόγραμμα

- **Ορισμός:** Παραλληλόγραμμα ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
- **Ιδιότητες:** Ένα παραλληλόγραμμα έχει:
 1. Απέναντι πλευρές ίσες.
 2. Απέναντι γωνίες ίσες.
 3. Διαγωνίους που διχοτομούνται.
- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμα:** Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα αρκεί να δείξουμε ότι έχει:
 1. τις απέναντι πλευρές του παράλληλες ή
 2. τις απέναντι πλευρές του ίσες ή
 3. τις απέναντι γωνίες του ίσες ή
 4. διαγωνίους που διχοτομούνται ή
 5. δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

➤ Ορθογώνιο

- **Ορισμός:** Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμα που έχει μία ορθή γωνία.
- **Ιδιότητες:** Ένα ορθογώνιο έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και δύο επιπλέον:
 1. Όλες του οι γωνίες είναι ορθές.
 2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο:** Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αρκεί να δείξουμε ότι:
 1. έχει τρεις γωνίες ορθές ή
 2. έχει όλες του τις γωνίες ίσες ή
 3. είναι παραλληλόγραμμα με μια ορθή γωνία ή
 4. είναι παραλληλόγραμμα με ίσες διαγωνίους.

➤ Ρόμβος

- **Ορισμός:** Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμα που έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

- **Ιδιότητες:** Ένας ρόμβος έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και τρεις επιπλέον:
 1. Όλες του οι πλευρές είναι ίσες.
 2. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
 3. Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.
 - **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος:** Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αρκεί να δείξουμε ότι:
 1. έχει όλες τις πλευρές του ίσες ή
 2. είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες ή
 3. είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του ή
 4. είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- Τετράγωνο
- **Ορισμός:** τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ρόμβος..
 - **Ιδιότητες:** Ένα τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, τις δύο επιπλέον ιδιότητες του ορθογωνίου και τις τρεις επιπλέον ιδιότητες του ρόμβου.
 - **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο:** Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αρκεί να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον ότι έχει μία ιδιότητα του ορθογωνίου και μία του ρόμβου.
- Τραπεζίο
- **Ορισμός 1:** τραπέζιο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις δύο μόνο απέναντι πλευρές του παράλληλες.
 - **Ορισμός 2:** ισοσκελές τραπέζιο ονομάζεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.
 - **Ορισμός 3:** διάμεσος τραπέζιου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπέζιου.
 - **Ιδιότητες:**
 1. Η διάμεσος του τραπέζιου είναι παράλληλη στις βάσεις του και ισούται με το ημιάθροισμά τους.
 2. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων τραπέζιου είναι παράλληλο στις βάσεις του και ισούται με την ημιδιαφορά τους.
 3. Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοί του είναι ίσες και οι γωνίες που πρόσκεινται στις βάσεις του είναι ίσες.
 - **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ισοσκελές τραπέζιο:** Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο αρκεί να δείξουμε ότι είναι τραπέζιο (έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες) και επιπλέον:
 1. Οτι έχει ίσες διαγωνίους ή

2. Οτι οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- Εφαρμογές των παραλληλογράμμων στα τρίγωνα
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.
 - Αν μία ευθεία είναι παράλληλη σε μία πλευρά τριγώνου και διέρχεται από το μέσο μίας άλλης πλευράς του τότε θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.
 - Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα, αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 - Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του είναι 30° τότε η απέναντι κάθετη ισούται με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα, αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας τότε η απέναντι οξεία γωνία είναι 30° .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

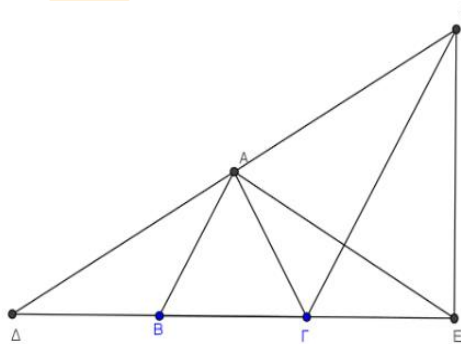
ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.
- Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.
- **Ορισμός:** Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου και ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τετραπλεύρου.
- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο(Ο, R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
 1. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
 2. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.
- **Ορισμός:** Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.
- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
 1. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
 2. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

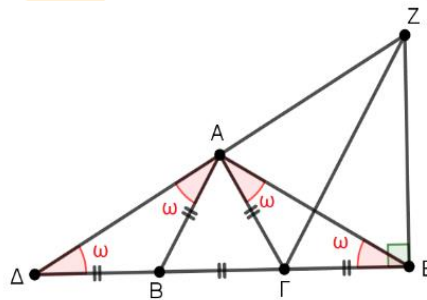
3. Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.
 - Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του $A E$.
 - Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.



ΛΥΣΗ:



- Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 60^\circ$. Οι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$ είναι παραπληρωματικές των $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$, αντίστοιχα. Άρα είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Επίσης, ισχύει ότι $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα (λόγω του Π-Γ-Π) και ισοσκελή. Αν συμβολίσουμε με ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους, τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Delta$ βρίσκουμε: $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 60^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$.
- Είναι $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Άρα $\Gamma A \perp \Delta A$, οπότε $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = 90^\circ$. Τα τρίγωνα $A\Gamma Z$ και $\Gamma E Z$:
 - Είναι ορθογώνια, με ορθές τις $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z}$ και $\hat{\Gamma}\hat{E}\hat{Z}$.
 - Έχουν τη ΓZ κοινή πλευρά.

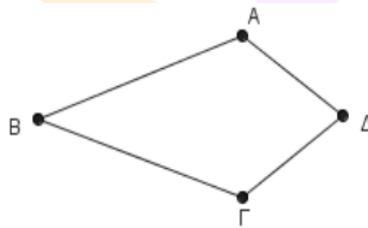
• Έχουν $AG = GE$. Άρα τα τρίγωνα AGZ και GEZ έχουν κοινή υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά, ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα. Οπότε $ZA = ZE$ (καθώς είναι η άλλη κάθετη πλευρά τους). Επομένως το Z ισαπέχει από τα A και E , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του AE . Επειδή $GA = GE$, το G ισαπέχει από τα A και E , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του AE . Επομένως, η GZ είναι η μεσοκάθετος του AE .

- γ. Από την ισότητα των τριγώνων GAZ και GEZ προκύπτει ότι $\hat{A}GZ = \hat{E}GZ$, καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AZ και EZ . Οπότε η GZ είναι διχοτόμος της AE . Άρα $\hat{A}GZ = \frac{\hat{AGE}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

Άρα $\hat{A}GZ = \hat{BAG}$, οπότε οι ευθείες AB και GZ που τέμνονται από την AG σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{A}GZ$ και $\hat{BAG}$ ίσες. Άρα $AB \parallel GZ$.

