

 νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΖΑΦΕΙΡΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΤΣΙΜΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΔΕΛΕΝΙΚΑ ΜΑΡΙΑ
	ΤΜΗΜΑ	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	ΚΑΤΩ ΠΑΤΗΣΙΑ / ΑΝΩ ΠΑΤΗΣΙΑ
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = (x)' = 1$ (6 μονάδες)

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ; (4 μονάδες)

Γ. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (5 μονάδες)

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος

- Αν μια συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν είναι αδύνατη.
- Αν δυο συναρτήσεις είναι ίσες τότε ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D_f$
- Για να ορίζονται το πηλίκο δυο συναρτήσεων f και g θα πρέπει μόνο τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία .
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.
- Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(2x5=10μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Α. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{|x-2|}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x^3 - 6x^2 + 9}{-6x^3 + 8x - 12}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{(x+1)^2}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 - x^2 + x + 3}{2x^2 + 7x + 8}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^3} \eta\mu(e^x + \ln \frac{x^2-1}{x})$

(12μονάδες)

Β. Αν $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 - \beta(x+1) + 3, & x < 3 \\ (2a - 3\beta^2)x + 5\beta^2 + 1, & x \geq 3 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

(8 μονάδες)

Γ.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x-1)^2(x+3) + (x+2)^2(x-3) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,3)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{2006}+2006}{x-1} + \frac{x^{2024}+2024}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (1,2)

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Α . Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x^4 \cdot \ln x - e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu t$

ii. $f(x) = \frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 8$

iv. $f(x) = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

v. $(x) = \frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\ln 5 - 5e^e + \frac{7}{8}$

(8 μονάδες)

B. Αν $f(x) = \begin{cases} a + \eta\mu x & , x \leq 0 \\ \beta x + \sqrt{x^2 + 9} & , x > 0 \end{cases}$

- i. Να βρείτε τις τιμές των α, β αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$
- ii. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(-\pi)$, $f'(4)$, , $f'(0)$

(7 , 5 μονάδες)

Γ. Αν $\sin x - 1 \leq f(x) \leq x \cdot \eta\mu x$ για κάθε $x \in (-1,1)$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f'(0) = 0$

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2-x} + 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

- i. Να βρείτε την παράγωγο $f'(0)$
- ii. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$
- iii. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2022$

(3 , 4 . 4 μονάδες)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a - \ln x$, της οποίας η C_f διέρχεται από το $A(1,2)$.

- α. Να αποδείξετε ότι $a = 2$
- β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ. Να εξετάσετε, αν οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = \ln \frac{e^2}{x}$ είναι ίσες.
- δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_h με $h(x) = 2 + \ln^2 x$.

(3 , 3 , 4 , 4 μονάδες)

Καλή διασκέδαση....