

Οδηγός Επιτυχίας
ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

νέο φροντιστήριο

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
5. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
8. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ EULLER:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \right]$$

Ταυτότητα του Euler υπό συνθήκη: Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
2. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
3. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
4. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
5. $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
6. Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
7. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Ορισμός: $|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$

Άμεσες συνέπειες ορισμού

1. $|a| = |-a| \geq 0$
2. $|a| \geq \pm a$
3. $|a|^2 = a^2$
4. Αν $\theta \geq 0$, τότε
 - $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
 - $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.
2. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Η απόσταση $d(\alpha, \beta)$ δυο αριθμών α, β ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

Από τον ορισμό της απόστασης προκύπτει:

- Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορισμός: Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α , συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός, που όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α .

➤ Μπορούμε επομένως να πούμε ότι αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt[n]{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = \alpha$.

Συνέπειες ορισμού:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε: $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$ και $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε: $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$

Ιδιότητες Ριζών

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$
2. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \beta \neq 0$

- Ακόμα ισχύουν: αν $\alpha, \beta \geq 0$ και κ θετικός ακέραιος $\sqrt[n]{\alpha^k} = (\sqrt[n]{\alpha})^k$ και $\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Ορισμός: Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, μ άρτιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $|\alpha|^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^{\nu} = \alpha$

- Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\alpha > 0$ και ν **περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$.
- Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\alpha > 0$ και ν **άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$.
- Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\alpha < 0$ και ν **περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
- Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\alpha < 0$ και ν **άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Ισχύει ότι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δυο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ Vieta

Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , έχουμε:

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ έχουμε τους τύπους

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ $a \neq 0$ με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής: $x^2 - Sx + P = 0$.

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει την δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές και πρόσημο τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$

Για το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ ισχύει

- Αν $\Delta > 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου. Επιπλέον για το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x)$ ισχύει:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	⊖ του α	⊖ του α	ομόσημο του α

- Αν $\Delta = 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma = a\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, όπου $-\frac{\beta}{2\alpha}$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου. Επιπλέον για το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x)$ ισχύει:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	⊖	ομόσημο του α

- Αν $\Delta < 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$

Σε αυτή την περίπτωση το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται. Για το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x)$ ισχύει:

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

- Ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$ (σύνολο θετικών ακεραίων).

➤ Αριθμητική πρόοδος:

➤ $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$ (τύπος ν-οστού όρου αριθμητικής προόδου)

➤ Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$

➤ Ο αριθμός β λέγεται αριθμητικός μέσος των α, γ .

Είναι $S_n = \frac{n}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_n)$ και $S_n = [2\alpha_1 + (n - 1)\omega] \cdot \frac{n}{2}$ (Άθροισμα n πρώτων αριθμών αριθμητικής προόδου)

- Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος** αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε **μη μηδενικό αριθμό**. Τον αριθμό αυτό συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγος της προόδου**.

- $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$ (N-ιοστός όρος)
- Τρεις **μη μηδενικοί αριθμοί** α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
 - Τον θετικό αριθμό $\sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο των α και γ .
- Με $\lambda \neq 1$ έχω: $S_n = \frac{\alpha_1(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1}$ (**Άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου**)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- **Συνάρτηση** από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B . Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης και το συμβολίζουμε με $\text{me}f(A)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Για την συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ισχύει:

- Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται **σε ένα ακριβώς** στοιχείο του B
- Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B .

➤ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $A(\alpha, \beta)$ ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου.

Οι αριθμοί α, β λέγονται **συντεταγμένες** του A . Ο αριθμός α λέγεται **τετμημένη** και ο αριθμός β **τεταγμένη** του σημείου A .

- Το **συμμετρικό** του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\Delta(\alpha, -\beta)$ που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Το **συμμετρικό** του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(-\alpha, \beta)$ που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη.

- Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $\Gamma(-\alpha, -\beta)$ που έχει αντίθετες συντεταγμένες.
- Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο $A'(\beta, \alpha)$ που έχει τετμημένη την τεταγμένη του A και τεταγμένη την τετμημένη του A.

➤ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δυο σημεία η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

➤ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$

Συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ε (συμβολίζουμε με λ_ε ή απλά λ) ορίζουμε την εφαπτομένη της θετικής γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega, \text{ όπου } 0^\circ \leq \omega < 180^\circ$$

Η **γραφική παράσταση της** $f(x) = ax + \beta$ είναι μια ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$ και έχει **κλίση** $\lambda = a$.

Τέλος αν $\omega = 90^\circ$, δηλ η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, **δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης**.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

1. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

(Μονάδες 13)

2. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

3. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B + \Gamma = 23.$$

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \text{ και } \sqrt[6]{6}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

4. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$.

(Μονάδες 13)

5. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{a^{22} \cdot (\beta^3)^8}{a^{-2} \cdot (a\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

6. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

7. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \quad (\text{Μονάδες 12})$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ (Μονάδες 13)

8. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

9. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

- 10.** Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 13)

- 11.** Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

- 12.** Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

- 13.** α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)

14. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

15. Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

16. α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

(Μονάδες 12)

17. Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}.$$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

(Μονάδες 8)

18. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

(Μονάδες 9)

19. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

20. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$ (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

21. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

22. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

23. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

24. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0. \quad (\text{Μονάδες 15})$$

25. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}, \quad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B
(Μονάδες 13)

26. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).
(Μονάδες 13)

27. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.
(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)

28. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.
(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.
(Μονάδες 10)

29. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

(Μονάδες 15)

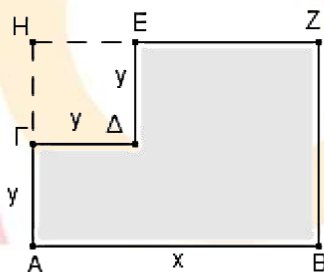
30. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

31. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

32. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

33. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2 \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

34. α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

35. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

36. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (Μονάδες 10)

37. α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

38. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

39. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

40. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

41. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x, 2x+1, 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

42. Οι αριθμοί $x+6, 5x+2, 11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

43. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

44. Δίνεται μία πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

(Μονάδες 13)

45. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

46. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \dots$

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

(Μονάδες 13)

47. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 7)

48. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$

(Μονάδες 12)

49. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

(Μονάδες 8)

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

51. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$ (Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. (Μονάδες 5)

52. Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g

διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

53. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ (Μονάδες 10)

54. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

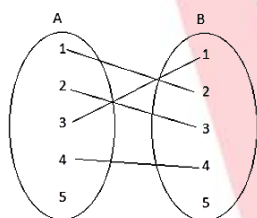
β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

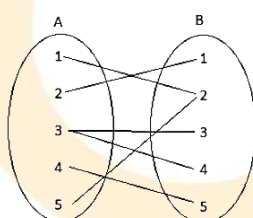
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

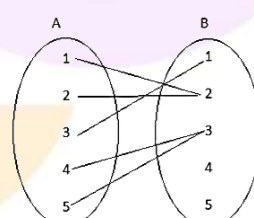
57. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

ΘΕΜΑ 4

58. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right|$.

(Μονάδες 6)

59. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

60. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x^2 + (2\lambda+3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1), \text{ με παράμετρο } \lambda \neq -2.$$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 12\lambda + 25$$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση :

$$(x_1+x_2-1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

61. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha+1)x + 4+\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16.$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

62. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

63. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ .

(Μονάδες 10)

64. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

65. Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - 5x + a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|a| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς,

που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $a = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

(Μονάδες 10)

66. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

67. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες

τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$ (Μονάδες 9)

68. Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$. (Μονάδες 7)

- 69.** α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13 \text{ cm}$
- Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$. (Μονάδες 5)
 - Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)
 - Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm . (Μονάδες 10)

- 70.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
 - Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)

- 71.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
 - Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:
 - Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$. (Μονάδες 9)
 - Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$. (Μονάδες 9)

- 72.** Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.
- Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

73. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της.