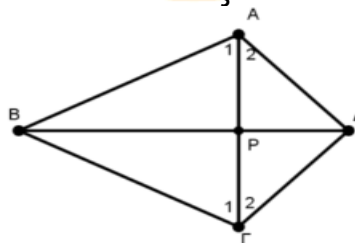
2. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.
- Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

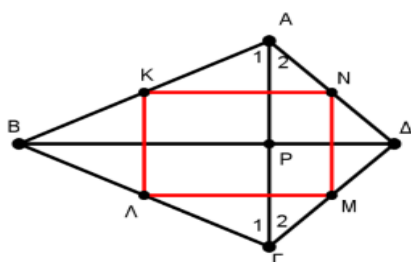


ΛΥΣΗ:

- α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $BA = B\Gamma$ οπότε είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Από υπόθεση είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, οπότε θα είναι και $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$ ως διαφορά ίσων γωνιών. Συνεπώς το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



- β. Ονομάζουμε P το σημείο τομής των $A\Gamma$ και $B\Delta$. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ έχουν:
- $A\Delta = \Delta\Gamma$, από το ερώτημα α.
 - $B\Delta$, κοινή πλευρά
 - $AB = B\Gamma$, από υπόθεση.
- Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα οπότε έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις $A\Delta = \Delta\Gamma$, δηλαδή θα είναι $\hat{A}B\Delta = \hat{\Gamma}B\Delta$. Άρα στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η BP είναι διχοτόμος, οπότε είναι και ύψος. Ισχύει δηλαδή $\hat{APB} = 90^\circ$, οπότε $B\Delta \perp A\Gamma$.



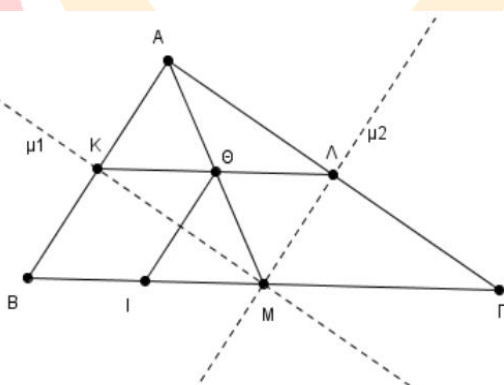
- γ. Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχως. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Άρα $ΚΝ \parallel \frac{ΒΔ}{2}$ (1). Όμοια, στο τρίγωνο ΓΒΔ είναι $ΛΜ \parallel \frac{ΒΔ}{2}$ (2). Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $ΚΝ \parallel ΛΜ$, οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΚΛ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ (3). Επειδή $ΑΓ \perp ΒΔ$, από τις (1), (3) συμπεραίνουμε ότι $ΚΛ \perp ΚΝ$, δηλαδή $\hat{ΝΚΛ} = 90^\circ$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία ορθή γωνία, άρα είναι ορθογώνιο.

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ_1 , μ_2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ της ΒΓ.

α. Να αποδείξετε ότι:

- I. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^\circ$
- II. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- III. $ΛΜ = \frac{ΒΓ}{4}$, όπου Μ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ.

β. Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.



ΛΥΣΗ:

α.

- I. Το σημείο Μ ανήκει στις μεσοκαθέτους μ_1 , μ_2 των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οπότε ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Γ, δηλαδή είναι $ΜΑ = ΜΒ$ (1) και $ΜΑ = ΜΓ$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ΜΒ = ΜΓ$, άρα το Μ είναι μέσο της ΒΓ και ισχύει $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος του ΑΜ ισούται

με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$.

II. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ έχει τρεις γωνίες ορθές, την γωνία $\hat{K\hat{A}L}$ από το I. ερώτημα και τις γωνίες $\hat{A\hat{L}M}$ και $\hat{A\hat{K}M}$ λόγω των μεσοκαθέτων μ_2 και μ_1 των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Οπότε το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.

III. Επειδή το ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του ΑΜ και ΚΛ είναι ίσες και διχοτομούνται και Θ είναι το κέντρο του. Οπότε είναι

$$\Lambda\Theta = \frac{KL}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \text{ αφού είναι } KL = AM \text{ και } AM = \frac{B\Gamma}{2}.$$

β. Στο τρίγωνο ΑΒΜ, τα Κ, Θ είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΜ αντίστοιχα. Οπότε είναι $K\Theta \parallel BM$ άρα είναι $K\Theta \parallel BI$ (3). Επίσης είναι

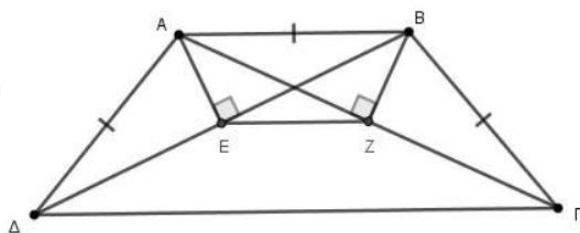
$$K\Theta = \frac{BM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \text{ αφού } M \text{ μέσο του } B\Gamma \text{ και επειδή το σημείο } I \text{ είναι το}$$

$$\text{μέσο του } BM \text{ θα είναι } BI = \frac{BM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}. \text{ Άρα θα είναι } K\Theta = BI \text{ (4).}$$

Οπότε, το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΚΘ και ΒΙ, ίσες και παράλληλες (σχέσεις (3) και (4)).

4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

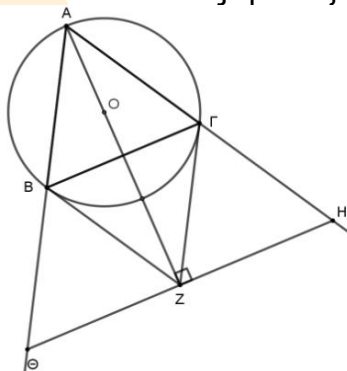
- Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
- $AE = BZ$.
- Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.



ΛΥΣΗ:

- Επειδή $AD = AB$, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΑΕ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ε είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, επειδή $AB = B\Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΒΖ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

- β. Τα τρίγωνα ABE και ABZ είναι ορθογώνια, αφού από υπόθεση είναι $AE \perp BD$ και $BZ \perp AG$, και έχουν:
- AB κοινή πλευρά
 - $AZ = BE$, ως μισά των ίσων διαγωνίων AG, BD του ισοσκελούς τραπέζιου. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και ABZ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και την άλλη κάθετη πλευρά τους ίση, δηλαδή $AE = BZ$ (1).
- γ. Τα σημεία E και Z είναι μέσα των διαγωνίων του τραπέζιου ABΓΔ, άρα θα ισχύει ότι $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$. Επειδή είναι $\hat{A}\hat{E}Z = 90^\circ + \hat{B}\hat{E}Z$ και $\hat{B}\hat{Z}E = 90^\circ + \hat{A}\hat{Z}E$ θα είναι $\hat{A}\hat{E}Z + \hat{B}\hat{Z}E > 180^\circ$. Επομένως, οι AE και BZ δεν είναι παράλληλες. Άρα, το τετράπλευρο AEZB είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο δυο πλευρές του παράλληλες. Επειδή είναι $AE = BZ$ (λόγω της (1)) προκύπτει ότι το τραπέζιο AEZB είναι ισοσκελές.
- δ. Επειδή το τρίγωνο AΔB είναι ισοσκελές με βάση την BD, ισχύει ότι: $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{A}\hat{B}\Delta$ (2). Ισχύει επίσης ότι $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{B}\hat{\Delta}\Gamma$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB, ΓΔ που τέμνονται από την BD. Άρα από τις (2), (3) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B}\hat{\Delta}\Gamma$, δηλαδή η BD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.
5. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z, να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο ZBΓ είναι ισόπλευρο.
 - Το τετράπλευρο ΑΓZB είναι ρόμβος.
 - Το τετράπλευρο BΓHΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



ΛΥΣΗ:

- Είναι $ZB = Z\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Z προς τον κύκλο. Άρα το τρίγωνο ZBΓ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου ABΓ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα τόξα AB, BΓ και ΓΑ και αφού είναι γωνίες 60° , τότε τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι τόξα 120° το καθένα. Η γωνία $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{A} = 60^\circ$ (γωνία από τη χορδή BΓ και την εφαπτομένη ΓZ ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής). Οπότε, το ισοσκελές τρίγωνο BΓZ έχει μία γωνία ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρο.

- α. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma Z$ έχουμε: $\Gamma B = \Gamma Z = ZB$ (1). Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ βρίσκουμε: $A\Gamma = AB = \Gamma B$ (2). Από (1), (2) προκύπτει: $A\Gamma = AB = \Gamma Z = ZB$, δηλαδή το τετράπλευρο $A\Gamma ZB$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.
- β. Ισχύει ότι: $\bullet \Theta H \perp AZ$, από υπόθεση και $\bullet B\Gamma \perp AZ$, γιατί είναι διαγώνιοι του ρόμβου $A\Gamma ZB$ και τέμνονται κάθετα. Άρα $B\Gamma \parallel \Theta H$ αφού είναι κάθετες στην ίδια ευθεία AZ . Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο αφού $B\Gamma \parallel \Theta H$ και οι $\Theta B, H\Gamma$ δεν είναι παράλληλες γιατί τέμνονται στο A . Επίσης:
- $\bullet \hat{\Theta} = \hat{B} = 60^\circ$ και
 - $\bullet \hat{H} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $B\Gamma \parallel \Theta H$ τεμνόμενων από $A\Theta$ και AH αντίστοιχα. Άρα το τραπέζιο $B\Gamma H\Theta$ είναι ισοσκελές γιατί οι γωνίες της βάσης του BH είναι ίσες.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$ (Μονάδες 13)

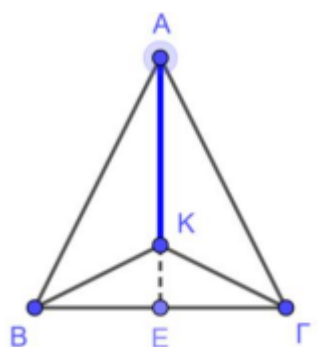
β) $AD < DB$ (Μονάδες 12)

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE . (Μονάδες 12)



3. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD = AB$ και $AE = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την ED στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

(Μονάδες 7)

ii. $Z\Delta = \frac{EA}{2}$

(Μονάδες 6)

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD=\frac{1}{3} AB$ και $AE=\frac{1}{3} A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα BDM και $ME\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

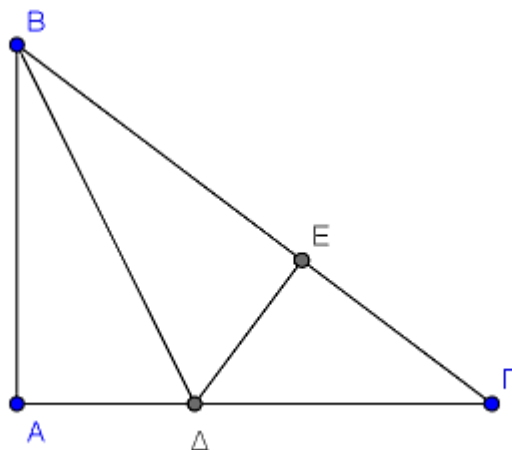
γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

5. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η BD είναι διχοτόμος της γωνίας B , η DE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$ (Μονάδες 8)

β) $AD < D\Gamma$ (Μονάδες 9)

γ) $A\Gamma > AB$ (Μονάδες 8)

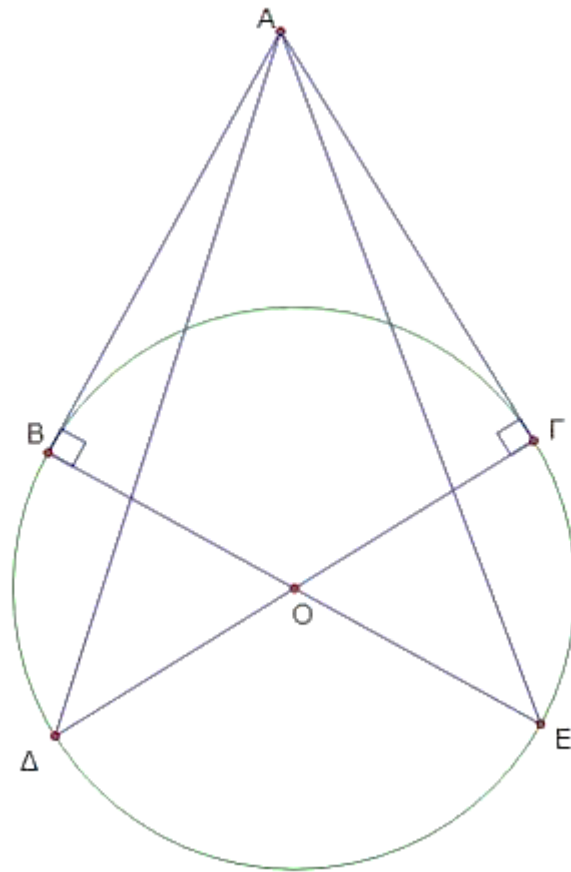


6. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

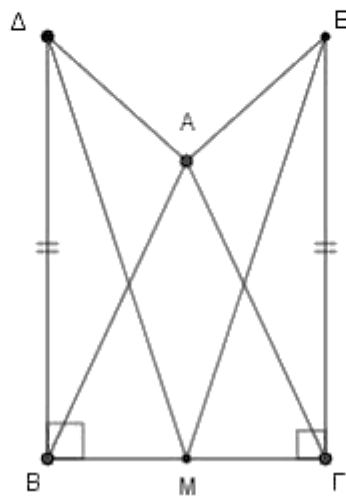
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ όπως στο σχήμα, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
- α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) $A\Delta = AE$. (Μονάδες 13)



8. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

(Μονάδες 15)

β) $\widehat{K\Lambda} > \widehat{A\Lambda K}$.

(Μονάδες 10)

9. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και

$\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

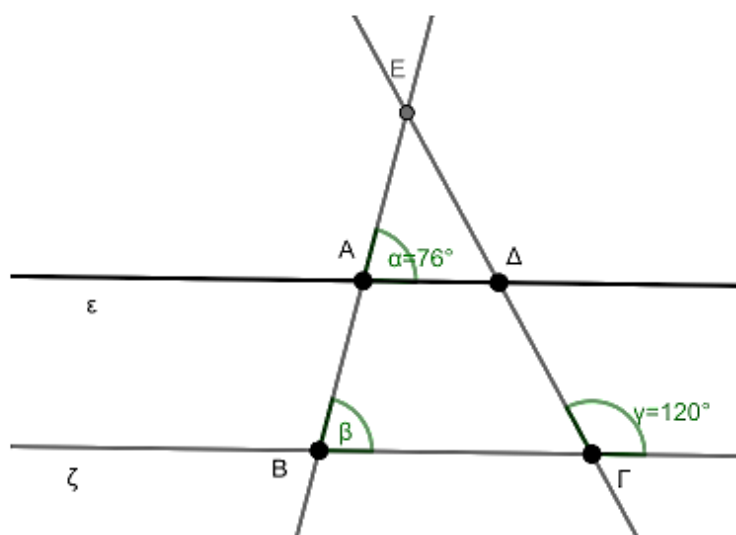
(Μονάδες 5)

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου $E\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 8)



10. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται

εσωτερικά.

(Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι

τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

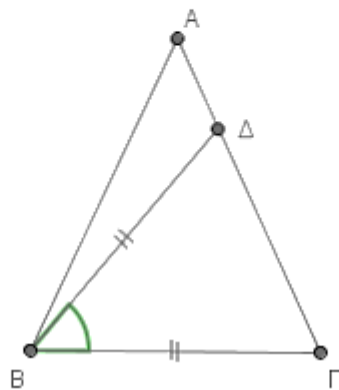
(Μονάδες 7)

11. Δίνονται δύο κύκλοι $(K,3)$ και $(\Lambda,8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

- α) $KL = 13$. (Μονάδες 5)
 β) $KL = 2$. (Μονάδες 5)
 γ) $KL = 5$. (Μονάδες 5)
 δ) $KL = 11$. (Μονάδες 5)
 ε) $KL = 9$. (Μονάδες 5)

12. Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς AG , τέτοιο ώστε $BD=BG$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{DB\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



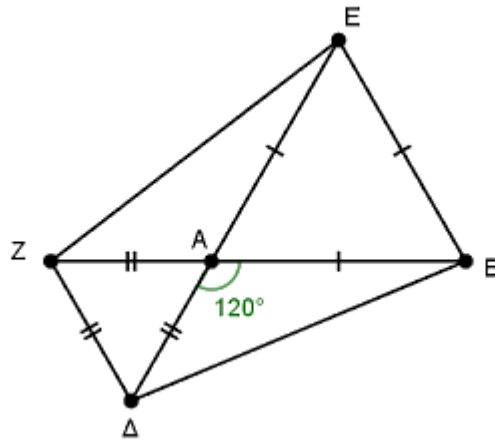
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)
 β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την AG στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A\Delta E}$, $\hat{E\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 13)

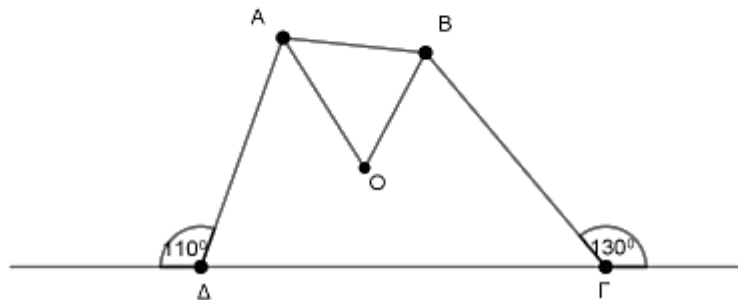
14. Εστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\hat{AEB}$ και $\hat{AZ\Delta}$.

Να αποδείξετε ότι:

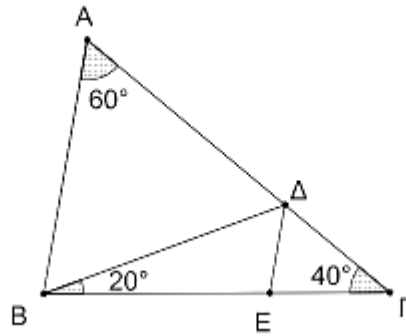
- α) Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
 β) Το τμήμα DZ είναι παράλληλο στο BE . (Μονάδες 12)



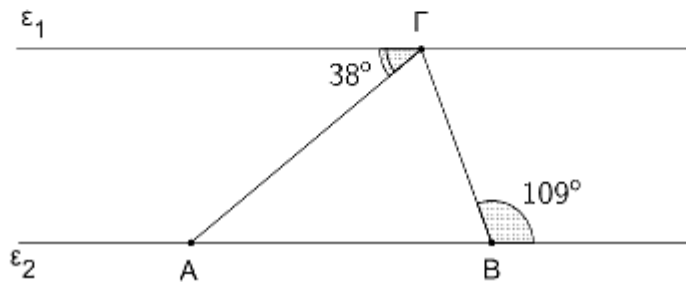
15. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, η εξωτερική γωνία της Γ , ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του A και B τέμνονται στο O τότε, να υπολογίσετε:
- α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)
- β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 9)
- γ) το μέτρο της γωνίας AOB . (Μονάδες 7)



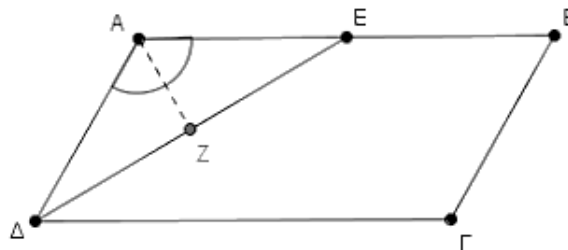
16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma\Delta} = 20^\circ$.
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)
- β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:
- i. $\hat{B\Delta E} = 60^\circ$. (Μονάδες 8)
- ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 7)



17. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:
- α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)
- β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)



18. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE . Να αποδείξετε ότι:
- α) γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}E = 30^\circ$. (μον.10)
- β) $AZ = \frac{AB}{4}$ (μον.15)

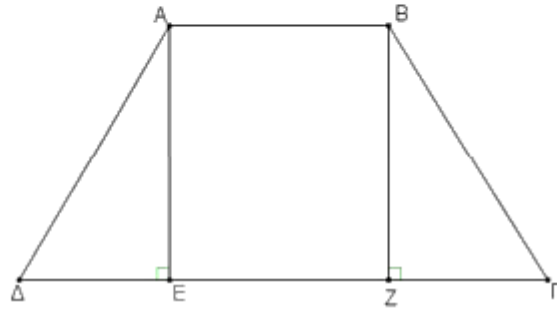


19. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$. (Μονάδες 12)

β) $AZ = BE$. (Μονάδες 13)



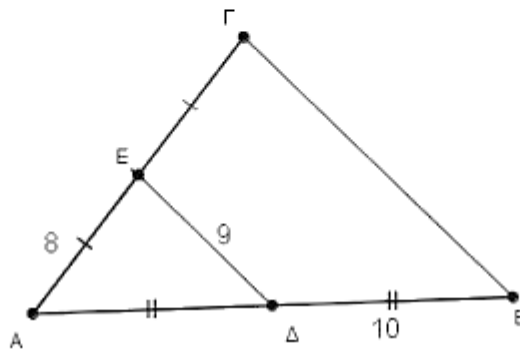
20. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE=8$, $E\Delta=9$ και $\Delta B=10$.

α) Να αποδείξετε οι $B\Gamma$ και DE είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $DE\Gamma B$.

(Μονάδες 9)



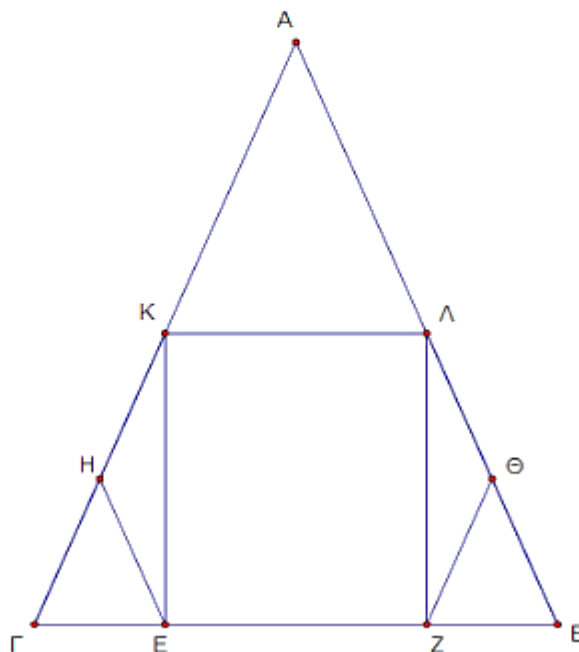
21. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

22. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AG και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $\triangle KE\Gamma$ και $\triangle \Lambda ZB$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)
β) $EH=Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma, \Lambda B$ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



23. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπέζιου,
α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 12)
β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου. (Μονάδες 13)
24. Από το μέσο M της διαμέσου $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:
α) το Z είναι μέσο της $A\Gamma$. (Μονάδες 10)
β) το AE ισούται με το $\frac{1}{4}$ του $A\Gamma$. (Μονάδες 15)

25. Σχεδιάζουμε γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Oδ της γωνίας $\widehat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο M στην Oδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\hat{O}y$.

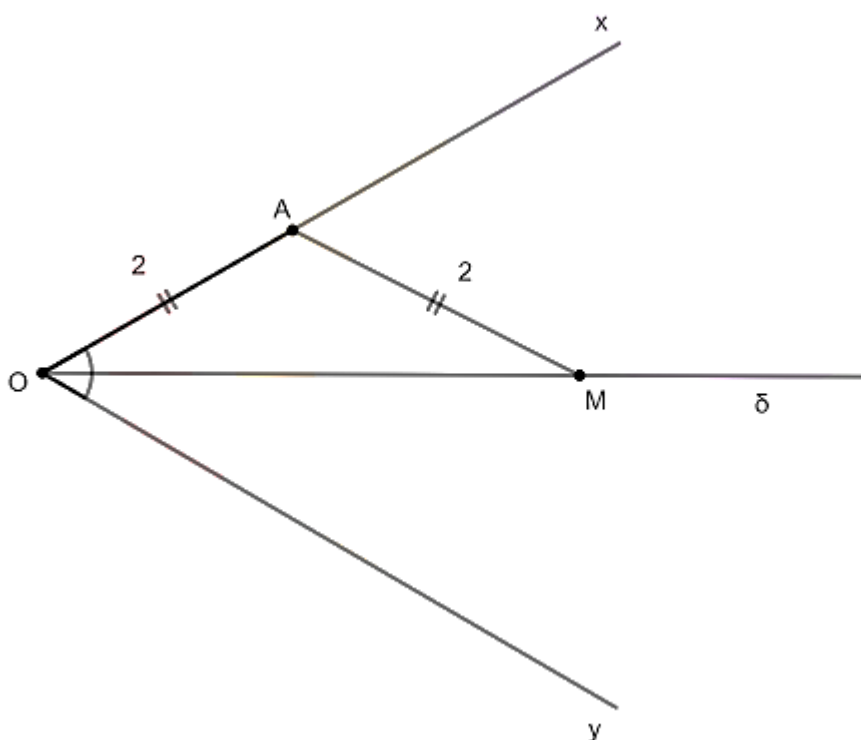
(Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM.

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM.

(Μονάδες 10)



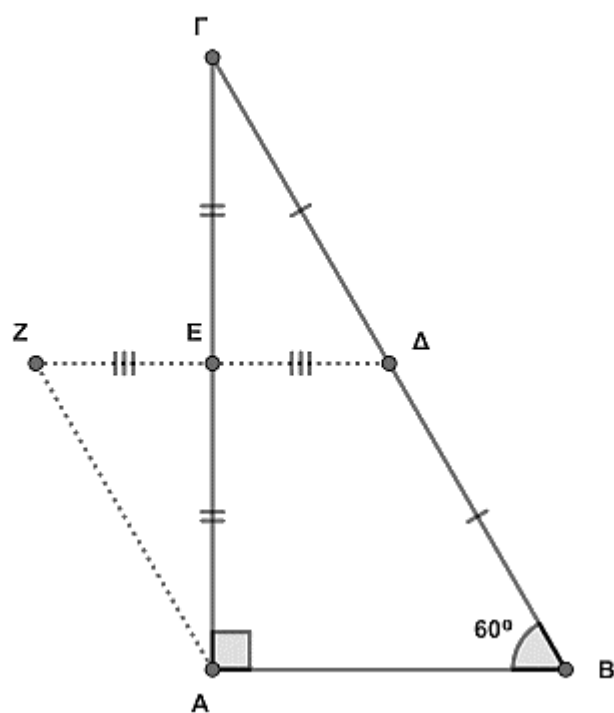
26. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\widehat{A}=90^\circ$ και $\widehat{B}=60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα $EZ=DE$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=AZ$.

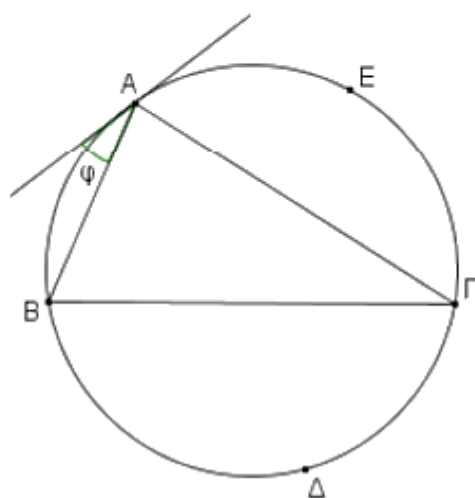
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.

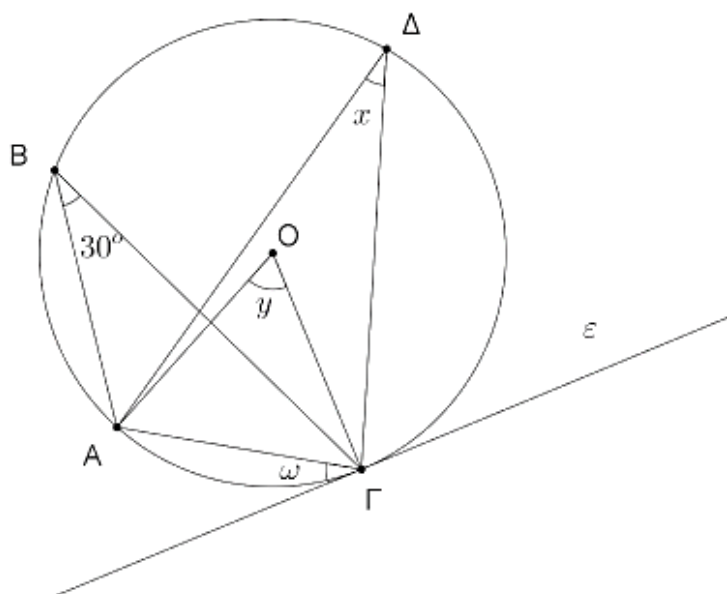
(Μονάδες 13)



27. Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\phi=30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\widehat{ΒΔΓ}$ είναι 160° ,
 α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)
 β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{ΑΕΓ}$. (Μονάδες 7)



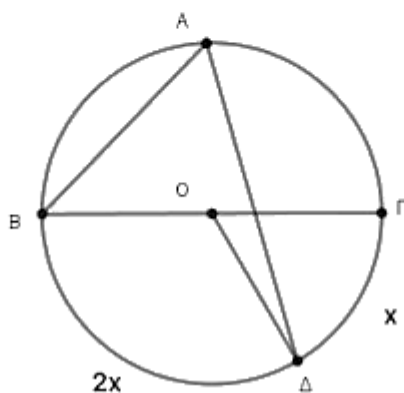
28. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)
- β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



29. Έστω κύκλος κέντρου O και διάμετρος του $B\Gamma$. Θεωρούμε σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

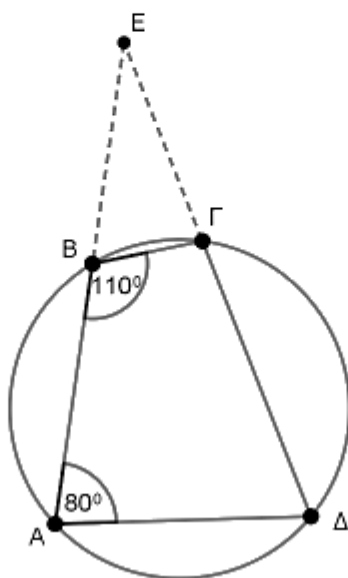
- α) το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$ (Μονάδες 8)
- β) τη γωνία $BO\Delta$ (Μονάδες 9)
- γ) τη γωνία $BA\Delta$ (Μονάδες 8)



30. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) το μέτρο της γωνίας $E\Gamma B$. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας $BE\Gamma$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4

31. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $P\Gamma E$ στα σημεία A , και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$

(Μονάδες 6)

II. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

(Μονάδες 8)

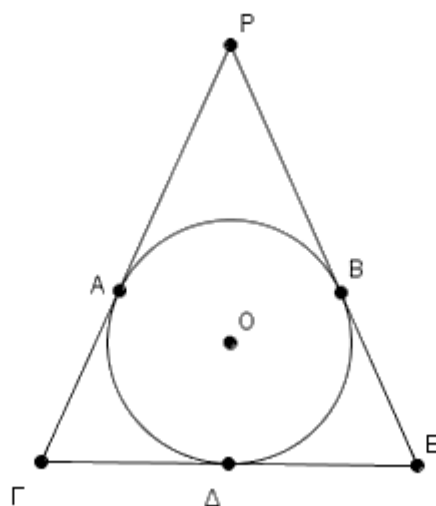
β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

II. Τα σημεία P , O και Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)



- 32.** Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

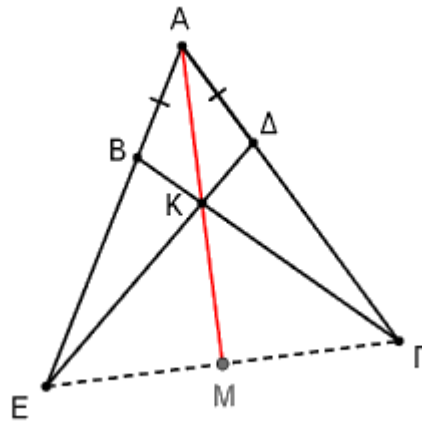
Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- β) $PA = PB$. (Μονάδες 8)
- γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$. (Μονάδες 7)

- 33.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα DE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την EG στο M .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)
- β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)
- γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A . (Μονάδες 6)
- δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της EG . (Μονάδες 6)



34. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $\widehat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην $\Delta\Gamma$ ώστε $DE=BD$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

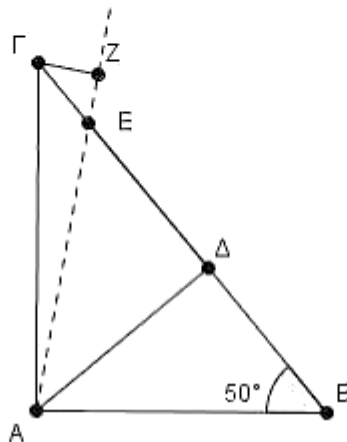
(Μονάδες 6)

- ii. $\widehat{\Gamma\hat{A}E} = 10^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

(Μονάδες 9)



35. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.

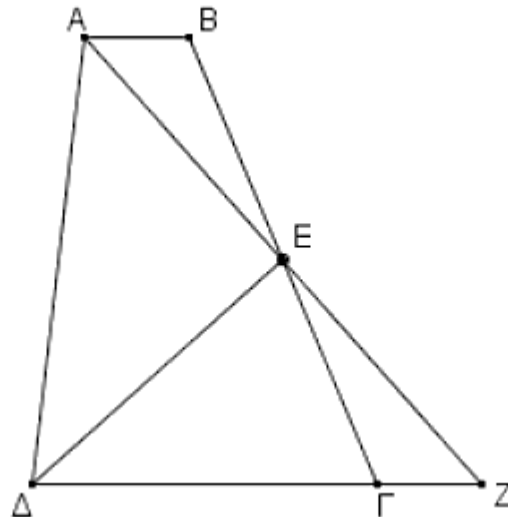
(Μονάδες 7)

β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$

(Μονάδες 10)

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου.

(Μονάδες 8)

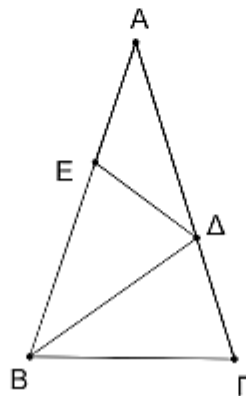


36. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AD = BD = BG$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$. (Μονάδες 6)
- ii. $\hat{A} = 36^\circ$. (Μονάδες 6)
- iii. Το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



37. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)
- β) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\Delta x$ και $AB\gamma$ τέμνονται σε σημείο M . (Μονάδες 6)
- γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB . (Μονάδες 10)
- δ) αν η διχοτόμος της γωνίας $B\Delta x$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $AB\gamma$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$. (Μονάδες 5)

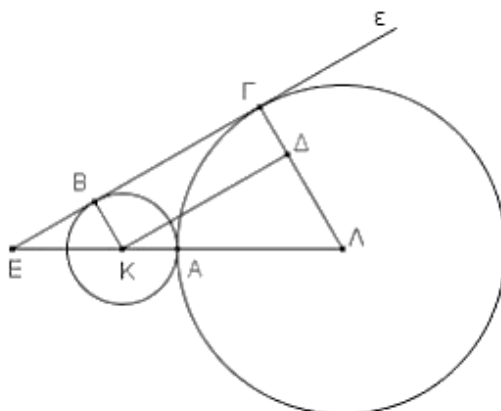
38. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι 30° . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 8)

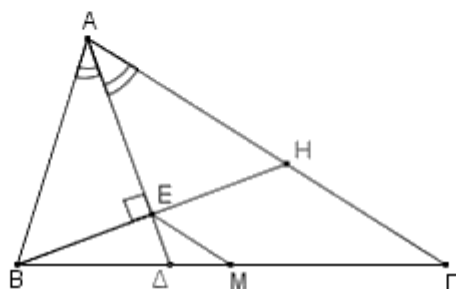


39. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $EM \parallel H\Gamma$ (Μονάδες 8)

γ) $EM = (A\Gamma - AB)/2$ (Μονάδες 8)



40. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και AG αντίστοιχα.

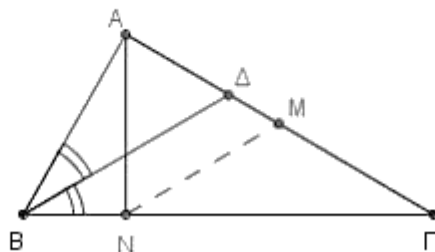
Να αποδείξετε ότι:

- α) $AH=AD=AE$ (Μονάδες 10)
 β) Η γωνία EHD είναι ορθή (Μονάδες 8)
 γ) Τα σημεία A , E και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 7)

41. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle B = 2\angle \Gamma$, και η διχοτόμος BD της γωνίας B . Από το μέσο M της AG φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο BD που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
 β) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
 γ) $AN \perp B\Gamma$ (Μονάδες 10)



42. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)
 ii. $\Gamma\Delta = AD + B\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

(Μονάδες 9)

43. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB=2A\Delta$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 γ) Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ZH\Gamma}$. (Μονάδες 8)

44. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Έστω Θ είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE .

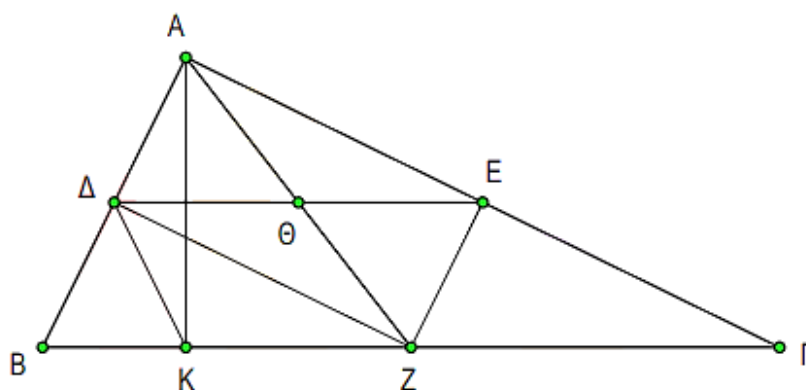
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)

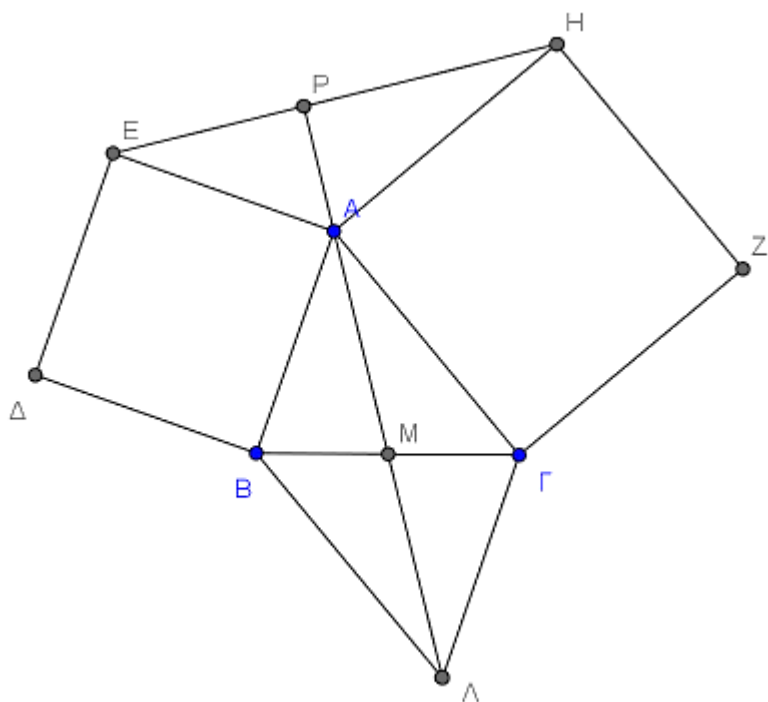
γ) Αν επιπλέον είναι γωνία $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$,

- i. να βρείτε τη γωνία $\widehat{AZB}$. (Μονάδες 5)
 ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 5)



45. Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

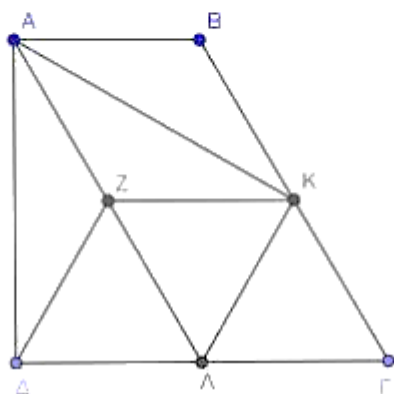
- α) $\Gamma\Lambda = AE$. (Μονάδες 10)
 β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda$ και $E\Lambda H$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)
 γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH . (Μονάδες 5)



46. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) με ΒΓ = ΓΔ = 2ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΔ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το Z είναι μέσο του ΑΛ. (Μονάδες 6)
- β) ΒΓ = 2 ΔΖ. (Μονάδες 6)
- γ) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)
- δ) $\hat{A\dot{K}\Lambda} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)



47. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και $B = 2\Gamma$. Φέρουμε το ύψος του AD και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE = BD$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 9)

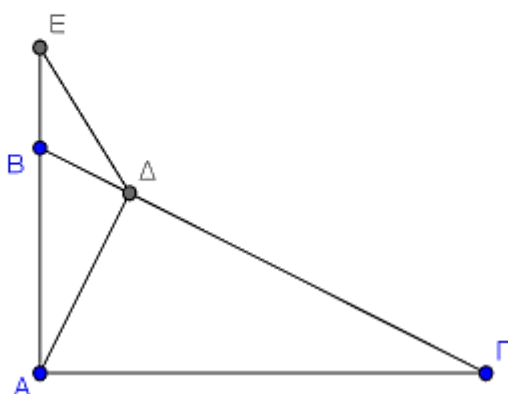
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

(Μονάδες 8)

ii. $AE = \Gamma\Delta$

(Μονάδες 8)



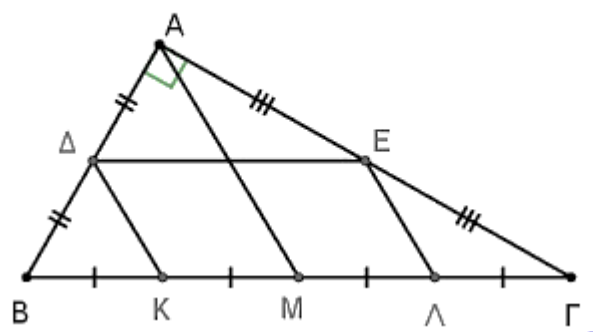
48. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}B\Gamma$.

(Μονάδες 12)



49. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και AG , το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και AG αντίστοιχα.

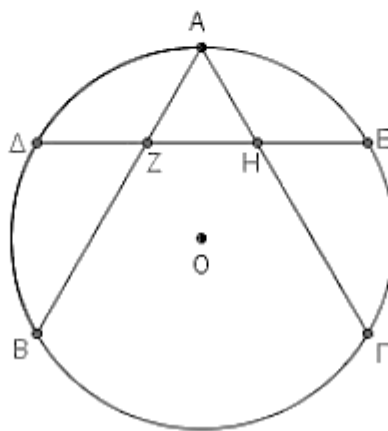
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABG είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους. (Μονάδες 10)

γ) Η χορδή DE τριχοτομείται από τις χορδές AB και AG .

(Μονάδες 7)



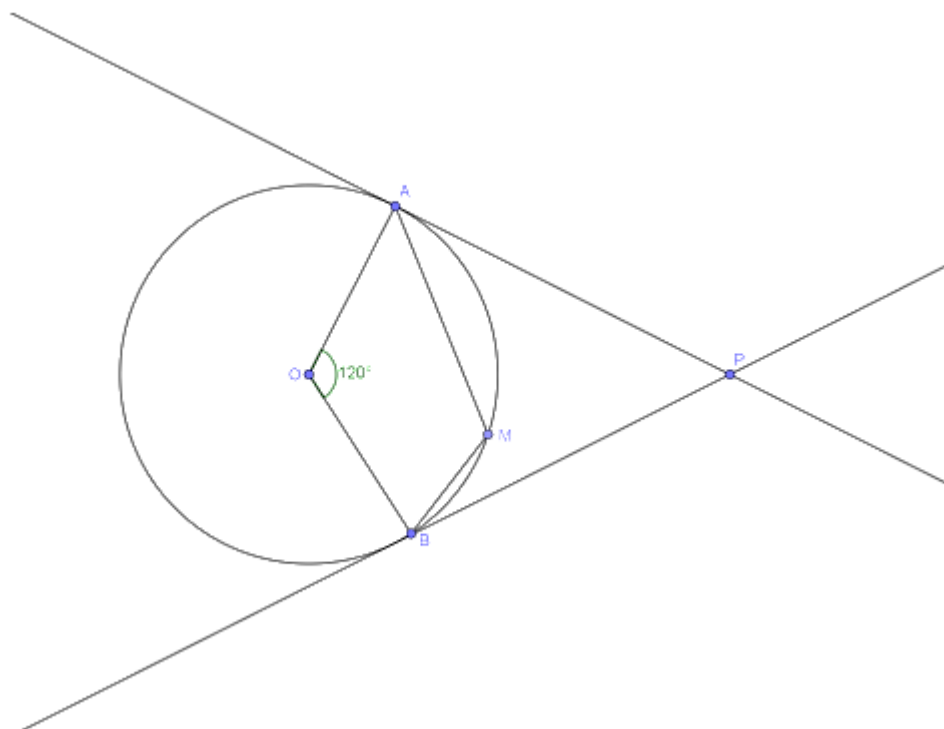
50. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ ίση με 120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$. (Μονάδες 11)

γ) Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$; (Μονάδες 5)



51. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD , BE τα ύψη του.

Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2 ED$.

(Μονάδες 6)

β) $\hat{B}E\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$.

(Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο $AEDB$ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 6)

δ) $\hat{A}BE = \hat{A}\Delta E$.

(Μονάδες 6)