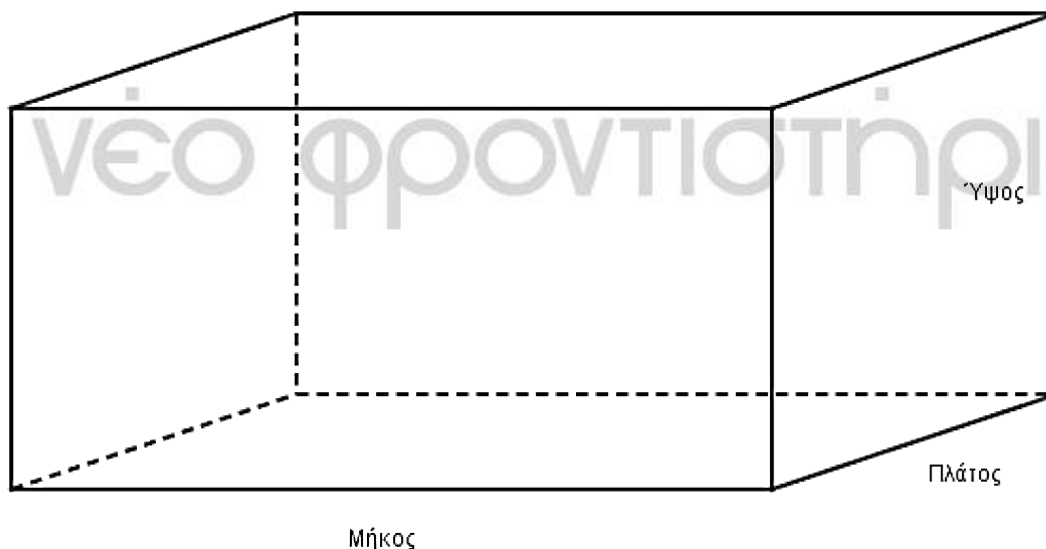
(Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 .

(Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

(Μονάδες 8)



74. Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha - \beta = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^2$ να αποδείξετε ότι:

i. $A = 2\alpha + 2\beta$

(Μονάδες 8)

ii. $A > 4\sqrt{\alpha\beta}$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν επιπλέον $\alpha\beta = 6$ να βρείτε τους αριθμούς α και β .

(Μονάδες 6)

75. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

76. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

77. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$.

(Μονάδες 6)

78. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να

προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

(Μονάδες 10)

79. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 9)
- β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

80. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:
 $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)
- γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:
 $d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$. (Μονάδες 8)

81. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)
- β) Για $\alpha = 1$,
- i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)
- ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

82. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

83. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

84. Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι:
 $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$ (Μονάδες 10)

85. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18 \quad (\text{Μονάδες 5})$$

86. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

87. α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 < x$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$ (Μονάδες 7)

88. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

89. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

90. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

91. α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$ (Μονάδες 6)

92. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε

το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

93. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$ (Μονάδες 7)

94. Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

(Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0 \quad (\text{Μονάδες 7})$$

95. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B;

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$.

(Μονάδες 9)

96. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

97. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (a_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$a_1 = x, \quad a_2 = 2x^2 - 3x - 4, \quad a_3 = x^2 - 2, \quad \text{όπου } x \in \mathbb{Z},$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$.

(Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

98. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το n° όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

99. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 3n - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

100. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

101. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B . (Μονάδες 8)

102. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$

και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

103. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$. (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

104. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)
- γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

105. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)
- γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:
- (i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)
- (ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

106. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

- α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x . (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:
- $$f(2,999) \cdot f(-1,002)$$
- (Μονάδες 7)
- γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:
- $$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$
- (Μονάδες 8)

107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 5)

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

109. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο